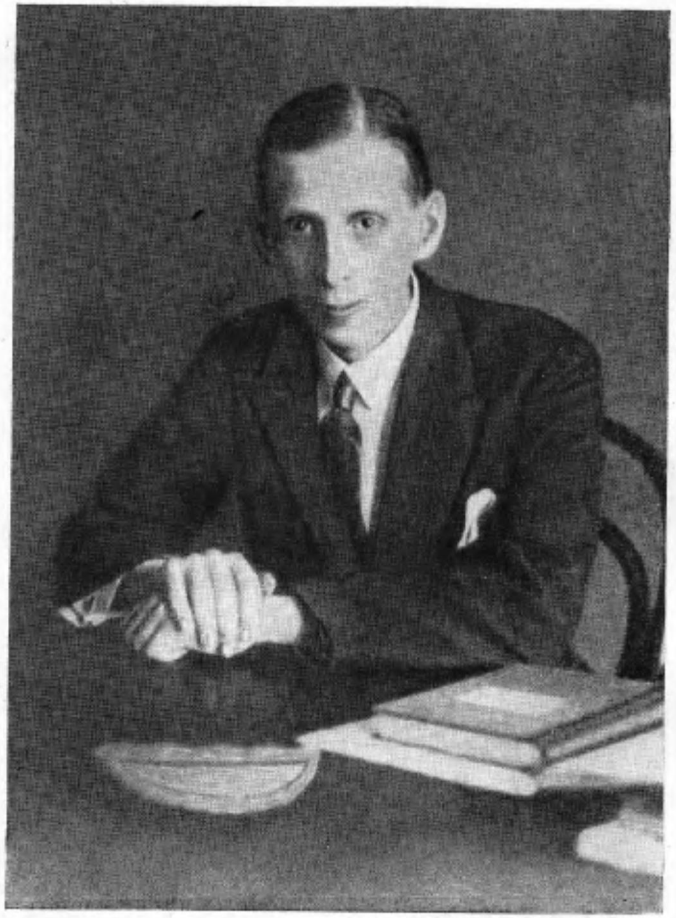
И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ

Б

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вступительная статья
и редакция
акад. В. И. СМИРНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957



И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемая вниманию читателя книга выдающегося русского математика И. А. Лаппо-Данилевского содержит все его основные работы по теории функций от матриц и ее приложениям к исследованию линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В основу книги положено полное собрание сочинений И. А. Лаппо-Данилевского, опубликованное в 1934—36 гг. в „Трудах физико-математического института имени В. А. Стеклова" на французском языке и подготовленное к печати академиками Н. Е. Кочиным и В. И. Смирновым. В настоящем издании из полного собрания сочинений исключено два мемуара, „Аналитическое продолжение рядов композиций" и „Разложение по степеням параметра", которые не являются необходимыми при чтении основных работ И. А. Лаппо-Данилевского.

В конце книги помещена речь И. А. Лаппо-Данилевского, произнесенная им при защите диссертации.

Перевод с французского выполнен И. П. Мысовских. Общая редакция осуществлялась акад. В. И. Смирновым. Им же написана вступительная статья.

Акад. В. И. Смирнов

РАБОТЫ И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКОГО ПО ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Иван Александрович Лаппо-Данилевский родился 28 октября (н. ст.) 1896 г. в Петербурге. Его отец, А. С. Лаппо-Данилевский, известный историк, был профессором Петербургского университета и действительным членом Академии наук. Он скончался в 1919 г. Все детство И. А. прошло под большим влиянием отца, который очень ценил математику и интересовался ею. Первоначальные сведения по математике И. А. получил у своего отца. Брат И. А. был талантливым художником, не успевшим проявить своего яркого дарования. Он скончался в 1920 г. в возрасте 22 лет. После его смерти была издана посвященная его творчеству небольшая книжка. Мать И. А., Елена Дмитриевна, пережила своего мужа и своих сыновей и скончалась в Ленинграде во время блокады.

Последние годы жизни И. А. — те годы, когда он был полон творческих замыслов, были и годами его тяжелой неизлечимой болезни сердца, и только благодаря исключительной заботе матери и жены он смог выполнить ту громадную научную работу, результаты которой доставили ему мировую известность. В 1914 г. И. А. поступил в университет, но вскоре заболел и совсем отошел от занятий математикой. Но, по-видимому, где-то в глубине его никогда не затухал живой интерес к тем математическим проблемам, о которых он думал, будучи еще мальчиком. В 1916 г. И. А. был лишен возможности продолжать образование вследствие обострения болезни и только в 1922 г. он начал опять заниматься математикой. В 1924 г. был восстановлен в качестве студента Ленинградского государственного университета, окончил его в 1925 г. и был оставлен при университете. Сразу же после этого И. А. написал работу об алгорифмическом определении алгебраической функции по заданному характеру ее разветвлений в заданных точках. В этой работе указанная задача была приведена к интегральным уравнениям. Но работа не удовлетворила автора и осталась ненапечатанной. С 1927 г. И. А. начал заниматься общей теорией функций, определяемых линейными дифференциальными уравнениями с рациональными коэффициентами, и с этого времени непрерывно появляется ряд его работ, выдвинувших его в первые ряды математических исследователей. В 1929 г. он блестяще защитил диссертацию. С осени этого же года он читал в университете специальный курс, посвященный изложению своей собственной теории. Осенью 1930 г. И. А. уехал за границу, получив Рокфеллеровскую стипендию, и 15 марта 1931 г. умер в Гиссене. Последние годы его жизни, вплоть до самой смерти, были полны интенсивной творческой работы.

В январе 1931 г. И. А. был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. Некоторая часть работ была напечатана при жизни И. А., но бо́льшая часть осталась в рукописях, которые были присланы, после его смерти, вдовою И. А. из Гиссена в Академию наук СССР. Они были тщательно изучены и были опубликованы после некоторой редакции покойным академиком Н. Е. Кочиным и мною на французском языке в Трудах Физико-математического института им. В. А. Стеклова. На основе работ, опубликованных самим И. А., и его рукописей мы составили полное собрание его трудов в систематическом порядке, начиная с изложения теории функций от матриц, созданной им и лежащей в основе всей его теории систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Это полное собрание трудов содержит тринадцать мемуаров и двенадцать небольших заметок.

Перейдем к более подробной характеристике основных работ И. А. Лаппо-Данилевского.

Проблемы интегрирования линейных дифференциальных уравнений занимали математиков еще в XVIII в. Затем в XIX в. построение Коши теории функций комплексного переменного дало возможность обосновать всю теорию линейных дифференциальных уравнений на твердом аналитическом фундаменте и построить ту обширную теорию, которая сейчас называется аналитической теорией линейных дифференциальных уравнений. Задачей этой теории является исследование функций комплексного переменного, определяемых линейными дифференциальными уравнениями с аналитическими коэффициентами. Здесь надо упомянуть прежде всего блестящие по результатам и глубокие по идеям работы Римана по теории функций, непосредственно связанные с линейными дифференциальными уравнениями. Необходимо добавить к этому, что значительно раньше Гаусс в некоторых своих письмах высказывает идеи, которые потом были воплощены в аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Начало современной теории линейных уравнений принято видеть в мемуарах Фукса, которые появились в 60-х годах XIX столетия. В этих мемуарах Фукс следующим образом формулирует основную задачу теории: „При настоящем положении знания в теории дифференциальных уравнений ставится задача, состоящая не в том, чтобы привести заданное дифференциальное уравнение к квадратурам, но больше в том, чтобы получить из самого дифференциального уравнения представление о поведении его интегралов для всех точек плоскости, т. е. для всех значений независимого переменного".

Фукс дает в своих работах ряд общих результатов и подробно рассматривает тот случай, когда особые точки дифференциального уравнения удовлетворяют некоторым определенным условиям, которые позволяют весьма просто написать разложение решений вблизи особой точки. Эти особые точки называются обычно регулярными особыми точками. В случае одного дифференциального уравнения порядка n:

$$w^{(n)}+p_1(x)\,w^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,w'+p_n(x)\,w=0 \tag{1}$$

эти точки характеризуются тем условием, что каждый коэффициент $p_k(x)$ имеет в рассматриваемой особой точке $x=a$ полюс порядка не выше k. Фукс показал, что вблизи такой точки n линейно независимых решений уравнения (1) могут быть представлены, вообще говоря, в виде

$$w=(x-a)^{\rho}\,[a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots] \qquad (a_0\neq 0). \tag{2}$$

В исключительных случаях к этому разложению надо добавить слагаемые, которые представляются произведением степеней $\lg(x-a)$ на выражения вида (2). Число ρ в разложении (2) определяется из обычного алгебраического уравнения, а коэффициенты a_k определяются последовательно из уравнений первой степени.

После работ Фукса появился целый ряд работ, посвященных аналитической теории линейных уравнений, и можно сказать, что этот отдел математического анализа привлек максимальное внимание всех выдающихся математиков второй половины XIX в. Мы не можем входить в сколько-нибудь подробное описание многочисленных работ и упомянем лишь о некоторых основных проблемах, непосредственно связанных с работами И. А. Лаппо-Данилевского.

Решения уравнения (1) будут, как правило, многозначными функциями в окрестности особой точки $x=a$. В решении, данном Фуксом, многозначность вполне характеризуется множителем $(x-a)^{\rho}$ (ρ есть, вообще говоря, не целое число). Второй множитель в выражении (2) является регулярной функцией в точке $x=a$, так что множитель $(x-a)^{\rho}$ содержит в себе всю особенность решения в точке $x=a$. В общем случае полярности любого порядка у коэффициентов или наличия существенной особенности вместо решения вида (2) будет иметь место решение

$$w=(x-a)^{\rho}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(x-a)^k. \tag{3}$$

Здесь второй множитель содержит, вообще говоря, бесчисленное множество членов с отрицательными степенями и имеет в точке $x=a$ существенно особую точку, но при этом остается однозначным вблизи этой точки. В данном случае уже нельзя последовательно определять коэффициенты a_k и строить конечное алгебраическое уравнение для ρ. В работах Коха показано, что коэффициенты a_k вполне определяются из некоторой бесконечной системы линейных однородных уравнений первой степени, коэффициенты которых содержат ρ. Приравнивая нулю бесконечный определитель этой системы, мы получаем уравнение для определения ρ. Пуанкаре в своих работах об асимптотических разложениях показал, что в рассматриваемом случае или, лучше сказать, в простейшем из рассматриваемых случаев можно формально удовлетворить уравнению выражением вида

$$w=e^{\frac{\alpha}{x-a}}(x-a)^{\rho}\,[a_0+a_1(x-a)+\ldots], \tag{4}$$

где числа α, ρ и коэффициенты a_k определяются из простых алгебраических уравнений, но при этом оказывается, что бесконечный ряд, содержащийся в выражении (4), будет, вообще говоря, расходящимся, и выражение (4) имеет лишь тот смысл, что оно позволяет изучить поведение некоторого решения дифференциального уравнения, когда x стремится к a по определенному лучу или в некотором секторе.

Вообще, если мы возьмем какие-нибудь n линейно независимых решений уравнения (1) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и, аналитически продолжая эти решения, обойдем вокруг особой точки $x=a$, то в результате обхода получим новые решения того же уравнения, которые должны выражаться линейным образом через прежние решения (точку $x=a$ мы всегда считаем полюсом или существенно особой точкой коэффициентов уравнения):

$$\left.\begin{aligned} y_1^+ &= v_{11}y_1+v_{12}y_2+\ldots+v_{1n}y_n,\\ y_2^+ &= v_{21}y_1+v_{22}y_2+\ldots+v_{2n}y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n^+ &= v_{n1}y_1+v_{n2}y_2+\ldots+v_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Можно короче сказать, что решение $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в результате обхода вокруг особой точки умножается на квадратную таблицу чисел $V=\|v_{ik}\|$. Положим, что коэффициенты уравнения (1) суть рациональные функции от x с полюсами $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Проведем из точек a_s на бесконечность линии l_s так, чтобы они не пересекались друг с другом, и разрежем плоскость комплексного переменного x вдоль этих линий. На разрезанной таким образом плоскости некоторое решение уравнения $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ будет выражаться регулярными и однозначными функциями. При обходе вокруг каждой особой точки a_s это решение умножится на некоторую квадратную таблицу чисел V_s. Обратный обход приведет к умножению на таблицу V_s^{-1}, обратную V_s в обычном смысле слова, каким принято пользоваться в алгебре. При любом аналитическом продолжении с возвращением в исходную точку, которое равносильно нескольким обходам вокруг различных точек a_s в различных направлениях, мы получим решение $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, умноженное последовательно на таблицы V_s или V_s^{-1}. В этом смысле говорят, что таблицы V_s образуют группу монодромии уравнения (1). Очевидно, что эти таблицы характеризуют многозначность взятого решения. Кроме многозначности, решение может иметь в особых точках a_s и однозначную существенную особенность. В выражении (4), построенном Пуанкаре, эта особенность должна была бы заключаться в множителе $e^{\frac{\alpha}{x-a}}$. Но, как было уже выше упомянуто, ряд, входящий в это выражение, будет расходящимся, и таким образом решение Пуанкаре, строго говоря, не может характеризовать ни разветвления, ни существенной особенности на плоскости комплексного переменного вблизи особой точки. В предыдущем мы коснулись двух основных проблем: проблемы представления решения вблизи особой точки уравнения и проблемы построения таблиц, производящих группу монодромии. К этому надо присоединить еще основную задачу о построении генерального представления решения уравнения (1), т. е. о таком представлении решения, которое бы годилось при любом аналитическом продолжении этого решения. Кроме того, самим Пуанкаре была поставлена задача о характере зависимости группы уравнения от тех параметров, которые входят в коэффициенты уравнения. Все упомянутые проблемы суть так называемые прямые проблемы теории дифференциальных уравнений. К ним надо добавить еще и основную обратную проблему, поставленную Риманом. В этой последней проблеме вопрос идет об определении системы функций по заданным разветвлениям этих функций в заданных точках плоскости. На языке линейных уравнений вопрос сводится к построению дифференциального уравнения по заданной его группе монодромии и при заданных особых точках. Эта обратная задача представляет еще бóльшие трудности, чем упомянутые выше прямые задачи.

До работ И. А. Лаппо-Данилевского указанные выше прямые задачи не имели полного и отчетливого решения. В большинстве случаев дело сводилось лишь к некоторой характеристике искомых функций или к указанию на тот путь, который принципиально дает решение задачи. Для большинства задач решений в явной форме не было. Такое положение дела еще в бóльшей мере относится к обратным задачам, решение которых представляет несравненно бóльшие трудности, по сравнению с решением прямых задач. Несмотря на такое неполное решение даже основных задач, к началу XX в. замечается некоторое охлаждение интереса к теории линейных уравнений. Старые методы кажутся уже вполне исчерпанными и назревает необходимость создать какой-то существенно новый метод, который позволил бы продвинуться вперед и оживил всю теорию.

Таким поворотным пунктом в теории систем линейных дифференциальных уравнений и явились работы И. А. Лаппо-Данилевского. Он рассматривал системы уравнений первого порядка, решенные относительно производных

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)\,y_1 + p_{21}(x)\,y_2 + \ldots + p_{n1}(x)\,y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{1n}(x)\,y_1 + p_{2n}(x)\,y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\,y_n,\end{array}\right\} \tag{6}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые функции и $p_{ik}(x)$ — заданные коэффициенты — аналитические функции x. Решение системы (6) представляется совокупностью n линейно-независимых решений:

$$\left.\begin{array}{l}y_{11}(x),\ y_{12}(x),\ \ldots,\ y_{1n}(x) \\ y_{21}(x),\ y_{22}(x),\ \ldots,\ y_{2n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}(x),\ y_{n2}(x),\ \ldots,\ y_{nn}(x)\end{array}\right\} \tag{7}$$

В этой таблице первый значок указывает на номер решения, а второй — на номер функции. Коэффициенты системы $p_{ik}(x)$ образуют так же, как и решение (7), квадратную таблицу или, как говорят, матрицу. Пользуясь обычными определениями произведения матриц и дифференцирования матрицы и обозначая через $Y(x)$ матрицу (7) и через $P(x)$ — матрицу коэффициентов, мы можем записать систему (6) в виде

$$\frac{dY(x)}{dx} = Y(x)\,P(x). \tag{8}$$

Решение $Y(x)$ зависит от матрицы коэффициентов, и основной идеей работ И. А. Лаппо-Данилевского является применение теории функций от матриц как аппарата для исследования системы (8). Но ко времени появления работ И. А. Лаппо-Данилевского упомянутая теория была лишь в зачаточном состоянии, и первым его делом было построение такой теории. Большое внимание он обратил на теорию степенных рядов от одной или нескольких матриц. В последнем случае получалось существенное осложнение ввиду некоммутативности матриц. Рассматриваются и функции от бесконечной последовательности матриц, что также имеет применения в теории систем дифференциальных уравнений. Кроме степенных рядов от матриц с численными коэффициентами, рассматриваются также ряды следов матриц и ряды матриц и следов. Для простоты письма мы ограничимся случаем функции от одной матрицы X. Если имеется численная функция $a(X)$, обладающая свойством $a(SXS^{-1}) = a(X)$, где S — любая матрица с определителем, отличным от нуля (скалярная инвариантная функция), и если $a(X)$ есть регулярная функция элементов X в окрестности нулевой матрицы, то она представима, как доказывается, в виде „ряда следов матрицы X“:

$$a(X) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\nu}\sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu \\ \mu_1\geqslant 0;\ \ldots;\ \mu_\lambda\geqslant 0}} \sigma(X^{\mu_1})\,\sigma(X^{\mu_2})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda},$$

где $\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda}$ — численные коэффициенты и через $\sigma(Y)$ обозначен след матрицы Y, т. е. сумма ее диагональных элементов. Написанный ряд может сходиться для любой матрицы X, и тогда его сумма называется целой функцией.

Всякий сходящийся степенной ряд матрицы X с численными коэффициентами

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu$$

есть матрица, и имеет место очевидная формула

$$f(SXS^{-1})=Sf(X)S^{-1}.$$

Эти формулы могут иметь место или для матриц X, находящихся в некоторой окрестности нулевой матрицы, или для всех матриц X (целая функция). Число α_0 есть диагональная матрица, главная диагональ которой состоит из чисел α_0.

Положим, что элементы некоторой матрицы Z суть регулярные функции элементов X в некоторой окрестности нулевой матрицы, так что мы можем написать $Z=F(X)$. Положим, кроме того, что $F(X)$ удовлетворяет соотношению

$$F(SXS^{-1})=SF(X)S^{-1}.$$

В этом случае, как доказывается, имеет место разложение:

$$F(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu} a_{\nu,\,\nu-\mu}(X)=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu}\left(\sum_{\lambda=1}^{\nu-\mu}\ \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu-\mu\\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_\lambda>0}} \sigma(X^{\mu_1})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\, b^{(\lambda)}_{\mu_1\ldots\mu_\lambda}\right),$$

и написанный ряд называется „рядом от матрицы X и ее следов".

Мероморфная функция X есть функция (матрица), представимая в виде дроби, в числителе которой стоит целый ряд от матрицы X и ее следов, а в знаменателе — целый ряд от следов.

Аналогичные построения с естественным усложнением аппарата имеют место и для функций от нескольких матриц. Отметим еще, что вместо рядов по степеням X можно рассматривать ряды по степеням $(X-A)$, где A — постоянная матрица. Во всем изложении теории систем линейных дифференциальных уравнений основную роль играют аппарат степенных рядов от матриц, указанное выше представление мероморфных функций и формула Сильвестра, дающая представление функции $f(X)$ в виде полинома от X:

$$f(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}f(\xi_k),$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — характеристические числа X. Мы написали формулу для того случая, когда они различны. Все результаты, касающиеся теории функций матриц, изложены в первой из напечатанных ниже работ.

Применяя аппарат функций матриц к решению какой-либо задачи теории систем линейных дифференциальных уравнений, И. А. Лаппо-Данилевский считает, что это решение доведено до конца, и называет его алгорифмическим решением задачи, если искомая величина выражена сходящимся рядом, коэффициенты которого вычисляются последовательно. Эта точка зрения проходит через все работы. Отметим еще, что кроме полного алгорифмического в только что указанном смысле решения ранее поставленных задач работы И. А. содержат постановку и решение ряда новых задач. Мы укажем ниже основные результаты работ в области систем дифференциальных уравнений.

Во второй из напечатанных работ рассматриваются так называемые регулярные системы уравнений с рациональными коэффициентами, имеющие вид:

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}, \tag{9}$$

где U_j — постоянные матрицы. Они называются дифференциальными подстановками. Для системы (9) полностью решаются прямые задачи. Если $x=b$ — любое комплексное значение, отличное от a_j $(j=1, 2, \ldots, m)$, то можно построить решение системы (9) — интегральную матрицу $Y_b(x)$, которая обращается в единичную матрицу I при $x=b$.

При обходе точкою x особой точки a_j матрица $Y_b(x)$ умножается слева на некоторую постоянную матрицу V_j, которая называется интегральной подстановкой матрицы $Y_b(x)$ в особой точке a_j. При этом фиксируются определенные разрезы из точек a_j в бесконечно далекую точку. Для матриц $Y_b(x)$, $Y_b^{-1}(x)$, V_j и V_j^{-1} дается представление в виде степенных рядов по матрицам U_j, сходящихся при любом выборе U_j. Далее, если подстановки $U_1, \ldots, U_m$ находятся в некоторой окрестности нулевых матриц, то для x, находящегося в окрестности a_j, устанавливается следующее представление матрицы $Y_b(x)$:

$$Y_b(x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{10}$$

причем $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)-1}$ регулярны в точке $x=a_j$. Для матриц W_j и $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ построены, как и выше, степенные ряды по матрицам U_j, сходящиеся в указанной выше окрестности. Матрица W_j называется показательной подстановкой матрицы $Y_b(x)$ в особой точке a_j. Она определяется единственным образом представлением (10) при указанных свойствах $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$. В особых точках a_j нельзя задавать значений интегральной матрицы $Y(x)$, и в окрестности каждой такой точки строится решение уравнения в виде:

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{U_j}\bar{\theta}_j(x), \tag{11}$$

где $\bar{\theta}_j(x)$ — регулярна в точке $x=a_j$ и $\bar{\theta}(a_j)=I$. Для $\bar{\theta}_j(x)$ получается разложение в степенной ряд по $U_1, U_2, \ldots, U_m$, сходящийся в окрестности нулевых матриц. Матрица $\theta_j(x)$ называется метаканонической матрицей системы (9) в особой точке a_j. Для $\bar{\theta}_j(x)$ строятся также разложения в степенной ряд

$$\bar{\theta}_j(x)=I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p,$$

где $A_j^{(p)}$ разлагаются по $U_1, \ldots, U_m$ в указанной выше окрестности.

Весьма существенным является следующий результат: доказывается, что W_j, $Y_b^{(j)}(x)$ и $\theta_j(x)$ суть мероморфные функции $U_1, U_2, \ldots, U_m$, и для них даются представления в том виде, о котором мы говорили выше. Особенность в указанных матрицах может иметь место в том случае, когда характеристические числа U_j имеют целочисленную разность, отличную от нуля. Таким образом, прямые задачи имеют окончательное решение.

Доказывается, что интегральные и показательные подстановки $V_j(b)$, $V_j(b)^{-1}$, $W_j(b)$ матрицы $Y_b(x)$ как функции b удовлетворяют одной и той же системе:

$$\frac{dY}{db}=\sum_{h=1}^{m}\frac{YU_h-U_hY}{b-a_h},$$

причем

$$V_j(a_j)=e^{2\pi i U_j};\qquad V_j(a_j)^{-1}=e^{-2\pi i U_j};\qquad W_j(a_j)=U_j.$$

Указанные выше задачи исследованы и в окрестности точки $x=\infty$. Дифференциальная подстановка в этой точке определяется равенством

$$U_\infty=-\sum_{h=1}^{m}U_h$$

и интегральная подстановка при соответствующей нумерации особых точек — равенством

$$V_\infty=(V_1V_2\ldots V_m)^{-1}.$$

Аналогично предыдущему определяется показательная подстановка W_∞ для матрицы $Y_\infty(x)$ и метаканоническая матрица $\theta_\infty(x)$

$$\theta_\infty(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{U_\infty}\bar\theta_\infty(x)\qquad(\bar\theta_\infty(\infty)=I).$$

Рассмотрен ряд принципиально важных примеров. Отмечается, что если матрицы U_h попарно коммутируют, то указанные задачи решаются в конечном виде. Так, например, в этом случае

$$Y_b(x)=\prod_{h=1}^{m}\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{U_j};\qquad V_j(b)=e^{2\pi i U_j}.$$

В третьей работе, „Исследование системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности полюса ее коэффициентов“, рассматривается система

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{p=-s}^{\infty}T_px^p,\tag{12}$$

где T_p постоянные матрицы такие, что ряд, составленный из $|T_p|$, сходится. Строится в виде степенного ряда по этим матрицам интегральная матрица $Y_b(x)$ и ее интегральная подстановка V при обходе точки $x=0$. Далее при помощи множителя x^W из матрицы $Y_b(x)$ выделяется многозначность:

$$Y_b(x)=x^W\bar Y_b(x).$$

Отметим, что для $\bar Y_b(x)$, кроме разложения по матрицам T_p, получается разложение вида

$$\bar Y_b(x)=\sum_{p,\,q=-\infty}^{+\infty}B_{pq}x^pb^q,$$

где матрицы B_{pq} не содержат x и b, и для них получены разложения по матрицам T_p. При этом на матрицы T_p накладывается ограничение

$$\sum_{p=-s}^{\infty}|T_p|\leqslant\|\rho\|,\tag{13}$$

где ρ — достаточно малое положительное число.

Оказывается, что ряд, представляющий $Y_b(x)$, есть произведение ряда, не содержащего x, на ряд, не содержащий b. Доказывается, что второй ряд, имеющий вид

$$Z(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_\nu=-s}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}x^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}\lg^\mu x,$$

где численные коэффициенты $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}$ определяются рекуррентно, сходится, если матрицы T_p удовлетворяют условию (13), и дает интегральную матрицу системы (12). Эта „примитивиая интегральиая матрица“ уже не содержит точки нормализации b. Для $Z(x)$ строится интегральная матрица G и производится выделение множителя x^H, характеризующего многозначность $Z(x)$:

$$Z(x)=x^H\bar Z(x).$$

Четвертая работа, „Фундаментальные функции показательных подстаиовок регулярной системы в окрестности нулевых подстановок“, содержит существенные дополнения к теории регулярных систем (9).

Сначала рассматривается вопрос об единственности метаканонической матрицы $\theta_j(x)$ и показательных подстановок W_s без предположения о том, что U_h находятся в окрестности нулевой матрицы. При этом метаканоническая матрица определяется представлением в окрестности $x=a_j$:

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{H_j}\bar\theta_j(x)\qquad(\bar\theta_j(a_j)=I).$$

Доказывается единственность $\theta_j(x)$ при условии, что характеристические числа U_j не имеют целочисленных, отличных от нуля разностей. Если такие разности есть, то в точке $x=a_j$ или нет метаканонической матрицы или такая матрица не одна. Аналогичные результаты получаются и при исследовании показательных подстановок. В частности, если в точке $x=a_j$ нет метаканонических матриц, то у интегральных матриц системы (9) нет и показательных подстановок в точке $x=a_j$, а если метаканоническая матрица не одна, то то же можно утверждать и о показательных подстановках любой интегральной матрицы системы (9).

Далее рассматривается обратная задача. Имея выражение показательных подстановок W_h матрицы $Y_b(x)$ в виде степенных рядов подстановок U_h, сходящихся, если U_h близки к нулевой матрице, и обращая эти ряды, автор приходит к выражениям $U_h(b)$ через W_h в виде степенных рядов.

При помощи этих рядов далее строятся выражения $Y_b(x)$, $\bar\theta_j(x)$ и $\bar\theta_j(x)^{-1}$ в виде степенных рядов по W_h, если W_h близко к нулевой матрице. Алгорифмическое решение этой обратной задачи и является основным содержанием четвертой работы. При этом отмечается один любопытный факт.

Пусть $Y_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)$ — интегральная матрица системы (9), нормированная в точке $x=b$, причем считаются заданными U_h, и пусть $\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)$ — та же матрица, выраженная через показательные подстановки W_h матрицы $Y_b(x)$. Пусть c — точка, отличная от особых точек a_h и точки b (на соответствующей поверхности Римана). Матрицы Y_b и Y_c отличаются постоянным множителем слева:

$$Y_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=Y_c\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,b\right)^{-1}Y_c\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right).$$

Матрицы Ψ_b и Ψ_c имеют различные дифференциальные подстановки, но доказывается, что они отличаются постоянным множителем справа:

$$\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,b\right)^{-1}.$$

Производится исследование метаканонических матриц как функций W_h. При этом основную роль играет матрица:

$$\bar\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,b\right)=\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1(b),\ldots,U_m(b)\\ a_1,\quad\ldots,a_m\end{matrix}\middle|\,b\right),$$

а матрица

$$\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1 \dots W_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1 \dots W_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)(x-a_j)^{W_j}$$

есть метаканоническая матрица регулярной системы в точке $x=a_j$. Она отличается от $\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1 \dots W_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ постоянным правым множителем вида

$$(b-a)^{-W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1 \dots W_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}.$$

Большая по объему работа „Теория матриц, удовлетворяющих системам дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами“ является одной из основных работ И. А. Лаппо-Данилевского. В ней рассматриваются системы вида:

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{YU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}. \tag{14}$$

Как и для регулярных систем (9), строятся ряды для $Y_b(x)$ и ее интегральных подстановок V_j при любых дифференциальных подстановках $U_j^{(r)}$. Для полного выделения особенностей $Y_b(x)$ в точках a_j рассматривается предварительно система с одной особой точкой на конечном расстоянии

$$\frac{dW}{dx}=\sum_{r=1}^{s}\frac{WU^{(r)}}{(x-a)^r}$$

и для нее строится решение вида

$$\theta\left(U^{(1)}, \dots, U^{(s)}, a;\ x\right)=(x-a)^{U^{(1)}}G(x),$$

где $G(x)$ — регулярна в точке $x=\infty$ и $G(\infty)=I$.

Доказывается, что $\theta\left(U^{(1)}, \dots, U^{(s)}, a;\ x\right)$ есть мероморфная функция $U^{(r)}$ и дается ее общее представление. Особенности упомянутой матрицы появляются в том случае, когда характеристические числа $U^{(1)}$ имеют отличную от нуля целочисленную разность.

Для систем (14) доказывается следующее основное предложение: если все $U_j^{(r)}$ близки к нулевым матрицам, то в окрестности каждой точки a_j можно представить $Y_b(x)$ в виде:

$$Y_b(x)=\theta\left(\begin{matrix}W_j^{(s)}\\ \vdots\\ W_j^{(1)}\\ a_j\end{matrix}\,\middle|\, x\right)\overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{15}$$

где $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)^{-1}}(x)$ — регулярны в точке $x=a_j$ и матрицы $W_j^{(r)}$, $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)^{-1}}(x)$ представимы в виде рядов по матрицам $U_i^{(r)}$ $(i=1, 2, \dots, m;\ r=1, 2, \dots, s)$. При этом $W_j^{(1)}=\frac{1}{2\pi i}\lg V_j$ и матрицы $W_j^{(2)}, \dots, W_j^{(s)}$ не влияют на многозначность первого множителя. Представление (15) единственно при указанных условиях для $Y_b(x)$. Матрицы $W_j^{(r)}$ $(r=1, 2, \dots, s)$ называются характеристическими подстановками матрицы $Y_b(x)$ в особой точке $x=a_j$.

В особых точках a_j строятся аналоги тем матрицам, которые назывались метаканоническими для регулярной системы (9). Эти интегральные матрицы системы (14) в точке a_j имеют вид:

$$\theta_j(x)=\theta\left(\begin{matrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\\ a_j\end{matrix}\,\middle|\, x\right)\overline{\theta}_j(x), \tag{16}$$

где $\overline{\theta}_j(x)$ регулярна в точке a_j и $\overline{\theta}_j(a_j)=I$. Первый множитель представления (16) может быть разбит на два множителя:

$$\theta\left(\begin{matrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\\ a_j\end{matrix}\,\middle|\, x\right)=(x-a_j)^{H_j^{(1)}}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C^{(p)}\left(\begin{matrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\end{matrix}\right)(x-a_j)^p\right]. \tag{17}$$

Для всех величин, входящих в указанные формулы, построены разложения по матрицам $U_i^{(s)}$, сходящиеся, если эти матрицы близки к нулевой матрице.

Далее решается обратная задача: считается, что в окрестности нулевой матрицы заданы все подстановки $W_i^{(r)}$ $(i=1, 2, \dots, m;\ r=1, 2, \dots, s)$, и строятся ряды для $U_i^{(r)}$ и $Y_b(x)$ по матрицам $W_i^{(r)}$.

Отметим еще один интересный вопрос из рассматриваемой работы. Для второго множителя в представлении (17) получается дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{\theta}_j}{dx}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\overline{\theta}_jU_h^{(r)}}{(x-a_h)^r}-\sum_{r=1}^{s}\frac{H_j^{(r)}\overline{\theta}_j}{(x-a_j)^r}.$$

При подстановке в это уравнение

$$\overline{\theta}_j(x)=I+\sum_{p=1}^{\infty}C_j^{(p)}(x-a_j)^p$$

и сравнении членов с одинаковыми степенями $(x-a)^p$ при $p=0$ получается $H_j^{(s)}=U_j^{(s)}$. Для оставшихся матриц

$$H_j^{(1)}, \dots, H_j^{(s-1)}, C_j^{(1)}, C_j^{(2)}, \dots \tag{18}$$

получается последовательность уравнений, допускающая бесчисленное множество решений для матриц (18). Но только одно из этих решений, и притом не самое простое, приводит к решению, о котором мы говорили выше. Среди других решений будет и такое, которое дает асимптотическое представление некоторых решений системы (14) в окрестности a_j. Существенное добавление к работе об иррегулярных системах (14) содержится в работе „Интегральные уравнения и их применение к теории линейных дифференциальных уравнений“, которая связана с известными исследованиями Биркхоффа (G. D. Birghoff) по линейным дифференциальным уравнениям. В этом добавлении задача полного выделения особенности из матрицы $Y_b(x)$ в точках a_j решается без того ограничения, что матрицы $U_j^{(r)}$, входящие в систему (14), близки к нулевой матрице.

В пятой работе $W_j^{(r)}$, $\overline{Y}_b(x)$ и $\overline{Y}_b^{-1}(x)$ представлялись рядами, по матрицам $U_i^{(r)}$, сходящимися, если эти матрицы близки к нулевой матрице.

Укажем теперь результат седьмой работы по этому вопросу. Как мы указывали выше, $W_j^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j$, и легко показать, пользуясь формулой Сильвестра, что

$$W_j^{(1)} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_j^{(k)} V_j^{(k)},$$

где $\lambda_j^{(k)}$ — рациональные функции характеристических чисел матрицы λ_j и логарифмов этих чисел, причем $\lambda_j^{(k)}$ не зависят от точки нормализации b. Можно брать любое определение $\lg V_j$, т. е. $W_j^{(1)}$. При этом $W_j^{(1)}$ является целой функцией матриц $U_i^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$, а матрицы

$$W_j^{(2)}, \ldots, W_j^{(s)}, \overline{Y}_b^{(j)}(x) \text{ и } \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$$

суть мероморфные функции $U_i^{(r)}$ и $\lambda_j^{(k)}$. Подробно исследуется то матричое интегральное уравнение, при помощи которого доказывается этот результат.

Шестая работа, „Построение инвариантов группы монодромии системы линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами", также относится к системам вида (14). Один из основных результатов этой работы сводится к следующему.

Доказывается, что инварианты интегральной подстановки V_j в точке a_j интегральных матриц для систем вида (6) суть целые функции дифференциальных подстановок $U_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, s)$ и численных параметров

$$\frac{1}{a_1 - a_j}, \ldots, \frac{1}{a_{j-1} - a_j}, \frac{1}{a_{j+1} - a_j}, \ldots, \frac{1}{a_m - a_j}.$$

При этом даются явные представления этих инвариантов в виде рядов. Упомянутые инварианты суть коэффициенты того уравнения n-й степени (характеристическое уравнение матрицы V_j), корнями которого являются характеристические числа V_j.

В восьмой работе: „Различные определения регулярной матрицы, имеющей заданные показательные подстановки в особых точках на конечном расстоянии", решается задача об определении всех регулярных систем

$$\frac{dY'}{dx} = Y' \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j'}{x - a_j}, \tag{19}$$

у которых интегральная матрица $Y_b'(x)$ имеет те же показательные подстановки W_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, что и матрица $Y_b(x)$ заданной системы

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}. \tag{20}$$

Доказывается, что все такие системы (19) определяются условием, что интегральная матрица $X_b(x)$ системы

$$\frac{dX}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{XU_j' - U_j X}{x - a_j}$$

и обратная матрица $X_b^{-1}(x)$ образованы полиномами. При этом, естественно, предполагается, что разности различных характеристических чисел матриц U_j не равны целым числам. Указанный результат уточняется далее следующим образом: если характеристические числа матрицы U_∞ различны и не имеют целочисленных разностей, то каждому решению задачи соответствует определенный набор целых чисел, удовлетворяющих условию $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 0$, и каждому такому набору целых чисел соответствует не более одного решения задачи. При этом в соответствующем решении задачи степень X^{-1} равна наибольшему из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_m$ и степень X — наибольшему из чисел $(-r_1), (-r_2), \ldots, (-r_m)$. Проводится подробно рассмотрение того случая, когда $\max(|r_1|, |r_2|, \ldots, |r_m|) = 1$.

В работе „Проблема Римана для системы Гаусса" для системы

$$\frac{dY}{dx} = Y\left(\frac{U_1}{x - a_1} - \frac{U_2}{x - a_2}\right) \tag{21}$$

решается в виде ряда задача определения U_1 и U_2 по заданным показательным подстановкам W_1 и W_2, которые не считаются лежащими в окрестности нулевой матрицы. Из явного решения этой задачи выясняется характер многозначности зависимости U_j $(j = 1, 2)$ от W_1, W_2. Подробно исследуется характер этой многозначности в связи с результатами восьмой работы. Исследуются те особые случаи, которые встречаются при решении поставленной задачи.

В четвертой работе была рассмотрена для регулярной системы (9) обратная задача, причем заданными считались показательные подстановки W_j. В десятой работе эта задача решается в предположении, что заданными являются интегральные подстановки V_j. Для дифференциальных подстановок U_j и нормальной интегральной матрицы $Y_b(x)$ строятся степенные разложения по матрицам $(V_j - I)$, сходящиеся, если матрицы V_j находятся в некоторой окрестности единичной матрицы I. Исследуется характер зависимости коэффициентов разложения $Y_b(x)$ от конфигурации особых точек.

Переходим к последней работе: „Некоторые дополнеиия к теории регулярных систем". Пусть

$$\theta_j\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x \Bigg) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

— метаканонические матрицы регулярной системы

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x - a_j}. \tag{22}$$

Они должны отличаться постоянной матрицей слева:

$$\theta_h\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \theta_{jh}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} \theta_j\left(\begin{matrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right). \tag{23}$$

Эти матрицы перехода $Z_{jh} = \theta_{jh}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix}$ исследуются как функции особых точек a_k и доказывается, что они удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_q} = 0; \quad \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_q} a_q = U_h Z_{jh} - Z_{jh} U_j$$

и начальным условиям

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix} U_1, \ldots, U_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix}\Bigg|_{a_p = \infty} = \theta_{jh}\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_{p-1} U_{p+1} \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_{p-1} a_{p+1} \ldots a_m \end{pmatrix} \qquad (p \neq j \text{ и } p \neq h).$$

Подробно исследуется случай системы Гаусса (21). При этом:

$$\theta_{jh} = (a_j - a_h)^{U_h} \Gamma_{jh} (a_h - a_j)^{-U_j}, \quad \Gamma_{jh} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} \gamma_{j_1 \ldots j_\nu}^{(jh)},$$

где $\gamma^{(jh)}_{j_1 \ldots j_\nu}$ — численные коэффициенты, и ряд сходится, если $U_i (i=1, 2, \ldots, m)$ находятся в некоторой окрестности нулевой матрицы.

В общем случае подстановки Z_{jh} разлагаются в степенной ряд по дифференциальным подстановкам $U_i (i=1, 2, \ldots, m)$; этот ряд сходится, если U_r находятся в некоторой окрестности нулевой матрицы. При их аналитическом продолжении θ_{jh} оказывается мероморфной функцией U_i, и особенности этой функции появляются, если характеристические числа U_j и U_h имеют целочисленную разность, отличную от нуля. Дается общее представление Z_{jh} как мероморфной функции.

Далее исследуются интегральные матрицы системы (22) как функции a_j, и для метаканонических матриц получается система уравнений

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}+\frac{Z_j U_s}{x-a_s}\right)=0; \quad \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}(a_s-x)-U_j Z_j=0.$$

Все это проводится в предположении, что заданы дифференциальные матрицы U_i. Далее исследуются дифференциальные подстановки U_j и метаканонические матрицы как функции a_i в предположении, что заданы показательные подстановки.

Если рассматривать метаканоническую матрицу $\theta_j\begin{pmatrix} W_1, \ldots, W_m \\ a_1, \ldots, a_m \end{pmatrix} x \Big)$ в точке a_j, считая заданными ее показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$, то, обозначая через U_{jh} соответствующие дифференциальные подстановки системы, будем иметь $U_{jj}=W_j$, а остальные подстановки, рассматриваемые как функции особой точки a_j, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial U_{jh}}{\partial a_p}=\left(\frac{1}{a_p-a_h}-\frac{1}{a_p-a_j}\right)(U_{jh}U_{jp}-U_{jp}U_{jh}) \qquad (\text{при } p\neq j \text{ и } p\neq h),$$

$$\frac{\partial U_{jh}}{\partial a_j}=\frac{U_{jh}W_j-W_jU_{jh}}{a_j-a_h}+\sum_{\substack{q\neq j\\ q\neq h}}\frac{U_{jq}U_{jh}-U_{jh}U_{jq}}{a_j-a_q} \qquad (\text{при } j\neq h),$$

$$\frac{\partial U_{jh}}{\partial a_h}=\frac{U_{jh}W_j-W_jU_{jh}}{a_h-a_j}+\sum_{\substack{q\neq j\\ q\neq h}}\frac{U_{jh}U_{jq}-U_{jq}U_{jh}}{a_h-a_q} \qquad (\text{при } j\neq h).$$

Если считать заданными показательные подстановки матрицы $Y_b(x)$, то для дифференциальных подстановок $U_j(b)$ получается система

$$\frac{\partial U_j}{\partial b}=\sum_{h\neq j}\frac{U_hU_j-U_jU_h}{b-a_h}; \quad \frac{\partial U_j}{\partial a_j}=\sum_{h\neq j}\frac{U_hU_j-U_jU_h}{a_h-a_j};$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial a_h}=\left(\frac{1}{a_j-a_h}-\frac{1}{b-a_h}\right)(U_hU_j-U_jU_h).$$

Работа содержит и другие результаты аналогичного характера. В частности устанавливается система дифференциальных уравнений для величин

$$\theta_j^{-1}\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right)\theta_h\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right).$$

И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СТАТЬЯ ПЕРВАЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ

§ 1. Основные определения теории матриц

Как известно, квадратная матрица порядка n есть таблица из n^2 элементов a_{kl} $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, которые являются комплексными числами:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \| a_{kl} \|;$$

элемент a_{kl} находится на пересечении k-й строки и l-го столбца. Мы часто будем обозначать элементы матрицы A символом $\{A\}_{kl}$, так что

$$\{A\}_{kl} = a_{kl}.$$

Определитель, образованный из элементов матрицы A, будем обозначать через

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и будем называть определителем матрицы A.

Матрицу, все элементы которой равны числу a, так что $\{A\}_{kl} = a_{kl} = a$, будем обозначать через $\| a \|$.

Матрицу, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов главной диагонали, т. е. матрицу из элементов

$$a_{kk} = a_k, \quad a_{kl} = 0 \qquad (k \neq l),$$

будем называть диагональной матрицей и обозначать символом

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix} = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Частным случаем диагональной матрицы является единичная матрица

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} = [1, 1, \ldots, 1].$$

Комплексное число a можно рассматривать как диагональную матрицу $[a, a, \ldots, a]$, в частности, 0 — как матрицу $\|0\|$.

Пусть

$$\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s$$

система s матриц порядков

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$$

соответственно.

Обозначим символом

$$A = [\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]$$

матрицу порядка

$$n = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s$$

следующего вида:

$$A = [\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s] = \begin{Vmatrix} \Xi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Xi_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \Xi_s \end{Vmatrix};$$

все элементы этой матрицы, которую мы будем называть квазидиагональной матрицей, суть нули, за исключением элементов, принадлежащих указанным квадратам на диагонали, которые образованы соответственно из элементов матриц:

$$\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s$$

так что элементы матрицы определены следующими формулами:

$$\{A\}_{kl} = \begin{cases} \{\Xi_1\}_{kl}, & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant \rho_1 \text{ и } 1 \leqslant l \leqslant \rho_1 \\ 0, & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant \rho_1 \text{ и } \rho_1 + 1 \leqslant l \leqslant n \\ 0, & \text{если } \rho_1 + \ldots + \rho_{q-1} + 1 \leqslant k \leqslant \rho_1 + \ldots + \rho_q \\ & \qquad (q = 2, 3, \ldots, s) \\ & \text{и } 1 \leqslant l \leqslant \rho_1 + \ldots + \rho_{q-1} \\ \{\Xi_q\}_{k-\rho_1-\ldots-\rho_{q-1},\, l-\rho_1-\ldots-\rho_{q-1}}, & \\ & \text{если } \rho_1 + \ldots + \rho_{q-1} + 1 \leqslant k \leqslant \rho_1 + \ldots + \rho_q \\ & \qquad (q = 2, 3, \ldots, s) \\ & \text{и } \rho_1 + \ldots + \rho_{q-1} + 1 \leqslant l \leqslant \rho_1 + \ldots + \rho_q \\ 0, & \text{если } \rho_1 + \ldots + \rho_{q-1} + 1 \leqslant k \leqslant \rho_1 + \ldots + \rho_q \\ & \qquad (q = 2, 3, \ldots, s-1) \\ & \text{и } \rho_1 + \ldots + \rho_q + 1 \leqslant l \leqslant n \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать только квадратные матрицы и будем их называть просто матрицами. Мы будем предполагать, что порядок рассматриваемых матриц всегда равен фиксированному числу n, за исключением случаев, когда имеется специальное указание на их порядок.

§ 2. Действия над матрицами

Рассматривая матрицы одного и того же порядка, мы можем трактовать каждую матрицу как гиперкомплексное число.

Определим рациональные операции в области матриц порядка n.

Мы говорим, что две матрицы A и B равны:

$$A = B,$$

если они тождественны, т. е. если n^2 элементов матрицы A равны соответствующим элементам матрицы B

$$\{A\}_{kl} = \{B\}_{kl} \qquad (k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Сложение двух матриц A и B определяется формулой

$$\{A + B\}_{kl} = \{A\}_{kl} + \{B\}_{kl},$$

так что каждый элемент суммы $A + B$ равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Операция сложения коммутативна и ассоциативна

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Умножение или композиция двух матриц A и B определяется формулой

$$\{AB\}_{kl} = \{A\}_{k1}\{B\}_{1l} + \{A\}_{k2}\{B\}_{2l} + \ldots + \{A\}_{kn}\{B\}_{nl} = \sum_{s=1}^{n} \{A\}_{ks}\{B\}_{sl}, \quad (1)$$

так что каждый элемент произведения AB, принадлежащий k-й строке и l-му столбцу, равен сумме произведений элементов k-й строки матрицы A на элементы l-го столбца матрицы B. Мы видим, что произведение двух матриц зависит от порядка множителей. Действительно, элементы матрицы BA суть

$$\{BA\}_{kl} = \{B\}_{k1}\{A\}_{1l} + \{B\}_{k2}\{A\}_{2l} + \ldots + \{B\}_{kn}\{A\}_{nl} = \sum_{s=1}^{n} \{B\}_{ks}\{A\}_{sl}.$$

Вообще говоря, матрицы AB и BA различны:

$$AB \neq BA,$$

так что операция умножения не коммутативна.

Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$D(AB) = D(BA) = D(A)\,D(B). \quad (2)$$

Умножение матриц подчиняется дистрибутивному закону:

$$(A + B)\,C = AC + BC, \qquad A\,(B + C) = AB + AC.$$

Операция умножения ассоциативна:

$$(AB)\,C = A\,(BC).$$

Действительно,

$$\{(AB)\,C\}_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \{AB\}_{ks}\{C\}_{sl} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} \{A\}_{k\sigma}\{B\}_{\sigma s}\{C\}_{sl} =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n} \{A\}_{k\sigma}\{BC\}_{\sigma l} = \{A\,(BC)\}_{kl}.$$

В частных случаях операция умножения двух матриц может быть коммутативной. Например, произведение двух диагональных матриц

$$A = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n], \qquad B = [b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n]$$

есть диагональная матрица

$$AB = [a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ \ldots,\ a_n b_n],$$

так что для диагональных матриц мы всегда имеем:

$$AB = BA.$$

Произведение произвольной матрицы A на диагональную матрицу

$$\xi = [\xi,\ \xi,\ \ldots,\ \xi]$$

есть матрица из элементов

$$\{\xi A\}_{kl} = \{A\xi\}_{kl} = \xi\,\{A\}_{kl}$$

Для того чтобы умножить матрицу A на число ξ, достаточно, следовательно, умножить каждый элемент матрицы A на это число. В частности, произведение матрицы A на единичную матрицу I есть сама матрица A:

$$AI = IA = A.$$

Так как операция умножения матрицы A на самое себя коммутативна, то можно говорить о степенях матрицы A^m, где A^m есть произведение m одинаковых матриц A. Положим еще

$$A^0 = I, \qquad A^1 = A.$$

Матрица, обратная для матрицы A, определяется как матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенству

$$AA^{-1} = I. \quad (3)$$

В силу равенства

$$D(A)\,D(A^{-1}) = D(AA^{-1}) = 1$$

обратная матрица может существовать только для матрицы, определитель которой $D(A)$ отличен от нуля. Мы называем матрицу A неособенной, если $D(A) \neq 0$, и особенной, если $D(A) = 0$. Известно, что если матрица неособенная, то существует единственная матрица, которая удовлетворяет условию (3). Элементы этой матрицы определяются формулами:

$$\{A^{-1}\}_{kl} = \frac{D_{lk}(A)}{D(A)} \qquad (k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (4)$$

где $D_{lk}(A)$ — алгебраическое дополнение элемента a_{lk} определителя $D(A)$:

$$D_{lk}(A) = \frac{\partial D(A)}{\partial a_{lk}}.$$

Легко видеть, что имеет место

$$A^{-1}A = I \quad (5)$$

и что, обратно, равенство (3) является следствием формулы (5). Запишем еще следующие равенства, которые почти очевидны:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A, \qquad A^{-k} = (A^k)^{-1},$$

где A^{-k} означает $(A^{-1})^k$ (k — целое положительное число).

Пусть A — произвольная матрица и S — матрица, определитель которой отличен от нуля. Тогда матрица

$$B = SAS^{-1}$$

называется преобразованием матрицы A при помощи матрицы S. Умножая обе части предыдущего равенства слева на S^{-1} и справа на S, находим что

$$A = S^{-1}BS,$$

так что A есть преобразование матрицы B при помощи S^{-1}.

Матрицы A и B в рассматриваемом случае называются подобными.

Преобразование матрицы не изменяет ее определителя:

$$D(B) = D(S)\,D(A)\,D(S^{-1}) = D(A).$$

Преобразование единичной матрицы есть также единичная матрица:

$$SIS^{-1} = I.$$

Преобразование произведения двух матриц равно произведению преобразований этих матриц:

$$SABS^{-1} = SAS^{-1}SBS^{-1}, \tag{6}$$

в частности

$$SA^2S^{-1} = (SAS^{-1})^2, \qquad SA^kS^{-1} = (SAS^{-1})^k. \tag{7}$$

Сложение и умножение квазидиагональных матриц производится особенно просто.

Пусть

$$\Xi_1,\ \Xi_2,\ \ldots,\ \Xi_s$$

и

$$\mathrm{H}_1,\ \mathrm{H}_2,\ \ldots,\ \mathrm{H}_s$$

две системы матриц порядков $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ соответственно, где

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n.$$

Тогда из самого определения непосредственно следует, что

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s] + [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_s] = [\Xi_1 + \mathrm{H}_1, \Xi_2 + \mathrm{H}_2, \ldots, \Xi_s + \mathrm{H}_s], \tag{8}$$

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s] \cdot [\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_s] = [\Xi_1\mathrm{H}_1, \Xi_2\mathrm{H}_2, \ldots, \Xi_s\mathrm{H}_s]. \tag{9}$$

Следовательно, степени квазидиагональной матрицы вычисляются при помощи соотношения

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]^\nu = [\Xi_1^\nu, \Xi_2^\nu, \ldots, \Xi_s^\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Так как единичную матрицу I можно рассматривать как матрицу квазидиагональную, образованную при помощи единичных матриц порядков $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$:

$$I = [I, I, \ldots, I],$$

то из формулы (9), в которой надо положить

$$\mathrm{H}_1 = \Xi_1^{-1},\ \mathrm{H}_2 = \Xi_2^{-1},\ \ldots,\ \mathrm{H}_s = \Xi_s^{-1},$$

непосредственно следует, что матрицей, обратной для квазидиагональной матрицы, является

$$[\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s]^{-1} = [\Xi_1^{-1}, \Xi_2^{-1}, \ldots, \Xi_s^{-1}]. \tag{11}$$

Наконец, из формул (9) и (11) мы получаем формулу для подобных квазидиагональных матриц:

$$[\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_s][\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_s][\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_s]^{-1} = \\ = [\mathrm{H}_1\Xi_1\mathrm{H}_1^{-1}, \mathrm{H}_2\Xi_2\mathrm{H}_2^{-1}, \ldots, \mathrm{H}_s\Xi_s\mathrm{H}_s^{-1}]. \tag{12}$$

§ 3. Каноническое представление матриц

Рассмотрим теперь вопрос о каноническом представлении матрицы X. Введем вспомогательную переменную ξ и рассмотрим матрицу

$$X - \xi = X - \xi I.$$

Определитель этой матрицы

$$D(X-\xi) = \begin{vmatrix} x_{11}-\xi & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22}-\xi & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn}-\xi \end{vmatrix} \tag{13}$$

есть полином степени n от ξ. Корни этого полинома называются характеристическими числами матрицы X.

Пусть ξ_1 — характеристическое число матрицы X, так что

$$D(X - \xi_1) = 0,$$

и пусть λ — кратность этого корня. Следовательно, определитель (13) делится на $(\xi - \xi_1)^\lambda$ и не делится на $(\xi - \xi_1)^{\lambda+1}$. Пусть

$$(\xi - \xi_1)^{\lambda_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

наивысшая степень бинома $\xi - \xi_1$, которая является делителем всех миноров определителя $D(X - \xi)$ порядка $n - k$. Предположим еще, что по крайней мере один из миноров порядка $n - \nu$ не делится на $\xi - \xi_1$. Тогда доказывается, что

$$\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{\nu-1} > 0.$$

Обозначим

$$\lambda - \lambda_1 = \rho_1,\ \lambda_1 - \lambda_2 = \rho_2,\ \ldots,\ \lambda_{\nu-2} - \lambda_{\nu-1} = \rho_{\nu-1},\ \lambda_{\nu-1} = \rho_\nu,$$

так что

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_\nu = \lambda;$$

степени бинома

$$(\xi - \xi_1)^{\rho_1},\ (\xi - \xi_1)^{\rho_2},\ \ldots,\ (\xi - \xi_1)^{\rho_\nu}$$

называют, следуя Вейерштрассу, элементарными делителями матрицы X. Пусть

$$(\xi - \xi_1)^{\rho_1},\ (\xi - \xi_2)^{\rho_2},\ \ldots,\ (\xi - \xi_s)^{\rho_s} \tag{14}$$

все элементарные делители матрицы X, так что

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n$$

и $s \leqslant n$; среди чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ могут быть одинаковые. Тогда

$$D(\xi - X) = (\xi - \xi_1)^{\rho_1}(\xi - \xi_2)^{\rho_2} \ldots (\xi - \xi_s)^{\rho_s}. \tag{15}$$

Доказывается, что характеристические числа и элементарные делители матрицы X и ее преобразования матрицей S одни и те же.

Обозначим через $J_\rho(\xi)$ матрицу порядка ρ следующего вида:

$$J_\rho(\xi) = \begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \xi & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \xi & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \xi \end{Vmatrix} \qquad (J_1(\xi) = \xi). \tag{16}$$

Можно доказать, что матрица X с элементарными делителями (14) может быть представлена в каноническом виде

$$X = S\,[J_{\rho_1}(\xi_1),\ J_{\rho_2}(\xi_2),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1}, \tag{17}$$

где некоторые из элементов матрицы S остаются произвольными, все другие ее элементы суть рациональные функции элементов и характеристических чисел матрицы X и линейные однородные функции произвольных элементов матрицы S.

Рассмотрим теперь некоторые матрицы, играющие важную роль в дальнейшем.

Вычислим сперва степени канонической матрицы

$$J_\rho(0) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \{J_\rho(0)\}_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } k-l=1, \\ 0, & \text{если } k-l\neq 1. \end{cases} \tag{18}$$

Применяя несколько раз общую формулу (1) умножения матриц, мы получим формулу для элементов матрицы $J_\rho(0)^\mu$:

$$\{J_\rho(0)^\mu\}_{kl} = \sum_{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_{\mu-1}=1}^{\rho} \{J_\rho(0)\}_{kr_1}\{J_\rho(0)\}_{r_1 r_2}\ldots\{J_\rho(0)\}_{r_{\mu-1}l} = \begin{cases} 1, & \text{если } k-l=\mu \\ 0, & \text{если } k-l\neq\mu \end{cases}. \tag{19}$$

Например, мы имеем

$$J_4(0)^2 = \left\| \begin{matrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{matrix} \right\|, \quad J_4(0)^3 = \left\| \begin{matrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{matrix} \right\|, \quad J_4(0)^4 = \| 0 \|$$

и вообще

$$J_\rho(0)^\rho \equiv 0. \tag{20}$$

Чтобы найти степени $J_\rho(\xi)$, мы напишем

$$J_\rho(\xi) = \left\| \begin{matrix} \xi & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \xi & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \xi \end{matrix} \right\| = \xi + J_\rho(0); \tag{21}$$

тогда, применяя формулу бинома Ньютона и принимая во внимание, что ξ и $J_\rho(0)$ перестановочны, получим

$$J_\rho(\xi)^\nu = \xi^\nu + \binom{\nu}{1}\xi^{\nu-1}J_\rho(0) + \binom{\nu}{2}\xi^{\nu-2}J_\rho(0)^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu}J_\rho(0)^\nu. \tag{22}$$

В силу (19) видно, что

$$\{J_\rho(\xi)^\nu\}_{kl} = \begin{cases} \dbinom{\nu}{k-l}\xi^{\nu-k+l}, & \text{если } 0 \leqslant k-l \leqslant \nu, \\ 0, & \text{если } k<l \text{ или } k-l>\nu. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, мы имеем следующее выражение степени матрицы:

$$J_\rho(\xi)^\nu = \left\| \begin{matrix} \xi^\nu & 0 & 0 \ldots 0 \\ \frac{\nu}{1}\xi^{\nu-1} & \xi^\nu & 0 \ldots 0 \\ \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\xi^{\nu-2} & \frac{\nu}{1}\xi^{\nu-1} & \xi^\nu \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \binom{\nu}{\rho-1}\xi^{\nu-\rho+1} & \binom{\nu}{\rho-2}\xi^{\nu-\rho+2} & \ldots\ \xi^\nu \end{matrix} \right\|. \tag{24}$$

Рассмотрим матрицу следующего вида:

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = \left\| \begin{matrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!}a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(\rho-1)!}a_{\rho-1} & \frac{1}{(\rho-2)!}a_{\rho-2} & \frac{1}{(\rho-3)!}a_{\rho-3} & \ldots & a_0 \end{matrix} \right\| \tag{25}$$

с элементами

$$\{G_\rho\}_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{если } k<l, \\ \dfrac{1}{(k-l)!}a_{k-l}, & \text{если } k \geqslant l. \end{cases}$$

Мы можем записать тогда

$$J_\rho(\xi)^\nu = G_\rho\left(\xi^\nu,\ \frac{d\xi^\nu}{d\xi},\ \frac{d^2\xi^\nu}{d\xi^2},\ \ldots\ \frac{d^{\rho-1}\xi^\nu}{d\xi^{\rho-1}}\right). \tag{26}$$

Заметим, что сложение матриц вида (25) производится весьма просто:

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{\rho-1}) + G_\rho(b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_{\rho-1}) = G_\rho(a_0+b_0,\ a_1+b_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}+b_{\rho-1}). \tag{27}$$

Найдем каноническое представление матрицы (25). Все характеристические числа этой матрицы равны a_0. Минор определителя

$$D(G_\rho - \xi) = \left| \begin{matrix} a_0-\xi & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0-\xi & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(\rho-1)!}a_{\rho-1} & \frac{1}{(\rho-2)!}a_{\rho-2} & \ldots & a_0-\xi \end{matrix} \right|,$$

принадлежащий последнему элементу первой строки, есть

$$\left| \begin{matrix} a_1 & a_0-\xi & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!}a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(\rho-1)!}a_{\rho-1} & \frac{1}{(\rho-2)!}a_{\rho-2} & \ldots & a_1 \end{matrix} \right|;$$

для $\xi = a_0$ он равен $a_1^{\rho-1}$. Следовательно, если $a_1 \neq 0$, указанный минор не делится на $\xi - a_0$, и мы имеем единственный элементарный делитель $(\xi - a_0)^\rho$

матрицы G_ρ. Таким образом, матрица G_ρ должна иметь следующий канонический вид:

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = TJ_\rho(a_0)\,T^{-1}.$$

Матрица T должна удовлетворять условию

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{\rho-1})\,T = TJ_\rho(a_0); \tag{28}$$

но очевидно, что

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = a_0 + G_\rho(0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}),$$
$$J_\rho(a_0) = a_0 + J_\rho(0), \qquad a_0T = Ta_0,$$

следовательно, уравнение (28) эквивалентно уравнению

$$G_\rho(0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1})\,T = TJ_\rho(0).$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, получим уравнения:

$$0 = \{T\}_{12},\quad 0 = \{T\}_{13},\ \ldots,\ 0 = \{T\}_{1\rho};$$
$$\frac{1}{(k-1)!}\,a_{k-1}\,\{T\}_{1l} + \frac{1}{(k-2)!}\,a_{k-2}\,\{T\}_{2l} + \ldots + a_1\,\{T\}_{k-1,\,l} = \{T\}_{k,\,l+1} \tag{29}$$
$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ \rho;\quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho;\ \{T\}_{k,\,\rho+1} = 0).$$

Элементы $\{T\}_{k1}$ первого столбца матрицы T остаются произвольными, положим эти элементы равными

$$\{T\}_{11} = 1,\ \{T\}_{21} = \{T\}_{31} = \ldots = \{T\}_{\rho 1} = 0 \tag{30}$$

и обозначим полученную так матрицу через $\mathscr{E}_\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\rho-1})$.

Теперь из уравнений (29) находим:

$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{1l} = 0,\ \text{если}\ l > 1,\ \{\mathscr{E}_\rho\}_{11} = 1,$$
$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{2,\,l+1} = a_1\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{1l} = 0,\quad \text{если}\quad l > 1,\ \{\mathscr{E}_\rho\}_{22} = a_1,$$
$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{3,\,l+1} = \frac{1}{2!}\,a_2\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{1l} + a_1\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{2l} = 0,\quad \text{если}\quad l > 2,$$
$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{32} = \frac{1}{2!}\,a_2,\quad \{\mathscr{E}_\rho\}_{33} = a_1^2$$

и вообще

$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{k2} = \frac{1}{(k-1)!}\,a_{k-1},$$
$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{kl} = \frac{a_{k-1}}{(k-1)!}\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{1,\,l-1} + \ldots + a_1\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{k-1,\,l-1} = 0,\ \text{если}\ k < l,$$
$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{kk} = a_1\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{k-1,\,k-1} = a_1^{k-1},$$
$$\{\mathscr{E}_\rho\}_{kl} = \frac{a_{k-l+1}}{(k-l+1)!}\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{l-1,\,l-1} + \ldots + a_1\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{k-1,\,l-1},\ \text{если}\ k > l \geqslant 2.$$

Итак, мы получили следующий результат: единственное решение уравнения

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1})\,\mathscr{E}_\rho(a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = \mathscr{E}_\rho(a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1})\,J_\rho(a_0), \tag{31}$$

удовлетворяющее условию (30), есть матрица

$$\mathscr{E}_\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{2!} & a_1^2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{a_{\rho-1}}{(\rho-1)!} & & \ldots & a_1^{\rho-1} \end{Vmatrix}, \tag{32}$$

элементы которой определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &\{\mathscr{E}_\rho\}_{kl} = 0,\ \text{если}\ l > k, \\ &\{\mathscr{E}_\rho\}_{k1} = \begin{cases} 1,\ \text{если}\ k = 1, \\ 0,\ \text{если}\ k > 1, \end{cases} \\ &\{\mathscr{E}_\rho\}_{k2} = \frac{a_{k-1}}{(k-1)!},\ \text{если}\ k \geqslant 2, \\ &\{\mathscr{E}_\rho\}_{kl} = \frac{a_{k-l+1}}{(k-l+1)!}\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{l-1,\,l-1} + \frac{a_{k-l}}{(k-l)!}\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{l,\,l-1} + \\ &\qquad + \ldots + \frac{a_1}{1!}\,\{\mathscr{E}_\rho\}_{k-1,\,l-1},\ \text{если}\ 3 \leqslant l \leqslant k. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Определитель матрицы $\mathscr{E}_\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\rho-1})$ равен $a_1^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}}$ и, следовательно, отличен от нуля в силу предположения $a_1 \neq 0$. Учитывая сказанное, можно записать уравнение (31) в следующем виде:

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = \mathscr{E}_\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\rho-1})\,J_\rho(a_0)\,\mathscr{E}_\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\rho-1})^{-1}, \tag{34}$$

если $a_1 \neq 0$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$ и $a_k \neq 0$; тогда очевидно, что

$$G_\rho(a_0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{\rho-1}) =$$
$$= a_0 + \frac{a_k}{k!}\,J_\rho(0)^k + \ldots + \frac{a_{\rho-1}}{(\rho-1)!}\,J_\rho(0)^{\rho-1}. \tag{35}$$

Но легко видеть, что существует матрица

$$H = c_1J_\rho(0) + \frac{c_2}{2!}\,J_\rho(0)^2 + \ldots + \frac{c_{\rho-k}}{(\rho-k)!}\,J_\rho(0)^{\rho-k} =$$
$$= G_\rho(0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{\rho-k},\ 0,\ \ldots,\ 0), \tag{36}$$

удовлетворяющая условию

$$H^k = \frac{a_k}{k!}\,J_\rho(0)^k + \ldots + \frac{a_{\rho-1}}{(\rho-1)!}\,J_\rho(0)^{\rho-1}. \tag{37}$$

Действительно, мы имеем

$$H^k = c_1^kJ_\rho(0)^k + \frac{kc_1^{k-1}c_2}{2!}\,J_\rho(0)^{k+1} + \ldots, \tag{38}$$

где последний член содержит степень $J_\rho(0)^{\rho-1}$, так как все следующие члены суть нули в силу формулы (20).

Сравнивая полиномы (37) и (38), мы находим $\rho - k$ соотношений

$$c_1^k = \frac{a_k}{k!},\qquad \frac{kc_1^{k-1}c_2}{2!} = \frac{a_{k+1}}{(k+1)!},\ \ldots,$$

первое из которых дает

$$c_1 = \sqrt[k]{\frac{a_k}{k!}}$$

и следующие соотношения определяют один за другим прочие коэффициенты:

$$c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_{\rho-k}.$$

Для матрицы H, в силу (34), мы имеем каноническое представление

$$H = G_\rho(0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\rho-k},\ 0,\ \ldots,\ 0) =$$
$$= \mathfrak{E}_\rho(c_1,\ \ldots,\ c_{\rho-k},\ 0,\ \ldots,\ 0)\, J_\rho(0)\, \mathfrak{E}_\rho^{-1}(c_1,\ \ldots,\ c_{\rho-k},\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

и, следовательно, по (7)

$$H^k = \mathfrak{E}_\rho(c_1,\ \ldots,\ c_{\rho-k},\ 0,\ \ldots,\ 0)\, J_\rho(0)^k\, \mathfrak{E}_\rho^{-1}(c_1,\ \ldots,\ c_{\rho-k},\ 0,\ \ldots,\ 0). \quad (39)$$

Найдем теперь каноническое представление матрицы $J_\rho(0)^k$.

Известно, что всякой матрице $A = \| a_{kl} \|$ соответствует линейное преобразование

$$x_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l.$$

Если к переменным x_k и y_l применить новое линейное преобразование, соответствующее матрице $S = \| s_{kl} \|$,

$$u_k = \sum_{r=1}^{n} s_{kr} x_r, \qquad v_k = \sum_{r=1}^{n} s_{kr} y_r,$$

то между переменными u_k и v_l будет иметь место зависимость

$$u_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} v_l,$$

где коэффициенты b_{kl} суть элементы матрицы $B = SAS^{-1}$.

В частности, матрице $A = J_\rho(0)^k$ соответствует следующее линейное преобразование:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = 0,\ x_{k+1} = y_1,\ \ldots,\ x_{(r-1)k+1} = y_{(r-2)k+1},\ x_{rk+1} = y_{(r-1)k+1},\\
x_2 = 0,\ x_{k+2} = y_2,\ \ldots,\ x_{(r-1)k+2} = y_{(r-2)k+2},\ x_{rk+2} = y_{(r-1)k+2},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
x_s = 0,\ x_{k+s} = y_s,\ \ldots,\ x_{(r-1)k+s} = y_{(r-2)k+s},\ x_{rk+s} = y_{(r-1)k+s},\\
x_{s+1} = 0,\ x_{k+s+1} = y_{s+1},\ \ldots,\ x_{(r-1)k+s+1} = y_{(r-2)k+s+1},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
x_k = 0,\ x_{2k} = y_k,\ \ldots,\ x_{rk} = y_{(r-1)k},
\end{array}\right\} \quad (40)$$

если

$$\rho = kr + s, \quad 0 \leqslant s \leqslant k-1.$$

Положим

$$\left.\begin{array}{l}
u_1 = x_1,\ u_2 = x_{k+1},\ \ldots,\ u_r = x_{(r-1)k+1},\ u_{r+1} = x_{rk+1},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
u_{(r+1)(s-1)+1} = x_s,\ u_{(r+1)(s-1)+2} = x_{k+s},\ \ldots,\ u_{(r+1)s} = x_{rk+s},\\
u_{(r+1)s+1} = x_{s+1},\ u_{(r+1)s+2} = x_{k+s+1},\ \ldots,\ u_{(r+1)s+r} = x_{(r-1)k+s+1},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
u_{r(k-1)+s+1} = x_k,\ u_{r(k-1)+s+2} = x_{2k},\ \ldots,\ u_{rk+s} = x_{rk}.
\end{array}\right\} \quad (41)$$

Представим себе соответствующие равенства между переменными v и y и обозначим через S соответствующую матрицу. Очевидно, что мы имеем тогда преобразование:

$$\left.\begin{array}{l}
u_1 = 0,\ u_2 = v_1,\ u_3 = v_2,\ \ldots,\ u_{r+1} = v_r,\\
u_{r+2} = 0,\ u_{r+3} = v_{r+2},\ u_{r+4} = v_{r+3},\ \ldots,\ u_{2(r+1)} = v_{2r+1},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
u_{(r+1)(s-1)+1} = 0,\ u_{(r+1)(s-1)+2} = v_{(r+1)(s-1)+1},\ \ldots,\ u_{(r+1)s} = v_{(r+1)(s-1)+r},\\
u_{(r+1)s+1} = 0,\ u_{(r+1)s+2} = v_{(r+1)s+1},\ \ldots,\ u_{(r+1)s+r} = v_{(r+1)s+r-1},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
u_{r(k-1)+s+1} = 0,\ u_{r(k-1)+s+2} = v_{r(k-1)+s+1},\ \ldots,\ u_{rk+s} = v_{rk+s-1},
\end{array}\right\} \quad (42)$$

которому отвечает по предыдущему матрица $B = SAS^{-1}$. Но вид равенств (42) показывает, что

$$B = [J_{\rho_1}(0),\ J_{\rho_2}(0),\ \ldots,\ J_{\rho_k}(0)],$$

где

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_s = r+1,\ \rho_{s+1} = \rho_{s+2} =$$
$$= \ldots = \rho_k = r, \quad \rho_\alpha = E\,\frac{\rho + k - \alpha}{k} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \quad (43)$$

Следовательно,

$$J_\rho(0)^k = S^{-1}[J_{\rho_1}(0),\ \ldots,\ J_{\rho_k}(0)]\, S, \quad (44)$$

что и дает каноническое представление матрицы $J_\rho(0)^k$.

Комбинируя этот результат с (39), мы получим

$$H^k = T\,[J_{\rho_1}(0),\ \ldots,\ J_{\rho_k}(0)]\, T^{-1},$$

с другой стороны, имеем:

$$a_0 = T\,[a_0,\ \ldots,\ a_0]\, T^{-1}$$

и, следовательно,

$$G_\rho(a_0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{\rho-1}) = T\,[J_{\rho_1}(a_0),\ \ldots,\ J_{\rho_k}(a_0)]\, T^{-1}. \quad (45)$$

Вычисления, вполне аналогичные тем, которые дали нам выражение матрицы $\mathfrak{E}_\rho(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\rho-1})$, приводят к матрице частного вида T, удовлетворяющей предыдущему уравнению; обозначим ее через

$$\mathfrak{E}_\rho^{(k)}(a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{\rho-1}),$$

так что

$$G_\rho(a_0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{\rho-1}) =$$
$$= \mathfrak{E}_\rho^{(k)}(a_k,\ \ldots,\ a_{\rho-1})\,[J_{\rho_1}(a_0),\ \ldots,\ J_{\rho_k}(a_0)]\, \mathfrak{E}_\rho^{(k)}(a_k,\ \ldots,\ a_{\rho-1})^{-1}, \quad (46)$$

где

$$\left.\begin{array}{c}
\rho_1 = \ldots = \rho_s = r+1,\ \rho_{s+1} = \ldots = \rho_k = r,\\
kr + s = \rho,\ 0 \leqslant s \leqslant k-1,
\end{array}\right\} \quad (47)$$

и где элементы матрицы $\mathfrak{E}_\rho^{(k)}$ определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
\{\mathfrak{E}_\rho^{(k)}\}_{\alpha\beta} &= 1, \text{ если } \beta=\rho_1+\ldots+\rho_\sigma+1,\ \alpha=\sigma+1,\ \sigma=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\\
&= 0, \text{ если } \beta=\rho_1+\ldots+\rho_\sigma+1,\ \alpha\neq\sigma+1,\\
&= 0, \text{ если } \beta=\rho_1+\ldots+\rho_\sigma+\omega,\ \alpha\leqslant(\omega-1)k+\sigma,\ 2\leqslant\omega\leqslant\rho_{\sigma+1},\\
&= \frac{a_{\alpha-\sigma-1}}{(\alpha-\sigma-1)!}, \text{ если } \beta=\rho_1+\ldots+\rho_\sigma+2,\ \alpha>k+\sigma;\\
\{\mathfrak{E}_\rho^{(k)}\}_{\alpha,\,\beta+1} &= \frac{a_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\{\mathfrak{E}_\rho\}_{1\beta}+\frac{a_{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}\{\mathfrak{E}_\rho\}_{2\beta}+\\
&\quad+\ldots+\frac{a_k}{k!}\{\mathfrak{E}_\rho\}_{\alpha-k,\,\beta}, \text{ если } \beta=\rho_1+\ldots+\rho_\sigma+\omega,\\
&\quad\alpha>(\omega-1)k+\sigma,\ 2\leqslant\omega<\rho_{\sigma+1}.
\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

Матрица $\mathfrak{E}_\rho^{(1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1})$ есть не что иное, как

$$\mathfrak{E}_\rho(a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}).$$

§ 4. Собственные числа мажорантной матрицы

Обозначим через $|X|$ матрицу, элементы которой суть модули $|\{X\}_{kl}|$ элементов матрицы X, так что

$$\{|X|\}_{kl}=|\{X\}_{kl}| \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Если для двух матриц X и Y мы имеем n^2 соотношений

$$|\{X\}_{kl}|\leqslant\{Y\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

то будем писать

$$|X|\leqslant Y.$$

Если имеют место неравенства

$$|\{X\}_{kl}|<\{Y\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

то будем писать

$$|X|<Y.$$

Докажем следующую теорему:

Если

$$|A|\leqslant B$$

и если ξ и η суть максимумы модулей характеристических чисел матриц A и B соответственно, то

$$\xi\leqslant\eta.$$

Для доказательства заметим, что так как характеристические числа матрицы $A=\|a_{kl}\|$ суть корни уравнения

$$D(A-\xi)=\begin{vmatrix} a_{11}-\xi & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\xi & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\xi\end{vmatrix}=0,$$

то сумма всех характеристических чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ равна сумме диагональных элементов матрицы:

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}. \qquad (49)$$

Характеристические числа матрицы A^2 суть

$$\xi_1^2,\ \xi_2^2,\ \ldots,\ \xi_n^2.$$

Действительно,

$$D(A-\xi)=\prod_{k=1}^{n}(\xi_k-\xi),$$

но

$$(A-\xi I)(A+\xi I)=A^2-\xi^2 I,$$

следовательно,

$$D(A^2-\xi^2)=D(A-\xi)D(A+\xi)=\prod_{k=1}^{n}\{(\xi_k-\xi)(\xi_k+\xi)\}=\prod_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\xi^2),$$

откуда следует, что $\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^2$ суть характеристические числа матрицы A^2.

Для матрицы A^m (m — целое положительное) характеристическими числами являются $\xi_1^m, \xi_2^m, \ldots, \xi_n^m$.

Если

$$B=\|b_{kl}\|,$$

то по предположению мы имеем

$$|a_{kl}|\leqslant b_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

но тогда из самого определения произведения матриц вытекает, что

$$|\{A^m\}_{kl}|\leqslant\{B^m\}_{kl}$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{A^m\}_{kk}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\{B^m\}_{kk}. \qquad (50)$$

Если характеристические числа матрицы B суть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, то неравенства (50) эквивалентны неравенствам

$$|\xi_1^m+\xi_2^m+\ldots+\xi_n^m|\leqslant\eta_1^m+\eta_2^m+\ldots+\eta_n^m \qquad (m=1, 2, \ldots). \qquad (51)$$

Обозначим через η наибольшее из чисел $|\eta_1|, |\eta_2|, \ldots, |\eta_n|$ и через ξ — наибольшее из чисел $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|$.

Предположим сначала, что только одно из характеристических чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, например ξ_1, имеет модуль, равный ξ. Тогда существует положительное число $q<1$ такое, что

$$|\xi_2|<q\xi, \ \ldots, \ |\xi_n|<q\xi.$$

Неравенство (51) дает, следовательно,

$$\xi^m\leqslant n\eta^m+(n-1)q^m\xi^m \qquad (m=1, 2, \ldots),$$

откуда следует, что для произвольного целого положительного числа m

$$1\leqslant n\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^m+(n-1)q^m.$$

Это неравенство показывает, что должно иметь место $\eta\geqslant\xi$ и, следовательно, в рассматриваемом случае теорема доказана.

В общем случае, когда несколько из чисел $|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|$ равны ξ, мы можем использовать принцип непрерывности. Предположим, что $\eta<\xi$, и докажем, что это невозможно. Изменим несколько матрицу A так, что если измененная матрица A' имеет характеристические числа $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$

и если наибольшее из чисел $|\xi'_1|, |\xi'_2|, \ldots, |\xi'_n|$ есть ξ', то только одно из чисел $|\xi'_1|, |\xi'_2|, \ldots, |\xi'_n|$ равно ξ' и ξ' близко к ξ. Можно также заменить матрицу B на B' так, что будет иметь место $|A'| < B'$ и $\eta' < \xi'$, где η' — наибольший из модулей характеристических чисел матрицы B, а это невозможно в силу доказательства для предыдущего случая. Следовательно, и в общем случае мы имеем $\xi \leqslant \eta$.

§ 5. Ряды матриц

Рассмотрим последовательность матриц X_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$). Говорят, что последовательность X_μ имеет пределом матрицу X, и пишут

$$X = \lim_{\mu \to \infty} X_\mu, \tag{52}$$

если каждому положительному числу ε отвечает положительное число N такое, что для всех $\mu > N$ выполнено неравенство

$$|X - X_\mu| < \|\varepsilon\|.$$

Соотношение (52), очевидно, эквивалентно равенствам

$$\{X\}_{kl} = \lim_{\mu \to \infty} \{X_\mu\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Говорят, что ряд матриц

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu$$

сходится и имеет суммой матрицу X, и пишут

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu = X, \tag{53}$$

если последовательность $\sum_{\nu=1}^{\mu} X_\nu$ имеет пределом X. Мы имеем в этом случае n^2 следующих соотношений:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \{X_\nu\}_{kl} = \{X\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

эквивалентных равенству (53).

Назовем окрестностью матрицы X_0 множество всех матриц X, удовлетворяющих условию

$$|X - X_0| < A,$$

где A — матрица с положительными элементами. Это условие эквивалентно n^2 неравенствам

$$|\{X\}_{kl} - \{X_0\}_{kl}| < \{A\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

В частности, совокупность матриц

$$|X| < \|\rho\|$$

можно назвать окрестностью нулевой матрицы.

Пусть теперь X — переменная матрица с переменными элементами, и

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

последовательность постоянных чисел.

Рассмотрим ряд матриц

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu. \tag{54}$$

Если ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu| |X|^\nu \tag{55}$$

сходится, то ряд (54) также сходится, и в таком случае говорят, что ряд (54) сходится абсолютно.

Элементы матрицы $F(X)$, очевидно, суть функции элементов $\{X\}_{kl}$ матрицы X, представимые рядами Маклорена

$$\{F(X)\}_{kl} = \alpha_0 \delta_k^l + \alpha_1 \{X\}_{kl} + \\ + \sum_{\nu=2}^{\infty} \alpha_\nu \sum_{j_1, \ldots, j_{\nu-1}}^{(1, 2, \ldots, n)} \{X\}_{kj_1} \{X\}_{j_1 j_2} \ldots \{X\}_{j_{\nu-1} l} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{56}$$

где δ_k^l равно единице, если $k = l$, и равно нулю, если $k \neq l$, и где индексы $j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}$ пробегают независимо все целые значения $1, 2, \ldots, n$.

Очевидно, что сходимость одного из трех рядов (54), (55) и (56) в области

$$|X| < A \tag{57}$$

влечет сходимость двух других рядов.

Действительно, если ряд (54) сходится в области (57) и если матрица X принадлежит этой области, то можно найти матрицу Y, принадлежащую той же области (57), такую, что

$$|X| = tY,$$

где $0 < t < 1$. Ряд по t

$$F(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu Y^\nu t^\nu,$$

сходящийся в круге $|t| < 1$, абсолютно сходится, и, следовательно, ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_\nu| |X|^\nu$$

сходится, а тогда то же самое, очевидно, имеет место для ряда (56).

С другой стороны, так как ряды Тэйлора (56) абсолютно сходятся, то очевидно, что ряды (55) и (56) одновременно сходятся в области (57).

Если ряд (54) и, следовательно, ряды (55) и (56) сходятся в области (57), то говорят, что матрица $F(X)$, сумма ряда (54), является *аналитической функцией матрицы X, голоморфной в окрестности* (57) *нулевой матрицы*.

Функция матрицы X, голоморфная в каждой области

$$|X| < \|\rho\|,$$

где ρ — произвольное положительное число, называется *целой функцией*.

Если мы рассмотрим ряды Тэйлора (56), определяющие элементы матрицы $F(X)$, то увидим, что понятие множества всех аналитических функций от матрицы порядка n есть не что иное, как понятие частного класса n^2 аналитических функций, зависящих от n^2 числовых переменных. Например, каждый ряд (56) содержит не больше одного члена первой степени, не больше n членов второй степени.

Из предыдущего следует, что элементы целой функции от матрицы X суть целые функции элементов $\{X\}_{kl}$ этой матрицы.

§ 6. Определение аналитической функции от матрицы

Если ряд матриц

$$F(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \tag{58}$$

сходится в окрестности

$$|X|<\|R\|,$$

то ряд Маклорена комплексной переменной ζ

$$F(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\zeta^\nu \tag{59}$$

наверное сходится в круге $|\zeta|<R$, так как можно положить в (58) $X=\zeta I$.

Укажем теперь достаточное условие для того, чтобы ряд (58) давал голоморфную функцию матрицы X.

Теорема I. *Если функция комплексной переменной ζ, определенная формулой* (59), *голоморфна в круге $|\zeta|<\rho n$, то ряд* (58) *сходится абсолютно в окрестности нулевой матрицы*

$$|X|<\|\rho\|.$$

Доказательство. Из $|X|<A$ и $|Y|<B$ следует, что

$$|X|\,|Y|<AB,$$

следовательно, из $|X|<\|\rho\|$ следует, что $|X|^\nu<\|\rho\|^\nu$. Но простой подсчет показывает, что

$$\|\rho\|^2=\|n\rho^2\|,\ \ldots,\ \|\rho\|^\nu=\|n^{\nu-1}\rho^\nu\|.$$

Рассмотрим теперь окрестность нулевой матрицы $|X|<\|\rho'\|$, где $0<\rho'<\rho$; тогда

$$\sum_{\nu=0}^{p}|\alpha_\nu|\,|X|^\nu<\Big\|\sum_{\nu=0}^{p}|\alpha_\nu|\,n^{\nu-1}\rho'^\nu\Big\|. \tag{59_1}$$

Так как $F(\zeta)$ голоморфна в круге $|\zeta|<\rho n$, то ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu n^{\nu-1}\rho'^\nu$$

сходится абсолютно; неравенство (59_1) показывает, что ряд (58) сходится абсолютно в каждой окрестности $|X|<\|\rho'\|$, т. е. в окрестности $|X|<\|\rho\|$. Но тогда матрица $F(X)$ есть аналитическая функция матрицы X, голоморфная в окрестности $|X|<\|\rho\|$.

Замечание. Если радиус сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\zeta^\nu$$

равен ρn и если мы возьмем $X=\|\rho+\varepsilon\|$, где ε — положительное число, то ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu$$

расходится.

Далее мы докажем, что если матрица X имеет характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и если эти числа расположены внутри круга сходимости ряда (59), то ряд (58) будет также сходящимся, наоборот, если по крайней мере одно из характеристических чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ находится вне круга сходимости ряда (59), то ряд (58) будет расходящимся. Область абсолютной сходимости ряда (58) определяется аналогичным образом; ряд (58) сходится абсолютно, если характеристические числа матрицы $|X|$ расположены внутри круга сходимости ряда (59); если хоть одно из этих чисел лежит вне круга, то ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|\,|X|^\nu \tag{60}$$

расходится.

Рассмотрим теперь элементы матрицы $F(X)$. Эти элементы, согласно формулам (56), суть ряды Маклорена от элементов матрицы X.

Если функция комплексной переменной $F(\zeta)$, определенная рядом (59), целая, то по теореме, доказанной в начале этого параграфа, функция от матрицы $F(X)$ также целая. Ряды Маклорена (56) в этом случае в силу § 5 представляют собой также целые функции элементов $\{X\}_{kl}$ матрицы X.

Если радиус сходимости ряда (59) равен нулю, то ряд (58) расходится для каждой не нулевой матрицы X, за исключением матриц, все характеристические числа которых суть нули. Это вытекает из упомянутого выше общего критерия сходимости ряда (58), который мы установим в § 8.

Рассмотрим теперь случай, когда радиус сходимости ряда (59) конечен и равен ρn. По теореме I ряд (58) абсолютно сходится в области $|X|<\|\rho\|$ и определяет в этой области голоморфную функцию матрицы X. Согласно § 5 ряды (56) сходятся абсолютно для

$$|\{X\}_{kl}|<\rho \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n).$$

Будем теперь изменять матрицу X вдоль какого-нибудь пути L в пространстве матриц (которое имеет $2n^2$ измерений). Пусть принадлежащая окрестности $|X_1|<\|\rho\|$ матрица X_1 — начало этого пути и некоторая матрица X_2 — конец этого пути. Может оказаться, что мы сумеем аналитически продолжить все n^2 рядов (56) вдоль пути L. Мы получим тогда n^2 новых рядов Тэйлора, расположенных по степеням

$$\{X\}_{kl}-\{X_2\}_{kl}.$$

Матрица, элементами которой являются эти n^2 рядов Тэйлора, называется *аналитическим элементом аналитической функции* $F(X)$.

Аналитической функцией $F(X)$ матрицы X называется совокупность всех аналитических элементов этой функции, которые можно получить аналитическим продолжением, отправляясь от начального аналитического элемента

$$F(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu.$$

Достаточно рассмотреть счетное множество аналитических элементов функции $F(X)$, для того чтобы получить все ее аналитические продолжения.

Если n^2 элементов аналитического элемента функции $F(X)$, соответствующего матрице X_2, сходятся в окрестности

$$|\{X\}_{kl}-\{X_2\}_{kl}|<\rho \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n),$$

то мы будем говорить, что окрестность $|X-X_2|<\|\rho\|$ принадлежит области существования функции $F(X)$, которая должна быть рассматриваема в обобщенном пространстве Римана, т. е., что должны рассматривать окрестность матрицы X_2 как определяемую путем L.

Ниже мы докажем, что $F(X)$ — аналитическая функция во всей области D, где ряд (58) сходится в обычном смысле этого слова; эта область образована всеми матрицами с характеристическими числами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, находящимися внутри круга сходимости ряда (59). Следовательно, ряд (58) дает аналитическое продолжение функции $F(X)$ на область D.

§ 7. Операции с аналитическими функциями от матрицы

Теорема II. *Если два ряда одной и той же переменной матрицы*

$$F(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \quad \text{и} \quad G(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu X^\nu$$

принимают одинаковые значения для всех матриц, принадлежащих некоторой окрестности нулевой матрицы, то эти ряды тождественны, т. е.

$$\alpha_\nu=\beta_\nu \qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Доказательство следует непосредственно из равенства

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\zeta^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu\zeta^\nu,$$

которое мы получим, если положим $X=\zeta I$, где ζ достаточно мало.

Формальные вычисления со степенными рядами от одной матрицы вполне аналогичны вычислениям со степенными рядами от одной комплексной переменной.

Теорема III. *Пусть*

$$G(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)=\sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty}C_{p_1\ldots p_m}\eta_1^{p_1}\ldots\eta_m^{p_m}$$

целая функция числовых переменных $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$; если m функций от переменной ζ

$$\varphi_j(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu^{(j)}\zeta^\nu \qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

голоморфных в окрестности точки $\zeta=0$, удовлетворяют тождественно соотношению

$$G(\varphi_1(\zeta),\ldots,\varphi_m(\zeta))=0,$$

то m функций от матрицы X

$$\varphi_j(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu^{(j)}X^\nu \tag{61}$$

удовлетворяют тождественно аналогичному соотношению

$$G(\varphi_1(X),\ldots,\varphi_m(X))=\sum_{p_1,\ldots,p_m=0}^{\infty}C_{p_1\ldots p_m}\varphi_1^{p_1}(X)\ldots\varphi_m^{p_m}(X)=0 \tag{62}$$

в области существования всех функций (61).

Доказательство. Так как $G(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ — целая функция, то ряд $G(\varphi_1(\zeta),\ldots,\varphi_m(\zeta))$ можно расположить по степеням ζ:

$$G(\varphi_1(\zeta),\ldots,\varphi_m(\zeta))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu\zeta^\nu;$$

по условию теоремы все коэффициенты этого ряда суть нули: $\beta_\nu=0$ $(\nu=0,1,2\ldots)$.

По теореме из § 6 все ряды (61) абсолютно сходятся в некоторой окрестности нулевой матрицы

$$|X|<\|\rho\|$$

и представляют голоморфные функции матрицы X в этой окрестности. Следовательно, можно изменить порядок суммирования в ряде

$$G(\varphi_1(X),\ldots,\varphi_m(X)),$$

и мы получим:

$$G(\varphi_1(X),\ldots,\varphi_m(X))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu X^\nu. \tag{63}$$

В силу $\beta_\nu=0$ напишем равенство

$$G(\varphi_1(X),\ldots,\varphi_m(X))=0,$$

справедливое в области $|X|<\|\rho\|$. Но так как элементы матрицы

$$G(\varphi_1(X),\ldots,\varphi_m(X))$$

целые функции от $\{\varphi_j(X)\}_{kl}$, которые в свою очередь являются аналитическими функциями элементов матрицы X, то из теории функций нескольких комплексных переменных следует, что равенство (62) остается справедливым для всех матриц X, принадлежащих области существования всех функций $\varphi_j(X)$.

В частности, если мы используем замечание, которое было сделано в конце предыдущего параграфа и которое будет доказано ниже, то увидим, что равенство (62) справедливо для всех матриц X области D, если в этой области все ряды (61) сходятся в обычном смысле слова.

Замечание. *Пусть $F(\eta)$ — функция от η, голоморфная в точке $\eta=\alpha$, и $G(\xi)$ — функция от ξ, голоморфная в точке $\xi=0$ и удовлетворяющая условию $G(0)=\alpha$. В этом случае $H(\xi)=F(G(\xi))$ есть аналитическая функция, голоморфная в точке $\xi=0$, и мы имеем тождество*

$$F(G(X))=H(X)$$

для всех тех матриц X, принадлежащих области существования функции $G(X)$, для которых значения функции $Y=G(X)$ принадлежат в свою очередь области существования функции $F(Y)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы III.

Теорема IV. *Пусть*

$$Y=F(X)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \tag{64}$$

функция матрицы X, голоморфная в окрестности $|X|<\|\rho\|$, и пусть коэффициент α_1 отличен от нуля. Тогда существует единственная функция матрицы Y

$$X=\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu Y^\nu, \tag{65}$$

голоморфная в окрестности матрицы $Y=0$, *не содержащая свободного члена и дающая обращение ряда* (64), т. е. *удовлетворяющая уравнению*

$$Y=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu.$$

Доказательство. Для степенного ряда комплексной переменной ξ

$$\eta=F(\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\xi^\nu \tag{66}$$

существует единственное обращение вида

$$\xi=G(\eta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu\eta^\nu,$$

так что

$$F(G(\eta))=\eta.$$

Но тогда в окрестности нулевой матрицы функция

$$G(Y)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu Y^\nu \tag{67}$$

удовлетворяет по упомянутой выше теореме уравнению

$$F(G(Y))=Y. \tag{68}$$

Если мы совершаем аналитическое продолжение $G(Y)$ и если значения матрицы $G(Y)$ для некоторой окрестности $|Y-Y_0|<\|R\|$ принадлежат области существования функции $F(X)$, то формула (68) остается справедливой. В частности, если функция $Y=F(X)$ целая, то любое аналитическое продолжение функции (67) есть ветвь функции, обратной для $X(Y)$, т. е. она удовлетворяет уравнению (68).

В качестве примеров рассмотрим элементарные функции e^X, t^X, $\lg X$, X^t, где t — число; эти функции играют важную роль в теории дифференциальных уравнений.

Показательные функции e^X и t^X матрицы X определяются целыми разложениями

$$e^X=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}X^\nu, \tag{69}$$

$$t^X=e^{X\lg t}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(X\lg t)^\nu. \tag{70}$$

Логарифм $Y=\mathrm{Lg}\,X$ будем определять как множество всех матриц, удовлетворяющих уравнению $e^Y=X$. Из доказанного выше предложения и теоремы § 6 непосредственно получим, что ветвь матрицы $\mathrm{Lg}\,X$, приводящаяся к нулю для $X=I$, есть функция:

$$\mathrm{Lg}\,X=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(X-I)^\nu, \tag{71}$$

голоморфная в окрестности единичной матрицы $|X-I|<\left\|\frac{1}{n}\right\|$. Ниже мы увидим, как можно получить все значения $\mathrm{Lg}\,X$, отправляясь от ветви (71).

Функция X^t определяется соотношением $X^t=e^{t\,\mathrm{Lg}\,X}$. Ветвь этой функции, приводящаяся к I для $X=I$, есть функция матрицы X

$$X^t=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t(t-1)\ldots(t-\nu+1)}{\nu!}(X-I)^\nu, \tag{72}$$

голоморфная в указанной окрестности $|X-I|<\left\|\frac{1}{n}\right\|$ единичной матрицы.

§ 8. Собственные числа функции от матрицы

Если известны характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ матрицы X, то вычисление элементов матрицы

$$Y=f(X),$$

где $f(X)$ — аналитическая функция матрицы X, сводится к вычислению значений численной функции $f(\xi)$ и нескольких производных этой функции, отвечающих значениям независимой переменной $\xi=\xi_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Рассмотрим сначала функцию

$$Y=X^\nu,$$

где ν — целое положительное число.

Пусть

$$(\xi-\xi_1)^{\rho_1},\ (\xi-\xi_2)^{\rho_2},\ \ldots,\ (\xi-\xi_s)^{\rho_s} \qquad (\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s=n)$$

элементарные делители матрицы X. Каноническое представление матрицы X запишется в виде

$$X=S[J_{\rho_1}(\xi_1),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\xi_s)]S^{-1}. \tag{73}$$

Степень этой матрицы вычисляется по формулам (7) и (10):

$$X^\nu=S[J^\nu_{\rho_1}(\xi_1),\ \ldots,\ J^\nu_{\rho_s}(\xi_s)]S^{-1}; \tag{74}$$

но мы нашли в § 3, что

$$J^\nu_\rho(\xi)\doteq G_\rho\left(\xi^\nu,\ \frac{d\xi^\nu}{d\xi},\ \ldots,\ \frac{d^{\rho-1}\xi^\nu}{d\xi^{\rho-1}}\right). \tag{75}$$

Докажем теперь следующее предложение:

Теорема V. *Для того чтобы степенной ряд от матрицы* X

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \tag{76}$$

был сходящимся для матрицы X, *каноническое представление которой*

$$X=S[J_{\rho_1}(\xi_1),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\xi_s)]S^{-1}, \tag{77}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$f^{(\alpha)}(\xi_k)=\sum_{\nu=\alpha}^{\infty}\alpha_\nu\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\alpha+1)\,\xi_k^{\nu-\alpha} \quad (k=1, 2, \ldots, s;\ \alpha=0, 1, \ldots, \rho_k-1), \tag{78}$$

и тогда значение ряда (76) может быть представлено в виде

$$f(X)=S\,[G_{\rho_1}(f(\xi_1),\ f'(\xi_1),\ \ldots,\ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)),\ \ldots$$
$$\ldots,\ G_{\rho_s}(f(\xi_s),\ f'(\xi_s),\ \ldots,\ f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]\,S^{-1}. \tag{79}$$

В частности, если

$$X=S\,[\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n]\,S^{-1}, \tag{80}$$

то мы имеем

$$f(X)=S\,[f(\xi_1),\ \ldots,\ f(\xi_n)]\,S^{-1}. \tag{81}$$

Доказательство. В силу соотношения (74) находим:

$$\sum_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu X^\nu=S\left[\sum_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu J_{\rho_1}^{\nu}(\xi_1),\ \ldots,\ \sum_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu J_{\rho_s}^{\nu}(\xi_s)\right]S^{-1}. \tag{82}$$

Но, в силу соотношений (75) и (27), мы имеем

$$\sum_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu J_\rho^\nu(\xi)=G_\rho\left(\sum_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu\xi^\nu,\ \frac{d\left(\sum\limits_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu\xi^\nu\right)}{d\xi},\ \ldots,\ \frac{d^{\rho-1}\left(\sum\limits_{\nu=0}^{N}\alpha_\nu\xi^\nu\right)}{d\xi^{\rho-1}}\right).$$

Следовательно, для сходимости ряда

$$f(J_\rho(\xi))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu J_\rho^\nu(\xi)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды для $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $\ldots$, $f^{(\rho-1)}(\xi)$. В таком случае из формулы (82) следует теорема, и мы имеем:

$$f(J_\rho(\xi))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu J_\rho^\nu(\xi)=G(f(\xi),f'(\xi),\ \ldots,\ f^{(\rho-1)}(\xi))=$$
$$=\left\|\begin{matrix} f(\xi) & 0 & 0\ldots0\\ f'(\xi) & f(\xi) & 0\ldots0\\ \frac{1}{2!}f''(\xi) & f'(\xi) & f(\xi)\ldots0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{1}{(\rho-1)!}f^{(\rho-1)}(\xi) & \ldots & \ldots f(\xi)\end{matrix}\right\| \tag{83}$$

и

$$f(X)=S\,[f(J_{\rho_1}(\xi_1)),\ \ldots,\ f(J_{\rho_s}(\xi_s))]\,S^{-1}$$

или

$$f(X)=S\,[G_{\rho_1}(f(\xi_1),\ f'(\xi_1),\ \ldots,\ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)),\ \ldots$$
$$\ldots,\ G_{\rho_s}(f(\xi_s),\ f'(\xi_s),\ \ldots,\ f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]\,S^{-1}.$$

Следствие. Из доказанной теоремы следует, что для сходимости ряда (76), т. е. для сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha_\nu|\,|X|^\nu,$$

необходимо, чтобы характеристические числа $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$ матрицы $|X|$ находились внутри или на круге сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\xi^\nu,$$

и достаточно, чтобы они находились внутри этого круга.

Можно привести другое доказательство теоремы из § 4. Пусть $\eta=\max(|\eta_1|,\ \ldots,\ |\eta_n|)$ и $\xi=\max(|\xi_1|,\ \ldots,\ |\xi_n|)$, где $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ — характеристические числа матрицы X, тогда $\eta\geqslant\xi$. Действительно, в противном случае $\xi>r>\eta$, и пусть

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\xi^\nu}{r^\nu}.$$

Тогда, по доказанной теореме, ряд $f(|X|)$ сходится и ряд $f(X)$ расходится, что невозможно.

Следующая теорема дает характеристические числа и элементарные делители матрицы $f(X)$:

Теорема VI. *Если характеристические числа и элементарные делители матрицы X суть*

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s;\ (\xi-\xi_1)^{\rho_1},\ (\xi-\xi_2)^{\rho_2},\ \ldots,\ (\xi-\xi_s)^{\rho_s},$$

то характеристические числа и элементарные делители матрицы $f(X)$

$$\left.\begin{matrix} f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_s);\\ (\eta-f(\xi_1))^{\rho_1},\ (\eta-f(\xi_2))^{\rho_2},\ \ldots,\ (\eta-f(\xi_s))^{\rho_s},\end{matrix}\right\} \tag{84}$$

если только значения рядов $f'(\xi_1)$, $f'(\xi_2)$, $\ldots$, $f'(\xi_s)$ отличны от нуля. Если для характеристического числа ξ_α матрицы X ряд $f'(\xi_\alpha)=0$ и если, кроме того, $f'(\xi_\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\xi_\alpha)=0$, $f^{(k)}(\xi_\alpha)\neq0$, то характеристическому числу $f(\xi_\alpha)$ матрицы $f(X)$ отвечают k элементарных делителей матрицы $f(X)$:

$$(\eta-f(\xi_\alpha))^{\rho_{\alpha1}},\ \ldots,\ (\eta-f(\xi_\alpha))^{\rho_{\alpha k}},$$

где показатели $\rho_{\alpha1},\ \ldots,\ \rho_{\alpha k}$ определяются соотношениями:

$$\rho_{\alpha\beta}=E\frac{\rho_\alpha+k-\beta}{k}\qquad(\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

т. е. *если $\rho_\alpha=kr+s$, $0\leqslant s\leqslant k-1$, соотношениями*

$$\rho_{\alpha1}=\rho_{\alpha2}=\ldots=\rho_{\alpha s}=r+1,\ \rho_{\alpha,\,s+1}=\ldots=\rho_{\alpha k}=r.$$

Доказательство следует непосредственно из канонического представления матрицы $f(X)$.

Мы нашли в § 3, что

$$G_\rho(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1})=\mathfrak{G}_\rho(a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1})\,J_\rho(a_0)\,\mathfrak{G}_\rho(a_1,\ \ldots,\ a_{\rho-1})^{-1}, \tag{85}$$

если $a_1\neq0$.

Следовательно, в силу формулы (12) из § 2 и формулы (79), мы можем написать

$$f(X)=S\,[\mathfrak{G}_{\rho_1}(f'(\xi_1),\ \ldots,\ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)),\ \ldots,\ \mathfrak{G}_{\rho_s}(f'(\xi_s),\ \ldots,\ f^{(\rho_s-1)}(\xi_s)]\times$$
$$\times[J_{\rho_1}(f(\xi_1)),\ J_{\rho_2}(f(\xi_2)),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(f(\xi_s))]\times \tag{86}$$
$$\times[\mathfrak{G}_{\rho_1}(f'(\xi_1),\ \ldots,\ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)),\ \ldots,\ \mathfrak{G}_{\rho_s}(f'(\xi_s),\ \ldots,\ f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]^{-1}\,S^{-1},$$

если $f'(\xi_1),\ \ldots,\ f'(\xi_s)$ отличны от нуля.

Формула (86) дает каноническое представление матрицы $f(X)$. Она показывает, что (84) действительно являются характеристическими числами и элементарными делителями матрицы $f(X)$.

В общем случае, когда $f'(\xi_1), \ldots, f'(\xi_s)$ могут обращаться в нуль, мы должны использовать формулу (46) из § 3:

$$G_\rho(a_0, 0, \ldots, 0, a_k, \ldots, a_{\rho-1}) = \\ = \mathcal{E}_\rho^{(k)}(a_k, \ldots, a_{\rho-1})[J_{\rho_1}(a_0), \ldots, J_{\rho_k}(a_0)]\mathcal{E}_\rho^{(k)}(a_k, \ldots, a_{\rho-1})^{-1},$$

$$\rho_\alpha = E\,\frac{\rho+k-\alpha}{k} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Каноническое представление матрицы $f(X)$ записывается в этом случае следующим образом:

$$f(X) = S[\mathcal{E}_{\rho_1}^{(k_1)}(f^{(k_1)}(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}^{(k_s)}(f^{(k_s)}(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]\times \\ \times[J_{\rho_{11}}(f(\xi_1)), \ldots, J_{\rho_{1k_1}}(f(\xi_1)), \ldots, J_{\rho_{s1}}(f(\xi_s)), \ldots, J_{\rho_{sk_s}}(f(\xi_s))]\times \\ \times[\mathcal{E}_{\rho_1}^{(k_1)}(f^{(k_1)}(\xi_1), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_1)), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}^{(k_s)}(f^{(k_s)}(\xi_s), \ldots, f^{(\rho_s-1)}(\xi_s))]^{-1}S^{-1}, \quad (87)$$

где предполагается, что

$$f'(\xi_\alpha) = f''(\xi_\alpha) = \ldots = f^{(k_\alpha-1)}(\xi_\alpha) = 0, \quad f^{(k_\alpha)}(\xi_\alpha) \neq 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

$$\rho_{\alpha\beta} = E\,\frac{\rho_\alpha + k_\alpha - \beta}{k_\alpha} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$$

и $\mathcal{E}_\rho^{(1)}(a_1, \ldots, a_{\rho-1})$ означает $\mathcal{E}_\rho(a_1, \ldots, a_{\rho-1})$. Доказательство теоремы в общем случае получается из формулы (87).

Отметим еще несколько свойств матрицы

$$\mathcal{E}_\rho(a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}),$$

которыми мы воспользуемся ниже. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, голоморфные в окрестности точки $x=0$ и удовлетворяющие условию $\varphi(0)=0$. Из формул (81) и (85) следует, если предположить $|\xi|$ достаточно малым, $\varphi'(\xi) \neq 0$, $f'(\varphi(\xi)) \neq 0$, что

$$f(\varphi(J_\rho(\xi)) = G_\rho\left(f(\varphi(\xi)), \frac{df(\varphi(\xi))}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{\rho-1}f(\varphi(\xi))}{d\xi^{\rho-1}}\right) = \\ = \mathcal{E}_\rho\left(\frac{df(\varphi(\xi))}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{\rho-1}f(\varphi(\xi))}{d\xi^{\rho-1}}\right)J_\rho((f(\varphi(\xi)))\mathcal{E}_\rho\left(\frac{df(\varphi(\xi))}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{\rho-1}f(\varphi(\xi))}{d\xi^{\rho-1}}\right)^{-1};$$

с другой стороны, применяя два раза формулу (86), мы получим

$$\varphi(J_\rho(\xi)) = \mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))J_\rho(\varphi(\xi))\mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))^{-1};$$

$$f(\varphi(J_\rho(\xi))) = \mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi)))J_\rho(f(\varphi(\xi)))\times \\ \times\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi)))^{-1}\mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))^{-1}.$$

Но как мы указывали при выводе формулы (85), существует только одна матрица $\mathcal{E}_\rho$, приводящая матрицу

$$G_\rho\left(f(\varphi(\xi)), \frac{df(\varphi(\xi))}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{\rho-1}f(\varphi(\xi))}{d\xi^{\rho-1}}\right)$$

к каноническому виду $J_\rho(f(\varphi(\xi)))$ и обладающая тем свойством, что все элементы первого столбца суть нули, за исключением первого, равного единице. Следовательно, во всей области, где $\varphi(\xi)$ и $f(\varphi(\xi))$ голоморфны,

имеет место тождество

$$\mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi))) = \\ = \mathcal{E}_\rho\left(\frac{df(\varphi(\xi))}{d\xi}, \ldots, \frac{d^{\rho-1}f(\varphi(\xi))}{d\xi^{\rho-1}}\right). \quad (88)$$

В частности, если $\varphi(x)$ — обратная для $f(x)$ функция, так что

$$f(\varphi(\xi)) = \xi,$$

то из формулы (88) следует

$$\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi))) = \mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))^{-1}. \quad (89)$$

Если положить

$$f(x) = e^x - 1, \quad \varphi(x) = \log(1+x), \quad 1+x = \xi,$$

то получим

$$\mathcal{E}_\rho(\xi, \ldots, \xi) = \mathcal{E}_\rho\left(\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\xi^2}, \ldots, \frac{(-1)^\rho(\rho-2)!}{\xi^{\rho-1}}\right)^{-1}. \quad (90)$$

Соотношения (88) и (89) дают нам, между прочим, явные формулы для вычисления последовательных производных сложных функций и обратных функций. Например, сравнивая в равенстве (88) элементы, принадлежащие последней строке и второму столбцу, мы получим

$$\frac{d^{\rho-1}f(\varphi(\xi))}{d\xi^{\rho-1}} = (\rho-1)!\sum_{s=2}^{\rho}\{\mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi))\}_{\rho s}\{\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi))\}_{s2} = \\ = (\rho-1)!\sum_{s=2}^{\rho}\{\mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi)), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi)\}_{\rho s}\,\frac{f^{(s-1)}(\varphi(\xi))}{(s-1)!}. \quad (91)$$

Сравнивая те же элементы в равенстве

$$\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi)))\mathcal{E}_\rho(\varphi'(\xi), \ldots, \varphi^{(\rho-1)}(\xi)) = 1,$$

где $f(\varphi(\xi)) = \xi$, мы получим тождественное соотношение

$$\sum_{s=2}^{\rho-1}\{\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi)))\}_{\rho s}\,\frac{\varphi^{(s-1)}(\xi)}{(s-1)!} + [f'(\varphi(\xi))]^{\rho-1}\,\frac{\varphi^{(\rho-1)}(\xi)}{(\rho-1)!} = 0,$$

откуда следует формула для производных обратной функции:

$$\varphi^{(\rho-1)}(\xi) = -\frac{(\rho-1)!}{[f'(\varphi(\xi))]^{\rho-1}}\sum_{s=2}^{\rho-1}\{\mathcal{E}_\rho(f'(\varphi(\xi)), \ldots, f^{(\rho-1)}(\varphi(\xi)))\}_{\rho s}\,\frac{\varphi^{(s-1)}(\xi)}{(s-1)!}. \quad (92)$$

§ 9. Формула Лагранжа—Сильвестра

Формулы (79), (86) и (87), которые дают значение матрицы $f(X)$, содержат матрицу S. Но каноническое представление матрицы X можно записать бесконечным числом способов, так как матрица S в некоторой мере неопределенна. Можно было бы думать, имея в виду формулы (79) и (86), что значение функции $f(X)$ зависит от выбора матрицы S. Но поскольку функция $f(X)$ определена рядом (76), который вовсе не зависит от матрицы S, то формулы (79) и (86) должны давать результаты, независимые от выбора матрицы S.

Из этих формул следует, что элементы матрицы $f(X)$ суть рациональные функции элементов матрицы X, ее характеристических чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и значений

$$f(\xi_1), \ \ldots, \ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1), \ \ldots, \ f(\xi_s), \ \ldots, \ f^{(\rho_s-1)}(\xi_s).$$

Мы получим явные выражения этих функций. Сначала получим формулу, принадлежащую Кэли.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — характеристические числа матрицы X. Элементарные симметрические функции от этих чисел обозначим через

$$\left.\begin{aligned} i_1(X) &= \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \\ i_2(X) &= \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \ldots + \xi_{n-1}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_n(X) &= \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

и назовем эти функции инвариантами матрицы X. Очевидно

$$D(X-\xi) = \prod_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi) = (-1)^n [\xi^n - i_1(X)\xi^{n-1} + \ldots + (-1)^n i_n(X)]. \tag{94}$$

Тождество Кэли состоит в том, что

$$X^n - i_1(X)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n i_n(X) = 0 \tag{95}$$

для всех матриц X с характеристическими числами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Доказательство этого тождества очень простое. Например, если все характеристические числа матрицы X различны или, более общо, если все элементарные делители этой матрицы простые, то имеет место формула (81).

Если мы возьмем

$$f(\xi) = \xi^n - i_1(X)\xi^{n-1} + \ldots + (-1)^n i_n(X) = \prod_{k=1}^{n} (\xi - \xi_k),$$

то получим

$$f(\xi_1) = \ldots = f(\xi_n) = 0$$

и, следовательно, в силу формулы (81):

$$f(X) = 0,$$

т. е. тождество (95).

Общий случай может быть сведен к предыдущему случаю, так как левая часть тождества (95) есть непрерывная функция матрицы X и так как в любой окрестности матрицы X имеются матрицы, все характеристические числа которых различны.

Другое доказательство тождества Кэли в общем случае основывается на общей формуле (79).

Если мы возьмем

$$f(\xi) = \xi^n - i_1(X)\xi^{n-1} + \ldots + (-1)^n i_n(X) = \prod_{k=1}^{s} (\xi - \xi_k)^{\rho_k},$$

то получим

$$f(\xi_1) = \ldots = f^{(\rho_1-1)}(\xi_1) = 0, \ \ldots, \ f(\xi_s) = \ldots = f^{(\rho_s-1)}(\xi_s) = 0 \tag{96}$$

и, следовательно, в силу формулы (79),

$$f(X) = 0.$$

Более того, пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ — различные характеристические числа матрицы X и пусть s_k — максимальная степень всех элементарных делителей,

принадлежащих характеристическому числу η_k. Положим:

$$g(\eta) = \prod_{k=1}^{p} (\eta - \eta_k)^{s_k},$$

тогда мы имеем равенства

$$g(\eta_k) = g'(\eta_k) = \ldots = g^{(s_k-1)}(\eta_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

и, следовательно, в силу формулы (79), примененной к функции $g(X)$:

$$\prod_{k=1}^{p} (X - \eta_k)^{s_k} = 0.$$

Степень этого уравнения относительно X наверное меньше n, если по крайней мере одному из характеристических чисел матрицы X отвечают два или более элементарных делителя.

Пусть теперь

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_p$$

различные характеристические числа матрицы X и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ — их порядки кратности, так что

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p = n.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu,$$

голоморфную в круге C с центром $\xi = 0$, содержащем все точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ внутри. Обозначим характеристическую функцию матрицы X через

$$D(X-\xi) = (-1)^n (\xi - \xi_1)^{\mu_1} \ldots (\xi - \xi_p)^{\mu_p} = h(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p). \tag{97}$$

Особенностями функции

$$\frac{f(\xi)}{h(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)}$$

внутри круга C являются полюсы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, кратности которых не выше $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$. Главные части этой функции в окрестности указанных полюсов соответственно суть

$$\frac{r_k(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)}{(\xi - \xi_k)^{\mu_k}},$$

где $r_k(\xi \mid \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ есть полином относительно ξ степени не выше $\mu_k - 1$. Функция от ξ

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{h(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p)} - \sum_{k=1}^{p} \frac{r_k(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p)}{(\xi - \xi_k)^{\mu_k}}$$

голоморфна в окрестности точек $\xi = \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ и, следовательно, внутри круга C. Введя полиномы

$$h_k(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p) = \frac{h(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p)}{(\xi - \xi_k)^{\mu_k}}, \tag{98}$$

получим тождество

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{p} r_k(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p) h_k(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p) + \varphi(\xi \mid \xi_1, \ldots, \xi_p). \tag{99}$$

Сумма в правой части, очевидно, есть интерполяционный полином Лагранжа степени не выше $n-1$, имеющий вместе с производными до порядка μ_k-1 включительно в точках ξ_k те же самые значения, что и функция $f(\xi)$. Обозначим этот полином через $Q(\xi)$.

В соотношении (99) численное переменное ξ может быть заменено матрицей X, так как ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu$, в силу теоремы из § 8, сходится. Формула (83) дает

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=$$
$$=S\,[G_{\rho_1}(f(\xi_1'),\ \ldots,\ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1')),\ \ldots,\ G_{\rho_s}(f(\xi_s'),\ \ldots,\ f^{(\rho_s-1)}(\xi_s'))]\,S^{-1},$$

если

$$X=S\,[J_{\rho_1}(\xi_1'),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\xi_s')]\,S^{-1},$$

где $s\geqslant p$ и $\xi_1',\ \ldots,\ \xi_s'$ суть числа $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_p$, может быть повторяющиеся несколько раз. Но, как мы видели,

$$f^{(\alpha)}(\xi_k')=Q^{(\alpha)}(\xi_k')\qquad(k=1,2,\ldots,s;\ \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho_k-1),$$

следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=S\,[G_{\rho_1}(Q(\xi_1'),\ \ldots,\ Q^{(\rho_1-1)}(\xi_1')),\ \ldots,\ G_{\rho_s}(Q(\xi_s'),\ \ldots,\ Q^{(\rho_s-1)}(\xi_s'))]\,S^{-1},$$

и, применяя формулу (83) еще один раз, будем иметь

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=Q(X).$$

В результате получим

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=\sum_{k=1}^{p}r_k(X\,|\,\xi_1,\ \ldots,\ \xi_p)\,h_k(X\,|\,\xi_1,\ \ldots,\ \xi_p).\tag{100}$$

В частном случае, когда все характеристические числа простые

$$p=n,\ \mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_n=1,$$

формула (100) дает представление

$$f(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}f(\xi_k).\tag{101}$$

Формулы (100) и (101), которые дают представление степенных рядов от матрицы X в виде полиномов от матрицы X, будем называть формулами Лагранжа — Сильвестра.

Формула (101) есть частный случай формулы (100), с другой стороны, формулу (100) можно получить из формулы (101) предельным переходом, делая совпадающими некоторые характеристические числа.

Например, для $n=2$ формулы (100) и (101) дают

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{\xi_2 f(\xi_1)-\xi_1 f(\xi_2)}{\xi_2-\xi_1}+\dfrac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}X, & \text{если}\quad \xi_1\neq\xi_2,\\ f(\xi_1)-\xi_1 f'(\xi_1)+f'(\xi_1)X, & \text{если}\quad \xi_1=\xi_2.\end{cases}\tag{102}$$

Мы доказали, таким образом, следующее предложение:

Теорема VII. *Если характеристические числа матрицы X находятся внутри круга сходимости ряда*

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\xi^\nu,$$

то ряд от матрицы X

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu$$

может быть представлен при помощи формулы (100) *или* (101) *полиномом от матрицы X степени не выше $n-1$.*

Ввиду большой важности формулы Лагранжа — Сильвестра дадим другое доказательство этой формулы.

В § 3 мы рассмотрели степени канонической матрицы $J_\rho(0)$; для простоты записи $J_\rho(0)$ будем обозначать просто через J_ρ. Мы видели тогда, что

$$\{J_\rho^\nu\}_{kl}=\begin{cases}1, & \text{если}\ k-l=\nu,\\ 0, & \text{если}\ k-l\neq\nu.\end{cases}\tag{103}$$

В частности $J_\rho^0=I$. Пусть еще

$$E_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(rq)}=[\Xi_1,\ \ldots,\ \Xi_s]\qquad(r=1,2,\ldots,s;\ q=0,1,2,\ldots,\rho_r-1),\tag{104}$$

где

$$\Xi_1=\ldots=\Xi_{r-1}=\Xi_{r+1}=\ldots=\Xi_s=0,\ \Xi_r=J_{\rho_r}^q.$$

Легко проверить, что мы имеем следующие формулы для умножения матриц (104):

$$E_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(rq_1)}E_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(rq_2)}=\begin{cases}E_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(r,\,q_1+q_2)}, & \text{если}\quad q_1+q_2<\rho_r,\\ 0, & \text{если}\quad q_1+q_2\geqslant\rho_r,\end{cases}\tag{105}$$
$$E_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(r_1q_1)}E_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(r_2q_2)}=0,\quad\text{если}\quad r_1\neq r_2.$$

Пусть теперь X — произвольная матрица порядка

$$n=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s$$

с характеристическими числами $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_s$ и элементарными делителями

$$(\xi-\xi_1)^{\rho_1},\ \ldots,\ (\xi-\xi_s)^{\rho_s}.$$

Тогда мы имеем каноническое представление

$$X=S\,[\xi_1+J_{\rho_1},\ \ldots,\ \xi_s+J_{\rho_s}]\,S^{-1}.\tag{106}$$

Полагая

$$X^{(rq)}=SE_{(\rho_1\ldots\rho_s)}^{(rq)}S^{-1}\qquad(q=0,\ 1,\ \ldots,\ \rho_r-1,\ r=1,\ 2,\ \ldots,\ s);\tag{107}$$

имеем представление

$$X=\sum_{r=1}^{s}(X^{(r0)}\xi_r+X^{(r1)}),\tag{108}$$

где $X^{(r1)}=0$, если $\rho_r=1$, так как $J_1=0$.

Подстановки $X^{(rq)}$ будем называть *приведенными матрицами*.

В частности, если элементарные делители простые, следовательно,

$$s=n,\ \rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_n=1,$$

то формула (108) дает

$$X=\sum_{r=1}^{n} X^{(r)}\xi_r, \quad \text{где } X^{(r)}=X^{(r0)}. \tag{109}$$

Рассмотрим сначала частный случай.

Замечая, что

$$X^{(1)}=S\begin{Vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&0\end{Vmatrix}S^{-1}, \quad X^{(2)}=S\begin{Vmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&0\end{Vmatrix}S^{-1}, \dots \tag{110}$$

$$X^{(n)}=S\begin{Vmatrix}0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&1\end{Vmatrix}S^{-1},$$

получаем следующее правило умножения матриц $X^{(r)}$:

$$X^{(k)}X^{(l)}=0, \quad \text{если } k\neq l; \quad (X^{(k)})^{\mu}=X^{(k)}; \quad \sum_{r=1}^{n}X^{(r)}=I. \tag{111}$$

В соответствии с этими формулами мы легко получим из (109) представление μ-й степени матрицы X:

$$X^{\mu}=\sum_{r=1}^{n}X^{(r)}\xi_r^{\mu}. \tag{112}$$

Пусть теперь

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\xi^\nu$$

голоморфная функция от ξ в окрестности начала координат и пусть все ряды $f(\xi_k)$ сходятся, мы имеем тогда

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}X^{(k)}\xi_k^{\nu}\alpha_\nu=\sum_{k=1}^{n}X^{(k)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\xi_k^\nu=\sum_{k=1}^{n}X^{(k)}f(\xi_k). \tag{113}$$

Если, кроме того, все характеристические числа различны, то мы имеем представление

$$X^{(k)}=\frac{(X-\xi_1)\dots(X-\xi_{k+1})(X-\xi_{k-1})\dots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_n)}. \tag{114}$$

Действительно, формула (112) дает

$$\sum_{k=1}^{n}X^{(k)}\xi_k^{\mu}=X^{\mu} \qquad (\mu=0,1,\dots,n-1). \tag{115}$$

Соответствующая система линейных относительно $U_1, U_2, \dots, U_n$ уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}U_k\xi_k^{\mu}=\xi^{\mu} \qquad (\mu=0,1,\dots,n-1) \tag{116}$$

имеет единственное решение, которое дается формулами

$$U_k=\frac{(\xi-\xi_1)\dots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\dots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_n)}$$

(согласно теории интерполирования), и эти формулы являются следствиями соотношений (116). Следовательно, из формул (115) мы можем получить

выражения (114); таким образом, применяя формулу (113), мы получим вновь формулу Лагранжа — Сильвестра

$$f(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\dots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\dots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_n)}f(\xi_k). \tag{117}$$

Если элементарные делители матрицы X простые, но среди характеристических чисел имеются равные, то обозначим различные числа через $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$. Формула (113) показывает тогда, что

$$f(X)=\sum_{k=1}^{p}Y^{(k)}f(\eta_k), \tag{118}$$

где матрицы $Y^{(k)}$ не зависят от функции $f(\xi)$.

Если мы будем последовательно полагать $f(X)=X^{\mu}$ $(\mu=0, 1, \dots, p-1)$, то получим равенства

$$X^{\mu}=\sum_{k=1}^{p}Y^{(k)}\eta_k^{\mu} \qquad (\mu=0, 1, \dots, p-1), \tag{119}$$

откуда находим

$$Y^{(k)}=\frac{(X-\eta_1)\dots(X-\eta_{k-1})(X-\eta_{k+1})\dots(X-\eta_p)}{(\eta_k-\eta_1)\dots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\dots(\eta_k-\eta_p)} \qquad (k=1, \dots, p). \tag{120}$$

В этом случае мы имеем, следовательно, формулу

$$f(X)=\sum_{k=1}^{p}\frac{(X-\eta_1)\dots(X-\eta_{k-1})(X-\eta_{k+1})\dots(X-\eta_p)}{(\eta_k-\eta_1)\dots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\dots(\eta_k-\eta_p)}f(\eta_k). \tag{121}$$

Вернемся теперь к общему случаю кратных элементарных делителей матрицы X.

Заметим, что в соответствии с формулой (105) умножение матриц $X^{(rq)}$ (107) производится по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}&X^{(rq_1)}X^{(rq_2)}=\begin{cases}X^{(r,\,q_1+q_2)} & \text{если } q_1+q_2<\rho_r,\\ 0, & \text{если } q_1+q_2\geqslant\rho_r,\end{cases}\\ &X^{(r_1q_1)}X^{(r_2q_2)}=0, \qquad\qquad \text{если } r_1\neq r_2.\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

В силу формулы (108) мы получим, таким образом, следующее представление степени матрицы X:

$$X^{\mu}=\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{\rho_r-1}X^{(rq)}\xi_r^{\mu-q}\binom{\mu}{q}. \tag{123}$$

Если $f(\xi)$ — функция, голоморфная в окрестности $\xi=0$, то мы имеем

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu=\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{\rho_r-1}X^{(rq)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\binom{\nu}{q}\xi_r^{\nu-q}=\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{\rho_r-1}X^{(rq)}\frac{f^{(q)}(\xi_r)}{q!}, \tag{124}$$

предполагая сходимость всех рядов $f^{(q)}(\xi_r)$.

Числа ξ_r в этой формуле не должны быть обязательно различными. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ — различные характеристические числа матрицы X и $r_1, r_2, \dots, r_p$ — их порядки кратности. Мы имеем тогда по формуле (124)

$$f(X)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=0}^{s_k-1}Y^{(kq)}\frac{f^{(q)}(\eta_k)}{q!}, \tag{125}$$

где $Y^{(kq)}$ есть сумма всех $X^{(rq)}$, которые отвечают одному и тому же характеристическому числу, но различным элементарным делителям, и s_k есть максимальная кратность всех этих элементарных делителей.

Матрицы $Y^{(kq)}$ зависят только от матрицы X и не зависят от вида функции $f(\xi)$. Полагая

$$f(\xi)=1,\ \xi,\ \ldots,\ \xi^{m-1} \qquad (m=s_1+s_2+\ldots+s_p),$$

мы получим m уравнений для определения m неизвестных $Y^{(kq)}$:

$$X^{\mu}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=0}^{s_k-1}Y^{(kq)}\binom{\mu}{q}\eta_k^{\mu-q} \qquad (\mu=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Определитель этой системы, который является обобщением определителя Вандермонда, отличен от нуля, следовательно, матрицы $Y^{(kq)}$ определяются единственным образом как полиномы от X степени не выше $m-1$ с коэффициентами, зависящими от характеристических чисел матрицы X.

Мы получим более общую формулу, если положим

$$f(X)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=0}^{r_k-1}Z^{(kq)}\frac{f^{(q)}(\eta_k)}{q!}, \tag{126}$$

где r_k — порядок кратности характеристического числа η_k матрицы X. Применяя эту формулу к функциям

$$f(X)=X^{\mu} \qquad (\mu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

мы получим систему уравнений для определения n неизвестных $Z^{(kq)}$:

$$X^{\mu}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{q=0}^{r_k-1}Z^{(kq)}\binom{\mu}{q}\eta_k^{\mu-q} \qquad (\mu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Матрицы $Z^{(kq)}$ определяются при помощи этой системы единственным образом как полиномы от X степени не выше $n-1$ с коэффициентами, зависящими от характеристических чисел матрицы X. Подставляя выражения матриц $Z^{(kq)}$ в формулу (126), получим формулу, которая должна совпадать с общей формулой Лагранжа — Сильвестра (100), так как матрицы $Z^{(kq)}$ определяются, как мы уже говорили, единственным образом.

В случае, когда несколько элементарных делителей матрицы X отвечают одному и тому же характеристическому числу, некоторые из матриц $Z^{(kq)}$ обращаются в нуль и формула (126) преобразуется в формулу (125).

Например, для $n=2$ вторая из формул (102) в случае, когда матрица X имеет два разных элементарных делителя, т. е. в случае, когда

$$X=\begin{Vmatrix}\xi_1 & 0\\ 0 & \xi_1\end{Vmatrix}=\xi_1,$$

преобразуется в

$$f(X)=f(\xi_1).$$

Дадим применение формулы Лагранжа — Сильвестра к одному простому примеру.

Рассмотрим систему трех линейных однородных уравнений относительно функций y_1, y_2, y_3 переменной x:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=\frac{\alpha y_1+\beta y_2+\gamma y_3}{(x-a)^r},\\ \frac{dy_2}{dx}&=\frac{\delta y_2+\eta y_3}{(x-a)^r},\\ \frac{dy_3}{dx}&=\frac{\theta y_3}{(x-a)^r},\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

где α, β, γ, δ, η и θ — постоянные числа; предположим сверх того, что α, δ и θ различны.

Введем матрицу

$$U=\begin{Vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ \beta & \delta & 0\\ \gamma & \eta & \theta\end{Vmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{matrix}y_{11}(x), & y_{12}(x), & y_{13}(x),\\ y_{21}(x), & y_{22}(x), & y_{23}(x),\\ y_{31}(x), & y_{32}(x), & y_{33}(x),\end{matrix}$$

три линейно-независимых решения системы (127), так что

$$\begin{vmatrix}y_{11} & y_{12} & y_{13}\\ y_{21} & y_{22} & y_{23}\\ y_{31} & y_{32} & y_{33}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Введем матрицу

$$Y(x)=\begin{Vmatrix}y_{11}(x) & y_{12}(x) & y_{13}(x)\\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & y_{23}(x)\\ y_{31}(x) & y_{32}(x) & y_{33}(x)\end{Vmatrix};$$

очевидно, что производная матрицы Y выражается формулой

$$\frac{dY}{dx}=\begin{Vmatrix}\frac{dy_{11}}{dx} & \frac{dy_{12}}{dx} & \frac{dy_{13}}{dx}\\ \frac{dy_{21}}{dx} & \frac{dy_{22}}{dx} & \frac{dy_{23}}{dx}\\ \frac{dy_{31}}{dx} & \frac{dy_{32}}{dx} & \frac{dy_{33}}{dx}\end{Vmatrix}.$$

Но мы имеем, например,

$$\frac{dy_{11}}{dx}=\frac{\alpha y_{11}+\beta y_{12}+\gamma y_{13}}{(x-a)^r}, \qquad \frac{dy_{12}}{dx}=\frac{\delta y_{12}+\eta y_{13}}{(x-a)^r},$$

следовательно, получаем дифференциальное уравнение для матрицы $Y(x)$

$$\frac{dY}{dx}=\frac{YU}{(x-a)^r}. \tag{128}$$

Если $r=1$, то решение этого уравнения есть

$$Y=C(x-a)^U, \tag{129}$$

где C — произвольная постоянная матрица.

Действительно, мы имеем общие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{de^{Uf(x)}}{dx} &= \frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{U^{\nu}f(x)^{\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{U^{\nu}f(x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f'(x) = e^{Uf(x)}Uf'(x), \\ \frac{d\,(f(x))^{U}}{dx} &= \frac{d}{dx}e^{U\lg f(x)} = (f(x))^{U}U\frac{f'(x)}{f(x)} = U\,(f(x))^{U-1}f'(x). \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Но, дифференцируя равенство (129), получим

$$\frac{dY}{dx} = C\,(x-a)^{U}U\frac{1}{x-a} = \frac{YU}{x-a}.$$

Если $r \neq 1$, решение уравнения (128) есть

$$Y = Ce^{-\frac{1}{r-1}\frac{U}{(x-a)^{r-1}}}. \tag{131}$$

Действительно,

$$\frac{dY}{dx} = Ce^{-\frac{1}{r-1}\frac{U}{(x-a)^{r-1}}}\cdot U\frac{1}{(x-a)^{r}} = \frac{YU}{(x-a)^{r}}.$$

Остается найти выражения функций (129) и (131).

Так как характеристическое уравнение матрицы U

$$D(U-\xi) = \begin{vmatrix} \alpha-\xi & 0 & 0 \\ \beta & \delta-\xi & 0 \\ \gamma & \eta & \theta-\xi \end{vmatrix} = (\alpha-\xi)(\delta-\xi)(\theta-\xi) = 0,$$

то характеристические числа матрицы U:

$$\xi_1 = \alpha, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_3 = \theta.$$

Формула Лагранжа—Сильвестра дает:

$$f(U) = \frac{U^2-(\delta+\theta)U+\delta\theta}{(\alpha-\delta)(\alpha-\theta)}f(\alpha) + \frac{U^2-(\alpha+\theta)U+\alpha\theta}{(\delta-\alpha)(\delta-\theta)}f(\delta) + \frac{U^2-(\alpha+\delta)U+\alpha\delta}{(\theta-\alpha)(\theta-\delta)}f(\theta).$$

Подставляя выражение матрицы U, находим:

$$\begin{aligned} f(U) = &\begin{Vmatrix} (\alpha-\delta)(\alpha-\theta) & 0 & 0 \\ \beta(\alpha-\theta) & 0 & 0 \\ \gamma(\alpha-\delta)+\beta\eta & 0 & 0 \end{Vmatrix}\frac{f(\alpha)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\theta)} + \\ &+ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta(\delta-\theta) & (\delta-\alpha)(\delta-\theta) & 0 \\ \beta\eta & \eta(\delta-\alpha) & 0 \end{Vmatrix}\frac{f(\delta)}{(\delta-\alpha)(\delta-\theta)} + \\ &+ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta\eta+\gamma(\theta-\delta) & \eta(\theta-\alpha) & (\theta-\alpha)(\theta-\delta) \end{Vmatrix}\frac{f(\theta)}{(\theta-\alpha)(\theta-\delta)}. \end{aligned} \tag{132}$$

Примем $C = I$; полагая в (132)

$$f(\alpha) = (x-a)^{\alpha}, \quad f(\delta) = (x-a)^{\delta}, \quad f(\theta) = (x-a)^{\theta},$$

мы получим выражение матрицы $(x-a)^{U}$ и, следовательно, три независимых решения, т. е. полное решение предложенной системы для случая $r = 1$:

$$Y(x) = (x-a)^{U} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (x-a)^{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{(\alpha-\delta)}\left[(x-a)^{\alpha}-(x-a)^{\delta}\right] & (x-a)^{\delta} & 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha-\theta}\left[(x-a)^{\alpha}-(x-a)^{\theta}\right] + \frac{\beta\eta\left[(\delta-\theta)(x-a)^{\alpha}+(\theta-\alpha)(x-a)^{\delta}+(\alpha-\delta)(x-a)^{\theta}\right]}{(\alpha-\delta)(\alpha-\theta)(\delta-\theta)}; & \frac{\eta}{\delta-\theta}\left[(x-a)^{\delta}-(x-a)^{\theta}\right]; & (x-a)^{\theta} \end{Vmatrix}.$$

В случае $r \neq 1$ мы должны положить в формуле (132)

$$f(\alpha) = e^{-\frac{1}{r-1}\frac{\alpha}{(x-a)^{r-1}}}, \quad f(\delta) = e^{-\frac{1}{r-1}\frac{\delta}{(x-a)^{r-1}}}, \quad f(\theta) = e^{-\frac{1}{r-1}\frac{\theta}{(x-a)^{r-1}}},$$

для того чтобы найти $e^{-\frac{1}{r-1}\frac{U}{(x-a)^{r-1}}}$, т. е. три независимых решения рассматриваемой системы для случая $r \neq 1$.

§ 10. Использование формулы Лагранжа—Сильвестра для аналитического продолжения функции от матрицы

Мы получили в предыдущем параграфе формулу Лагранжа—Сильвестра, которая дает значение функции от матрицы X. В случае, когда все характеристические числа матрицы X различны, каноническое представление матрицы X есть

$$X = S\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\,S^{-1}, \tag{133}$$

эта формула имеет вид

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}f(\xi_k). \tag{134}$$

Значение этой формулы состоит в том, что она позволяет совершать аналитическое продолжение функции от матрицы. Мы определили аналитическую функцию от матрицы X рядом

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu}X^{\nu}, \tag{135}$$

абсолютно сходящимся в окрестности $|X| < \|\rho\|$, который позволяет вычислять элементы этой функции как функции элементов $\{X\}_{kl}$ матрицы X по формулам

$$\{f(X)\}_{kl} = \alpha_0\delta_k^l + \alpha_1\{X\}_{kl} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\alpha_{\nu}\left(\sum_{r_1,\ldots,r_{\nu-1}=1}^{n}\{X\}_{kr_1}\{X\}_{r_1r_2}\ldots\{X\}_{r_{\nu-1}l}\right). \tag{136}$$

Если функция комплексной переменной

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu}\zeta^{\nu} \tag{137}$$

целая, то функция $f(X)$ сама целая, так же как и ряды Тэйлора (136). Если радиус сходимости ряда (137) равен нулю, то ряд (135) сходится лишь для тех матриц X, все характеристические числа которых суть нули. Действительно, в этом случае по тождеству Кэли мы имеем $X^n = 0$ и, следовательно,

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu X^\nu.$$

Рассмотрим теперь случай, когда радиус сходимости ряда (137) конечен и равен ρn.

Мы говорили уже в § 6, что в этом случае под аналитической функцией матрицы X понимаем множество всех аналитических продолжений этой функции, которые можно получить, отправляясь от аналитического элемента (135).

Следует заметить, что аналитическое продолжение матрицы $f(X)$ с помощью рядов матриц невозможно; в этом пункте аналогия с обычными функциями одной комплексной переменной нарушается. Действительно, предположим, что мы хотим записать разложение функции $f(X)$ в окрестности матрицы X_0, где X_0 принадлежит окрестности

$$|X| < \|\rho\|,$$

в которой ряд (135) сходится абсолютно. Подставляя в ряд

$$X = X_0 + (X - X_0) = X_0 + Y,$$

получим

$$X^2 = (X_0 + Y)^2 = X_0^2 + X_0 Y + Y X_0 + Y^2,$$

$$X^\nu = (X_0 + Y)^\nu = X_0^\nu + X_0^{\nu-1} Y + X_0^{\nu-2} Y X_0 + \\ + X_0^{\nu-3} Y X_0^2 + \ldots + X_0 Y X_0^{\nu-2} + Y X_0^{\nu-1} + \\ + X_0^{\nu-2} Y^2 + X_0^{\nu-3} Y X_0 Y + \ldots + Y^\nu.$$

Так как умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, то мы не можем выполнить приведение подобных членов (содержащих, например, Y в первой степени). Обычный результат

$$f(X) = f(\xi_0) + f'(\xi_0) Y + \frac{f''(\xi_0)}{2!} Y^2 + \ldots$$

получим лишь в случае, когда $X_0 = \xi_0 I$, но этого недостаточно для того, чтобы получить все возможные аналитические продолжения, как это очевидно на примере $\operatorname{Lg} X$.

Мы определяем, следовательно, аналитическое продолжение функции $f(X)$ как матрицу, элементы которой $\{f(X)\}_{kl}$ получаются аналитическим продолжением рядов Тэйлора (136) от n^2 переменных $\{X\}_{kl}$.

Мы уже доказали, что ряд (135) и, следовательно, ряды Тэйлора (136) сходятся абсолютно для всех матриц X таких, что характеристические числа матрицы $|X|$ находятся внутри круга радиуса ρn с центром в начале координат. Возьмем матрицу X_1, удовлетворяющую этому условию. Ряды (136) могут быть преобразованы в ряды по степеням $\{X\}_{kl} - \{X_1\}_{kl}$, которые будут абсолютно сходиться в некоторой области матриц X. Продолжая таким же образом, мы можем получить все аналитические продолжения функции $f(X)$.

Рассмотрим теперь формулу (134). Если матрица X изменяется непрерывным образом, то ее характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, которые являются аналитическими функциями от $\{X\}_{kl}$, изменяются также непрерывно.

Предположим сначала, что все характеристические числа $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}$ матрицы $X^{(0)}$ различны и расположены внутри круга $|\xi| < n\rho$ и что функции $f(\xi_k)$ определяются рядами

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi_k^\nu.$$

Элементы матрицы, которая стоит в правой части формулы (134), в этом случае суть аналитические функции элементов

$$\{X\}_{kl} - \{X^{(0)}\}_{kl}.$$

Если матрица $X^{(0)}$ принадлежит области абсолютной сходимости ряда (135), то получающиеся ряды должны быть тождественны с рядами, которые мы получим из рядов Маклорена (136), разлагая их по степеням $\{X\}_{kl} - \{X^{(0)}\}_{kl}$. Отсюда следует, что если мы совершим аналитическое продолжение матрицы $f(X)$ при помощи формулы Лагранжа — Сильвестра, то получим тот же самый результат, как и при продолжении при помощи рядов Тейлора по $\{X\}_{kl}$. Таким образом, мы имеем право продолжать функцию от матрицы при помощи формулы Лагранжа — Сильвестра. Эта формула показывает, что для того, чтобы совершить такое продолжение, достаточно найти аналитические продолжения числовых функций от характеристических чисел матрицы X.

Остается рассмотреть случай, когда несколько характеристических чисел матрицы X совпадают.

Если мы будем изменять матрицу X, отправляясь от упомянутой выше матрицы $X^{(0)}$, то характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ опишут на плоскости некоторые пути $L_1, L_2, \ldots, L_n$; если характеристические числа ξ_k и ξ_l матрицы X совпадут, то соответствующие пути приведут в одну и ту же точку плоскости ξ'; предположим теперь, что при аналитическом продолжении функции $f(\xi)$ вдоль путей L_k и L_l мы получаем в точке ξ' один и тот же аналитический элемент функции $f(\xi)$, т. е., что пути L_k и L_l приводят также в одну и ту же точку на поверхности Римана функции $f(\xi)$; тогда в формуле (134) $f(\xi_k)$ и $f(\xi_l)$, так же как и все их производные, принимают одинаковые значения.

Но, согласно теории интерполирования полиномами, мы имеем общую формулу

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{(\xi - \xi_1') \ldots (\xi - \xi_{k-1}')(\xi - \xi_{k+1}') \ldots (\xi - \xi_n')}{(\xi_k' - \xi_1') \ldots (\xi_k' - \xi_{k-1}')(\xi_k' - \xi_{k+1}') \ldots (\xi_k' - \xi_n')} f(\xi_k') = \\ = \sum_{k=1}^{p} r_k(\xi | \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) h_k(\xi | \xi_1, \ldots, \xi_p),$$

где через r_k и h_k обозначены полиномы, введенные в § 9, и мы предполагаем, что μ_1 из чисел $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$ стремятся к одной и той же точке ξ_1 поверхности Римана функции $f(\xi)$, μ_2 из этих чисел стремятся к ξ_2 и т. д. Следовательно, из формулы (134) получаем в пределе более общую формулу

$$f(X) = \sum_{k=1}^{p} r_k(X | \xi_1, \ldots, \xi_p) h_k(X | \xi_1, \ldots, \xi_p). \tag{138}$$

Очевидно, что в данном случае обобщенная формула интерполирования, пригодная в окрестности матрицы X, дает истинное аналитическое продолжение матрицы $f(X)$. Следует заметить, что вид этой формулы интерполирования может быть различным в указанной выше окрестности.

В частности, если мы определяем функции $f(\xi_k)$ в формуле (134) рядами

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi_k^\nu,$$

то очевидно берем аналитический элемент функции $f(\xi)$ и, следовательно, формулы (134) и (138) дают аналитическое продолжение для всех матриц X, характеристические числа которых принадлежат кругу сходимости $|\xi| < \rho n$ ряда $f(\xi)$. В этой области матриц правые части формул (134) и (138) совпадают с рядом (135), и, следовательно, этот последний ряд дает аналитическое продолжение функции $f(X)$ всюду, где он сходится.

Если функция $f(\xi)$ однозначна, то формулы (134) и (138) дают все возможные продолжения функции $f(X)$. Действительно, докажем, что в этом случае особенности матрицы $f(X)$ суть те матрицы X, у которых по крайней мере одно из характеристических чисел есть особая точка функции $f(\xi)$ и, следовательно, что область существования функции $f(X)$ есть область тех матриц X, все характеристические числа которых принадлежат области существования функции $f(\xi)$.

Для доказательства вернемся к формулам (113) и (110) из § 9.

В силу этих формул формула (134) может быть записана в виде

$$f(X) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) X^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) S[\delta_k^1, \delta_k^2, \ldots, \delta_k^n] S^{-1} = S[f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)] S^{-1};$$

следовательно, для всех аналитических продолжений, если предполагать все характеристические числа матрицы X различными, мы имеем

$$f(X) = S[f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)] S^{-1} \tag{139}$$

и обратно

$$[f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)] = S^{-1} f(X) S.$$

Из этой формулы следует, что каждая особенность матрицы $f(X)$ приводит к особенности по крайней мере одной из функций $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$, откуда и вытекают упомянутые выше заключения об особенностях функции $f(X)$ и об области существования этой функции. Действительно, так как матрицы X, у которых совпадают несколько характеристических чисел, являются пределами матриц с различными характеристическими числами, то они будут особенными, если по крайней мере одно из характеристических чисел является особенностью функции $f(\xi)$.

Если функция $f(\xi)$ не однозначна, то при аналитическом продолжении по формуле (134) может оказаться, что несколько характеристических чисел матрицы X, например ξ_k и ξ_l, совпадают, тогда как аналитические элементы функции $f(\xi)$ в окрестности этих точек различны. Легко видеть, что в этом случае обобщенная формула интерполирования (138), которая дает матрицу в окрестности точки X в пространстве матриц, не имеет места. Если $f(\xi_k) \neq f(\xi_l)$, то это утверждение очевидно, так как не может существовать полинома от ξ, который в данной точке принимает два различных значения. Если $f(\xi_k) = f(\xi_l)$, но аналитические элементы функции $f(\xi)$ в окрестностях точек ξ_k и ξ_l различны, то мы можем указать две столь близкие точки, что $\xi'_k = \xi'_l$ и в этих точках

$$f(\xi'_k) \neq f(\xi'_l),$$

и повторить предыдущее рассуждение. Указанное обстоятельство связано с тем фактом, что в этом случае мы не имеем аналитического продолжения матрицы $f(X)$ через точку X.

В рассматриваемом случае, когда два характеристических числа ξ_k и $\xi_l = \xi_k$ не совпадают на поверхности Римана функции $f(\xi)$, мы используем формулу

$$f(X) = S[f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)] S^{-1}, \quad X = S[\xi_1, \ldots, \xi_n] S^{-1},$$

для того чтобы показать, что произойдет с аналитическим продолжением. Если мы фиксируем матрицу S и будем менять только характеристические числа

$$\xi_1, \ldots, \xi_n$$

таким образом, чтобы они стремились к предельным значениям $\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}$, где для определенности $\xi_1^{(0)} = \xi_2^{(0)}$, то матрица $f(X)$ будет иметь пределом

$$\lim f(X) = S[f(\xi_1^{(0)}), \ldots, f(\xi_n^{(0)})] S^{-1}. \tag{140}$$

Но предельная матрица

$$X_0 = S[\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}] S^{-1}$$

может быть представлена еще в следующей форме:

$$X_0 = ST[\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_n^{(0)}] T^{-1} S^{-1},$$

где

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{Vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ -a & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{Vmatrix}$$

и a — произвольный параметр. Если мы устремим матрицу X к матрице X_0 по закону

$$X = ST[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n] T^{-1} S^{-1},$$

оставляя матрицы S и T фиксированными, то получим в качестве предельного значения матрицы $f(X)$

$$\lim f(X) = ST[f(\xi_1^{(0)}), f(\xi_2^{(0)}), \ldots, f(\xi_n^{(0)})] T^{-1} S^{-1}, \tag{141}$$

но легко проверить, что

$$T[f(\xi_1^{(0)}), f(\xi_2^{(\,)}), \ldots, f(\xi_n^{(0)})] T^{-1} = \begin{Vmatrix} f(\xi_1^{(0)}) & 0 \quad 0 \ldots 0 \\ a[f(\xi_1^{(0)}) - f(\xi_2^{(0)})] & f(\xi_2^{(0)}) \; 0 \ldots 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 \quad 0 \ldots f(\xi_n^{(0)}) \end{Vmatrix}.$$

Если $f(\xi_2^{(0)}) \neq f(\xi_1^{(0)})$, то два предела (140) и (141) различны. Следовательно, в этом случае матрица X стремится к пределу X_0, а матрица $f(X)$ не стремится, вообще говоря, к определенному пределу, и матрица $f(X)$ может иметь предел только тогда, когда матрица X стремится к пределу частным образом.

Если $f(\xi_2^{(0)}) = f(\xi_1^{(0)})$, но аналитические элементы функции $f(\xi)$ различны в окрестностях точек $\xi_1^{(0)}$ и $\xi_2^{(0)}$, то мы можем взять две близкие точки $\xi_1^{(1)} = \xi_2^{(1)}$ такие, что $f(\xi_1^{(1)}) \neq f(\xi_2^{(1)})$, и повторить предыдущее рассуждение.

Следовательно, в пространстве Римана функции $f(X)$ любая матрица X, у которой два характеристических числа равны, но не совпадают на поверхности Римана функции $f(\xi)$, является особенностью матрицы $f(X)$.

Мы видели, что формула Лагранжа — Сильвестра дает возможность получить все аналитические продолжения функции $f(X)$. Заметим, что в частном случае, когда функция $f(\xi)$ является обратной для целой функции $\xi = E(f)$, можно доказать непосредственно, что функции матрицы X, даваемые формулой Лагранжа — Сильвестра, определяют обратную функцию $f(X)$[1], т. е. функцию, удовлетворяющую соотношению $X = E[f(X)]$.

§ 11. Логарифмическая функция от матрицы

Применим предыдущие рассуждения к логарифмической функции. Любое значение логарифма

$$Y = \operatorname{Lg} X$$

есть решение уравнения

$$e^Y = X.$$

Пусть

$$X = S\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1} \tag{142}$$

и

$$Y = T\,[J_{\rho_1'}(\eta_1), \ldots, J_{\rho'_{s'}}(\eta_{s'})]\,T^{-1} \tag{143}$$

канонические представления матриц X и Y.

В силу формулы (86) мы должны иметь

$$e^Y = T\,[\mathcal{E}_{\rho_1'}(e^{\eta_1}, \ldots, e^{\eta_1}), \ldots, \mathcal{E}_{\rho'_{s'}}(e^{\eta_{s'}}, \ldots, e^{\eta_{s'}})]\,[J_{\rho_1'}(e^{\eta_1'}), \ldots$$

$$\ldots, J_{\rho'_{s'}}(e^{\eta_{s'}})]\,[\mathcal{E}_{\rho_1'}(e^{\eta_1}, \ldots, e^{\eta_1}), \ldots, \mathcal{E}_{\rho'_{s'}}(e^{\eta_{s'}}, \ldots, e^{\eta_{s'}})]^{-1}\,T^{-1} =$$

$$= S\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1} = X; \tag{144}$$

характеристические числа и элементарные делители матрицы определяются однозначно и мы можем взять

$$s' = s, \quad \rho_1' = \rho_1, \ \ldots, \ \rho_s' = \rho_s, \quad e^{\eta_1} = \xi_1, \ \ldots, \ e^{\eta_s} = \xi_s.$$

Следовательно, характеристические числа и элементарные делители всех значений логарифма $\operatorname{Lg} X$ имеют вид

$$\eta_1 = \lg \xi_1 + 2\pi i r_1, \ \ldots, \ \eta_s = \lg \xi_s + 2\pi i r_s,$$

$$(\eta - \lg \xi_1 - 2\pi i r_1)^{\rho_1}, \ \ldots, \ (\eta - \lg \xi_s - 2\pi i r_s)^{\rho_s},$$

где $\lg \xi_1, \ldots, \lg \xi_s$ суть главные значения логарифма и $r_1, \ldots, r_s$ — неопределенные целые числа.

Воспользовавшись тождеством (90)

$$\mathcal{E}_\rho(\xi, \ldots, \xi) = \mathcal{E}_\rho\left(\frac{1}{\xi}, -\frac{1}{\xi^2}, \ldots, \frac{(-1)^\rho(\rho-2)!}{\xi^{\rho-1}}\right)^{-1},$$

[1] L. Shleisinger. Обращение целых трансцендентных функций от матрицы. Журнал Ленинградского физико-математического общества, т. II, 1929 г., № 2, стр. 38—40.

запишем уравнение (144) в виде

$$T\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]T^{-1} = S\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1} = X. \tag{145}$$

Обозначим через Σ наиболее общую матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\Sigma\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,\Sigma^{-1} = [J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)],$$

откуда

$$\Sigma\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)] = [J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,\Sigma,$$

т. е. Σ есть произвольная неособенная матрица, перестановочная с матрицей $[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]$.

Из формулы (145) получаем, что матрица T должна удовлетворять единственному условию: матрица

$$U = T\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1}$$

приводит матрицу X к каноническому виду.

Но если мы имеем два канонических представления матрицы X:

$$X = S\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1} = S_0\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S_0^{-1},$$

то мы имеем тождество

$$S_0^{-1}S\,[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1}S_0 = [J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)],$$

откуда следует, что

$$S_0^{-1}S = \Sigma, \quad S = S_0\Sigma,$$

и, следовательно, каждая матрица S, приводящая матрицу X к каноническому виду, равна произведению одной частной матрицы такого рода S_0 на неособенную матрицу Σ, перестановочную с матрицей $[J_{\rho_1}(\xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\xi_s)]$. В частности, мы должны иметь

$$U = S_0\Sigma,$$

т. е.

$$T = S_0\Sigma\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right].$$

Следовательно, общее представление логарифма матрицы X таково:

$$\operatorname{Lg} X = S\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right][J_{\rho_1}(\lg \xi_1 + 2\pi i r_1), \ldots$$

$$\ldots, J_{\rho_s}(\lg \xi_s + 2\pi i r_s)]\left[\mathcal{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \mathcal{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1}S^{-1}, \tag{146}$$

где $r_1, \ldots, r_s$ — произвольные целые числа и $S = S_0\Sigma$ — произвольная матрица, приводящая матрицу X к каноническому виду. Матрица $\operatorname{Lg} X$ многозначна в силу двух обстоятельств: 1) в силу произвольного выбора целых чисел $r_1, r_2, \ldots, r_s$ и 2) в силу произвольного выбора матрицы Σ, т. е. матрицы S, приводящей матрицу X к каноническому виду.

Выбор целых чисел $r_1, r_2, \ldots, r_s$ можно подчинить тому условию, что каждому равенству вида

$$\xi_q = \xi_{q'}$$

отвечает равенство

$$r_q = r_{q'},$$

т. е. условию, что все элементарные делители, отвечающие одному и тому же характеристическому числу, соответствуют одному и тому же целому числу r. Значения логарифма, удовлетворяющие этому условию, будем называть *регулярными*, все прочие значения — *иррегулярными*. Все регулярные значения логарифма вполне независимы от выбора матрицы S и, следовательно, определяются единственным образом по целым значениям $r_1, r_2, \ldots, r_s$.

Действительно, построим полином $\varphi(\xi)$, обладающий тем свойством, что

$$\varphi(\xi_q) = \lg \xi_q + 2\pi i r_q, \quad \varphi'(\xi_q) = \frac{1}{\xi_q}, \ \ldots, \ \varphi^{(\rho_q - 1)}(\xi_q) = \frac{(-1)^{\rho_q}(\rho_q - 2)!}{\xi_q^{\rho_q - 1}}$$
$$(q = 1, 2, \ldots, s). \tag{147}$$

Вычислим теперь значение $\varphi(X)$; в силу формул (142) и (86) тогда имеем

$$\varphi(X) = S\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1 - 2)!}{\xi_1^{\rho_1 - 1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s - 2)!}{\xi_s^{\rho_s - 1}}\right)\right] \times$$
$$\times [J_{\rho_1}(\lg \xi_1 + 2\pi i r_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lg \xi_s + 2\pi i r_s)] \times$$
$$\times \left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1 - 2)!}{\xi_1^{\rho_1 - 1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s - 2)!}{\xi_s^{\rho_s - 1}}\right)\right]^{-1} S^{-1}; \tag{148}$$

следовательно, мы имеем равенство

$$\operatorname{Lg} X = \varphi(X); \tag{149}$$

но матрица $\varphi(X)$ не зависит от выбора матрицы S, поэтому матрица $\operatorname{Lg} X$ обладает тем же свойством, чем и доказано высказанное предложение.

Очевидно, что всякая матрица X, обладающая тем свойством, что все характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, принадлежащие различным элементарным делителям, различны (в частности, любая матрица X с различными характеристическими числами), допускает только регулярные определения логарифма $\operatorname{Lg} X$.

Иррегулярные значения логарифма $\operatorname{Lg} X$ существенно зависят от выбора матрицы S.

Рассмотрим, например, логарифм матрицы

$$X = [\xi_1, \ldots, \xi_1] = \xi_1,$$

приводящейся к числу ξ_1. Элементарные делители суть

$$\xi - \xi_1, \ldots, \xi - \xi_1,$$

и все регулярные значения логарифма имеют вид

$$\operatorname{Lg} X = [\lg \xi_1 + 2\pi i r_1, \ldots, \lg \xi_1 + 2\pi i r_1] = \lg \xi_1 + 2\pi i r_1,$$

где r_1 — произвольное целое число. С другой стороны, матрица X приводится к каноническому виду любой матрицей S с определителем, отличным от нуля,

$$X = S[\xi_1, \ldots, \xi_1] S^{-1}.$$

Поэтому общее выражение всех значений логарифма есть

$$\operatorname{Lg} X = S[\lg \xi_1 + 2\pi i r_1, \ldots, \lg \xi_1 + 2\pi i r_n] S^{-1} =$$
$$= \lg \xi_1 + 2\pi i S[r_1, \ldots, r_n] S^{-1}, \tag{150}$$

где S — произвольная матрица с отличным от нуля определителем и $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — произвольные целые числа. Следовательно, все значения логарифма, у которых числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ не равны, т. е. все иррегулярные значения, существенно зависят от неопределенной матрицы S. Например, если $r_1 \neq r_2$, то достаточно взять

$$S = [A, 1, 1, \ldots, 1],$$

где A — матрица второго порядка

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{Vmatrix}$$

с произвольным элементом a, для того чтобы получить

$$S[r_1, r_2, \ldots, r_n] S^{-1} = [B, 1, 1, \ldots, 1],$$

где

$$B = A[r_1 r_2] A^{-1} = \begin{Vmatrix} r_1 & 0 \\ a(r_1 - r_2) & r_2 \end{Vmatrix};$$

следовательно, $\operatorname{Lg} X$ зависит от произвольного параметра a.

Рассмотрим ряд

$$\operatorname{Lg} X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(X - I)^{\nu}; \tag{151}$$

если $|X - I| < \left\| \frac{1}{n} \right\|$, то этот ряд сходится абсолютно и представляет голоморфную функцию матрицы X, удовлетворяющую соотношению

$$e^{\operatorname{Lg} X} = X.$$

Рассматриваемый ряд дает, таким образом, систему значений логарифма матрицы вблизи единичной матрицы. Эти значения, так же как и значения логарифма, которые мы получаем, совершая аналитическое продолжение ряда (151), образуют аналитическую логарифмическую функцию $\operatorname{Lg} X$ матрицы X. Предполагая все характеристические числа матрицы X различными, мы можем просуммировать ряд (151) по формуле Лагранжа—Сильвестра и получить представление

$$\operatorname{Lg} X = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X - \xi_1) \ldots (X - \xi_{k-1})(X - \xi_{k+1}) \ldots (X - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_1) \ldots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \ldots (\xi_k - \xi_n)} \lg \xi_k, \tag{152}$$

где

$$\lg \xi_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(\xi_k - 1)^{\nu} \tag{153}$$

есть, очевидно, главное значение логарифма.

Это представление в сущности имеет место для всех матриц X, находящихся в окрестности единичной матрицы.

Действительно, если мы устремим матрицу X с различными характеристическими числами к матрице X', характеристические числа которой ξ_k и ξ_l совпадают, то выражение правой части соотношения (152) будет стремиться к определенному пределу. Если матрица X' имеет характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ и если $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ — их порядки кратности, то предел правой части соотношения (152) согласно теории интерполирования полиномами есть полином $\varphi(X)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющий условиям

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\xi_1)=\lg\xi_1,\ \varphi'(\xi_1)=\frac{1}{\xi_1},\ \ldots,\ \varphi^{(\mu_1-1)}(\xi_1)=\frac{(-1)^{\mu_1}(\mu_1-2)!}{\xi_1^{\mu_1-1}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi(\xi_p)=\lg\xi_p,\ \varphi'(\xi_p)=\frac{1}{\xi_p},\ \ldots,\ \varphi^{(\mu_p-1)}(\xi_p)=\frac{(-1)^{\mu_p}(\mu_p-2)!}{\xi_p^{\mu_p-1}}. \end{aligned}\right. \qquad (154)$$

С другой стороны, функция $\operatorname{Lg} X$, определяемая рядом (151), стремится к значению $\operatorname{Lg} X'$, так как в указанной окрестности эта функция непрерывна. Мы получаем, следовательно, равенство

$$\operatorname{Lg} X'=\varphi(X'). \qquad (155)$$

Например, если $n=2$, мы имеем представление

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Lg} X=\frac{\xi_2\lg\xi_1-\xi_1\lg\xi_2}{\xi_2-\xi_1}+\frac{\lg\xi_2-\lg\xi_1}{\xi_2-\xi_1}X, \quad \text{если } \xi_2\neq\xi_1,\\ &\operatorname{Lg} X=\lg\xi_1-1+\frac{1}{\xi_1}X, \quad \text{если } \xi_2=\xi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Формулы (152) и (155) позволяют совершать аналитическое продолжение $\operatorname{Lg} X$.

Мы видели в общей теории, что если одно из характеристических чисел ξ_k матрицы X является особенностью функции $f(\xi)$, то матрица X является особенностью функции $f(X)$. Следовательно, все матрицы X, у которых по крайней мере одно из характеристических чисел равно нулю, дают особенность функции $\operatorname{Lg} X$.

Предположим теперь, что все характеристические числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ матрицы X отличны от нуля.

Пусть теперь переменная матрица двигается в пространстве $2n^2$ измерений по пути W, который начинается с матрицы X^0, принадлежащей окрестности $|X^{(0)}-I|<\left\|\frac{1}{n}\right\|$, и заканчивается матрицей X. Тогда каждое характеристическое число переменной матрицы X двигается на плоскости комплексного переменного по соответствующему пути W_k, который начинается от значения $\xi_k^{(0)}$ и заканчивается при значении ξ_k. Мы предполагаем, что при изменении матрицы X все ее характеристические числа остаются различными между собой и отличными от нуля. Тогда все значения логарифма $\operatorname{Lg} X$ регулярны, и, выбирая подходящие пути W, мы можем получить каждое из этих значений как соответствующее значение аналитической логарифмической функции

$$\operatorname{Lg} X=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}(\lg\xi_k+2\pi i r_k). \qquad (157)$$

Рассмотрим теперь случай, когда несколько характеристических чисел совпадают. Если соответствующие пути W_k удовлетворяют тому условию, что равенству $\xi_{q'}=\xi_q$ отвечает всегда равенство $\operatorname{Lg}\xi_{q'}=\operatorname{Lg}\xi_q$, тогда выражение правой части соотношения (152) стремится к определенному пределу, который дает соответствующее значение $\operatorname{Lg} X$:

$$\operatorname{Lg} X=\varphi(X), \qquad (158)$$

причём полином $\varphi(\xi)$ степени не выше $n-1$ строится по условиям

$$\varphi(\xi_k)=\lg\xi_k+2\pi i r_k,\ \varphi'(\xi_k)=\frac{1}{\xi_k},\ \ldots,\ \varphi^{(\mu_k-1)}(\xi_k)=\frac{(-1)^{\mu_k}(\mu_k-2)!}{\xi_k^{\mu_k-1}}, \qquad (159)$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — характеристические числа матрицы X и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ — их порядки кратности.

Можно доказать, что все регулярные значения логарифма могут быть получены указанным выше образом.

Действительно, мы видели, что все регулярные значения могут быть представлены полиномом $\varphi(X)$:

$$\operatorname{Lg} X=\varphi(X),$$

где $\varphi(\xi)$ удовлетворяет условиям (147); но эти условия совпадают с условиями (159), следовательно, формулы (149) и (158) совпадают.

Остается рассмотреть случай, когда ξ_q и $\xi_{q'}$ равны, а значения $\lg\xi_q$ и $\lg\xi_{q'}$, которые мы получаем в конце путей W_q и $W_{q'}$, различны. Формула Лагранжа—Сильвестра в этом случае теряет смысл, так как коэффициенты этой формулы становятся бесконечными, что легко видеть, например, из формулы (156).

Мы знаем из общей теории, что матрица X в рассматриваемом случае является особенностью для ветви $\operatorname{Lg} X$, которая получается при аналитическом продолжении вдоль пути W. Не существует предела $\operatorname{Lg} X$, когда X стремится к пределу общим образом. Однако можно доказать, что можно получить все иррегулярные значения $\operatorname{Lg} X_0$, если матрицу X устремить к пределу X_0 частным образом. Действительно, пусть

$$X_0=S\,[J_{\rho_1}(\eta_1),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\eta_s)]\,S^{-1}$$

и пусть имеем какое-нибудь значение $\operatorname{Lg} X_0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Lg} X_0&=\\ &=S\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\eta_1},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\eta_1^{\rho_1-1}}\right),\ \ldots,\ \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\eta_s},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\eta_s^{\rho_s-1}}\right)\right]\times\\ &\times[J_{\rho_1}(\lg\eta_1+2\pi i r_1),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\lg\eta_s+2\pi i r_s)]\times\\ &\times\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\eta_1},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\eta_1^{\rho_1-1}}\right),\ \ldots,\ \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\eta_s},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\eta_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1}S^{-1}. \end{aligned}$$

Предположим для определенности, что $\eta_1=\eta_2$, но $r_1\neq r_2$. Возьмем матрицу

$$X=S\,[J_{\rho_1}(\xi_1),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\xi_s)]\,S^{-1},$$

где все ξ_k различны, мы имеем тогда регулярное значение $\operatorname{Lg} X$:

$$\operatorname{Lg} X = S\left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right] \times$$

$$\times [J_{\rho_1}(\lg \xi_1 + 2\pi i r_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lg \xi_s + 2\pi i r_s)] \times$$

$$\times \left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right]^{-1} S^{-1},$$

которое может быть получено аналитическим продолжением ряда

$$\operatorname{Lg} X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(X-I)^{\nu}.$$

Если мы устремим $\xi_1, \ldots, \xi_s$ соответственно к их пределам $\eta_1, \ldots, \eta_s$ таким образом, что

$$\operatorname{Lg} \xi_k \to \operatorname{Lg} \eta_k = \lg \eta_k + 2\pi i r_k,$$

то получим, что $X \to X_0$ и $\operatorname{Lg} X \to \operatorname{Lg} X_0$, что и доказывает указанное выше предложение.

Предположим, что матрица X принадлежит окрестности единичной матрицы

$$|X - I| < \left\|\frac{1}{n}\right\|.$$

В этом случае ряд (151) дает решение уравнения $e^Y = X$. Формула (146) которая дает все значения функции $\operatorname{Lg} X$, может быть представлена в виде

$$\operatorname{Lg} X = SU[J_{\rho_1}(\lg \xi_1), \ldots, J_{\rho_s}(\lg \xi_s)] U^{-1} S^{-1} + 2\pi i SU[J^0_{\rho_1} r_1, \ldots, J^0_{\rho_s} r_s] U^{-1} S^{-1},$$

где

$$U = \left[\mathscr{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\xi_1}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_1}(\rho_1-2)!}{\xi_1^{\rho_1-1}}\right), \ldots, \mathscr{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\xi_s}, \ldots, \frac{(-1)^{\rho_s}(\rho_s-2)!}{\xi_s^{\rho_s-1}}\right)\right],$$

$\lg \xi_k$ — главные значения логарифма и J^0_ρ — единичная матрица порядка ρ.

Первое слагаемое правой части равно сумме ряда (151). Заметим еще, что в силу правила умножения квазидиагональных матриц мы можем утверждать, что матрица U и

$$[r_1 J^0_{\rho_1}, \ldots, r_s J^0_{\rho_s}]$$

коммутативны, и, следовательно, в результате имеем следующую формулу, которая дает нам все значения $\operatorname{Lg} X$ в некоторой окрестности единичной матрицы:

$$\operatorname{Lg} X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(X-I)^{\nu} + 2\pi i S\left[r_1 J^0_{\rho_1}, \ldots, r_s J^0_{\rho_s}\right] S^{-1}. \tag{160}$$

Вопрос об аналитическом продолжении разложения (151) можно рассмотреть иным путем.

С этой целью рассмотрим матрицу

$$\operatorname{Lg}\{I + t(X-I)\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} t^{\nu}(X-I)^{\nu},$$

где t — комплексное число. Так как X — произвольная фиксированная матрица, то предыдущее разложение всегда имеет место в некоторой окрестности точки $t = 0$ и определяет, таким образом, матрицу, образованную из аналитических функций от одной численной комплексной переменной t. Дифференцируя вышеупомянутое разложение по t, находим:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Lg}\{I + t(X-I)\} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} t^{\nu-1}(X-I)^{\nu}. \tag{161}$$

Но в окрестности единичной матрицы мы имеем разложение

$$X^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}(X-I)^{\nu}$$

и более общо:

$$\{I + t(X-I)\}^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} t^{\nu}(X-I)^{\nu}. \tag{162}$$

Следовательно, соотношение (161) может быть приведено к виду

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Lg}[I + t(X-I)] = (X-I)[I + t(X-I)]^{-1},$$

и мы имеем

$$\operatorname{Lg}[I + t(X-I)] = \int_0^t (X-I)[I + t(X-I)]^{-1} dt, \tag{163}$$

в частности

$$\operatorname{Lg} X = \int_0^1 (X-I)[I + t(X-I)]^{-1} dt \tag{164}$$

для матриц X из окрестности единичной матрицы.

Для того чтобы вычислить этот интеграл, введем характеристические числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ матрицы X и обозначим инварианты указанной матрицы через

$$i_0(X) = 1, \quad i_1(X) = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad \ldots, \quad i_n(X) = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n.$$

Каждый инвариант

$$i_\nu(X) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

очевидно, есть однородный полином степени ν от элементов $\{X\}_{kl}$. Так как характеристические числа матрицы $I + t(X-I)$ суть

$$1 + t(\xi_1 - 1), \ \ldots, \ 1 + t(\xi_n - 1),$$

то для определителя этой матрицы мы имеем представление

$$i_n[I + t(X-I)] = \prod_{k=1}^{n} [1 + t(\xi_k - 1)] = \sum_{\nu=}^{n} t^{\nu} i_\nu(X-I). \tag{165}$$

Замечая, что матрица

$$i_n[I + t(X-I)][I + t(X-I)]^{-1}$$

образована полиномами от t степени не выше $n-1$, и принимая во внимание локальное представление

$$[I + t(X-I)]^{-1} = \sum_{\nu=0} (-1)^{\nu} t^{\nu}(X-I)^{\nu},$$

мы получаем общее представление

$$[I+t(X-I)]^{-1}=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\sum\limits_{\varkappa=0}^{\nu} t^{\nu}(-1)^{\varkappa}(X-I)^{\varkappa}\, l_{\nu-\varkappa}(X-I)}{\prod\limits^{n}[1+t(\xi_k-1)]}, \tag{166}$$

имеющее место для всех значений t, которые не обращают знаменатель в нуль. Предположим теперь, что все характеристические числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ различны. Тогда имеем

$$\int_0^1 \frac{t^{\nu}}{\prod\limits_{k=1}^{n}[1+t(\xi_k-1)]}\,dt=(-1)^{\nu}\sum_{l=1}^{n}\frac{(\xi_l-1)^{n-\nu-2}}{\prod\limits_{k\neq l}(\xi_l-\xi_k)}\lg\xi_l,$$

где

$$\lg\xi_l=(\xi_l-1)\int_0^1\frac{dt}{1+t(\xi_l-1)}.$$

Следовательно, из формул (164) и (166) получаем:

$$\operatorname{Lg} X=\sum_{l=1}^{n}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\sum\limits_{\varkappa=0}^{\nu}(X-I)^{\varkappa+1}\, l_{\nu-\varkappa}(X-I)(-1)^{\nu-\varkappa}(\xi_l-1)^{n-\nu-2}}{\prod\limits_{k\neq l}(\xi_l-\xi_k)}\lg\xi_l. \tag{167}$$

Числители суть полиномы от X степени n, но в силу тождества Кэли можно исключить X^n, тогда останется полином степени $n-1$ и, как можно убедиться непосредственным вычислением, формула будет совпадать с формулой Лагранжа — Сильвестра.

Формула (164) дает аналитические продолжения ряда (151) для всех матриц X, для которых все характеристические числа

$$1+t(\xi_k-1) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

отличны от нуля для всех t из промежутка $0<t\leqslant 1$. Но очевидно, что, беря в интеграле подходящий путь интегрирования по параметру t, мы получим все регулярные значения $\operatorname{Lg} X$ для всех матриц X, за исключением тех, у которых по крайней мере одно из характеристических чисел равно нулю. Достаточно взять путь, соединяющий точки 0 и 1 и не проходящий через все точки

$$t_k=\frac{1}{1-\xi_k} \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

что можно сделать бесконечным числом способов. Но все так получаемые значения $\operatorname{Lg} X$ будут регулярными. Действительно, в то время как матрица X изменяется по пути W, который начинается в окрестности единичной матрицы и заканчивается рассматриваемой матрицей X, характеристические числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ матрицы X должны изменяться таким образом, что пути, описываемые этими точками, не должны попадать на путь L', который получается из пути L преобразованием

$$\xi=1-\frac{1}{t}.$$

Но тогда равенство $\xi_k=\xi_l$ влечет за собой равенство $\operatorname{Lg}\xi_k=\operatorname{Lg}\xi_l$, что и доказывает указанное выше утверждение.

§ 12. Численные функции от матрицы

Мы определили аналитическую функцию от матрицы X абсолютно сходящимся в некоторой окрестности нулевой матрицы рядом:

$$f(X)=\alpha_0+\alpha_1 X+\alpha_2 X^2+\ldots=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu}X^{\nu} \tag{168}$$

и всеми его аналитическими продолжениями, и видели, что обобщенная формула Лагранжа — Сильвестра дает все эти аналитические продолжения. Элементы функции $f(X)$ суть аналитические функции элементов матрицы X:

$$\{f(X)\}_{kl}=\psi_{kl}(\{X\}_{11}, \{X\}_{12}, \ldots, \{X\}_{nn}). \tag{169}$$

Аналитическая функция матрицы X обладает следующим свойством:

$$f(SXS^{-1})=Sf(X)S^{-1}, \tag{170}$$

где S — произвольная матрица с определителем, отличным от нуля.

Соотношение (170) очевидно, если матрица X находится вблизи нулевой матрицы; действительно, мы имеем

$$(SXS^{-1})^{\nu}=SX^{\nu}S^{-1}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu}(SXS^{-1})^{\nu}=S\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{\nu}X^{\nu}\right)S^{-1},$$

если ряд (168) сходится. В общем случае воспользуемся формулой Лагранжа — Сильвестра; например, если характеристические числа матрицы X различны, то мы имеем

$$f(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}f(\xi_k). \tag{171}$$

Подставляя в это равенство вместо X матрицу SXS^{-1} и замечая, что формула (170) для полиномов относительно X нами доказана и что характеристические числа матриц X и SXS^{-1} одни и те же, мы получим

$$f(SXS^{-1})=S\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}f(\xi_k)\right]S^{-1},$$

где значения $f(\xi_k)$ совпадают со значениями в формуле (171), если матрица SXS^{-1} описывает путь, отвечающий пути матрицы X при преобразовании с помощью матрицы S. Следовательно, формула (170) доказана во всей области существования функции $f(X)$.

Будем называть численной функцией матрицы X обычную функцию от n^2 элементов матрицы X

$$F(X)=F(\{X\}_{11}, \{X_{12}\}, \ldots, \{X\}_{nn}).$$

Если эта функция есть аналитическая функция от элементов $\{X\}_{kl}$, то мы будем называть ее численной аналитической функцией от матрицы X.

Рассмотрим теперь численную аналитическую функцию от матрицы X, удовлетворяющую условию

$$F(SXS^{-1})=F(X), \tag{172}$$

где S — произвольная неособенная матрица и где пути матриц SXS^{-1} и X при любом аналитическом продолжении соответствуют друг другу, как указано выше. Такую функцию $F(X)$ будем называть инвариантной функцией матрицы X.

Предположим, что $F(X)$ — численная функция элементов матрицы X, голоморфная в окрестности нулевой матрицы; мы имеем тогда разложение Маклорена

$$F(X)=F_0(X)+F_1(X)+F_2(X)+\ldots, \tag{173}$$

где $F_k(X)$ означает совокупность членов измерения k относительно элементов матрицы X. Очевидно, что каждая функция F_k удовлетворяет соотношению

$$F_k(SXS^{-1})=F_k(X). \tag{174}$$

Действительно, если t — комплексная переменная из окрестности $t=0$, то мы имеем:

$$F(tX)=F_0(X)+tF_1(X)+t^2F_2(X)+\ldots,$$

$$F(StXS^{-1})=F_0(SXS^{-1})+tF_1(SXS^{-1})+t^2F_2(SXS^{-1})+\ldots,$$

откуда в силу равенства

$$F(tX)=F(StXS^{-1})$$

следуют все равенства (174).

Найдем общее выражение однородных инвариантных функций $F_k(X)$ матрицы X. Пусть

$$X=S[\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n]\,S^{-1} \tag{175}$$

каноническое представление матрицы X. В силу (174) мы имеем тогда

$$F_k(X)=F_k([\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n]). \tag{176}$$

Пусть, с другой стороны, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ и пусть $P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ — матрица перестановки из элементов

$$\{P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}_{kl}=\begin{cases}1, & \text{если } l=\alpha_k,\\ 0, & \text{если } l\neq\alpha_k.\end{cases}$$

Обратная матрица, как легко убедиться, будет транспонированной матрицей с элементами:

$$\{P^{-1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}_{kl}=\{P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\}_{lk}=\begin{cases}1, & \text{если } k=\alpha_l,\\ 0, & \text{если } k\neq\alpha_l.\end{cases}$$

Мы имеем теперь равенство

$$[\xi_{\alpha_1},\ \xi_{\alpha_2},\ \ldots,\ \xi_{\alpha_n}]=P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n]\,P^{-1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

откуда следует в силу (174)

$$F_k([\xi_{\alpha_1},\ \xi_{\alpha_2},\ \ldots,\ \xi_{\alpha_n}])=F_k([\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n]). \tag{177}$$

Следовательно, $F_k(X)$ есть однородная симметрическая функция степени k от характеристических чисел матрицы X.

Из однородных симметрических функций отметим в первую очередь функцию:

$$\sigma(X)=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=\{X\}_{11}+\{X\}_{22}+\ldots+\{X\}_{nn}, \tag{178}$$

которую назовем *следом матрицы* X, и функции

$$\sigma(X^k)=\xi_1^k+\xi_2^k+\ldots+\xi_n^k, \tag{179}$$

которые являются следами степеней матрицы X.

Хорошо известно, что каждая однородная симметрическая функция характеристических чисел матрицы X может быть представлена в виде полинома от $\sigma(X), \sigma(X^2), \ldots, \sigma(X^n)$.

Мы получаем, следовательно, общее выражение инвариантной функции $F_k(X)$ от матрицы X

$$F_k(X)=\sum_{\lambda=1}^{k}\ \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=k\\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_\lambda>0}}\sigma(X^{\mu_1})\,\sigma(X^{\mu_2})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda}, \tag{180}$$

где $\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda}$ — численные коэффициенты. Это представление имеет место для матриц произвольного порядка.

Общее выражение инвариантной численной функции $F(X)$, голоморфной в окрестности нулевой матрицы, будет

$$F(X)=\beta^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{k}\ \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=k\\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_\lambda>0}}\sigma(X^{\mu_1})\,\sigma(X^{\mu_2})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,\beta^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda}; \tag{181}$$

ряд в правой части мы будем называть *рядом следов*.

Если ряд

$$F(X)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k(X),$$

где $F_k(X)$ определена соотношением (180), сходится для всех матриц X, то он называется *целым рядом следов*.

Если инвариантная численная функция матрицы X может быть представлена как отношение

$$f(X)=\frac{f_1(X)}{f_2(X)}, \tag{182}$$

где $f_1(X)$ и $f_2(X)$ — целые ряды следов, то мы назовем эту функцию *мероморфной инвариантной численной функцией матрицы* X.

Рассмотрим снова ряд (168). Если в этот ряд мы подставим вместо α_ν инвариантные численные функции $F_k^{(\nu)}(X)$ матрицы X, голоморфные в окрестности нулевой матрицы

$$F^{(\nu)}(X)=\sum_{k=0}^{\infty}F_k^{(\nu)}(X), \tag{183}$$

то получим ряд

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}F^{(\nu)}(X)\,X^\nu. \tag{184}$$

Подставляя в этот ряд разложения (183) функции $F^\nu(X)$ по однородным относительно $\{X\}_{\alpha\beta}$ полиномам и группируя в ряде (184) члены одного измерения, мы получим ряд следующего вида:

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}X^\mu F^{(\nu)}_{\nu-\mu}(X)\right), \tag{185}$$

который назовем *рядом матриц и следов*.

Если мы положим

$$G_\nu(X)=\sum_{\mu=0}^{\nu}X^\mu F^{(\nu)}_{\nu-\mu}(X), \tag{186}$$

то получим

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(X). \tag{187}$$

Если ряд (187) сходится для всех матриц X, то ряд (185) называется *целым рядом матриц и следов*.

Функция $G_\nu(X)$ удовлетворяет условию

$$G_\nu(SXS^{-1})=SG_\nu(X)S^{-1}. \tag{188}$$

Если ряд (185) сходится в окрестности нулевой матрицы, то мы имеем, очевидно,

$$f(SXS^{-1})=Sf(X)S^{-1} \tag{189}$$

для всех матриц X и SXS^{-1}, для которых ряд (189) сходится.

Докажем теперь, что и, наоборот, ряд (185) дает самое общее выражение матрицы, элементы которой суть аналитические функции элементов матрицы X, голоморфные в окрестности матрицы $X=0$, и которая удовлетворяет условию (189).

Действительно, разложим матрицу $f(X)$ в ряд

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(X), \tag{190}$$

где $f_\nu(X)$ — матрица, элементы которой суть однородные относительно $\{X\}_{kl}$ полиномы степени ν. Как и в случае инвариантных численных функций, мы заметим сначала, что из (189) можно вывести уравнение

$$f_\nu(SXS^{-1})=Sf_\nu(X)S^{-1}. \tag{191}$$

Подставим в уравнение (191)

$$X=[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n], \qquad S=[s_1, s_2, \ldots, s_n],$$

тогда

$$SXS^{-1}=X,$$

и мы получим

$$[s_1, s_2, \ldots, s_n]f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n])[s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_n^{-1}]= \\ =f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]),$$

откуда, приравнивая соответствующие элементы левой и правой части, получаем уравнения:

$$s_k\{f_\nu\}_{kl}s_l^{-1}=\{f_\nu\}_{kl} \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n).$$

Если бы мы выбрали $s_k\neq s_l$, то получили бы в результате, что

$$\{f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n])\}_{kl}=0, \quad \text{если} \quad k\neq l, \tag{192}$$

следовательно, матрица $f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n])$ есть диагональная матрица.

Если мы возьмем теперь

$$S=P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \qquad X=[\xi_1, \ldots, \xi_n], \qquad SXS^{-1}=[\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \ldots, \xi_{\alpha_n}],$$

то найдем с помощью уравнения (191), что

$$\{f_\nu([\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \ldots, \xi_{\alpha_n}])\}_{kk}=\{f_\nu[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\}_{\alpha_k\alpha_k}. \tag{193}$$

В частности, если положим $\alpha_k=k$, то получим соотношение

$$\{f_\nu([\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_{k-1}}, \xi_k, \xi_{\alpha_{k+1}}, \ldots, \xi_{\alpha_n}])\}_{kk}=\{f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n])\}_{kk},$$

которое показывает, что элемент $\{f_\nu([\xi_1, \ldots, \xi_n])\}_{kk}$ есть симметрическая функция значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ и, следовательно, есть полином от ξ_k и инвариантов матрицы X:

$$\{f_\nu([\xi_1, \ldots, \xi_n])\}_{kk}=\sum_{\mu=0}^{\nu} \xi_k^\mu A_{k\mu}(X), \tag{194}$$

где $A_{k\mu}(X)$ означает полином от инвариантов матрицы X, степень которого относительно элементов матрицы X равна $\nu-\mu$.

Если в равенстве (193) положим

$$\alpha_k=l,$$

то получим, в силу (194), соотношение

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\xi_l^\mu A_{k\mu}(X)=\{f_\nu([\xi_1, \ldots, \xi_n])\}_{ll}=\sum_{\mu=0}^{\nu}\xi_l^\mu A_{l\mu}(X),$$

следовательно,

$$A_{k\mu}(X)=A_{l\mu}(X)=F_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)$$

не зависит от индекса k. Таким образом, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &\{f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n])\}_{kk}=\sum_{\mu=0}^{\nu}\xi_k^\mu F_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)\\ &\{f_\nu([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n])\}_{kl}=0, \quad \text{если} \quad k\neq l. \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

Если мы рассмотрим теперь матрицу

$$f_\nu^*(X)=\sum_{\mu=0}^{\nu}X^\mu F_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X), \tag{196}$$

то увидим, что она для каждой диагональной матрицы X имеет то же значение, что и $f_\nu(X)$; она удовлетворяет, с другой стороны, так же как и $f_\nu(X)$, условию

$$f_\nu^*(SXS^{-1})=Sf_\nu^*(X)S^{-1}$$

и, следовательно, для каждой матрицы X с различными характеристическими числами имеет те же значения, что и $f_\nu(X)$. Мы имеем, следовательно,

$$f_\nu(X)=\sum_{\mu=0}^{\nu}X^\mu F_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X), \tag{197}$$

и это равенство будет иметь место, очевидно, для всех матриц X.

Подставляя (197) в (190), мы получим требуемый результат

$$f(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu}X^\mu F_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X). \tag{198}$$

§ 13. Мероморфные функции от матрицы

Рассмотрим теперь аналитическую функцию матрицы

$$f(X)=\alpha_0+\alpha_1X+\alpha_2X^2+\ldots \tag{199}$$

с численными коэффициентами α_ν, где

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\xi^\nu=\frac{a(\xi)}{b(\xi)} \tag{200}$$

есть мероморфная функция комплексной переменной ξ, т. е. отношение двух целых функций

$$a(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu, \qquad b(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \xi^\nu.$$

Аналитическую функцию (199) будем называть в рассматриваемом случае *мероморфной функцией матрицы* X.

Очевидно, что для матриц X в окрестности нулевой матрицы мы можем представить мероморфную функцию от матрицы X в виде отношения двух целых функций от матрицы X:

$$f(X)=\frac{a(X)}{b(X)}. \tag{201}$$

Действительно, мы имеем тождественно

$$f(\xi)\,b(\xi)=a(\xi);$$

подставляя в это тождество вместо переменной ξ матрицу, что можно сделать в силу теоремы § 7, мы получим равенство

$$f(X)\,b(X)=a(X),$$

эквивалентное (201). Следует отметить, что для функций от одной переменной матрицы частное (201) имеет вполне определенный смысл, ибо

$$a(X)\,b^{-1}(X)=b^{-1}(X)\,a(X).$$

Представление мероморфной функции в виде отношения (201) позволяет рассматривать мероморфные функции от матрицы и в случае, когда функция $b(\xi)$ в точке $\xi=0$ имеет простой или кратный корень.

Формула (201) определяет $f(X)$ для любой матрицы X, для которой определитель матрицы $b(X)$ отличен от нуля. Эта формула, следовательно, дает аналитическое продолжение функции $f(X)$ во всей области существования этой функции, которая представляет собой совокупность всех матриц, за исключением тех матриц, у которых по крайней мере одно из характеристических чисел является полюсом мероморфной функции $f(\xi)$.

В силу § 2 мы имеем выражения для элементов матрицы $b^{-1}(X)$:

$$\{b^{-1}(X)\}_{kl}=\frac{D_{lk}(b(X))}{D(b(X))},$$

следовательно, элементы матрицы $f(X)$ (201) выражаются формулами

$$\{f(X)\}_{kl}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\{a(X)\}_{kr}\,D_{lr}(b(X))}{D(b(X))}. \tag{202}$$

Здесь числитель и знаменатель суть целые функции элементов матрицы X, следовательно, элементы мероморфной функции матрицы X суть мероморфные функции элементов матрицы X (т. е. отношения двух целых функций).

Определитель матрицы $b(X)$ есть численная инвариантная функция матрицы X, которая может быть представлена целым рядом

$$D(b(X))=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(X)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\nu}\sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu\\ \mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_\lambda>0}}\sigma(X^{\mu_1})\,\sigma(X^{\mu_2})\ldots\sigma(X^{\mu_\lambda})\,b^{(\lambda)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda}. \tag{203}$$

Отсюда следует, в силу формулы (202), что элементы матрицы

$$f(X)\,D(b(X))$$

суть целые функции элементов матрицы X, следовательно,

$$f(X)\,D(b(X))$$

есть целая функция матрицы X и ее следов. Но в окрестности матрицы $X=0$ мы имеем выражение этой целой функции:

$$f(X)\,D(b(X))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu X^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(X)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha_\mu X^\mu b_{\nu-\mu}(X)\right).$$

Следовательно, мы имеем следующее представление мероморфной функции от матрицы X:

$$f(X)=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}\alpha_\mu X^\mu b_{\nu-\mu}(X)\right)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(X)} \tag{204}$$

в виде отношения двух целых функций, где числитель есть ряд матрицы X и ее следов, знаменатель — ряд следов.

Решим теперь обратную задачу: найти общее выражение функции от матрицы X, удовлетворяющей условию

$$f(SXS^{-1})=Sf(X)S^{-1} \tag{205}$$

и элементы которой суть мероморфные функции элементов матрицы X.

Рассуждение, аналогичное рассуждению предыдущего параграфа, дает сначала, что

$$\begin{gathered}\{f([\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n])\}_{kl}=0, \quad \text{если} \quad k\neq l,\\ \{f([\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n])\}_{kk}=\frac{A_k(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)}{B_k(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)},\end{gathered} \tag{206}$$

где функции A и B суть целые ряды их аргументов.

Беря затем $S=P_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, мы получим, как в предыдущем параграфе,

$$\{f([\xi_{\alpha_1},\ \ldots,\ \xi_{\alpha_n}])\}_{kk}=\{f([\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n])\}_{\alpha_k\alpha_k}. \tag{207}$$

Если мы возьмем $\alpha_k=k$, то увидим, что отношения $\frac{A_k}{B_k}$ суть симметрические функции от

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{k-1},\ \xi_{k+1},\ \ldots,\ \xi_n.$$

Если мы возьмем

$$\alpha_k=1,\ \alpha_1=k,\ \alpha_2=2,\ \ldots,\ \alpha_n=n$$

и затем поменяем местами ξ_1 и ξ_k, то найдем равенство

$$\{f([\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n])\}_{kk}=\{f([\xi_k,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n])\}_{11},$$

т. е.

$$\frac{A_k(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)}{B_k(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)}=\frac{A(\xi_k,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)}{B(\xi_k,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)}.$$

Можно предполагать, что $A(\xi_k,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ и $B(\xi_k,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ суть симметрические функции от $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{k-1},\ \xi_{k+1},\ \ldots,\ \xi_n$; действительно, в противном случае, имея в виду, что частное

$$\frac{A(\xi_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{B(\xi_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

есть симметрическая функция от $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$, мы можем написать

$$\frac{A(\xi_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{B(\xi_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum \frac{A(\xi_k, \xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_{n-1}})}{B(\xi_k, \xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_{n-1}})} = \frac{A^*(\xi_k, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{B^*(\xi_k, \xi_1, \ldots, \xi_n)},$$

где индексы $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ при суммировании пробегают все возможные перестановки индексов $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$. Функция

$$B^*(\xi_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \prod B(\xi_k, \xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_{n-1}}),$$

где индексы пробегают упомянутые выше значения, наверно симметрична по отношению к переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$. Следовательно, функции A^* и B^* суть целые функции от ξ_k и инвариантов матрицы X, т. е.

$$A^*(\xi_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \xi_k^{\mu} a_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X),$$

$$B^*(\xi_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} \xi_k^{\mu} b_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X),$$

где $a_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)$ и $b_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)$ — полиномы от $\sigma(X), \sigma(X^2), \ldots$

Если мы образуем теперь выражение

$$f^*(X) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu} a_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu} b_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)},$$

то найдем, что

$$f^*([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]) = f([\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]),$$

и в силу условия (205) это верно для всех матриц X:

$$f^*(X) = f(X).$$

Следовательно, мы можем взять

$$f(X) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu} a_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu} b_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)}, \tag{208}$$

т. е. общее выражение функции $f(X)$ представлено в виде отношения двух целых рядов матрицы X и ее следов. Как и в случае мероморфных функций, можно дать другое представление $f(X)$, у которого знаменатель есть целый ряд следов. Мы получим тогда

$$f(X) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} X^{\mu} a_{\nu-\mu}^{(\nu)}(X)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}'(X)}. \tag{209}$$

Если функция $f(X)$, удовлетворяющая указанным выше условиям, допускает, кроме того, в окрестности нулевой матрицы разложение

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} X^{\nu} \tag{210}$$

с численными коэффициентами γ_{ν}, то формула (209) принимает частный вид

$$f(X) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{\mu} X^{\mu} b_{\nu-\mu}(X)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(X)}, \tag{211}$$

как это видно из ряда для произведения

$$f(X) \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(X).$$

Если мы положим $X = \xi[1, t_2, \ldots, t_n]$, где $t_2, \ldots, t_n$ — фиксированные числа и ξ — переменный параметр, то найдем с помощью равенства (211)

$$\{f(X)\}_{11} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} \xi^{\nu} = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} \xi^{\nu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} \xi^{\nu}} = \frac{a(\xi)}{b(\xi)},$$

где $a(\xi)$ и $b(\xi)$ — целые функции. Числа $t_2, \ldots, t_n$ выбираются таким образом, что знаменатель предыдущей формулы не обращается в нуль тождественно. Следовательно, $f(\xi)$ есть мероморфная функция от ξ. Аналитическая функция (210), элементы которой суть мероморфные функции от элементов матрицы X, представляет собой, таким образом, мероморфную функцию от матрицы X.

§ 14. Степенные ряды нескольких матриц

Перейдем к изучению рядов от нескольких матриц.

Рассмотрим m переменных матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ порядка n с переменными коэффициентами и систему численных постоянных

$$\alpha_0, \ \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_{\nu}} \quad (j_1, j_2, \ldots, j_{\nu} = 1, 2, \ldots, m; \ \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Выражения

$$\{P_{\mu}(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} = \sum_{\nu=0}^{\mu} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu}}^{(1, 2, \ldots, m)} \{X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_{\nu}}\}_{kl} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_{\nu}}$$

являются элементами матрицы

$$P_{\mu}(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu}}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_{\nu}} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_{\nu}}.$$

При этом произведение $\{X_{j_1} \ldots X_{j_{\nu}}\}_{kl} \alpha_{j_1 \ldots j_{\nu}}$ равно $\alpha_0 \delta_k^l$ для $\nu = 0$ и каждая сумма $\sum\limits_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu}}^{(1, 2, \ldots, m)}$ содержит m^{ν} членов, которые мы получим, когда индексы $j_1, j_2, \ldots, j_{\nu}$ пробегают независимо друг от друга значения $1, 2, \ldots, m$. Матрицу $P_{\mu}(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ можно рассматривать как полином от переменных матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Устремляя μ к бесконечности и предполагая при этом существование n^2 пределов

$$\{F(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} \{X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}\}_{kl}\, \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{212}$$

мы получим матрицу

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{213}$$

представленную сходящимся *рядом композиций*; элементы этой матрицы даны выражениями (212).

Введем обозначения:

$$[X\alpha]_\nu = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \quad [X\alpha]_0 = \alpha_0, \tag{214}$$

тогда получим

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu. \tag{215}$$

Если ряд (215), *общий член которого есть* $[X\alpha]_\nu$, *и, следовательно, ряды* (212) *сходятся равномерно во всей области матриц*

$$|X_j| < A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{216}$$

(A_j — постоянные матрицы, все элементы которых положительны), то мы будем говорить, что этот ряд композиции (215) представляет *аналитическую функцию* $Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *от матриц* $X_1, X_2, \ldots, X_m$, *голоморфную в окрестности* (216) *нулевых матриц.*

Заметим, что равномерная сходимость в открытой области

$$|X_j| < A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

по определению равносильна равномерной сходимости в каждой замкнутой области, содержащейся в упомянутой выше области, т. е. в каждой области

$$|X_j| \leqslant B_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где $B_j < A_j$.

Функцию матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, голоморфную в каждой области

$$|X_j| < \|\rho\| \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где ρ как угодно большое положительное число, будет называть *целой функцией.*

Обозначая через $\alpha^{(\nu)}$ наибольший из модулей

$$|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

и замечая, что

$$|X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}| \leqslant |X_{j_1}|\,|X_{j_2}| \ldots |X_{j_\nu}|,$$

мы заключаем, что сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} |X_{j_1}|\,|X_{j_2}| \ldots |X_{j_\nu}|$$

влечет за собой сходимость ряда (215).

Но очевидно, что

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} |X_{j_1}|\,|X_{j_2}| \ldots |X_{j_\nu}| = (|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m|)^\nu;$$

следовательно, при условии сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} (|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m|)^\nu \tag{217}$$

ряд (215) наверно сходится.

Но по теореме I из § 6 ряд (217) наверно равномерно сходится во всей области матриц

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{218}$$

если функция

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu \tag{219}$$

от численной переменной ξ голоморфна в круге

$$|\xi| < \rho n. \tag{220}$$

Если это условие выполнено, то говорят, что функция

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$$

от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, определяемая рядом композиций (213), *равномерно голоморфна* в области матриц (218). Если $f(\xi)$ — целая функция, то говорят, что функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *равномерно целая.*

Из сформулированных определений следует, что любую аналитическую функцию (213) от m переменных матриц X_j порядка n можно рассматривать как систему n^2 аналитических функций (212) от mn^2 численных переменных $\{X_j\}_{kl}$.

Разложениями этих n^2 функций в степенные ряды в окрестности нулевых значений являются разложения (212), расположенные по полиномам частного вида

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} \{X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}\}_{kl}\, \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}.$$

С этой точки зрения понятие множества всех аналитических функций от m переменных матриц порядка n есть не что иное как понятие *частного класса* аналитических функций, зависящих от mn^2 численных комплексных переменных.

Можно определить понятие аналитической функции от матриц более общо, полагая

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} \sum_{A} A^{(0)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} X_{j_1} A^{(1)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} X_{j_2} \ldots A^{(\nu-1)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} X_{j_\nu} A^{(\nu)}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{221}$$

где A — постоянные матрицы и где внутренний знак суммы указывает, что мы должны суммировать члены, отвечающие различным матрицам A. Это обобщение необходимо, если мы хотим рассматривать аналитические продолжения рядов вида (213), сохраняя матричную запись.

К тому же, как легко видеть, каждая матрица, элементы которой суть функции переменных $\{X_j\}_{kl}$, голоморфные в окрестности

$$|\{X_j\}_{kl}| < \rho_j \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

может быть представлена рядом вида (221).

§ 15. Единственность степенного ряда нескольких матриц

В этом параграфе мы будем заниматься вопросом единственности представления функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, голоморфной в окрестности (216), рядом композиций матриц X_j. Прежде всего можно доказать, что если мы рассматриваем матрицы X_j фиксированного порядка n, то теорема единственности представления функции от нескольких матриц рядом композиций уже не имеет места, в противоположность случаю функций от одной переменной матрицы. Два различных ряда матриц

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu \tag{222}$$

и

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu \tag{223}$$

могут представлять одну и ту же функцию от матриц, между тем как некоторые из коэффициентов $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ отличны от соответствующих коэффициентов $\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$. Если мы вычтем один ряд из другого и обозначим

$$\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} - \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu},$$

то получим ряд композиций

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu = 0, \tag{224}$$

тождественно равный нулю, хотя его коэффициенты не все равны нулю.

Для доказательства этого факта рассмотрим две переменные матрицы X_1 и X_2 порядка n и образуем однородный полином

$$f(X_1, X_2) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{2\nu}}^{(1, 2)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_{2\nu}} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_{2\nu}}$$

степени ν относительно X_1 и той же степени относительно X_2; следовательно, ν из индексов j_k равны 1 и ν оставшихся индексов равны 2. Очевидно, что мы имеем всего

$$\binom{2\nu}{\nu} = \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}$$

коэффициентов $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$.

n^2 элементов матрицы $f(X_1, X_2)$ суть однородные полиномы элементов $\{X_1\}_{kl}$ и $\{X_2\}_{kl}$ матриц X_1 и X_2, а именно, степени ν относительно элементов $\{X_1\}_{kl}$ и этой же самой степени относительно $\{X_2\}_{kl}$. Но наиболее общий

однородный полином степени ν от n^2 переменных имеет

$$\binom{n^2+\nu-1}{\nu} = \frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}$$

членов; следовательно, каждый элемент матрицы $f(X_1, X_2)$ будет иметь после приведения подобных членов не более

$$\left\{\frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}\right\}^2$$

членов. Приравнивая нулю коэффициенты при всех этих членах у всех n^2 полиномов $\{f(X_1, X_2)\}_{kl}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, мы получим

$$n^2\left\{\frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}\right\}^2$$

линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$.

Но для ν достаточно большого имеем

$$\frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2} > n^2\left\{\frac{(n^2+\nu-1)!}{(n^2-1)!\,\nu!}\right\}^2. \tag{225}$$

Действительно, если мы положим

$$C_\nu = \frac{n^2}{(n^2-1)!^2}\,\frac{(n^2+\nu-1)!^2}{(2\nu)!},$$

то найдем

$$\frac{C_{\nu+1}}{C_\nu} = \frac{(n^2+\nu)^2}{(2\nu+1)(2\nu+2)},$$

откуда

$$\lim \frac{C_{\nu+1}}{C_\nu} = \frac{1}{4} \text{ и, следовательно, } \lim C_\nu = 0.$$

Таким образом, можно выбрать ν, удовлетворяющее неравенству (225). Так как число коэффициентов $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_{2\nu}}$ больше, чем число линейных однородных уравнений, которым эти коэффициенты должны удовлетворять, то наверно существуют ненулевые решения указанной системы уравнений. Полином $f(X_1, X_2)$, коэффициенты которого удовлетворяют упомянутой выше системе уравнений, равен нулю тождественно. Например, если мы рассмотрим матрицы второго порядка, то найдем полиномы степени 22 от двух матриц, которые тождественно равны нулю. С помощью дополнительных рассмотрений можно доказать существование полиномов степени 16, обладающих таким же свойством.

Однако весьма важно заметить, что теорема единственности разложения функции от матриц в ряд композиций имеет место, если мы рассматриваем матрицы произвольного порядка.

Теорема единственности VIII. *Если два ряда композиций* (222) *и* (223) *представляют одну и ту же функцию от матриц* $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, *голоморфную в окрестности* (216), *и если это имеет место для матриц*

$$X_1, X_2, \ldots, X_m$$

произвольного порядка [*но одного и того же для всех матриц* $X_1, X_2, \ldots, X_m$, *окрестность* (216) *зависит, вообще говоря, от этого порядка*], *то тогда эти ряды тождественны*, т. е.

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{226}$$

Доказательство. Прежде всего равенства (222) и (223) влекут за собой (224). Если мы заменим в этом равенстве каждую матрицу X_j через tX_j, где t — переменный численный параметр, то для $|t|<1$ получим равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu t^\nu = 0,$$

откуда следует, что для каждого фиксированного ν мы должны иметь

$$[X\gamma]_\nu = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \equiv 0 \tag{227}$$

для всех матриц X, принадлежащих окрестности (216). Но так как $[X\gamma]_\nu$ полином, равенство (227) должно быть удовлетворено для всех матриц X_j.

Докажем теперь, что все коэффициенты $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ суть нули. Рассмотрим коэффициент $\gamma_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$ и предположим, что среди ν индексов $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ имеется r различных индексов; положим $X_j = 0$, если j отлично от индексов $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, и заменим индексы $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ индексами от 1 до r. Тогда вместо (227) получим равенство

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, r)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \equiv 0, \tag{228}$$

в котором один из коэффициентов $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$, например, $\gamma_{l_1 l_2 \ldots l_\nu}$, равен рассматриваемому коэффициенту $\gamma_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$.

Если $r<\nu$, то один из индексов $l_1, l_2, \ldots, l_\nu$, пусть l_α, должен повторяться в этой последовательности по крайней мере два раза. Положим тогда $X_{l_\alpha} = X'_{l_\alpha} + tX''_{l_\alpha}$ и найдем в (228) совокупность членов, содержащих t как множитель, т. е. совокупность членов, содержащих X''_{l_α} только один раз; очевидно, что эта совокупность в отдельности должна быть равна нулю тождественно. Обозначая

$$X'_{l_\alpha} = Y_{l_\alpha}, \quad X''_{l_\alpha} = Y_{r+1}, \quad X_\beta = Y_\beta,$$

получим новое уравнение

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, r+1)} Y_{j_1} Y_{j_2} \ldots Y_{j_\nu} \delta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \equiv 0,$$

где $\delta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$, если среди индексов $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ нет индекса $r+1$, и $\delta_{j_1 \ldots j_\varkappa, r+1, j_{\varkappa+2}, \ldots, j_\nu} = \gamma_{j_1 \ldots j_\varkappa l_\alpha j_{\varkappa+2} \ldots j_\nu}$, если среди индексов имеется один, равный $r+1$.

Продолжая таким же образом, мы придем к тождеству

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, \nu)} Z_{j_1} Z_{j_2} \ldots Z_{j_\nu} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0, \tag{229}$$

где все индексы $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ различны и где один из коэффициентов $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ равен коэффициенту $\gamma_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}$.

Но легко видеть, что все коэффициенты $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ суть нули. Рассмотрим, например, $\varepsilon_{1 2 \ldots \nu}$. Обозначим через $\delta_{\alpha\beta}$ матрицу порядка $\nu+1$ с элементами

$$\{\delta_{\alpha\beta}\}_{kl} = 0, \text{ если } k \neq \alpha \text{ или } l \neq \beta$$
$$\{\delta_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta} = 1.$$

Вычисления с такими матрицами производятся по следующим правилам:

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} = 0, \text{ если } \beta \neq \gamma; \quad \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Следовательно, если мы положим

$$Z_1 = \delta_{12}, \quad Z_2 = \delta_{23}, \quad \ldots, \quad Z_\nu = \delta_{\nu, \nu+1},$$

то получим $Z_1 Z_2 \ldots Z_\nu = \delta_{1, \nu+1}$, а все прочие произведения $Z_{j_1} Z_{j_2} \ldots Z_{j_\nu}$ суть нули. Таким образом, из (229) получаем

$$\varepsilon_{12 \ldots \nu} = 0.$$

Аналогично докажем, что $\varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0$ и, следовательно, $\gamma_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} = 0$, что и требовалось доказать.

§ 16. Сходимость степенного ряда нескольких матриц

В этом параграфе мы будем изучать вопрос о сходимости ряда от нескольких матриц

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}. \tag{230}$$

Если ряд (230) сходится в окрестности

$$|X_j| < A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{231}$$

где все элементы матриц A_j положительны, то ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |[X\alpha]_\nu| \tag{232}$$

будет также сходящимся в той же окрестности (231). Действительно, если мы введем параметр t и рассмотрим ряд по степеням t

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu [X\alpha]_\nu, \tag{233}$$

где X_j принадлежат окрестности (231), то увидим, что радиус сходимости ряда (233) больше единицы и, следовательно, этот ряд абсолютно сходится при $t=1$, т. е. ряд (232) сходится.

Рассмотрим теперь n^2 элементов матрицы $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Это n^2 рядов

$$\{F(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} \{X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}\}_{kl} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu};$$

но в каждой сумме $\sum\limits_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)}$ можно произвести суммирование подобных членов и записать эти n^2 рядов в виде

$$\{F(X_1, X_2, \ldots, X_m)\}_{kl} = C^{(kl)}_{0, 0, \ldots, 0} + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\sum \mu^{(j)}_{\alpha\beta} = \nu} \left(C^{(kl)}_{\mu^{(1)}_{11} \mu^{(2)}_{11} \ldots \mu^{(m)}_{11} \ldots \mu^{(1)}_{nn} \ldots \mu^{(m)}_{nn}} \prod_{\substack{j=1, 2, \ldots, m \\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n}} \{X_j\}_{\alpha\beta}^{\mu^{(j)}_{\alpha\beta}} \right). \tag{234}$$

Если эти n^2 рядов от mn^2 переменных $\{X_j\}_{kl}$ сходятся для рассматриваемых матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ абсолютно (т. е. сходятся после замены переменных $\{X_j\}_{kl}$ и коэффициентов $C^{(kl)}$ их модулями), то ряд матриц (230) будем называть *полуабсолютно сходящимся.*

Введем еще сумму

$$[|X\alpha|]_\nu = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} |X_{j_1}||X_{j_2}| \ldots |X_{j_\nu}||\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}|, \quad [|X\alpha|]_0 = |\alpha_0|, \tag{235}$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [|X\alpha|]_\nu. \tag{236}$$

Если этот ряд сходится, то ряд (230) мы называем *абсолютно сходящимся.* Очевидно, что абсолютная сходимость ряда (230) влечет его полуабсолютную сходимость и что из полуабсолютной сходимости ряда (230) вытекает обычная сходимость этого ряда. Наоборот, можно построить полуабсолютно сходящийся ряд, но не сходящийся абсолютно. Достаточно взять полиномы $F_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, тождественно равные нулю,

$$F_\nu = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \equiv 0,$$

и построить ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu F_\nu \equiv 0,$$

который, очевидно, полуабсолютно сходится. С другой стороны, очевидно, что если модули коэффициентов $|\beta_\nu|$ весьма быстро возрастают с возрастанием индекса ν, то ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\beta_\nu| [|X\alpha|]_\nu$$

будет расходящимся.

В случае рядов от одной матрицы понятия полуабсолютной и абсолютной сходимости эквивалентны.

Мы видели в теории функций от одной матрицы примеры рядов от матриц, которые сходятся, не являясь полуабсолютно сходящимися. Действительно, ряд

$$f(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu X^\nu \tag{237}$$

сходится для матриц X, все характеристические числа которых расположены в круге сходимости ряда

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu.$$

Полуабсолютная сходимость в этом случае эквивалентна сходимости абсолютной, но ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| |X|^\nu \tag{238}$$

сходится только тогда, когда все характеристические числа матрицы $|X|$ находятся в круге сходимости ряда $f(\xi)$. Однако легко построить матрицы X, обладающие тем свойством, что все характеристические числа матрицы X лежат внутри круга сходимости ряда $f(\xi)$ и по крайней мере одно из характеристических чисел матрицы $|X|$ лежит вне этого круга. Тогда ряд (237) сходится и ряд (238) расходится.

Однако важно заметить, что *если мы имеем функцию от матриц* (230), *голоморфную в окрестности*

$$|X_j| < A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{239}$$

т. е. если ряд (230) сходится равномерно для всех матриц X_j, принадлежащих окрестности (239), *то ряды* (234) *по* $\{X_j\}_{kl}$, дающие элементы функции (230), *абсолютно сходятся в совместных кругах*

$$\{X_j\}_{kl} < \{A_j\}_{kl} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m; \ k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{240}$$

Следовательно, равномерная сходимость ряда (230) в области (239) влечет полуабсолютную сходимость этого ряда.

Действительно, по теореме Вейерштрасса n^2 элементов ряда (230) суть аналитические функции переменных $\{X_j\}_{kl}$, которые могут быть представлены рядами Тэйлора (234), абсолютно сходящимися в совместных кругах (240).

Мы ввели в § 14 понятие функции матриц

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{230}$$

равномерно голоморфной в области

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{241}$$

понимая под этим, что ряд

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu,$$

где $\alpha^{(\nu)}$ — наибольший из модулей $|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}|$, сходится в круге

$$|\xi| < \rho n.$$

Очевидно, что в этом случае ряд (230) сходится абсолютно в той же области (241). Однако обратное утверждать нельзя. Например, ряд от двух матриц X_1 и X_2 второго порядка

$$f(X_1, X_2) = I + X_1 X_2 + X_1 X_2 X_1 X_2 + \ldots \tag{242}$$

абсолютно сходится в области

$$|X_1| + |X_2| < \|2(\sqrt{2} - 1)\|, \tag{243}$$

в то время как ряд (242) есть равномерно голоморфная функция матриц X_1 и X_2 лишь в области

$$|X_1| + |X_2| < \|0{,}5\|.$$

Действительно, мы имеем

$$\alpha^{(2k)} = 1, \quad \alpha^{(2k+1)} = 0,$$

и, следовательно, $2\rho = 1$, $\rho = 0{,}5$.

С другой стороны, если мы возьмем ($t > 0$)

$$X_1 = \begin{Vmatrix} t & 0 \\ 2t & t \end{Vmatrix}, \quad X_2 = \begin{Vmatrix} t & 2t \\ 0 & t \end{Vmatrix}, \tag{244}$$

то найдем

$$Y = X_1 X_2 = \begin{Vmatrix} t^2 & 2t^2 \\ 2t^2 & 5t^2 \end{Vmatrix} = S \begin{Vmatrix} (3+\sqrt{8})t^2 & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{8})t^2 \end{Vmatrix} S^{-1},$$

где

$$S=\left\| \begin{matrix} 1 & -(1+\sqrt{2}) \\ 1+\sqrt{2} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Но для сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} Y^{\nu}$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(3+\sqrt{8})\,t^2\right]^{\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1+\sqrt{2})\,t\right]^{2k}$$

сходился; так как радиус сходимости этого ряда равен $\sqrt{2}-1$, то мы видим, что ряд (242) сходится, если возьмем за X_1 и X_2 матрицы (244) при $0{,}25<t<\sqrt{2}-1$; но для матриц (244) мы имеем

$$X_1+X_2=\|2t\|_1^1$$

и эти матрицы не принадлежат области

$$|X_1|+|X_2|<\|0{,}5\|.$$

Можно доказать, что для всех матриц, принадлежащих области (243), ряд (242) сходится абсолютно.

Заметим, что из абсолютной сходимости ряда (230) в области

$$|X_j|<\|\rho\| \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m) \tag{245}$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{(\nu)}\,|X|^{\nu}$$

в области

$$|X|<\|\rho\|.$$

Действительно, положим

$$X_j=\|\rho'\| \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

где $0<\rho'<\rho$; так как ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{j_1,\,j_2,\,\ldots,\,j_\nu}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)}\|\rho'\|^{\nu}\,|\alpha_{j_1j_2\ldots j_\nu}|$$

сходится, то сходится также и ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\|\rho'\|^{\nu}\,\alpha^{(\nu)},$$

что и доказывает наше утверждение.

Следовательно, так как ряд (230) абсолютно сходится в области (245), то он представляет функцию, равномерно голоморфную в области (241).

Если ряд (230) абсолютно сходится в области (241), то он абсолютно сходится в области

$$|X_j|<\left\|\frac{\rho}{m}\right\| \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

и, следовательно, представляет собой равномерно голоморфную функцию матриц $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m$ в области

$$|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_m|<\left\|\frac{\rho}{m}\right\|. \tag{246}$$

§ 17. Операции со степенными рядами нескольких матриц

Операции умножения рядов, подстановки рядов в другие ряды и обращения рядов в области рядов, расположенных по произведениям m матриц, представляют некоторые алгорифмические особенности, касающиеся определения коэффициентов и возникающие ввиду некоммутативности умножения матриц. Прежде чем перейти к соответствующим теоремам, мы сделаем несколько элементарных замечаний о мажорировании функций от матриц.

Если мы имеем два ряда композиций

$$F(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{j_1j_2,\,\ldots,\,j_\nu}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1j_2\ldots j_\nu},$$

$$G(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{j_1j_2,\,\ldots,\,j_\nu}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\beta_{j_1j_2\ldots j_\nu}$$

и если для всех индексов имеем неравенства

$$|\alpha_0|<\beta_0,\quad |\alpha_{j_1j_2\ldots j_\nu}|\leqslant\beta_{j_1j_2\ldots j_\nu} \qquad (\nu=1,\,2,\,\ldots),$$

то ряд $G(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m)$ называется мажорантным для ряда

$$F(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m).$$

Если ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{(\nu)}\,(X_1+X_2+\ldots+X_m)^{\nu}$$

является мажорантным для ряда $F(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m)$ и если радиус сходимости ряда

$$f(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^{(\nu)}\xi^{\nu}$$

больше или равен ρn, то функция $F(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_m)$ по определению равномерно голоморфна в области

$$|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_m|<\|\rho\|. \tag{247}$$

Мы имеем в этом случае неравенства

$$|\alpha_{j_1j_2\ldots j_\nu}|<\frac{g}{(\rho' n)^{\nu}}, \tag{248}$$

где $\rho'=\rho-\varepsilon$, ε — положительное как угодно малое число и g — положительное число, зависящее от числа ε.

Обратно, из неравенств (248) мы получаем, что функция F равномерно голоморфна в области

$$|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_m|<\|\rho'\|. \tag{249}$$

Если неравенства (248) выполнены, то мы можем взять в качестве мажоранты функции F в области (249) функцию

$$G(X_1, X_2, \ldots, X_m) = g\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_m}{\rho'/n}\right)^{\nu} = g\left(I - \frac{X_1+X_2+\ldots+X_m}{\rho'/n}\right)^{-1}. \tag{250}$$

Но если мы положим

$$Y = \|\rho\|,$$

где $0<\rho<\frac{1}{n}$, то получим

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} Y^{\nu} &= Y + Y^2 + \ldots = \|\rho\| + \|n\rho^2\| + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty}\|n^{\nu-1}\rho^{\nu}\| = \left\|\frac{\rho}{1-n\rho}\right\|;\\ (I-Y)^{-1} &= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} Y^{\nu} = I + \left\|\frac{\rho}{1-n\rho}\right\| < \left\|\frac{1}{1-n\rho}\right\|. \end{aligned}\right\} \tag{251}$$

Следовательно, в области

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\rho''\| < \|\rho'\| \tag{252}$$

мы имеем следующее неравенство:

$$|F(X_1, X_2, \ldots, X_m)| < \left\|g\left(1-\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1}\right\|. \tag{253}$$

Точно таким же образом для функции

$$F_1(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \tag{254}$$

мы имеем мажоранту

$$G_1(X_1, X_2, \ldots, X_m) = g\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_m}{\rho'/n}\right)^{\nu} \tag{255}$$

и в силу соотношения (251) неравенство, справедливое в области (252):

$$|F_1(X_1, X_2, \ldots, X_m)| < \left\|g\frac{\rho''}{\rho'/n}\left(1-\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1}\right\|. \tag{256}$$

Теорема IX. *Если ряды*

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{257}$$

$$V = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \tag{258}$$

представляют функции U и V от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфные в области

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{259}$$

то их произведение UV равномерно голоморфно в той же области и может быть представлено в виде

$$UV = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{260}$$

где коэффициенты $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ определяются формулами

$$\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\mu}\beta_{j_{\mu+1}\ldots j_\nu} = \alpha_0\beta_{j_1\ldots j_\nu} + \alpha_{j_1}\beta_{j_2\ldots j_\nu} + \ldots + \alpha_{j_1\ldots j_{\nu-1}}\beta_{j_\nu} + \alpha_{j_1\ldots j_\nu}\beta_0, \tag{261}$$

в которых мы должны заменить $\alpha_{j_1\ldots j_\mu}$ на α_0 в случае $\mu=0$ и $\beta_{j_{\mu+1}\ldots j_\nu}$ — на β_0 в случае $\mu=\nu$.

Доказательство. Выполняя умножение абсолютно сходящихся рядов U и V, мы получим в качестве их произведения ряд (260), коэффициенты которого определяются формулами (261).

В силу неравенств ($\rho'=\rho-\varepsilon$, g и h — положительные числа):

$$|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{g}{(\rho'/n)^{\nu}}, \qquad |\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{h}{(\rho'/n)^{\nu}},$$

мы имеем

$$|\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{(\nu+1)gh}{(\rho'/n)^{\nu}} = \gamma^{(\nu)}.$$

Так как радиус сходимости ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma^{(\nu)}\xi^{\nu}$$

равен ρ'/n, то мы получаем, что UV — равномерно голоморфная функция в области

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\rho'\|;$$

но так как ε можно взять как угодно малым, то UV — равномерно голоморфная функция в области (259).

Следствие. *Произведение двух равномерно целых функций от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ есть снова равномерно целая функция этих матриц.*

Замечание I. *Если ряды U и V абсолютно сходятся в области*

$$|X_j| < A_j \qquad (j=1, 2, \ldots, m),$$

то их произведение дается рядом (260), *абсолютно сходящимся в той же области.*

Доказательство очевидно.

Замечание II. *Если ряды U и V равномерно сходятся в области*

$$|X_j| < A_j,$$

то их произведение дается рядом (260), *равномерно сходящимся в той же области.*

Доказательство очевидно, так как к сходящимся рядам

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|[X\alpha]_\nu| \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty}|[X\beta]_\nu|$$

можно применить правило умножения рядов.

Теорема X. *Если матрица*

$$Z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,r)} Y_{j_1}Y_{j_2}\ldots Y_{j_\nu}\beta_{j_1j_2\ldots j_\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}[Y\beta]_\nu \tag{262}$$

есть функция от матриц $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$, равномерно голоморфная в области

$$|Y_1|+|Y_2|+\ldots+|Y_r|<\|\sigma\|, \tag{263}$$

и если матрицы

$$Y_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\alpha^{(j)}_{j_1j_2\ldots j_\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}[X\alpha^{(j)}]_\nu \quad (j=1,2,\ldots,r) \tag{264}$$

в свою очередь суть функции от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфные в области

$$|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_m|<\|\rho\|, \tag{265}$$

то матрица Z есть функция матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в окрестности нулевых матриц (т. е. *в окрестности типа* (265) *с другим значением* ρ), *и она может быть представлена в виде ряда композиций*

$$Z=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}[X\gamma]_\nu, \tag{266}$$

где коэффициенты $\gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}$ определяются формулами [1])

$$\gamma_0=\beta_0,\quad \gamma_{j_1}=\sum_{h_1=1}^{r}\alpha^{(h_1)}_{j_1}\beta_{h_1},\quad \gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}=\sum_{h_1=1}^{r}\alpha^{(h_1)}_{j_1j_2\ldots j_\nu}\beta_{h_1}+$$
$$+\sum_{\mu=2}^{\nu}\sum_{h_1,h_2,\ldots,h_\mu}^{(1,2,\ldots,r)}\sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}\alpha^{(h_1)}_{j_1j_2\ldots j_{\varkappa_1}}\alpha^{(h_2)}_{j_{\varkappa_1+1}\ldots j_{\varkappa_2}}\ldots\alpha^{(h_\mu)}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots j_\nu}\beta_{h_1h_2\ldots h_\mu}. \tag{267}$$

Доказательство. Подставляя ряды (264) в ряд (262) и располагая результат по произведениям матриц X_j, мы получим формально равенство (266), где коэффициенты $\gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}$ определяются формулами (267).

Так как функции Y_j и Z равномерно голоморфны соответственно в областях (265) и (263), то существуют положительные числа g и h такие, что выполнены неравенства

$$\sum_{j=1}^{r}\left|\alpha^{(j)}_{j_1j_2\ldots j_\nu}\right|<\frac{g}{(\rho' n)^\nu},\quad \left|\beta_{j_1j_2\ldots j_\nu}\right|<\frac{h}{(\sigma' n)^\nu}, \tag{268}$$

где

$$\rho'=\rho-\varepsilon \quad \text{и} \quad \sigma'=\sigma-\varepsilon$$

и ε положительное, как угодно малое число (числа g и h зависят, вообще говоря, от ε).

Если мы возьмем матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_m$, принадлежащие области

$$|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_m|<\|\rho''\|<\|\rho'\|,$$

[1]) Суммирование под знаком суммы $\sum\limits_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}$ распространяется на все целые значения индексов $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\mu-1}$, удовлетворяющие указанным неравенствам.

то в соответствии с формулой (256) получим

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}|X_{j_1}|\ldots|X_{j_\nu}|\left|\alpha^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}\right|<\left\|\frac{g\rho''}{\rho' n}\left(1-\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1}\right\|.$$

Если возьмем положительное число ρ'', удовлетворяющее условию

$$\frac{g\rho''}{\rho' n}\left(1-\frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1}<\sigma',$$

т. е.

$$\rho''<\rho'\frac{\sigma'}{\sigma'+\frac{g}{n}};$$

то будет выполняться неравенство

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}|X_{j_1}|\ldots|X_{j_\nu}|\left|\alpha^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}\right|<\|\sigma'\|<\|\sigma\|. \tag{269}$$

Так как ряд (262) абсолютно сходится в области (263) и так как ряды (264) в свою очередь абсолютно сходятся в области

$$|X_1|+|X_2|+\ldots+|X_m|<\left\|\frac{\rho'\sigma' n}{\sigma' n+g}\right\| \tag{270}$$

и выполнено условие (269), то после подстановки рядов (264) в ряд (262) мы получим новый ряд (266), абсолютно сходящийся в той же области (270). Докажем, что новый ряд есть равномерно голоморфная функция в этой области. С этой целью оценим коэффициенты $\gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}$.

В силу неравенств (268) мы видим, что функция

$$h\left(I-\frac{1}{\sigma' n}\sum_{j=1}^{r}Y_j\right)^{-1}$$

является мажорантой для функции Z, с другой стороны, для функции

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\left|\bar{\alpha}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}\right|$$

можно взять в качестве мажоранты в силу (268) функцию

$$\frac{g}{\rho' n}\sum_{j=1}^{m}X_j\left(I-\frac{1}{\rho' n}\sum_{j=1}^{m}X_j\right)^{-1}$$

или, если мы введем обозначение

$$\sum_{j=1}^{m}X_j=\mathfrak{X},$$

функцию

$$\mathfrak{Y}=\frac{g}{\rho' n}\mathfrak{X}\left(I-\frac{1}{\rho' n}\mathfrak{X}\right)^{-1}.$$

Следовательно, ряд (266), в который разлагается функция Z, рассматриваемая как функция матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, можно мажорировать функцией

$$h\left(I-\frac{1}{\sigma' n}\mathfrak{Y}\right)^{-1}=h\left[I-\frac{g\mathfrak{X}}{\rho'\sigma' n^2\left\{I-\frac{\mathfrak{X}}{\rho' n}\right\}}\right]^{-1}=$$

$$=h\left(I-\frac{\mathfrak{X}}{\rho' n}\right)\left[I-\frac{(g+\sigma' n)\,\mathfrak{X}}{\rho'\sigma' n^2}\right]^{-1}=h+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{hg}{\rho'\sigma' n^2}\left(\frac{g+\sigma' n}{\rho'\sigma' n^2}\right)^{\nu-1}\mathfrak{X}^{\nu};$$

и мы находим, следовательно, оценки

$$\left|\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}\right|<\frac{hg}{\rho'\sigma' n^2}\left(\frac{g+\sigma' n}{\rho'\sigma' n^2}\right)^{\nu-1}=\gamma^{(\nu)}\qquad(\nu=1,\,2,\,\ldots),\tag{271}$$

которые показывают, что Z, как функция матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфна в области (270), так как ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma^{(\nu)}\xi^{\nu}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{hg}{\rho'\sigma' n^2}\left(\frac{g+\sigma' n}{\rho'\sigma' n^2}\right)^{\nu-1}\xi^{\nu}$$

сходится в круге

$$|\xi|<\frac{\rho'\sigma' n^2}{g+\sigma' n}.$$

С л е д с т в и е. *Если в предыдущей теореме Z есть равномерно целая функция от матриц $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ и эти последние суть равномерно голоморфные функции от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в области* (265), *то матрица Z есть равномерно голоморфная функция матриц*

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m$$

в той же самой области.

Действительно, в этом случае σ' можно взять сколь угодно большим. Фиксируя число g, мы получим из формулы (270), что ряд

$$Z(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)$$

равномерно голоморфен в каждой области

$$|X_1|+|X_2|+\ \ldots\ +|X_m|<\|\rho'\|$$

и, следовательно, во всей области (265).

З а м е ч а н и е. Если в теореме предполагать только, что ряд (262) абсолютно сходится в области

$$|Y_j|<B_j\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,r)$$

и что ряды (264) абсолютно сходятся в области

$$|X_j|<A_j\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

то матрица Z представляет собой функцию матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, представимую рядом (266), абсолютно сходящимся в области

$$|X_j|<C_j\leqslant A_j,$$

где матрицы C_j удовлетворяют условиям

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)} C_{j_1}C_{j_2}\ldots C_{j_\nu}\left|\alpha^{(j)}_{j_1 j_2\ldots j_\nu}\right|<B_j\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,r).$$

Доказательство очевидно.

Теорема XI. *Если матрица*

$$Z=\sum_{\nu=0}^{\infty}[Y\beta]_{\nu}$$

есть функция матриц $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$, голоморфная в области

$$|Y_j|<B_j\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,r),$$

и матрицы

$$Y_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}[X\alpha^{(j)}]_{\nu}\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,r),$$

суть функции матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, голоморфные в области

$$|X_j|<A_j\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

то матрица Z есть функция матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, голоморфная в области $|X_j|<D_j\leqslant A_j$ и представимая рядом

$$Z=\sum_{\nu=0}^{\infty}[X\gamma]_{\nu},$$

коэффициенты которого $\gamma_{j_1 j_2\ldots j_\nu}$ определяются формулами (267).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как элементы матрицы Z, соответственно, матриц Y_j представляются рядами Тэйлора по $\{Y_j\}_{kl}$, соответственно, $\{X_j\}_{kl}$, абсолютно сходящимися в совместных кругах

$$|\{Y_j\}_{kl}|<\{B_j\}_{kl}\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,r;\ k,\,l=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

соответственно,

$$|\{X_j\}_{kl}|<\{A_j\}_{kl}\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,m;\ k,\,l=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

то теорема непосредственно вытекает из известных теорем о подстановке рядов от нескольких переменных в другие ряды.

Теорема XII. *Если матрица*

$$Y=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1\ldots j_\nu}\tag{272}$$

есть функция от матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в области

$$|X_1|+|X_2|+\ \ldots\ +|X_m|<\|\rho\|,\tag{273}$$

то обратная матрица Y^{-1} есть также функция от матриц X_1, $X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в окрестности нулевых матриц, и может быть представлена в виде:

$$Y^{-1}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)} X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha^{*}_{j_1\ldots j_\nu},\tag{274}$$

где коэффициенты $\alpha^{*}_{j_1 j_2\ldots j_\nu}$ определяются формулами

$$\alpha^{*}_{j_1\ldots j_\nu}=-\alpha_{j_1\ldots j_\nu}+\sum_{\mu=2}^{\nu}\ \sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}(-1)^{\mu}\,\alpha_{j_1\ldots j_{\varkappa_1}}\alpha_{j_{\varkappa_1+1}\ldots j_{\varkappa_2}}\ldots\alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots j_\nu}.\tag{275}$$

Доказательство. Если мы положим в теореме X

$$Y_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 \ldots j_\nu},$$

$$Z = Y^{-1} = (I + Y_1)^{-1} = I - Y_1 + Y_1^2 - \ldots,$$

то получим для функции Y^{-1} представление (274), в котором в соответствии с формулами (267) коэффициенты равны значениям (275). Пусть

$$\rho' = \rho - \varepsilon$$

и

$$|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}| < \frac{g}{(\rho' n)^\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Тогда по той же теореме Y^{-1} есть функция от $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфная в области

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \left\| \frac{\rho'}{1+g} \right\|;$$

действительно, в формуле (270) $\sigma' n$ можно взять сколь угодно близким к единице. Можно взять еще $h = 1$ и, следовательно, из формул (271) мы получим, что

$$\left| \alpha^*_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \right| < \frac{g}{\rho' n} \left(\frac{1+g}{\rho' n} \right)^{\nu - 1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{276}$$

Следствие. *Если*

$$Y = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \tag{277}$$

и $\alpha_0 \neq 0$, *то*

$$Y^{-1} = \frac{1}{\alpha_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\overset{*}{\alpha}]_\nu, \tag{278}$$

где

$$\overset{*}{\alpha}_{j_1 \ldots j_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{0 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \frac{(-1)^\mu}{\alpha_0^{\mu+1}} \alpha_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}} \ldots \alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu} \tag{279}$$

и

$$\left| \overset{*}{\alpha}_{j_1 \ldots j_\nu} \right| < \frac{g}{n\rho' |\alpha_0|^2} \left(\frac{|\alpha_0| + g}{\rho' n |\alpha_0|} \right)^{\nu - 1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{280}$$

Теорема XIII. *Если ряд*

$$Y = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha]_\nu \tag{281}$$

абсолютно сходится в области

$$|X_j| < A_j, \tag{282}$$

то ряд для обратной матрицы

$$Y^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha^*]_\nu \tag{283}$$

также абсолютно сходится в области

$$|X_j| < C_j. \tag{284}$$

Теорема XIV. *Если ряд* (281) *равномерно сходится в области* (282), *то ряд для обратной матрицы* (283) *также равномерно сходится в области* (284).

Теорема XV. *Если m матриц*

$$Y_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha^{(j)}_{j_1 \ldots j_\nu} \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{285}$$

суть функции матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, равномерно голоморфные в области

$$|X_1| + |X_2| + \ldots + |X_m| < \|\rho\|, \tag{286}$$

и такие, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \ldots & \alpha_m^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(m)} & \ldots & \alpha_m^{(m)} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{287}$$

то существует одна и только одна система решений

$$X_1, X_2, \ldots, X_m$$

уравнений (285), *которые могут быть представлены рядами композиций*

$$X_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} Y_{j_1} \ldots Y_{j_\nu} \beta^{(j)}_{j_1 \ldots j_\nu} \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{288}$$

не имеющими свободного члена. Ряды (288) *суть функции матриц $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, равномерно голоморфные в некоторой окрестности нулевых матриц, причем коэффициенты $\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ этих рядов определяются рекуррентными соотношениями:*

$$\beta^{(j)}_{j_1} = \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta};$$

$$\beta^{(j)}_{j_1 \ldots j_\nu} = -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h_1, \ldots, h_\mu}^{(1, 2, \ldots, m)} \sum_{0 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \sum_{\varkappa=1}^{m} \beta^{(h_1)}_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}} \ldots \beta^{(h_\mu)}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu} \alpha^{(\varkappa)}_{h_1 \ldots h_\mu} \frac{\Delta_{\varkappa j}}{\Delta}, \tag{289}$$

где $\Delta_{\varkappa j}$ — алгебраическое дополнение элемента $\alpha_j^{(\varkappa)}$ из $\varkappa$-й строки и j-го столбца определителя Δ.

Доказательство. Приводя уравнения (285) к виду

$$X_1 \alpha_1^{(j)} + X_2 \alpha_2^{(j)} + \ldots + X_m \alpha_m^{(j)} = Y_j - \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} \ldots X_{j_\nu} \alpha^{(j)}_{j_1 \ldots j_\nu} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

и предполагая, что правые части суть известные функции, мы разрешим эту систему, рассматриваемую как систему m линейных уравнений с m неизвестными $X_1, X_2, \ldots, X_m$, относительно $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Полагая

$$\overset{*}{\alpha}{}^{(j)}_{j_1 \ldots j_\nu} = -\frac{1}{\Delta} \left[\alpha^{(1)}_{j_1 \ldots j_\nu} \Delta_{1j} + \ldots + \alpha^{(m)}_{j_1 \ldots j_\nu} \Delta_{mj} \right], \quad \beta^{(j)}_{j_1} = \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta},$$

мы находим

$$X_j=\beta_1^{(j)}Y_1+\ldots+\beta_m^{(j)}Y_m+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\overset{*}{\alpha}{}_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}\quad(j=1,2,\ldots,m).\tag{290}$$

Разыскивая решения этих уравнений в виде рядов (288) и применяя метод неопределенных коэффициентов, мы найдем для коэффициентов этих рядов выражения (289), которые определяются единственным образом.

Так как функции Y_j равномерно голоморфны в области (286), то мы имеем неравенства

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\alpha_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}\right|<\frac{g'}{(\rho' n)^\nu}\qquad(\nu=1,2,\ldots),$$

где $\rho'=\rho-\varepsilon$, ε — положительное сколь угодно малое число и g — положительное число, зависящее от ε. Пусть еще

$$\beta'>\left|\beta_{j_1}^{(j)}\right|\qquad(j,\ j_1=1,2,\ldots,m),$$

тогда мы имеем

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\overset{*}{\alpha}{}_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}\right|<\frac{g}{(\rho' n)^\nu}\qquad(\nu=1,2,\ldots)\tag{291}$$

где $g=g'\beta' m$.

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$U=\beta V+\sum_{\nu=2}^{\infty}U^\nu\frac{g}{(\rho' n)^\nu},\tag{292}$$

где $V=Y_1+Y_2+\ldots+Y_m$ и $\beta=m\beta'$. Найдя методом неопределенных коэффициентов решение U этого уравнения в виде ряда композиций матриц Y_1, Y_2, ..., Y_m, не имеющего свободного члена, можем утверждать, что коэффициенты этого ряда больше, чем соответствующие коэффициенты ряда

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}Y_{j_1}\ldots Y_{j_\nu}\left|\beta_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}\right|.$$

Действительно, ряды, которые мы получим, разрешая методом неопределенных коэффициентов систему

$$\widetilde{X}_j=\beta'(Y_1+\ldots+Y_m)+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}\widetilde{X}_{j_1}\ldots\widetilde{X}_{j_m}\varepsilon_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)},$$

где

$$\varepsilon_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}>\left|\overset{*}{\alpha}{}_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}\right|\qquad(j_1,\ldots,j_\nu=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,m;\ \nu=2,3,\ldots),$$

являются мажорантными для рядов (288). Но если мы положим

$$\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{j_1\ldots j_\nu}^{(j)}=\frac{g}{(\rho' n)^\nu},$$

то получим

$$\sum_{j=1}^{m}\widetilde{X}_j=\beta\sum_{j=1}^{m}Y_j+\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{g}{(\rho' n)^\nu}\left(\sum_{j=1}^{m}\widetilde{X}_j\right)^\nu.$$

Функция U, таким образом, представляет собой мажоранту для всех рядов (288). Но U может быть найдена непосредственно. Действительно, так как ряд в правой части уравнения (292) абсолютно сходится в области

$$|U|<\|\rho'\|,$$

то он может быть представлен в этой области в конечном виде

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}U^\nu\frac{1}{(\rho' n)^\nu}=\frac{U^2}{(\rho' n)^2}\left(I-\frac{U}{\rho' n}\right)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь уравнение с числовыми переменными ξ и η, соответствующее уравнению (292):

$$\xi=\beta\eta+\sum_{\nu=2}^{\infty}\xi^\nu\frac{g}{(\rho' n)^\nu}=\beta\eta+\frac{g\xi^2}{n^2\rho'^2\left(1-\frac{\xi}{\rho' n}\right)}\tag{293}$$

или

$$\xi\left(1-\frac{\xi}{n\rho'}\right)=\beta\eta\left(1-\frac{\xi}{n\rho'}\right)+\frac{g\xi^2}{n^2\rho'^2}.$$

Корень этого уравнения второй степени относительно ξ, обращающийся в нуль при $\eta=0$, равен

$$\xi=\frac{\beta\eta+n\rho'-\sqrt{(\beta\eta+n\rho')^2-4\beta\eta n\rho'\left(1+\frac{g}{n\rho'}\right)}}{2\left(1+\frac{g}{n\rho'}\right)},\tag{294}$$

если мы берем значение радикала, которое приводится к $n\rho'$ при $\eta=0$. Этот корень можно разложить в степенной ряд

$$\xi=\beta\eta+\sum_{\nu=2}^{\infty}\beta^{(\nu)}\eta^\nu,\tag{295}$$

все коэффициенты которого положительны, как это видно из уравнения (293), если к этому уравнению применить метод неопределенных коэффициентов. Но особые точки функции (294) суть корни уравнения

$$(\beta\eta+n\rho')^2-4\beta\eta n\rho'\left(1+\frac{g}{n\rho'}\right)=0,$$

т. е. точки

$$\eta=\frac{n\rho'+2g\pm\sqrt{(n\rho'+2g)^2-n^2\rho'^2}}{\beta}.$$

Следовательно, ряд (295) сходится в круге

$$|\eta|<\frac{n\rho'+2g-2\sqrt{n\rho' g+g^2}}{\beta}.$$

По теореме I (§ 6) ряд

$$U=\beta V+\sum_{\nu=2}^{\infty}\beta^{(\nu)}V^\nu,\tag{296}$$

который представляет собой решение уравнения (292), абсолютно сходится для

$$|V|<\left\|\frac{n\rho'+2g-2\sqrt{n\rho' g+g^2}}{n\beta}\right\|.$$

Ряд

$$U=\beta(Y_1+\ldots+Y_m)+\sum_{\nu=2}^{\infty}\beta^{(\nu)}(Y_1+\ldots+Y_m)^{\nu} \tag{297}$$

представляет собой, следовательно, функцию от матриц $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, равномерно голоморфную в области

$$|Y_1|+|Y_2|+\ldots+|Y_m|<\left\|\frac{n\rho'+2g-2\sqrt{n\rho' g+g^2}}{n\beta}\right\|. \tag{298}$$

Но так как ряд (297) является мажорантным для рядов (288), то мы видим, что X_j суть равномерно голоморфные функции от матриц Y_j в той же области (298).

Если мы положим

$$\eta_0=\frac{n\rho'+2g-2\sqrt{n\rho' g+g^2}}{\beta}$$

и заметим, что соответствующее значение ξ есть

$$\xi_0=\frac{\beta\eta_0+n\rho'}{2\left(1+\frac{g}{n\rho'}\right)}=\frac{n\rho'+g-\sqrt{n\rho' g+g^2}}{1+\frac{g}{n\rho'}}=n\rho'-n\rho'\sqrt{\frac{g}{g+n\rho'}},$$

то найдем, что для $V=\left\|\frac{\eta_0}{n}\right\|$

$$U=\left\|\beta\frac{\eta_0}{n}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\beta^{(\nu)}n^{\nu-1}\left(\frac{\eta_0}{n}\right)^{\nu}\right\|=\left\|\frac{\xi_0}{n}\right\|=\left\|\rho'-\rho'\sqrt{\frac{g}{g+n\rho'}}\right\|,$$

и, следовательно, в области (298) имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}|Y_{j_1}|\ldots|Y_{j_\nu}|\,|\beta^{(j)}_{j_1,\ldots,j_\nu}|<\left\|\rho'\left(1-\sqrt{\frac{g}{g+n\rho'}}\right)\right\|.$$

Отсюда мы заключаем, что после подстановки рядов (288) для X_j в правые части заданных уравнений (285) получим абсолютно сходящиеся ряды; следовательно, мы можем сделать приведение подобных членов, но тогда получим в упомянутых правых частях лишь Y_j. Следовательно, ряды (288) для X_j суть равномерно голоморфные функции от матриц $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, удовлетворяющие данным уравнениям (285), и теорема доказана.

Следствие. *Если система уравнений* (285) *имеет вид*:

$$Y_j=X_j+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1\ldots j_\nu}, \tag{299}$$

то имеется единственное решение этой системы, представимое в виде рядов композиций без свободных членов

$$X_j=Y_j+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}Y_{j_1}\ldots Y_{j_\nu}\beta^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}, \tag{300}$$

где

$$\beta^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}=-\sum_{\mu=2}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,2,\ldots,m)}\sum_{0<\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}\beta^{(h_1)}_{j_1\ldots j_{\varkappa_1}}\ldots\beta^{(h_\mu)}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}\ldots j_\nu}\alpha^{(j)}_{h_1\ldots h_\mu}. \tag{301}$$

В этом случае можно взять $\beta'=\beta=1$, и решение (300) имеет место в области

$$|Y_1|+\ldots+|Y_m|<\left\|\frac{n\rho'+2g-2\sqrt{n\rho' g+g^2}}{n}\right\|. \tag{302}$$

Замечание. *Теорема XV останется справедливой, если предположить, что ряды* (285) *абсолютно сходятся в области*

$$|X_j|<\|\rho\|,$$

так как тогда эти ряды, согласно § 16, *равномерно голоморфны в области* (286).

Теорема XVI. *Если m рядов*

$$Y_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}[X\alpha^{(j)}]_\nu \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{303}$$

равномерно сходятся в области

$$|X_j|<A_j \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{304}$$

и определитель $\Delta=|\alpha^{(j)}_{j_1}|$ отличен от нуля, то существует одна и только одна система решений $X_1, X_2, \ldots, X_m$ уравнений (303), *представимых рядами*

$$X_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}[Y\beta^{(j)}]_\nu \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{305}$$

не имеющими свободных членов и равномерно сходящимися в области

$$|Y_j|<B_j, \tag{306}$$

где коэффициенты $\beta_{j_1j_2\ldots j_\nu}$ определяются формулами (289).

Для доказательства достаточно записать систему (303) в виде mn^2 уравнений, связывающих значения $\{Y_j\}_{kl}$ со значениями $\{X_j\}_{kl}$, и применить к полученной системе хорошо известные теоремы о существовании неявных функций.

§ 18. Приведенный ряд композиций

В теории функций от одной переменной матрицы формула Лагранжа — Сильвестра сводит вычисление функции от одной матрицы X порядка n к вычислению полинома степени $n-1$ от этой матрицы, коэффициенты которого суть функции характеристических чисел матрицы X.

Для того чтобы сделать очевидной природу зависимости функции матриц

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m)=\alpha_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}X_{j_1}\ldots X_{j_\nu}\alpha_{j_1\ldots j_\nu} \tag{307}$$

от характеристических чисел матриц-аргументов $X_1, X_2, \ldots, X_m$, произведем преобразование ряда композиций (307) и получим *приведенный ряд композиций.* Мы будем пользоваться при этом обозначениями из § 9.

Если ряд (307) абсолютно сходится в окрестности нулевых матриц, то он может быть записан в виде:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m)=\alpha_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)}{}'\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}X_{j_1}^{\mu_1}X_{j_2}^{\mu_2}\ldots X_{j_\nu}^{\mu_\nu}\alpha_{j_1^{\mu_1}\ldots j_\nu^{\mu_\nu}}, \tag{308}$$

где сумма $\sum\limits_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)}{}'$ образована $m(m-1)^{\nu-1}$ членами, которые получаются, когда индексы $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ независимо пробегают значения $1, 2, \ldots, m$ таким образом, что мы имеем всегда

$$j_2 \neq j_1, \ j_3 \neq j_2, \ \ldots, \ j_\nu \neq j_{\nu-1}$$

и символ j^μ заменяет символ j, повторенный μ раз.

Предположим теперь, что характеристические числа и элементарные делители матрицы X_j суть

$$\xi_j^{(1)}, \ \ldots, \ \xi_j^{(s_j)} \quad \text{и} \quad \left(\xi - \xi_j^{(1)}\right)^{r_j^{(1)}}, \ \ldots, \ \left(\xi - \xi_j^{(s_j)}\right)^{r_j^{(s_j)}}.$$

Пусть теперь

$$X_j = S_j \left[J^0_{r_j^{(1)}} \xi_j^{(1)} + J_{r_j^{(1)}}, \ \ldots, \ J^0_{r_j^{(s_j)}} \xi_j^{(s_j)} + J_{r_j^{(s_j)}} \right] S_j^{-1} \tag{309}$$

(J_k^0 означает единичную матрицу порядка k) есть каноническое представление матрицы X_j. Если мы положим в соответствии с § 9

$$X_j^{(pq)} = S_j E^{(pq)}_{\left(r_j^{(1)}, \ldots, r_j^{(s_j)}\right)} S_j^{-1} \qquad (p = 1, 2, \ldots, s_j; \ q = 0, 1, \ldots, r_j^{(p)} - 1), \tag{310}$$

то получим

$$X_j = \sum_{p=1}^{s_j} \left(X_j^{(p0)} \xi_j^{(p)} + X_j^{(p1)} \right) \tag{311}$$

и, согласно формуле (123) из § 9:

$$X_j^\mu = \sum_{p=1}^{s_j} \sum_{q=0}^{r_j^{(p)}-1} X_j^{(pq)} \left(\xi_j^{(p)}\right)^{\mu - q} \binom{\mu}{q}. \tag{312}$$

В силу этой формулы мы запишем ряд (308) в виде

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)}{}' \sum_{p_1=1}^{s_{j_1}} \sum_{q_1=0}^{r_{j_1}^{(p_1)}-1} \cdots \sum_{p_\nu=1}^{s_{j_\nu}} \sum_{q_\nu=0}^{r_{j_\nu}^{(p_\nu)}-1} X_{j_1}^{(p_1 q_1)} \ldots X_{j_\nu}^{(p_\nu q_\nu)} \beta_{j_1 \ldots j_\nu}^{(p_1 q_1 \ldots p_\nu q_\nu)}, \tag{313}$$

где

$$\beta_{j_1 \ldots j_\nu}^{(p_1 q_1 \ldots p_\nu q_\nu)} = \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} \left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1 - q_1} \cdots \left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu - q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \cdots \binom{\mu_\nu}{q_\nu} \alpha_{j_1^{\mu_1} \ldots j_\nu^{\mu_\nu}}. \tag{314}$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда все элементарные делители всех матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ простые, так что канонические представления матриц X_j суть

$$X_j = S_j \left[\xi_j^{(1)}, \ \ldots, \ \xi_j^{(n)}\right] S_j^{-1}. \tag{315}$$

Вводя согласно формуле (110) матрицы

$$X_j^{(p)} = S_j \left[\delta_1^{(p)}, \ \delta_2^{(p)}, \ \ldots, \ \delta_n^{(p)}\right] S_j^{-1}, \tag{316}$$

получим представление

$$X_j = \sum_{p=1}^{n} X_j^{(p)} \xi_j^{(p)}. \tag{317}$$

Тогда в силу формул (111) и (112) мы имеем

$$X_j^\mu = \sum_{p=1}^{n} X_j^{(p)} \left(\xi_j^{(p)}\right)^\mu. \tag{318}$$

Приводим в силу этой формулы ряд (308) к виду:

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)}{}' \sum_{p_1, \ldots, p_\nu}^{(1, 2, \ldots, n)} X_{j_1}^{(p_1)} \ldots X_{j_\nu}^{(p_\nu)} \beta_{j_1 \ldots j_\nu}^{(p_1 \ldots p_\nu)}, \tag{319}$$

где

$$\beta_{j_1 \ldots j_\nu}^{(p_1 \ldots p_\nu)} = \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} \left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu} \alpha_{j_1^{\mu_1} \ldots j_\nu^{\mu_\nu}}. \tag{320}$$

Мы получаем таким образом приведенные ряды композиций (313) и (319), представляющие данную функцию через ее обычный ряд.

§ 19. Случай матриц второго порядка

Если все элементарные делители всех матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ простые, то мы имеем приведенный ряд (319). Матрицы $X_j^{(p)}$ в этом случае обладают тем свойством, что все их характеристические числа равны нулю, за исключением одного, равного единице.

Рассмотрим теперь приведенный ряд матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *второго порядка*:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \neq j_2, \ldots, j_{\nu-1} \neq j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \beta_{j_1 \ldots j_\nu}; \tag{321}$$

каждая матрица X_j обладает только одним характеристическим числом ξ_j, отличным от нуля. Если мы обозначим через $\sigma(X)$ главный инвариант матрицы X, т. е. сумму ее характеристических чисел

$$\sigma(X) = \{X\}_{11} + \{X\}_{22}, \tag{322}$$

то получим для матриц X_j:

$$\sigma(X_j) = \xi_j, \qquad D(X_j) = 0. \tag{323}$$

Непосредственно проверяем тождество

$$X_j^\nu = X_j \sigma(X_j)^{\nu-1}, \tag{324}$$

действительно, в силу (323) тождество Кэли дает

$$X_j^2 - \xi_j X_j = 0, \tag{325}$$

откуда

$$X_j^\nu = \xi_j X_j^{\nu-1} = \xi_j^{\nu-1} X_j = \sigma(X_j)^{\nu-1} X_j.$$

Пусть теперь Y — произвольная матрица второго порядка, тогда мы имеем тождество

$$X_j Y X_j = X_j \sigma(X_j Y). \tag{326}$$

Действительно, тождество (325) в применении к матрице $X_j Y$, для которой мы имеем

$$D(X_j Y) = D(X_j) D(Y) = 0,$$

дает

$$X_j Y X_j Y = X_j Y \sigma(X_j Y),$$

и если мы умножим это равенство на Y^{-1} справа, то получим (326) сначала для неособенных матриц Y и по непрерывности для всех матриц Y.

Мы имеем, наконец, тождество

$$X_jYX_h\sigma(X_jX_h)=X_jX_h\sigma(X_jYX_h); \tag{327}$$

действительно, если мы заменим в (326) Y на YX_h, то получим

$$X_jYX_hX_j=X_j\sigma(X_jYX_h)$$

и после умножения на X_h:

$$X_jYX_hX_jX_h=X_jX_h\sigma(X_jYX_h).$$

Применяя вновь формулу (326)

$$X_hX_jX_h=X_h\sigma(X_jX_h),$$

мы докажем (327).

Если $\sigma(X_jX_h)\neq 0$, то мы получаем

$$X_jYX_h=X_jX_h\frac{\sigma(X_jYX_h)}{\sigma(X_jX_h)}. \tag{328}$$

Замечая еще, что

$$X_j=\frac{1}{\xi_j}X_j^2,$$

и вводя обозначение

$$\beta_{jj}=\frac{\beta_j}{\xi_j}, \tag{329}$$

мы запишем ряд (321) в виде

$$F(X_1,\ \ldots,\ X_m)=\beta_0+\sum_{j,\ h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}X_jX_h\beta_{jh}+$$
$$+\sum_{j,\ h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\neq j_1,\ \ldots,\ j_\nu\neq h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}X_jX_{j_1}\ldots X_{j_\nu}X_h\beta_{jj_1\ldots j_\nu h}. \tag{330}$$

Предполагая, что для всех индексов j и h

$$\sigma(X_jX_h)\neq 0 \qquad (j,\ h=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{331}$$

мы можем, применяя формулу (328), упростить ряд (330):

$$F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)=$$
$$=\beta_0+\sum_{j,\ h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}X_jX_h\left[\beta_{jh}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\neq j_1,\ \ldots,\ j_\nu\neq h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}\beta_{jj_1\ldots j_\nu h}\frac{\sigma(X_jX_{j_1}\ldots X_{j_\nu}X_h)}{\sigma(X_jX_h)}\right].$$

Таким образом, мы получаем представление

$$F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)=\beta_0+\sum_{j,\ h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}X_jX_hf_{jh}(X_1,\ \ldots,\ X_m), \tag{332}$$

где $f_{jh}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)$ — численные функции матриц $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m$:

$$f_{jh}(X_1,\ \ldots,\ X_m)=\beta_{jh}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\neq j_1,\ \ldots,\ j_\nu\neq h}^{(1,\ 2,\ \ldots,\ m)}\beta_{jj_1\ldots j_\nu h}\frac{\sigma(X_jX_{j_1}\ldots X_{j_\nu}X_h)}{\sigma(X_jX_h)}. \tag{333}$$

В случае, когда $m=2$, числовые функции (333) становятся более простыми. Пользуясь очевидными формулами

$$X_jX_{j_1}\ldots X_{j_{2k}}X_h=X_jX_h\sigma(X_1X_2)^k, \quad \text{если} \quad \nu=2k,\ h\neq j,$$
$$X_jX_{j_1}\ldots X_{j_{2k+1}}X_h=X_j\sigma(X_1X_2)^{k+1}, \quad \text{если} \quad \nu=2k+1,\ h=j,$$

мы получим следующее представление функции от двух особенных матриц второго порядка:

$$F(X_1,\ X_2)=\beta_0+f_1(X_1,\ X_2)X_1+f_2(X_1,\ X_2)X_2+$$
$$+f_{12}(X_1,\ X_2)X_1X_2+f_{21}(X_1,\ X_2)X_2X_1, \tag{334}$$

где

$$f_1(X_1,\ X_2)=\beta_1+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{(12)^k+1_1}\sigma(X_1X_2)^{k+1},$$
$$f_2(X_1,\ X_2)=\beta_2+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{(21)^k+1_2}\sigma(X_1X_2)^{k+1},$$
$$f_{12}(X_1,\ X_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{(12)^k+1}\sigma(X_1X_2)^k,$$
$$f_{21}(X_1,\ X_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{(21)^k+1}\sigma(X_1X_2)^k$$

и символ $(12)^k$ означает символ 12, повторенный k раз.

Хотя формула (334) установлена в предположении $\sigma(X_1X_2)\neq 0$, она остается, очевидно, справедливой в предельном случае $\sigma(X_1X_2)=0$.

Для того чтобы получить общую формулу для случая m матриц, мы рассмотрим снова ряд (321).

Очевидно, что применение формулы (326) позволяет представить каждый член ряда (321) как произведение одной из следующих матриц:

$$X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_k} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где все индексы $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_k$ различны, на следы некоторых из этих матриц, например:

$$X_1X_2X_3X_1X_4X_2X_4=\sigma(X_2X_3X_1)X_1X_4X_2X_4=\sigma(X_2X_3X_1)\sigma(X_2X_4)X_1X_4.$$

Мы получаем, следовательно, следующее представление ряда (321) в виде полинома:

$$F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)=$$
$$=\beta_0+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_k}F_{j_1j_2\ldots j_k}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)X_{j_1}\ldots X_{j_k}, \tag{335}$$

где суммирование распространяется на все различные индексы $j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_k$ и где $F_{j_1j_2\ldots j_k}(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)$ — ряды следов произведений матриц $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m$.

Как мы увидим в следующем параграфе, можно выразить X_2X_1 через $X_1X_2,\ X_1,\ X_2$ и следы $\sigma(X_1),\ \sigma(X_2)$ и $\sigma(X_1X_2)$. Следовательно, можно представить $F(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)$ в виде ряда (335), где индексы $j,\ j_2,\ \ldots,\ j_k$ подчинены еще условию

$$j_1<j_2<\ldots<j_k.$$

§ 20. Степенные ряды двух матриц второго порядка

В этом параграфе мы займемся более детальным изучением рядов композиций от двух произвольных матриц X_1 и X_2 второго порядка:

$$X_1 = \left\| \begin{matrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \end{matrix} \right\|, \quad X_2 = \left\| \begin{matrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \end{matrix} \right\|.$$

Такой ряд всегда может быть представлен в виде:

$$F(X_1, X_2) = \alpha_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{p_2=1}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \ldots$$

$$\ldots \sum_{p_s=1}^{\infty} \sum_{q_s=0}^{\infty} X_1^{p_1} X_2^{q_1} X_1^{p_2} X_2^{q_2} \ldots X_1^{p_s} X_2^{q_s} \alpha_{1}{}^{p_1}{}_{2}{}^{q_1} \ldots {}_{1}{}^{p_s}{}_{2}{}^{q_s}. \qquad (336)$$

Формула

$$(X_1 + X_2)^2 = X_1^2 + X_1 X_2 + X_2 X_1 + X_2^2$$

дает

$$X_2 X_1 = (X_1 + X_2)^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_2. \qquad (337)$$

Но, обозначая через

$$\xi_1^{(1)},\ \xi_1^{(2)};\ \xi_2^{(1)},\ \xi_2^{(2)};\ \zeta^{(1)},\ \zeta^{(2)}$$

характеристические числа матриц

$$X_1,\ X_2,\ X_1 + X_2,$$

мы будем иметь по формуле (102) из § 9:

$$X_j^p = \frac{\xi_j^{(2)} (\xi_j^{(1)})^p - \xi_j^{(1)} (\xi_j^{(2)})^p}{\xi_j^{(2)} - \xi_j^{(1)}} + \frac{(\xi_j^{(2)})^p - (\xi_j^{(1)})^p}{\xi_j^{(2)} - \xi_j^{(1)}} X_j \qquad (j = 1,\ 2) \qquad (338)$$

и, в частности,

$$\left. \begin{aligned} X_j^2 &= -\xi_j^{(1)} \xi_j^{(2)} + (\xi_j^{(1)} + \xi_j^{(2)}) X_j \qquad (j = 1,\ 2) \\ (X_1 + X_2)^2 &= -\zeta^{(1)} \zeta^{(2)} + (\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)}) (X_1 + X_2). \end{aligned} \right\} \qquad (339)$$

Следовательно, соотношение (337) может быть записано в виде

$$X_2 X_1 = -\zeta^{(1)} \zeta^{(2)} + (\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)}) (X_1 + X_2) + \xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} - (\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)}) X_1 +$$
$$+ \xi_2^{(1)} \xi_2^{(2)} - (\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)}) X_2 - X_1 X_2$$

или, если заметить, что

$$\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)} = \xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)},$$

в виде

$$X_2 X_1 = \eta + (\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)}) X_1 + (\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)}) X_2 - X_1 X_2, \qquad (340)$$

где

$$\eta = \xi_1^{(1)} \xi_1^{(2)} + \xi_2^{(1)} \xi_2^{(2)} - \zeta^{(1)} \zeta^{(2)}. \qquad (341)$$

Обозначим через $\sigma(X)$ главный инвариант матрицы X; мы имеем тогда

$$\left. \begin{aligned} &\sigma(X_j) = \xi_j^{(1)} + \xi_j^{(2)} \qquad (j = 1,\ 2), \\ &\sigma(X_1 X_2) = \sigma(X_2 X_1), \qquad \sigma(\eta) = 2\eta. \end{aligned} \right\} \qquad (342)$$

Если мы возьмем главные инварианты от обеих частей равенства (340), то легко получим

$$\eta = \sigma(X_1 X_2) - \sigma(X_1) \sigma(X_2) \qquad (343)$$

и, следовательно, (340) может быть записано в виде

$$X_2 X_1 = \sigma(X_1 X_2) - \sigma(X_1) \sigma(X_2) + \sigma(X_2) X_1 + \sigma(X_1) X_2 - X_1 X_2. \qquad (344)$$

В силу формул (338) и (344) мы можем привести общий член $X_1^{p_1} X_2^{q_1} \ldots X_1^{p_s} X_2^{q_s}$ ряда (336) к виду

$$X_1^{p_1} X_2^{q_1} \ldots X_1^{p_s} X_2^{q_s} = \tau_{p_1 q_1 \ldots p_s q_s}^{(0)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) + \tau_{p_1 \ldots q_s}^{(1)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) X_1 +$$
$$+ \tau_{p_1 \ldots q_s}^{(2)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) X_2 + \tau_{p_1 \ldots q_s}^{(12)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) X_1 X_2.$$

Следовательно, данный ряд (336) может быть приведен к виду

$$F(X_1, X_2) = \tau^{(0)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) + \tau^{(1)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) X_1 +$$
$$+ \tau^{(2)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) X_2 + \tau^{(12)} \left(\begin{matrix} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \end{matrix} \middle| \eta \right) X_1 X_2, \qquad (345)$$

где числовые функции τ зависят от исходных коэффициентов ряда (336), от характеристических чисел $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$ и от параметра η [или, что то же самое, от инварианта $\sigma(X_1 X_2)$]. Аналогичная формула может быть получена также в случае, когда X_1 и X_2 суть матрицы третьего порядка.

Вернемся теперь к методу предыдущего параграфа. С этой целью введем вместо матриц X_1 и X_2 новые матрицы:

$$\overline{X}_1 = X_1 - \xi_1^{(1)}, \quad \overline{X}_2 = X_2 - \xi_2^{(1)}, \qquad (346)$$

характеристические числа которых соответственно суть

$$0,\ \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \xi_1; \qquad 0,\ \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} = \xi_2. \qquad (347)$$

Допустим, что матрицы X_1 и X_2 близки к нулевой матрице, так что ряд

$$F(X_1, X_2) = \alpha_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{p_2=1}^{\infty} \ldots \sum_{q_s=0}^{\infty} X_1^{p_1} \ldots X_2^{q_s} \alpha_{1 p_1 \ldots 2 q_s},$$

предполагаемый абсолютно сходящимся, может быть расположен по степеням матриц $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$:

$$F_1(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = F(X_1, X_2) = F(\overline{X}_1 + \xi_1^{(1)}, \overline{X}_2 + \xi_2^{(1)}) =$$
$$= \alpha_0' + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{q_s=0}^{\infty} \overline{X}_1^{p_1} \ldots \overline{X}_2^{q_s} \alpha'_{1 p_1 \ldots 2 q_s}, \qquad (348)$$

коэффициенты этого ряда, очевидно, суть функции от $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$, которые можно разложить в ряды Тэйлора при $|\xi_1^{(1)}|$ и $|\xi_2^{(1)}|$ достаточно малых.

Но в силу формулы (324) мы имеем:

$$\overline{X}_j^p = \xi_j^{p-1} \overline{X}_j \qquad (p \geqslant 1,\ j = 1,\ 2), \qquad (349)$$

следовательно, если положить

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{11}^{(s-1)}(\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{p_1=1}^{\infty}\dots\sum_{p_s=1}^{\infty}\xi_1^{p_1+\dots+p_s-s}\xi_2^{q_1+\dots+q_{s-1}-s+1}\alpha'_{1^{p_1}\dots 1^{p_s}2^0}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(s=1,\ 2,\ \dots),\\
&\varphi_{12}^{(s-1)}(\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{p_1=1}^{\infty}\dots\sum_{q_s=1}^{\infty}\xi_1^{p_1+\dots+p_s-s}\xi_2^{q_1+\dots+q_s-s}\alpha'_{1^{p_1}\dots 2^{q_s}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(s=1,\ 2,\ \dots),\\
&\varphi_{21}^{(s-2)}(\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{q_1=1}^{\infty}\dots\sum_{p_s=1}^{\infty}\xi_1^{p_2+\dots+p_s-s+1}\xi_2^{q_1+\dots+q_{s-1}-s+1}\alpha'_{1^0 2^{q_1}\dots 1^{p_s}2^0}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(s=2,\ 3,\ \dots),\\
&\varphi_{22}^{(s-1)}(\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{q_1=1}^{\infty}\dots\sum_{q_s=1}^{\infty}\xi_1^{p_2+\dots+p_s-s+1}\xi_2^{q_1+\dots+q_s-s}\alpha'_{1^0 2^{q_1}\dots 2^{q_s}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(s=1,\ 2,\ \dots),
\end{aligned}\right\}\tag{350}$$

то

$$\begin{aligned}F_1(\overline{X}_1,\ \overline{X}_2)=\alpha'_0+\sum_{s=0}^{\infty}\overline{X}_1(\overline{X}_2\overline{X}_1)^s\varphi_{11}^{(s)}+\sum_{s=0}^{\infty}(\overline{X}_1\overline{X}_2)^{s+1}\varphi_{12}^{(s)}+\\
+\sum_{s=0}^{\infty}(\overline{X}_2\overline{X}_1)^{s+1}\varphi_{21}^{(s)}+\sum_{s=0}^{\infty}\overline{X}_2(\overline{X}_1\overline{X}_2)^s\varphi_{22}^{(s)}.\end{aligned}\tag{351}$$

Вспомним теперь формулы

$$\overline{X}_jY\overline{X}_j=\overline{X}_j\sigma(Y\overline{X}_j),\tag{352}$$

где Y — произвольная матрица второго порядка. Если мы обозначим

$$\sigma(\overline{X}_1\overline{X}_2)=\sigma(\overline{X}_2\overline{X}_1)=\rho,\tag{353}$$

то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\overline{X}_1(\overline{X}_2\overline{X}_1)^s=\rho^s\overline{X}_1,\ \ \overline{X}_2(\overline{X}_1\overline{X}_2)^s=\rho^s\overline{X}_2,\\
(\overline{X}_1\overline{X}_2)^s=\rho^{s-1}\overline{X}_1\overline{X}_2,\ \ (\overline{X}_2\overline{X}_1)^s=\rho^{s-1}\overline{X}_2\overline{X}_1.\end{aligned}\right\}\tag{354}$$

Если мы положим еще

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\varphi_{11}^{(s)}(\xi_1,\ \xi_2),\qquad \varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\varphi_{21}^{(s)}(\xi_1,\ \xi_2),\\
\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\varphi_{12}^{(s)}(\xi_1,\ \xi_2),\qquad \varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\varphi_{22}^{(s)}(\xi_1,\ \xi_2),\end{aligned}\right\}\tag{355}$$

то мы получим окончательную формулу

$$\begin{aligned}F_1(\overline{X}_1,\ \overline{X}_2)=\alpha'_0+\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_1+\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_3)\overline{X}_1\overline{X}_2+\\
+\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_2\overline{X}_1+\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_2,\end{aligned}\tag{356}$$

тождественную с формулой (334).

Очевидно, что если ряд (336) представляет целую функцию, то мы можем оправдать все преобразования, и в этом случае ряды (350) и (355) дают целые функции аргументов ρ, ξ_1, ξ_2.

Заслуживает внимания один частный случай. Так как инварианты матрицы X_j суть

$$\sigma(X_j)=\xi_j^{(1)}+\xi_j^{(2)}\quad\text{и}\quad D(X_j)=\xi_j^{(1)}\xi_j^{(2)},$$

где $D(X_j)$ — определитель матрицы X_j, то мы имеем

$$\xi_j^{(1)}=\frac{\sigma(X_j)-\xi_j}{2},\quad \xi_j=\xi_j^{(2)}-\xi_j^{(1)}=\pm\sqrt{\sigma(X_j)^2-4D(X_j)}.\tag{357}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\rho=\sigma(\overline{X}_1\overline{X}_2)=\sigma\,[(X_1-\xi_1^{(1)})(X_2-\xi_2^{(1)})]=\\
=\sigma(X_1X_2)-\xi_1^{(1)}\sigma(X_2)-\xi_2^{(1)}\sigma(X_1)+\sigma(\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)})=\\
=\sigma(X_1X_2)-\xi_1^{(1)}\sigma(X_2)-\xi_2^{(1)}\sigma(X_1)+2\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}\end{aligned}$$

и в силу формул (357)

$$\begin{aligned}\rho=\sigma(X_1X_2)-\frac{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}{2}+\frac{\xi_1\xi_2}{2}=\\
=\sigma(X_1X_2)-\frac{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{[\sigma(X_1)^2-4D(X_1)][\sigma(X_2)^2-4D(X_2)]}.\end{aligned}\tag{358}$$

Предположим, что выполнено одно из двух следующих условий:

$$2\sigma(X_1X_2)-\sigma(X_1)\sigma(X_2)\pm\sqrt{[\sigma(X_1)^2-4D(X_1)][\sigma(X_2)^2-4D(X_2)]}=0.\tag{359}$$

Положим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1$ или $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$, если перед радикалом в (359) стоит знак $+$; наоборот, если перед радикалом стоит знак $-$, то примем $\varepsilon_1=+1$, $\varepsilon_2=-1$ или $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=+1$.

Если мы возьмем

$$\xi_j^{(1)}=\frac{1}{2}[\sigma(X_j)+\varepsilon_j\sqrt{\sigma(X_j)^2-4D(X_j)}],\tag{360}$$

т. е. если

$$\xi_j=-\varepsilon_j\sqrt{\sigma(X_j)^2-4D(X_j)},\tag{361}$$

то в силу (358) получим $\rho=0$ и, следовательно, ряд (356) приводится к

$$\begin{aligned}F(X_1,\ X_2)=F_1(\overline{X}_1,\ \overline{X}_2)=\alpha'_0+\varphi_{11}^{(0)}(\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_1+\varphi_{12}^{(0)}(\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_1\overline{X}_2+\\
+\varphi_{21}^{(0)}(\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_2\overline{X}_1+\varphi_{22}^{(0)}(\xi_1,\ \xi_2)\overline{X}_2.\end{aligned}\tag{362}$$

Если бы мы положили

$$\xi_1^{(1)}=\frac{1}{2}[\sigma(X_1)-\varepsilon_1\sqrt{\sigma(X_1)^2-4D(X_1)}],$$

$$\xi_2^{(1)}=\frac{1}{2}[\sigma(X_2)+\varepsilon_2\sqrt{\sigma(X_2)^2-4D(X_2)}],$$

т. е.

$$\xi_1=\varepsilon_1\sqrt{\sigma(X_1)^2-4D(X_1)},\qquad \xi_2=-\varepsilon_2\sqrt{\sigma(X_2)^2-4D(X_2)},$$

то нашли бы

$$\rho=-\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{[\sigma(X_1)^2-4D(X_1)][\sigma(X_2)^2-4D(X_2)]}=\xi_1\xi_2.$$

В общем случае, когда условие (359) не выполнено, мы напишем равенство

$$\overline{X}_1\varphi_{11}+\overline{X}_1\overline{X}_2\varphi_{12}+\overline{X}_2\overline{X}_1\varphi_{21}+\overline{X}_2\varphi_2=F(\overline{X}_1,\ \overline{X}_2)-\alpha'_0,$$

умножим его соответственно на $\overline{X}_1$, $\overline{X}_1\overline{X}_2$, $\overline{X}_2\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ и затем возьмем главный инвариант.

Применяя формулы (354), получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1^2\varphi_{11}+\xi_1\rho\varphi_{12}+\xi_1\rho\varphi_{21}+\rho\varphi_{22}&=\sigma\,[\overline{X}_1(F-\alpha_0')],\\
\xi_1\rho\varphi_{11}+\rho^2\varphi_{12}+\xi_1\xi_2\rho\varphi_{21}+\xi_2\rho\varphi_{22}&=\sigma\,[\overline{X}_1\overline{X}_2(F-\alpha_0')],\\
\xi_1\rho\varphi_{11}+\xi_1\xi_2\rho\varphi_{12}+\rho^2\varphi_{21}+\xi_2\rho\varphi_{22}&=\sigma\,[\overline{X}_2\overline{X}_1(F-\alpha_0')],\\
\rho\varphi_{11}+\xi_2\rho\varphi_{12}+\xi_2\rho\varphi_{21}+\xi_2^2\varphi_{22}&=\sigma\,[\overline{X}_2(F-\alpha_0')]
\end{aligned}\right\}\tag{363}$$

относительно φ_{11}, φ_{12}, φ_{21}, φ_{22}, которую мы можем разрешить, так как определитель этой системы равен

$$-\rho^2(\rho-\xi_1\xi_2)^4,$$

т. е. отличен от нуля, если условие (359) не выполнено.

Решая систему (363) относительно φ_{11}, φ_{12}, φ_{21}, φ_{22}, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)&=\frac{1}{(\rho-\xi_1\xi_2)^2}\{\xi_2^2\sigma\,[\overline{X}_1(F-\alpha_0')]-\\
&\quad-\xi_2\sigma\,[\overline{X}_1\overline{X}_2(F-\alpha_0')]-\xi_2\sigma\,[\overline{X}_2\overline{X}_1(F-\alpha_0')]+\rho\sigma\,[\overline{X}_2(F-\alpha_0')]\},\\
\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)&=\frac{1}{\rho(\rho-\xi_1\xi_2)^2}\{-\xi_2\rho\sigma\,[\overline{X}_1(F-\alpha_0')]+\\
&\quad+\rho\sigma\,[\overline{X}_1\overline{X}_2(F-\alpha_0')]+\xi_1\xi_2\sigma\,[\overline{X}_2\overline{X}_1(F-\alpha_0')]-\xi_1\rho\sigma\,[\overline{X}_2(F-\alpha_0')]\},\\
\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)&=\frac{1}{\rho(\rho-\xi_1\xi_2)^2}\{-\xi_2\rho\sigma\,[\overline{X}_1(F-\alpha_0')]+\\
&\quad+\xi_1\xi_2\sigma\,[\overline{X}_1\overline{X}_2(F-\alpha_0')]+\rho\sigma\,[\overline{X}_2\overline{X}_1(F-\alpha_0')]-\xi_1\rho\sigma\,[\overline{X}_2(F-\alpha_0')]\},\\
\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1,\ \xi_2)&=\frac{1}{(\rho-\xi_1\xi_2)^2}\{\rho\sigma\,[\overline{X}_1(F-\alpha_0')]-\\
&\quad-\xi_1\sigma\,[\overline{X}_1\overline{X}_2(F-\alpha_0')]-\xi_1\sigma\,[\overline{X}_2\overline{X}_1(F-\alpha_0')]+\xi_1^2\sigma\,[\overline{X}_2(F-\alpha_0')]\}.
\end{aligned}\right\}\tag{364}$$

§ 21. Мероморфные функции нескольких матриц

В теории функций от одной матрицы мы изучили ряды следов и ряды матриц и следов и с их помощью рассмотрели мероморфные функции от матрицы. Мы будем заниматься аналогичными вопросами для функции от нескольких матриц.

Пусть $\mathfrak{X}$ — система m матриц X_1, X_2, ..., X_m порядка n. Рассмотрим *инвариантные функции* матриц X_1, X_2, ..., X_m, которые сопоставляют системе матриц $\mathfrak{X}$ число

$$i(\mathfrak{X})=i(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)$$

и кроме того обладают свойством инвариантности, так что

$$i(SXS^{-1},\ \ldots,\ SX_mS^{-1})=i(X_1,\ \ldots,\ X_m)\tag{365}$$

для любой неособенной матрицы S. Инвариантные функции матриц X_1, X_2, ..., X_m, таким образом, суть числовые функции элементов этих матриц, которые остаются инвариантными при преобразовании всех этих матриц с помощью неособенной матрицы S.

Основной инвариантной функцией матрицы X является ее след

$$\sigma(X)=\sum_{k=1}^{n}\{X\}_{kk},\qquad \sigma(SXS^{-1})=\sigma(X),\tag{366}$$

т. е. сумма диагональных элементов этой матрицы, равная сумме характеристических чисел матрицы.

След произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей:

$$\sigma(XY)=\sigma(YX)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\{X\}_{kl}\{Y\}_{lk}.\tag{367}$$

Из этого соотношения следует, что

$$\sigma(XYZ)=\sigma(ZXY)=\sigma(YZX),$$

и в случае какого угодно числа матриц

$$\sigma(X_1X_2\ldots X_m)=\sigma(X_mX_1\ldots X_{m-1})=\ldots=\sigma(X_2X_3\ldots X_mX_1),\tag{368}$$

т. е. след произведения матриц не изменяется, когда мы совершаем циклическую перестановку множителей.

В силу соотношения

$$(SX_{j_1}S^{-1})(SX_{j_2}S^{-1})\ldots(SX_{j_\nu}S^{-1})=SX_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}S^{-1},\tag{369}$$

мы имеем

$$\begin{aligned}\sigma(SX_{j_1}S^{-1}SX_{j_2}S^{-1}\ldots SX_{j_\nu}S^{-1})&=\sigma(SX_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}S^{-1})=\\&=\sigma(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}),\end{aligned}$$

и, следовательно, следы композиций нескольких матриц

$$\sigma(X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu})$$

суть инвариантные функции этих матриц.

Рассмотрим теперь полином

$$i_\nu(\mathfrak{X})=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\ \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu\\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_\lambda>0}}\ \sum_{j_1^1\ldots j_{\mu_1}^1}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)}{}'\ \ldots\ \sum_{j_1^\lambda,\ldots,j_{\mu_\lambda}^\lambda}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)}{}'\ \sigma\left(X_{j_1^1}\ldots X_{j_{\mu_1}^1}\right)\ldots\sigma\left(X_{j_1^\lambda}\ldots X_{j_{\mu_\lambda}^\lambda}\right)\beta^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\ldots j_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}}\tag{370}$$

где каждая сумма $\sum\limits_{j_1^\varkappa,\ \ldots,\ j_{\mu_\varkappa}^\varkappa}^{(1,\,2,\,\ldots,\,m)}$ распространяется на все системы индексов

$$j_1^\varkappa,\ \ldots,\ j_{\mu_\varkappa}^\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

которые не связаны циклическими перестановками и где коэффициенты β не зависят от матриц $\mathfrak{X}$.

Из предыдущего ясно, что полином (370), для которого мы введем обозначение

$$i_\nu(\mathfrak{X})=\|\mathfrak{X}\beta\|_\nu,\tag{371}$$

является инвариантной функцией матриц $\mathfrak{X}$.

Сумма таких полиномов

$$i(\mathfrak{X})=\sum_{\nu=0}^{\infty}i_\nu(\mathfrak{X})=\sum_{\nu=0}^{\infty}\|\mathfrak{X}\beta\|_\nu,\tag{372}$$

при условии равномерной сходимости этого ряда в области

$$|X_j|<A_j\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\tag{373}$$

очевидно, является также инвариантной функцией матриц $\mathfrak{X}$. Назовем в этом случае ряд (372) *рядом следов, голоморфным в области* (373). Если этот ряд сходится равномерно для всех матриц $\mathfrak{X}$, то он называется *целым рядом следов*.

Всякий ряд композиций

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1, \ldots, j_\nu} \tag{374}$$

обладает свойством:

$$F(SX_1S^{-1}, \ldots, SX_mS^{-1}) = SF(X_1, \ldots, X_m)S^{-1}, \tag{375}$$

которое следует непосредственно из формулы (369).

Таким же свойством обладает и матрица

$$F_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\mu=0}^{\nu} [\mathfrak{X}\alpha^{(\nu)}]_\mu \| \mathfrak{X}\beta^{(\nu)} \|_{\nu-\mu}, \tag{376}$$

элементы которой суть однородные полиномы степени ν относительно $\{X_j\}_{kl}$.

Рассмотрим теперь *ряд матриц и следов*, имеющий следующий вид:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(X_1, \ldots, X_m) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} [\mathfrak{X}\alpha^{(\nu)}]_\mu \| \mathfrak{X}\beta^{(\nu)} \|_{\nu-\mu}. \tag{377}$$

Будем называть этот ряд функцией, *голоморфной в области* (373), если он равномерно сходится для всех матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, принадлежащих этой области, как ряд, общий член которого есть

$$F_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_m).$$

Если ряд (377) сходится равномерно для всех матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, то он называется *целой функцией матриц* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ или *целым рядом матриц и следов*.

Ясно, что ряд (377) матриц и следов обладает свойством инвариантности

$$F(SX_1S^{-1}, \ldots, SX_mS^{-1}) = SF(X_1, \ldots, X_m)S^{-1}. \tag{378}$$

Предположим теперь, что мы имеем ряд композиций

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \tag{379}$$

который представляет собой голоморфную функцию матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в окрестности нулевых матриц. Предположим, кроме того, что существует целый ряд следов матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$

$$i(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \| X\gamma \|_\nu, \tag{380}$$

обладающий следующим свойством: если мы перемножим ряды (379) и (380) и расположим произведение по однородным полиномам, то получим целый ряд матриц и следов:

$$F(X_1, \ldots, X_m)\, i(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha]_\mu \| X\gamma \|_{\nu-\mu}. \tag{381}$$

Если матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_m$ находятся в окрестности нулевых матриц, то мы имеем следующее представление:

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha]_\mu \| X\gamma \|_{\nu-\mu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \| X\gamma \|_\nu} \tag{382}$$

функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ в виде частного, числителем которого является целый ряд матриц и следов и знаменателем — целый ряд следов.

В этом случае мы будем говорить, что функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ является *мероморфной функцией матриц* $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Совокупность матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ называется полюсом мероморфной функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, если она обращает в нуль знаменатель частного (382) в представлении функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ в виде (382) и не обращает в нуль числитель.

Элементы мероморфной функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ по (382) суть частные двух целых функций элементов матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, т. е. мероморфные функции этих элементов. Так как эти функции дают аналитическое продолжение рядов Тэйлора по $\{X_j\}_{kl}$, которыми определяются элементы матрицы

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m),$$

когда матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_m$ берутся из окрестности нулевых матриц, то мы видим, что формула (382) дает аналитическое продолжение мероморфной функции $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ для каждой системы матриц

$$X_1, X_2, \ldots, X_m.$$

Заметим еще, что матрицы, которые допускают представление вида

$$F(X_1, \ldots, X_m) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha^{(\nu)}]_\mu \| X\gamma^{(\nu)} \|_{\nu-\mu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \| X\gamma \|_\nu}, \tag{383}$$

где числитель есть целый ряд матриц и следов и знаменатель есть целый ряд следов, удовлетворяют условию (378). Функции, представимые в виде (380), могут быть названы *мероморфными функциями матриц и следов*. Может оказаться, что функция $F(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, определяемая формулой (383), не представляется в виде (379).

§ 22. О решении одного матричного уравнения

В теории дифференциальных уравнений важную роль играет функция X матриц U и T, которая определяется как решение уравнения:

$$UX + pX - XU = T, \tag{384}$$

где U и T — заданные матрицы, p — заданный числовой параметр и X — неизвестная матрица.

Легко видеть, что элементы матрицы X суть рациональные функции элементов матриц U и T. Действительно, уравнение (384) эквивалентно системе n^2 уравнений с n^2 неизвестными $\{X\}_{kl}$:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\{U\}_{k\alpha}\{X\}_{\alpha l}+p\{X\}_{kl}-\sum_{\alpha=1}^{n}\{X\}_{k\alpha}\{U\}_{\alpha l}=\{T\}_{kl}\qquad(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{385}$$

Определитель этой системы, вообще говоря, отличен от нуля, и мы получаем для неизвестных $\{X\}_{kl}$ выражения вида

$$\{X\}_{kl}=\frac{f_{kl}(\{U\}_{\sigma\beta},\ \{T\}_{\gamma\delta})}{\Delta(\{U\}_{\alpha\beta})}\qquad(k,\ l,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{386}$$

где числитель и знаменатель суть полиномы своих аргументов. Знаменатель мы будем обозначать в последующем просто через $\Delta(U)$. Числитель есть полином относительно $\{U\}_{\alpha\beta}$ степени не выше n^2-1 и линейная однородная функция элементов матрицы T.

Предположим, что все характеристические числа $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$ матрицы U простые и различны, и пусть

$$U=S[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n]S^{-1}\tag{387}$$

каноническое представление матрицы U.

Если мы умножим обе части уравнения (384) на S^{-1} слева и на S — справа, то получим

$$S^{-1}USS^{-1}XS+pS^{-1}XS-S^{-1}XSS^{-1}US=S^{-1}TS.\tag{388}$$

Введем обозначения

$$S^{-1}XS=\widetilde{X},\qquad S^{-1}TS=\widetilde{T}\tag{389}$$

и заметим, что

$$S^{-1}US=[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n],$$

тогда уравнение (388) запишется в виде

$$[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n]\widetilde{X}+p\widetilde{X}-\widetilde{X}[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n]=\widetilde{T},\tag{390}$$

и система, соответствующая системе (385), будет

$$\sigma_k\{\widetilde{X}\}_{kl}+p\{\widetilde{X}\}_{kl}-\{\widetilde{X}\}_{kl}\sigma_l=\{\widetilde{T}\}_{kl}\qquad(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда

$$\{\widetilde{X}\}_{kl}=\frac{\{\widetilde{T}\}_{kl}}{\sigma_k+p-\sigma_l}\qquad(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{391}$$

Мы видим, что уравнения (384) и (390) в случае, когда все разности $\sigma_k+p-\sigma_l$ $(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ отличны от нуля, имеют одно и только одно конечное решение. Для того, чтобы возвратиться к матрицам X и T, вспомним, что по формуле Лагранжа — Сильвестра мы имеем

$$U=\sum_{k=1}^{n}U_k\sigma_k,\tag{392}$$

где

$$U_k=\frac{(U-\sigma_1)\ldots(U-\sigma_{k-1})(U-\sigma_{k+1})\ldots(U-\sigma_n)}{(\sigma_k-\sigma_1)\ldots(\sigma_k-\sigma_{k-1})(\sigma_k-\sigma_{k+1})\ldots(\sigma_k-\sigma_n)}\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{393}$$

Мы имеем также следующее представление

$$\left(\delta_l^k=\begin{cases}1, & \text{если}\quad l=k\\ 0, & \text{если}\quad l\neq k\end{cases}\right):$$

$$U_k=S[0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ 0]S^{-1}=S[\delta_1^k,\ \delta_2^k,\ \ldots,\ \delta_n^k]S^{-1},\tag{394}$$

откуда вытекают соотношения ортогональности

$$U_k^2=U_k,\quad U_kU_l=0\quad(k\neq l),\quad \sum_{k=1}^{n}U_k=I.\tag{395}$$

Теперь легко проверить, что матрица

$$X=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{U_kTU_l}{\sigma_k+p-\sigma_l}\tag{396}$$

есть решение данного уравнения (384).

Действительно, в силу (392) и (395) мы имеем

$$\begin{aligned}UX+pX-XU&=\sum_{\alpha=1}^{n}U_\alpha\sigma_\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{U_kTU_l}{\sigma_k+p-\sigma_l}+\\&+p\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{U_kTU_l}{\sigma_k+p-\sigma_l}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{U_kTU_l}{\sigma_k+p-\sigma_l}\sum_{\beta=1}^{n}U_\beta\sigma_\beta=\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\sigma_kU_kTU_l+pU_kTU_l-U_kTU_l\sigma_l}{\sigma_k+p-\sigma_l}=\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}U_kTU_l=\sum_{k=1}^{n}U_k\cdot T\cdot\sum_{l=1}^{n}U_l=T,\end{aligned}$$

что и доказывает утверждение.

Можно дать решение уравнения (384) в виде ряда от матриц U и T. С этой целью запишем уравнение (384) в виде

$$pX=T+XU-UX$$

и будем искать решение в виде ряда

$$X=\sum_{k=1}^{\infty}X_k,$$

где X_k — полиномы от матриц U и T степени k. Для определения X_k получим последовательно уравнения

$$\begin{aligned}&pX_1=T,\\&pX_2=X_1U-UX_1,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&pX_k=X_{k-1}U-UX_{k-1}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

откуда находим

$$X_1 = \frac{1}{p} T,$$

$$X_2 = \frac{1}{p^2}(TU - UT),$$

$$X_3 = \frac{1}{p^2}(TU^2 - 2UTU + U^2T),$$

. . . .

$$X_{k+1} = \frac{1}{p^{k+1}}(TU^k - kUTU^{k-1} + \ldots \pm U^kT) = \sum_{\lambda=0}^{k} \frac{(-1)^\lambda k!}{\lambda!\,(k-\lambda)!\,p^{k+1}} U^\lambda T U^{k-\lambda},$$

. . . .

и, следовательно, формальное решение уравнения (384) будет:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{\lambda=0}^{k} \frac{(-1)^\lambda k!}{\lambda!\,(k-\lambda)!} U^\lambda T U^{k-\lambda}. \tag{397}$$

Этот ряд сходится абсолютно в области

$$|T| < \infty, \qquad |U| < \left\| \frac{|p|}{2n} \right\|. \tag{398}$$

Действительно, если мы возьмем

$$T = \|\rho\|, \qquad U = \left\| \frac{(1-\varepsilon)\,|p|}{2n} \right\|,$$

где $0 < \varepsilon < 1$, то получим

$$U^\lambda = \left\| \frac{(1-\varepsilon)^\lambda |p|^\lambda}{2^\lambda n^\lambda} n^{\lambda-1} \right\| = \left\| \frac{(1-\varepsilon)^\lambda |p|^\lambda}{2^\lambda n} \right\|, \qquad U^\lambda T U^{k-\lambda} = \left\| \frac{(1-\varepsilon)^k |p|^k \rho}{2^k} \right\|,$$

так что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|p|^{k+1}} \sum_{\lambda=0}^{k} \frac{k!}{\lambda!\,(k-\lambda)!} U^\lambda T U^{k-\lambda} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho\,(1-\varepsilon)^k}{|p|\,2^k} \sum_{\lambda=0}^{k} \frac{k!}{\lambda!\,(k-\lambda)!} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho}{|p|} (1-\varepsilon)^k \right\|$$

сходится.

Ряд (397) дает, следовательно, решение уравнения (384) в области (398).

Докажем, что функция $X(U, T)$, определяемая рядом (397), есть мероморфная функция матрицы U.

Формулы (391) показывают, что нужно рассмотреть выражение:

$$i(U) = \prod_{\substack{k,\, l=1 \\ k \neq l}}^{n} (\sigma_k + p - \sigma_l). \tag{399}$$

Это произведение есть полином степени $n^2 - n$ от характеристических чисел матрицы U, симметрический относительно этих характеристических чисел; оно, следовательно, является полиномом степени $n^2 - n$ от элементов матрицы U, обладающим свойством инвариантности

$$i(\Sigma U \Sigma^{-1}) = i(U)$$

и может быть представлено в виде

$$i(U) = \sum_{\nu=0}^{n^2-n} i_\nu(U)\, p^{n^2-n-\nu}, \tag{400}$$

где $i_\nu(U)$ — инвариантный однородный полином степени ν от элементов матрицы U, т. е. полином от следов степеней матрицы U, в частности, $i_0(U) = 1$.

Заметим теперь, что $\Delta(U)$ есть полином от p степени n^2, у которого член наивысшей степени есть $+p^{n^2}$; $i(U)$ есть полином от p степени $n^2 - n$, у которого член наивысшей степени есть p^{n^2-n}.

Рассмотрим теперь какой-нибудь корень уравнения $i(U) = 0$; если мы возьмем

$$p = \sigma_l - \sigma_k,$$

то увидим, что система (390) становится, вообще говоря, несовместной; следовательно, система (285) также должна быть несовместной, и в силу (386) это может быть лишь в случае, когда $\Delta(U)$ обращается в нуль для выбранного значения p.

Следовательно, $\Delta(U)$ делится на $p - \sigma_l + \sigma_k$. Повторяя это рассуждение, мы убеждаемся, что $\Delta(U)$ делится на $i(U)$.

Докажем теперь, что $\Delta(U)$ делится на p^n. Действительно, если мы рассмотрим однородное уравнение

$$UX + pX - XU = 0$$

и положим в этом уравнении $p = 0$, то получим уравнение

$$UX - XU = 0,$$

которое имеет n ненулевых решений

$$X_k = U_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

В самом деле, в силу (392) и (395)

$$UU_k - U_k U = \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \sigma_\alpha \cdot U_k - U_k \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \sigma_\alpha = \sigma_k U_k - U_k \sigma_k = 0.$$

Эти решения линейно-независимы; действительно, в силу (394):

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k = S[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] S^{-1}$$

может обратиться в нуль лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Из общей теории линейных уравнений теперь следует, что если мы положим $p = 0$ в определителе $\Delta(U)$, то получим определитель, у которого все миноры порядка $n^2 - n + 1$ суть нули; как хорошо известно, это может быть лишь в случае, когда $\Delta(U)$, рассматриваемый как функция от p, имеет $p = 0$ корнем кратности по крайней мере n. Следовательно, $\Delta(U)$ делится на p^n.

Но так как степень $i(U)$ равна $n^2 - n$ и степень $\Delta(U)$ равна n^2, то мы заключаем, сопоставляя члены с наивысшей степенью p, что

$$\Delta(U) = p^n i(U). \tag{401}$$

Из формул (386) следует, что произведение $X\Delta(U)$ есть матрица, элементы которой суть полиномы от $\{U\}_{kl}$ степени не выше $n^2 - 1$.

Отсюда следует, что если мы образуем произведение

$$Xpl(U) = p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^{\lambda}k!}{\lambda!(k-\lambda)!}U^{\lambda}TU^{k-\lambda}\sum_{\nu=0}^{n^2-n}l_{\nu}(U)p^{n^2-n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{\mu=0}^{\nu}\left(\frac{1}{p^{\mu}}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\frac{(-1)^{\lambda}\mu!}{\lambda!(\mu-\lambda)!}U^{\lambda}TU^{\mu-\lambda}\right)l_{\nu-\mu}(U)p^{n^2-n-\nu+\mu}\right],$$

то все члены, степень которых превосходит n^2-1, исчезнут, и мы получим общее представление матрицы X:

$$X = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n^2-1}\left[\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}p^{n^2-n-\nu}l_{\nu-\mu}\sum\limits_{\lambda=0}^{\mu}\frac{(-1)^{\lambda}\mu!}{\lambda!(\mu-\lambda)!}U^{\lambda}TU^{\mu-\lambda}\right]}{p\sum\limits_{\nu=0}^{n^2-n}l_{\nu}(U)p^{n^2-n-\nu}}, \tag{402}$$

имеющее место для всех матриц U, не обращающих в нуль знаменатель.

Действительно, ограничение, которое наложено на матрицу U, а именно: что все ее характеристические числа различны, теперь может быть отброшено с помощью перехода к пределу.

Но тогда мы видим, что матрица X, рассматриваемая как функция матриц U и T, есть мероморфная функция матрицы U, полюсы которой суть матрицы U, удовлетворяющие условию

$$p-\sigma_k-\sigma_l=0 \tag{403}$$

для пары каких-нибудь характеристических чисел.

Полученный результат можно доказать иным путем. Действительно, умножим обе части уравнения (396) на

$$pl(U) = p\prod_{k\neq l}(p+\sigma_k-\sigma_l) = \sum_{\nu=0}^{n^2-n}l_{\nu}(U)p^{n^2-n-\nu+1} \tag{404}$$

и заметим, что если мы обозначим

$$\sigma_l-\sigma_k=\lambda_{kl},$$

то получим

$$\frac{pl(U)}{p+\sigma_k-\sigma_l} = \frac{pl(U)}{p-\lambda_{kl}} = \sum_{\nu=0}^{n^2-n}p^{n^2-n-\nu}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu}l_{\nu-\mu}(U)\lambda_{kl}^{\mu}\right) \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и, следовательно,

$$pl(U)X = \sum_{\nu=0}^{n^2-n}p^{n^2-n-\nu}\left[\sum_{\mu=0}^{\nu}l_{\nu-\mu}(U)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}U_kTU_l\lambda_{kl}^{\mu}\right)\right]. \tag{405}$$

Простое вычисление показывает далее

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}U_kTU_l\lambda_{kl}^{\mu} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}U_kTU_l(\sigma_l-\sigma_k)^{\mu} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(-1)^{\lambda}\binom{\mu}{\lambda}\sigma_k^{\lambda}\sigma_l^{\mu-\lambda}U_kTU_l.$$

Формула Лагранжа — Сильвестра (101) дает

$$\sum_{k=1}^{n}U_k\sigma_k^{\lambda}=U^{\lambda}, \qquad \sum_{l=1}^{n}U_l\sigma_l^{\mu-\lambda}=U^{\mu-\lambda};$$

и, следовательно, мы имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}U_kTU_l\lambda_{kl}^{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{\mu}(-1)^{\lambda}\binom{\mu}{\lambda}U^{\lambda}TU^{\mu-\lambda}.$$

Формула (405) дает теперь представление матрицы X:

$$X = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n^2-n}p^{n^2-n-\nu}\left[\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}l_{\nu-\mu}(U)\sum\limits_{\lambda=0}^{\mu}\frac{(-1)^{\lambda}\mu!}{\lambda!(\mu-\lambda)!}U^{\lambda}TU^{\mu-\lambda}\right]}{p\sum\limits_{\nu=0}^{n^2-n}l_{\nu}(U)p^{n^2-n-\nu}}, \tag{406}$$

более точное, чем (402), так как суммирование по индексу ν распространяется только до $\nu=n^2-n$.

Эта формула показывает, что матрица X есть мероморфная функция матрицы U. Кроме того мы видим, что $p=0$ есть полюс первого порядка для матрицы X, если ее рассматривать как зависящую от параметра p.

В выражении (406) матрицы X степени U входят до U^{n^2-n}; мы можем их выразить через U^k $(k=0,1,\ldots,n-1)$ с помощью тождества Кэли и получить таким образом другое представление матрицы X.

Но это другое представление мы уже имеем в формуле (396), если в этой формуле заменим матрицы U_k их выражениями (393); по приведении подобных членов получим:

$$X = \sum_{\alpha=0}^{n-1}\sum_{\beta=0}^{n-1}U^{\alpha}TU^{\beta}f_{\alpha\beta}(p,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n), \tag{407}$$

где $f_{\alpha\beta}$ — рациональные функции p и инвариантов матрицы U. Из предыдущего следует и мы можем доказать независимо, что в качестве общего знаменателя этих функций можно взять

$$pl(U) = p\prod_{k\neq l}(p+\sigma_k-\sigma_l) = \sum_{\nu=0}^{n^2-n}p^{n^2-n-\nu+1}l_{\nu}(U).$$

Рассмотрим еще однородное уравнение

$$UX+\lambda X-XU=0,$$

или

$$XU-UX=\lambda X. \tag{408}$$

Из предыдущего мы видим, что это уравнение имеет решения, отличные от $X=0$ только в случае, когда

$$\lambda=\sigma_l-\sigma_k=\lambda_{kl} \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{409}$$

где $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n$ — характеристические числа (которые могут быть равными) матрицы U.

Следовательно, мы должны построить решения уравнений вида

$$XU-UX=\lambda_{kl}X. \tag{410}$$

Пусть

$$U=S[\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n]S^{-1}$$

каноническое представление матрицы U. Положим

$$S^{-1}XS=\widetilde{X},$$

тогда уравнение (410) может быть приведено к виду:

$$\widetilde{X}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] - [\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\widetilde{X} = \lambda_{kl}\widetilde{X}.$$

Это уравнение дает n^2 скалярных уравнений

$$(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)\widetilde{X}_{\alpha\beta} = \lambda_{kl}\widetilde{X}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$\widetilde{X}_{\alpha\beta} = 0, \tag{411}$$

за исключением элементов $\widetilde{X}_{\alpha\beta}$, для которых

$$\sigma_\beta - \sigma_\alpha = \sigma_l - \sigma_k \tag{412}$$

и которые остаются произвольными. В частности, элемент $\widetilde{X}_{kl}$ остается произвольным. Если мы обозначим через δ_{kl} матрицу, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента, принадлежащего k-й строке и l-му столбцу, равного единице, то получим следующее решение однородного уравнения (410):

$$X = S\delta_{kl}S^{-1}. \tag{413}$$

§ 23. Пример функции нескольких матриц

В качестве другого примера функции от нескольких матриц рассмотрим функцию матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$:

$$Z = \mathrm{Lg}(e^{X_1}e^{X_2}\ldots e^{X_m}). \tag{414}$$

Ветвь этой функции, приводящаяся к нулевой матрице при

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_m = 0,$$

есть голоморфная функция матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в окрестности нулевых матриц. Действительно, мы имеем разложение

$$\mathrm{Lg}\,X = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(X - I)^\nu;$$

если мы заменим в этом разложении матрицу

$$X - I = e^{X_1}e^{X_2}\ldots e^{X_m} - I$$

соответствующим рядом композиции матриц $X_1, X_2, \ldots, X_m$, то получим представление вида

$$Z = \mathrm{Lg}(e^{X_1}e^{X_2}\ldots e^{X_m}) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} X_{j_1}X_{j_2}\ldots X_{j_\nu}\gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}, \tag{415}$$

где $\gamma_{j_1j_2\ldots j_\nu}$ суть абсолютные константы, например:

$$\gamma_{j_1} = 1, \quad \gamma_{j_1j_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } j_1 < j_2, \\ 0, & \text{если } j_1 = j_2, \qquad (j_1, j_2 = 1, 2, \ldots, m) \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } j_1 > j_2. \end{cases}$$

Мы будем изучать более подробно эту функцию в случае, когда $m = 2$ и матрицы X_1 и X_2 второго порядка.

Итак, рассмотрим функцию

$$Z = \mathrm{Lg}(e^Xe^Y) = X + Y + \frac{1}{2}(XY - YX) + \ldots, \tag{416}$$

которая является решением уравнения

$$e^Z = e^Xe^Y. \tag{417}$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 — характеристические числа матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{Vmatrix},$$

тогда мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma(X) &= \xi_1 + \xi_2 = x_{11} + x_{22}, \\ D(X) &= \xi_1\xi_2 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{418}$$

Введем еще обозначение

$$u = \frac{1}{4}[\sigma(X)^2 - 4D(X)] = \left(\frac{x_{11} - x_{22}}{2}\right)^2 + x_{12}x_{21}; \tag{419}$$

мы можем написать тогда

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\sigma(X) + \sqrt{u}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\sigma(X) - \sqrt{u}. \tag{420}$$

Формула Лагранжа — Сильвестра (102) [§ 9] позволяет написать:

$$e^X = \frac{e^{\xi_1} - e^{\xi_2}}{\xi_1 - \xi_2}X + \frac{\xi_1e^{\xi_2} - \xi_2e^{\xi_1}}{\xi_1 - \xi_2}. \tag{421}$$

Замечая, что

$$\frac{e^{\xi_1} - e^{\xi_2}}{\xi_1 - \xi_2} = e^{\frac{1}{2}\sigma(X)}\frac{e^{\sqrt{u}} - e^{-\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} = e^{\frac{1}{2}\sigma(X)}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}},$$

$$\frac{\xi_1e^{\xi_2} - \xi_2e^{\xi_1}}{\xi_1 - \xi_2} = e^{\frac{1}{2}\sigma(X)}\left[-\frac{\sigma(X)}{2}\frac{e^{\sqrt{u}} - e^{-\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} + \frac{e^{\sqrt{u}} + e^{-\sqrt{u}}}{2}\right] =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma(X)}\left[\mathrm{ch}(\sqrt{u}) - \frac{\sigma(X)}{2}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\right],$$

находим явное выражение e^X, пригодное для всех матриц X:

$$e^X = e^{\frac{1}{2}\sigma(X)}\left\{\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\left[X - \frac{\sigma(X)}{2}\right] + \mathrm{ch}(\sqrt{u})\right\}. \tag{422}$$

Действительно, $\mathrm{ch}(\sqrt{u})$ и $\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$ суть целые функции от u, т. е. целые функции элементов матрицы X.

Пусть теперь η_1, η_2 и ζ_1, ζ_2 — характеристические числа матриц Y и Z, v и w — выражения, аналогичные u. Введем еще матрицы

$$\overline{X} = X - \frac{\sigma(X)}{2}, \quad \overline{Y} = Y - \frac{\sigma(Y)}{2}, \quad \overline{Z} = Z - \frac{\sigma(Z)}{2} \tag{423}$$

и заметим, что

$$\sigma(\overline{X}) = \sigma(\overline{Y}) = \sigma(\overline{Z}) = 0, \tag{424}$$

и в силу (422)

$$\left.\begin{aligned} e^{\bar X} &= \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\bar X + \operatorname{ch}(\sqrt{u}), \\ e^{\bar Y} &= \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\bar Y + \operatorname{ch}(\sqrt{v}), \\ e^{\bar Z} &= \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{w})}{\sqrt{w}}\bar Z + \operatorname{ch}(\sqrt{w}), \end{aligned}\right\} \tag{425}$$

Из формулы (417) мы получаем, что

$$D(e^Z) = D(e^X)\,D(e^Y),$$

но

$$D(e^X) = e^{\xi_1}\cdot e^{\xi_2} = e^{\xi_1+\xi_2} = e^{\sigma(X)}$$

и, следовательно,

$$e^{\sigma(Z)} = e^{\sigma(X)}e^{\sigma(Y)}, \tag{426}$$

откуда

$$\sigma(Z) = \sigma(X) + \sigma(Y) + 2\pi i r; \tag{427}$$

но для рассматриваемой ветви мы имеем для матриц X и Y, близких к нулевой матрице,

$$\sigma(Z) = \sigma(X) + \sigma(Y), \tag{428}$$

следовательно, всегда $r=0$ и, стало быть, всегда выполнено равенство (428).

Теперь мы можем написать:

$$e^{\bar Z} = e^{Z-\frac{\sigma(Z)}{2}} = e^X e^Y e^{-\frac{\sigma(X)}{2}} e^{-\frac{\sigma(Y)}{2}}$$

и в силу формул (425):

$$\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{w})}{\sqrt{w}}\bar Z + \operatorname{ch}(\sqrt{w}) = \left[\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\bar X\bar Y + \right.$$
$$\left. + \operatorname{ch}(\sqrt{u})\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\bar Y + \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\operatorname{ch}(\sqrt{v})\bar X + \operatorname{ch}(\sqrt{u})\operatorname{ch}(\sqrt{v})\right]. \tag{429}$$

Остается определить $\sqrt{w}$. Для этого возьмем главный инвариант от обеих частей равенства (429). Принимая во внимание формулы (424) и тождество

$$\sigma(\bar X\bar Y) = \sigma\left[XY - \frac{\sigma(X)}{2}Y - \frac{\sigma(Y)}{2}X + \frac{\sigma(X)\sigma(Y)}{4}\right] = \sigma(XY) - \frac{\sigma(X)\sigma(Y)}{2},$$

мы получаем

$$2\operatorname{ch}(\sqrt{w}) = \left[\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\sigma(\bar X\bar Y) + 2\operatorname{ch}(\sqrt{u})\operatorname{ch}(\sqrt{v})\right],$$

или, если введем обозначение,

$$\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\left[\sigma(XY) - \frac{\sigma(X)\sigma(Y)}{2}\right] + \operatorname{ch}(\sqrt{u})\operatorname{ch}(\sqrt{v}) = t, \tag{430}$$

$$\operatorname{ch}(\sqrt{w}) = t. \tag{431}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh}(\sqrt{w}) = \sqrt{t^2-1}, \quad e^{\sqrt{w}} = t + \sqrt{t^2-1}, \\ \sqrt{w} = \operatorname{Lg}\left[t + \sqrt{t^2-1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{432}$$

Разрешая уравнение (429) относительно $\bar Z$, мы получаем

$$\bar Z = \frac{\operatorname{Lg}\left[t+\sqrt{t^2-1}\right]}{\sqrt{t^2-1}}\left[\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{v}}{\sqrt{v}}\left(\bar X\bar Y - \frac{\sigma(\bar X\bar Y)}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{ch}(\sqrt{u})\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\bar Y + \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\operatorname{ch}(\sqrt{v})\bar X\right]. \tag{433}$$

Сделаем разрез в плоскости комплексной переменной t

$$-\infty < t < -1$$

и фиксируем в разрезанной плоскости значение

$$\frac{\lg(t+\sqrt{t^2-1})}{\sqrt{t^2-1}}, \tag{434}$$

приводящееся к $\frac{\pi}{2}$ при $t=0$, тогда функция (434) будет однозначной в разрезанной плоскости. Все другие значения этой функции суть

$$\frac{\lg(t+\sqrt{t^2-1}) + 2k\pi i}{\sqrt{t^2-1}}, \tag{435}$$

где k — целое число

Возвращаясь теперь к матрицам X, Y, Z, получим:

$$Z = \frac{\sigma(X)+\sigma(Y)}{2} + \frac{\lg(t+\sqrt{t^2-1})+2k\pi i}{\sqrt{t^2-1}}\left[\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}XY + \right.$$
$$+ \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{v}) - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\frac{\sigma(Y)}{2}\right)X +$$
$$+ \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\left(\operatorname{ch}(\sqrt{u}) - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\sigma(X)}{2}\right)Y +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}(\sigma(X)\sigma(Y) - \sigma(XY)) -$$
$$\left. - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\operatorname{ch}(\sqrt{v})\frac{\sigma(X)}{2} - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{v})}{\sqrt{v}}\operatorname{ch}(\sqrt{u})\frac{\sigma(Y)}{2}\right]. \tag{436}$$

§ 24. Степенные ряды от счетного множества матриц

Рассмотрим бесконечную последовательность $\mathfrak{X}$ переменных матриц порядка n:

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_p,\ \ldots$$

Если ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p|$$

сходится, то будем говорить, что система матриц $\mathfrak{X}$ регулярна.

О регулярных системах матриц $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{p=1}^{\infty}|X_p| < \|\rho\|, \tag{437}$$

где ρ — положительное число, будем говорить, что они принадлежат окрестности нулевых матриц.

Рассмотрим еще систему постоянных численных коэффициентов:

$$\alpha_0, \ \alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots; \ p_k = 1, 2, \ldots),$$

которую мы обозначим через α. Введем теперь обозначения

$$\alpha_0 = [X\alpha]_0,$$

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} X_{p_2} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu} = [X\alpha]_\nu \tag{438}$$

для однородных полиномов от матриц $X_1, X_2, \ldots$ Значение суммы (438) не должно зависеть от порядка суммирования. Хорошо известно, что необходимое и достаточное условие независимости суммы (438) от порядка суммирования состоит в сходимости ряда

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} | X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} | \quad | \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} |. \tag{439}$$

Если мы заменим в рядах все матрицы и все коэффициенты их модулями, то получим ряды, которые будем обозначать через

$$| \alpha_0 | = [| X\alpha |]_0,$$

$$\sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} | X_{p_1} | \ldots | X_{p_\nu} | | \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} | = [| X\alpha |]_\nu. \tag{440}$$

Если мы предположим, что при фиксированном ν все коэффиценты $\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}$ ограничены, т. е. если мы имеем

$$| \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} | < \alpha^{(\nu)}, \tag{441}$$

то ряд (440) сходится для всех регулярных систем матриц, и, следовательно, ряд (438) абсолютно сходится. Действительно, из (441) и (437) следует, что

$$| X\alpha |]_\nu = \sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} | X_{p_1} | \ldots | X_{p_\nu} | | \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} | \leqslant \alpha^{(\nu)} \sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} | X_{p_1} | \ldots | X_{p_\nu} | =$$

$$= \alpha^{(\nu)} \left(\sum_{p=1}^{\infty} | X_p | \right)^\nu < \alpha^{(\nu)} \| \rho \|^\nu = \alpha^{(\nu)} \| n^{\nu-1} \rho^\nu \|. \tag{442}$$

Докажем наоборот, что ряд (438) не может сходиться для всех регулярных систем матриц, если последовательность коэффициентов $\alpha_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}$ не ограничена [так как ряд (438) представляет собой однородный полином степени ν относительно $X_1, X_2, \ldots$, то он сходится для всех регулярных систем матриц, если он сходится для матриц из области (437)].

Действительно, если множество модулей $| \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} |$ не ограничено и если мы возьмем число $P > 1$, то существует система коэффициентов, удовлетворяющая неравенствам

$$\left| \alpha_{p_1^{(1)} \ldots p_\nu^{(1)}} \right| > P, \quad \left| \alpha_{p_1^{(2)}, \ldots p_\nu^{(2)}} \right| > P^2, \ldots \left| \alpha_{p_1^{(k)}, \ldots, p_\nu^{(k)}} \right| > P^k, \ldots$$

Рассмотрим множество первых индексов $p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_1^{(k)}, \ldots$ Если оно ограничено, то существует такой индекс p_1^*, что равенство $p_1^{(k)} = p_1^*$ имеет место бесконечное число раз; рассмотрим в этом случае только те коэффициенты $\alpha_{p_1^{(k)} \ldots p_\nu^{(k)}}$, первый индекс которых есть p_1^*. Если множество

первых индексов не ограничено, мы берем все коэффициенты. Повторим этот процесс для вторых, третьих, ..., ν-*х* индексов.

Мы можем, следовательно, выделить частичную последовательность коэффициентов $\alpha_{p_1, \ldots, p_\nu}$, обладающую тем свойством, что все индексы стремятся к бесконечности, за исключением может быть некоторых из них, которые остаются постоянными. Не умаляя общности, можно считать, что постоянные индексы суть $p_1^*, \ldots, p_\mu^*$. Мы имеем, следовательно, неравенства

$$\left| \alpha_{p_1^* \ldots p_\mu^* q_{\mu+1}^{(k)} \ldots q_\nu^{(k)}} \right| > P^k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Мы можем теперь выделить частичную последовательность коэффициентов α такую, что будут выполнены неравенства

$$\min \left(q_{\mu+1}^{(k_1)}, \ \ldots, \ q_\nu^{(k_1)} \right) > \max \left(p_1^*, \ \ldots, \ p_\mu^* \right),$$

$$\min \left(q_{\mu+1}^{(k_2)}, \ \ldots, \ q_\nu^{(k_2)} \right) > \max \left(q_{\mu+1}^{(k_1)}, \ \ldots, \ q_\nu^{(k_1)} \right).$$

. . . .

Очевидно, что мы имеем

$$\left| \alpha_{p_1^* \ldots p_\mu^* q_{\mu+1}^{(k_r)} \ldots q_\nu^{(k_r)}} \right| > P^r \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем теперь число $\delta < 1$, удовлетворяющее неравенству

$$P\delta^{\nu-\mu} > 1,$$

и положим

$$X_{p_1^*} = \ldots = X_{p_\mu^*} = 1, \quad X_{q_{\mu+1}^{(k_r)}} = \ldots = X_{q_\nu^{(k_r)}} = \delta^r \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

все прочие матрицы X_p возьмем равными нулю. Эта система матриц, следовательно, регулярна, в то время как ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left| \alpha_{p_1^* \ldots p_\mu^* q_{\mu+1}^{(k_r)} \ldots q_\nu^{(k_r)}} \right| X_{p_1^*} \ldots X_{p_\mu^*} X_{q_{\mu+1}^{(k_r)}} \ldots X_{q_\nu^{(k_r)}} > \sum_{r=1}^{\infty} P^r \delta^{(\nu-\mu) r},$$

очевидно, расходится, что и доказывает наше предложение.

§ 25. Перенесение некоторых результатов с конечного случая

Рассмотрим ряд

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{p_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_\nu=1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu}, \tag{443}$$

где множество коэффициентов $\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}$ предполагается ограниченным для каждого фиксированного ν, так что

$$| \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} | < \alpha^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots; \ p_1, \ldots, p_\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Общий член ряда (443) есть $[X\alpha]_\nu$; этот ряд представляет собой так называемый ряд композиций от бесконечного числа матриц $X_1, X_2, \ldots, X_p \ldots$ Если этот ряд сходится равномерно для любой регулярной системы матриц, принадлежащей окрестности (437) нулевых матриц, то мы будем говорить, что он определяет *функцию матриц* $\mathfrak{X}$, *голоморфную в указанной окрестности нулевых матриц.*

Рассмотрим в этом случае функцию обычной комплексной переменной ξ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \xi^{\nu} [X\alpha]_{\nu}; \tag{444}$$

если $\mathfrak{X}$ принадлежит окрестности (437), то ряд (444), рассматриваемый как функция от ξ, есть голоморфная функция в круге $|\xi| \leqslant 1$; следовательно, ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |[X\alpha]_{\nu}| \tag{445}$$

сходится. Однако ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [|X\alpha|]_{\nu} \tag{446}$$

может расходиться, как мы видели, изучая функции от конечного числа матриц.

Если ряд (443) сходится равномерно для каждой регулярной системы $\mathfrak{X}$ матриц, то мы говорим, что этот ряд определяет целую функцию матриц $\mathfrak{X}$; в этом случае ряд (444) представляет собой целую функцию от ξ.

Заметим, что теорема единственности разложения функции матриц $\mathfrak{X}$ в ряд композиций (443) не имеет места, если матрицы X_p фиксированного порядка n.

Однако, если равенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1, \ldots, p_\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \beta_{p_1 \ldots p_\nu} \tag{447}$$

имеет место для каждой регулярной системы матриц произвольного порядка, удовлетворяющей условию (437), то мы необходимо имеем

$$\alpha_{p_1 \ldots p_\nu} = \beta_{p_1 \ldots p_\nu}; \tag{448}$$

действительно, если мы рассмотрим индексы $p_1^*, \ldots, p_\nu^*$ и положим все матрицы X_p равными нулю, за исключением $X_{p_1^*} = Y_1, \ldots, X_{p_\nu^*} = Y_\nu$, то получим из (447)

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{j_1, \ldots j_\mu}^{(1, 2, \ldots, \nu)} Y_{j_1} \ldots Y_{j_\mu} \alpha_{p^*_{j_1} \ldots p^*_{j_\mu}} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{j_1, \ldots, j_\mu}^{(1, 2, \ldots, \nu)} Y_{j_1} \ldots Y_{j_\mu} \beta_{p^*_{j_1} \ldots p^*_{j_\mu}},$$

откуда в силу теоремы единственности для функций от конечного числа матриц следует

$$\alpha_{p_1^* \ldots p_\nu^*} = \beta_{p_1^* \ldots p_\nu^*}.$$

На функции от бесконечного числа матриц можно распространить достаточное условие для того, чтобы ряд композиций давал голоморфную функцию в окрестности нулевых матриц.

Пусть дан ряд композиций

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_{\nu} \tag{449}$$

и пусть выполнены неравенства

$$|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \alpha^{(\nu)};$$

если радиус сходимости ряда

$$f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^{\nu} \tag{450}$$

равен ρn, то ряд (449) сходится абсолютно и равномерно, т. е. ряд (446) сходится в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|. \tag{451}$$

Для доказательства достаточно заметить, что если

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho - \varepsilon\|,$$

где ε — положительное число, то мы имеем в силу формулы (442)

$$[|X\alpha|]_{\nu} < \alpha^{(\nu)} \| n^{\nu-1} (\rho - \varepsilon)^{\nu} \|,$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [|X\alpha|]_{\nu} < \frac{1}{n} \| f(n\rho - n\varepsilon) \|.$$

Если ряд (450) сходится в круге $|\xi| < n\rho$, то мы говорим, что *функция* $F(\mathfrak{X})$ *равномерно голоморфна в области* (451). Если функция (450) целая, то мы говорим, что *ряд* (449) и *функция* $F(\mathfrak{X})$ *равномерно целые.*

§ 26. Операции со степенными рядами от счетного множества матриц

Как и в § 17, мы можем ввести понятие мажорантного ряда для рядов от бесконечного числа матриц.

Если

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_{\nu} \tag{452}$$

равномерно голоморфная функция в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{453}$$

то мы получаем, как в § 17, неравенства

$$|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \frac{g}{(\rho' n)^{\nu}}, \tag{454}$$

где $\rho' = \rho - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и g — положительное число.

Мы получаем далее так же, как в § 17, неравенства

$$|F(\mathfrak{X})| < \left\| g \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|, \tag{455}$$

$$|F(\mathfrak{X}) - \alpha_0| < \left\| \frac{g\rho''}{\rho' n} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)^{-1} \right\|, \tag{456}$$

имеющие место в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho''\| < \|\rho'\|. \tag{457}$$

Мы должны теперь сформулировать основные теоремы, касающиеся вычислений с рядами композиций от бесконечного числа матриц. Доказательства этих теорем не отличаются от теорем для функций от конечного числа матриц и на этом основании могут быть опущены.

Теорема XVII. *Если функции от бесконечного числа матриц*

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu, \tag{458}$$

$$G(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\beta]_\nu \tag{459}$$

равномерно голоморфны в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{460}$$

то их произведение также равномерно голоморфно в той же области и может быть представлено в виде ряда композиций

$$F(\mathfrak{X})\, G(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu, \tag{461}$$

где коэффициенты $\gamma_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}$ *определяются формулами*

$$\gamma_{p_1 p_2 \ldots p_\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\mu} \beta_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu}, \tag{462}$$

в которых мы должны заменить $\alpha_{p_1 \ldots p_\mu}$ *в случае* $\mu = 0$ *на* α_0 *и* $\beta_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu}$ *в случае* $\mu = \nu$ — *на* β_0.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы IX.

Теорема XVIII. *Если ряды* (458) *и* (459) *равномерно сходятся в области* (460), *то их произведение, даваемое рядом* (461), *равномерно сходится в той же области.*

Доказательство. Так как ряды

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |[X\alpha]_\nu| \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |[X\beta]_\nu|$$

сходятся, то можно применить правило перемножения рядов. Общий член нового ряда

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha]_\mu [X\beta]_{\nu-\mu}$$

ввиду абсолютной сходимости рядов $[X\alpha]_\mu$ и $[X\beta]_{\nu-\mu}$ не зависит от порядка суммирования и, следовательно, мы имеем

$$[X\gamma]_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha]_\mu [X\beta]_{\nu-\mu},$$

откуда и следует теорема.

Теорема XIX. *Если матрица*

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} [Y\beta]_\nu \tag{463}$$

есть функция от бесконечного числа матриц $Y_1, Y_2, \ldots$, *равномерно голоморфная в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |Y_p| < \|\sigma\|, \tag{464}$$

и матрицы

$$Y_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha^{(p)}]_\nu \qquad (p = 1, 2, \ldots), \tag{465}$$

так же как матрица

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = 1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \left| \alpha^{(p)}_{p_1 \ldots p_\nu} \right|, \tag{466}$$

суть функции от бесконечного числа матриц $X_1, X_2, \ldots$, *равномерно голоморфные в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{467}$$

то матрица Z *есть функция от матриц* $X_1, X_2, \ldots$, *равномерно голоморфная в некоторой окрестности нулевых матриц, и может быть представлена в виде ряда композиций:*

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\gamma]_\nu, \tag{468}$$

где коэффициенты $\gamma_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}$ *определяются формулами*

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{p_1} &= \sum_{q_1=1}^{\infty} \alpha^{(q_1)}_{p_1} \beta_{q_1}, \\ \gamma_{p_1 \ldots p_\nu} &= \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{q_1, \ldots, q_\mu = 1}^{\infty} \sum_{0 < x_1 < \ldots < x_{\mu-1} < \nu} \alpha^{(q_1)}_{p_1 \ldots p_{x_1}} \ldots \alpha^{(q_\mu)}_{p_{x_{\mu-1}+1} \ldots p_\nu} \beta_{q_1 \ldots q_\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{469}$$

Доказательство совпадает с доказательством теоремы X. Отметим еще, что для коэффициентов $\gamma_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}$ мы имеем неравенства:

$$|\gamma_{p_1 p_2 \ldots p_\nu}| < \frac{k}{(\tau n)^\nu}. \tag{470}$$

Теорема XX. *Если матрица*

$$Y = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha]_\nu \tag{471}$$

есть функция от бесконечного числа матриц $X_1, X_2, \ldots$, *равномерно голоморфная в области*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{472}$$

то обратная матрица Y^{-1} — *также функция от матриц* $X_1, X_2, \ldots$, *равномерно голоморфная в некоторой окрестности нулевых матриц, и может быть представлена в виде*

$$Y^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [X\alpha^*]_\nu, \tag{473}$$

где

$$\alpha^*_{p_1 \ldots p} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{0 < x_1 < \ldots < x_{\mu-1} < \nu} (-1)^\mu \alpha_{p_1 \ldots p_{x_1}} \alpha_{p_{x_1+1} \ldots p_{x_2}} \ldots \alpha_{p_{x_{\mu-1}+1} \ldots p_\nu}. \tag{474}$$

Доказательство совпадает с доказательством теоремы XII. Заметим еще, что для коэффициентов $\alpha^*_{p_1 p_2 \dots p_\nu}$ мы имеем неравенства

$$|\alpha^*_{p_1 p_2 \dots p_\nu}| < \frac{k_1}{(\tau_1 n)^\nu}. \tag{475}$$

Теорема XXI. *Если все матрицы, образующие счетное множество*

$$Y_p = X_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} [X\alpha^{(p)}]_\nu, \tag{476}$$

а также матрица

$$\sum_{p=1}^{\infty} X_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{p_1, \dots p_\nu = 1}^{\infty} X_{p_1} \dots X_{p_\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \left| \alpha^{(p)}_{p_1 \dots p_\nu} \right| \tag{477}$$

суть функции от бесконечного числа матриц $X_1, X_2, \dots,$ равномерно голоморфные в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{478}$$

то система (476) *имеет одну и только одну систему решений $X_1, X_2, \dots,$ которые могут быть представлены рядами композиций*

$$X_p = Y_p + \sum_{\nu=2}^{\infty} [Y\beta^{(p)}]_\nu, \tag{479}$$

не имеющими свободных членов; ряды (479) суть функции матриц $Y_1, Y_2, \dots,$ равномерно голоморфные в некоторой окрестности нулевых матриц, и коэффициенты $\beta^{(p)}_{p_1 p_2 \dots p_\nu}$ этих рядов определяются рекуррентными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} &\beta^{(p)}_{p_1} = \delta^p_{p_1}, \\ &\beta^{(p)}_{p_1 \dots p_\nu} = -\sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{q_1, \dots, q_\mu = 1}^{\infty} \sum_{0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \beta^{(q_1)}_{p_1 \dots p_{\varkappa_1}} \dots \beta^{(q_\mu)}_{p_{\varkappa_{\mu-1}+1} \dots p_\nu} \alpha^{(p)}_{q_1 \dots q_\mu}. \end{aligned} \right\} \tag{480}$$

Доказательство совпадает с доказательством теоремы XV в частном случае, указанном как следствие этой теоремы. Заметим еще, что мы имеем неравенства

$$\sum \left| \beta^{(p)}_{p_1 p_2 \dots p_\nu} \right| < \frac{k_2}{(\tau_2 n)^\nu}. \tag{481}$$

§ 27. Мероморфные функции от счетного множества матриц

Помимо рядов композиций

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu,$$

мы можем ввести, как в случае конечного числа матриц, ряды следов и ряды матриц и следов.

Рассмотрим однородный полином от элементов матриц $X_1, X_2, \dots$ следующего вида:

$$\| X\beta \|_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_\lambda = \nu \\ \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_\lambda > 0}} \sum_{q^1_1, \dots, q^1_{\mu_1}, \dots, q^\lambda_{\mu_\lambda} = 1}^{\infty} \sigma\left(X_{q^1_1} \dots X_{q^1_{\mu_1}}\right) \dots \sigma\left(X_{q^\lambda_1} \dots X_{q^\lambda_{\mu_\lambda}}\right) \beta^{(\lambda)}_{\substack{q^1_1 \dots q^1_{\mu_1}, \\ \dots\dots \\ q^\lambda_1 \dots q^\lambda_{\mu_\lambda}}} \tag{482}$$

где суммирование распространяется на все системы индексов $q^1_1 \dots q^1_{\mu_1}$, которые не являются циклическими перестановками друг друга. Заметим, что такая перестановка не изменяет след:

$$\sigma\left(X_{q^1_1} \dots X_{q^1_{\mu_1}}\right) = \sigma\left(X_{q^1_2} \dots X_{q^1_{\mu_1}} X_{q^1_1}\right).$$

Такое же правило применяется к индексам $q^2_1 \dots q^2_{\mu_2}$ и т. д.

Полином (482) обладает следующим свойством инвариантности: если мы преобразуем множество всех матриц X_p одной и той же матрицей S, т. е. если мы возьмем матрицы

$$Y_p = SX_pS^{-1}, \tag{483}$$

то полином $\| X\beta \|_\nu$ не изменится, т. е.

$$\| X\beta \|_\nu = \| Y\beta \|_\nu. \tag{484}$$

Необходимое и достаточное условие сходимости (абсолютной) ряда (482) для всех регулярных систем матриц X_p состоит в том, чтобы множество его коэффициентов β было ограниченным. Доказательство вполне аналогично доказательству, которое дано в § 24.

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \| X\beta \|_\nu, \tag{485}$$

где мы предполагаем, что для каждого фиксированного ν множество коэффициентов β ограничено:

$$\left| \beta_{\substack{q^1_1 \dots q^1_{\mu_1} \\ \dots\dots \\ q^\lambda_1 \dots q^\lambda_{\mu_\lambda}}} \right| \leqslant \beta^{(\nu)}, \quad \text{если} \quad \mu_1 + \dots + \mu_\lambda = \nu.$$

Если ряд (485) сходится равномерно в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| < \|\rho\|, \tag{486}$$

то мы говорим, что он определяет *функцию следов матриц X, голоморфную в области* (486). Очевидно, что в этом случае ряд

$$\sum | \| X\beta \|_\nu | \tag{487}$$

также сходится.

Если ряд (485) сходится равномерно для каждой регулярной системы матриц X, то мы назовем *этот ряд и функцию, которую он определяет, целыми.*

Рассмотрим далее ряды матриц и следов

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha^{(\nu)}]_\mu \| X\beta^{(\nu)} \|_{\nu-\mu} \right). \tag{488}$$

Предполагая равномерную сходимость этого ряда в области (486), мы будем говорить, что *этот ряд есть функция матриц и следов, голоморфная в области* (486). *Если ряд* (488) *сходится равномерно для всех регулярных систем матриц, то мы будем говорить, что ряд является целым.*

Предположим теперь, что мы имеем функцию от бесконечного числа матриц $X_1, X_2, \ldots,$ голоморфную в области (486)

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu. \tag{489}$$

Предположим еще, что существует целая функция следов

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \| X\beta \|_\nu, \tag{490}$$

обладающая следующим свойством: если мы перемножим ряды (489) и (490) и расположим результат по однородным полиномам, т. е. если образуем ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha]_\mu \| X\beta \|_{\nu-\mu} \right), \tag{491}$$

то получим целый ряд матриц и следов.

Мы имеем в этом случае следующее представление

$$F(\mathfrak{X}) = \frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} [X\alpha]_\mu \| X\beta \|_{\nu-\mu} \right)}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \| X\beta \|_\nu} \tag{492}$$

голоморфной функции $F(\mathfrak{X})$ в виде частного двух целых функций. С помощью этого представления можно совершать аналитическое продолжение матрицы $F(\mathfrak{X})$ для каждой регулярной системы матриц X, не обращающей в нуль знаменатель частного (492). В этом случае мы говорим, что *функция $F(\mathfrak{X})$ является мероморфной функцией матриц X* и что регулярные системы матриц, которые обращают в нуль знаменатель частного (492), являются особенностями функции $F(\mathfrak{X})$.

§ 28. Регулярные системы индекса R

Иногда вместо регулярных систем матриц полезно рассматривать системы матриц, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| R^p < \|\rho\|, \tag{493}$$

где R — положительное число. Такие системы матриц будем называть *регулярными системами индекса R*.

Установим связь между регулярными системами индекса R и обычными регулярными системами; для этого введем матрицы

$$Y_p = X^p R^p,$$

которые образуют регулярную систему.

Ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = 1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu}$$

тождественен ряду

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = 1}^{\infty} Y_{p_1} \ldots Y_{p_\nu} R^{-(p_1+\ldots+p_\nu)} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu}.$$

Всякому предложению, касающемуся регулярных систем матриц, отвечает аналогичное предложение, относящееся к регулярным системам индекса R. Например, необходимое и достаточное условие сходимости однородного полинома

$$[X\alpha]_\nu = \sum_{p_1 \ldots p_\nu = 1}^{\infty} X_{p_1} \ldots X_{p_\nu} \alpha_{p_1 \ldots p_\nu} \tag{494}$$

для всех регулярных систем индекса R состоит в том, чтобы множество произведений

$$|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| R^{-(p_1+\ldots+p_\nu)} \tag{495}$$

было ограничено.

Если мы имеем

$$|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \alpha^{(\nu)} R^{p_1+\ldots+p_\nu} \tag{496}$$

и если ряд

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu \tag{497}$$

сходится в круге $|\xi| < \rho n$, то ряд композиций

$$F(\mathfrak{X}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [X\alpha]_\nu \tag{498}$$

абсолютно сходится в области

$$\sum_{p=1}^{\infty} |X_p| R^p < \|\rho\|. \tag{499}$$

Можно сказать в этом случае, что ряд (498) равномерно голоморфен в области (499).

Все теоремы из § 26 остаются справедливыми, только неравенства, относящиеся к коэффициентам различных разложений, принимают теперь следующую форму:

$$|\alpha_{p_1 \ldots p_\nu}| < \frac{g}{(\rho' n)^\nu} R^{p_1+\ldots+p_\nu}. \tag{500}$$

СТАТЬЯ ВТОРАЯ

АЛГОРИФМИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ПУАНКАРЕ

§ 1. Введение

Если элементы некоторой матрицы $Y(x)$ являются функциями вещественной или комплексной переменной x

$$\{Y(x)\}_{kl}=Y_{kl}(x),$$

то производная данной матрицы $Y(x)$ по x представляет собой матрицу, элементы которой суть производные от элементов матрицы $Y(x)$

$$\left\{\frac{dY(x)}{dx}\right\}_{kl}=\frac{dY_{kl}(x)}{dx}.$$

Правила дифференцирования суммы $Y(x)+Z(x)$ и произведения $Y(x)\cdot Z(x)$ очевидны:

$$\frac{d}{dx}(Y(x)+Z(x))=\frac{dY}{dx}+\frac{dZ}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(Y(x)Z(x))=\frac{dY(x)}{dx}Z(x)+Y(x)\frac{dZ(x)}{dx}.$$

Из последней формулы следует формула дифференцирования целой положительной степени m матрицы

$$\frac{dY(x)^m}{dx}=\sum_{i=1}^{m}Y(x)^{i-1}\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{m-i}.$$

Укажем еще правило дифференцирования обратной матрицы $Y(x)^{-1}$. В силу определения этой матрицы

$$Y(x)Y^{-1}(x)=I.$$

Дифференцируя это равенство, мы имеем:

$$\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1}+Y(x)\frac{dY(x)^{-1}}{dx}=0,$$

откуда следует

$$\frac{dY(x)^{-1}}{dx}=-Y(x)^{-1}\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1}.$$

Условимся говорить, что матрица $Y(x)$ является аналитической функцией комплексной переменной в некоторой области, если все элементы этой матрицы суть аналитические функции в этой области.

Пусть $Y(x)$—матрица, голоморфная в точке a. Мы можем написать разложение $Y(x)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки a в виде

$$Y(x)=\sum_{p=1}^{\infty}A^{(p)}(x-a)^p,$$

где $A^{(p)}$—матрицы, элементами которых являются коэффициенты при $(x-a)^p$ в разложениях элементов матрицы $Y(x)$ в ряд Тэйлора

$$\{A^{(p)}\}_{kl}=\frac{1}{p!}\left(\frac{d^py_{kl}(x)}{dx^p}\right)_{x=a}.$$

Аналогичным образом можно определить и другие разложения в ряды для матрицы $Y(x)$.

Перейдем теперь к теории систем линейных дифференциальных уравнений. В последующем мы будем иметь в виду однородную систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=y_1p_{11}(x)+y_2p_{21}(x)+\ldots+y_np_{n1}(x)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\frac{dy_n}{dx}&=y_1p_{1n}(x)+y_2p_{2n}(x)+\ldots+y_np_{nn}(x),\end{aligned}\right.\tag{1}$$

где коэффициенты $p_{kl}(x)$ суть заданные аналитические функции в некоторой области комплексной переменной x.

Возьмем n систем функций, удовлетворяющих уравнениям (1). Обозначим через $y_{ik}(x)$ k-ю функцию i-го решения, так что в каждой строке матрицы

$$Y(x)=\begin{Vmatrix}y_{11}(x)\ldots y_{1n}(x)\\\ldots\ldots\ldots\\y_{n1}(x)\ldots y_{nn}(x)\end{Vmatrix}\tag{2}$$

стоит частное решение данной системы.

Коэффициенты $p_{kl}(x)$ образуют другую матрицу, которую мы обозначим через $P(x)$:

$$P(x)=\begin{Vmatrix}p_{11}(x)\ldots p_{1n}(x)\\\ldots\ldots\ldots\\p_{n1}(x)\ldots p_{nn}(x)\end{Vmatrix}.\tag{3}$$

В этих обозначениях систему (1) можно записать в виде

$$\frac{dY(x)}{dx}=Y(x)\cdot P(x).\tag{4}$$

Матрица $Y(x)$ называется *фундаментальной*, если ее определитель отличен от нуля. Относительно величины этого определителя известна теорема, принадлежащая Якоби

$$D(Y(x))=Ce^{\int_b^x\sigma(P(x))\,dx},\quad\text{где}\quad\sigma(P(x))=\sum_{i=1}^{n}p_{ii}(x).$$

Следовательно, $D(Y(x))$ или равен нулю тождественно (если $C=0$), или может быть равным нулю только в особых точках следа матрицы $P(x)$.

Если матрица $Y(x)$ является решением уравнения (4), то матрица $CY(x)$, где C — произвольная матрица с постоянными коэффициентами, очевидно, есть также решение этого уравнения.

Обратная теорема, важная для последующего, хорошо известна и доказывается просто.

Каждая матрица $Y_1(x)$, удовлетворяющая системе (4), может быть получена из фундаментальной матрицы $Y(x)$ умножением слева на некоторую постоянную матрицу.

Действительно, если мы продифференцируем по x матрицу $Y_1 Y^{-1}$ и подставим вместо $\frac{dY_1(x)}{dx}$ и $\frac{dY(x)}{dx}$ их выражения из равенства (4), то будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left(Y_1 Y^{-1}\right) = \frac{dY_1}{dx} Y^{-1} - Y_1 \cdot Y^{-1}\frac{dY}{dx} Y^{-1} = Y_1 P \cdot Y^{-1} - Y_1 Y^{-1} Y P Y^{-1} = 0,$$

откуда следует, что $Y_1 Y^{-1} = C$ или $Y_1 = CY$.

Что касается существования фундаментальной матрицы, то для наших целей достаточен следующий известный результат.

Если матрица $P(x)$ голоморфна в точке $x = b$, то существует одна и только одна матрица $Y(x)$, удовлетворяющая системе (4) и начальным условиям $Y(b) = Y_0$, где Y_0 — произвольная заданная матрица, и особые точки матрицы $Y(x)$ могут быть расположены лишь в особых точках матрицы $P(x)$.

Мы можем, очевидно, использовать ряд Тэйлора для построения фундаментальной матрицы в некоторой части ее области существования.

Предположим, что матрица $P(x)$ голоморфна в точке $x = b$ и запишем ее разложение в ряд Тэйлора

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P^{(\nu)}(x-b)^{\nu},$$

где $P^{(\nu)}$, очевидно, матрицы. Исследуем решение при начальном условии $Y(b) = I$. Ясно, что это решение является фундаментальным.

Применим метод последовательных приближений. Положим $Y_0(x) = I$ и определим n-е приближение формулой

$$Y_n(x) = I + \int_b^x Y_{n-1}(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} P^{(\nu)}(x-b)^{\nu}\, dx.$$

Простое вычисление показывает, что

$$Y_n(x) = I + \sum_{\nu=1}^{n} [P\alpha]_{\nu},$$

где

$$[P\alpha]_{\nu} = \sum_{j_1, \ldots, j_{\nu}}^{0 \ldots \infty} P^{(j_1)} \ldots P^{(j_{\nu})} \alpha_{j_1 \ldots j_{\nu}}$$

и

$$\alpha_{j_1 \ldots j_{\nu}} = \frac{(x-b)^{j_1 + \ldots + j_{\nu} + \nu}}{(j_1+1)(j_1+j_2+2)\ldots(j_1+\ldots+j_{\nu}+\nu)}.$$

Следовательно, требуемое решение можно представить следующим рядом композиций:

$$Y(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [P\alpha]_{\nu}. \tag{5}$$

Отметим, что ряд (5) мы можем представить как ряд Тэйлора для $Y(x)$, располагая этот ряд по степеням $x - b$:

$$Y(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} A^{(\nu)}(x-b)^{\nu}, \tag{6}$$

где

$$A^{(\nu)} = \frac{1}{\nu}\left\{ P^{(\nu-1)} + \sum_{j_1=0}^{\nu-2} \frac{P^{(j_1)}P^{(\nu-j_1-2)}}{j_1+1} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j_1=0}^{\nu-3}\sum_{j_2=0}^{j_2} \frac{P^{(j_1)}P^{(j_2-j_1)}P^{(\nu-j_2-3)}}{(j_1+1)(j_1+j_2+2)} + \ldots + \frac{(P^{(0)})^{\nu}}{(\nu-1)!} \right\}. \tag{7}$$

Аналитическая природа интегральной матрицы $Y(x)$ является гораздо более сложной в окрестности особых точек матрицы $P(x)$.

Пусть, например, a — изолированная особая точка системы (4). Предположим, что $P(x)$ однозначна в окрестности этой точки.

Точка a будет, вообще говоря, особой точкой интегральной матрицы $Y(x)$. Более того, $Y(x)$ может быть многозначной в окрестности точки a. Если, отправляясь от точки x, мы опишем замкнутый контур вокруг точки a в положительном направлении, то может случиться, что не вернемся к исходной фундаментальной матрице. Обозначим через $Y(\overset{+}{x})$ исходную фундаментальную матрицу и через $Y(\bar{x})$ — матрицу, которую получим, описывая указанный выше замкнутый контур. Принимая в расчет, что матрица $P(x)$ по предположению однозначна в окрестности точки $x = a$, мы можем утверждать, что $Y(\bar{x})$ может отличаться от $Y(\overset{+}{x})$ только некоторым постоянным множителем слева

$$Y(\bar{x}) = VY(\overset{+}{x}). \tag{8}$$

Матрицу V будем называть *интегральной подстановкой в особой точке* a. Она характеризует ветвление интегральной матрицы $Y(x)$, и построение V представляет собой одну из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений.

Матрица V зависит, очевидно, от системы (4), т. е. от параметров, которые определяют матрицу $P(x)$, и затем от выбора фундаментальной матрицы $Y(x)$, т. е. от начальных условий.

Последняя зависимость очень проста. Пусть $Y(x)$, $Y_1(x)$ — две интегральные фундаментальные матрицы системы (4) и V, V_1 — их интегральные подстановки.

Можно легко доказать, что V и V_1 подобны, т. е. что существует постоянная матрица C с определителем $D(C) \neq 0$ такая, что

$$V_1 = CVC^{-1}.$$

Действительно, $Y(x)$ и $Y_1(x)$ связаны соотношением

$$Y_1(x) = CY(x),$$

где C — постоянная матрица и $D(C) \neq 0$.

После обхода вокруг точки a мы будем иметь

$$Y_1(\bar{x}) = CY(\bar{x}) = CVY(\overset{+}{x}) = CVC^{-1}CY(\overset{+}{x}) = CVC^{-1}Y_1(\overset{+}{x}),$$

откуда следует $V_1 = CVC^{-1}$.

Обратно, если мы имеем

$$V_1 = CVC^{-1},$$

то существует, очевидно, фундаментальная интегральная матрица $Y_1(x) = CY(x)$ такая, что ее интегральная подстановка есть V_1. Достаточно, вообще говоря, найти только одну фундаментальную интегральную матрицу и определить ее зависимость от параметров системы.

Отметим здесь же, что $D(V) \neq 0$, так как

$$D(V) = \frac{D(Y(\bar{x}))}{D(Y(x))}.$$

Мы можем разложить $Y(x)$ на два множителя, один из которых известен и представляет элементарную аналитическую функцию, другой есть однозначная функция переменной x в окрестности точки a.

Возьмем какое-нибудь значение логарифма V и введем матрицу

$$W = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Lg} V.$$

Функция

$$e^{W \lg (x-a)} = (x-a)^W$$

испытывает подстановку V, когда x описывает замкнутый контур вокруг точки $x = a$, так как для этой функции, очевидно, мы будем иметь при обходе контура

$$e^{W (\lg (x-a) + 2\pi i)} = e^{2\pi i W} e^{W \lg (x-a)} = V (x-a)^W.$$

Следовательно, функция $Z(x)$, определяемая равенством

$$Y(x) = (x-a)^W Z(x),$$

есть однозначная функция в окрестности точки a.

Исследование этой однозначной компоненты представляет собой весьма сложный вопрос теории дифференциальных уравнений.

В последующем мы будем рассматривать только один частный случай, когда коэффициенты системы суть рациональные функции с простыми полюсами и регулярные в бесконечно далекой точке. Такие регулярные системы имеют следующий вид:

$$\frac{dY(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a_j}, \tag{9}$$

где $U_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ — постоянные матрицы. Эти матрицы будем называть *дифференциальными подстановками в точках a_j соответственно.*

Фундаментальную интегральную матрицу системы (9) в последующем будем называть *регулярной интегральной матрицей.*

Каждой особой точке отвечает интегральная подстановка, которую испытывает $Y(x)$ при обходе вокруг точки a_j:

$$Y(\bar{x}) = V_j Y(\overset{+}{x}).$$

Сообразно с предыдущим изложением мы имеем следующие основные задачи для систем, которые в совокупности составляют *задачу Пуанкаре*:

А) *представление регулярной матрицы $Y(x)$ во всей области ее существования;*

В) *построение интегральных подстановок в точках a_j;*

С) *полная аналитическая характеристика особенностей регулярной матрицы, относящаяся не только к ветвлению, но и к однозначным особенностям.*

Дифференциальные подстановки U_j так же, как и координаты a_k особых точек, являются заданными.

Группа, образованная интегральными подстановками V_j, есть группа монодромии системы уравнений (9). Решение задачи В дает, очевидно, решение задачи построения группы монодромии заданной системы (9). Эта задача во всей ее общности впервые была рассмотрена Пуанкаре в его известном мемуаре „Sur les groupes d'equations linéaires". [1])

Пуанкаре показал, что элементы $\{V_j\}_{kl}$ суть целые функции коэффициентов $\{U_j\}_{kl}$, однако не дал явного выражения этих функций. Его исследования, как и исследования Миттаг-Леффлера, [2]) касаются скорее определения инвариантов групп линейных уравнений, коэффициенты которых суть алгебраические функции (Пуанкаре) или однозначные аналитические функции, имеющие конечное число особых точек в любой конечной части плоскости комплексной переменной (Миттаг-Леффлер). Явные аналитические выражения элементов $\{V_j\}_{kl}$, делающие очевидным характер их зависимости от коэффициентов $\{U_j\}_{kl}$ и от конфигурации особых точек, еще отсутствовали. Эти выражения, так же как аналогичные выражения для соответствующих регулярных матриц, получены в настоящей статье.

§ 2. Гиперлогарифмы

Переходя к алгорифмическому решению задачи Пуанкаре, введем систему функций

$$L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x) \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m; \ \nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

определяемую рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} L_b(a_{j_1} \mid x) &= \int_b^x \frac{dx}{x-a_{j_1}} = \log \frac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}}; \\ L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x) &= \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x-a_{j_\nu}}\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где b — фиксированная точка на конечном расстоянии, отличная от точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Эти функции будем называть *гиперлогарифмами первого рода конфигурации особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$.* [3]) Гиперлогарифм можно рассматривать как однозначную функцию на универсальной поверхности наложения $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ с точками разветвления $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$ логарифмического типа. Функции (10) будут однозначны на плоскости с непересекающимися разрезами $(a_1, \infty), (a_2, \infty), \ldots, (a_m, \infty)$. Фиксируя точку b на одном из листов и обозначая через σ длину пути (bx) на поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, соединяющего точки b и x, и через δ — минимальное расстояние от этого пути до точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, получим очевидные оценки

$$|L_b(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x)| < \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu. \tag{11}$$

---

[1]) Acta Mathematica (1884), т. 4, стр. 201; Oeuvres (1916), т. II, стр. 306.

[2]) Acta Mathematica (1891), т. 15, стр. 1.

[3]) Функции такого вида упоминались Пуанкаре (цит. соч., стр. 312).

Из рекурентных соотношений (10) мы с легкостью получаем, что внутри круга с центром в точке b и радиусом, равным наименьшему из расстояний от точки b до точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, гиперлогарифм (10) разлагается по степеням $x-b$:

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = (-1)^\nu \sum_{s=\nu}^{\infty} (x-b)^s \times$$

$$\times \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu=s} \frac{1}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)\ldots(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu)} \frac{1}{(a_{j_1}-b)^{\mu_1}(a_{j_2}-b)^{\mu_2}\ldots(a_{j_\nu}-b)^{\mu_\nu}}, \tag{12}$$

где внутренняя сумма распространяется на все целые положительные значения индексов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, удовлетворяющие указанному равенству.

Действительно, эта формула, очевидно, имеет место для $\nu = 1$, так как

$$L_b(a_{j_1} \mid x) = \lg \frac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{x-b}{a_{j_1}-b}\right)^s.$$

Предполагая, что требуемая формула имеет место для какого-нибудь значения ν, докажем, что она имеет место для $\nu+1$

$$\frac{1}{x-a_{j_{\nu+1}}} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(x-b)^{s-1}}{(a_{j_{\nu+1}}-b)^s},$$

$$\frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)}{x-a_{j_{\nu+1}}} = (-1)^{\nu+1} \sum_{s=\nu+1}^{\infty} (x-b)^{s-1} \times$$

$$\times \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_{\nu+1}=s} \frac{1}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)\ldots(\mu_1+\ldots+\mu_\nu)} \frac{1}{(a_{j_1}-b)^{\mu_1}\ldots(a_{j_{\nu+1}}-b)^{\mu_{\nu+1}}},$$

откуда после интегрирования получим требуемый результат.

Аналитическое продолжение ряда (12) совершается особенно просто. Чтобы показать это, докажем формулу, которая нами будет использована также для определения ветвлений гиперлогарифмов.

Пусть (bx) — произвольный конечный путь на $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, не проходящий через точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Отметим на этом пути несколько промежуточных точек $c_1, c_2, \ldots, c_s$. Мы можем доказать следующую формулу:

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_s \leqslant \nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \mid c_1) \cdot L_{c_1}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_2}} \mid c_2) \ldots L_{c_s}(a_{j_{\varkappa_s+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid x). \tag{13}$$

В случае только одной точки c эта формула выглядит особенно просто:

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa} \mid c) L_c(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid x). \tag{13a}$$

Мы считаем, что в двух последних равенствах множитель

$$L_{c_\tau}(a_{j_{\varkappa_\tau+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_{\tau+1}}} \mid c_{\tau+1})$$

равен единице, если $\varkappa_\tau + 1 > \varkappa_{\tau+1}$. (Аналогичное соглашение касается нескольких следующих формул.)

Формула (13) непосредственно следует из соотношений (10). Она имеет место, очевидно, при $\nu = 1$, так как в этом случае каждый член суммы в силу указанного соглашения сводится к единственному множителю, и мы имеем

$$L_b(a_{j_1} \mid c_1) + L_{c_1}(a_{j_1} \mid c_2) + \ldots + L_{c_s}(a_{j_1} \mid x) =$$

$$= \int_b^{c_1} \frac{dx}{x-a_{j_1}} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{x-a_{j_1}} + \ldots + \int_{c_s}^{x} \frac{dx}{x-a_{j_1}} = \int_b^x \frac{dx}{x-a_{j_1}} = L_b(a_{j_1} \mid x).$$

Применим теперь метод индукции. Для упрощения записи обозначим $b = c_0$ и $x = c_{s+1}$. Мы имеем

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu+1}} \mid x) = \sum_{i=0}^{s} \int_{c_i}^{c_{i+1}} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)}{x-a_{j_{\nu+1}}} dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \int_{c_i}^{c_{i+1}} \sum_{0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_i \leqslant \nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \mid c_1) \ldots L_{c_i}(a_{j_{\varkappa_i+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid x) \frac{dx}{x-a_{j_{\nu+1}}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \sum_{0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_i \leqslant \nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \mid c_1) \ldots L_{c_i}(a_{j_{\varkappa_i+1}} \ldots a_{j_{\nu+1}} \mid c_{i+1}).$$

В силу указанного соглашения относительно

$$L_{c_\tau}(a_{j_{\varkappa_\tau+1}} \ldots j_{\varkappa_{\tau+1}} \mid c_{\tau+1}),$$

можно написать последнюю сумму в виде

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_i \leqslant \varkappa_{i+1} = \ldots = \varkappa_s = \nu+1} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \mid c_1) \ldots L_{c_i}(a_{j_{\varkappa_i+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_{i+1}}} \mid c_{i+1}) \times$$

$$\times L_{c_{i+1}}(a_{j_{\varkappa_{i+1}+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_{i+2}}} \mid c_{i+2}) \ldots L_{c_s}(a_{j_{\varkappa_s+1}} \ldots a_{j_{\nu+1}} \mid x) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_s \leqslant \nu+1} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \mid c_1) \ldots L_{c_s}(a_{j_{\varkappa_s+1}} \ldots a_{j_{\nu+1}} \mid x).$$

Предположим теперь, что точки $c_1, c_2, \ldots, c_s$, которые мы отметили на пути (bx), такого рода, что

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid c_1), \ \ldots, \ L_{c_s}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$$

вычисляются при помощи ряда (12). Формула (13) будет давать тогда требуемое аналитическое продолжение.

Обозначим через b_j точку с комплексной координатой b, которая расположена на другом листе поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ и которую мы получим, обходя в положительном направлении путь (a_j), пересекающий только один раз разрез (a_i, ∞) и не пересекающий ни один из прочих разрезов. Значения гиперлогарифмов в точке b_j, представляемые интегралами

$$\begin{gathered}L_b(a_{j_1}|b_j)=P_j(a_{j_1}|b)=\int\limits_{(a_j)}\frac{dx}{x-a_{j_1}},\\ L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b_j)=P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b)=\int\limits_{(a_j)}\frac{L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x-a_{j_\nu}}dx,\end{gathered}\tag{14}$$

мы будем называть *параметрами конфигурации точек* $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

В последующем докажем рекуррентные соотношения:

$$\left.\begin{gathered}P_j(a_{j_1}|b)=\begin{cases}2\pi i, & \text{если } j=j_1,\\ 0, & \text{если } j\neq j_1,\end{cases}\quad P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b)=\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!},\\ \text{если } j_1=\ldots=j_\nu=j,\\ P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b)=\int\limits_{a_j}^{b}\left[\frac{P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}|b)}{b-a_{j_\nu}}-\frac{P_j(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|b)}{b-a_{j_1}}\right]db,\end{gathered}\right\}\tag{15}$$

которые позволяют определить параметры конфигурации независимо от гиперлогарифмов.

Обозначая через $\sigma_b^{(j)}$ длину некоторого из контуров (a_j) и через $\delta_b^{(j)}$ его наименьшее расстояние от точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, получим оценки

$$|P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|b)|\leqslant\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\sigma_b^{(j)}}{\delta_b^{(j)}}\right)^\nu,$$

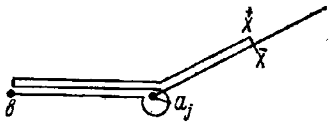


Рис. 1.

которые являются непосредственным следствием формул (11).

Из формулы (13а) следует, что значения гиперлогарифмов на положительном и отрицательном берегах разреза (a_j, ∞) связаны соотношением

$$L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\bar{x})=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}|b)\,L_b(a_{j_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}).\tag{16}$$

Действительно, чтобы доказать это равенство, достаточно взять путь $(b\bar{x})$ следующей формы: сначала, отправляясь от точки b, опишем петлю вокруг точки a_j и затем, отправляясь от точки с комплексной координатой b, опишем контур $(b\overset{+}{x})$. Беря в формуле (13а) в качестве c точку с комплексной координатой b и принимая в расчет равенство (14), находим формулу (рис. 1)

$$L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\bar{x})=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}P_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}|b)\,L_{b_j}(a_{j_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}).$$

Но

$$L_{b_j}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x})=L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\overset{+}{x}),$$

и мы получаем требуемое равенство.

Соотношения (16) делают вполне очевидным характер ветвления гиперлогарифмов в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Очень простое доказательство равенства (16) будет дано в § 4.

§ 3. Построение общего представления регулярной матрицы

Мы будем говорить, что регулярная матрица *нормирована* в точке b, если она обращается в этой точке в единичную матрицу.

Пользуясь функциями, введенными в предыдущем параграфе, докажем основную теорему о представлении регулярной нормированной матрицы рядом композиций дифференциальных подстановок.

Теорема I. *Регулярная матрица, нормированная в точке b и имеющая дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, является целой функцией дифференциальных подстановок, представляемой разложением в ряд*

$$Y_b(x)=\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|x),\tag{17}$$

коэффициенты которого суть гиперлогарифмы конфигурации точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Этот ряд сходится равномерно относительно x и представляет регулярную матрицу в каждой конечной области поверхности

$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty),$$

не содержащей внутри и на границе точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$.[1]

Доказательство. В силу оценок (11) мы заключаем, что ряд (17) представляет целую функцию подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и его сходимость равномерна относительно x в каждой конечной области поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, не содержащей внутри и на границе точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Дифференцируя этот ряд почленно и пользуясь соотношениями (10), получим

$$\frac{dY_b(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}U_jL_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}a_j|x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|x)\right]\frac{U_j}{x-a_j}=\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_b(x)U_j}{x-a_j}.$$

Отсюда видно, что ряд (17) представляет регулярную матрицу, имеющую дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Эта матрица, очевидно, нормирована в точке b.

Результат теоремы I есть по существу не что иное как результат решения системы дифференциальных уравнений (9) с помощью метода последовательных приближений. Благодаря матричному исчислению нам удалось представить этот результат окончательно в виде ряда композиций, причем этот вид является весьма наглядным и удобным для дальнейших исследований, ибо он дает алгорифмическое представление требуемых функций во всей области их существования и делает вполне очевидной природу их зависимости от переменной x, от дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и от конфигурации особых точек

$$a_1, a_2, \ldots, a_m.$$

[1] В этой статье мы будем говорить вместо „равномерно голоморфная“ и „равномерно целая“ просто „голоморфная“ и „целая“.

Из доказанной теоремы вытекают простые оценки регулярной нормированной матрицы, имеющей заданные дифференциальные подстановки. В силу формул (11) и (17) мы имеем неравенство:

$$|Y_b(x)-I| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} (|U_1|+|U_2|+\ldots+|U_m|)^\nu \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu = \tag{18}$$

$$= e^{\frac{\sigma}{\delta}(|U_1|+|U_2|+\ldots+|U_m|)} - I,$$

откуда следует

$$|Y_b(x)-I| \leqslant \frac{1}{n}\left\| e^{\frac{\sigma m n \rho}{\delta}} - 1 \right\|, \tag{19}$$

если

$$|U_j| \leqslant \|\rho\| \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Произвольная регулярная матрица, имеющая дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, очевидно, связана с рассматриваемой нормированной матрицей соотношением

$$Y(x) = \Phi\begin{pmatrix} U_1U_2\ldots U_m \\ a_1a_2\ldots a_m \end{pmatrix}\!\Big|\, x\Big) = C\Phi_b\begin{pmatrix} U_1U_2\ldots U_m \\ a_1a_2\ldots a_m \end{pmatrix}\!\Big|\, x\Big), \tag{20}$$

где

$$C = \Phi\left(\begin{matrix} U_1U_1\ldots U_m \\ a_1a_2\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, b\right).$$

Если матрица $Y(x)$ нормирована в какой-нибудь точке c, то предыдущее равенство дает

$$\Phi_c\left(\begin{matrix} U_1U_2\ldots U_m \\ a_1a_2\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right) = \Phi_c\left(\begin{matrix} U_1U_2\ldots U_m \\ a_1a_2\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, b\right)\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1U_2\ldots U_m \\ a_1a_2\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right). \tag{21}$$

Взяв $x=c$, получим

$$I = \Phi_c\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, b\right)\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c\right)$$

или

$$\Phi_c\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, b\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c\right)^{-1}, \tag{22}$$

т. е. перестановка x и b в выражении регулярной матрицы равносильна обращению этой матрицы.

Доказанная теорема доставляет удобное средство для проведения вычислений. Для вычисления значения

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right)$$

возьмем на пути (bx) промежуточные точки $c_1, c_2, \ldots, c_s$ для того, чтобы вычислять гиперлогарифмические коэффициенты разложений матриц

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c_1\right),\quad \Phi_{c_1}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c_2\right),\ \ldots,\ \Phi_{c_s}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right)$$

с помощью рядов вида (12), и положим

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c_1\right)\Phi_{c_1}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c_2\right)\ldots\Phi_{c_s}\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right).$$

По поводу обратной матрицы $Y_b^{-1}(x)$ сделаем следующее замечание. Очевидно, что она удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = -\sum_{j=1}^{m}\frac{U_jY}{x-a_j}. \tag{23}$$

Действительно,

$$\frac{dY_b^{-1}(x)}{dx} = -Y_b^{-1}(x)\frac{dY_b(x)}{dx}Y_b^{-1}(x) = -Y_b^{-1}(x)\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_b(x)U_j}{x-a_j}Y_b^{-1}(x) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\frac{U_jY_b^{-1}(x)}{x-a_j}.$$

Отсюда или из равенства (22) мы можем получить следующую теорему:

Теорема II. *Матрица $Y_b^{-1}(x)$, обратная для регулярной матрицы, нормированной в точке b, является целой функцией дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$, представляемой разложением в ряд*

$$Y_b^{-1}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b^*(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x), \tag{24}$$

коэффициенты которого определяются рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} L_b^*(a_{j_1}\,|\,x) &= -\int_b^x \frac{dx}{x-a_{j_1}}, \\ L_b^*(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x) &= -\int_b^x \frac{L_b^*(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)}{x-a_{j_1}}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Это разложение имеет такой же характер сходимости относительно x, как и ряд (17). Доказательство очевидно.

Функции $L_b^*(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)$ связаны с гиперлогарифмами $L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)$ соотношениями

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\,|\,x)\cdot L_b^*(a_{j_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x) = 0,$$

которые мы можем получить, если запишем, что произведение двух рядов, дающих матрицы $Y_b(x)$ и $Y_b^{-1}(x)$, есть единичная матрица.

Если группа, образованная дифференциальными подстановками, коммутативна, то матрица $Y_b(x)$ имеет чрезвычайно простое выражение. В этом случае правила действий с матрицами не отличаются от правил действий с числами, и, следовательно, мы имеем:

$$Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\ldots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m} = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}. \tag{26}$$

Действительно,

$$\frac{dY_b(x)}{dx}=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\cdots\left(\frac{x-a_{j-1}}{b-a_{j-1}}\right)^{U_{j-1}}\frac{U_j}{x-a_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}\times$$
$$\times\left(\frac{x-a_{j+1}}{b-a_{j+1}}\right)^{U_{j+1}}\cdots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m},$$

и в силу того факта, что матрицы U_j коммутативны, имеем:

$$\frac{dY_b(x)}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{x-a_k}{b-a_k}\right)^{U_k}\frac{U_j}{x-a_j}=\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_b(x)\,U_j}{x-a_j}.$$

В рассматриваемом случае, очевидно, можно представить матрицу $Y_b(x)$ в виде

$$Y_b(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu_1+\ldots+\mu_m=\nu}U_1^{\mu_1}\ldots U_m^{\mu_m}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(\mu_1),\ldots,(\mu_m)}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x),$$

где сумма $\sum\limits_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(\mu_1),\ldots,(\mu_m)}$ распространяется на все значения индексов

$$j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

таким образом, что в каждой строке $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}$ буква a_k повторяется μ_k раз; $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$; $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m$ — целые неотрицательные и $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_m=\nu$.

С другой стороны, из равенств (26) следует, что

$$Y_b(x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu_1+\ldots+\mu_m=\nu}U_1^{\mu_1}\ldots U_m^{\mu_m}\frac{1}{\mu_1!\ldots\mu_m!}\lg^{\mu_1}\frac{x-a_1}{b-a_1}\ldots\lg^{\mu_m}\frac{x-a_m}{b-a_m}.$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, мы видим, что для гиперлогарифмов должно иметь место тождество

$$\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(\mu_1),\ldots,(\mu_m)}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)=\frac{1}{\mu_1!\ldots\mu_m!}\lg^{\mu_1}\frac{x-a_1}{b-a_1}\ldots\lg^{\mu_m}\frac{x-a_m}{b-a_m}.\qquad(27)$$

Пример. Рассмотрим случай, когда матрицы U_j второго порядка. Возьмем эти матрицы в виде

$$U_j=\begin{Vmatrix}\sigma_j & \tau_j\\ \lambda\tau_j & \sigma_j+\mu\tau_j\end{Vmatrix}\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда они коммутативны [1]), и система дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1\sum_{j=1}^{m}\frac{\sigma_j}{x-a_j}+y_2\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda\tau_j}{x-a_j},$$
$$\frac{dy_2}{dx}=y_1\sum_{j=1}^{m}\frac{\tau_j}{x-a_j}+y_2\sum_{j=1}^{m}\frac{\sigma_j+\mu\tau_j}{x-a_j}.$$

Регулярная матрица, нормированная в точке b, есть

$$Y_b(x)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}.$$

Характеристические числа подстановок U_j суть

$$\xi_j^{(1)}=\sigma_j+\frac{1}{2}(\mu+\rho)\,\tau_j,\quad \xi_j^{(2)}=\sigma_j+\frac{1}{2}(\mu-\rho)\,\tau_j,$$
$$\rho=\sqrt{\mu^2+4\lambda}.$$

Если характеристические числа $\xi_j^{(1)}$ и $\xi_j^{(2)}$ различны, т. е. если

$$\rho\neq 0,$$

то мы имеем

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}=\frac{U_j-\xi_j^{(2)}}{\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j^{(1)}}+\frac{U_j-\xi_j^{(1)}}{\xi_j^{(2)}-\xi_j^{(1)}}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j^{(2)}}$$

или, вводя матрицу

$$\Lambda=\begin{Vmatrix}-\frac{1}{2}\mu & 1\\ \lambda & \frac{1}{2}\mu\end{Vmatrix},$$

$$U_j-\xi_j^{(2)}=\tau_j\left(\Lambda+\frac{1}{2}\rho\right),\quad U_j-\xi_j^{(1)}=\tau_j\left(\Lambda-\frac{1}{2}\rho\right),$$

получим

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}=\frac{1}{\rho}\left[\left(\Lambda+\frac{1}{2}\rho\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\sigma_j+\frac{\tau_j}{2}(\mu+\rho)}-\left(\Lambda-\frac{1}{2}\rho\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\sigma_j+\frac{\tau_j}{2}(\mu-\rho)}\right].$$

Если $\rho=0$, то матрица $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}$ равна

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\sigma_j-\frac{\tau_j\mu}{2}}\left[I+\Lambda\tau_j\lg\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)\right].$$

§ 4. Построение интегральных подстановок

Из самого определения интегральных подстановок и из условия нормированности регулярной матрицы $Y_b(x)$ в точке b следует, что интегральная подстановка V_j матрицы $Y_b(x)$ представляется значением этой матрицы $Y_b(x)$

[1]) Действительно, если

$$X=\begin{Vmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{Vmatrix},\quad Y=\begin{Vmatrix}y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{Vmatrix}$$

суть две коммутативные матрицы второго порядка, то их элементы должны удовлетворять следующим равенствам:

$$x_{12}y_{21}=y_{12}x_{21},\ x_{12}(y_{22}-y_{11})=y_{12}(x_{22}-x_{11}),$$
$$x_{21}(y_{11}-y_{22})=y_{21}(x_{11}-x_{22}),$$

откуда и следует наше утверждение.

в точке b_j поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ с комплексной координатой b, в которую мы придем, отправляясь из b и обходя особую точку a_j вдоль простой петли. Следовательно, полагая в разложении (17) $x=b_j$ и принимая во внимание соотношения (14), мы получим следующую теорему о представлении интегральной подстановки рядом композиций дифференциальных подстановок:

Теорема III. *Интегральная подстановка в точке a_j регулярной матрицы, нормированной в точке b и имеющей дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, есть целая функция дифференциальных подстановок, представляемая разложением*

$$V_j = \Omega_j\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} b \Big) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b). \tag{28}$$

В силу соотношения (20) интегральная подстановка произвольной регулярной матрицы $\Phi\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$ в точке a_j, определяемая системой дифференциальных подстановок и начальным значением в точке b:

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b\right) = C,$$

представляется в виде:

$$\Omega_j\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} = C\Omega_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b\right) C^{-1}. \tag{29}$$

Из соотношения (26) следует, что если группа, образованная дифференциальными подстановками, коммутативна, то интегральные подстановки суть

$$V_j = \Omega_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b\right) = e^{2\pi i U_j}. \tag{30}$$

Значения матрицы $Y_b(x)$ на положительном и отрицательном берегах разреза $(a_j\infty)$ связаны соотношениями:

$$Y_b(\overset{-}{x}) = V_j Y_b(\overset{+}{x}).$$

Подставляя вместо V_j и $Y_b(\overset{+}{x})$ их выражения (17) и (28) и приравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях матриц, мы докажем соотношение (16) из § 2.

Легко доказать, что матрица V_j^{-1}, обратная интегральной подстановке, есть также целая функция дифференциальных подстановок, представляемая рядом

$$V_j^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} P_j^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b), \tag{28a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_j^*(a_{j_1} \mid b) &= L_b^*(a_{j_1} \mid b_j) = -\int\limits_{(a_j)} \frac{dx}{x-a_{j_1}}, \\ P_j^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) &= L_b^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b_j) = -\int\limits_{(a_j)} \frac{L_b^*(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)}{x-a_{j_1}}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Действительно, полагая в формуле (24) $x=b_j$, мы получим

$$V_j^{-1} = Y_b^{-1}(b_j) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b^*(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b_j),$$

откуда и следует требуемое равенство. Заметим, что вообще мы имеем:

$$Y_b^{-1}(\overset{-}{x}) = Y_b^{-1}(\overset{+}{x}) V_j^{-1}.$$

§ 5. Полная аналитическая характеристика особенностей регулярных матриц

Интегральные подстановки, аналитические выражения которых мы только что построили, характеризуют только ветвления регулярных матриц в особых точках.

Переходя к непосредственному изучению особенностей регулярных матриц, мы предположим сначала, что дифференциальные подстановки U_1, $U_2, \ldots, U_m$ находятся в окрестности нулевых матриц.

Тогда соответствующие интегральные подстановки $V_1, V_2, \ldots, V_m$ принадлежат некоторой окрестности системы единичных матриц и матрицы

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Lg} V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^\nu \tag{32}$$

являются голоморфными функциями подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в указанной окрестности:

$$W_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b), \tag{33}$$

где коэффициенты, в соответствии с результатами общей теории функций от матриц [см. ст. I, § 17], определяются формулами:

$$Q_j(a_{j_1} \mid b) = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 = j, \\ 0, & \text{если } j_1 \neq j, \end{cases}$$

$$Q_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{0 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} \mid b) \ldots P_j(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid b). \tag{34}$$

Основная теорема, относящаяся к полной аналитической характеристике особенностей регулярной нормированной матрицы, может быть сформулирована следующим образом:

Теорема IV. *Если подстановки U_j находятся в окрестности нулевых матриц, то регулярная матрица $Y_b(x)$, нормированная в точке b и имеющая в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в качестве дифференциальных подстановок U_j, может быть представлена в виде:*

$$\begin{aligned} Y_b(x) &= \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j} \tilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \\ &= \Phi_b\left(\begin{matrix} W_j \\ a_j \end{matrix} \middle| x\right) \tilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right), \end{aligned} \tag{35}$$

где матрицы

$$\tilde Y_b^{(j)}(x) = \tilde\Phi_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\Big| x\right) \tag{36}$$

и $\tilde Y_b^{(j)-1}(x)$ *голоморфны по отношению к* x *в точке* $x=a_j$.

Не существует других подстановок W_j, *обладающих указанным свойством, отличных от суммы ряда* (32).

Доказательство. Матрица W_j должна быть решением уравнения

$$e^{2\pi i W_j} = \Omega_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\Big| b\right) = V_j,$$

ибо $\tilde Y_b^{(j)}(x)$ по условию голоморфна в точке a_j и ветвления функции правой части равенства (35) проистекают от матрицы $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$, интегральная подстановка которой в точке a_j есть $e^{2\pi i W_j}$.

Докажем теперь, что матрица W_j, определяемая формулой (32), обладает всеми требуемыми свойствами.

С этой целью рассмотрим матрицу

$$\tilde Y_b^{(j)}(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix}W_j\\ a_j\end{matrix}\Big| x\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\Big| x\right). \tag{37}$$

Она, очевидно, есть голоморфная функция подстановок $U_1, U_2, \dots, U_m$ в некоторой окрестности системы нулевых матриц и допускает общее представление относительно x вида

$$\tilde Y_b^{(j)}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x), \tag{38}$$

где функции $\tilde L_b^{(j)}$ должны быть однозначными в окрестности точки a_j.

Составим систему дифференциальных уравнений для $\tilde Y_b^{(j)}(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tilde Y_b^{(j)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j} Y_b(x)\right) =\\ &= \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}\frac{d}{dx}Y_b(x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y_b(x) =\\ &= \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}\frac{Y_b(x)U_h}{x-a_h} - \frac{W_j}{x-a_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}Y_b(x) =\\ &= \sum_{h=1}^{m}\frac{\tilde Y_b^{(j)}(x)U_h}{x-a_h} - \frac{W_j\tilde Y_b^{(j)}(x)}{x-a_j}.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\tilde Y_b^{(j)}(x) = I + \int_b^x\left\{\sum_{h=1}^{m}\frac{\tilde Y_b^{(j)}(x)U_h}{x-a_h} - \frac{W_j\tilde Y_b^{(j)}(x)}{x-a_j}\right\}dx.$$

Подставляя ряд (38) в эту систему и принимая во внимание разложения (33), мы заключаем, что функции

$$\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)$$

определяются рекуррентными соотношениями

$$\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\,|\,x) = \int_b^x\left\{\frac{1}{x-a_{j_1}} - \frac{Q_j(a_{j_1}\,|\,b)}{x-a_j}\right\}dx,$$

$$\begin{aligned}\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x) = \int_b^x\Bigg\{&\frac{\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\,|\,x)}{x-a_{j_\nu}} -\\ &- \frac{1}{x-a_j}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}Q_j(a_{j_1}\dots a_{j_\varkappa}\,|\,b)\,\tilde L_b^{(j)}(a_{j_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)\Bigg\}dx.\end{aligned} \tag{39}$$

В силу этих формул все функции

$$\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)$$

оказываются голоморфными относительно x в точке a_j. Действительно, первая из формул (39) дает

$$\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\,|\,x)=\begin{cases}\lg\dfrac{x-a_{j_1}}{b-a_{j_1}}, & \text{если } j_1\ne j,\\ 0, & \text{если } j_1=j.\end{cases}$$

Предположим, что все функции

$$\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\mu}\,|\,x)$$

для $\mu=1, 2, \dots, \nu-1$ голоморфны в точке $x=a_j$ и возьмем функцию

$$\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x).$$

Тогда функция под знаком интеграла также голоморфна в точке $x=a_j$ или имеет полюс в этой точке, причем порядок этого полюса не превышает единицу. Но $\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)$ должна быть однозначной и, следовательно, она голоморфна в точке a_j.

Матрица $\tilde Y_b^{(j)}(x)$ допускает локальное разложение в ряд вида

$$\tilde Y_b^{(j)}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} B_j^{(p)}(x-a_j)^p, \tag{40}$$

где

$$B_j^{(0)} = I + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\int_{(a_j)}\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)(x-a_j)^{-1}dx,$$

$$B_j^{(p)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,2,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\int_{(a_j)}\tilde L_b^{(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)(x-a_j)^{-p-1}dx$$
$$(p>0).$$

Заметим еще, что матрица $\tilde Y_b^{(j)-1}(x)$, очевидно, допускает разложение в ряд

$$\tilde Y_b^{(j)-1}(x) = I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\tilde L_b^{*(j)}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x). \tag{41}$$

Подставляя в равенство

$$\widetilde{Y}_b^{(j)-1}(x)\cdot\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)=I$$

выражения (38) и (41), мы найдем рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения (41):

$$\widetilde{L}_b^{*(j)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\mid x)=-\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}\widetilde{L}_b^{*(j)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\mid x)\,L_b^{(j)}(a_{j_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}\mid x).$$

Отсюда мы заключаем, что все эти коэффициенты суть голоморфные функции от x в точке $x=a_j$. Следовательно, матрица $\widetilde{Y}_b^{(j)-1}(x)$ есть также голоморфная функция в этой точке. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Мы будем доказывать теперь, что если подстановка W_j' удовлетворяет условиям теоремы, то она совпадает с суммой ряда (32).

Пусть

$$(\omega-\omega_1)^{\rho_1},\ \ldots,\ (\omega-\omega_s)^{\rho_s}$$

суть элементарные делители интегральной подстановки V_j. Мы доказали [ст. I, § 11], что если матрица V_j близка к единичной матрице, то все возможные значения $\mathrm{Lg}\,V_j$ представляются формулой

$$\mathrm{Lg}\,V_j=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j-I)^{\nu}+2\pi i S[r_1J_{\rho_1}^0,\ \ldots,\ r_sJ_{\rho_s}^0]\,S^{-1},$$

где J_ρ^0 — обозначение единичной матрицы порядка ρ, S — матрица, приводящая V_j к каноническому виду, и $r_1, r_2, \ldots, r_s$ — какие-нибудь целые числа.

Следовательно, мы имеем в силу уравнения $e^{2\pi i W_j'}=V_j$

$$W_j'=W_j+S[r_1J_{\rho_1}^0,\ \ldots,\ r_sJ_{\rho_s}^0]\,S^{-1}.$$

Легко видеть, что матрицы W_j и W_j' коммутативны; чтобы показать это, достаточно доказать, что матрицы W_j и $S[r_1J_{\rho_1}^0,\ \ldots,\ r_sJ_{\rho_s}^0]\,S^{-1}$ коммутативны. Но первая из этих матриц имеет вид

$$W_j=\frac{1}{2\pi i}SE\,[J_{\rho_1}(\lg\omega_1),\ \ldots,\ J_{\rho_s}(\lg\omega_s)]\,E^{-1}S^{-1},$$

где через E обозначена матрица

$$E=\left[\mathfrak{E}_{\rho_1}\left(\frac{1}{\omega_1},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{\rho_1-1}(\rho_1-2)!}{\omega_1^{\rho_1-1}}\right),\ \ldots,\ \mathfrak{E}_{\rho_s}\left(\frac{1}{\omega_s},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{\rho_s-1}(\rho_s-2)!}{\omega_s^{\rho_s-1}}\right)\right]$$

и где $\lg\omega$ — главное значение логарифма, откуда непосредственно и следует наше утверждение.

С другой стороны, по условиям теоремы

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}=Y_b(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1};\qquad\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j'}=Y_b(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)'}(x)^{-1},$$

матрицы W_j и W_j' коммутативны, и мы имеем, следовательно,

$$\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j'}=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j'-W_j}=\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{S[r_1J_{\rho_1}^0,\ \ldots\ r_sJ_{\rho_s}^0]\,S^{-1}}=$$

$$=S\left[\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{r_1}J_{\rho_1}^0,\ \ldots,\ \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{r_s}J_{\rho_s}^0\right]S^{-1}=\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)'}(x)^{-1}.$$

Правая часть этой формулы, так же как обратная матрица, по условию голоморфна в точке a_j. Следовательно,

$$r_1=r_2=\ \ldots\ =r_s=0,$$

и мы имеем $W_j'=W_j$.

Матрицы $W_1, W_2, \ldots, W_m$, введенные в предыдущей теореме и дающие полную аналитическую характеристику регулярной нормированной матрицы (17) в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$, оказываются, таким образом, вполне определенными с помощью условий теоремы. Мы будем называть их *показательными подстановками* рассматриваемой нормированной матрицы в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Теорему IV можно обобщить на произвольные регулярные матрицы.

Заметим сначала, что в выражении $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)$ вместо $\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}$ мы можем взять $(x-a_j)^{W_j}$, объединяя $(b-a_j)^{-W_j}$ с матрицей $\widetilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)$:

$$\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=(b-a_j)^{-W_j}\,\widetilde{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right),$$

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right),\qquad (42)$$

так что матрица

$$\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=\overline{Y}_b^{(j)}(x),$$

так же как обратная матрица, голоморфна относительно x в точке a_j.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема V. *Если дифференциальные подстановки регулярной матрицы*

$$\Phi\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right),$$

определяемой начальным условием:

$$\Phi\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,b\right)=C\qquad(D(C)\neq 0),$$

находятся в окрестности нулевых матриц, то существует одна и только одна система показательных подстановок $W_1, W_2, \ldots, W_m$, обладающая тем свойством, что имеет место представление

$$\Phi\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right),$$

где матрицы

$$\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)\quad\text{и}\quad\overline{\Phi}^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)^{-1}$$

остаются голоморфными в точке $x=a_j$.

Доказательство. Рассматриваемая регулярная матрица связана с нормированной регулярной матрицей соотношением

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = C\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right).$$

Следовательно, если $W_j(b)$ суть показательные подстановки указанной нормированной матрицы, то мы имеем

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = C(x-a_j)^{W_j(b)}\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a_j)^{CW_j(b)C^{-1}}C\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right),$$

ибо

$$C(x-a_j)^{W_j(b)}C^{-1} = (x-a_j)^{CW_j(b)C^{-1}}.$$

Следовательно,

$$W_j = CW_j(b)C^{-1}$$

есть единственная система подстановок, удовлетворяющая условиям теоремы.

Матрица

$$E = \theta\left(\begin{matrix} W \\ a \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a)^W,$$

введенная выше, является наиболее простой из возможных регулярных матриц. Она обладает единственной особой точкой на конечном расстоянии и удовлетворяет системе

$$\frac{dE}{dx} = \frac{EW}{x-a}. \tag{43}$$

Эту матрицу мы будем называть *элементарной метаканонической матрицей*, так как она существенно не отличается от матрицы, образованной каноническими решениями системы (43), которые обычно рассматривают в теории систем линейных уравнений.

Действительно, пусть

$$W = S[J_{\rho_1}(\sigma_1), \dots, J_{\rho_s}(\sigma_s)]S^{-1}$$

канонический вид подстановки W.

В теории функций от матриц мы доказали, что

$$\theta\left(\begin{matrix} W \\ a \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a)^W = S[G_{\rho_1}((x-a)^{\sigma_1}, \dots, (x-a)^{\sigma_1}\lg^{\rho_1-1}(x-a)), \dots \\ \dots, G_{\rho_s}((x-a)^{\sigma_s}, \dots, (x-a)^{\sigma_s}\lg^{\rho_s-1}(x-a))]S^{-1} \tag{44}$$

[ст. I, § 8].

Следовательно, если мы умножим $\theta\left(\begin{matrix} W \\ a \end{matrix}\middle| x\right)$ на S^{-1} слева, то будем иметь обычную каноническую матрицу.

Конечное представление (44) делает вполне очевидным природу особенности элементарной метаканонической матрицы в точке a как с точки зрения ветвления, так и с точки зрения полярной особенности.

Перейдем теперь к построению регулярной матрицы, не содержащей излишнего параметра b. Хотя нормирование в особой точке a_j, вообще говоря, невозможно, мы можем построить регулярную матрицу, голоморфная компонента которой в точке a_j нормирована в этой точке.

Действительно, так как система дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \dots, U_m$ принадлежит окрестности системы нулевых матриц, то существует одна и только одна система матриц

$$H_1, H_2, \dots, H_m,$$

обладающих тем свойством, что система дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m}\frac{YU_j}{x-a_j}$$

допускает интегральную матрицу вида

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \theta\left(\begin{matrix} H_j \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right)\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right), \tag{45}$$

где голоморфная компонента $\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ представима в окрестности точки a_j рядом

$$\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = I + \sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\right)(x-a_j)^p, \tag{46}$$

причем матрицы $A_j^{(p)}$ не зависят от x.

Для того чтобы это доказать, достаточно положить

$$\left.\begin{aligned}
\theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) &= \bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \\
&= \bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right)\times \\
&\times\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a_j)^{H_j}\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right), \\
H_j &= \bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}W_j\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right), \\
\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) &= \bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}\bar{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right),
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где b — произвольная точка нормирования и W_j — показательные подстановки матрицы $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$.

Очевидно, что регулярная матрица, удовлетворяющая указанным условиям, единственна, ибо любая другая интегральная матрица той же системы дифференциальных уравнений, которая представляется в виде

$$\Phi\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = C\theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right),$$

имеет показательные подстановки

$$W_j = CH_jC^{-1}$$

и ее голоморфная компонента

$$\Phi^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = C\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$$

необходимо обращается в C при $x = a_j$.

Матрицу (45) будем называть метаканонической матрицей относительно точки a_j и дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$.[1])

Матрицы H_j суть метаканонические показательные подстановки.

Явные выражения метаканонических матриц, свободные от излишнего параметра b, который входит в формулы (17) и (35), даются следующей теоремой:

Теорема VI. *Метаканонические показательные подстановки суть дифференциальные подстановки*

$$H_j = U_j. \tag{48}$$

Голоморфная компонента метаканонической матрицы, так же как и коэффициенты ее разложения в ряд Тэйлора, являются голоморфными функциями дифференциальных подстановок в окрестности системы нулевых матриц

$$\left.\begin{aligned} \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix}U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right) &= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} \overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x), \\ A_j^{(p)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}), \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &K_j^{(p)}(a_{j_1}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j = j_1, \\ -\dfrac{1}{p(a_{j_1} - a_j)^p}, & \text{если} \quad j \neq j_1, \end{cases} \\ &K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = \\ &\qquad = -\frac{1}{p}\left[\sum_{q=1}^{p-1} \frac{1}{(a_{j_\nu} - a_j)^{p-q}} K_j^{(q)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}) + \delta_{j_1}^{j} K_j^{(p)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})\right], \\ &\text{если} \quad j_\nu \neq j, \quad \sum_{q=1}^{p-1} = 0, \quad \text{если} \quad p = 1, \quad \delta_{j_1}^{j} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j_1 \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad j_1 = j, \end{cases} \\ &K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = \frac{1}{p}\left[K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}) - \delta_{j_1}^{j} K_j^{(p)}(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})\right], \text{ если } j_\nu = j, \\ &\overline{N}_j(a_{j_1} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{\delta_{j_1}^{j}}{x - a_j}\right] dx, \\ &\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \frac{\delta_{j_1}^{j} \overline{N}_j(a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)}{x - a_j}\right] dx. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Доказательство. Из формул (47) непосредственно следует, что метаканонические показательные подстановки, голоморфные компоненты метаканонической матрицы и коэффициенты их разложений в ряд Тэйлора

[1]) Ниже мы докажем, что она не отличается существенно от канонической интегральной матрицы, обычно рассматриваемой в аналитической теории дифференциальных уравнений (см. Фукс, Crelle Journ., т. 66 и 68).

суть голоморфные функции дифференциальных подстановок. Следовательно, остается лишь установить, что коэффициенты этих разложений имеют указанную выше форму.

С этой целью заметим, что голоморфная компонента

$$\overline{Z}_j = \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix}U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

есть интегральная матрица системы

$$\frac{d\overline{Z}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\overline{Z}_j U_h}{x - a_h} - \frac{H_j \overline{Z}_j}{x - a_j}. \tag{51}$$

Это уравнение совершенно аналогично уравнению для $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$. Начальное условие имеет вид

$$\bar{\theta}_j(a_j) = I.$$

Заменяя в этой системе подстановку H_j разложением вида

$$H_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} J_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu})$$

и подставляя в систему (51) ряды вида (49), мы получим рекуррентные соотношения

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \mid x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{J_j(a_{j_1})}{x - a_j}\right] dx,$$

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) =$$

$$= \int_{a_j}^{x} \left[\frac{\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{1}{x - a_j} J_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa}) \overline{N}_j(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid x)\right] dx.$$

В силу формулы

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right) = \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m\end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1} \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

коэффициенты $\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ голоморфны в точке $x = a_j$, и мы имеем разложения:

$$\overline{N}_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu})(x - a_j)^p. \tag{52}$$

Выражение $\overline{N}_j(a_{j_1} \mid x)$ дает

$$J_j(a_{j_1}) = \delta_{j_1}^{j}.$$

В других выражениях коэффициент при полярном члене функции под знаком интеграла должен быть равен нулю, что дает

$$J_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

если мы примем во внимание тот факт, что $N_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_s} \mid a_j) = 0$.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &H_j = U_j,\\ &\overline{N}_j(a_{j_1}|x) = \int\limits_{a_j}^{x}\left[\frac{1}{x-a_{j_1}} - \frac{\delta^j_{j_1}}{x-a_j}\right]dx,\\ &\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|x) = \int\limits_{a_j}^{x}\left[\frac{\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x-a_{j_\nu}} - \delta^j_{j_1}\frac{N_j(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}|x)}{x-a_j}\right]dx. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

В соответствии с этими результатами

$$N_j(a_{j_1}|x) = \begin{cases} 0, & \text{если } j_1 = j,\\ \lg\dfrac{x-a_{j_1}}{a_j-a_{j_1}} = -\sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{x-a_j}{a_{j_1}-a_j}\right)^p, & \text{если } j_1 \neq j, \end{cases}$$

откуда

$$K_j^{(p)}(a_{j_1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } j_1 = j,\\ -\dfrac{1}{p(a_{j_1}-a_j)^p}, & \text{если } j_1 \neq j. \end{cases}$$

Подставляя в формулы (53) разложения вида (52), мы можем получить равенства:

$$\sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu})(x-a_j)^p =$$

$$= \int\limits_{a_j}^{x}\left[-\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x-a_j)^p}{(a_{j_\nu}-a_j)^{p+1}}\sum_{p=1}^{\infty}K_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}})(x-a_j)^p - \right.$$

$$\left. -\delta^j_{j_1}\sum_{p=0}^{\infty}K_j^{(p+1)}(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})(x-a_j)^p\right]dx = -\int\limits_{a_j}^{x}\left\{\delta^j_{j_1}K_j^{(1)}(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{p}\frac{K_j^{(q)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}})}{(a_{j_\nu}-a_j)^{p-q+1}} + \delta^j_{j_1}K_j^{(p+1)}(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})\right](x-a_j)^p\right\}dx,$$

если $j \neq j_\nu$,

$$\sum_{p=1}^{\infty} K_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu})(x-a_j)^p =$$

$$= \int\limits_{a_j}^{x}\sum_{p=0}^{\infty}\left[K_j^{(p+1)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}) - \delta^j_{j_1}K_j^{(p+1)}(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu})\right](x-a_j)^p\,dx,$$

если $j = j_\nu$. Эти равенства дают соотношения для коэффициентов

$$K_j^{(p)}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_\nu}).$$

Локальным разложением

$$\theta_j = (x-a_j)^{U_j}\left\{I + \sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^{(p)}\right\}$$

метаканонической матрицы является точно то разложение, которое мы получим, если будем решать систему

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\frac{YU_h}{x-a_h}$$

с помощью метода Фукса. Действительно, подставляя в эту систему ряд вида

$$Y = (x-a_j)^{H_j}\sum_{p=0}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p,\quad A_j^{(0)} = I,$$

имеем

$$\frac{(x-a_j)^{H_j}}{x-a_j}H_j\sum_{p=0}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p + (x-a_j)^{H_j}\cdot\sum_{p=1}^{\infty}pA_j^{(p)}(x-a_j)^{p-1} =$$

$$= (x-a_j)^{H_j}\sum_{p=0}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p\cdot\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h}{x-a_h},$$

что дает

$$\frac{H_j-U_j}{x-a_j} + \sum_{p=1}^{\infty}\left[H_jA_j^{(p)} + pA_j^{(p)} - A_j^{(p)}U_j\right](x-a_j)^{p-1} =$$

$$= -\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}(x-a_j)^{p-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a_j)$, мы получаем рекуррентные соотношения:

$$H_j = U_j,$$

$$U_jA_j^{(p)} + pA_j^{(p)} - A_j^{(p)}U_j = -\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}\cdot U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}\qquad (p = 1, 2, \ldots). \qquad (54)$$

Записывая соотношения (50) в виде

$$\delta^j_{j_1}K_j^{(p)}(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}) + pK_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}) =$$

$$= -\sum_{q=0}^{p-1}K_j^{(q)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}})\frac{1}{(a_{j_\nu}-a_j)^{p-q}},\quad \text{если } j\neq j_\nu,$$

$$\delta^j_{j_1}K_j^{(p)}(a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}) + pK_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}) - K_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}) = 0,\ \text{если } j = j_\nu,$$

где

$$K_j^{(0)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}) = 0,$$

мы видим, что если поставить в рекуррентные соотношения (54) ряды композиций

$$A_j^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}K_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}),$$

то для коэффициентов

$$K_j^{(p)}(a_{j_1} \dots a_{j_\nu})$$

получатся рекуррентные соотношения, совпадающие с соотношениями (50), что и требовалось доказать.

Интегральные и показательные подстановки метаканонической матрицы (45) в точке a_j суть $e^{2\pi i U_j}$ и U_j.

Нормированные матрицы, их интегральные и показательные подстановки, очевидно, связаны с метаканоническими матрицами соотношениями:

$$\Phi_b\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x\Bigg) = \theta_j\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} b\Bigg)^{-1} \theta_j\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x\Bigg) =$$

$$= \overline{\theta}_j(b)^{-1}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j}\overline{\theta}_j(x),$$

$$V_j(b) = \theta_j(b)^{-1} e^{2\pi i U_j}\theta_j(b) =$$

$$= \overline{\theta}_j(b)^{-1}(b-a_j)^{-U_j} e^{2\pi i U_j}(b-a_j)^{U_j}\overline{\theta}_j(b) = \overline{\theta}_j(b)^{-1} e^{2\pi i U_j}\overline{\theta}_j(b), \quad (55)$$

$$W_j(b) = \Xi_j\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} b\Bigg) = \theta_j(b)^{-1} U_j \theta_j(b) =$$

$$= \overline{\theta}_j(b)^{-1}(b-a_j)^{-U_j} U_j (b-a_j)^{U_j}\overline{\theta}_j(b) = \overline{\theta}_j(b)^{-1} U_j \overline{\theta}_j(b). \quad (56)$$

Для произвольной регулярной матрицы $\Phi\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x\Bigg)$ и ее интегральных и показательных подстановок V_j и W_j мы имеем аналогичные соотношения:

$$\Phi\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x\Bigg) = C\theta_j(x), \qquad V_j = Ce^{2\pi i U_j}C^{-1}, \qquad W_j = CU_jC^{-1},$$

откуда вытекает следующая теорема:

Теорема VII. *Характеристические числа интегральных и показательных подстановок в точке a_j произвольной регулярной матрицы суть характеристические числа соответственно матриц $e^{2\pi i U_j}$ и U_j.*

Равенства (55) и (56) позволяют получить рекуррентные соотношения для $P_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b)$ и $Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b)$.

Действительно, пользуясь этими равенствами, мы можем построить дифференциальные уравнения для $V_j(b)$ и $W_j(b)$, рассматриваемых как функции от b:

$$\frac{d}{db}V_j(b) = \frac{d}{db}\theta_j(b)^{-1} e^{2\pi i U_j}\theta_j(b) + \theta_j(b)^{-1} e^{2\pi i U_j}\frac{d}{db}\theta_j(b) =$$

$$= -\theta_j(b)^{-1}\sum_{h=1}^{m}\frac{\theta_j(b)U_h}{b-a_h}\theta_j(b)^{-1}e^{2\pi i U_j}\theta_j(b) + \theta_j(b)^{-1}e^{2\pi i U_j}\sum_{h=1}^{m}\frac{\theta_j(b)U_h}{b-a_h},$$

или

$$\frac{d}{db}V_j(b) = \sum_{h=1}^{m}\frac{V_j(b)U_h - U_hV_j(b)}{b-a_h}. \quad (57)$$

Аналогичным образом

$$\frac{d}{db}W_j(b) = \sum_{h=1}^{m}\frac{W_j(b)U_h - U_hW_j(b)}{b-a_h}. \quad (58)$$

Те же равенства дают начальные условия для $V_j(b)$ и $W_j(b)$:

$$V_j(a_j) = e^{2\pi i U_j}, \quad W_j(a_j) = U_j.$$

Подставляя в уравнения (57) и (58) ряды композиций (28) и (33) и приравнивая коэффициенты, мы найдем уже известным путем требуемые формулы:

$$P_j(a_{j_1}|b) = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } j_1 = j, \\ 0, & \text{если } j_1 \neq j, \end{cases}$$

$$P_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b) = \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}, \quad \text{если } j_1 = j_2 = \dots = j_\nu = j,$$

$$P_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b) = \int_{a_j}^{b}\left(\frac{P_j(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}|b)}{b-a_{j_\nu}} - \frac{P_j(a_{j_2} \dots a_{j_\nu}|b)}{b-a_{j_1}}\right)db,$$

$$Q_j(a_{j_1}|b) = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1 = j, \\ 0, & \text{если } j_1 \neq j, \end{cases}$$

$$Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b) = \int_{a_j}^{b}\left(\frac{Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}|b)}{b-a_{j_\nu}} - \frac{Q_j(a_{j_2} \dots a_{j_\nu}|b)}{b-a_{j_1}}\right)db.$$

Мы дадим здесь еще рекуррентные формулы для $P_j^*(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b)$, которые позволяют определить $P_j^*(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b)$ независимо от

$$L_b^*(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|x).$$

Действительно, мы имеем

$$\frac{d}{db}V_j(b)^{-1} = -V_j(b)^{-1}\frac{d}{db}V_j(b)V_j(b)^{-1}.$$

Подставляя в это равенство вместо $\frac{d}{db}V_j(b)$ ее выражение (57), мы видим, что $V_j(b)^{-1}$ и $V_j(b)$ являются интегральными матрицами одной и той же системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{db}V_j(b)^{-1} = \sum_{h=1}^{m}\frac{V_j(b)^{-1}U_h - U_hV_j(b)^{-1}}{b-a_h},$$

но в случае $V_j(b)^{-1}$ начальные условия имеют вид

$$V_j(a_j)^{-1} = e^{-2\pi i U_j}.$$

Отсюда мы видим, что

$$P_j^*(a_{j_1}|b) = \begin{cases} -2\pi i, & \text{если } j_1 = j, \\ 0, & \text{если } j_1 \neq j, \end{cases}$$

$$P_j^*(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b) = \frac{(-2\pi i)^\nu}{\nu!}, \quad \text{если } j_1 = j_2 = \dots = j_\nu = j,$$

$$P_j^*(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}|b) = \int_{a_j}^{b}\left(\frac{P_j(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}|b)}{a-a_{j_\nu}} - \frac{P_j(a_{j_2} \dots a_{j_\nu}|b)}{b-a_{j_1}}\right)db.$$

§ 6. Представления при любых дифференциальных подстановках

Представления метаканонических матриц и показательных подстановок, которые мы только что получили, пригодны лишь при условии, что дифференциальные подстановки находятся в окрестности системы нулевых матриц. Теперь мы получим общие представления указанных подстановок.

Рассмотрим сначала показательные подстановки регулярной нормированной матрицы:

$$W_j = \Xi\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| b\right) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \dots j_\nu}^{(1 \dots m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} Q_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} | b).$$

Этот ряд сходится в случае, когда подстановки U_h находятся в указанной окрестности.

Для того чтобы найти его аналитическое продолжение, пригодное для всех дифференциальных подстановок, применим к ряду

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^{\nu-1}$$

формулу Лагранжа—Сильвестра [ст. I, § 11]

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \frac{(V_j - \eta_1) \dots (V_j - \eta_{k-1})(V_j - \eta_{k+1}) \dots (V_j - \eta_n)}{(\eta_k - \eta_1) \dots (\eta_k - \eta_{k-1})(\eta_k - \eta_{k+1}) \dots (\eta_k - \eta_n)} \log \eta_k, \tag{59}$$

где η_k — характеристические числа матрицы V_j и

$$\log \eta_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\eta_k - 1)^\nu.$$

Обозначая характеристические числа матрицы U_j через $\xi_1, \dots, \xi_n$, получим

$$\eta_k = e^{2\pi i \xi_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и, следовательно,

$$W_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(V_j - e^{2\pi i \xi_1}\right) \dots \left(V_j - e^{2\pi i \xi_{k-1}}\right) \cdot \left(V_j - e^{2\pi i \xi_{k+1}}\right) \dots \left(V_j - e^{2\pi i \xi_n}\right)}{\left(e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_1}\right) \dots \left(e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_{k-1}}\right) \cdot \left(e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_{k+1}}\right) \dots \left(e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_n}\right)} \xi_k. \tag{60}$$

В случае кратных характеристических чисел мы должны в этой формуле перейти к пределу. В частности, при $n = 2$ мы имеем

$$W_j = \frac{e^{2\pi i \xi_2} \xi_1 - e^{2\pi i \xi_1} \xi_2}{e^{2\pi i \xi_2} - e^{2\pi i \xi_1}} + \frac{\xi_2 - \xi_1}{e^{2\pi i \xi_2} - e^{2\pi i \xi_1}} V_j.$$

Формула (60), очевидно, дает вполне определенное значение показательной подстановки W_j для всех дифференциальных подстановок U_h, за исключением тех случаев, когда некоторые разности характеристических

чисел ξ_k являются целыми числами, отличными от нуля. Она дает решение поставленной задачи для W_j.

Для того чтобы найти представление подстановки W_j в виде частного двух целых рядов (один из которых является рядом следов и другой — рядом следов и композиций), мы будем искать такую инвариантную целую функцию матрицы U_j, что произведение этой функции на W_j будет целой функцией от элементов подстановок U_h. В данном случае можно легко указать такую функцию.

Рассмотрим числовую функцию подстановки U_j:

$$\Delta(U_j) = e^{-\pi i (n-1) \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k} \prod_{k<l} \frac{e^{2\pi i \xi_k} - e^{2\pi i \xi_l}}{2\pi i (\xi_k - \xi_l)}.$$

Очевидно, мы имеем

$$\Delta(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu(U_j), \tag{61}$$

где

$$\delta_0(U_j) = 1,$$

$$\delta_\nu(U_j) = \sum_{\varkappa_0 + \varkappa_1 + \dots + \varkappa_{\frac{n(n-1)}{2}} = \nu} \frac{1}{\varkappa_0!} [-\pi i (n-1)(\xi_1 + \dots + \xi_n)]^{\varkappa_0} \times$$

$$\times P_{\varkappa_1}(\xi_1, \xi_2) \dots P_{\varkappa_{\frac{n(n-1)}{2}}}(\xi_{n-1}, \xi_n)$$

и

$$P_\varkappa(\xi, \eta) = \frac{(2\pi i)^\varkappa}{(\varkappa + 1)!} (\xi^\varkappa + \xi^{\varkappa-1}\eta + \dots + \xi\eta^{\varkappa-1} + \eta^\varkappa).$$

Выражения $\delta_\nu(U_j)$ образованы симметрическими однородными полиномами степени ν относительно характеристических чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Следовательно, эти выражения суть однородные полиномы степени ν от элементов $\{U_j\}_{kl}$ подстановки U_j.

Таким образом, функция $\Delta(U_j)$ есть целая функция от элементов подстановки U_j, разложение Маклорена которой дается рядом (61).

В частности, при $n = 2$ мы имеем

$$\Delta(U_j) = e^{-\pi i (\xi_1 + \xi_2)} \frac{e^{2\pi i \xi_1} - e^{2\pi i \xi_2}}{2\pi i (\xi_1 - \xi_2)} = \frac{\sin \pi (\xi_1 - \xi_2)}{\pi (\xi_1 - \xi_2)},$$

откуда следует

$$\Delta(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)!} \pi^{2\nu} (\xi_1 - \xi_2)^{2\nu},$$

или

$$\Delta(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)!} \pi^{2\nu} [(\{U_j\}_{11} + \{U_j\}_{22})^2 - 4(\{U_j\}_{11}\{U_j\}_{22} - \{U_j\}_{12}\{U_j\}_{21})]^\nu.$$

Рассмотрим функцию $W_j \Delta(U_j)$. Согласно формуле (60) она представляется в виде полинома степени $n - 1$ относительно V_j, коэффициентами которого являются симметрические целые функции характеристических чисел подстановки U_j, т. е. целые функции инвариантов этих подстановок. Например, при $n=2$ мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{2\pi i\xi_2}\xi_1-e^{2\pi i\xi_1}\xi_2}{\xi_2-\xi_1}e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}+e^{-\pi i(\xi_1+\xi_2)}V_j\right].$$

Отсюда следует, что элементы матрицы $W_j\Delta(U_j)$ суть целые функции от элементов подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Принимая во внимание разложение (61), заключаем, что разложение в ряд Маклорена этой функции есть

$$W_j\Delta(U_j)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\mid b). \tag{62}$$

Таким образом, мы получаем следующую теорему:

Теорема VIII. *Показательные подстановки W_j суть мероморфные функции дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$, имеющие общие представления*

$$W_j=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\nu}\sum\limits_{j_1,\ldots,j_\varkappa}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\mid b)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j)}. \tag{63}$$

Особенностями этих функций являются те значения подстановок U_j, характеристические числа которых разнятся на целое число, отличное от нуля.

Матрица

$$(x-a_j)^{W_j}=(x-a_j)^{\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}V_j}$$

оказывается также мероморфной функцией дифференциальных подстановок, ибо в силу представления

$$(x-a_j)^{W_j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(V_j-e^{2\pi i\xi_1}\right)\ldots\left(V_j-e^{2\pi i\xi_{k-1}}\right)\cdot\left(V_j-e^{2\pi i\xi_{k+1}}\right)\ldots\left(V_j-e^{2\pi i\xi_n}\right)}{\left(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_1}\right)\ldots\left(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_{k-1}}\right)\cdot\left(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_{k+1}}\right)\ldots\left(e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_n}\right)}(x-a_j)^{\xi_k},$$

мы видим, что $\Delta(U_j)(x-a_j)^{W_j}$ есть целая функция элементов дифференциальных подстановок. Она представляет собой также целую функцию от элементов подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$.

Из этого факта следует, что функции матриц и следов

$$\Delta(U_j)\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=\Delta(U_j)(x-a_j)^{-W_j}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

и

$$\Delta(U_j)\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1}=\Delta(U_j)\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}$$

являются также целыми относительно дифференциальных подстановок, ибо функции

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)\quad\text{и}\quad\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1}$$

целые.

Известно (§ 5), что

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| a_j\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right).$$

Следовательно, матрица

$$\Delta(U_j)\,\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

есть целая функция и метаканоническая матрица является мероморфной функцией дифференциальных подстановок, общее представление которой таково:

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta(U_j)}(x-a_i)^{U_j}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\mid x). \tag{64}$$

Аналогичным образом мы докажем, что матрица, обратная метаканонической, является также мероморфной функцией и имеет общее представление:

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\Delta(U_j)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_j)\overline{N_j^*}(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\mid x)(x-a_j)^{-U_j}, \tag{65}$$

где $\overline{N_j^*}(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa}\mid x)$ — коэффициенты разложения функции $\overline{\theta}_j(x)^{-1}$ в ряд композиций.

Мы имеем, следовательно,

Теорему IX. *Показательная подстановка W_j и метаканоническая матрица*

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right),$$

так же как обратная матрица, суть мероморфные функции дифференциальных подстановок, представимые рядами (63), (64) *и* (65), *и особенности этих функций отвечают таким значениям подстановки U_j, для которых разности характеристических чисел являются целыми числами, отличными от нуля.*

§ 7. Задача Пуанкаре для бесконечно удаленной точки

Предыдущие результаты дают полное решение задачи Пуанкаре для особых точек a_j на конечном расстоянии. Остается рассмотреть ту же задачу для бесконечно удаленной точки, т. е. исследовать природу особенности регулярной матрицы в этой точке.

Пусть

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

регулярная матрица, нормированная в точке b. Если проведены разрезы $(a_1, \infty), \dots, (a_m, \infty)$ и точки $a_1, \dots, a_m$ перенумерованы в надлежащем порядке (рис. 2), то интегральная подстановка, которую испытывает рассматриваемая матрица, когда переменная x делает положительный обход вокруг бесконечно удаленной точки или отрицательный обход вокруг всех особых точек на конечном расстоянии, представляется в виде

$$V_\infty = (V_1 V_2 \dots V_m)^{-1} = V_m^{-1} \dots V_2^{-1} V_1^{-1}, \tag{66}$$

где V_j — интегральная подстановка в точке a_j.

Очевидно, что интегральная подстановка в бесконечно удаленной точке регулярной нормированной матрицы есть целая функция дифференциальных подстановок

$$V_\infty = \Omega_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} P_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, b), \tag{67}$$

где коэффициенты $P_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, b)$ суть полиномы от коэффициентов

$$P_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, b),$$

которые мы можем легко вычислить с помощью формулы (66).

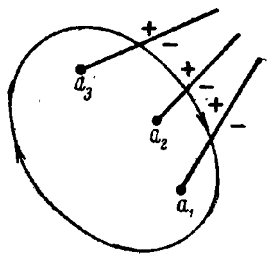


Рис. 2.

Рассмотрим подстановку

$$W_\infty = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Lg}\, V_\infty = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_\infty - I)^\nu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} Q_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, b), \tag{68}$$

где коэффициенты $Q_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, b)$ суть полиномы от коэффициентов $P_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, b)$. Очевидно, что подстановка W_∞ есть голоморфная функция подстановок $U_1, \dots, U_m$ в окрестности нулевых подстановок.

Используя методы, вполне аналогичные тем, которые были применены в случае особой точки на конечном расстоянии, мы легко докажем, что подстановка W_∞ есть единственная подстановка, удовлетворяющая тому условию, что имеет место представление

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty}\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right), \tag{69}$$

где матрицы

$$\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right) \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)^{-1}$$

голоморфны относительно x в бесконечно удаленной точке.

Подстановку W_∞ будем называть *показательной подстановкой* и матрицу

$$\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)$$

— *голоморфной компонентой интегральной матрицы, нормированной в точке b.*

Можно легко ввести показательную подстановку и голоморфную компоненту в бесконечно удаленной точке для произвольной регулярной матрицы.

Затем мы получим, как и выше, что существует единственная регулярная матрица, имеющая дифференциальные подстановки $U_1, \dots, U_m$ в точках $a_1, \dots, a_m$, голоморфная компонента которой нормирована в точке ∞. Эта матрица представима в виде

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{H_\infty}\overline{\theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right), \tag{70}$$

где матрица

$$\overline{\theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)$$

имеет разложение вида

$$\overline{\theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right) = I + \sum_{p=1}^{\infty} A_\infty^{(p)}\begin{pmatrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{pmatrix}\frac{1}{x^p} \tag{71}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки.

Очевидно, имеют место формулы

$$H_\infty = \overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, \infty\right)^{-1} W_\infty(b)\,\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, \infty\right), \tag{72}$$

$$\overline{\theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right) = \overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, \infty\right)^{-1}\overline{\Phi}_b^{(\infty)}\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right). \tag{73}$$

Мы имеем еще

$$\overline{Z}_\infty = \overline{\theta}_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right) = x^{H_\infty}\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m\\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right),$$

откуда следует, что голоморфная компонента $\overline{Z}_\infty$ метаканонической матрицы в бесконечно удаленной точке удовлетворяет системе

$$\frac{d\overline{Z}_\infty}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\frac{\overline{Z}_\infty U_h}{x - a_h} + \frac{H_\infty \overline{Z}_\infty}{x}. \tag{74}$$

Кроме того, она удовлетворяет начальному условию

$$\overline{Z}_\infty(\infty) = I.$$

Подставляя в систему (74) ряды

$$H_\infty = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} J_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}), \tag{75}$$

$$\overline{Z}_\infty = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} N_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \,|\, x), \tag{76}$$

мы получим соотношения

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1} \mid x) = \int_\infty^x \left[\frac{1}{x - a_{j_1}} + \frac{J_\infty(a_{j_1})}{x} \right] dx,$$

$$\overline{N}_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x) =$$
$$= \int_\infty^x \left[\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} + \frac{1}{x} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} J_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\varkappa}) \overline{N}_\infty(a_{j_{\varkappa+1}} \dots a_{j_\nu} \mid x) \right] dx.$$

Коэффициенты $\overline{N}_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$ должны быть голоморфными в окрестности точки ∞. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы выражения под знаками интеграла имели разложения вида

$$\sum_{p=2}^{\infty} C_p x^{-p},$$

что последовательно дает

$$J_\infty(a_{j_1}) = -1 \qquad (j_1 = 1, 2, \dots, m)$$
$$J_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu}) = 0, \qquad \text{если } \nu \geqslant 2.$$

Отсюда следует, что

$$H_\infty = -(U_1 + \dots + U_m) \tag{77}$$

и что функции $\overline{N}_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \overline{N}_\infty(a_{j_1} \mid x) &= \int_\infty^x \left[\frac{1}{x - a_{j_1}} - \frac{1}{x} \right] dx, \\ \overline{N}_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x) &= \int_\infty^x \left[\frac{\overline{N}_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \frac{\overline{N}_\infty(a_{j_2} \dots a_{j_\nu} \mid x)}{x} \right] dx. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Таким образом, метаканоническая матрица в бесконечно удаленной точке оказывается определенной как голоморфная функция дифференциальных подстановок в окрестности нулевых подстановок

$$\theta_\infty \begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x = \left(\frac{1}{x} \right)^{-(U_1 + \dots + U_m)} \overline{\theta}_\infty \begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x, \tag{79}$$

Интегральная и показательная подстановки этой матрицы в бесконечно удаленной точке суть

$$V_\infty = e^{-2\pi i (U_1 + \dots + U_m)} \quad \text{и} \quad H_\infty = -(U_1 + \dots + U_m).$$

Произвольная регулярная матрица, имеющая дифференциальные подстановки $U_1, \dots, U_m$,

$$\Phi \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = C \theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, x \right),$$

имеет интегральную и показательную подстановки в бесконечно удаленной точке

$$V_\infty = C e^{-2\pi i (U_1 + \dots + U_m)} C^{-1}, \qquad W_\infty = -C (U_1 + \dots + U_m) C^{-1}. \tag{80}$$

Отсюда следует, что характеристические числа этих подстановок являются, соответственно, характеристическими числами подстановок

$$e^{-2\pi i (U_1 + \dots + U_m)} \quad \text{и} \quad -(U_1 + \dots + U_m).$$

В частности, регулярная нормированная матрица и ее интегральная и покавательная подстановки в бесконечно удаленной точке имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) &= \theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right)^{-1} \cdot \theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = \\ &= \overline{\theta}_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right)^{-1} \left(\frac{b}{x} \right)^{-(U_1 + \dots + U_m)} \overline{\theta}_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, x \right), \\ \Omega_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right) &= \theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right)^{-1} e^{-2\pi i (U_1 + \dots + U_m)} \theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right) = \\ &= \overline{\theta}_\infty(b)^{-1} e^{-2\pi i (U_1 + \dots + U_m)} \overline{\theta}_\infty(b), \\ \Xi_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right) &= \\ &= -\theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right)^{-1} (U_1 + \dots + U_m) \theta_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| \, b \right) = \\ &= -\overline{\theta}_\infty(b)^{-1} (U_1 + \dots + U_m) \overline{\theta}_\infty(b). \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Отсюда следует, что подстановки $V_\infty(b)$ и $W_\infty(b)$, если их рассматривать как функции точки нормирования b, суть решения системы

$$\frac{dY}{db} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j - U_j Y}{b - a_j} \tag{82}$$

с начальными условиями

$$Y(\infty) = V_\infty(\infty) = e^{-2\pi i (U_1 + \dots + U_m)}$$

и

$$Y(\infty) = W_\infty(\infty) = -(U_1 + U_2 + \dots + U_m).$$

Подставляя в систему (82) ряды (67) и (68), приравнивая коэффициенты и используя начальные условия, мы найдем рекуррентные соотношения для $P_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b)$ и $Q_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b)$:

$$P_\infty(a_{j_1} \mid b) = -2\pi i; \quad P_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b) =$$
$$= \frac{(-2\pi i)^\nu}{\nu!} + \int_\infty^b \left[\frac{P_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid b)}{b - a_{j_\nu}} - \frac{P_\infty(a_{j_2} \dots a_{j_\nu} \mid b)}{b - a_{j_1}} \right] db; \tag{83}$$

$$Q_\infty(a_{j_1} \mid b) = -1; \quad Q_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid b) =$$
$$= \int_\infty^b \left[\frac{Q_\infty(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid b)}{b - a_{j_\nu}} - \frac{Q_\infty(a_{j_2} \dots a_{j_\nu} \mid b)}{b - a_{j_1}} \right] db. \tag{84}$$

Полученные разложения для метаканонической матрицы и для показательной подстановки в бесконечно удаленной точке регулярной нормированной матрицы справедливы лишь в случае, когда дифференциальные подстановки находятся в окрестности нулевых подстановок. Замечая, что характеристические числа подстановки V_∞ суть

$$\chi_k(V_\infty) = e^{-2\pi i \chi_k(U_1+\ldots+U_m)} = e^{2\pi i \chi_k(U_\infty)},$$

где

$$U_\infty = -(U_1 + \ldots + U_m),$$

и пользуясь формулой Лагранжа — Сильвестра, как и в случае особой точки на конечном расстоянии, мы приходим к заключению, что эти матрицы суть мероморфные функции дифференциальных подстановок, особенностями которых являются значения подстановки U_∞ с целыми и отличными от нуля разностями характеристических чисел.

Общие представления рассматриваемых матриц в виде частного двух целых функций таковы:

$$W_\infty = \Xi_\infty\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b\right) = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{\varkappa=1}^{\nu}\sum\limits_{j_1,\ldots,j_\varkappa}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_\infty)\, Q_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa} \mid b)}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu(U_\infty)}, \tag{85}$$

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{U_\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\sum\limits_{\varkappa=0}^{\nu}\sum\limits_{j_1,\ldots,j_\varkappa}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_\infty)\overline{N}_\infty(a_{j_1}\ldots a_{j_\varkappa} \mid b)}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_\infty)}, \tag{86}$$

где

$$\Delta(U_\infty) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_\infty)$$

числовая функция подстановки U_∞, определяемая формулой (61) предыдущего параграфа.

§ 8. Примеры

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} YU_j g_j(x), \tag{87}$$

где U_j — матрицы, не зависящие от x, а $g_i(x)$ — произвольные аналитические функции от x.

Предположим, что $g_i(x)$ голоморфны в точке $x = b$. Очевидно, что интегральная матрица системы (87), равная I при $x = b$, есть целая функция матриц $U_1, \ldots, U_m$, представимая рядом композиций

$$Y_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\varphi_{j_1\ldots j_\nu}(x), \tag{88}$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\varphi_{j_1}(x) = \int_b^x g_{j_1}(x)\,dx; \quad \varphi_{j_1\ldots j_\nu}(x) = \int_b^x \varphi_{j_1\ldots j_{\nu-1}}(x)\, g_{j_\nu}(x)\,dx. \tag{89}$$

В случае системы

$$\frac{dY}{dx} = Y[U_1 g_1(x) + U_2 g_2(x)], \tag{90}$$

где $m = 2$ и порядок матриц $n = 2$, мы можем применить к ряду (88) результаты общей теории аналитических функций от двух переменных матриц второго порядка [ст. I, § 20].

Обозначим через $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ и $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$ характеристические числа подстановок U_1 и U_2 и положим

$$U_1 - \xi_1^{(1)} = \overline{U}_1, \qquad U_2 - \xi_2^{(1)} = \overline{U}_2. \tag{91}$$

Характеристические числа двух новых подстановок $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ равны соответственно 0, $\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \xi_1$ и 0, $\xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} = \xi_2$, и мы имеем

$$\sigma(\overline{U}_1) = \xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)} = \xi_1; \qquad \sigma(\overline{U}_2) = \xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)} = \xi_2.$$

Положим еще

$$\sigma(\overline{U}_1\overline{U}_2) = \rho \tag{92}$$

и докажем следующую теорему:

Теорема X. *Интегральная матрица системы* (90), *обращающаяся в I в точке $x = b$, может быть представлена в виде*

$$Y_b(x) = e^{\int_b^x \left[\xi_1^{(1)} g_1(x) + \xi_2^{(1)} g_2(x)\right]dx}\,[I + \overline{U}_1\varphi_{11}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid x) + \overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{12}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid x) + \overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{21}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid x) + \overline{U}_2\varphi_{22}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid x)], \tag{93}$$

где коэффициенты $\varphi_{kl}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid x)$ $(k, l = 1, 2)$ *суть целые функции параметра* ρ:

$$\varphi_{kl}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^\nu\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2 \mid x), \tag{94}$$

причем функции $\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2 \mid x)$ *определяются рекуррентными соотношениями*:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{11}^{(0)}(\xi_1\xi_2 \mid x) &= \frac{1}{\xi_1}\left[e^{\xi_1\int_b^x g_1(x)\,dx} - 1\right], \\ \varphi_{12}^{(0)}(\xi_1\xi_2 \mid x) &= \frac{1}{\xi_1}e^{\xi_2\int_b^x g_2(x)\,dx}\int_b^x g_2(x)\cdot e^{\int_b^x [\xi_1 g_1(x) - \xi_2 g_2(x)]\,dx}\,dx - \\ &\quad - \frac{1}{\xi_1\xi_2}\left[e^{\xi_2\int_b^x g_2(x)\,dx} - 1\right], \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{21}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)=\frac{1}{\xi_2}e^{\xi_1\int\limits_b^x g_1(x)\,dx}\int\limits_b^x g_1(x)\,e^{\int\limits_b^x [\xi_2 g_2(x)-\xi_1 g_1(x)]\,dx}\,dx-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{\xi_1\xi_2}\left[e^{\xi_1\int\limits_b^x g_1(x)\,dx}-1\right],\\
&\varphi_{22}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)=\frac{1}{\xi_2}\left[e^{\xi_2\int\limits_b^x g_2(x)\,dx}-1\right],\\
&\varphi_{11}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)=e^{\xi_1\int\limits_b^x g_1(x)\,dx}\int\limits_b^x g_1(x)\,\varphi_{12}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\,e^{-\xi_1\int\limits_b^x g_1(x)\,dx}\,dx,\\
&\varphi_{12}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)=e^{\xi_2\int\limits_b^x g_2(x)\,dx}\int\limits_b^x g_2(x)\,\varphi_{11}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\,e^{-\xi_2\int\limits_b^x g_2(x)\,dx}\,dx,\\
&\varphi_{21}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)=e^{\xi_1\int\limits_b^x g_1(x)\,dx}\int\limits_b^x g_1(x)\,\varphi_{22}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\,e^{-\xi_1\int\limits_b^x g_1(x)\,dx}\,dx,\\
&\varphi_{22}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)=e^{\xi_1\int\limits_b^x g_2(x)\,dx}\int\limits_b^x g_2(x)\,\varphi_{21}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\,e^{-\xi_2\int\limits_b^x g_2(x)\,dx}\,dx.
\end{aligned}\right\}\qquad(95)$$

Представление (93) *имеет место во всей области существования функций* $g_1(x)$ *и* $g_2(x)$ *по отношению к* x *и для всех систем подстановок* U_1 *и* U_2.

Доказательство. Обозначим через $\overline{Y}_b(x)$ интегральную матрицу системы

$$\frac{d\overline{Y}_b(x)}{dx}=\overline{Y}_b(x)\,[\overline{U}_1 g_1(x)+\overline{U}_2 g_2(x)],\qquad(96)$$

удовлетворяющую начальному условию $\overline{Y}_b(b)=I$.

Очевидно, мы имеем

$$Y_b(x)=e^{\int\limits_b^x\left[\xi_1^{(1)}g_1(x)+\xi_2^{(1)}g_2(x)\right]dx}\,\overline{Y}_b(x).$$

В соответствии с результатами общей теории функций от двух переменных матриц второго порядка мы должны иметь представление

$$\begin{aligned}\overline{Y}_b(x)=I+\overline{U}_{11}\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\\
+\overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\overline{U}_2\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x),\end{aligned}\qquad(97)$$

где $\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)$ — целые функции параметров ρ, ξ_1, ξ_2.

Для того чтобы определить эти функции, мы подставим выражение (97) в систему (96). Заметим сначала, что если A и B суть матрицы второго

порядка и $D(A)=0$, то мы имеем очевидные соотношения [гл. I, § 19]:

$$A^{\nu}=A(\sigma(A))^{\nu-1},\quad ABA=A\sigma(AB).$$

Пользуясь этими равенствами, можно записать результат подстановки в систему в виде

$$\begin{aligned}&\overline{U}_1\frac{d\varphi_{11}}{dx}+\overline{U}_1\overline{U}_2\frac{d\varphi_{12}}{dx}+\overline{U}_2\overline{U}_1\frac{d\varphi_{21}}{dx}+\overline{U}_2\frac{d\varphi_{22}}{dx}=\\
&\quad=[\overline{U}_1+\overline{U}_1\xi_1\varphi_{11}+\overline{U}_1\rho\varphi_{12}+\overline{U}_2\overline{U}_1\xi_1\varphi_{21}+\overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{22}]\,g_1(x)+\\
&\qquad+[\overline{U}_2+\overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{11}+\overline{U}_1\overline{U}_2\xi_2\varphi_{12}+\overline{U}_2\rho\varphi_{21}+\overline{U}_2\xi_2\varphi_{22}]\,g_2(x).\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при подстановках $\overline{U}_1$, $\overline{U}_1\overline{U}_2$, $\overline{U}_2\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, мы будем иметь систему:

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi_{11}}{dx}=(1+\xi_1\varphi_{11}+\rho\varphi_{12})\,g_1(x); &&\frac{d\varphi_{12}}{dx}=(\varphi_{11}+\xi_2\varphi_{12})\,g_2(x),\\
&\frac{d\varphi_{21}}{dx}=(\xi_1\varphi_{21}+\varphi_{22})\,g_1(x); &&\frac{d\varphi_{22}}{dx}=(1+\rho\varphi_{21}+\xi_2\varphi_{22})\,g_2(x).\end{aligned}\qquad(98)$$

Начальные условия для функций $\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)$

$$\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)=0.$$

Эта система может быть удовлетворена целым рядом

$$\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{\nu}\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x),\qquad(99)$$

где $\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)$ — целые функции параметров ξ_1, ξ_2. Подставляя ряды (99) в систему (98), мы получим соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi_{11}^{(0)}}{dx}=(1+\xi_1\varphi_{11}^{(0)})\,g_1(x); &&\frac{d\varphi_{12}^{(0)}}{dx}=(\varphi_{11}^{(0)}+\xi_2\varphi_{12}^{(0)})\,g_2(x),\\
&\frac{d\varphi_{21}^{(0)}}{dx}=(\xi_1\varphi_{21}^{(0)}+\varphi_{22}^{(0)})\,g_1(x); &&\frac{d\varphi_{22}}{dx}=(1+\xi_2\varphi_{22}^{(0)})\,g_2(x),\\
&\frac{d\varphi_{11}^{(\nu)}}{dx}=(\xi_1\varphi_{11}^{(\nu)}+\varphi_{12}^{(\nu-1)})\,g_1(x); &&\frac{d\varphi_{12}^{(\nu)}}{dx}=(\varphi_{11}^{(\nu)}+\xi_2\varphi_{12}^{(\nu)})\,g_2(x),\\
&\frac{d\varphi_{21}^{(\nu)}}{dx}=(\xi_1\varphi_{21}^{(\nu)}+\varphi_{22}^{(\nu)})\,g_1(x); &&\frac{d\varphi_{22}^{(\nu)}}{dx}=(\varphi_{21}^{(\nu-1)}+\xi_2\varphi_{22}^{(\nu)})\,g_2(x).\end{aligned}\right\}\qquad(100)$$

Замечая, что все функции $\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)$ должны обращаться в нуль при $x=b$ и интегрируя систему (100), получим в точности формулы (95). Теорема, таким образом, доказана.

Очевидно, что представление (93) интегральной матрицы системы (90) гораздо проще и нагляднее, чем представление (88). Ряд композиций подстановок U_1 и U_2 здесь заменен степенным рядом от параметра ρ:

$$\begin{aligned}Y_b(x)=e^{\int\limits_b^x\left[\xi_1^{(1)}g_1(x)+\xi_2^{(1)}g_2(x)\right]dx}\Big[I+\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{\nu}(\overline{U}_1\varphi_{11}^{(\nu)}+\\
+\overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{12}^{(\nu)}+\overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{21}^{(\nu)}+\overline{U}_2\varphi_{22})\Big].\end{aligned}\qquad(101)$$

При $\rho=0$ мы имеем достаточно широкий класс систем вида (90), интегрирование которых совершается с помощью квадратур.

Но

$$\rho=\sigma(\overline{U}_1\overline{U}_2)=\sigma[(U_1-\xi_1^{(1)})(U_2-\xi_2^{(1)})]=$$
$$=\sigma(U_1U_2)-\xi_2^{(1)}\sigma(U_1)-\xi_1^{(1)}\sigma(U_2)+2\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\xi_1^{(1)}&=\frac{1}{2}\left[\sigma(U_1)+\varepsilon_1\sqrt{\sigma(U_1)^2-4D(U_1)}\right],\\ \xi_2^{(1)}&=\frac{1}{2}\left[\sigma(U_2)+\varepsilon_2\sqrt{\sigma(U_2)^2-4D(U_2)}\right],\end{aligned}\right\}\quad(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2=\pm1)\tag{102}$$

где мы можем брать ε_1 и ε_2 равными $+1$ или -1 по произволу. Следовательно, мы имеем:

$$\rho=\sigma(U_1U_2)-\frac{1}{2}\sigma(U_1)\sigma(U_2)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{[\sigma(U_1)^2-4D(U_1)]\cdot[\sigma(U_2)^2-4D(U_2)]}.$$

Таким образом, мы имеем теорему:

Теорема XI. *Если подстановки U_1 и U_2 удовлетворяют одному из условий*

$$2\sigma(U_1U_2)-\sigma(U_1)\sigma(U_2)+\varepsilon\sqrt{[\sigma(U_1)^2-4D(U_1)][\sigma(U_2)^2-4D(U_2)]}=0,\tag{103}$$

где $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=-1$, *то интегральная матрица системы*

$$\frac{dY}{dx}=Y[U_1g_1(x)+U_2g_2(x)],$$

обращающаяся в единичную матрицу при $x=b$, представляется в виде:

$$Y_b(x)=e^{\int_b^x[\xi_1^{(1)}g_1(x)+\xi_2^{(1)}g_2(x)]\,dx}\times$$
$$\times[I+\overline{U}_1\varphi_{11}^{(0)}+\overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{12}^{(0)}+\overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{21}^{(0)}+\overline{U}_2\varphi_{22}^{(0)}].\tag{104}$$

Применим полученный результат к системе Гаусса

$$\frac{dY}{dx}=Y\left(\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{x-a_2}\right).\tag{105}$$

Теорема XII. *Интегральная нормированная матрица системы* (105) *и ее интегральные и показательные подстановки представляются в виде*

$$Y_b(x)=\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1&U_2\\a_1&a_2\end{matrix}\middle|\,x\right)=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{\xi_1^{(1)}}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{\xi_2^{(1)}}[I+\overline{U}_1\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+$$
$$+\overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\overline{U}_2\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)],\tag{106}$$

$$V_j=\Omega_j\left(\begin{matrix}U_1&U_2\\a_1&a_2\end{matrix}\middle|\,b\right)=e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}[I+\overline{U}_1\omega_{j11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+$$
$$+\overline{U}_1\overline{U}_2\omega_{j12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_2\overline{U}_1\omega_{j21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_2\omega_{j22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)],\tag{107}$$

$$W_j=\Xi_j\left(\begin{matrix}U_1&U_2\\a_1&a_2\end{matrix}\middle|\,b\right)=\xi^{(1)}+\overline{U}_1\sigma_{j11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+$$
$$+\overline{U}_1\overline{U}_2\sigma_{j12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_2\overline{U}_1\sigma_{j21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_2\sigma_{j22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b),\tag{108}$$

где

$$\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{\nu}\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x),\tag{109}$$

$$\omega_{jkl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{\nu}\omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b),\quad(j,\ k,\ l=1,\ 2)\tag{110}$$

$$\sigma_{jkl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{\nu}\sigma_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)\tag{111}$$

суть целые функции параметра ρ, *и коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями*

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{jj}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)&=\frac{1}{\xi_j}\left[\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j}-1\right];\\ \varphi_{jh}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)&=\frac{1}{\xi_j}(x-a_h)^{\xi_h}\int_b^x\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j}\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}}-\\ &\qquad-\frac{1}{\xi_j\xi_h}\left[\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{\xi_h}-1\right];\\ \varphi_{jj}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)&=(x-a_j)^{\xi_j}\int_b^x\varphi_{jh}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}};\\ \varphi_{jh}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)&=(x-a_h)^{\xi_h}\int_b^x\varphi_{jj}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}};\end{aligned}\right\}\tag{112}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_{jjj}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=\frac{1}{\xi_j}(e^{2\pi i\xi_j}-1);\\ \omega_{jjh}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=\frac{1}{\xi_j}(b-a_h)^{\xi_h}\int_{(a_j)}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\xi_j}\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}};\\ \omega_{jhj}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=\frac{e^{2\pi i\xi_j}}{\xi_h}(b-a_j)^{\xi_j}\int_{(a_j)}\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{\xi_k}\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}}-\frac{1}{\xi_j\xi_h}(e^{2\pi i\xi_j}-1);\\ \omega_{jhh}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=0;\\ \omega_{jjj}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=e^{2\pi i\xi_j}(b-a_j)^{\xi_j}\int_{(a_j)}\varphi_{jh}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}};\\ \omega_{jjh}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=(b-a_h)^{\xi_h}\int_{(a_j)}\varphi_{jj}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}};\\ \omega_{jhj}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=e^{2\pi i\xi_j}(b-a_j)^{\xi_j}\int_{(a_j)}\varphi_{hh}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\frac{dx}{(x-a_j)^{\xi_j+1}};\\ \omega_{jhh}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)&=(b-a_h)^{\xi_h}\int_{(a_j)}\varphi_{hj}^{(\nu-1)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)\frac{dx}{(x-a_h)^{\xi_h+1}};\quad(j,\ h=1,2;\ j\neq h)\end{aligned}\right\}\tag{113}$$

$$\sigma_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=\frac{\xi_j}{e^{2\pi i\xi_j}-1}\,\omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b).\tag{114}$$

Доказательство. Все формулы, относящиеся к интегральной матрице $Y_b(x)$ и интегральным подстановкам V_j, являются непосредственными следствиями теоремы X и остается рассмотреть только те формулы, которые относятся к показательным подстановкам W_j. С этой целью положим

$$\overline{V}_j = I + \overline{U}_1 \omega_{j11} + \overline{U}_1 \overline{U}_2 \omega_{j12} + \overline{U}_2 \overline{U}_1 \omega_{j21} + \overline{U}_2 \omega_{j22},$$

так что

$$V_j = e^{2\pi i \xi_j^{(1)}} \overline{V}_j.$$

Замечая, что подстановки U_j и W_j подобны, и применяя к функции

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j = \xi_j^{(1)} + \frac{1}{2\pi i} \lg \overline{V}_j = \xi_j^{(1)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu} (\overline{V}_j - I)^{\nu}$$

формулу Лагранжа — Сильвестра, мы находим

$$W_j = \xi_j^{(1)} + \frac{\xi_j}{e^{2\pi i \xi_j} - 1} (\overline{V}_j - I), \tag{115}$$

что дает формулы (108) и (114).

Доказанная теорема дает представления функций

$$\Phi_b\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} x \Bigg), \quad \Omega_j\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} b \Bigg) \quad \text{и} \quad \Xi_j\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} b \Bigg)$$

в виде степенных рядов от параметра ρ с коэффициентами, зависящими от характеристических чисел подстановок $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$. Сразу же выясняется роль параметра ρ. В силу очевидного для матриц второго порядка A и B тождества

$$D(A+B) = D(A) + D(B) + \sigma(A)\sigma(B) - \sigma(AB)$$

и в силу формул

$$D(\overline{U}_1) = D(\overline{U}_2) = 0$$

мы имеем

$$\sigma(\overline{U}_1 \overline{U}_2) = \sigma(\overline{U}_1)\sigma(\overline{U}_2) - D(\overline{U}_1 + \overline{U}_2),$$

или

$$\rho = \xi_1 \xi_2 - D(\overline{U}_\infty), \tag{116}$$

где

$$\overline{U}_\infty = -(\overline{U}_1 + \overline{U}_2).$$

Следовательно, параметр ρ существенно зависит от определения дифференциальной подстановки в бесконечно удаленной точке.

Заметим еще, что выражения (114) делают совершенно очевидным характер мероморфности функций (111).

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x - a_j}, \tag{117}$$

где U_j представляются в виде

$$U_j = \mathfrak{A}_1 u_{11}^{(j)} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 u_{12}^{(j)} + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 u_{21}^{(j)} + \mathfrak{A}_2 u_{22}^{(j)}, \tag{118}$$

причем $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — матрицы второго порядка с нулевыми определителями и $u_{kl}^{(j)}$ — числовые коэффициенты.

Положим

$$\sigma(\mathfrak{A}_1) = \lambda_1, \quad \sigma(\mathfrak{A}_2) = \lambda_2, \quad \sigma(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = \mu. \tag{119}$$

Интегральную нормированную матрицу системы (117) можно представить в виде

$$Y_b(x) = I + \mathfrak{A}_1 \varphi_{11} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \varphi_{12} + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 \varphi_{21} + \mathfrak{A}_2 \varphi_{22}, \tag{120}$$

где коэффициенты φ_{kl} обращаются в нуль при $x = b$.

Мы получим эту формулу, если подставим в ряд

$$Y_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$$

вместо U_j их выражения (118).

Для того чтобы найти коэффициенты φ_{kl}, подставим (118) и (120) в систему (117).

Легко, как и в предыдущем примере, получить формулу:

$$\begin{aligned} Y_b(x) U_j = \mathfrak{A}_1 & \left[u_{11}^{(j)} + \varphi_{11}(\lambda_1 u_{11}^{(j)} + \mu u_{21}^{(j)}) + \varphi_{12}\mu(u_{11}^{(j)} + \lambda_2 u_{21}^{(j)})\right] + \\ & + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \left[u_{12}^{(j)} + \varphi_{11}(\lambda_1 u_{12}^{(j)} + u_{22}^{(j)}) + \varphi_{12}(\mu u_{12}^{(j)} + \lambda_2 u_{22}^{(j)})\right] + \\ & + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1 \left[u_{21}^{(j)} + \varphi_{21}(\lambda_1 u_{11}^{(j)} + \mu u_{21}^{(j)}) + \varphi_{22}(u_{11}^{(j)} + \lambda_2 u_{21}^{(j)})\right] + \\ & + \mathfrak{A}_2 \left[u_{22}^{(j)} + \varphi_{21}\mu(\lambda_1 u_{12}^{(j)} + u_{22}^{(j)}) + \varphi_{22}(\mu u_{12}^{(j)} + \lambda_2 u_{22}^{(j)})\right]. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{u_{kl}^{(j)}}{x - a_j} = g_{kl} \qquad (k, l = 1, 2),$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_{11}}{dx} &= \varphi_{11}(\lambda_1 g_{11} + \mu g_{21}) + \varphi_{12}\mu(g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{11}; \\ \frac{d\varphi_{12}}{dx} &= \varphi_{11}(\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + \varphi_{12}(\mu g_{12} + \lambda_2 g_{22}) + g_{12}; \\ \frac{d\varphi_{21}}{dx} &= \varphi_{21}(\lambda_1 g_{11} + \mu g_{21}) + \varphi_{22}(g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{21}; \\ \frac{d\varphi_{22}}{dx} &= \varphi_{21}\mu(\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + \varphi_{22}(\mu g_{12} + \lambda_2 g_{22}) + g_{22}; \end{aligned} \right\} \tag{121}$$

где φ_{kl} — целые функции относительно μ,

$$\varphi_{kl} = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_{kl}^{(s)} \mu^s. \tag{122}$$

Подставляя ряды (122) в систему (121), получим

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d\varphi_{11}^{(0)}}{dx} = \varphi_{11}^{(0)} \lambda_1 g_{11} + g_{11}; \quad \frac{d\varphi_{12}^{(0)}}{dx} = \varphi_{12}^{(0)} \lambda_2 g_{22} + \varphi_{11}^{(0)}(\lambda_1 g_{12} + g_{22}) + g_{12}; \\ &\frac{d\varphi_{21}^{(0)}}{dx} = \varphi_{21}^{(0)} \lambda_1 g_{11} + \varphi_{22}^{(0)}(g_{11} + \lambda_2 g_{21}) + g_{21}; \quad \frac{d\varphi_{22}^{(0)}}{dx} = \varphi_{22}^{(0)} \lambda_2 g_{22} + g_{22}; \\ &\frac{d\varphi_{11}^{(s)}}{dx} = \varphi_{11}^{(s)} \lambda_1 g_{11} + \varphi_{11}^{(s-1)} g_{21} + \varphi_{12}^{(s-1)}(g_{11} + \lambda_2 g_{21}); \end{aligned} \right\} \tag{123}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi_{12}^{(s)}}{dx} &= \varphi_{11}^{(s)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+\varphi_{12}^{(s-1)}g_{12}+\varphi_{12}^{(s)}\lambda_2 g_{22};\\
\frac{d\varphi_{21}^{(s)}}{dx} &= \varphi_{21}^{(s)}\lambda_1 g_{11}+\varphi_{21}^{(s-1)}g_{21}+\varphi_{22}^{(s)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21});\\
\frac{d\varphi_{22}^{(s)}}{dx} &= \varphi_{21}^{(s-1)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+\varphi_{22}^{(s-1)}g_{22}+\varphi_{22}^{(s)}\lambda_2 g_{22}.
\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Следовательно, если мы обозначим $\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{u_{kl}^{(j)}}$ через p_{kl}, то будем иметь рекуррентные соотношения для $\varphi_{kl}^{(s)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{11}^{(0)} = p_{11}^{\lambda_1}\int_b^x g_{11}p_{11}^{-\lambda_1}dx; \quad \varphi_{12}^{(0)} = p_{22}^{\lambda_2}\int_b^x [\varphi_{11}^{(0)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+g_{12}]\,p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\varphi_{21}^{(0)} = p_{11}^{\lambda_1}\int_b^x [\varphi_{22}^{(0)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})+g_{21}]\,p_{11}^{-\lambda_1}dx; \quad \varphi_{22}^{(0)} = p_{22}^{\lambda_2}\int_b^x g_{22}p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\varphi_{11}^{(s)} = p_{11}^{\lambda_1}\int_b^x [\varphi_{11}^{(s-1)}g_{21}+\varphi_{12}^{(s-1)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})]\,p_{11}^{-\lambda_1}dx;\\
&\varphi_{12}^{(s)} = p_{22}^{\lambda_2}\int_b^x [\varphi_{11}^{(s)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+\varphi_{12}^{(s-1)}g_{12}]\,p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\varphi_{21}^{(s)} = p_{11}^{\lambda_1}\int_b^x [\varphi_{21}^{(s-1)}g_{21}+\varphi_{22}^{(s)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})]\,p_{11}^{-\lambda_1}dx;\\
&\varphi_{22}^{(s)} = p_{22}^{\lambda_2}\int_b^x [\varphi_{21}^{(s-1)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+\varphi_{22}^{(s-1)}g_{12}]\,p_{22}^{-\lambda_2}dx.
\end{aligned}\right\} \quad (124)$$

Пользуясь формулой (120) и принимая во внимание, что

$$Y_b(b) = I,$$

получим следующее выражение для интегральной подстановки:

$$V_j = I + \mathfrak{A}_1\omega_{j11}+\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\omega_{j12}+\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1\omega_{j21}+\mathfrak{A}_{22}\omega_{j22},$$

где $\omega_{jkl} = \sum_{s=0}^{\infty}\mu^s\omega_{jkl}^{(s)}$ — целые функции относительно μ, и коэффициенты определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{j11}^{(0)} = q_{j11}^{\lambda_1}\int_{(a_j)} g_{11}p_{11}^{-\lambda_1}dx; \quad \omega_{j12}^{(0)} = q_{j22}^{\lambda_2}\int_{(a_j)} [\varphi_{11}^{(0)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+g_{12}]\,p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\omega_{j21}^{(0)} = q_{j11}^{\lambda_1}\int_{(a_j)} [\varphi_{22}^{(0)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})+g_{21}]\,p_{11}^{-\lambda_1}dx; \quad \omega_{j22}^{(0)} = q_{j22}^{\lambda_2}\int_{(a_j)} g_{22}p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\omega_{j11}^{(s)} = q_{j11}^{\lambda_1}\int_{(a_j)} [\varphi_{11}^{(s-1)}g_{21}+\varphi_{12}^{(s-1)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})]\,p_{11}^{-\lambda_1}dx;
\end{aligned}\right\} \quad (125)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{j12}^{(s)} = q_{j22}^{\lambda_2}\int_{(a_j)} [\varphi_{11}^{(s)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+\varphi_{12}^{(s-1)}g_{12}]\,p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\omega_{j21}^{(s)} = q_{j11}^{\lambda_1}\int_{(a_j)} [\varphi_{21}^{(s-1)}g_{21}+\varphi_{22}^{(s)}(g_{11}+\lambda_2 g_{21})]\,p_{11}^{-\lambda_1}dx;\\
&\omega_{j22}^{(s)} = q_{j22}^{\lambda_2}\int_{(a_j)} [\varphi_{21}^{(s-1)}(\lambda_1 g_{12}+g_{22})+\varphi_{22}^{(s-1)}g_{12}]\,p_{22}^{-\lambda_2}dx;\\
&\qquad\qquad q_{jkl} = e^{2\pi i u_{kl}^{(j)}}\prod_{h=1}^{m}(b-a_h)^{u_{kl}^{(h)}}.
\end{aligned}\right\} \quad (125)$$

Пользуясь формулой Лагранжа — Сильвестра, мы можем найти аналогичное выражение для W_j.

§ 9. Частичное суммирование рядов композиций

В этом параграфе мы дадим несколько формул, производящих частичное суммирование рядов композиций для регулярной нормированной матрицы и интегральной подстановки.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — характеристические числа матрицы X порядка n. Предположим, что они различны. Обозначим через $\Delta_k(X)$ полином от этой матрицы

$$\Delta_k(X) = \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})\cdot(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})\cdot(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}X.$$

Очевидно, мы имеем

$$\Delta_k(X) = \frac{(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})\cdot(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_1)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})\cdot(\xi_k-\xi_{k+1})\ldots(\xi_k-\xi_n)}\xi_k.$$

Действительно, формула Кэли дает

$$X^n - \sigma(x)X^{n-1}+\ldots+(-1)^n D(X) = (X-\xi_1)\ldots(X-\xi_n) = 0,$$

и, следовательно

$$\begin{aligned}
(X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)X = \\
= (X-\xi_1)\ldots(X-\xi_{k-1})(X-\xi_{k+1})\ldots(X-\xi_n)\xi_k.
\end{aligned}$$

Введем аналитические функции от одной комплексной переменной x:

$$\mathfrak{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_\nu\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\nu\end{matrix}\middle| x\right),$$

определяемые рекуррентными соотношениями

$$\mathfrak{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1\\ \alpha_1\end{matrix}\middle| x\right) = \int_b^x\left(\frac{x-\alpha_1}{s-\alpha_1}\right)^{\sigma_1}\frac{ds}{s-\alpha_1},$$

$$\mathfrak{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1 & \ldots & \sigma_\nu\\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_\nu\end{matrix}\middle| x\right) = \int_b^x\mathfrak{E}_b\left(\begin{matrix}\sigma_1 & \ldots & \sigma_{\nu-1}\\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{\nu-1}\end{matrix}\middle| s\right)\left(\frac{x-\alpha_\nu}{s-\alpha_\nu}\right)^{\sigma_\nu}\frac{ds}{s-\alpha_\nu},$$

где σ и α — числовые параметры.

Имеет место теорема:

Теорема I-a. *Регулярная матрица, нормированная в точке b и имеющая дифференциальные подстановки $U_1, \dots, U_m$ в точках $a_1 \dots a_m$, представляется в виде:*

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{k_1, \dots, k_\nu}^{1, \dots, n} \Delta_{k_1}(U_{j_1}) \dots \Lambda_{k_\nu}(U_{j_\nu}) \mathscr{E}_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(k_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(k_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right),$$

где $\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(n)}$ — характеристические числа подстановки U_j, по предположению различные, а сумма $\sum\limits_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)}{}'$ распространяется на все значения индексов $j_1, \dots, j_\nu = 1, \dots, m$, удовлетворяющие неравенствам $j_1 \neq j_2$, $j_2 \neq j_3, \dots, j_{\nu-1} \neq j_\nu$.

Доказательство. Так как ряд

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x)$$

абсолютно сходится, то мы можем написать

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1}, \dots, U_{j_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right),$$

где [1])

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} U_{j_1}^{\mu_1} \dots U_{j_\nu}^{\mu_\nu} L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu} \,\middle|\, x\right).$$

Установим рекуррентные соотношения для функций φ_b. Мы имеем равенство

$$L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu}^{\mu} \mid x) = \frac{1}{(\mu-1)!} \int_b^x L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \lg^{\mu-1} \frac{x - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}} \frac{ds}{s - a_{j_\nu}}.$$

Действительно, формула Дирихле дает

$$L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu}^2 \mid x) = \int_b^x \frac{dt}{t - a_{j_\nu}} \int_b^t L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \frac{ds}{s - a_{j_\nu}} =$$

$$= \int_b^x L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \int_s^x \frac{dt}{t - a_{j_\nu}} \cdot \frac{ds}{s - a_{j_\nu}} =$$

$$= \int_b^x L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \log \frac{x - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}} \frac{ds}{s - a_{j_\nu}}.$$

[1]) Символ a_j^{μ} показывает, что a_j повторяется μ раз.

Предполагая, что упомянутое выше равенство имеет место для значений $\mu = 1, 2, \dots, \lambda - 1$, мы получим

$$L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu}^{\lambda} \mid x) =$$

$$= \int_b^x \frac{dt}{t - a_{j_\nu}} \int_b^t \frac{1}{(\lambda-2)!} L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \lg^{\lambda-2} \frac{t - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}} \frac{ds}{s - a_{j_\nu}} =$$

$$= \int_b^x L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \int_s^x \frac{1}{(\lambda-2)!} \lg^{\lambda-2} \frac{t - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}} \frac{dt}{t - a_{j_\nu}} \cdot \frac{ds}{s - a_{j_\nu}} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda-1)!} \int_b^x L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid s) \lg^{\lambda-1} \frac{x - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}} \cdot \frac{ds}{s - a_{j_\nu}}.$$

Пользуясь предыдущей формулой, мы получим

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \int_b^x \left[\sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_{\nu-1}=1}^{\infty} U_{j_1}^{\mu_1} \dots U_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}} L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}} \,\middle|\, s\right)\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} U_{j_\nu}^{\mu_\nu} \frac{1}{(\mu_\nu - 1)!} \log^{\mu_\nu - 1} \frac{x - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}}\right] \frac{ds}{s - a_{j_\nu}} =$$

$$= \int_b^x \varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_{\nu-1}} \\ a_{j_1} \dots U_{j_{\nu-1}} \end{matrix}\,\middle|\, s\right) e^{U_{j_\nu} \lg \frac{x - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}}} U_{j_\nu} \frac{ds}{s - a_{j_\nu}},$$

что дает

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \int_b^x \varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_{\nu-1}} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \end{matrix}\,\middle|\, s\right) \left(\frac{x - a_{j_\nu}}{s - a_{j_\nu}}\right)^{U_{j_\nu}} \frac{U_{j_\nu} ds}{s - a_{j_\nu}}.$$

Если предположить, что φ_b обращается в I при $\nu = 0$, то ясно, что эта формула имеет место и при $\nu = 1$, ибо

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \\ a_{j_1} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \left(\frac{x - a_{j_1}}{b - a_{j_1}}\right)^{U_{j_1}} - I = \int_b^x \left(\frac{x - a_{j_1}}{s - a_{j_1}}\right)^{U_{j_1}} \frac{U_{j_1} ds}{s - a_{j_1}}.$$

Мы можем проверить это равенство, произведя интегрирование в правой части. Из доказанной формулы следует, что

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \sum_{k_1, \dots, k_\nu}^{(1, \dots, n)} \Delta_{k_1}(U_{j_1}) \dots \Delta_{k_\nu}(U_{j_\nu}) \mathscr{E}_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{k_1} \dots \xi_{j_\nu}^{k_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \end{matrix}\,\middle|\, x\right).$$

Действительно, принимая во внимание формулу

$$\left(\frac{x - a_j}{s - a_j}\right)^{U_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(U_j - \xi_j^{(1)}\right) \dots \left(U_j - \xi_j^{(k-1)}\right)\left(U_j - \xi_j^{(k+1)}\right) \dots \left(U_j - \xi_j^{(n)}\right)}{\left(\xi^{(k)} - \xi_j^{(1)}\right) \dots \left(\xi_1^{(k)} - \xi_j^{(k-1)}\right)\left(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(k+1)}\right) \dots \left(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(n)}\right)} \left(\frac{x - a_j}{s - a_j}\right)^{\xi_j^{(k)}},$$

мы можем написать

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \\ a_{j_1} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(U_{j_1}) \mathscr{E}_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(k)} \\ a_{j_1} \end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

и, предполагая, что доказываемая формула имеет место для $\mu \leqslant \nu - 1$, находим

$$\varphi_b\left(\begin{matrix} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \int_b^x \sum_{k_1, \dots, k_{\nu-1}}^{(1, \dots, n)} \Delta_{k_1}(U_{j_1}) \dots \Delta_{k_{\nu-1}}(U_{j_{\nu-1}}) \mathcal{E}_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(k_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(k_{\nu-1})} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) \times$$

$$\times \sum_{k_\nu=1}^{n} \Delta_{k_\nu}(U_{j_\nu}) \left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_j^{(k_\nu)}} \frac{ds}{s-a_{j_\nu}} =$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_\nu}^{(1, \dots, n)} \Delta_{k_1}(U_{j_1}) \dots \Delta_{k_\nu}(U_{j_\nu}) \mathcal{E}_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(k_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(k_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right).$$

Таким образом, теорема доказана.

В последующем мы будем пользоваться обозначениями общей теории функций от матриц [ст. I, § 9].

Относительно регулярных нормированных матриц можно высказать еще следующую теорему:

Теорема I-b. *Если характеристические числа и элементарные делители дифференциальных подстановок U_j $(j = 1, 2, \dots, m)$ суть $\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(s)}$ и*

$$(\xi - \xi_j^{(1)})^{r_j^{(1)}}, \dots, (\xi - \xi_j^{(s_j)})^{r_j^{(s_j)}} \quad (r_j^{(1)} + \dots + r_j^{(s_j)} = n),$$

то мы имеем представление

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \tag{a}$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{p_1=1}^{s_{j_1}} \sum_{q_1=0}^{r_{j_1}^{(p_1)}-1} \dots \sum_{p_\nu=1}^{s_{j_\nu}} \sum_{q_\nu=0}^{r_{j_\nu}^{(p_\nu)}-1} U_{j_1}^{(p_1 q_1)} \dots U_{j_\nu}^{(p_\nu q_\nu)} L_b^{(q_1 \dots q_\nu)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1} 0)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= \int_b^x \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\,\middle|\, s\right) \left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}} \frac{ds}{s-a_{j_\nu}},$$

$$L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1} 1)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \int_b^x \left[L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\,\middle|\, s\right) + \right.$$

$$\left. + L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1} 0)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, s\right)\right] \left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}} \frac{ds}{s-a_{j_\nu}}, \qquad (q_\nu > 1)$$

$$L_b^{(q_1 \dots q_\nu)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= \int_b^x L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, s\right) \left(\frac{x-a_{j_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}} \frac{ds}{s-a_{j_\nu}}.$$

В частности, если элементарные делители дифференциальных подстановок простые, то мы имеем

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sideset{}{'}\sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{p_1, \dots, p_\nu}^{1, \dots, m} U_{j_1}^{(p_1)} \dots U_{j_\nu}^{(p_\nu)} L_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right),$$

где

$$L_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \\ a_{j_1}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \int_b^x \left(\frac{x-a_{j_1}}{s-a_{j_1}}\right)^{\xi_{j_1}^{(p_1)}} \frac{ds}{s-a_{j_1}},$$

$$L_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \int_b^x L_b\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\,\middle|\, s\right) \left(\frac{x-a_{i_\nu}}{s-a_{j_\nu}}\right)^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}} \frac{ds}{s-a_{j_\nu}}.$$

Доказательство. В силу формул

$$U_j = \sum_{p=1}^{s_j} (U_j^{(p0)} \xi_j^{(p)} + U_j^{(p1)}) \quad \text{и} \quad U_j^{\mu} = \sum_{p=1}^{s_j} \sum_{q=0}^{\mu} \binom{\mu}{q} U_j^{(pq)} (\xi_j^{(p)})^{\mu-q}$$

мы имеем представление вида (a), где

$$L_b^{(q_1 \dots q_\nu)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} (\xi_{j_1}^{(p_1)})^{\mu_1-q_1} \dots (\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)})^{\mu_\nu-q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \dots \binom{\mu_\nu}{q_\nu} L_b(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu} \mid x)$$

причем $\binom{\mu}{q} = 0$ для $q > \mu$ и $\binom{\mu}{0} = 1$.

Дифференцируя этот ряд по x, находим

$$\frac{d}{dx} L_b^{(q_1 \dots q_\nu)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_\nu=1}^{\infty} \left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1} \dots \left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \dots \binom{\mu_\nu}{q_\nu} \frac{L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}} a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1} \mid x\right)}{x-a_{j_\nu}} =$$

$$= \binom{1}{q_\nu} \frac{\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\lambda-q_\nu}}{x-a_{j_\nu}} L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) + \tag{b}$$

$$+ \sum_{\mu_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\mu_{\nu-1}=1}^{\infty} \sum_{\mu_\nu=2}^{\infty} \left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1} \dots \left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu} \binom{\mu_1}{q_1} \dots$$

$$\dots \binom{\mu_\nu}{q_\nu} \frac{L_b\left(a_{j_1}^{\mu_1} \dots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}} a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1} \mid x\right)}{x-a_{j_\nu}}.$$

В случае $\nu = 1$ первый член должен быть заменен на

$$\binom{1}{q_1} \left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{1-q_1} \frac{1}{x-a_{j_1}}.$$

В случае $q_\nu = 0$ мы имеем $\binom{\mu_\nu}{q_\nu} = 1$, и соотношение (b) дает

$$\frac{d}{dx} L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1} 0)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= \frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{x-a_{j_\nu}} \left[L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})} \\ a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\,\middle|\, x\right) + L_b^{(q_1 \dots q_{\nu-1} 0)}\left(\begin{matrix} \xi_{j_1}^{(p_1)} \dots \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)} \\ a_{j_1} \dots a_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\, x\right)\right].$$

Если $q_\nu > 0$, мы имеем

$$\binom{\mu_\nu}{q_\nu}=\binom{\mu_\nu-1}{q_\nu}+\binom{\mu_\nu-1}{q_\nu-1},$$

и соотношение (b) записывается в виде

$$\frac{d}{dx}L_b^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)=$$

$$=\frac{1}{x-a_{j_\nu}}\left[\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{1-q_\nu}\binom{1}{q_\nu}L_b^{(q_1\dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\,x\right)+\right.$$

$$\left.+\,\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}L_b^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)+L_b^{(q_1\dots q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,x\right)\right].$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения и принимая во внимание начальное условие

$$L_b^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,b\right)=0,$$

получим требуемые соотношения.

В частности, если $m=1$, высказанная теорема дает выражения

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U\\ a\end{matrix}\middle|\,x\right)=I+\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=0}^{r_p-1}U^{(pq)}L_b^{(q)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle|\,x\right),$$

где

$$L_b^{(0)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle|\,x\right)=\xi^{(p)}\int_b^x\left(\frac{x-a}{s-a}\right)^{\xi^{(p)}}\frac{ds}{s-a}=\left(\frac{x-a}{o-a}\right)^{\xi^{(p)}}-1,$$

$$L_b^{(1)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle|\,x\right)=\int_b^x\left[1+\left(\frac{s-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}-1\right]\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\frac{ds}{s-a}=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\lg\frac{x-a}{b-a}$$

. . . .

$$L_b^{(r_p-1)}\left(\begin{matrix}\xi^{(p)}\\ a\end{matrix}\middle|\,x\right)=\frac{1}{(r_p-1)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\lg^{r_p-1}\frac{x-a}{b-a}.$$

Замечая, что

$$\sum_{p=1}^{s}U^{(p0)}=I,$$

получаем формулу

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U\\ a\end{matrix}\middle|\,x\right)=\sum_{p=1}^{s}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\xi^{(p)}}\left[U^{(p0)}+U^{(p1)}\lg\frac{x-a}{b-a}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+U^{(pr_p-1)}\frac{1}{(r_p-1)!}\lg^{r_p-1}\frac{x-a}{b-a}\right]=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{U}.$$

Мы можем получить аналогичный ряд для интегральной подстановки.

Теорема III-а. *Если* $\xi_j^{(1)},\dots,\xi_j^{(s_j)}$ *и* $\left(\xi-\xi_j^{(1)}\right)^{r_j^{(1)}},\dots,\left(\xi-\xi_j^{(s_j)}\right)^{r_j^{(s_j)}}$ *суть характеристические числа и элементарные делители подстановок* U_j, *то интегральные подстановки* $V_j(b)$ *имеют представления*

$$V_j=\Omega_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\,b\right)=I+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{p_1=1}^{s_{j_1}}\sum_{q_1=0}^{r_{j_1}^{(p_1)}-1}\dots\sum_{p_\nu=1}^{s_{j_\nu}}\sum_{q_\nu=0}^{r_{j_\nu}^{(p_\nu)}-1}U_{j_1}^{(p_1q_1)}\dots U_{j_\nu}^{(p_\nu q_\nu)}P_j^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,b\right),$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$P_j^{(0)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle|\,b\right)=e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}}-1;\quad P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle|\,b\right)=\frac{(2\pi i)^{q_1}}{q_1!}e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}}\quad (q_1=1,\dots r_j^{(p_1)}-1)$$

$$P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle|\,b\right)=0,\ \text{если}\ j_1\neq j,$$

$$P_j^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,b\right)=$$

$$=(b-a_{j_\nu})^{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}(b-a_{j_1})^{-\xi_{j_1}^{(p_1)}}\int_{a_j}^{b}(t-a_{j_\nu})^{-\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}(t-a_{j_1})^{\xi_{j_1}^{(p_1)}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{t-a_{j_\nu}}\left[\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{1-q_\nu}\binom{1}{q_\nu}P_j^{(q_1\dots q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\,t\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\,[q_\nu]\,P_j^{(q_1\dots q_{\nu-1}q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,t\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{t-a_{j_1}}\left[\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{1-q_1}\binom{1}{q_1}P_j^{(q_2\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,t\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\,[q_1]\,P_j^{(q_1-1q_2\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,t\right)\right]\right\}dt;\qquad [q]=\begin{cases}0, & \text{если}\ q=0,\\ 1, & \text{если}\ q>0.\end{cases}$$

Доказательство. В силу формулы (28) мы имеем

$$P_j^{(q_1\dots q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\dots\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\,b\right)=$$

$$=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\dots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\dots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\dots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}\cdot P_j\left(a_{j_1}^{\mu_1}\dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\,\middle|\,b\right).$$

При $\nu=1$ имеем

$$P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle|\,b\right)=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\binom{\mu_1}{q_1}\delta_{j_1}^{j}\frac{(2\pi i)^{\mu_1}}{\mu_1!};\quad \delta_{j_1}^{j}=\begin{cases}1, & \text{если}\ j=j_1,\\ 0, & \text{если}\ j\neq j_1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$P_j^{(0)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle|\, b\right)=e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}}-1,$$

$$P_j^{(1)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle|\, b\right)=2\pi i e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_j^{\left(r_j^{(p_1)}-1\right)}\left(\begin{matrix}\xi_j^{(p_1)}\\ a_j\end{matrix}\middle|\, b\right)=\frac{(2\pi i)^{r_j^{(p_1)}-1}}{\left(r_j^{(p_1)}-1\right)!}\,e^{2\pi i\xi_j^{(p_1)}},$$

$$P_j^{(q_1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)}\\ a_{j_1}\end{matrix}\middle|\, b\right)=0,\ \text{если}\ j\neq j_1.$$

Если $\nu>1$, то, дифференцируя $P_j^{(q_1\,\cdots\,q_\nu)}$, мы найдем (§ 8)

$$\frac{d}{db}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)=$$

$$=\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\cdots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\cdots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}\times$$

$$\times\left[\frac{P_j\left(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}}a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1}\,\middle|\, b\right)}{b-a_{j_\nu}}-\frac{P_j\left(a_{j_1}^{\mu_1-1}a_{j_2}^{\mu_2}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\,\middle|\, b\right)}{b-a_{j_1}}\right]=$$

$$=\binom{1}{q_\nu}\frac{\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{1-q_\nu}}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\binom{1}{q_1}\frac{\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{1-q_1}}{b-a_{j_1}}P_j^{(q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+$$

$$+\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{\mu_{\nu-1}=1}^{\infty}\sum_{\mu_\nu=2}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\cdots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\cdots$$

$$\cdots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}\frac{P_j\left(a_{j_1}^{\mu_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}^{\mu_{\nu-1}}a_{j_\nu}^{\mu_\nu-1}\,\middle|\, b\right)}{b-a_{j_\nu}}-\sum_{\mu_1=2}^{\infty}\sum_{\mu_2=1}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}\left(\xi_{j_1}^{(p_1)}\right)^{\mu_1-q_1}\cdots\left(\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\right)^{\mu_\nu-q_\nu}\binom{\mu_1}{q_1}\cdots\binom{\mu_\nu}{q_\nu}\frac{P_j\left(a_{j_1}^{\mu_1-1}a_{j_2}^{\mu_2}\ldots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\,\middle|\, b\right)}{b-a_{j_1}}.$$

Это соотношение может быть представлено в виде:

1°. Если $q_\nu=0,\ q_1=0$:

$$\frac{d}{db}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)=\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b-a_{j_1}}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+$$

$$+\left(\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b-a_{j_\nu}}-\frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b-a_{j_1}}\right)P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right).$$

2°. Если $q_\nu=0,\ q_1>0$:

$$\frac{d}{db}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)=\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(p_1\,\cdots\,q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{1}{b-a_{j_1}}\binom{1}{q_1}P_j^{(q_2\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+$$

$$+\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b-a_{j_1}}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)-\frac{1}{b-a_{j_1}}P_j^{(q_1-1\,q_2\,\cdots\,q_{\nu-1}0)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right).$$

3°. Если $q_\nu>0,\ q_1=0$:

$$\frac{d}{db}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)=\frac{1}{b-a_{j_\nu}}\binom{1}{q_\nu}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b-a_{j_1}}P_j^{(q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+$$

$$+\frac{1}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_{\nu-1}q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)-\frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b-a_{j_1}}P_j^{(0q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & \xi_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right).$$

4°. Если $q_\nu>0,\ q_1>0$:

$$\frac{d}{db}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)=\frac{1}{b-a_{j_\nu}}\binom{1}{q_\nu}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_{\nu-1})}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_{\nu-1}}^{(p_{\nu-1})}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_{\nu-1}}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{1}{b-a_{j_1}}\binom{1}{q_1}P_j^{(q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_2}^{(p_2)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_2} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+\frac{\xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{\xi_{j_1}^{(p_1)}}{b-a_{j_1}}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)+\frac{1}{b-a_{j_\nu}}P_j^{(q_1\,\cdots\,q_{\nu-1}q_\nu-1)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right)-$$

$$-\frac{1}{b-a_{j_1}}P_j^{(q_1-1\,q_2\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, b\right).$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения и принимая во внимание начальные условия

$$P_j^{(q_1\,\cdots\,q_\nu)}\left(\begin{matrix}\xi_{j_1}^{(p_1)} & \ldots & \xi_{j_\nu}^{(p_\nu)}\\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu}\end{matrix}\middle|\, a_j\right)=0\qquad(\nu>1),$$

получим требуемые формулы.

СТАТЬЯ ТРЕТЬЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛЮСА ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

§ 1. Построение интегральной нормированной матрицы

Система линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой имеют полюс порядка не выше s в точке $x=0$, может быть записана в виде

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{p=-s}^{\infty}T_p x^p, \tag{1}$$

где Y — матрица, образованная из n^2 функций

$$Y_{ik}(x) \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

дающих n линейно-независимых решений системы (1). Первый значок i функции (2) дает номер решения и второй значок k — номер функции, входящей в i-е решение. T_p — матрицы порядка n, не содержащие независимой переменной x. Степенной ряд

$$\sum_{p=-s}^{\infty}\{T_p\}_{lm}x^p \tag{3}$$

есть коэффициент при функции с номером l в уравнении с номером m. В последующем мы будем предполагать, что ряд

$$\sum_{p=-s}^{\infty}|T_p| \tag{4}$$

сходится, т. е. что система матриц T_p регулярна [ст. I, § 24]. Это условие будет выполнено, если радиусы сходимости рядов (3) больше единицы. Мы можем всегда удовлетворить этому условию, делая преобразование независимой переменной x вида $x_1=\alpha x$. При условии сходимости ряда (4) радиусы сходимости рядов (3) будут $\geqslant 1$ или, иначе говоря, радиус сходимости ряда

$$\sum_{p=-s}^{\infty}T_p x^p$$

будет $\geqslant 1$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — область на плоскости x, ограниченная двумя концентрическими окружностями с центром в точке $x=0$ и с радиусами $\rho_1<\rho_2<1$, и пусть b — некоторая точка этой области. Наша первая задача состоит в построении интегральной матрицы $Y(b\,|\,x)$ системы (1), нормированной в точке $x=b$, т. е. такой интегральной матрицы, которая обращается в единичную матрицу I при $x=b$. Кроме того, мы построим в этом параграфе аналитическое выражение для интегральной подстановки $V(b)$, которую испытывает матрица $Y(b\,|\,x)$, когда независимая переменная x обходит в положительном направлении точку $x=0$.

Для исследования матрицы $Y(b|x)$ как функции переменной x мы должны построить поверхность Римана, соответствующую логарифмической особенности в точке $x=0$. Обозначим через b_1 точку, которая имеет ту же комплексную координату, что и b, и которая расположена на том листе поверхности Римана, который отвечает указанному выше обходу точкой x начала координат. Определение интегральной подстановки $V(b)$ непосредственно приводит к формуле

$$V(b)=Y(b\,|\,b_1). \tag{5}$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_1$ часть упомянутой выше поверхности Римана, образованную конечным числом листов, координаты точек которой удовлетворяют неравенству

$$\rho_1\leqslant|x|\leqslant\rho_2.$$

Относительно построения матрицы $Y(b\,|\,x)$ мы имеем следующую теорему:

Теорема I. *Для всех значений b из области $\mathfrak{B}$ и для всех значений x из $\mathfrak{B}_1$ интегральная матрица $Y(b\,|\,x)$ есть равномерно целая функция матриц T_p, представляемая рядом композиций*

$$Y(b\,|\,x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots$$

$$\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1,\ldots,p_\mu}\lg^\lambda b\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}\lg^\varkappa x, \tag{6}$$

где числовые коэффициенты α и $\overset{*}{\alpha}$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\alpha^{(0)}_{p_1}=\frac{1}{p_1+1};\quad \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1}=-\frac{1}{p_1+1}\qquad(\text{если } p_1+1\neq0),$$

$$\alpha^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0, & \text{если } p_1+1\neq0,\\ 1, & \text{если } p_1+1=0,\end{cases}\qquad \overset{*}{\alpha}{}^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0, & \text{если } p_1+1\neq0,\\ -1, & \text{если } p_1+1=0,\end{cases}$$

$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0;$$

$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\Big[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+$$

$$+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\ldots+$$

$$+(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\Big],$$

$$\overset{*}{\alpha}{}^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0;$$

$$\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} = -\frac{1}{p_1 + \dots + p_\nu + \nu}\Big[\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_2 \dots p_\nu} - \frac{\mu+1}{p_1 + \dots + p_\nu + \nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu+1)}_{p_2 \dots p_\nu} +$$

$$+ \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1 + \dots + p_\nu + \nu)^2}\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu+2)}_{p_2 \dots p_\nu} +$$

$$+ (-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\nu-1)}{(p_1 + \dots + p_\nu + \nu)^{\nu-\mu-1}}\overset{*}{\alpha}{}^{(\nu-1)}_{p_2 \dots p_\nu}\Big] \tag{7}$$

$$(\mu = \nu - 1,\ \nu - 2,\ \dots,\ 1,\ 0;\ \text{если}\ p_1 + \dots + p_\nu + \nu \neq 0),$$

$$\alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} = \frac{1}{\mu}\alpha^{(\mu-1)}_{p_1 \dots p_{\nu-1}}; \quad \overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} = -\frac{1}{\mu}\alpha^{(\mu-1)}_{p_2 \dots p_\nu}$$

$$(\mu = \nu,\ \nu - 1,\ \dots,\ 2,\ 1;\ \text{если}\ p_1 + \dots + p_\nu + \nu = 0).$$

Коэффициенты** $\alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}$ **при** $p_1 + \dots + p_\nu + \nu = 0$ **произвольны и коэффициенты** $\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}$ **при том же условии определяются формулами

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} = 0. \tag{8}$$

Сначала заметим, что сомножитель $\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\mu}$ в слагаемом последней суммы, отвечающем $\mu = 0$, не имеет смысла и его нужно заменить единицей. Аналогично в слагаемом, отвечающем $\mu = \nu$, множитель $\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu}$ надо заменить единицей. Такое же замечание относится к сумме, входящей в формулу (6), и к суммам, аналогичным (8), которые будут встречаться в последующем.

Для доказательства теоремы применим к системе (1) метод последовательных приближений. Принимая во внимание начальное условие

$$Y(b \mid b) = I, \tag{9}$$

мы будем иметь алгорифм

$$Y_0(x) = I, \quad Y_n(x) = I + \int_b^x Y_{n-1}(x)\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p\, dx,$$

где x — некоторая точка области $\mathfrak{B}_1$, и путь интегрирования также принадлежит этой области. Требуемая интегральная матрица будет

$$Y(b \mid x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}[Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x)]. \tag{10}$$

Указанный выше алгорифм приводит нас к функциям, определяемым следующими соотношениями:

$$L_{p_1}(b \mid x) = \int_b^x x^{p_1}\, dx; \quad L_{p_1 \dots p_\nu}(b \mid x) = \int_b^x L_{p_1 \dots p_{\nu-1}}(b \mid x)\, x^{p_\nu}\, dx \tag{11}$$

$$(p_1, \dots, p_\nu = -s,\ -s+1,\ \dots,\ 0,\ 1,\ \dots).$$

Действительно, предполагая абсолютную и равномерную сходимость требуемых рядов, мы будем иметь

$$Y_1(x) - Y_0(x) = Y_1(x) - I = \int_b^x \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p\, dx = \sum_{p_1=-s}^{\infty} T_{p_1} L_{p_1}(b \mid x).$$

$$Y_2(x) - Y_1(x) = \int_b^x [Y_1(x) - I]\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p\, dx =$$

$$= \int_b^x \sum_{p_1=-s}^{\infty} T_{p_1} L_{p_1}(b \mid x)\sum_{p_2=-s}^{\infty} T_{p_2} x^{p_2}\, dx = \sum_{p_1,\, p_2=-s}^{\infty} T_{p_1} T_{p_2}\int_b^x L_{p_1}(b \mid x)\, x^{p_2}\, dx =$$

$$= \sum_{p_1,\, p_2=-s}^{\infty} T_{p_1} T_{p_2} L_{p_1 p_2}(b \mid x)$$

и вообще

$$Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x) = [TL(b \mid x)]_\nu = \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} L_{p_1 \dots p_\nu}(b \mid x).$$

В силу (10) для $Y(b \mid x)$ мы будем иметь ряд композиций

$$I + \sum_{\nu=1}^{\infty}[TL(b \mid x)]_\nu = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1, \dots, p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} L_{p_1 \dots p_\nu}(b \mid x). \tag{12}$$

Проверим теперь, что этот ряд есть равномерно целая функция матриц T_p, удовлетворяющая системе (1) и начальному условию (9). Для доказательства первого утверждения выполним оценку коэффициентов ряда (12).

Заметим прежде всего, что точка b области $\mathfrak{B}_1$ может быть соединена с произвольной точкой этой области при помощи пути l_x, который составлен отрезком радиуса вектора и некоторой дугой окружности с центром в точке $x = 0$; этот путь принадлежит области $\mathfrak{B}_1$. Для любой точки x области $\mathfrak{B}_1$ длины этих путей l_x имеют конечную верхнюю границу, которую обозначим через σ. Величины

$$x^p \qquad (p = -s,\ -s+1,\ \dots,\ 0,\ 1,\ \dots)$$

также имеют конечную верхнюю границу

$$|x^p| \leqslant \rho_1^{-s},$$

которую обозначим через α. Принимая это во внимание, мы будем иметь следующие неравенства

$$|L_{p_1}(b \mid x)| = \left|\int_b^x x^{p_1}\, dx\right| \leqslant \alpha s_x \leqslant \alpha\sigma,$$

$$|L_{p_1 p_2}(b \mid x)| = \left|\int_b^x L_{p_1}(b \mid x)\, x^{p_2}\, dx\right| \leqslant \int_{l_x} \alpha s_x \alpha\, ds_x = \frac{(\alpha s_x)^2}{2!} \leqslant \frac{(\alpha\sigma)^2}{2!}$$

и вообще

$$|L_{p_1 \dots p_\nu}(b \mid x)| \leqslant \frac{(\alpha\sigma)^\nu}{\nu!}. \tag{13}$$

Но степенной ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha\sigma)^\nu}{\nu!}\zeta^\nu$$

сходится для всех значений ζ и в силу результата общей теории функций [ст. I, § 25] ряд (12) представляет собой равномерно целую функцию системы матриц T_p. Предыдущее неравенство показывает, что ряд

$$I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{p=-s}^{\infty}|T_p|\right)^{\nu}\frac{(a\sigma)^{\nu}}{\nu!}$$

будет мажорантным для ряда (12) и, следовательно, этот последний ряд сходится равномерно в области $\mathfrak{B}_1$ и его можно дифференцировать почленно. Дифференцируя ряд (12), мы будем иметь в силу (11)

$$\frac{d}{dx}\left\{I+\sum_{\nu=1}^{\infty}[TL(b\,|\,x)]_{\nu}\right\}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_{\nu}=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_{\nu}}L_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(b\,|\,x)\,x^{p_{\nu}}.$$

Из неравенства (13) следует, что последний ряд сходится абсолютно; производя суммирование по p_{ν}, мы получим

$$\frac{d}{dx}\left\{I+\sum_{\nu=1}^{\infty}[TL(b\,|\,x)]_{\nu}\right\}=$$

$$=\left\{I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_{\nu}=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_{\nu}}L_{p_1\ldots p_{\nu}}(b\,|\,x)\right\}\sum_{p=-s}^{\infty}T_px^p,$$

т. е. ряд (12) удовлетворяет системе (1). Выполнение условия (9) непосредственно следует из вида ряда (12) в силу очевидных формул

$$L_{p_1\ldots p_{\nu}}(b\,|\,b)=0.$$

Таким образом, мы имеем

$$Y(b\,|\,x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}[TL(b\,|\,x)]_{\nu}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_{\nu}=-s}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_{\nu}}L_{p_1\ldots p_{\nu}}(b\,|\,x).\quad(14)$$

Найдем теперь вид коэффициентов $L_{p_1\ldots p_{\nu}}(b\,|\,x)$, воспользовавшись рекуррентными соотношениями (11). Для этого введем новые функции $M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$, не зависящие от b и определяемые соотношениями, аналогичными соотношениям (11):

$$M_{p_1}(x)=\int^{x}x^{p_1}\,dx;\qquad M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)=\int^{x}M_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(x)\,x^{p_{\nu}}\,dx.$$

Произвольные постоянные в этих квадратурах нужно выбрать таким образом, чтобы в случае

$$p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu\neq 0$$

функция $M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$ имела вид

$$M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)=x^{p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x,\quad(15)$$

где $\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}$ — числовые коэффициенты, и в случае

$$p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu=0$$

выбор произвольных постоянных не фиксируется.

Докажем теперь, что при указанных условиях все функции $M_{p_1\ldots p_{\nu}}(x)$ будут иметь вид (15) и коэффициенты α определяются указанным путем, за исключением коэффициентов $\overset{0}{\alpha}_{p_1\ldots p_{\nu}}$ при $p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu=0$, которые остаются произвольными. Действительно, для $\nu=1$ мы имеем

$$M_{p_1}(x)=\int^{x}x^{p_1}\,dx=\begin{cases}x^{p_1+1}\dfrac{1}{p_1+1} & (p_1+1\neq 0),\\ \alpha^{(0)}_{p_1}+\lg x & (p_1+1=0),\end{cases}$$

где $\overset{0}{\alpha}_{p_1}$ — произвольная постоянная. При $\nu=2$ мы должны рассмотреть четыре случая; для $p_1+1\neq 0$

$$M_{p_1p_2}(x)=\int^{x}\frac{x^{p_1+1}}{p_1+1}x^{p_2}\,dx=\begin{cases}x^{p_1+p_2+2}\cdot\dfrac{1}{(p_1+1)(p_1+p_2+2)} & (p_1+p_2+2\neq 0),\\ \alpha^{(0)}_{p_1p_2}+\dfrac{1}{p_1+1}\lg x & (p_1+p_2+2=0),\end{cases}$$

где $\alpha^{(0)}_{p_1p_2}$ — произвольная постоянная; для $p_1+1=0$

$$M_{p_1p_2}(x)=\int^{x}(\alpha^{(0)}_{p_1}+\lg x)\,x^{p_2}\,dx.$$

Если

$$p_1+p_2+2=p_2+1\neq 0,$$

то будем иметь

$$M_{p_1p_2}(x)=\int^{x}(\alpha^{(0)}_{p_1}+\lg x)\,d\,\frac{x^{p_2+1}}{p_2+1}=\frac{x^{p_2+1}}{p_2+1}(\alpha^{(0)}_{p_1}+\lg x)-\frac{x^{p_2+1}}{(p_2+1)^2}=$$

$$=x^{p_1+p_2+2}\left[\left(\frac{\alpha^{(0)}_{p_1}}{p_2+1}-\frac{1}{(p_2+1)^2}\right)+\frac{1}{p_2+1}\lg x\right].$$

В случае $p_1+1=0$ и $p_1+p_2+2=p_2+1=0$ будем иметь

$$M_{p_1p_2}(x)=\int^{x}\frac{\alpha^{(0)}_{p_1}+\lg x}{x}\,dx=\alpha^{(0)}_{p_1p_2}+\alpha^{(0)}_{p_1}\lg x+\frac{1}{2}\lg^2 x.$$

Мы доказали, таким образом, наше утверждение для $\nu=1$ и $\nu=2$. Пользуясь теперь формулой (15) для некоторого значения ν, определим функцию $M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}$:

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=\int^{x}\left(x^{p_1+\ldots+p_{\nu}+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x\right)\cdot x^{p_{\nu+1}}\,dx=$$

$$=\int^{x}x^{p_1+\ldots+p_{\nu}+p_{\nu+1}+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x\,dx.$$

Нужно различать два случая. Если $p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1\neq 0$, то, интегрируя по частям, будем иметь

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=\frac{x^{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}}{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu}x-$$

$$-\int^{x}\frac{x^{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu}}{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu}}\lg^{\mu-1}x\,dx.$$

Применяя еще интегрирование по частям, будем иметь выражение вида

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=x^{p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1}\sum_{\mu=0}^{\nu+1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}\lg^{\mu}x$$

и мы не вводим в этом случае произвольных постоянных. Если

$$p_1+\ldots+p_{\nu+1}+\nu+1=0,$$

то

$$M_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(x)=\int^{x}\frac{1}{x}\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}\lg^{\mu}x\,dx=$$

$$=\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}+\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}}{\mu+1}\lg^{\mu+1}x=\sum_{\mu=0}^{\nu+1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}\lg^{\mu}x,$$

где $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_{\nu+1}}$ — новая произвольная постоянная. Таким образом, мы доказали наше утверждение о функциях $M_{p_1\ldots p_\nu}(x)$ для любого значения ν.

Перейдем теперь к построению рекуррентных соотношений для коэффициентов α. При $\nu=1$ предыдущие вычисления дают

$$\alpha^{(0)}_{p_1}=\begin{cases}\dfrac{1}{p_1+1} & (p_1+1\neq 0),\\ \text{произвольно} & (p_1+1=0),\end{cases}\qquad \alpha^{(1)}_{p_1}=\begin{cases}0 & (p_1+1\neq 0),\\ 1 & (p_1+1=0).\end{cases}$$

Определение $M_{p_1\ldots p_\nu}(x)$ дает

$$\frac{d}{dx}M_{p_1\ldots p_\nu}(x)=M_{p_1\ldots p_{\nu-1}}(x)\,x^{p_\nu}$$

или, в силу (15)

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\sum_{\mu=0}^{\nu}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}\lg^{\mu}x+\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}\lg^{\mu-1}x=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\lg^{\mu}x,$$

откуда следует

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0,$$

$$(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}+(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\qquad(\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\ 1,\ 0).$$

Разберем сначала случай $p_1+\ldots+p_\nu+\nu\neq 0$; при этом имеем

$$\alpha^{(\nu)}_{p_1\ldots p_\nu}=0;\quad \alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-(\mu+1)\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}\right].$$

Применяя последовательно последнюю формулу для

$$\mu=\nu-1,\quad \nu-2,\ \ldots,\ 0,$$

будем иметь

$$\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}},$$

$$\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\frac{\nu-1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\right],$$

$$\alpha^{(\nu-3)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\nu-3)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\frac{\nu-2}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\nu-2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\right],$$

и вообще

$$\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\left[\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}-\frac{\mu+1}{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\,\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+\right.$$

$$+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^2}\,\alpha^{(\mu+2)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}+\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\nu-1)}{(p_1+\ldots+p_\nu+\nu)^{\nu-\mu-1}}\,\alpha^{(\nu-1)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\right].$$

В случае

$$p_1+\ldots+p_\nu+\nu=0$$

упомянутые выше формулы дают

$$\alpha^{(\mu+1)}_{p_1\ldots p_\nu}=\frac{1}{\mu+1}\,\alpha^{(\mu)}_{p_1\ldots p_{\nu-1}}\qquad(\mu=\nu-1,\ \nu-2,\ \ldots,\ 0)$$

и $\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$ остаются произвольными. Таким образом, мы получим для постоянных α рекуррентные соотношения (7).

Перейдем теперь к определению вида функции

$$L_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x).$$

Определение функций $L_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x)$ и $M_{p_1\ldots p_\nu}(x)$ дает

$$L_{p_1}(b\,|\,x)=M_{p_1}(x)-M_{p_1}(b),$$

$$L_{p_1p_2}(b\,|\,x)=\int_b^x[M_{p_1}(x)-M_{p_1}(b)]\,x^{p_2}\,dx=$$

$$=M_{p_1p_2}(x)-M_{p_1p_2}(b)-M_{p_1}(b)\,[M_{p_2}(x)-M_{p_2}(b)]=$$

$$=M_{p_1p_2}(x)-M_{p_1}(b)\,M_{p_2}(x)+[M_{p_1}(b)\,M_{p_2}(b)-M_{p_1p_2}(b)].$$

Полагая

$$\overset{*}{M}_{p_1}(b)=-M_{p_1}(b);\qquad \overset{*}{M}_{p_1p_2}(b)=M_{p_1}(b)\,M_{p_2}(b)-M_{p_1p_2}(b),\tag{16}$$

мы будем иметь при $\nu=1$ и $\nu=2$

$$L_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}M_{p_1\ldots p_\mu}(b)\,M_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}(x).\tag{17}$$

Относительно этой суммы следует сделать то же замечание, которое сделано выше по поводу суммы (8). Предполагая, что формула (17) имеет место для некоторого значения ν, мы будем иметь

$$L_{p_1\ldots p_{\nu+1}}(b\,|\,x)=\int_b^x L_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x)\,x^{p_{\nu+1}}\,dx=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{M}_{p_1\ldots p_\mu}(b)\int_b^x M_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}(x)\,x^{p_{\nu+1}}\,dx=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{M}_{p_1\ldots p_\mu}(b)\,[M_{p_{\mu+1}\ldots p_{\nu+1}}(x)-M_{p_{\mu+1}\ldots p_{\nu+1}}(b)].$$

Полагая

$$\overset{*}{M}_{p_1\dots p_{\nu+1}}(b) = -\sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{M}_{p_1\dots p_\mu}(b)\, M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu+1}}(b), \tag{18}$$

получим формулу (17) для $L_{p_1\dots p_{\nu+1}}(b\,|\,x)$. Формула (18) дает коэффициенты $\overset{*}{M}(b)$.

Принимая во внимание формулу (15) для функций $M_{p_1\dots p_\nu}(x)$, мы можем утверждать в силу (16), что функции $\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x)$ имеют тот же вид для $\nu=1$ и $\nu=2$:

$$\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x) = x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1\dots p_\nu}\lg^\mu x, \tag{19}$$

где $\overset{*}{\alpha}$ — числовые коэффициенты. Пользуясь формулой (18), легко доказать, что формула (19) имеет место для всех значений ν. Мы должны построить еще рекуррентные соотношения для коэффициентов $\overset{*}{\alpha}$.

Для функций $M_{p_1\dots p_\nu}(x)$ имеем:

$$\frac{dM_{p_1\dots p_\nu}(x)}{dx} = M_{p_1\dots p_{\nu-1}}(x)\,x^{p_\nu}. \tag{20}$$

Формула (16) дает для функций $\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x)$, в случае $\nu=1$ и $\nu=2$, аналогичные соотношения:

$$\frac{d\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x)}{dx} = -x^{p_1}\overset{*}{M}_{p_2\dots p_\nu}(x). \tag{21}$$

Пользуясь вновь формулой (18), легко доказать, что формула (21) имеет место для всех значений ν. Действительно, предполагая, что (21) имеет место для значений индекса 1, 2, ..., ν и принимая во внимание (20), будем иметь в силу (18):

$$\frac{d\overset{*}{M}_{p_1\dots p_{\nu+1}}(x)}{dx} = x^{p_1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{M}_{p_2\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_{\nu+1}}(x) -$$

$$- x^{p_{\nu+1}}\sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x) = -x^{p_1}M_{p_2\dots p_{\nu+1}}(x) - x^{p_{\nu+1}}L_{p_1\dots p_\nu}(x\,|\,x).$$

Но, очевидно,

$$L_{p_1\dots p_\nu}(x\,|\,x) = 0,$$

и мы имеем формулу (21) для $\nu+1$. Таким образом

$$\overset{*}{M}_{p_1}(x) = -\int^x x^{p_1}\,dx;\quad \overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x) = -\int^x x^{p_1}\overset{*}{M}_{p_2\dots p_\nu}(x)\,dx, \tag{22}$$

и постоянную интегрирования в случае

$$p_1+\dots+p_\nu+\nu \neq 0$$

надо выбрать так, чтобы $\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x)$ имела вид (19).

Мы имеем, таким образом, для $\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\nu}(x)$ соотношения, аналогичные соотношениям для $M_{p_1\dots p_\nu}(x)$. Теперь можно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов $\overset{*}{\alpha}$ тем же методом, который применялся выше по отношению к коэффициентам α. Это приведет к формулам (7) для $\overset{*}{\alpha}$. Нужно еще определить коэффициенты $\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\dots p_\nu}$ в случае $p_1+\dots+p_\nu+\nu=0$. С этой целью рассмотрим формулу

$$L_{p_1\dots p_\nu}(x\,|\,x) = \sum_{\mu=0}^{\nu}\overset{*}{M}_{p_1\dots p_\mu}(x)\,M_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}(x) = 0,$$

или

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\left(\sum_{s=0}^{\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(s)}_{p_1\dots p_\mu}\lg^s x\right)\left(\sum_{s=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(s)}_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}\lg^s x\right) = 0. \tag{23}$$

Левая часть представляет собой полином относительно $\lg x$ и если приравняем нулю не содержащий $\lg x$ член этого полинома, то будем иметь формулу (8), определяющую коэффициенты $\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\dots p_\nu}$ при $p_1+\dots+p_\nu+\nu=0$.

Пользуясь формулами (15), (17) и (19), получим

$$L_{p_1\dots p_\nu}(b\,|\,x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\dots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\dots+p_\nu+\nu-\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1\dots p_\mu}\lg^\lambda b\sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu}\alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1}\dots p_\nu}\lg^\varkappa x,$$

и подставляя это выражение в формулу (14), будем иметь формулу (6) для интегральной нормированной матрицы $Y(b\,|\,x)$. Теорема I, таким образом, доказана.

Заметим, что в формуле (6) можно взять произвольное значение $\lg b$. Значения $\lg x$ на поверхности Римана S с логарифмической точкой разветвления $x=0$ вполне определяются тем условием, что $\lg x$ в точке b совпадает с $\lg b$ на том листе, где лежит начальная точка b.

Две интегральные нормированные матрицы $Y(b\,|\,x)$ и $Y(c\,|\,x)$, очевидно, связаны соотношением

$$Y(b\,|\,x) = AY(c\,|\,x),$$

где A — постоянная матрица. Полагая $x=b$, получим

$$I = AY(c\,|\,b) \quad \text{или} \quad A = Y(c\,|\,b)^{-1}$$

и, следовательно,

$$Y(b\,|\,x) = Y(c\,|\,b)^{-1}\,Y(c\,|\,x). \tag{24}$$

Для $x=c$ мы будем иметь

$$Y(b\,|\,c) = Y(c\,|\,b)^{-1}, \tag{25}$$

откуда следует

$$Y(b\,|\,x) = Y(b\,|\,c)\,Y(c\,|\,x). \tag{26}$$

Дифференцируя произведение

$$Y(b\,|\,x)\,Y(b\,|\,x)^{-1} = I$$

и умножая на $Y(b\,|\,x)^{-1}$ слева, получим

$$\frac{dY(b\,|\,x)^{-1}}{dx} = -Y(b\,|\,x)^{-1}\frac{dY(b\,|\,x)}{dx}\,Y(b\,|\,x)^{-1},$$

откуда, принимая во внимание, что $Y(b\,|\,x)$ удовлетворяет системе (1), получим

$$\frac{dY(b\,|\,x)^{-1}}{dx} = -\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p Y(b\,|\,x)^{-1},$$

т. е. матрица

$$Y_1 = Y(x\,|\,b) = Y(b\,|\,x)^{-1} \qquad (27)$$

есть интегральная матрица системы

$$\frac{dY_1}{dx} = -\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p \cdot Y_1, \qquad (28)$$

удовлетворяющая условию

$$Y_1\big|_{x=b} = I.$$

Чтобы получить представление для матрицы (27), надо в выражении (6) переставить буквы b и x.

Сформулируем теперь теорему, которая дает аналитическое выражение любой целой степени интегральной подстановки $V(b)$, определяемой формулой (5).

Теорема II. *Целые степени интегральной подстановки*

$$V(b)^k \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

для всех значений b области $\mathfrak{B}$ суть равномерно целые функции матриц T_p, которые могут быть представлены рядами композиции

$$V(b)^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} b^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\mu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} (2k\pi i)^{\varkappa}. \quad (29)$$

Пусть b_k — точка поверхности Римана S, которая имеет ту же комплексную координату, что и точка b, и соответствует тому, что x делает $|k|$ обходов вокруг точки $x = 0$ в положительном направлении, если $k > 0$, и в отрицательном направлении, если $k < 0$. В силу определения $V(b)$

$$V(b)^k = Y(b\,|\,b_k)$$

и формула (6) дает

$$V(b)^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} b^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} (\lg b + 2k\pi i)^{\varkappa}. \quad (30)$$

Но легко видеть, что $V(b)$ есть однозначная функция от b. Действительно, в силу формулы (24):

$$V(b) = Y(c\,|\,b)^{-1} V(c) Y(c\,|\,b).$$

Если точка b опишет замкнутый контур вокруг точки $x = 0$, то матрица $Y(c\,|\,b)^{-1}$ перейдет в такую:

$$[V(c) Y(c\,|\,b)]^{-1} = Y(c\,|\,b)^{-1} V(c)^{-1},$$

и матрица $V(b)$ будет

$$[Y(c\,|\,b)^{-1} V(c)^{-1}] V(c) [V(c) Y(c\,|\,b)] = Y(c\,|\,b)^{-1} V(c) Y(c\,|\,b) = V(b),$$

т. е. $V(b)$ — однозначная функция от b.

Матрица $[V(b)]^k$ может быть представлена рядом композиций (30) при любом порядке матриц T_p. Если коэффициенты этого ряда содержат $\lg b$, то мы будем иметь для $V(b)^k$ различные представления в виде ряда композиций, что противоречит теореме единственности [гл. I, § 25]. Следовательно, коэффициенты ряда (30) не содержат $\lg b$ и мы имеем разложение (29). Заметим еще, что это разложение для $Y(b\,|\,b_k)$ дает в силу теоремы I равномерно целую функцию матриц T_p. Теорема II, таким образом, доказана.

Числовые коэффициенты α и $\overset{*}{\alpha}$, определяемые равенствами (7), удовлетворяют ряду соотношений, которые могут быть получены из формул (6) и (30).

Вернемся к формуле (6) и заметим, что для любого значения b из области $|b| < 1$ мы имеем

$$Y(b\,|\,b) = I.$$

Это дает в силу теоремы единственности

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda x \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa x = 0$$

для любого выбора числа ν и индексов $p_1, \ldots, p_\nu$. В этой формуле значение $\lg x$ произвольно, но одно и то же во всех членах. Формула дает

$$\alpha^{(q)}_{p_1 \ldots p_\nu} + \overset{*}{\alpha}{}^{(q)}_{p_1 \ldots p_\nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{\lambda=q-(\nu-\mu)}^{q} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \alpha^{(q-\lambda)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} = 0 \quad (q = 0, 1, \ldots, \nu); \quad (31)$$

здесь следует считать $\alpha^{(\rho)}_{p_1 \ldots p_\sigma}$ и $\overset{*}{\alpha}{}^{(\rho)}_{p_1 \ldots p_\sigma}$ равными нулю при $\rho < 0$ и $\rho > \sigma$.

Мы доказали выше, что коэффициенты разложения (30) не содержат $\lg b$. Этот факт дает также некоторые соотношения для α и $\overset{*}{\alpha}$. Приравнивая нулю коэффициент при $\lg^q b$, мы имеем:

$$\sum_{\varkappa=q}^{\nu} \binom{\varkappa}{\varkappa - q} (2k\pi i)^{\varkappa - q} \alpha^{(\varkappa)}_{p_1 \ldots p_\nu} + \overset{*}{\alpha}{}^{(q)}_{p_1 \ldots p_\nu} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{\lambda=q-(\nu-\mu)}^{q} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \sum_{\varkappa=q-\lambda}^{\nu-\mu} \binom{\varkappa}{\varkappa - q + \lambda} (2k\pi i)^{\varkappa - q + \lambda} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} = 0 \quad (32)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; q = 1, 2, \ldots, \nu).$$

В силу произвольности выбора числа k эти соотношения дают ряд новых соотношений. При $k = 0$ мы будем иметь формулу (31).

Легко видеть, что формула (32) выражает тот факт, что полиномы от $\lg b$ и $\lg x$ вида

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa x$$

зависят только от $\lg\frac{x}{b}$. Действительно, если подставить в эти полиномы вместо $\lg b$ и $\lg x$ новые аргументы

$$\lg\frac{x}{b} \quad \text{и} \quad \lg b,$$

то коэффициенты разложения (30) могут быть получены подстановкой в указанные полиномы $2k\pi i$ вместо $\lg\frac{x}{b}$. Но эти коэффициенты не должны содержать $\lg b$.

Далее, легко доказать, что коэффициенты разложения (6) зависят также только от $\lg\frac{x}{b}$. Действительно, сделаем преобразование подобия

$$x = cx_1; \quad b = cb_1,$$

где c — произвольный коэффициент, модуль которого близок к единице. Матрица

$$Y_1(b_1 \mid x_1) = Y(b \mid x)$$

удовлетворяет системе

$$\frac{dY_1(b_1 \mid x_1)}{dx_1} = Y_1(b_1 \mid x_1)\sum_{p=-s}^{\infty} T_p^{(1)} x_1^p, \quad \text{где} \quad T_p^{(1)} = T_p c^{p+1},$$

и условию

$$Y_1(b_1 \mid b_1) = I,$$

и мы имеем, следовательно, для этой матрицы разложение

$$Y_1(b_1 \mid x_1) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1, \ldots, p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}^{(1)} \ldots T_{p_\nu}^{(1)} \sum_{\mu=0}^{\nu} b_1^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu} x_1^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu} \times$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b_1 \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa x_1.$$

Подставляя

$$b_1 = \frac{b}{c}; \qquad x_1 = \frac{x}{c}; \qquad T_p^{(1)} = T_p c^{p+1},$$

напишем

$$Y(b \mid x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1, \ldots, p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu} x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu} \times$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda\left(\frac{b}{c}\right) \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa\left(\frac{x}{c}\right).$$

Сравнивая это разложение с разложением (6) и пользуясь произвольностью выбора c, можно утверждать следующее: если в выражении

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu} x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa x$$

мы приведем подобные члены относительно целых степеней b и x, то коэффициенты при выражениях $b^p x^q$ будут зависеть только от $\lg\frac{x}{b}$. Если, например, индексы $p_1, \ldots, p_\nu \geqslant 0$, то записанная выше сумма не имеет подобных членов, и мы можем утверждать, что для каждого значения $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ выражение

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa x$$

зависит только от $\lg\frac{x}{b}$. Для $\mu = 0$ и $\mu = \nu$ мы будем иметь очевидные равенства

$$\alpha^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \alpha^{(2)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \ldots = \alpha^{(\nu)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \overset{*}{\alpha}{}^{(1)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \ldots = \overset{*}{\alpha}{}^{(\nu)}_{p_1 \ldots p_\nu} = 0.$$

Заметим, наконец, что результаты этого параграфа могут быть сформулированы в несколько ином виде и они имеют место также в случае, когда ряд

$$\sum_{p=-s}^{\infty} |T_p|$$

расходится. Действительно, предположим, что радиус сходимости ряда

$$\sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p \tag{33}$$

больше некоторого положительного числа R. Предположим сначала, что $R > 1$. Легко дать оценку коэффициентов $L_{p_1 \ldots p_\nu}(b \mid x)$, если b и x удовлетворяют неравенству $0 < \varepsilon < |b|, |x| < R$. Для x^p имеется оценка вида MR^p, где M — постоянная, определяемая условиями

$$M \geqslant 1; \qquad MR^{-s} \geqslant \varepsilon^{-s}.$$

Мы будем иметь, как и выше,

$$|L_{p_1 \ldots p_\nu}(b \mid x)| < \frac{M^\nu \sigma^\nu}{\nu!} R^{p_1+\ldots+p_\nu}. \tag{34}$$

Принимая во внимание, что радиус сходимости ряда (33) больше, чем R, и $R > 1$, можно утверждать, что ряды

$$\sum_{p=-s}^{\infty} |T_p| \quad \text{и} \quad \sum_{p=-s}^{\infty} |T_p| R^p$$

сходятся, т. е. матрицы $T_p R^p$ образуют также регулярную систему матриц. Мы можем теперь записать формулу (6) в виде

$$Y(b \mid x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1, \ldots, p_\nu=-s}^{\infty} T_{p_1}R^{p_1} \ldots T_{p_\nu}R^{p_\nu} \frac{L_{p_1 \ldots p_\nu}(b \mid x)}{R^{p_1+\ldots+p_\nu}}, \tag{35}$$

и оценка (34) показывает, что этот ряд есть равномерно целая функция матриц $T_p R^p$ и формула (6) имеет место для b и x, удовлетворяющих неравенству $0 < |b|, |x| < R$. Если $R < 1$, то мы можем аналогичным образом утверждать, что интегральная нормированная матрица

$$Y(b \mid x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -\infty}^{\infty} T_{p_1} R^{p_1} \ldots T_{p_\nu} R^{p_\nu} \frac{1}{R^{p_1 + \ldots + p_\nu}} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1 + \ldots + p_\mu + \mu} x^{p_{\mu+1} + \ldots + p_\nu + \nu - \mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_1 \ldots p_\mu} \lg^\lambda b \sum_{\varkappa=0}^{\nu-\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\varkappa x$$

есть равномерно целая функция матриц $T_p R^p$.

Вместо этого разложения можно написать разложение (6) и это разложение будет абсолютно сходящимся при $a < |b|$, $|x| < R$.

§ 2. Характеристика ветвления интегральной нормированной матрицы и показательная матрица

Попытаемся теперь представить интегральную нормированную матрицу $Y(b \mid x)$ в виде произведения матрицы вида x^U и матрицы, которая является однозначной функцией b и x. Этот факт даст нам характеристику ветвления $Y(b \mid x)$ относительно b и x.

Введем матрицу

$$W(b) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Lg} V(b), \tag{36}$$

где значение логарифма произвольно, иначе говоря, $W(b)$ есть некоторое решение уравнения

$$e^{2\pi i W(b)} = V(b). \tag{37}$$

Введем еще матрицу

$$\overline{Y}(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b \mid x) \tag{38}$$

или

$$Y(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Y}(b \mid x). \tag{39}$$

Легко видеть, что $\overline{Y}(b \mid x)$ есть однозначная функция от x. Действительно, если точка x опишет замкнутый контур вокруг точки $x = 0$, то эта матрица превратится в такую:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} e^{-2\pi i W(b)} V(b) Y(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} V(b)^{-1} V(b) Y(b \mid x) = \overline{Y}(b \mid x).$$

Для более детального исследования предположим, что система подстановок T_p находится в некоторой окрестности нулевых матриц, определяемой неравенством

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |T_p| \leqslant \|\rho\|, \tag{40}$$

где ρ — достаточно малое положительное число.

Выберем теперь для $W(b)$ решение уравнения (37), определяемое рядом

$$W(b) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} [V(b) - I]^\nu. \tag{41}$$

Если положительное число ρ достаточно мало, то матрица $V(b)$ близка к единичной матрице I, и ряд (41) дает определенную матрицу $W(b)$. Это — «показательная матрица» для интегральной матрицы $Y(b \mid x)$. Более детальное исследование этой матрицы будет дано ниже. Докажем теперь, что матрица $\overline{Y}(b \mid x)$ однозначна не только как функция переменной x, но и как функция переменной b. Действительно, пользуясь соотношением

$$V(b) = Y(c \mid b)^{-1} V(c) Y(c \mid b)$$

и формулой (4), можно написать

$$W(b) = Y(c \mid b)^{-1} W(c) Y(c \mid b).$$

Подставляя это выражение $W(b)$ и выражение $Y(b \mid x)$ из формулы (26) в формулу (38), получим

$$\overline{Y}(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-Y(c \mid b)^{-1} W(c) Y(c \mid b)} Y(c \mid b)^{-1} Y(c \mid x) =$$

$$= Y(c \mid b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(c)} Y(c \mid b) Y(c \mid b)^{-1} Y(c \mid x) = Y(c \mid b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(c)} Y(c \mid x)$$

или

$$\overline{Y}(b \mid x) = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^{W(c)} Y(c \mid b)\right]^{-1} Y(c \mid x).$$

Но если точка b описывает замкнутый контур вокруг начала координат, то матрица

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(c)} Y(c \mid b) = e^{-W(c) \cdot \lg \frac{b}{x}} Y(c \mid b)$$

остается неизменной, откуда и следует, что матрица $\overline{Y}(b \mid x)$ есть однозначная функция от b. Эта матрица в некоторой окрестности начала $b = x = 0$ представляется двойным рядом Лорана

$$\overline{Y}(b \mid x) = \sum_{p, q = -\infty}^{+\infty} B_{pq} x^p b^q, \tag{42}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$B_{pq} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \int \frac{\overline{Y}(b \mid x) \, db \, dx}{x^{p+1} b^{q+1}}, \tag{43}$$

где пути интегрирования суть замкнутые контуры, окружающие начало координат.

При условии (40) указанные выше матрицы обладают свойствами, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема III. *Для всех значений b из области $\mathfrak{B}$ и x из области $\mathfrak{B}_1$ матрицы $\overline{Y}(b \mid x)$, B_{pq}, $\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}$ и $W(b)$ суть равномерно голоморфные функции системы матриц T_p в области, определяемой неравенством* (40), *и мы имеем разложения в ряды*

$$\overline{Y}(b\,|\,x)=$$

$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-\infty}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}, \tag{44}$$

$$B_{pq}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-\infty}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\delta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}\delta^{(q)}_{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}, \tag{45}$$

где

$$\delta^{(q)}_p=\begin{cases}0 & (p\neq q),\\ 1 & (p=q).\end{cases} \tag{46}$$

Для сумм (44) и (45) следует иметь в виду замечание, сделанное выше о сумме (8). Например, в сумме (45) мы имеем при $\mu=0$ член

$$\delta^{(q)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\alpha^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}$$

и при $\mu=\nu$ член

$$\delta^{(p)}_{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\nu}.$$

Обратимся сначала к матрице $W(b)$. Матрица $V(b)-I$ есть равномерно целая функция системы матриц T_p без свободного члена и ряд (41) есть голоморфная функция матрицы $V(b)-I$ в некоторой окрестности нулевой матрицы. Пользуясь теоремой о подстановке ряда в ряд [ст. I, § 26], мы можем утверждать, что $W(b)$ при условии (40) есть равномерно голоморфная функция T_p без свободного члена. Пользуясь той же теоремой, можно утверждать, что матрица $\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}$ будет также равномерно голоморфной функцией матриц T_p в области (40). В силу теоремы об обратной матрице [ст. I, § 26] мы можем сказать то же самое о матрице $\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}$ и, наконец, о матрице

$$\overline{Y}(b\,|\,x)=\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}Y(b\,|\,x).$$

Таким образом, будут иметь место разложения вида

$$\overline{Y}(b\,|\,x)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-\infty}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x), \tag{47}$$

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-\infty}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}E_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x), \tag{48}$$

$$W(b)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{p_1,\ldots,p_\nu=-\infty}^{\infty}T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}Q_{p_1\ldots p_\nu}(b). \tag{49}$$

Формула (29) показывает, что в разложении матрицы $V(b)-I$ коэффициентами при $T_{p_1}\ldots T_{p_\nu}$ являются произведения вида

$$k_{p_1\ldots p_\nu}b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu},$$

где $k_{p_1\ldots p_\nu}$ не зависят от b. В силу (41) и теоремы о подстановке ряда в ряд можно утверждать, что коэффициенты $Q_{p_1\ldots p_\nu}(b)$ обладают тем же свойством. Очевидно, что коэффициенты разложения матрицы $W(b)^k$ ($k=2, 3, \ldots$) обладают также этим свойством. Далее, указанная выше теорема показывает, что коэффициенты $E_{p_1\ldots p_\nu}(b)$ разложения матрицы

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)}=e^{W(b)\lg\frac{x}{b}}$$

имеют вид произведения $b^{p_1+\ldots+p_\nu+\nu}$ на полином от аргументов $\lg b$ и $\lg x$. Формула обращения ряда композиций показывает, что коэффициенты разложения матрицы $\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)}$ имеют такой же вид. Наконец, в силу (38) коэффициенты $\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x)$ суть полиномы от аргументов b, x, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{x}$, $\lg b$ и $\lg x$. Но, как мы видели выше, $\overline{Y}(b\,|\,x)$ есть однозначная функция от b и x, и из теоремы единственности следует, что коэффициенты $\overline{L}_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x)$ не могут содержать аргументов $\lg b$ и $\lg x$ и являются, следовательно, полиномами от аргументов

$$b,\ x,\ \frac{1}{b}\ \text{и}\ \frac{1}{x}.$$

Мы имеем формулу

$$Y(b\,|\,x)=e^{W(b)\lg\frac{x}{b}}\overline{Y}(b\,|\,x)=\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^\nu\left(\frac{x}{b}\right)W(b)^\nu\right]\overline{Y}(b\,|\,x),$$

или

$$Y(b\,|\,x)=\overline{Y}(b\,|\,x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^\nu\left(\frac{x}{b}\right)W(b)^\nu\overline{Y}(b\,|\,x).$$

В разложении суммы

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\lg^\nu\left(\frac{x}{b}\right)W(b)^\nu\overline{Y}(b\,|\,x)$$

в ряд композиций по матрицам T_p коэффициенты, очевидно, являются полиномами от аргументов $\lg b$ и $\lg x$ без свободного члена. С другой стороны, коэффициенты разложения матрицы $\overline{Y}(b\,|\,x)$ не содержат $\lg b$ и $\lg x$. Последняя формула показывает, что коэффициенты разложения матрицы $\overline{Y}(b\,|\,x)$ составлены теми членами коэффициентов разложения матрицы $Y(b\,|\,x)$, которые не зависят от $\lg b$ и $\lg x$, т. е.

$$L_{p_1\ldots p_\nu}(b\,|\,x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}b^{p_1+\ldots+p_\mu+\mu}x^{p_{\mu+1}+\ldots+p_\nu+\nu-\mu}\overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1\ldots p_\mu}\alpha^{(0)}_{p_{\mu+1}\ldots p_\nu}, \tag{50}$$

откуда и следует формула (44).

Обратимся теперь к исследованию двойного ряда Лорана (42) и к доказательству формулы (45). С этой целью докажем равномерную сходимость ряда (44) относительно b и x в области $\mathfrak{B}$, определяемой неравенствами

$$0<\rho_1<|b|,\ |x|<\rho_2<1.$$

Рассмотрим ряд композиций для матрицы $V(b)-I$, который определяется формулой (29). Коэффициенты этого ряда, как мы видели выше, суть

$$L_{p_1 \dots p_\nu}(b \,|\, b_1),$$

где b_1 — точка на поверхности Римана S с комплексной координатой b. Мы дали оценку этих коэффициентов. Эта оценка имеет вид

$$|L_{p_1 \dots p_\nu}(b \,|\, b_1)| \leqslant \frac{1}{\nu!} R^\nu. \tag{51}$$

где постоянная R не зависит от b. Коэффициенты ряда (41), расположенного по степеням $[V(b)-I]$, по модулю меньше единицы. Подставляя ряд в ряд, мы будем иметь для коэффициентов ряда (49) оценку вида

$$|Q_{p_1 \dots p_\nu}(b)| \leqslant A_1 R_1^\nu, \tag{52}$$

где постоянные A_1 и R_1 не зависят от b. Это утверждение непосредственно следует из доказательства теоремы о подстановке ряда в ряд.

Рассмотрим теперь матрицу

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lg^\nu \left(\frac{x}{b}\right) W(b)^\nu. \tag{53}$$

Когда точка b расположена в области $\mathfrak{B}$ $(\rho_1 \leqslant |b| \leqslant \rho_2)$ и точка x — в некоторой области $\mathfrak{B}_1$ с конечным числом листов поверхности Римана S, мы имеем для коэффициентов этого ряда оценку вида (51). Принимая во внимание тот факт, что коэффициенты разложения матрицы $W(b)$ в ряд композиций имеют оценку (52), получим на основании упомянутой выше теоремы оценку того же вида для коэффициентов разложения матрицы (53) в ряд композиций по матрицам T_p. Возьмем, наконец, матрицу

$$\overline{Y}(b \,|\, x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b \,|\, x).$$

Применяя теорему об умножении рядов, мы видим, что коэффициенты разложения матрицы $\overline{Y}(b \,|\, x)$ имеют также оценку вида

$$|\overline{L}_{p_1 \dots p_\nu}(b \,|\, x)| \leqslant A_2 R_2^\nu,$$

где A_2 и R_2 не зависят от b и x. Мы можем, таким образом, утверждать, что ряд (44) сходится абсолютно и равномерно относительно b и x. Вычисляя для его суммы коэффициенты B_{pq} разложения в ряд Лорана по формулам (43), мы можем интегрировать ряд (44) почленно, что и дает формулы (45). Для коэффициентов рядов (45) можно, очевидно, записать оценку

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\nu} \delta^{(p)}_{p_1+\dots+p_\mu+\mu} \delta^{(q)}_{p_{\mu+1}+\dots+p_\nu+\nu-\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} \right| \leqslant \rho^{-p-q} A_2 R_2^\nu,$$

где ρ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$. Это показывает, что ряды (45) представляют равномерно голоморфные функции в некоторой окрестности нулевых матриц, определяемой неравенством вида (40). Явные выражения коэффициентов рядов (48) и (49) будут даны в следующем параграфе.

§ 3. Примитивная интегральная матрица и характеристика ветвления этой матрицы

Построение интегральной нормированной матрицы $Y(b \,|\, x)$ связано с произволом в выборе точки нормирования b, и эта матрица не является наиболее простой и наиболее естественной интегральной матрицей системы (1) в окрестности точки $x=0$. Если мы обратимся к ряду (6), определяющему матрицу $Y(b \,|\, x)$, то увидим, что этот ряд может быть представлен формально в виде произведения двух рядов

$$\left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu b\right] \times$$
$$\times \left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x\right]. \tag{54}$$

Первый из множителей этого произведения содержит только точку нормирования b и второй — только переменную x. Это приводит естественным путем к определению интегральной матрицы системы (1) с помощью формулы

$$Z(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x. \tag{55}$$

Ниже будет доказано, что этот ряд представляет равномерно голоморфные функции системы матриц T_p в некоторой области, определяемой неравенством (40), и сумма ряда (55) есть интегральная матрица системы (1).

Продолжим теперь наши исследования формального характера. Точные доказательства будут даны в конце настоящего параграфа. Произведение (54), представляющее матрицу $Y(b \,|\, x)$, обращается в единичную матрицу I при $x=b$, т. е. первый множитель при $x=b$ является обратной матрицей по отношению ко второму множителю. Мы имеем, таким образом, следующее выражение для матрицы, обратной к матрице (55):

$$Z(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1 \dots p_\nu} \lg^\mu x. \tag{56}$$

Матрица $\overline{Y}(b \,|\, x)$ может быть также представлена формально как произведение двух множителей

$$\left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}\right] \times$$
$$\times \left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}\right].$$

Принимая во внимание, что в силу формулы (38) $\overline{Y}(b \,|\, b) = I$, мы получаем еще одну новую матрицу $\overline{Z}(x)$ и обратную матрицу $\overline{Z}(x)^{-1}$:

$$\overline{Z}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}, \tag{57}$$

$$\overline{Z}(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu=-\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} x^{p_1+\dots+p_\nu+\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}. \tag{58}$$

Перейдем теперь к доказательству того, что введенные матрицы являются равномерно голоморфными функциями системы матриц T_p в некоторой области типа (40), и к установлению связи между этими матрицами. В дальнейшем будем считать, что произвольные коэффициенты

$$\alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu} \qquad (p_1 + \dots + p_\nu + \nu = 0)$$

равны нулю:

$$\alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu} = 0 \qquad (\text{для } p_1 + \dots + p_\nu + \nu = 0). \tag{59}$$

Принимая во внимание формулу (44) для $\overline{Y}(b \mid x)$ и тот факт, что коэффициенты ряда справа имеют оценку вида

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{p_1 + \dots + p_\mu + \mu} x^{p_{\mu+1} + \dots + p_\nu + \nu - \mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} \right| < AR^\nu, \tag{60}$$

где A и R не зависят от b и x, когда b и x находятся в области

$$0 \leqslant \rho_1 \leqslant |b|, \quad |x| \leqslant \rho_2 < 1, \tag{61}$$

мы можем интегрировать ряд (44) почленно по x вдоль пути (0), расположенного в области (61) и окружающего точку $x = 0$. В результате этого интегрирования будем иметь ряд композиций, коэффициенты которого имеют также оценку вида (60). Это приводит к ряду вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(0)} \overline{Y}(b \mid x) \frac{dx}{x} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu = -\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} b^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu},$$

откуда следует, что матрица, определяемая рядом (58), есть равномерно голоморфная функция системы матриц T_p в некоторой окрестности нулевых матриц, определяемой неравенством (40). Докажем теперь, что ряд (57) дает матрицу, обратную к матрице (58). Если положить

$$\gamma_{p_1 \dots p_\nu} = x^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}; \qquad \overset{*}{\gamma}_{p_1 \dots p_\nu} = x^{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu},$$

то наше утверждение будет эквивалентно соотношению

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{p_1 \dots p_\mu} \overset{*}{\gamma}_{p_{\mu+1} \dots p_\nu} = 0,$$

которое непосредственно следует из соотношения (8).

Коэффициенты разложения матрицы (57), обратной к матрице (58), очевидно, имеют также оценку вида (60). Ряды (57) и (58) равномерно сходятся относительно x в области (61) и могут быть представлены в виде рядов Лорана

$$\overline{Z}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p x^p; \qquad \overline{Z}(x)^{-1} = \sum_{p=-\infty}^{-\infty} \overset{*}{A}_p x^p, \tag{62}$$

где

$$A_p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(0)} \frac{\overline{Z}(x)}{x^{p+1}} dx; \qquad \overset{*}{A}_p = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(0)} \frac{\overline{Z}(x)^{-1}}{x^{p+1}} dx.$$

Интегрируя ряды (57) и (58), мы получим для коэффициентов A_p и $\overset{*}{A}_p$ представления в виде рядов композиций с оценкой коэффициентов типа (60):

$$A_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu = -\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \delta^{(p)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu} \qquad (p \neq 0) \tag{63}$$

и в силу условия (59):

$$A_0 = I. \tag{64}$$

Аналогично имеем для коэффициентов $\overset{*}{A}_p$

$$\overset{*}{A}_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu = -\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \delta^{(p)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu} \qquad (p \neq 0), \tag{65}$$

$$\overset{*}{A}_0 = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_\nu = -\infty}^{\infty} T_{p_1} \dots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \dots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \dots p_\nu}. \tag{66}$$

Формулы (44), (57) и (58) дают

$$\overline{Y}(b \mid x) = \overline{Z}(b)^{-1} \overline{Z}(x). \tag{67}$$

Построим систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет матрица $\overline{Y}(b \mid x)$, и затем то же самое сделаем для матрицы $\overline{Z}(x)$. Соотношение

$$\overline{Y}(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b \mid x)$$

дает

$$\frac{d\overline{Y}(b \mid x)}{dx} = \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} \frac{dY(b \mid x)}{dx} - \frac{1}{x} W(b) \left(\frac{x}{b}\right)^{-W(b)} Y(b \mid x),$$

откуда, если принять во внимание, что $Y(b \mid x)$ удовлетворяет системе (1), получаем

$$\frac{d\overline{Y}(b \mid x)}{dx} = \overline{Y}(b \mid x) \sum_{p=-\infty}^{\infty} T_p x^p - \frac{1}{x} W(b) \overline{Y}(b \mid x). \tag{68}$$

Подставляя вместо $Y(b \mid x)$ ее выражение (67) и умножая обе части формулы (68) слева на $\overline{Z}(b)$, мы получим систему дифференциальных уравнений для $\overline{Z}(x)$:

$$\frac{d\overline{Z}(x)}{dx} = \overline{Z}(x) \sum_{p=-\infty}^{\infty} T_p x^p - \frac{1}{x} \overline{Z}(b) W(b) \overline{Z}(b)^{-1} \overline{Z}(x). \tag{69}$$

По виду эта система совпадает с системой (68), но в системе (69) мы имеем вместо $W(b)$ матрицу

$$H = \overline{Z}(b) W(b) \overline{Z}(b)^{-1}, \tag{70}$$

и уравнение (69) показывает, что эта матрица H не зависит от b. Аналогия уравнений (68) и (69) приводит к тому, что матрица

$$Z(x) = x^H \overline{Z}(x) \tag{71}$$

должна удовлетворять системе (1). Действительно, подставляя в уравнение (69)

$$\overline{Z}(x) = x^{-H} Z(x)$$

и принимая во внимание (70), будем иметь

$$-\frac{1}{x} H x^{-H} Z(x) + x^{-H} \frac{dZ(x)}{dx} = x^{-H} Z(x) \sum_{p=-\infty}^{\infty} T_p x^p - \frac{1}{x} H x^{-H} Z(x),$$

откуда следует

$$\frac{dZ(x)}{dx} = Z(x) \sum_{p=-s}^{\infty} T_p x^p,$$

т. е. формула (71) дает интегральную матрицу системы (1).

Матрица $Z(x)$, определяемая формулой (71), очевидно, может быть представлена в виде ряда композиций по матрицам T_p и коэффициенты этого ряда имеют оценку вида (60). Докажем теперь, что этот ряд совпадает с рядом (55).

Действительно, интегральная матрица $Y(b\,|\,x)$ связана с интегральной матрицей $Z(x)$ очевидной формулой

$$Y(b\,|\,x) = Z(b)^{-1} Z(x)$$

или

$$Y(b\,|\,x) = Z(b)^{-1} x^H \overline{Z}(x),$$

что можно записать в виде

$$Y(b\,|\,x) = Z(b)^{-1} + Z(b)^{-1} \Bigg[\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu x H^\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu x H^\nu \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu} \Bigg]. \qquad (72)$$

Матрица H, определяемая формулой (70), может быть разложена в ряд композиций по матрицам T_p, и коэффициенты этого разложения имеют оценку вида (60). В последующем мы дадим явное выражение этого ряда. Заметим теперь, что в формуле (72) все коэффициенты при членах, которые находятся в квадратных скобках правой части, содержат x или $\lg x$ и, следовательно, эта формула показывает, что коэффициенты разложения матрицы $Z(b)^{-1}$ совпадают с членами коэффициентов разложения матрицы $Y(b\,|\,x)$, не содержащими x и $\lg x$. Мы имеем, таким образом, для $Z(x)^{-1}$ разложение (56). Непосредственной проверкой можно убедиться, что ряд (55) дает матрицу, обратную для матрицы (56), т. е. матрицу $Z(x)$, определяемую формулой (71). Мы будем строить теперь ряды композиций, которые дают многозначную составляющую x^H и целые положительные степени матрицы H. С этой целью запишем формулу (71) в виде

$$Z(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu x\, H^\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu x\, H^\nu \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu}.$$

В силу условия (59) все коэффициенты во втором слагаемом правой части содержат некоторую степень x и, следовательно, коэффициенты

разложения матрицы x^H могут быть получены отбрасыванием членов, содержащих степени x в коэффициентах разложения матрицы $Z(x)$. Это приводит в силу (55) к формуле

$$x^H = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} \lg^\mu x. \qquad (73)$$

Мы можем записать это равенство в виде

$$I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} \lg^\mu x =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu x H^\nu. \qquad (74)$$

Левая часть этой формулы дает разложение правой части в ряд композиций по матрицам T_p, и мы должны принять во внимание теорему о подстановке ряда в ряд. Формулы, указанные в этой теореме, и формулы (74) показывают, что коэффициенты разложения матрицы

$$\frac{1}{k!} H^k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

в ряд по матрицам T_p суть множители при $\lg^k x$ в коэффициентах разложения левой части формулы (74), т. е.

$$\frac{1}{k!} H^k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(k)}_{p_1 \ldots p_\nu}. \qquad (75)$$

Введем интегральную подстановку G, которую испытывает интегральная матрица $Z(x)$, когда точка x описывает замкнутый контур вокруг точки $x = 0$ в положительном направлении. Матрица $\overline{Z}(x)$ есть однозначная функция x и формула (71) дает

$$G^k = e^{2k\pi i H} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (2k\pi i)^\nu H^\nu \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Принимая во внимание (74), будем иметь

$$G^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} (2k\pi i)^\mu$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (76)$$

Построим, наконец, ряд композиций для матрицы x^{-H}, обратной для матрицы x^H. Формула (71) дает

$$x^{-H} = \overline{Z}(x)\, Z(x)^{-1}$$

или, в силу (56), (57) и теоремы об умножении рядов композиций,

$$x^{-H} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^\lambda x.$$

С другой стороны, из формулы

$$x^{-H} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \lg^{\nu} x\, H^{\nu}$$

следует, что коэффициенты разложения матрицы x^{-H} не должны содержать степеней x. Принимая во внимание еще условие (59), можно записать предыдущую формулу в виде

$$x^{-H} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^{\lambda} x. \quad (77)$$

Мы можем доказать, что член, отвечающий значению $\lambda = 0$, равен нулю.

Предыдущие рассуждения приводят к следующей теореме:

Теорема IV. *Если система матриц T_p принадлежит некоторой окрестности нулевых матриц, определяемой неравенством* (40), *то система дифференциальных уравнений* (1) *имеет примитивную интегральную матрицу*

$$Z(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} \lg^{\mu} x, \quad (78)$$

где $\alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu} = 0$ при $p_1 + \ldots + p_\nu + \nu = 0$. Эта примитивная интегральная матрица может быть представлена в виде произведения матрицы вида x^H и матрицы, однозначной в окрестности точки $x = 0$:

$$Z(x) = x^H \overline{Z}(x), \quad (79)$$

и мы имеем для множителя x^H, для целой положительной степени показательной подстановки H и для однозначного множителя $\overline{Z}(x)$ разложения

$$\overline{Z}(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p x^p, \quad (80)$$

$$A_0 = I; \quad A_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(p)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu} \ (p \neq 0), \quad (81)$$

$$x^H = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} \lg^{\mu} x, \quad (82)$$

$$H^k = k! \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \alpha^{(k)}_{p_1 \ldots p_\nu} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \quad (83)$$

Для целых степеней интегральной подстановки G матрицы $Z(x)$ имеет место разложение

$$G^k = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} (2k\pi i)^{\mu}. \quad (84)$$

Разложения обратных матриц таковы:

$$Z(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} \lg^{\mu} x, \quad (85)$$

$$\overline{Z}(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} x^{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overset{*}{A}_p x^p, \quad (86)$$

$$\overset{*}{A}_0 = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu}, \quad (87)$$

$$\overset{*}{A}_p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(p)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\nu}, \quad (88)$$

$$x^{-H} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \alpha^{(0)}_{p_1 \ldots p_\mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(\lambda)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \lg^{\lambda} x. \quad (89)$$

Для значений x, принадлежащих области $\mathfrak{B}_1$ поверхности Римана S, эти разложения дают равномерно голоморфные функции системы матриц T_p в некоторой окрестности нулевых матриц, определяемой неравенством вида (40).

Перейдем теперь к построению коэффициентов разложений (48) и (49) В силу (70) можно написать

$$W(b) = \overline{Z}(b)^{-1} H \overline{Z}(b),$$

откуда следует

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^{\nu}\left(\frac{x}{b}\right) W(b)^{\nu} = \overline{Z}(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{H} \overline{Z}(b). \quad (90)$$

Формула (82) дает

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{H} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \delta^{(0)}_{p_1 + \ldots + p_\nu + \nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha^{(\mu)}_{p_1 \ldots p_\nu} \lg^{\mu}\left(\frac{x}{b}\right). \quad (91)$$

Применяя (86), (91) и теорему об умножении рядов композиций, получим:

$$\overline{Z}(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^{H} = I + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\mu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\mu} \times$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\mu} b^{p_1 + \ldots + p_\lambda + \lambda} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\lambda} \delta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \ldots + p_\mu + \mu - \lambda} \sum_{\varkappa=1}^{\mu-\lambda} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\lambda+1} \ldots p_\mu} \lg^{\varkappa}\left(\frac{x}{b}\right)$$

и применяя еще (80):

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} b^{p_1 + \cdots + p_\lambda + \lambda} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\lambda} \delta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \cdots + p_\mu + \mu - \lambda} \sum_{\varkappa=1}^{\mu-\lambda} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\lambda+1} \ldots p_\mu} \lg^\varkappa \left(\frac{x}{b}\right) \times$$

$$\times b^{p_{\mu+1} + \cdots + p_\nu + \nu - \mu} \cdot \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu}.$$

Принимая во внимание, что $\delta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \cdots + p_\mu + \mu - \lambda} = 0$ для $p_{\lambda+1} + \ldots + p_\mu + \mu - \lambda \neq 0$, можно переписать написанную выше формулу в виде:

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} b^{p_1 + \cdots p_\nu + \nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\lambda} \delta^{(0)}_{p_{\lambda+1} + \cdots + p_\mu + \mu - \lambda} \sum_{\varkappa=0}^{\mu-\lambda} \alpha^{(\varkappa)}_{p_{\lambda+1} \ldots p_\mu} \lg^\varkappa \left(\frac{x}{b}\right) \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu}. \tag{92}$$

Записывая левую часть в виде

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu \left(\frac{x}{b}\right) W(b)^\nu$$

и приравнивая коэффициенты при $\lg^k \left(\frac{x}{b}\right)$, как мы это делали выше при построении разложений для H^k, будем иметь

$$\frac{1}{k!} W(b)^k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu = -s}^{\infty} T_{p_1} \ldots T_{p_\nu} b^{p_1 + \cdots + p_\nu + \nu} \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \delta^{(0)}_{p_{\lambda+1} \cdots p_\lambda + \mu - \lambda} \overset{*}{\alpha}{}^{(0)}_{p_1 \ldots p_\mu} \alpha^{(k)}_{p_{\lambda+1} \ldots p_\mu} \alpha^{(0)}_{p_{\mu+1} \ldots p_\nu} \tag{93}$$

$$(k = 1, 2, \ldots),$$

где, как и выше, следует считать $\alpha^{(k)}_{p_{\lambda+1} \ldots p_\mu} = 0$ при $k > \mu - \lambda$.

Мы получили, таким образом, дополнение к теореме III: *Для многозначной составляющей интегральной нормированной матрицы $Y(b \mid x)$ и для показательной матрицы $W(b)$ имеют место разложения* (92) *и* (93).

Сделаем, наконец, одно замечание по поводу предыдущего доказательства. Введя матрицы (57) и (58), мы получили уравнение (67), затем, исходя из системы дифференциальных уравнений для $\overline{Z}(x)$, построили матрицу H, определяемую уравнением (70), и, наконец, получили примитивную интегральную матрицу $Z(x)$, определяемую уравнением (71). Можно иначе провести рассуждения. Построив матрицы (57), (58) и получив уравнение (67), мы естественно делаем предположение о том, что $\overline{Z}(x)$ есть однозначная составляющая некоторой интегральной матрицы $Z(x)$, и полагаем

$$Z(x) = x^H \overline{Z}(x),$$

где H — искомая матрица. Интегральная нормированная матрица $Y(b \mid x)$ связана с матрицей $Z(x)$ формулой

$$Y(b \mid x) = Z(b)^{-1} Z(x) = \overline{Z}(b)^{-1} b^{-H} x^H \overline{Z}(x)$$

или

$$Y(b \mid x) = \overline{Z}(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^H \overline{Z}(x).$$

С другой стороны, в силу (67) имеем

$$Y(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Y}(b \mid x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Z}(b)^{-1} \overline{Z}(x),$$

откуда, сравнивая два выражения для $Y(b \mid x)$, получим

$$\overline{Z}(b)^{-1} \left(\frac{x}{b}\right)^H = \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Z}(b)^{-1}$$

или

$$\left(\frac{x}{b}\right)^H = \overline{Z}(b) \left(\frac{x}{b}\right)^{W(b)} \overline{Z}(b)^{-1} = \left(\frac{x}{b}\right)^{\overline{Z}(b)\, W(b)\, \overline{Z}(b)^{-1}}.$$

Эта формула должна иметь место для всех x и, следовательно, мы имеем

$$H = \overline{Z}(b)\, W(b)\, \overline{Z}(b)^{-1}.$$

Предыдущие вычисления показывают, что при таком определении H формула для $Z(x)$ действительно дает интегральную матрицу системы (1). Все дальнейшие вычисления могут быть проделаны так же, как и выше.

СТАТЬЯ ЧЕТВЕРТАЯ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ПОДСТАНОВОК РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЕВЫХ ПОДСТАНОВОК

§ 1. Введение

Во второй статье рассматривалась задача Пуанкаре для регулярной системы

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{YU_j}{x-a_j}. \tag{1}$$

Эту задачу можно сформулировать следующим образом: по заданной системе дифференциальных подстановок $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ построить регулярную матрицу $Y(x)$, удовлетворяющую системе (1), ее интегральные подстановки V_j в особых точках и дать полную аналитическую характеристику особенностей матрицы $Y(x)$ в точках a_j. Пусть b — фиксированная точка на конечном расстоянии, отличная от точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, и $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$ — интегральная матрица системы (1), нормированная в точке $x=b$, т. е. интегральная матрица системы (1), обращающаяся в единичную матрицу при $x=b$. Эта матрица является равномерно целой функцией дифференциальных подстановок U_j, представимой разложением в ряд [ст. II, § 3]:

$$Y_b(x)=\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x), \tag{2}$$

где гиперлогарифмы $L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)$ определяются рекуррентными соотношениями, указанными в упомянутой статье [ст. II, § 2]. Ряд (2) сходится равномерно относительно x в каждой конечной области поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, не содержащей внутри себя и на границе точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Поверхность $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ есть универсальная поверхность наложения на плоскости с точками разветвления $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$ логарифмического типа.

Разложение (2), очевидно, представляет многозначную функцию аргумента x. Для большей отчетливости удобно взять в качестве исходной однозначную матрицу, которую мы получим, рассматривая матрицу (2) лишь для точек одного листа поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$.

Для определенности мы можем, например, провести разрезы на плоскости $(a_1, \infty), (a_2, \infty), \ldots, (a_m, \infty)$, не пересекающиеся и прямолинейные на достаточно большом расстоянии от начала. Мы можем, между прочим, перенумеровать особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ таким образом, что точка, описывающая в положительном направлении окружность достаточно большого радиуса и с центром в начале, пересекает в последовательном порядке контуры $(a_1, \infty), (a_2, \infty), \ldots, (a_m, \infty)$. Таким образом мы получаем один лист поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$.

Условимся рассматривать в дальнейшем лишь те ветви изучаемых функций, которые мы получим аналитическим продолжением на этом листе, отправляясь от фиксированной точки этого листа.

В окрестности бесконечно удаленной точки мы можем, например, рассматривать только те ветви изучаемых функций, которые получим, продолжая их на наш лист вдоль путей, которые находятся между разрезами (a_m, ∞) и (a_1, ∞).

Мы должны принимать во внимание предыдущие рассмотрения каждый раз, когда имеем разложения, представляющие многозначные функции.

В силу этих соглашений мы получаем вполне определенные ветви рассматриваемых функций и придаем точный смысл указанным выше утверждениям об единственности показательных подстановок и т. д.

Произвольная интегральная матрица системы (1) может быть представлена в виде

$$Y(x)=CY_b(x), \tag{3}$$

где матрица $C=Y(b)$ не зависит от x.

Если дифференциальные подстановки U_j находятся в некоторой окрестности нулевых подстановок, то каждая регулярная матрица $Y(x)$ может быть представлена в виде

$$Y(x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}^{(j)}(x), \tag{4}$$

где матрицы $\overline{Y}^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}^{(j)}(x)^{-1}$ остаются голоморфными относительно x в точке $x=a_j$. Подстановки W_j, определяемые этим условием, единственны, и эти подстановки W_j называются *показательными подстановками* матрицы $Y(x)$ в точках a_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ [ст. II, § 5]. В частности, для матрицы $Y_b(x)$, нормированной в точке $x=b$, показательные подстановки определяются рядами композиций [ст. II, § 5]:

$$W_j(b)=U_j+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}Q_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b) \qquad (j=1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями, указанными выше [ст. II, § 5]. Ряды (5) представляют равномерно голоморфные функции подстановок $U_1, \ldots, U_m$ в некоторой окрестности нулевых подстановок. Для матрицы (3) показательными подстановками будут

$$W_j=CW_j(b)C^{-1}. \tag{6}$$

Мы видели также [ст. II, § 5], что для каждой особой точки $x=a_j$ существует единственная подстановка H_j такая, что система (1) имеет интегральную матрицу вида

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=(x-a_j)^{H_j}\overline{\theta}_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle| x\right), \tag{7}$$

где $\bar\theta_j\begin{pmatrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{pmatrix} x\Big)$ голоморфна в точке $x = a_j$ и

$$\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, a_j\right) = I, \tag{8}$$

и эта подстановка H_j равна подстановке U_j. Таким образом, мы можем записать формулу (7) в виде

$$\theta_j(x) = \theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = (x - a_j)^{U_j}\,\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right). \tag{9}$$

Эта матрица была названа *метаконинической матрицей* относительно точки a_j и дифференциальных подстановок $U_1, \dots, U_m$ в точках $a_1, \dots, a_m$. Для голоморфной составляющей $\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ и для обратной матрицы мы имеем представления с помощью рядов композиций [ст. II, § 5]:

$$\bar\theta_j(x) = \bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \bar N_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x), \tag{10}$$

$$\bar\theta_j(x)^{-1} = \bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} U_{j_1} \dots U_{j_\nu} \overset{*}{\bar N}_j(a_{j_1} \dots a_{j_\nu} \mid x). \tag{11}$$

Эти ряды, как и ряды (5), представляют равномерно голоморфные функции подстановок $U_1 \dots U_m$ в некоторой окрестности нулевых подстановок. Сходимость рядов (10) и (11) относительно x такая же, как у ряда (2). Мы видели, что функции подстановок $U_1 \dots U_m$, определяемые рядами (5), (10) и (11), суть мероморфные функции этих подстановок, однако в настоящей статье мы будем рассматривать только тот случай, когда эти подстановки принадлежат некоторой окрестности нулевых подстановок.

Показательная подстановка матрицы (9) в точке a_j, очевидно, равна подстановке U_j. Каждая интегральная матрица системы (1) может быть представлена в виде

$$Y(x) = D_j\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right), \tag{12}$$

где матрица D_j не зависит от x, и показательная подстановка матрицы $Y(x)$ в точке a_j определяется формулой

$$W_j = D_j U_j D_j^{-1}. \tag{13}$$

В частности, для нормированной матрицы мы имеем

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}\left(\frac{x - a_j}{b - a_j}\right)^{U_j}\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right), \tag{14}$$

и ее показательными подстановками будут [ст. II, § 8]:

$$W_j(b) = \bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} U_j\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right). \tag{15}$$

Интегральная подстановка матрицы (9) в точке a_j равна $e^{2\pi i U_j}$ и для матрицы (14) интегральные подстановки в точках a_j будут

$$V_j(b) = \bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} e^{2\pi i U_j}\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right). \tag{16}$$

Точка $x = \infty$, как и точка a_j, есть регулярная особая точка системы (1), и мы можем получить аналогичные предыдущим формулы относительно этой точки [ст. II, § 7]. Например, интегральная нормированная матрица может быть представлена единственным образом в виде

$$Y_b(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty(b)}\bar Y_b^{(\infty)}(x), \tag{17}$$

где $\bar Y_b^{(\infty)}(x)$ и $\bar Y_b^{(\infty)}(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x = \infty$ и $W_\infty(b)$ определяется рядом, аналогичным (5). Метаканоническая матрица в бесконечно удаленной точке определяется формулой

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{U_\infty}\bar\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right), \tag{18}$$

где

$$\bar\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, \infty\right) = I, \quad U_\infty = -(U_1 + \dots + U_m).$$

Мы имеем также формулы, аналогичные формулам (14) и (15):

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \bar\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)^{U_\infty}\bar\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, x\right), \tag{19}$$

$$W_\infty(b) = \bar\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right)^{-1} U_\infty\bar\theta_\infty\left(\begin{matrix}U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m\end{matrix}\,\middle|\, b\right). \tag{20}$$

В заключение будем рассматривать вопрос о единственности показательных матриц W_s в общем случае. Предполагая, что все матрицы $U_h\,(h = 1, 2, \dots, m)$ принадлежат окрестности нулевых матриц, мы доказали во второй статье, что существует только одна система показательных подстановок для каждой матрицы, удовлетворяющей системе (1). Докажем теперь, что это верно также в более общем случае, когда разности характеристических чисел подстановок U_h не являются целыми числами.

Можно прежде всего доказать, что если разности различных характеристических чисел матрицы U_j не являются целыми числами, то существует одна и только одна метаканоническая матрица в точке a_j, т. е. единственная матрица, удовлетворяющая системе (1) и условиям (7) и (8).

Действительно, подставляя в систему (1) матрицу вида

$$Y = (x - a_j)^{H_j}\sum_{p=0}^{\infty} A_j^{(p)}(x - a_j)^p = (x - a_j)^{H_j}\,\bar\theta_j(x), \quad \bar\theta_j(a_j) = A_j^{(0)} = I,$$

мы находим [ст. II, § 5]:

$$H_j = U_j$$

и затем

$$pA_j^{(p)} + U_jA_j^{(p)} - A_j^{(p)}U_j = -\sum_{h \neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h - a_j)^{p-q}} \qquad (p = 1, 2, \dots).$$

Но, как мы видели [ст. I, § 22], последнее уравнение определяет матрицу $A_j^{(p)}$ единственным образом, откуда и следует наше утверждение.

Если среди разностей различных характеристических чисел матрицы U_j имеется по крайней мере одна, равная целому числу, то могут представиться два случая:

1) указанные выше уравнения для $A_j^{(p)}$ несовместны и в этом случае метаканоническая матрица не существует, или

2) уравнения для $A_j^{(p)}$ имеют несколько решений. В этом случае существует несколько метаканонических матриц в точке a_j; сходимость рядов, которые определяют матрицу Y, будет доказана в следующей статье [ст. V, § 8]. Например, система

$$\frac{dY}{dx} = \frac{Y\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|}{x}$$

имеет бесконечно много метаканонических матриц

$$Y = \left\|\begin{matrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| x^{[0,1]} = x^{[0,1]}\left\{I + x\left\|\begin{matrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|\right\}.$$

Имея одну метаканоническую матрицу в точке a_j, можно найти все другие матрицы следующим образом. Если

$$\theta_j(x) = (x-a_j)^{U_j} \sum_{p=0}^{\infty} A_j^{(p)} (x-a_j)^p \qquad (A_j^{(0)} = I)$$

есть метаканоническая матрица, то произвольная метаканоническая матрица должна иметь следующий вид:

$$\theta'_j(x) = (x-a_j)^{U_j}\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} B_j^{(p)} (x-a_j)^p\right] =$$
$$= C(x-a_j)^{U_j}\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)} (x-a_j)^p\right],$$

где C — постоянная матрица. Следовательно, мы имеем

$$Q(x) = (x-a_j)^{-U_j} C (x-a_j)^{U_j} =$$
$$= \left[I + \sum_{p=1}^{\infty} B_j^{(p)} (x-a_j)^p\right]\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)} (x-a_j)^p\right]^{-1} = I + \sum_{p=1}^{\infty} C_j^{(p)} (x-a_j)^p.$$

Матрица $Q(x)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{QU_j - U_jQ}{x-a_j};$$

но если мы подставим в это уравнение ряд

$$Q(x) = I + \sum_{p=1}^{\infty} C_j^{(p)} (x-a_j)^p,$$

то получим уравнения

$$pC_j^{(p)} + U_jC_j^{(p)} - C_j^{(p)}U_j = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

В силу результатов первой статьи [ст. I, § 22] мы получаем в качестве решения этих уравнений

$$C_j^{(p)} = 0$$

для всех индексов p, за исключением конечного числа индексов, для которых выполнено равенство

$$D_p(U_j) = 0,$$

где $D_p(U_j)$ — числовая инвариантная функция матрицы U_j:

$$D_p(U_j) = \prod_{k \neq l} (p + \sigma_k - \sigma_l).$$

Следовательно, $Q(x)$ — полином относительно x, общее выражение которого легко записать, когда матрица U_j задана. Мы имеем далее

$$C = (x-a_j)^{U_j} Q(x) (x-a_j)^{-U_j},$$

и общее выражение метаканонической матрицы есть

$$\theta'_j(x) = (x-a_j)^{U_j} Q(x)\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)} (x-a_j)^p\right].$$

Предположим теперь, что все разности различных характеристических чисел каждой матрицы U_h $(h = 1, 2, \ldots, m)$ не являются целыми числами, и докажем, что показательные подстановки каждой интегральной матрицы системы (1) определяются единственным образом. Действительно, если мы имеем два представления некоторой интегральной матрицы в виде

$$Y(x) = (x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_j(x), \quad Y(x) = (x-a_j)^{W'_j}\overline{Y}'_j(x),$$

где $\overline{Y}_j(x)$, $\overline{Y}_j(x)^{-1}$, $\overline{Y}'_j(x)$, $\overline{Y}'_j(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x = a_j$, то получим

$$\overline{Y}_j(a_j)^{-1} Y(x) = \overline{Y}_j(a_j)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_j(a_j)\overline{Y}_j(a_j)^{-1}\overline{Y}_j(x) =$$
$$= (x-a_j)^{\overline{Y}_j(a_j)^{-1}W_j\overline{Y}_j(a_j)}\overline{Y}_j(a_j)^{-1}\overline{Y}_j(x)$$

и

$$\overline{Y}'_j(a_j)^{-1} Y(x) = (x-a_j)^{\overline{Y}'_j(a_j)^{-1}W'_j\overline{Y}'_j(a_j)}\overline{Y}'_j(a_j)^{-1}\overline{Y}'_j(x).$$

Эти две интегральные матрицы удовлетворяют условиям (7) и (8) и, следовательно, обращаются в метаканоническую матрицу в точке a_j, которая определяется в рассматриваемом случае единственным образом. Следовательно, мы имеем

$$\overline{Y}_j(a_j)^{-1}Y(x) = \overline{Y}'_j(a_j)^{-1}Y(x), \quad \overline{Y}_j(a_j)^{-1}W_j\overline{Y}_j(a_j) = \overline{Y}'_j(a_j)^{-1}W'_j\overline{Y}'_j(a_j),$$

откуда следует

$$W_j = W'_j.$$

В случае, когда среди разностей различных характеристических чисел подстановки U_j имеется по крайней мере одна, равная целому числу, могут представиться два случая:

1) если не существует метаканонической матрицы в точке a_j, то интегральная матрица $Y(x)$ не может иметь показательную матрицу в точке a_j;

2) если в точке a_j существует несколько метаканонических матриц, то каждая интегральная матрица имеет несколько показательных матриц в этой точке a_j.

Действительно, рассмотрим этот последний случай. Пусть $Y(x)$ — произвольная интегральная матрица, тогда в предыдущих обозначениях имеем

$$Y(x) = K\theta_j(x) = K(x-a_j)^{U_j}\sum_{p=0}^{\infty} A_j^{(p)} (x-a_j)^p,$$

где K — постоянная матрица. Мы можем написать

$$Y(x)=(x-a_j)^{KU_jK^{-1}}K\sum_{p=0}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_j(x),$$

откуда следует, что

$$W_j=KU_jK^{-1}$$

есть показательная подстановка матрицы $Y(x)$ в точке a_j. Пусть теперь

$$Y(x)=(x-a_j)^{W'_j}\overline{Y}'_j(x)$$

есть другое представление интегральной матрицы $Y(x)$, где $\overline{Y}'_j(x)$ и $\overline{Y}'_j(x)^{-1}$ голоморфны в точке a_j. Повторяя приведенное выше рассуждение, мы придем к заключению, что матрица

$$\overline{Y}'_j(a_j)^{-1}Y(x)=(x-a_j)^{\overline{Y}'_j(a_j)^{-1}W'_j\overline{Y}'_j(a_j)}\,\overline{Y}'_j(a_j)^{-1}\overline{Y}'_j(x)$$

является метаканонической и, следовательно, мы имеем

$$\overline{Y}'_j(a_j)^{-1}Y(x)=\theta'_j(x)=C\theta_j(x)=CK^{-1}Y(x),\quad \overline{Y}'_j(a_j)^{-1}W'_j\overline{Y}'_j(a_j)=U_j.$$

Первое из этих уравнений дает

$$\overline{Y}'_j(a_j)=KC^{-1}$$

и второе:

$$W'_j=KC^{-1}U_jCK^{-1}.$$

Подставляя в эту формулу общее выражение матрицы C, получим общее выражение показательной подстановки интегральной матрицы $Y(x)$. Например, рассмотрим систему

$$\frac{dY(x)}{dx}=\frac{Y\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}}{x},$$

у которой все метаканонические матрицы суть

$$Y=\begin{Vmatrix}1&\alpha\\0&1\end{Vmatrix}x^{[0,1]}.$$

Чтобы получить все показательные подстановки интегральной матрицы $Y(x)=x^{[0,1]}$, достаточно заметить, что мы можем взять

$$\theta_j(x)=x^{[0,1]},\qquad K=I,\qquad C=\begin{Vmatrix}1&\alpha\\0&1\end{Vmatrix},$$

и, следовательно,

$$W'_j=\begin{Vmatrix}1&-\alpha\\0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0&0\\0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&\alpha\\0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&-\alpha\\0&1\end{Vmatrix},$$

$$\overline{Y}'_j(a_j)=KC^{-1}=\begin{Vmatrix}1&-\alpha\\0&1\end{Vmatrix},$$

$$\overline{Y}'_j(x)=Y'_j(a_j)\left\{I+x\begin{Vmatrix}0&\alpha\\0&0\end{Vmatrix}\right\}=\begin{Vmatrix}1&-\alpha\\0&1\end{Vmatrix}+x\begin{Vmatrix}0&\alpha\\0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&\alpha(x-1)\\0&1\end{Vmatrix}.$$

Действительно, легко проверить следующее тождество:

$$x^{[0,1]}=x^{\begin{Vmatrix}0&-\alpha\\0&1\end{Vmatrix}}\cdot\begin{Vmatrix}1&\alpha(x-1)\\0&1\end{Vmatrix}.$$

Предыдущие формулы дают фундаментальные матрицы $Y_b(x)$, W_j, $\overline{\theta}_j(x)$, $\overline{\theta}_j(x)^{-1}$, представленные как функции дифференциальных подстановок $U_1,\ldots,U_m$. Обращая ряды (5), мы можем выразить матрицы $U_1,\ldots,U_m$ в виде рядов композиций матриц $W_1,\ldots,W_m$ и можем представить матрицы $Y_b(x)$, $\overline{\theta}_j(x)$, $\overline{\theta}_j(x)^{-1}$ как функции показательных подстановок $W_1,\ldots,W_m$, если эти подстановки принадлежат некоторой окрестности нулевых матриц. Решение этой задачи и является целью настоящей статьи.

§ 2. Дифференциальные подстановки и нормированная матрица

Применяя следствие из теоремы об обращении рядов композиций [ст. I, § 17] к системе рядов (5), будем иметь

$$U_j(b)=H_j\left(\begin{matrix}W_1&\ldots&W_m\\a_1&\ldots&a_m\end{matrix}\middle|\,b\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}R_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b),\tag{21}$$

где коэффициенты $R_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$R_j(a_j\,|\,b)=1;\qquad R_j(a_{j_1}\,|\,b)=0,\quad\text{если}\quad j_1\neq j;$$

$$R_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b)=$$

$$=-\sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}R_{h_1}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}\,|\,b)\,R_{h_2}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\ldots a_{j_{\varkappa_2}}\,|\,b)\ldots$$

$$\ldots R_{h_\mu}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b)\,Q_j(a_{h_1}\ldots a_{h_\mu}\,|\,b).\tag{22}$$

Ряды (21) представляют равномерно голоморфные функции подстановок $W_1,\ldots,W_m$ в окрестности нулевых подстановок, и мы пишем $U_j(b)$, так как коэффициенты этих рядов зависят от точки нормирования b.

Мы можем теперь подставить выражения (21) в ряд (2) и, пользуясь теоремой о подстановке рядов [ст. I, § 17], будем иметь для интегральной нормированной матрицы выражение в виде ряда композиций по показательным матрицам

$$Y_b(x)=\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1,&\ldots,&W_m\\a_1,&\ldots,&a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}K_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x),\tag{23}$$

где коэффициенты $K_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)$ — линейные комбинации гиперлогарифмов

$$K_b(a_{j_1}\,|\,x)=L_b(a_{j_1}\,|\,x),$$

$$K_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}R_{h_1}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}\,|\,b)\,R_{h_2}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\ldots a_{j_{\varkappa_2}}\,|\,b)\ldots$$

$$\ldots R_{h_\mu}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b)\,L_b(a_{h_1}\ldots a_{h_\mu}\,|\,x).\tag{24}$$

Ряд (23) дает $Y_b(x)$ как функцию матриц $W_1,\ldots,W_m$, равномерно голоморфную в окрестности нулевых матриц. Этот ряд, очевидно, имеет такой же характер сходимости относительно x, как и ряд (2): он равномерно сходится в любой конечной области поверхности $\mathfrak{S}(a_1,\ldots,a_m,\infty)$, не содержащей внутри и на границе точек $a_1,\ldots,a_m$.

Так как показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$ находятся в окрестности нулевых подстановок, то дифференциальные подстановки $U_1, \ldots, U_m$, а также подстановка $U_\infty = -(U_1 + \ldots + U_m)$ обладают тем же свойством. В соответствии с формулой (20) интегральная нормированная матрица (23) имеет в бесконечно удаленной точке показательную подстановку

$$W_\infty = \bar{\theta}_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b \right)^{-1} U_\infty \bar{\theta}_\infty \left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b \right). \tag{25}$$

Эта подстановка вполне определяется подстановками $W_1, \ldots, W_m$, т. е. для определенного выбора разрезов и ветви функции (23) она не зависит от b; действительно, интегральная подстановка в точке a_j матрицы (23) равна $V_j = e^{2\pi i W_j}$ и интегральная подстановка этой матрицы в точке ∞ равна в силу соглашений, сделанных в начале § 1,

$$V_\infty = (V_1 V_2 \ldots V_m)^{-1} = V_m^{-1} \ldots V_2^{-1} V_1^{-1} = e^{-2\pi i W_m} \ldots e^{-2\pi i W_2} e^{-2\pi i W_1},$$

откуда следует, что

$$W_\infty = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Lg} V_\infty = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Lg} (e^{-2\pi i W_m} \ldots e^{-2\pi i W_1}) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} W_k + \pi i \sum_{k > l} (W_k W_l - W_l W_k) + \ldots$$

Две интегральные нормированные матрицы

$$\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right), \quad \Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) \tag{26}$$

имеют различные дифференциальные подстановки. Но мы можем доказать, что эти матрицы отличаются лишь постоянным множителем справа. Чтобы доказать это, сделаем несколько предварительных замечаний. Если $Y(x)$ есть некоторая интегральная матрица системы (1), то матрица

$$Z(x) = Y(x) A, \tag{27}$$

где A — некоторая матрица, не зависящая от x и имеющая определитель, отличный от нуля, удовлетворяет системе

$$\frac{dZ}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{Z A^{-1} U_j A}{x - a_j}. \tag{28}$$

Принимая во внимание тот факт, что в формуле (27) множитель A входит справа, мы можем утверждать, что матрицы $Y(x)$ и $Z(x)$ имеют одинаковые показательные подстановки в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$. Построим теперь матрицу

$$Z_b(x) = \Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) \Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b \right)^{-1}.$$

Эта матрица нормирована в точке $x = b$ и ее показательные подстановки такие же, как у матрицы $\Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right)$, т. е. матрица $Z_b(x)$ имеет те же показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m, W_\infty$, что и матрица $\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right)$. Это утверждение справедливо только в случае, если мы

берем соответствующие ветви вышеупомянутых многозначных матриц, например, мы можем предполагать, что точки b, c, x принадлежат одному и тому же листу поверхности $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, т. е. плоскости с разрезами $(a_1, \infty), \ldots, (a_m, \infty)$. Мы можем затем рассматривать функции $Z_b(x)$ и $\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right)$ на всей поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$ с помощью аналитического продолжения. В дальнейшем мы докажем следующую лемму:

Лемма. *Полная система показательных подстановок*

$$W_1, \ldots, W_m, W_\infty$$

относительно всех особых точек $a_1, \ldots, a_m, \infty$ определяет единственным образом интегральную нормированную матрицу и ее дифференциальные подстановки.

Следовательно, мы имеем

$$\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) = \Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) \Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b \right)^{-1}. \tag{29}$$

Если мы положим $x = c$, то получим

$$\Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b \right)^{-1} = \Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| c \right). \tag{30}$$

В силу этого формула (29) может быть записана в виде

$$\Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) = \Psi_c \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) \Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| c \right). \tag{31}$$

Принимая во внимание (28), заключаем, что дифференциальные подстановки двух матриц (26) связаны соотношениями

$$H_j \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b \right) = \Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| c \right)^{-1} H_j \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| c \right) \Psi_b \left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| c \right). \tag{32}$$

Остается доказать сформулированную выше лемму. Пусть $Y(x)$ и $Y'(x)$ — две интегральные матрицы, нормированные в точке $x = b$ и имеющие показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m, W_\infty$ в точках $a_1, \ldots, a_m, \infty$. Тогда мы имеем представления

$$Y(x) = (x - a_j)^{W_j} \overline{Y}_j(x); \quad Y'(x) = (x - a_j)^{W_j} \overline{Y}'_j(x);$$

$$Y(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}_\infty(x); \quad Y'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}'_\infty(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где матрицы

$$\overline{Y}_j(x); \quad \overline{Y}(x)^{-1}; \quad \overline{Y}'_j(x); \quad \overline{Y}'_j(x)^{-1}; \quad \overline{Y}_\infty(x); \quad \overline{Y}_\infty(x)^{-1}; \quad \overline{Y}'_\infty(x); \quad \overline{Y}'_\infty(x)^{-1}$$

остаются голоморфными в окрестности точек соответственно $x = a_j$ или $x = \infty$. Мы получаем, что матрица

$$Y(x)^{-1} Y'(x) = \overline{Y}_j(x)^{-1} \overline{Y}'_j(x) = \overline{Y}_\infty(x)^{-1} \overline{Y}'_\infty(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

голоморфна на всей плоскости переменной x и приводится к постоянной матрице. В соответствии с условием нормирования эта матрица есть единичная матрица, и мы должны иметь $Y(x) = Y'(x)$.

Замечая, что в соответствии с соотношением (1) дифференциальные подстановки U_j полностью определяются соответствующей интегральной матрицей:

$$U_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} Y(x)^{-1}\frac{dY}{dx}\,dx,$$

мы завершаем доказательство леммы.

§ 3. Метаканоническая матрица

Подставляя выражения (21) в ряды (10) и (11) и полагая $x=b$, мы будем иметь равномерно голоморфные функции подстановок $W_1, \ldots, W_m$ в окрестности нулевых подстановок:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) &= \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right), \\ \bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} &= \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{33}$$

и для этих функций мы имеем разложения [ст. I, § 17]

$$\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}\overline{M}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b), \tag{34}$$

$$\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}\overset{*}{\overline{M}}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,b), \tag{35}$$

где коэффициенты определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M}_j(a_{j_1}|\,b) = \overline{N}_j(a_{j_1}|\,b); \\ &M_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b) = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_{h_1}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}|\,b)\,R_{h_2}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\ldots a_{j_{\varkappa_2}}|\,b)\ldots \\ &\ldots R_{h_\mu}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}|\,b)\,\overline{N}_j(a_{h_1}\ldots a_{h_\mu}|\,b), \end{aligned}\right\} \tag{36$_1$}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\overset{*}{\overline{M}}_j(a_{j_1}|\,b) = \overset{*}{\overline{N}}_j(a_{j_1}|\,b) \\ &\overset{*}{\overline{M}}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b) = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_{h_1}(a_{j_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}|\,b)\,R_{h_2}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\ldots a_{j_{\varkappa_2}}|\,b)\ldots \\ &\qquad\ldots R_{h_\mu}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}|\,b)\,\overset{*}{\overline{N}}_j(a_{h_1}\ldots a_{h_\mu}|\,b). \end{aligned}\right\} \tag{36$_2$}$$

Формула (15) дает

$$W_j = \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} U_j(b)\,\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right). \tag{37}$$

Следовательно, в силу соотношений (33) дифференциальные подстановки интегральной матрицы, нормированной в точке $x=b$, могут быть представлены в виде

$$U_j = \vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) W_j\,\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}. \tag{38}$$

Можно построить аналогичное выражение для самой интегральной нормированной матрицы. Действительно, в силу (14) и (15) мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) &= \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j(b)} \times \\ &\times \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \\ &= \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Подставляя последнее выражение нормированной матрицы в формулу (31), будем иметь

$$\begin{aligned} &(b-a_j)^{-W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \\ &= (c-a_j)^{-W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| c\right)^{-1}\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(c) \ldots U_m(c) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \times \\ &\qquad \times\left(\frac{c-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| c\right). \end{aligned}$$

Полагая $x=a_j$, вспоминая соотношение (8) и заменяя c на x, находим

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_j\left(\begin{matrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) &= \bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{-W_j} \times \\ &\times \bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

Подставляя это последнее выражение в соотношение (39), получим представление интегральной нормированной матрицы в виде

$$\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}. \tag{41}$$

Аналогичным образом получим представление

$$\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)\left(\frac{b}{x}\right)^{W_\infty}\bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}, \tag{42}$$

где

$$\bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \bar{\theta}_\infty\left(\begin{matrix} U_1(x) \ldots U_m(x) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right). \tag{43}$$

Матрица

$$\vartheta_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)(x-a_j)^{W_j}, \tag{44}$$

которая отличается от нормированной матрицы $\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$ только постоянным множителем

$$(b-a_j)^{-W_j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)^{-1}$$

справа, как мы видели выше, является также интегральной регулярной матрицей показательных подстановок $W_1, \ldots, W_m$ в точках $a_1, \ldots, a_m$. Записывая рассматриваемую матрицу в виде

$$\vartheta_j\begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Bigg) = (x-a_j)^{W_j}\, \overline{\vartheta}_j \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Bigg),$$

где

$$\overline{\vartheta}_j\begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Bigg) = (x-a_j)^{-W_j}\, \vartheta_j \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Bigg)(x-a_j)^{W_j}, \tag{45}$$

в соответствии с соотношением (40) мы имеем

$$\overline{\vartheta}_j\begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Bigg) = (b-a_j)^{-W_j}\, \vartheta_j \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} b \Bigg)^{-1} \times$$

$$\times\, \overline{\vartheta}_j\begin{pmatrix} U_1(b) \ldots U_m(b) \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Bigg)\, \overline{\vartheta}_j \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} b \Bigg)(b-a_j)^{W_j}.$$

Эта последняя матрица, очевидно, остается голоморфной в окрестности точки $x=a_j$ и обращается в I в этой точке. Следовательно, матрица (44) есть метаканоническая матрица относительно точки a_j, имеющая показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$ в точках $a_1, \ldots, a_m$.

Сравнивая формулы (41) и (27), мы видим, что в данном случае

$$A = \overline{\vartheta}_j\begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} b \Bigg)(b-a_j)^{W_j} = \vartheta_j(b),$$

и в силу (28) метаканоническая матрица (44) удовлетворяет системе

$$\frac{d\vartheta_j(x)}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\vartheta_j(x)\,\vartheta_j(b)^{-1}\,U_h(b)\,\vartheta_j(b)}{x-a_h}, \tag{46}$$

т. е. дифференциальные подстановки этой матрицы имеют вид

$$U_{jh} = \vartheta_j(b)^{-1} U_h(b)\, \vartheta_j(b). \tag{47}$$

Легко видеть, что эти подстановки не зависят от b. Действительно, мы имеем

$$U_{jh} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_h)} \vartheta_j(x)^{-1}\,\frac{d\vartheta_j(x)}{dx}\,dx,$$

где (a_h) — замкнутый контур, окружающий точку a_h.

В силу (44) можно записать формулу (38) следующим образом:

$$U_h(b) = \vartheta_h\begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} b \Bigg) W_h \vartheta_h \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a^1 \ldots a_m \end{pmatrix} b \Bigg)^{-1}.$$

Подставляя в систему (46) эти выражения $U_h(b)$ и полагая $b=x$, получим:

$$\frac{d\vartheta_j(x)}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{\vartheta_h(x)\,W_h\vartheta_h(x)^{-1}\,\vartheta_j(x)}{x-a_h}.$$

Полагая

$$\vartheta_j(x) = \overline{\vartheta}_j(x)(x-a_j)^{W_j}$$

и замечая, что

$$\vartheta_h(x)\,W_h\vartheta_h(x)^{-1} = \overline{\vartheta}_h(x)(x-a_h)^{W_h} W_h (x-a_h)^{-W_h}\overline{\vartheta}_h(x)^{-1} = \\ = \overline{\vartheta}_h(x)\,W_h\overline{\vartheta}_h(x)^{-1},$$

мы получим для $\overline{\vartheta}_j(x)$ уравнение

$$\frac{d\overline{\vartheta}_j(x)}{dx} = \sum_{h \neq j} \frac{\overline{\vartheta}_h(x)\,W_h\overline{\vartheta}_h(x)^{-1}\,\overline{\vartheta}_j(x)}{x-a_h} \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{48}$$

и также

$$\frac{d\overline{\vartheta}_j(x)^{-1}}{dx} = -\sum_{h \neq j} \frac{\overline{\vartheta}_j(x)^{-1}\,\overline{\vartheta}_h(x)\,W_h\overline{\vartheta}_h(x)^{-1}}{x-a_h} \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{49}$$

Но мы знаем решения этих уравнений:

$$\overline{\vartheta}_j(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}\overline{M}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x),$$

$$\overline{\vartheta}_j(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} W_{j_1}\ldots W_{j_\nu}\overset{*}{\overline{M}}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x),$$

причем эти ряды сходятся в окрестности нулевых подстановок. Если ввести обозначения

$$\overline{M}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)\,W_{j_1}\ldots W_{j_\nu} = \overline{G}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x),$$

$$\overset{*}{\overline{M}}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)\,W_{j_1}\ldots W_{j_\nu} = \overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x),$$

то получим

$$\overline{\vartheta}_j(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} \overline{G}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x), \qquad \overline{\vartheta}_j(x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} \overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (48) и приравнивая члены, содержащие $W_{j_1}W_{j_2}\ldots W_{j_\nu}$, мы найдем

$$\frac{d\overline{G}_{j_1\ldots j_\nu}(x)}{dx} = \sum_{h\neq j}\ \sum_{0<\varkappa\leqslant\lambda\leqslant\nu} \overset{*}{\overline{G}}{}^{(h)}_{j_1\ldots j_{\varkappa-1}}(x)\,W^{(h)}_{j_\varkappa}\,\overset{*}{\overline{G}}{}^{(h)}_{j_{\varkappa+1}\ldots j_\lambda}(x)\,\overline{G}^{(\cdot)}_{j_{\lambda+1}\ldots j_\nu}(x)\frac{1}{x-a_h},$$

$$\frac{d\overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x)}{dx} = \\ = -\sum_{h\neq j}\ \sum_{0\leqslant\varkappa<\lambda\leqslant\nu} \overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\varkappa}(x)\,\overline{G}^{(h)}_{j_{\varkappa+1}\ldots j_{\lambda-1}}(x)\,W^{(h)}_{j_\lambda}\,\overset{*}{\overline{G}}{}^{(h)}_{j_{\lambda+1}\ldots j_\nu}(x)\,\frac{1}{x-a_h},$$

где

$$W^{(h)}_{j_\varkappa} = \begin{cases} W_h, & \text{если } j_\varkappa = h, \\ 0, & \text{если } j_\varkappa \neq h; \end{cases}$$

замечая также, что

$$\overline{G}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(a_j) = \overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(a_j) = 0 \qquad (\nu\geqslant 1),$$

мы получаем формулы:

$$\overline{G}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x)=\int_{a_j}^{x}\sum_{h\neq j}\sum_{0<\varkappa\leqslant\lambda\leqslant\nu}\overline{G}^{(h)}_{j_1\ldots j_{\varkappa-1}}(\xi)\,W^{(h)}_{j_\varkappa}\,\overset{*}{\overline{G}}{}^{(h)}_{j_{\varkappa+1}\ldots j_\lambda}(\xi)\,\overline{G}^{(j)}_{j_{\lambda+1}\ldots j_\nu}(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-a_h},$$

$$\overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\nu}(x)=$$

$$=-\int_{a_j}^{x}\sum_{h\neq j}\sum_{0\leqslant\varkappa<\lambda\leqslant\nu}\overset{*}{\overline{G}}{}^{(j)}_{j_1\ldots j_\varkappa}(\xi)\,\overline{G}^{(h)}_{j_{\varkappa+1}\ldots j_{\lambda-1}}(\xi)\,W^{(h)}_{j_\lambda}\,\overset{*}{\overline{G}}{}^{(h)}_{j_{\lambda+1}\ldots j_\nu}(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-a_h}.$$

Сравнивая рассуждения двух последних параграфов с результатами, указанными в § 1, мы приходим к следующему заключению: регулярные интегральные матрицы можно рассматривать или как функции их дифференциальных подстановок или как функции их показательных подстановок. Указанные две точки зрения приводят к соответствующим соотношениям. Это сводится к тому факту, что регулярные матрицы, нормированные в произвольных точках, одинаково определяются как их дифференциальными подстановками, так и их показательными подстановками: в первом случае неопределенность сводится к постоянному множителю слева и во втором — к постоянному множителю справа.

§ 4. Коэффициенты разложения дифференциальных подстановок

Чтобы закончить изучение основных функций показательных подстановок в окрестности нулевых подстановок, мы должны получить еще рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения (21) и (23), которые много проще и поучительнее, чем соотношения (22) и (24), и которые определяют эти коэффициенты независимо от всех других рассмотренных нами функций.

В силу (30) и (32) мы имеем

$$U_j(b)=\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)U_j(c)\,\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}. \tag{50}$$

Фиксируя точку c, мы видим, что дифференциальные подстановки $U_j(b)$ регулярной нормированной матрицы $\Psi_b\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)$ суть аналитические функции точки нормирования b. Мы имеем

$$\frac{d}{db}\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)=\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h(c)}{b-a_h},$$

и для обратной матрицы [ст. II, § 3]:

$$\frac{d}{db}\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}=-\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h(c)}{b-a_h}\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1},$$

и, дифференцируя соотношения (50) по b, находим:

$$\frac{dU_j(b)}{db}=\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h(c)}{b-a_h}\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}\times$$

$$\times\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)U_j(c)\,\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}-$$

$$-\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)U_j(c)\,\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}\times$$

$$\times\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\sum_{h=1}^{m}\frac{U_h(c)}{b-a_h}\Psi_c\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1},$$

или в силу (50)

$$\frac{dU_j(b)}{db}=\sum_{h\neq j}\frac{U_h(b)\,U_j(b)-U_j(b)\,U_h(b)}{b-a_h}\qquad(j=1,2,\ldots,m). \tag{51}$$

Формулы (39) и (50) дают

$$U_j(b)=\left(\frac{b-a_j}{c-a_j}\right)^{W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, c\right)^{-1}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\times$$

$$\times U_j(c)\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, c\right)\left(\frac{b-a_j}{c-a_j}\right)^{-W_j}$$

или

$$(b-a_j)^{-W_j}U_j(b)\,(b-a_j)^{W_j}=(c-a_j)^{-W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, c\right)^{-1}\times$$

$$\times\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)U_j(c)\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)^{-1}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, c\right)(c-a_j)^{W_j}. \tag{52}$$

Правая часть есть матрица, голоморфная в точке $b=a_j$.

Полагая $b=a_j$, получим

$$(c-a_j)^{-W_j}\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, c\right)^{-1}U_j(c)\,\overline{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\middle|\, c\right)(c-a_j)^{W_j}$$

или в силу (38)

$$(c-a_j)^{-W_j}\,W_j\,(c-a_j)^{W_j}=W_j.$$

Мы можем, следовательно, утверждать, что функция

$$(b-a_j)^{-W_j}\,U_j(b)\,(b-a_j)^{W_j}$$

остается голоморфной относительно b в точке $b=a_j$ и

$$\left[(b-a_j)^{-W_j}U_j(b)\,(b-a_j)^{W_j}\right]_{b=a_j}=W_j. \tag{53}$$

Следовательно, дифференциальные подстановки, рассматриваемые как функции точки нормирования, суть интегральные матрицы системы дифференциальных уравнений (51), удовлетворяющие условиям (53).

Мы можем написать непосредственно интегральные матрицы системы (51), обращающиеся в постоянные матрицы $C_1, C_2, \ldots, C_m$ в точке $b=c$. Действительно, мы убеждаемся дифференцированием, что эти интегральные матрицы суть равномерно целые функции матриц $C_1, C_2, \ldots, C_m$, определяемые формулами

$$U_j(b) = \Phi_c\begin{pmatrix} C_1 \ldots C_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix}\Big| b\Big) C_j \Phi_c\begin{pmatrix} C_1 \ldots C_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix}\Big| b\Big)^{-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{54}$$

Принимая во внимание, что

$$\Phi_c\left(\begin{matrix} U_1(c) \ldots U_m(c) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, b\right) = \Psi_c\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, b\right),$$

и пользуясь формулой (50), мы можем утверждать, что общий интеграл (54) системы (51) дает матрицы $U_j(b)$, указанные выше, удовлетворяющие условиям (53), если мы положим

$$C_j = U_j(c) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

В силу (37) эти постоянные матрицы могут быть определены из системы уравнений

$$\overline{\theta}_j\left(\begin{matrix} C_1 \ldots C_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c\right)^{-1} C_j \overline{\theta}_j\left(\begin{matrix} C_1 \ldots C_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\,\Big|\, c\right) = W_j. \tag{55}$$

Как мы видели выше, правая часть формулы (52) есть голоморфная относительно b функция в точке $b = a_j$, и эта функция обращается в W_j при $b = a_j$. В силу (21), (34), (35) и (40) мы можем, кроме того, утверждать, что разложение этой правой части в ряд композиций по матрицам $W_1, \ldots, W_m$ имеет вид

$$W_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} S_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b), \tag{56}$$

где $S_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b)$ — голоморфные функции в точке $b = a_j$ и

$$S_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | a_j) = 0. \tag{57}$$

Мы имеем, следовательно,

$$U_j(b) = (b - a_j)^{W_j}\left[W_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} S_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b)\right](b - a_j)^{-W_j}$$

или

$$U_j(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lg^k(b - a_j)}{k!} W_j^k \left[W_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} S_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b)\right] \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg^k(b - a_j)}{k!} W_j^k,$$

что можно записать в виде

$$U_j(b) = W_j + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lg^k(b - a_j)}{k!} W_j^k \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} S_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg^k(b - a_j)}{k!} W_j^k. \tag{58}$$

Произведя умножение рядов композиций, мы получим ряд (21), и формула (58) показывает, что

$$R_j(a_j | b) = 1; \quad R_j(a_{j_1} | b) = 0, \text{ если } j_1 \neq j, \tag{59}$$

и

$$R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b) \quad \text{для} \quad \nu \geqslant 2, \; j_1 \neq j \text{ и } j_\nu \neq j$$

суть голоморфные функции b, обращающиеся в нуль в точке $b = a_j$, все прочие коэффициенты являются конечными суммами членов вида

$$\lg^k(b - a_j)\,\varphi(b),$$

где k — неотрицательное целое число и $\varphi(b)$ — голоморфная функция в точке $b = a_j$ и $\varphi(a_j) = 0$. Если подстановки $W_1, \ldots, W_m$ принадлежат окрестности нулевых подстановок, то ряд (21) сходится равномерно в любой конечной области поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$, не содержащей внутри и на ее границе точек $a_1, \ldots, a_m$. Подставляя этот ряд в систему (51), получим

$$\frac{d}{db} R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b) = \sum_{h \neq j} \frac{1}{b - a_h} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} [R_h(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa} | b) R_j(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu} | b) -$$
$$- R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa} | b) R_h(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu} | b)]. \tag{60}$$

Эти формулы и формулы (59) дают рекуррентные соотношения для коэффициентов $R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b)$. Интегрируя соотношения (60), мы должны принимать во внимание тот факт, что $R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b)$ имеют указанную выше форму.

§ 5. Коэффициенты разложения нормированной матрицы

Переходя к коэффициентам разложения (23), мы изучим характер ветвления функций $K_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | x)$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Проведем m разрезов $l_1, l_2, \ldots, l_m$, соединяющих точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ с бесконечно удаленной точкой. Эти разрезы не должны иметь общих точек. В окрестности точки a_j мы имеем

$$Y_b(x) = (x - a_j)^{W_j} \overline{Y}_b(x),$$

где $\overline{Y}_b(x)$ голоморфна в точке a_j. Обозначая, как всегда, через $\bar{x}$ и $\overset{+}{x}$ точки отрицательного и положительного берега разреза l_j, мы имеем

$$Y_b(\bar{x}) - Y_b(\overset{+}{x}) = \left(e^{2\pi i W_j} - 1\right) Y_b(\overset{+}{x}).$$

Подставляя вместо $Y_b(x)$ разложение (23), мы видим, что значения функций $K_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | x)$ на берегах разреза l_j связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} K_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \bar{x}) - K_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) = 0 \qquad (j_1 \neq j), \\ K_b(a_j^\lambda a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \bar{x}) - K_b(a_j^\lambda a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) = \\ = \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} \frac{(2\pi i)^\varkappa}{\varkappa!} K_b(a_j^{\lambda-\varkappa} a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | \overset{+}{x}) \qquad (j_1 \neq j). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Заметим еще, что $Y_b(b)=I$ и, следовательно,

$$K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)=0. \tag{62}$$

Пользуясь интегралом Коши, мы построим теперь систему функций, удовлетворяющих соотношениям (61) и (62). Введем с этой целью вместо x переменную

$$x'=\frac{1}{x-b}.$$

На плоскости переменной x' мы будем иметь вместо l_j новые разрезы l'_j, соединяющие точки

$$a'_j=\frac{1}{a_j-b}$$

с точкой $x'=0$.

Рассмотрим на плоскости переменной x' систему функций

$$K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x') \qquad (j_1,\dots,j_\nu=1,2,\dots,m;\ \nu=1,2,\dots), \tag{63}$$

определяемых рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} K'(a'_j|x') &= -\int\limits_{l'_j}\frac{d\xi}{\xi-x'},\\ K'(a'^{\lambda}_j a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x') &= -\int\limits_{l'_j}\sum_{\varkappa=1}^{\lambda}\frac{(2\pi i)^{\varkappa-1}}{\varkappa!}K'(a'^{\lambda-\varkappa}_j a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|\xi)\frac{d\xi}{\xi-x'}, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где $j_1\neq j$ и интегралы берутся вдоль положительных берегов разрезов l'_j. Интегралы Коши обращаются в нуль при $x'=\infty$ или при $x=b$, т. е. функции (63) удовлетворяют условиям (62). С другой стороны, в силу хорошо известной теоремы о предельных значениях интеграла Коши функции (63) удовлетворяют на берегах каждого разреза l_j соотношениям (61).

Простое вычисление показывает, что

$$K'(a'_j|x')=K_b(a_j|x)=L_b(a_j|x).$$

Предполагая, что тождества

$$K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x')=K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x) \tag{65}$$

имеют место для всех значений индекса $\nu<\mu$, мы докажем, что эти тождества имеют место для $\nu=\mu$. В силу нашего предположения функции

$$K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)-K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x') \tag{66}$$

однозначны на всей плоскости комплексной переменной x и обращаются в нуль при $x=b$. В последующем мы докажем, что $K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)$ и $K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x')$ могут иметь лишь особенности логарифмического типа, или более точно, эти функции в окрестности каждой точки $x=a_j$ или $x=\infty$ имеют вид конечной суммы выражений

$$\varphi_j(x)\lg^k(x-a_j) \quad \text{или} \quad \psi(x)\lg^k x, \tag{67}$$

где $\varphi_j(x)$ голоморфна в точке $x=a_j$, $\psi(x)$ голоморфна в точке $x=\infty$ и k — неотрицательное целое число. Принимая во внимание этот факт, мы

можем утверждать, что функции (66) суть постоянные, равные нулю, и, следовательно, тождества (65) имеют место для каждого значения ν.

Остается еще доказать наше утверждение относительно вида функций $K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)$ и $K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x')$ в окрестности точек $x=a_j$ и $x=\infty$. Формулы (24) показывают, что функция $K_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)$ есть линейная комбинация гиперлогарифмов, и в силу определения гиперлогарифмов мы можем утверждать, что они имеют указанный выше вид в окрестности точек $x=a_j$ и $x=\infty$.

Рассмотрим, наконец, функции $K'(a'_{j_1}\dots a'_{j_\nu}|x')$. При $\nu=1$ они имеют указанную выше форму. Остается доказать следующий факт: если $\varphi_j(x')$ голоморфна в точке $x'=a'_j$, то интеграл

$$\int\limits_{\lambda_j}\frac{\varphi_j(\xi)\lg^k(\xi-a'_j)}{\xi-x'}d\xi, \tag{68}$$

(λ_j — достаточно малая кривая, исходящая из точки $x'=a'_j$ и k — целое неотрицательное число) может быть представлен в окрестности точки $x'=a'_j$ как конечная сумма выражений вида

$$\psi_j(x')\lg^p(x'-a'_j),$$

где $\psi_j(x')$ — голоморфные функции в точке $x=a_j$ и $p\leqslant k+1$. Не уменьшая общности, мы можем предположить, что $a'_j=0$ и что λ_j есть отрезок прямой $(0, r)$, где r — достаточно малое положительное число. При $k=0$ наше утверждение очевидно. Действительно,

$$\int\limits_0^r\frac{\varphi_j(\xi)}{\xi-x'}d\xi=\varphi_j(x')\int\limits_0^r\frac{d\xi}{\xi-x'}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_j^{(k)}(x')}{k!}\int\limits_0^r(\xi-x')^{k-1}d\xi. \tag{69}$$

Чтобы доказать наше утверждение в общем случае, возьмем замкнутый контур C, составленный из отрезка $(0, r)$, окружности $|x'|=r$ и отрезка $(r, 0)$. Если x' находится внутри этого контура, то мы имеем

$$\begin{aligned} 2\pi i\varphi_j(x')\lg^k x' &= \int\limits_C\frac{\varphi_j(\xi)\lg^k\xi}{\xi-x'}d\xi=\\ &= \int\limits_{|\xi|=r}\frac{\varphi_j(\xi)\lg^k\xi}{\xi-x'}d\xi+\int\limits_0^r\frac{\varphi_j(\xi)\,[\lg^k\xi-(\lg\xi+2\pi i)^k]}{\xi-x'}d\xi, \end{aligned} \tag{70}$$

где первое слагаемое правой части — голоморфная функция в точке $x'=0$. Формула (70) при $k=2$ показывает, что интеграл (68) при $k=1$ в окрестности точки $x'=0$ имеет указанный выше вид. Полагая затем $k=3$, мы можем доказать то же самое для интеграла (68) в случае $k=2$ и т. д.

Мы имеем, следовательно, тождества (65) для каждого значения ν. Резюмируя полученные результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема. *Можно построить регулярную матрицу, нормированную в точке b, имеющую показательные подстановки $W_1,\dots,W_m$ в точках $a_1,\dots,a_m$ и имеющую, кроме того, показательную подстановку в бесконечно далекой точке. Эта матрица, так же как и ее дифференциальные* *подстановки суть равномерно голоморфные функции показательных подстановок в окрестности нулевых подстановок*

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) &= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} K'(a'_{j_1} \ldots a'_{j_\nu} | x'), \\
H_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} W_{j_1} \ldots W_{j_\nu} R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b),
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

где

$$x' = \frac{1}{x-b} \quad \text{и} \quad a'_j = \frac{1}{a_j - b}$$

и коэффициенты

$$K'(a'_{j_1}, \ldots, a'_{j_\nu} | x') \text{ и } R_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | b)$$

определяются рекуррентными соотношениями (64) *и* (60).

В частном случае, когда группа показательных подстановок относительно умножения коммутативна, мы имеем

$$\Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j}, \quad H_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) = W_j. \tag{72}$$

СТАТЬЯ ПЯТАЯ

ТЕОРИЯ МАТРИЦ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СИСТЕМАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение

Во второй статье мы дали полное алгорифмическое решение регулярной проблемы Пуанкаре и в предыдущей статье — решение обратной проблемы, т. е. проблемы Римана для случая, когда показательные подстановки принадлежат некоторой окрестности нулевых подстановок.

Приступая теперь к аналогичному изучению систем линейных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами, заметим, что такая система соответствующим преобразованием независимой переменной

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

всегда приводится к виду

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{Y U_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}, \tag{1}$$

где элементы $\{U_j^{(r)}\}_{kl}$ дифференциальных подстановок, так же как и параметры a_j, определяющие конфигурацию особых точек на конечном расстоянии, не зависят от x. Система (1), очевидно, характеризуется тем свойством, что все ее интегралы регулярны в бесконечно далекой точке.

Интегральную матрицу $Y(x)$ системы (1) будем называть *матрицей рационального определения* ранга $(s-1)$ с *дифференциальными подстановками* $U_j^{(1)}, \ldots, U_j^{(s)}$ в особых точках $a_j (j = 1, 2, \ldots, m)$. Матрица рационального определения ранга нуль, очевидно, является регулярной матрицей. Если матрица $Y(x)$ обращается в единичную матрицу в точке $x = b$, отличной от точек a_j, то она называется *нормированной* в этой точке. Матрица $Y(x)$ подвергается преобразованию с помощью *интегральной подстановки* V_j слева, когда x описывает замкнутый контур вокруг особой точки a_j. Группа, образованная подстановками V_j, есть группа монодромии системы (1).

Предположим, что дифференциальные подстановки $U_j^{(r)}$ и особые точки a_j заданы. Основные проблемы теории матриц рационального определения таковы:

(A) *Построение общего представления матрицы рационального определения $Y(x)$, определяемой начальными условиями в обыкновенной точке,* *и построение явных аналитических выражений ее интегральных подстановок V_j*. Это, очевидно, «иррегулярная проблема Пуанкаре» об интегрировании системы (1) и об аналитическом определении ее группы монодромии. Представление матрицы будем называть общим, если оно представляет эту матрицу во всей области ее существования относительно независимой переменной x и относительно всех параметров $U_j^{(r)}$, a_j и b.

(B) *Разложение матрицы рационального определения* $Y(x)$, т. е. выделение из матрицы $Y(x)$ регулярной матрицы $X(x)$, обладающей тем свойством, что вторая составляющая $X(x)^{-1}\,Y(x)$ однозначна на всей плоскости комплексной переменной x, так что матрица $X(x)$ характеризует ветвления матрицы $Y(x)$.

(C) *Полная аналитическая характеристика особенностей матрицы рационального определения*, касающаяся не только ее ветвлений, но и существенных однозначных особенностей однозначной составляющей $X(x)^{-1}Y(x)$. Такая характеристика будет достигнута введением *характеристических подстановок* $W_j^{(r)}$ в каждой особой точке $a_j\,(j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$. Первая из этих подстановок есть *показательная подстановка*, связанная с интегральной подстановкой соотношением

$$W_j^{(1)}=\frac{1}{2\pi i}\lg V_j, \tag{2}$$

и прочие подстановки $W_j^{(2)},\,\ldots,\,W_j^{(s)}$ не оказывают никакого влияния на ветвления.

Классическая проблема Римана в классе рассматриваемых матриц касается построения матрицы рационального определения, причем интегральные подстановки и конфигурация особых точек предполагаются заданными. Эта проблема заключает существенную неопределенность, ибо речь может идти, очевидно, только о построении регулярной составляющей $X(x)$, *однозначная составляющая остается полностью неопределенной*.

Мы устраняем эту неопределенность, рассматривая проблему:

(D) *Построения матрицы рационального определения, обладающей полностью охарактеризованными особенностями*. Это сводится к определению дифференциальных подстановок $U_j^{(r)}$, при этом характеристические подстановки $W_j^{(r)}$ и конфигурация особых точек a_j предполагаются заданными.

Пользуясь нашим методом исчисления рядов композиции линейных подстановок [ст. I], мы даем в настоящей статье алгорифмическое решение проблем (A), (B), (C) и (D). Это решение не предполагает никаких ограничений в случае проблемы (A), тогда как решение проблем (B), (C) и (D) пригодно лишь при условии, что дифференциальные или соответственно характеристические подстановки находятся в окрестности системы нулевых подстановок.

Проблема (A) об интегрировании системы (1) рассматривалась до настоящего времени в смысле построения локальных представлений (Кох) или асимптотических представлений (Пуанкаре) требуемых матриц. Общие представления этих матриц, так же как и явные аналитические выражения для соответствующих интегральных подстановок, еще отсутствовали. Связь локальных представлений, асимптотических представлений и наших общих представлений будет намечена в § 9.

Что касается проблем (B), (C) и (D), то они, насколько нам известно, даже не были поставлены.

§ 2. Решение проблемы (A)

Приступая к решению проблемы (A) Пуанкаре, введем систему функций:

$$L_b\left(a_{j_1}^{r_1},\;\ldots,\;a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right),\quad j_1\ldots j_\nu=1,\;\ldots,\;m;\,r_1\ldots r_\nu=1,2,\;\ldots,\,s;\,\nu=1,\,2,\,3,\;\ldots, \tag{3}$$

определяемых рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned}L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,x\right)&=\int_b^x\frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}\,;\\ L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\;\ldots\;a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)&=\int_b^x\frac{L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\;\ldots\;a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,\middle|\,x\right)dx}{\left(x-a_{j_\nu}\right)^{r_\nu}}\,,\end{aligned}\right\}\;. \tag{4}$$

где b — некоторая точка, отличная от точек $a_1,\;\ldots,\;a_m,\;\infty$.

Эти функции представляют собой непосредственное обобщение гиперлогарифмов

$$L_b\left(a_{j_1}\;\ldots\;a_{j_\nu}\,|\,x\right)=L_b\left(a_{j_1}^1\;\ldots\;a_{j_\nu}^1\,\middle|\,x\right)$$

[ст. II, § 2] и могут быть представлены в виде линейных комбинаций гиперлогарифмов с рациональными коэффициентами, как мы увидим ниже [§ 3].

Все функции (3) можно рассматривать как однозначные функции на универсальной поверхности наложения $\mathfrak{S}(a_1,\;\ldots,\;a_m,\;\infty)$ с точками разветвления логарифмического типа $a_1,\;\ldots,\;a_m,\;\infty$.

Обозначим через b_j ту точку с комплексной координатой b на поверхности $\mathfrak{S}(a_1,\;\ldots,\;a_m,\;\infty)$, которую мы получим, двигаясь в положительном направлении вдоль контура (a_j), содержащего внутри точку a_j и не содержащего никаких других особых точек. Значения функций (3) в точке b_j даются интегралами:

$$\left.\begin{aligned}L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,b_j\right)&=P_j\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,b\right)=\int_{(a_j)}\frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}\,;\\ L_b\left(a_{j_1}^{r_1},\;\ldots,\;a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b_j\right)&=P_j\left(a_{j_1}^{r_1}\;\ldots\;a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)=\int_{(a_j)}\frac{L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,\middle|\,x\right)dx}{\left(x-a_{j_\nu}\right)^{r_\nu}}\,,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где за начальную точку контура мы берем точку b, в которой значение гиперлогарифма обращается в нуль.

Параметры $P_j\left(a_{j_1}^{r_1}\;\ldots\;a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)$, зависящие только от конфигурации особых точек $a_1,\;\ldots,\;a_m$ и точки b, в свою очередь являются линейными комбинациями параметров конфигурации

$$P_b^{(j)}\left(a_{j_1},\;\ldots,a_{j_\nu}\right)=P_j\left(a_{j_1}^1,\;\ldots,\;a_{j_\nu}^1\,\middle|\,b\right).$$

Пользуясь функциями (3) и параметрами (5), докажем сначала теорему об общем представлении нормированной матрицы рационального определения и затем теорему, которая дает явные аналитические выражения интегральных подстановок указанной матрицы.

Теорема I. *Матрица рационального определения, имеющая дифференциальные подстановки $U_j^{(1)},\;\ldots,\;U_j^{(s)}$ в точках a_j $(j=1,\,2,\;\ldots,\;m)$ и* *нормированная в точке b, есть равномерно целая функция дифференциальных подстановок, представимая разложением*

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ U_1^{(1)} \dots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \dots a_m & \end{array}\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x\right). \tag{6}$$

Этот ряд равномерно сходится относительно x и представляет рассматриваемую матрицу в любой конечной области поверхности наложения $\mathfrak{S}(a_1, \dots, a_m, \infty)$, не содержащей внутри и на границе ни одной из особых точек $a_1, \dots, a_m$.

Теорема II. *Интегральная подстановка в точке a_j матрицы (6) есть равномерно целая функция дифференциальных подстановок, представимая разложением*

$$V_j = \Omega_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ U_1^{(1)} \dots U_m^{(1)} & b \\ a_1 \dots a_m & \end{array}\right) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b\right). \tag{7}$$

Доказательство вполне аналогично доказательству соответствующих теорем теории регулярных матриц [ст. II, § 3, 4].

Рассмотрим матрицу, обратную по отношению к матрице (6). Она удовлетворяет, очевидно, системе, сопряженной по отношению к системе (1):

$$\frac{d\overset{*}{Y}}{dx} = -\sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_j^{(r)} \overset{*}{Y}}{(x-a_j)^r},$$

и обращается в I при $x = b$. Можно доказать с помощью совершенно аналогичного метода, что эта матрица есть также равномерно целая функция подстановок $U_j^{(r)}$:

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ U_1^{(1)} \dots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \dots a_m & \end{array}\right)^{-1} =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overset{*}{L}_b\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x\right), \tag{8}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{L}_b\left(a_{j_1}^{r_1} \mid x\right) &= -\int_b^x \frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}, \\ \overset{*}{L}_b\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x\right) &= -\int_b^x \frac{\overset{*}{L}_b\left(a_{j_2}^{r_2} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x\right)}{(x-a_{j_1})^{r_1}}\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти функции $\overset{*}{L}_b\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ связаны с обобщенными гиперлогарифмами соотношениями [ст. II, § 3]:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \overset{*}{L}_b\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa} \mid x\right) L_b\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x\right) = 0. \tag{10}$$

Здесь, как и в предыдущей статье, мы должны иметь в виду, что при $\varkappa = 0$ первый множитель и при $\varkappa = \nu$ второй множитель по условию равны единице.

Ряд (8) дает общее представление нормированной матрицы, обратной к нормированной матрице, представляемой рядом (6). Когда точка x делает обход вокруг точки a_j, обратная матрица (8) подвергается преобразованию с помощью интегральной подстановки V_j^{-1} справа. Эта подстановка есть равномерно целая функция дифференциальных подстановок

$$V_j^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overset{*}{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b\right),$$

где коэффициенты определяются формулами [ст. II, § 4]:

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \mid b\right) &= -\int_{(a_j)} \frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}}, \\ \overset{*}{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid b\right) &= -\int_{(a_j)} \frac{\overset{*}{L}_b\left(a_{j_2}^{r_2} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x\right)}{(x-a_{j_1})^{r_1}}\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и они связаны с функциями (5) соотношениями

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \overset{*}{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa} \Big| b\right) P_j\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \Big| b\right) = 0. \tag{12}$$

Умножая разложение (6) слева на неособенную матрицу C, независящую от x, мы получим общее представление произвольной матрицы рационального определения, удовлетворяющей начальному условию

$$Y(b) = C$$

в произвольной обыкновенной точке. Интегральные подстановки этой матрицы получаются с помощью преобразования рядов (7) матрицей C, т. е. эти интегральные подстановки суть CV_jC^{-1}.

Если система дифференциальных подстановок $U_j^{(r)}$ коммутативна, то можно доказать, как и в случае регулярной системы [ст. II, § 3, 4], что нормированная матрица и ее интегральные подстановки будут

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ U_1^{(1)} \dots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \dots a_m & \end{array}\right) = \prod_{j=1}^{m} \left\{ \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j^{(1)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} U_j^{(r)} \frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}} - \frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]} \right\}, \tag{13}$$

$$V_j = e^{2\pi i U_j^{(1)}}.$$

Мы получаем, таким образом, следующее заключение:

Если система дифференциальных подстановок системы дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами коммутативна, то интегралы этой системы всегда представимы в конечном виде (13).

В рассматриваемом случае мы можем, очевидно, представить разложение (6) нормированной матрицы $Y_b(x)$ в виде

$$Y_b(x) = I +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu_1^1+\mu_1^2+\ldots+\mu_m^s=\nu} U_1^{(1)\,\mu_1^1} U_1^{(2)\,\mu_1^2} \ldots U_m^{(s)\,\mu_m^s} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(\mu_1^1),\ldots,(\mu_m^s)} L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \,\middle|\, x\right),$$

где внутренняя сумма распространяется на все значения индексов

$$j_1, \ldots, j_\nu = 1, \ldots, m; \; r_1, \ldots, r_\nu = 1, \ldots, s$$

таким образом, что в ряду $a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}$ символ a_1^1 повторяется μ_1^1 раз, символ a_1^2 повторяется μ_1^2 раз, ..., символ a_m^s повторяется μ_m^s раз. С другой стороны, из равенства (13) следует

$$Y_b(x) = \prod_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{\mu_j^1=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^1!} \lg^{\mu_j^1}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right) U_j^{(1)\,\mu_j^1} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{r=2}^{s} \sum_{\mu_j^r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu_j}}{\mu_j^r!} \left\{ \frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}} - \frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]\right\}^{\mu_j^r} U_j^{(r)\,\mu_j^r}.\right.$$

Сравним теперь это выражение $Y_b(x)$ с предыдущим. Если два ряда композиций от системы коммутативных матриц совпадают, то они совпадают, очевидно, если подставить вместо матриц произвольные числа; откуда вытекает, что коэффициенты этих двух рядов одинаковы. Мы видим, следовательно, что для обобщенных гиперлогарифмов должно иметь место тождество

$$\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(\mu_1^1),\ldots,(\mu_m^s)} L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \,\middle|\, x\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\mu_j^1!} \lg^{\mu_j^1}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right) \prod_{r=2}^{s} \frac{(-1)^{\mu_j^r}}{\mu_j^r} \left\{ \frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}} - \frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]\right\}^{\mu_j^r} \right\}. \quad (14)$$

Пусть, как выше, b_j — точка с комплексной координатой b на поверхности

$$\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty),$$

которую мы получим, двигаясь вдоль петли, окружающей единственную особую точку a_j в положительном направлении. Мы имеем:

$$L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \,\middle|\, b_j\right) = P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \,\middle|\, b\right),$$

$$\lg\frac{b_j-a_j}{b-a_j} = 2\pi i; \quad \lg\frac{b_j-a_{j_1}}{b-a_{j_1}} = 0 \quad \text{для} \quad j_1 \neq j,$$

$$\frac{1}{b_j-a_j} - \frac{1}{b-a_j} = 0.$$

Полагая в формуле (14) $x = b_j$, будем иметь

$$\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(\mu_1^1),\ldots,(\mu_m^s)} P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \,\middle|\, b\right) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi i)^{\mu_j^1}}{\mu_j^1!}, & \text{если } \mu_h^r = 0 \begin{pmatrix} h=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m \\ r=1,\ldots,s \end{pmatrix} \\ & \text{и} \quad \mu_j^r = 0 \quad \text{для } r \geqslant 2; \\ 0 & \text{во всех прочих случаях.} \end{cases} \quad (15)$$

Отметим, что формулу (14) можно доказать по индукции.

§ 3. Решение проблемы (B)

Перейдем теперь к решению проблемы (B) о разложении матрицы рационального определения в предположении, что дифференциальные подстановки $U_j^{(r)}$ находятся в окрестности системы нулевых подстановок.

Возьмем нормированную матрицу $Y_b(x)$. Ее интегральные подстановки V_j в силу (7) находятся в окрестности единичной матрицы I, и мы можем положить

$$W_j = \frac{1}{2\pi i} \lg V_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V_j - I)^\nu.$$

В силу (7) подстановки W_j суть равномерно голоморфные функции подстановок $U_j^{(r)}$ в указанной выше окрестности и находятся также в окрестности нулевых подстановок. Рассматривая подстановки W_j как показательные подстановки интегральной матрицы (нормированной в точке $x = b$) некоторой регулярной системы, мы заключаем в силу результатов предыдущей статьи [гл. IV, § 2], что дифференциальные подстановки T_j этой системы

$$T_j = H_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, b\right)$$

являются также равномерно голоморфными функциями подстановок $U_j^{(r)}$ в окрестности нулевых подстановок:

$$T_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} D_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \,\middle|\, b\right). \quad (16)$$

Так как интегральная нормированная матрица регулярной системы

$$X(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} T_1 \ldots T_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, x\right), \quad (17)$$

а также обратная матрица $X(x)^{-1}$ суть целые функции подстановок $T_1, \ldots, T_m$, то очевидно, что эти матрицы будут также равномерно голоморфными функциями подстановок $U_j^{(r)}$ в окрестности нулевых подстановок. Принимая во внимание, что иррегулярная матрица $Y_b(x)$ и регулярная матрица (17) имеют одинаковые интегральные подстановки, можно утверждать, что матрица

$$G_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} T_1 \ldots T_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \,\middle|\, x\right)^{-1} Y_b(x) \quad (18)$$

есть однозначная матрица на всей плоскости комплексной переменной x, и мы имеем разложение матрицы $Y_b(x)$

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)=\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} T_1\dots T_m & x \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)G_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right). \tag{19}$$

Первый множитель дает регулярную составляющую и второй — однозначную составляющую. В силу (18) однозначная составляющая есть голоморфная функция матриц $U_j^{(r)}$ в некоторой окрестности нулевых матриц:

$$G_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}E_b\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right). \tag{20}$$

Получим теперь рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений (16) и (20). Регулярная составляющая (17) удовлетворяет системе

$$\frac{dX}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{XT_j}{x-a_j}, \tag{21}$$

и для $Y_b(x)$ мы имеем

$$\frac{dY_b}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{Y_bU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}.$$

Подставляя

$$Y_b(x)=X(x)\,G_b(x)$$

и принимая во внимание (21), получим

$$X\frac{dG_b}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{XG_bU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}-\sum_{j=1}^{m}\frac{T_jG_b}{x-a_j},$$

и, следовательно, однозначная составляющая есть интегральная матрица системы

$$\frac{dG_b}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{G_bU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}-\sum_{j=1}^{m}\frac{T_jG_b}{x-a_j}. \tag{22}$$

В силу (19) эта матрица удовлетворяет начальному условию

$$G_b(b)=I. \tag{23}$$

Подставляя в систему (22) разложения (16) и (20) и принимая во внимание (23), получим соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&E_b\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,x\right)=\int_b^x\left[\frac{1}{(x-a_{j_1})^{r_1}}-\sum_{h=1}^{m}\frac{D_h\left(a_{j_1}^{r_1}\,\middle|\,b\right)}{x-a_h}\right]dx,\\
&E_b\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)=\\
&=\int_b^x\left\{\frac{E_b\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,\middle|\,x\right)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}-\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{x-a_h}\left[D_h\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}D_h\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\,\middle|\,b\right)E_b\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right]\right\}dx.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Коэффициенты $E_b(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)$ однозначной составляющей должны быть однозначными функциями на всей плоскости комплексной переменной x и, следовательно, вычеты функций под знаком интеграла в формуле (24) в точках a_j должны быть равны нулю, что дает соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&D_j(a_{j_1}^{r_1}\,|\,b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\frac{dx}{(x-a_{j_1})^{r_1}};\\
&D_j\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\left\{\frac{E_b\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\,\middle|\,x\right)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}}-\right.\\
&\left.-\sum_{h=1}^{m}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}\frac{1}{x-a_h}D_h\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\,\middle|\,b\right)E_b\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right\}dx.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Формулы (24) и (25) дают, очевидно, рекуррентные соотношения, определяющие последовательно все коэффициенты $E_b(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)$ и $D_j(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,b)$ *как рациональные функции* $x, a_1, \dots, a_m, b$.

Мы получаем, таким образом, формулу разложения

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)=\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}T_{j_1}\dots T_{j_\nu}L_b(a_{j_1},\dots,a_{j_\nu}\,|\,x)\right]\times$$

$$\times\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}E_b\left(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right], \tag{26}$$

где подстановки $T_1, \dots, T_m$ определяются соотношениями (16) и вычисление коэффициентов

$$E_b\left(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\quad\text{и}\quad D_j\left(a_{j_1}^{r_1},\dots,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)$$

требует лишь рациональных операций. Формулы (16) и (26) дают *явные аналитические выражения*, позволяющие решить проблему разложения.

Интегральные подстановки матрицы (26) записываются, очевидно, в виде

$$\Omega_j \begin{pmatrix} U_1^{(s)} \dots U_m^{(s)} & \Big| \\ \dots\dots\dots & \Big| \; b \\ U_1^{(1)} \dots U_m^{(1)} & \Big| \\ a_1 \dots a_m & \Big| \end{pmatrix} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} T_{j_1} \dots T_{j_\nu} P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu} \mid b). \qquad (27)$$

В случае, когда система дифференциальных подстановок коммутативна, мы имеем

$$T_j = U_j^{(1)},$$

и выражения регулярной и однозначной составляющей таковы:

$$\Phi_b \begin{pmatrix} T_1 \dots T_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x \Big) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{U_j^{(1)}};$$

$$O_b \begin{pmatrix} U_1^{(s)} \dots U_m^{(s)} & \Big| \\ \dots\dots\dots & \Big| \; x \\ U_1^{(1)} \dots U_m^{(1)} & \Big| \\ a_1 \dots a_m & \Big| \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{m} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s} \frac{1}{r-1} U_j^{(r)} \left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}} - \frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]},$$

что следует непосредственно из формулы (13).

Из формулы (26) следует, что вычисление коэффициентов $L_b(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x)$ целого ряда (6), дающего общее представление нормированной матрицы заданных дифференциальных подстановок, *совершается исключительно с помощью гиперлогарифмических и рациональных операций*. Действительно, разлагая правую часть формулы (26) по композициям подстановок $U_j^{(r)}$ и сравнивая полученный ряд с рядом (6), мы получим тождества

$$L_b\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) = E_b\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) + $$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\lambda} \sum_{h_1, \dots, h_\mu}^{(1, \dots, m)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \lambda} D_{h_1}\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}} \middle| b\right) \dots$$
$$\dots D_{h_\mu}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}, \dots, a_{j_\lambda}^{r_\lambda} \middle| b\right) E_b\left(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) L_b(a_{h_1}, \dots, a_{h_\mu} \mid x), \qquad (28)$$

дающие уже упоминавшиеся [§ 2] представления функций $L_b(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \mid x)$ в виде линейных комбинаций гиперлогарифмов с рациональными коэффициентами.

Тождества (28), в сущности, являются формулами для вычисления интеграла и могут быть выведены элементарным, однако, довольно длинным путем. Обозначая через $L_b^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$ функции, представляемые правыми частями формул (28), и принимая во внимание формулы (24) и (25), мы можем получить

$$\frac{d}{dx} L_b^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) = \frac{1}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}} L_b^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}} \middle| x\right).$$

Эти формулы также дают:

$$L_b^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \middle| x\right) = L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \middle| x\right) \quad \text{и} \quad L_b^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right) = 0,$$

и, следовательно, $L_b^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$ совпадают с $L_b\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)$.

Отметим еще, что в формуле (28) при $\lambda = \nu$ мы должны положить

$$E_b\left(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) = 1,$$

и при $\mu = 1$ выражение под знаками суммы будет

$$D_{h_1}\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\right) E_b\left(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) L_b(a_{h_1} \mid x).$$

Полагая в соотношении (28) $x = b_j$ [§ 2], мы получим аналогичные формулы для коэффициентов $P_j\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right)$ рядов (7):

$$P_j\left(a_{j_1}^{r_1}, \dots, a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1, \dots, h_\mu}^{1, \dots, m} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} D_{h_1}\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}} \middle| b\right) \dots$$
$$\dots D_{h_\mu}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right) P_j(a_{h_1}, \dots, a_{h_\mu} \mid b). \qquad (29)$$

Эти замечания дают существенное дополнение к теоремам I *и* II: *они сводят вычисления для получения общего представления интегральной матрицы и группы монодромии иррегулярной системы с точностью до рациональных операций к вычислениям, которые необходимы при решении тех же проблем для регулярной системы.*

Рассмотрение этого параграфа приводит нас к теореме:

Теорема III. *Матрица рационального определения, нормированная в точке b и имеющая дифференциальные подстановки $U_j^{(1)}, \dots, U_j^{(s)}$, которые находятся в окрестности нулевых подстановок, может быть представлена в виде* (26) *произведения регулярной матрицы (регулярная составляющая) и однозначной матрицы (однозначная составляющая). Дифференциальные подстановки T_j регулярной составляющей суть равномерно голоморфные функции подстановок $U_j^{(r)}$ и коэффициенты рядов* (16) *и* (20) *суть рациональные функции $x, a_1, \dots, a_m, b$, определяемые рекуррентными соотношениями* (24) *и* (25).

§ 4. Элементарные матрицы рационального определения

Прежде, чем переходить к решению проблемы (C) о полной аналитической характеристике особенностей матрицы рационального определения, мы должны рассмотреть элементарные матрицы рационального определения, имеющие лишь одну особую точку на конечном расстоянии. Такая матрица удовлетворяет системе

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{r=1}^{s} \frac{YU^{(r)}}{(x-a)^r} \qquad (s \geqslant 2). \qquad (30)$$

Так как точка $x = \infty$ является регулярной особой точкой, то мы можем почти дословно повторить рассуждения из второй статьи [ст. II, § 5, 6] относительно этой точки.

Пусть $Y_b(x)$ — интегральная нормированная матрица системы (30) и V — ее интегральная подстановка относительно точки $x = \infty$. Предположим сначала, что матрицы $U^{(r)}$ находятся в окрестности нулевых матриц. Мы имеем

$$Y_b(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^W \tilde{Y}_b(x), \qquad (31)$$

где

$$W = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Lg} V = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (V - I)^{\nu} \tag{32}$$

есть ряд композиций матриц

$$W = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{[1, \ldots, s]} U^{(r_1)} \ldots U^{(r_\nu)} Q(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | b) \tag{33}$$

и $\widetilde{Y}_b(x)$ — однозначная матрица в окрестности точки $x = \infty$, являющаяся также равномерно голоморфной функцией матриц $U^{(r)}$ в окрестности нулевых матриц:

$$\widetilde{Y}_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{[1, \ldots, s]} U^{(r_1)} \ldots U^{(r_\nu)} \widetilde{L}_b(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | x). \tag{34}$$

Эта матрица удовлетворяет системе

$$\frac{d}{dx} \widetilde{Y}_b(x) = \sum_{r=1}^{s} \frac{\widetilde{Y}_b(x)\, U^{(r)}}{(x-a)^r} + \frac{W \widetilde{Y}_b(x)}{x}. \tag{35}$$

Подставляя в эту систему ряды (33) и (34), мы заключаем, что $\widetilde{L}_b(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | x)$ определяются соотношениями:

$$\widetilde{L}_b(a^{r_1} | x) = \int_b^x \left\{ \frac{1}{(x-a)^{r_1}} + \frac{Q(a^{r_1} | b)}{x} \right\} dx,$$

$$\widetilde{L}_b(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | x) = \int_b^x \left\{ \frac{\widetilde{L}_b(a^{r_1} \ldots a^{r_{\nu-1}} | x)}{(x-a)^{r_\nu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{x} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} Q(a^{r_1} \ldots a^{r_\varkappa} | b)\, \widetilde{L}_b(a^{r_{\varkappa+1}} \ldots a^{r_\nu} | x) \right\} dx.$$

Принимая во внимание, что $\widetilde{L}_b(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | x)$ — однозначные функции в окрестности точки $x = \infty$, можно на основании этих формул утверждать, что эти функции также голоморфны относительно x в точке $x = \infty$ и, следовательно, матрица $\widetilde{Y}_b(x)$ также голоморфна в точке $x = \infty$.

То же самое имеет место и для матрицы $\widetilde{Y}_b(x)^{-1}$ [ст. II, § 8]. Вместо (31) мы можем положить

$$Y_b(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^W \overline{Y}_b(x),$$

где $\overline{Y}_b(x)$ и $\overline{Y}_b(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x = \infty$.

Можно затем построить метаканоническую интегральную матрицу в точке $x = \infty$:

$$\theta \left(\begin{array}{c|c} U^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array} \right) = \overline{Y}_b^{-1}(\infty)\, Y_b(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^H \overline{\theta}(x), \tag{36}$$

где

$$H = \overline{Y}_b(\infty)^{-1} W \overline{Y}_b(\infty) \quad \text{и} \quad \overline{\theta}(\infty) = I.$$

Применяя рассуждения из теоремы VI второй статьи, получим $H = -U^{(1)}$. Вместо (36) мы можем написать

$$\theta \left(\begin{array}{c|c} U^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array} \right) = (x-a)^{U^{(1)}} G(x), \tag{37}$$

где $G(x)$ — матрица, голоморфная в точке $x = \infty$ и $G(\infty) = I$. Следовательно, эта матрица на всей плоскости комплексной переменной x может быть представлена в виде

$$G(x) = I + \sum_{p=1}^{\infty} C^{(p)} \frac{1}{(x-a)^p}, \tag{38}$$

где матрицы $C^{(p)}$ не зависят от x. Матрица $G(x)$ удовлетворяет системе

$$\frac{dG}{dx} = \sum_{r=1}^{s} \frac{GU^{(r)}}{(x-a)^r} - \frac{U^{(1)} G}{x-a} \tag{39}$$

и начальному условию $G(\infty) = I$, указанному выше. Подставляя в систему (39) ряд композиций вида

$$G(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} U^{(r_1)} \ldots U^{(r_\nu)} E_\infty(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | x),$$

мы видим, что его коэффициенты $E_\infty(a^{r_1}, \ldots, a^{r_\nu} | x)$ определяются рекуррентными соотношениями (24), причем полагаем: $b = \infty$;

$$D(a^{r_1} | \infty) = 1, \text{ если } r_1 = 1;$$
$$D(a^{r_1} | \infty) = 0, \text{ если } r_1 > 1;$$
$$D(a^{r_1}, \ldots, a^{r_\nu} | \infty) = 0, \text{ если } \nu \geqslant 2$$
$$(j = 1;\ a_j \text{ заменено на } a).$$

Производя вычисления с помощью указанных рекуррентных соотношений, получим выражения

$$E_\infty(a^{r_1} \ldots a^{r_\nu} | x) = \frac{\gamma^{(r_1 \ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1 + \ldots + r_\nu - \nu}},$$

где численные постоянные $\gamma^{(r_1 \ldots r_\nu)}$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} &\gamma^{(r_1)} = -\frac{1}{r_1 - 1}, \text{ если } r_1 > 1; \quad \gamma^{(r_1)} = 0, \text{ если } r_1 = 1; \\ &\gamma^{(r_1, \ldots, r_\nu)} = -\frac{\gamma^{(r_1 \ldots r_{\nu-1})}}{r_1 + \ldots + r_\nu - \nu}, \text{ если } r_1 > 1; \\ &\gamma^{(r_1 \ldots r_\nu)} = -\frac{\gamma^{(r_1 \ldots r_{\nu-1})} - \gamma^{(r_2 \ldots r_\nu)}}{r_1 + \ldots + r_\nu - \nu}, \text{ если } r_1 = 1. \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

Отсюда следует, что элементарная метаканоническая матрица есть голоморфная функция дифференциальных подстановок в окрестности системы нулевых подстановок

$$\theta\left(\begin{array}{c|c} U^{(r)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array}\right)=(x-a)^{U^{(1)}}\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}\right]=$$

$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}N\left(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x\right), \tag{41}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &N\left(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x\right)=\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}, \\ &N\left((a^1)^\lambda, a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x\right)=\sum_{\varkappa=0}^{\lambda}\frac{1}{\varkappa!}\lg^{\varkappa}(x-a)\frac{\gamma^{((1)^{\lambda-\varkappa}r_1,\ldots,r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}; \end{aligned}\quad r_1>1\right\} \tag{42}$$

здесь ряды аргументов

$$\underbrace{a^1,\ldots,a^1}_{\lambda\text{ раз}},\ a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\quad\text{и}\quad\underbrace{1,\ldots,1}_{\lambda\text{ раз}},\ r_1,\ldots,r_\nu$$

записаны сокращенно:

$$(a^1)^\lambda,\ a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\quad\text{и}\quad(1)^\lambda,\ r_1,\ldots,r_\nu.$$

Представление (41) имеет место лишь при том условии, что дифференциальные подстановки находятся в окрестности нулевых подстановок. Применяя рассуждения из второй статьи [ст. II, § 6], мы можем доказать, что метаканоническая матрица есть мероморфная функция подстановок $U^{(r)}$, особенностями которой являются значения подстановки $U^{(1)}$ с целыми ненулевыми разностями характеристических чисел. Обозначая через ξ_k эти характеристические числа, положим [ст. II, § 6]:

$$\Delta\left(U^{(1)}\right)=e^{-\pi i(n-1)\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}\prod_{k<l}\frac{e^{2\pi i\xi_k}-e^{2\pi i\xi_l}}{2\pi i(\xi_k-\xi_l)}.$$

Эта функция есть целая функция элементов подстановки $U^{(1)}$, и мы имеем разложение в ряд Маклорена

$$\Delta\left(U^{(1)}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu\left(U^{(1)}\right),$$

где $\delta_\nu\left(U^{(1)}\right)$ — однородные полиномы степени ν от элементов подстановки $U^{(1)}$. Пользуясь введенными численными функциями, мы можем получить, как в статье второй, общее представление относительно дифференциальных подстановок метаканонической матрицы.

Теорема IV. *Элементарная метаканоническая матрица* (37) *есть мероморфная функция дифференциальных подстановок, особенности которой представляют значения подстановки $U^{(1)}$ с целыми разностями различных характеристических чисел. Явное общее представление этой*

матрицы в виде частного двух целых функций таково:

$$\theta\left(\begin{array}{c|c} U^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta\left(U^{(1)}\right)}\left[(x-a)^{U^{(1)}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{r_1,\ldots,r_\varkappa}^{(1,\ldots,s)}U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\varkappa)}\delta_{\nu-\varkappa}\left(U^{(1)}\right)\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\varkappa)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\varkappa-\varkappa}}\right]. \tag{43}$$

Интегральная подстановка элементарной метаканонической матрицы (43) в точке a, очевидно, есть $e^{2\pi i U^{(1)}}$.

Матрица, обратная к элементарной метаканонической матрице, очевидно, обладает аналогичными свойствами. Если дифференциальные подстановки находятся в окрестности системы нулевых подстановок, то она имеет представление

$$\theta\left(\begin{array}{c|c} U^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array}\right)^{-1}=\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}\frac{\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}\right](x-a)^{-U^{(1)}}=$$

$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U^{(r_1)}\ldots U^{(r_\nu)}\overset{*}{N}\left(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x\right), \tag{44}$$

где численные постоянные $\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1\ldots r_\nu)}$ и функции $\overset{*}{N}(a^{r_1},\ldots,a^{r_\nu}\,|\,x)$ определяются соотношениями

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1\ldots r_\varkappa)}\gamma^{(r_{\varkappa+1}\ldots r_\nu)}=0,\qquad\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\overset{*}{N}(a^{r_1}\ldots a^{r_\varkappa}\,|\,x)N(a^{r_{\varkappa+1}}\ldots a^{r_\nu}\,|\,x)=0. \tag{45}$$

Общее представление матрицы (44) дается выражением (43), в котором постоянные $\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}$ следует заменить постоянными $\overset{*}{\gamma}{}^{(r_1\ldots r_\nu)}$ и множитель $(x-a)^{U^{(1)}}$ слева — множителем $(x-a)^{-U^{(1)}}$ справа.

В некоторых частных случаях элементарные метаканонические матрицы находятся в тесной связи с функциями Бесселя. Мы имеем, например, представление

$$J_n(x)=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{\theta\left(\begin{array}{c|c} \left\|\begin{matrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{matrix}\right\| & \\ \left\|\begin{matrix}-n, & 0\\ 0, & n+1\end{matrix}\right\| & \dfrac{1}{x} \\ 0 & \end{array}\right)\right\}_{11}$$

функции Бесселя порядка n в виде элемента элементарной метаканонической матрицы.

Если дифференциальные подстановки образуют коммутативную систему, то формула (41) дает представление элементарной метаканонической матрицы в конечном виде:

$$\theta\left(\begin{array}{c|c} U^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U^{(1)} & \\ a & \end{array}\right)=(x-a)^{U^{(1)}}e^{-\sum\limits_{r=2}^{s}U^{(r)}\frac{1}{r-1}\frac{1}{(x-a)^{r-1}}}. \tag{46}$$

Мы можем записать метаканоническую матрицу в виде:

$$\theta\left(\begin{matrix} U^{(s)} \\ \vdots \\ U^{(1)} \\ a \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a)^{U^{(1)}}\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} C^{(p)} \frac{1}{(x-a)^p}\right]. \tag{47}$$

В силу предыдущих результатов это представление имеет место, если разности различных характеристических чисел подстановки $U^{(1)}$ не являются целыми. Подставляя выражение (47) в систему (30) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a)$, мы получим рекуррентные соотношения для коэффициентов $C^{(p)}$:

$$\left.\begin{aligned} &U^{(1)}C^{(p)} - pC^{(p)} - C^{(p)}U^{(1)} = \sum_{q=0}^{p-1} C^{(q)}U^{(p-q+1)}, \qquad \text{если} \quad 1 \leqslant p < s; \\ &U^{(1)}C^{(p)} - pC^{(p)} - C^{(p)}U^{(1)} = \sum_{q=p-s+1}^{p-1} C^{(q)}U^{(p-q+1)}, \quad \text{если} \quad p \geqslant s; \\ &C^{(0)} = I. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Уравнения этого вида были изучены выше [ст. I, § 22] и, пользуясь уравнениями (48), мы можем также получить указанные выше результаты. В последующем [§ 8] этот метод будет применен к случаю регулярной системы.

§ 5. Решение проблемы (C)

Переходя к решению проблемы (C) об определении особенностей матрицы рационального определения для заданных дифференциальных подстановок, вернемся к тому методу, которым мы пользовались при решении аналогичной проблемы для регулярных матриц. Мы ввели показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$ как функции дифференциальных подстановок, удовлетворяющие равенствам

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = (x-a_j)^{W_j}\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right), \tag{49}$$

где матрицы

$$\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)^{-1}$$

голоморфны в окрестности точки $x = a_j$ [ст. II, § 5]. Но функция $(x-a_j)^{W_j}$ есть элементарная матрица, отвечающая системе

$$\frac{dY}{dx} = \frac{YW_j}{x-a_j},$$

т. е., если воспользоваться понятиями предыдущего параграфа,

$$(x-a_j)^{W_j} = \theta\left(\begin{matrix} W_j \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right), \tag{50}$$

и вместо (49) мы можем написать

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \theta\left(\begin{matrix} W_j \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right)\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right). \tag{51}$$

Показательная подстановка W_j дает в этом случае не только определение ветвления, но и полную аналитическую характеристику матрицы (49)

в точке a_j с помощью элементарной регулярной матрицы (50). В общем случае матрицы рационального определения ранга $(s-1)$ вместо матрицы (50) мы будем иметь элементарную матрицу ранга $(s-1)$:

$$\theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right).$$

Докажем сначала элементарную лемму:

Лемма. *Если матрица рационального определения, а также обратная матрица голоморфны в любой точке на конечном расстоянии плоскости комплексной переменной x, то дифференциальные подстановки*

$$U_j^{(r)} \qquad (j = 1, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, s)$$

равны нулю и рассматриваемые матрицы не зависят от x.

Доказательство очевидно. Из уравнений (1) следует

$$U_j^{(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} Y^{-1}\frac{dY}{dx}(x-a_j)^{r-1}\,dx. \tag{52}$$

Матрицы $Y(x)$, $Y(x)^{-1}$ и, следовательно, матрица $Y^{-1}\frac{dY}{dx}$ в силу условий леммы, очевидно, составлены из целых функций от x.

Следовательно, интегралы (52) равны нулю, и мы имеем

$$U_j^{(r)} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, s).$$

Фундаментальная теорема о полной аналитической характеристике особенностей нормированной матрицы рационального определения может быть сформулирована следующим образом:

Теорема V. *Ряды композиций*

$$W_j^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)}\ \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} Q_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right), \tag{53}$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &Q_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}|b) = 1, \text{ если } j_1 = j,\ r_1 = r; \\ &Q_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}|b) = 0 \text{ во всех прочих случаях}; \\ &Q_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right) = \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mu=1}^{\nu}\ \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu} P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\middle| b\right) \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots P_j\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right); \\ &Q_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right) = -\frac{r-1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\Big\{L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right) + \\ &\qquad + Q_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right)\overset{*}{N}(a_j^1|x) + \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\sum_{\lambda=1}^{\nu-1}\sum_{q_1=1}^{s} Q_j^{(q_1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\,\middle|\,b\right)L_b\left(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\overset{*}{N}\left(a_j^{q_1}\,\middle|\,x\right)+\\
&+\sum_{\lambda=2}^{\nu}\sum_{\mu=2}^{\lambda}\sum_{q_1,\dots,q_\mu}^{(1,\dots,s)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1\leqslant\dots<\varkappa_{\mu-1}<\lambda} Q_j^{(q_1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\,\middle|\,b\right)\dots\\
&\qquad\dots Q_j^{(q_\mu)}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\dots a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\,\middle|\,b\right)L_b\left(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\times\\
&\qquad\quad\times\overset{*}{N}\left(a_j^{q_1}\dots a_j^{q_\mu}\,\middle|\,x\right)\Bigg\}(x-a_j)^{r-2}\,dx,\ \text{если}\ r=2,\dots,s,
\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

представляют голоморфные функции подстановок

$$U_j^{(r)}\qquad (j=1,2,\dots,m;\ r=1,2,\dots,s)$$

в окрестности системы нулевых подстановок, обладающие тем свойством, что имеют место представления:

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & x \\ a_1\ \dots\ a_m & \end{array}\right)=\theta\left(\begin{array}{c|c} W_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{array}\right)\cdot\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & x \\ a_1\ \dots\ a_m & \end{array}\right),\tag{55}$$

где матрицы

$$\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & x \\ a_1\ \dots\ a_m & \end{array}\right)\quad\text{и}\quad \overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & x \\ a_1\ \dots\ a_m & \end{array}\right)^{-1}$$

голоморфны относительно x в окрестности точки a_j. Не существует другой системы подстановок $W_j^{(r)}$, удовлетворяющих указанным условиям.

Предполагая всегда, что подстановки $U_j^{(r)}$ находятся в окрестности нулевых подстановок, мы установим сначала необходимые условия для того, чтобы подстановки $W_j^{(r)}$ обладали свойством, указанным в теореме. С этой целью возьмем матрицу

$$\overline{Y}_b^{(j)}(x)=\theta\left(\begin{array}{c|c} W_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{array}\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & x \\ a_1\ \dots\ a_m & \end{array}\right),\tag{56}$$

которая должна быть голоморфной в точке $x=a_j$. Когда x описывает контур вокруг точки a_j, первый множитель умножается справа на подстановку $e^{-2\pi i W_j^{(1)}}$ и второй множитель умножается слева на подстановку V_j, определяемую формулой (7). Следовательно, мы имеем первое необходимое условие

$$e^{-2\pi i W_j^{(1)}}\Omega_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & b \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)-I=0.\tag{57}$$

Используем еще тот факт, что разложение матрицы (56) в степенной ряд в окрестности точки a_j не содержит членов с отрицательными степенями

$$(x-a_j)^{-1},\quad (x-a_j)^{-2},\ \dots,\ (x-a_j)^{-(s-1)}.$$

Мы получаем, таким образом, $(s-1)$ следующих необходимых условий

$$\int\limits_{(a_j)}\theta\left(\begin{array}{c|c} W_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{array}\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & x \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)(x-a_j)^{r-2}\,dx=0.\tag{58}$$
$$(r=2,\dots,s)$$

Формулы (57) и (58) дают s уравнений для определения матриц $W_j^{(1)},\dots,W_j^{(s)}$. Мы можем записать эти уравнения в виде

$$e^{-2\pi i W_j^{(1)}}\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}P_j\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)\right]-I=0,\tag{59}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(a_j)}\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}W_j^{(r_1)}\dots W_j^{(r_\nu)}\overset{*}{N}\left(a_j^{r_1}\dots a_j^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right]\times\\
&\qquad\times\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right]\times\\
&\qquad\times(x-a_j)^{r-2}\,dx=0\qquad(r=2,\dots,s).
\end{aligned}\tag{60}$$

Левые части этих уравнений суть ряды композиций матриц $W_j^{(r)}$, $U_1^{(r)},\dots,U_m^{(r)}$, обращающиеся в нуль, когда эти матрицы равны нулю. Формулы (59) и (60) дают s уравнений для определения $W_j^{(1)}$, $W_j^{(2)},\dots,W_j^{(s)}$. Чтобы выяснить структуру этих уравнений, рассмотрим коэффициенты $\overset{*}{N}(a_j^{r_1}|\,x)$. В силу (45)

$$\overset{*}{N}(a_j^{r_1}\,|\,x)=-N(a_j^{r_1}\,|\,x),$$

и формулы (40) и (42) дают

$$\overset{*}{N}(a_j^{r_1}\,|\,x)=\frac{1}{(r_1-1)(x-a_j)^{r_1-1}},\quad\text{если}\quad r_1>1;\quad \overset{*}{N}(a_j^{1}\,|\,x)=-\lg(x-a_j),$$

и, следовательно, для $r_1>1$;

$$\int\limits_{(a_j)}\overset{*}{N}(a_j^{r_1}\,|\,x)(x-a_j)^{r-2}\,dx=\begin{cases}0, & \text{если}\ r\neq r_1;\\ \dfrac{2\pi i}{r-1}, & \text{если}\ r=r_1.\end{cases}$$

Мы можем, следовательно, представить уравнения (60) в виде

$$\begin{aligned}
W_j^{(r)}={}&\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\alpha_{j_1\dots j_\nu}^{r_1\dots r_\nu}(r)+\\
&+W_j^{(1)}\beta(r)+\sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{q_1,\dots,q_\mu}^{(1,\dots,s)}W_j^{(q_1)}\dots W_j^{(q_\mu)}\gamma^{q_1\dots q_\mu}(r)+\\
&+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{q_1,\dots,q_\mu}^{(1,\dots,s)}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}W_j^{(q_1)}\dots W_j^{(q_\mu)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\delta_{j_1\dots j_\nu}^{q_1\dots q_\mu;\,r_1\dots r_\nu}(r).
\end{aligned}\tag{61}$$

где

$$\alpha^{r_1 \dots r_\nu}_{j_1 \dots j_\nu}(r) = -\frac{r-1}{2\pi i} \int\limits_{(a_j)} L_b\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| x\right)(x-a_j)^{r-2}\,dx,$$

$$\beta(r) = -\frac{r-1}{2\pi i} \int\limits_{(a_j)} \overset{*}{N}(a^1_j \mid x)(x-a_j)^{r-2}\,dx,$$

$$\gamma^{q_1 \dots q_\nu}(r) = -\frac{r-1}{2\pi i} \int\limits_{(a_j)} \overset{*}{N}(a^{q_1}_j \dots a^{q_\nu}_j \mid x)(x-a_j)^{r-2}\,dx,$$

$$\delta^{q_1 \dots q_\mu;\ r_1 \dots r_\nu}_{j_1 \dots j_\nu}(r) = -\frac{r-1}{2\pi i} \int\limits_{(a_j)} \overset{*}{N}(a^{q_1}_j \dots a^{q_\mu}_j \mid x) \times$$
$$\times L_b\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| x\right)(x-a_j)^{r-2}\,dx. \tag{62}$$

Уравнение (59) приводит к определению матрицы $W^{(1)}_j$:

$$W^{(1)}_j = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}(V_j - I)^\nu,$$

где

$$V_j = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U^{(r_1)}_{j_1} \dots U^{(r_\nu)}_{j_\nu} P_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| b\right).$$

Подставляя последний ряд в выражение $W^{(1)}_j$, мы будем иметь для этой матрицы разложение (53), коэффициенты которого

$$Q^{(1)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| b\right)$$

даются формулами (54). Подставим теперь в формулы (61) ряды композиций (53). Сравнивая подобные члены, мы будем иметь для коэффициентов $Q^{(r)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| b\right)$ рекуррентные соотношения

$$Q^{(r)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| b\right) = \alpha^{r_1 \dots r_\nu}_{j_1 \dots j_\nu}(r) + Q^{(1)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| b\right)\beta(r) +$$
$$+ \sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{q_1, \dots, q_\mu}^{(1, \dots, s)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} Q^{(q_1)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_{\varkappa_1}}_{j_{\varkappa_1}} \middle| b\right) \dots$$
$$\dots Q^{(q_\mu)}_j\left(a^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| b\right)\gamma^{q_1 \dots q_\mu}(r) +$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \sum_{q_1=1}^{s} Q^{(q_1)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\lambda}_{j_\lambda} \middle| b\right)\delta^{q_1;\ r_{\lambda+1} \dots r_\nu}_{j_{\lambda+1} \dots j_\nu}(r) +$$
$$+ \sum_{\lambda=2}^{\nu-1} \sum_{\mu=2}^{\lambda} \sum_{q_1, \dots, q_\mu}^{(1, \dots, s)} \sum_{1 \leqslant \varkappa_1 < \dots < \varkappa_{\mu-1} < \lambda} Q^{(q_1)}_j\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_{\varkappa_1}}_{j_{\varkappa_1}} \middle| b\right) \dots$$
$$\dots Q^{(q_\mu)}_j\left(a^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}} \dots a^{r_\lambda}_{j_\lambda} \middle| b\right)\delta^{q_1 \dots q_\mu;\ r_{\lambda+1} \dots r_\nu}_{j_{\lambda+1} \dots j_\nu}(r).$$

Подставляя выражения (62), мы будем иметь рекуррентные соотношения (54). Заметим, что в этих соотношениях мы должны положить

$$L_b\left(a^{r_{\lambda+1}}_{j_{\lambda+1}} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| x\right) = 1 \qquad \text{при } \lambda = \nu.$$

В силу (59) матрица (56) есть однозначная функция в окрестности точки $x = a_j$. Из этого факта следует, что интегралы, входящие в формулы (54), не зависят от начальной точки интегрирования, но они зависят от выбора значения $\lg(x - a_j)$ на рассматриваемом листе поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \dots, a_m, \infty)$, ибо от этого выбора зависят вследствие формул (42) и (45) функции $\overset{*}{N}(a^{q_1}_j, \dots, a^{q_\mu}_j \mid x)$. В силу заключений теоремы XV из первой статьи [ст. I, § 17], мы можем утверждать, что ряды (53) представляют равномерно голоморфные функции в окрестности нулевых матриц.

После этих предварительных рассмотрений перейдем к доказательству теоремы V. Рассмотрим сначала случай, когда

$$U^{(r)}_j = 0 \qquad (j = 1, \dots, m;\ r = 1, \dots, s).$$

В этом случае $Y_b(x)$ есть постоянная матрица I, и, следовательно, матрицы

$$\theta\begin{pmatrix} W^{(s)}_j & \\ \vdots & x \\ W^{(1)}_j & \\ a_j & \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \theta\begin{pmatrix} W^{(s)}_j & \\ \vdots & x \\ W^{(1)}_j & \\ a_j & \end{pmatrix}^{-1}$$

голоморфны в любой точке на конечном расстоянии на плоскости x, и в силу леммы матрицы $W^{(1)}_j, \dots, W^{(s)}_j$ суть нулевые матрицы, т. е. если

$$U^{(r)}_j = 0 \qquad (j = 1, \dots, m;\ r = 1, \dots, s),$$

то существует единственная система подстановок $W^{(r)}_j = 0$ $(r = 1, \dots, s)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Из предыдущих рассмотрений следует для общего случая, что существует единственная система подстановок $W^{(r)}_j$, удовлетворяющих условиям теоремы и элементы которых представляются в виде голоморфных функций от элементов подстановок $U^{(r)}_j$ в некоторой окрестности нулевых подстановок. В теореме V рассматривается единственность $W^{(r)}_j$ только в этом классе подстановок. Нужно заметить еще, что в этой теореме мы предполагаем, что элементарная метаканоническая матрица в формуле (55) определена формулами (41) и (42), где $\lg(x - a_j)$ имеет фиксированное значение на рассматриваемом листе поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \dots, a_m, \infty)$.

Теперь остается лишь доказать, что подстановки $W^{(1)}_j$, которые мы только что построили, действительно обладают указанными в формулировке теоремы свойствами. Матрица (56), очевидно, есть равномерно голоморфная функция подстановок $U^{(r)}_j$ в окрестности нулевых подстановок:

$$\overline{Y}^{(j)}_b(x) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U^{(r_1)}_{j_1} \dots U^{(r_\nu)}_{j_\nu} \overline{L}^{(j)}_b\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| x\right),$$

что непосредственно следует из формул (53) и (6). При этом из уравнений (57) и (58) следует, что функции $\overline{L}^{(j)}_b\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| x\right)$ однозначны в окрестности точки a_j и удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_{(a_j)} \overline{L}^{(j)}_b\left(a^{r_1}_{j_1} \dots a^{r_\nu}_{j_\nu} \middle| x\right)(x-a_j)^{r-2}\,dx = 0 \qquad (r = 2, \dots, s;\ j = 1, \dots, m),$$

Матрица

$$\tilde{Y}_b^{(j)}(x) = \theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| b\right)\overline{Y}_b^{(j)}(x) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right) \tag{63}$$

обладает теми же свойствами, и коэффициенты $\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right)$ однозначны в точке a_j и удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right) = 0, \\ &\int_{(a_j)}\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right)(x-a_j)^{r-2}\,dx = 0 \qquad (r=2,\ldots,s;\ j=1,\ldots,m). \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Полагая

$$\theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right) = \theta(x),$$

мы имеем

$$\tilde{Y}_b^{(j)}(x) = \theta(b)\,\theta(x)^{-1}\,Y_b(x) \tag{65}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\tilde{Y}_b^{(j)}}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\tilde{Y}_b^{(j)}U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r} + \theta(b)\,\frac{d\theta(x)^{-1}}{dx}\,Y_b(x).$$

Но матрица $\theta(x)^{-1}$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\theta(x)^{-1}}{dx} = -\sum_{r=1}^{s}\frac{W_j^{(r)}\theta(x)^{-1}}{(x-a_j)^r},$$

и, следовательно, матрица (63) есть интегральная матрица системы

$$\frac{d\tilde{Y}_b^{(j)}}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\tilde{Y}_b^{(j)}U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r} - \sum_{r=1}^{s}\frac{\tilde{W}_j^{(r)}\tilde{Y}_b^{(j)}}{(x-a_j)^r} \tag{66}$$

и обращается в силу (65) в I при $x=b$. Для $\tilde{W}_j^{(r)}$ мы имеем выражение

$$\tilde{W}_j^{(r)} = \theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| b\right)W_j^{(r)}\theta\left(\begin{matrix} W_j^{(s)} \\ \vdots \\ W_j^{(1)} \\ a_j \end{matrix}\middle| b\right)^{-1} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\tilde{Q}_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| b\right).$$

Отсюда следует, что функции $\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{(r_1)}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\middle| x\right) &= \int_b^x\left\{\frac{1}{(x-a_{j_1})^{r_1}} - \sum_{r=1}^{s}\frac{\tilde{Q}_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\middle| b\right)}{(x-a_j)^r}\right\}dx, \\ \tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right) &= \int_b^x\left\{\frac{\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\middle| x\right)}{(x-a_{j_\nu})^{r_\nu}} - \right. \\ &\left. -\sum_{r=1}^{s}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(x-a_j)^r}\tilde{Q}_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\middle| b\right)\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right)\right\}dx. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

В силу соотношений (64) $\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right)$, являющиеся однозначными функциями в окрестности точки a_j, имеют ряды Лорана, не содержащие членов с

$$(x-a_j)^{-1},\ \ldots,\ (x-a_j)^{-(s-1)}.$$

В силу этого формулы (67) дают по индукции, что функции $\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right)$ голоморфны в окрестности точки a_j. Отсюда мы заключаем, что матрицы (63) и (56) обладают тем же свойством.

Обратная матрица $\tilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ имеет разложение

$$\tilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\overset{*}{\tilde{L}}{}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right),$$

где коэффициенты определяются соотношениями

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\overset{*}{\tilde{L}}{}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\middle| x\right)\tilde{L}_b^{(j)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle| x\right) = 0.$$

Следовательно, матрицы $\tilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ и $\overline{Y}_b^{j}(x)^{-1}$ также голоморфны относительно x в окрестности точки a_j. Теорема, таким образом, доказана. s подстановок $W_j^{(1)}, \ldots, W_j^{(s)}$ дают полное аналитическое определение особенностей матрицы (55) в точке a_j с помощью элементарной метаканонической матрицы. Ветвления рассматриваемой матрицы при этом определяются первой из этих подстановок: $W_j^{(1)}$, так как соответствующая интегральная подстановка есть

$$V_j = e^{2\pi i W_j^{(1)}}. \tag{68}$$

Подстановки $W_j^{(1)}, \ldots, W_j^{(s)}$ будем называть *характеристическими подстановками* матрицы (55) в точке a_j.

Замечая, что произвольная матрица рационального определения отличается от нормированной матрицы лишь постоянным множителем слева, мы получаем общую теорему:

Теорема VI. *Если дифференциальные подстановки $U_j^{(r)}$ $(j=1,2,\ldots,m;$ $r=1,2,\ldots,s)$ произвольной матрицы рационального определения находятся в окрестности системы нулевых подстановок, то существует единственная система характеристических подстановок $W_j^{(r)}$ $(j=1,2,\ldots,m;$*

$r=1, 2, \ldots, s$), *обладающая тем свойством, что рассматриваемая матрица имеет представления*

$$\Phi\begin{pmatrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \ldots a_m & \end{pmatrix} = \theta\begin{pmatrix} W_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{pmatrix}\overline{\Phi}^{(j)}\begin{pmatrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \ldots a_m & \end{pmatrix}, \qquad (69)$$

где матрицы

$$\overline{\Phi}^{(j)}\begin{pmatrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \ldots a_m & \end{pmatrix}, \qquad (70)$$

а также обратные к ним матрицы голоморфны относительно x в окрестности соответствующих точек $a_j (j=1, 2, \ldots, m)$.

Если матрица C есть значение интегральной матрицы $\Phi(x)$ в точке b, то мы имеем

$$\Phi(x) = C\Phi_b(x) = C\theta\begin{pmatrix} W_j^{(s)}(b) & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)}(b) & x \\ a_j & \end{pmatrix}\overline{\Phi}_b^{(j)}(x), \qquad (71)$$

где через $W_j^{(r)}(b)$ обозначены характеристические подстановки нормированной матрицы $\Phi_b(x)$. Принимая во внимание, что в силу (41) матрица

$$\theta\begin{pmatrix} W_j^{(s)}(b) & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)}(b) & x \\ a_j & \end{pmatrix}$$

представляется в виде ряда композиций по матрицам $W_j^{(r)}(b)$, имеем:

$$C\theta\begin{pmatrix} W_j^{(s)}(b) & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)}(b) & x \\ a_j & \end{pmatrix}C^{-1} = \theta_j\begin{pmatrix} W_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{pmatrix}$$

где

$$W_j^{(r)} = CW_j^{(r)}(b)C^{-1} \qquad (72)$$

и, следовательно,

$$\Phi(x) = \theta\begin{pmatrix} W_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{pmatrix}\overline{\Phi}^{(j)}(x), \qquad (73)$$

где

$$\overline{\Phi}^{(j)}(x) = C\overline{\Phi}_b^{(j)}(x). \qquad (74)$$

В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что элементы постоянной матрицы C не зависят от элементов $U_j^{(r)}$. Формула (72) показывает, что элементы характеристических подстановок $W_j^{(r)}$, как и элементы $W_j^{(r)}(b)$,

суть голоморфные функции элементов матриц $U_j^{(r)}$. Если мы предположим, что для матриц $W_j^{(r)}$ можно получить два различных выражения, таких, что элементы $W_j^{(r)}$ будут аналитическими функциями элементов $U_j^{(r)}$, когда эти подстановки находятся в окрестности нулевых матриц, то мы можем получить два различных аналитических выражения для $W_j(b)$, что невозможно в силу теоремы V.

Матрица (70) называется „голоморфной составляющей" матрицы (69) в точке a_j. Она определена, очевидно, также единственным образом.

Резюмируя результаты этого параграфа, мы получаем следующее заключение:

Все возможные особенности матриц рационального определения ранга $s-1$ в m особых точках на конечном расстоянии эквивалентны в смысле соотношений (69) особенностям некоторых элементарных метаканонических матриц того же ранга $s-1$, имеющих только одну особую точку на конечном расстоянии. Следовательно, эти элементарные метаканонические матрицы представляют все возможные типы особенностей наиболее общих матриц рационального определения.

Это предложение, которое, очевидно, дает решение проблемы (C) о полной аналитической характеристике особенностей матриц рационального определения, доказано при условии, что дифференциальные подстановки находятся в некоторой окрестности системы нулевых подстановок.

Замечание. Сделаем замечание по поводу формулы (55). Матрица

$$\theta\begin{pmatrix} W^{(s)} & \\ \vdots & \\ W_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{pmatrix}$$

есть равномерно голоморфная функция матриц $W_j^{(r)}$ и, подставляя разложения (53), мы можем утверждать, что эта матрица есть равномерно голоморфная функция матриц $U_j^{(r)}$ в окрестности нулевых матриц со свободным членом I. В силу (55) тот же факт имеет место для матриц (56).

Пользуясь формулой (55), мы можем получить аналитический вид обобщенных гиперлогарифмов в окрестности особых точек a_j. Формула (55) может быть представлена в виде

$$Y_b(x) = (x-a_j)^{W_j^{(1)}}\left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} W_{j_1}^{(r_1)}\ldots W_{j_\nu}^{(r_\nu)}\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a_j)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}}\right]\times$$
$$\times\left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right],$$

где коэффициенты $\overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)$ суть голоморфные функции в точке $x=a_j$. Подставляя вместо $W_j^{(r)}$ разложения (53), будем иметь

$$I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} W_{j_1}^{(r_1)}\ldots W_{j_\nu}^{(r_\nu)}\frac{\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)}}{(x-a_j)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}} =$$
$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}R_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right),$$

где

$$R_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{t_1,\ldots,t_\mu}^{(1,\ldots,s)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}Q_j^{(t_1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\,\middle|\,b\right)\ldots Q_j^{(t_\mu)}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)\times$$

$$\times\frac{\gamma^{(t_1\ldots t_\mu)}}{(x-a_j)^{t_1+\ldots+t_\mu-\mu}}$$

суть полиномы от аргумента $\frac{1}{x-a_j}$ степени не выше $(s-1)\nu$. Производя умножение двух рядов композиций, будем иметь

$$Y_b(x)=(x-a_j)^{W_j^{(1)}}\times$$

$$\times\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}M_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right], \quad (75)$$

где

$$M_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)=\sum_{\lambda=0}^{\nu}R_b^{(j)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\,\middle|\,x\right)\overline{L}_b^{(j)}\left(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)$$

имеют в точке $x=a_j$ полюс порядка не выше $(s-1)\nu$. Подставляя вместо $W_j^{(1)}$ разложение (53), мы будем иметь

$$(x-a_j)^{W_j^{(1)}}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}E_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right),$$

где

$$E_j(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\varkappa_2<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}Q_j^{(1)}(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\,|\,b)\ldots Q_j^{(1)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,b)\cdot\frac{1}{\mu!}\lg^{\mu}(x-a_j)$$

суть полиномы от $\lg(x-a_j)$ степени не выше ν.

Наконец, выполняя умножение рядов композиций в правой части формулы (75), мы получим ряд композиций, коэффициенты которого суть обобщенные гиперлогарифмы

$$L_b(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)=\sum_{\lambda=0}^{\nu}E_j(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\,|\,x)\,M_b^{(j)}(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x).$$

Принимая во внимание аналитический вид функций $E_j(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\lambda}^{r_\lambda}\,|\,x)$ и $M_b^{(j)}(a_{j_{\lambda+1}}^{r_{\lambda+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)$, мы можем утверждать, что обобщенные гиперлогарифмы в окрестности точки $x=a_j$ имеют следующий аналитический вид:

$$L_b(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,x)=\sum_{\mu=0}^{\nu}\lg^{\mu}(x-a_j)\sum_{p=-(s-1)(\nu-\mu)}^{\infty}(x-a_j)^p\,\overline{M}_{\mu p}^{(j)}(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,|\,b). \quad (76)$$

§ 6. Метаканонические матрицы

Мы видели, что в теории регулярных матриц играют важную роль некоторые интегральные матрицы, которые назвали *метаканоническими регулярными матрицами*. Обобщим это понятие на класс матриц рационального определения произвольного ранга.

Хотя нормирование в особой точке a_j, вообще говоря, невозможно, мы можем построить матрицу рационального определения, *голоморфная составляющая которой относительно точки a_j нормирована в этой точке.*

Действительно, если задана система дифференциальных подстановок $U_j^{(r)}$ $(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$ в окрестности системы нулевых подстановок, то существует единственная система голоморфных функций этих подстановок в указанной окрестности

$$H_j^{(r)} \qquad (j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s),$$

которая обладает тем свойством, что система дифференциальных уравнений (1) имеет интегральную матрицу вида

$$\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)=\theta\left(\begin{array}{c|c} H_j^{(s)} & \\ \vdots & x \\ H_j^{(1)} & \\ a_j & \end{array}\right)\overline{\theta}_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right), \quad (77)$$

где голоморфная составляющая может быть представлена в окрестности точки a_j рядом

$$\overset{*}{Z}_j(x)=\overline{\theta}_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)=I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}\begin{pmatrix} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} \\ a_1\ldots a_m \end{pmatrix}(x-a_j)^p, \quad (78)$$

где матрицы $A_j^{(p)}$ не зависят от x.

Чтобы доказать это, в соответствии с соотношением (55) достаточно положить

$$\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_j \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right), \quad (79)$$

$$H_j^{(r)}=\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_j \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)^{-1}W_j^{(r)}(b)\,\overline{\Phi}_b^{(j)}\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_j \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right), \quad (80)$$

где b — произвольная точка нормирования и $W_j^{(r)}(b)$ — характеристические подстановки нормированной в точке b матрицы, которая входит в формулу (79).

Легко доказать, что матрица, удовлетворяющая сформулированным условиям, единственна.

Матрица (77) называется *метаканонической матрицей относительно точки a_j* и дифференциальных подстановок $U_h^{(1)},\ldots,U_h^{(s)}$ в точках a_h $(h=1,\ldots,m)$. Подстановки $H_j^{(1)},\ldots,H_j^{(s)}$, очевидно, суть характеристические подстановки рассматриваемой матрицы в точке a_j. Они называются *метаканоническими характеристическими подстановками* относительно указанной точки. Интегральная подстановка метаканонической матрицы (77) в точке a_j есть

$$e^{2\pi i H_j^{(1)}}.$$

Элементарная метаканоническая матрица, которой мы пользовались в предыдущих параграфах, очевидно, является метаканонической в обычном смысле относительно обеих особых точек сразу: a и ∞.

Если ранг равен нулю, то формула (80) дает

$$H_j^{(1)} = U_j^{(1)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

и метаканоническая матрица (77) сводится непосредственно к регулярной метаканонической матрице в смысле теории регулярных матриц [ст. II, § 5].

Явные выражения метаканонических матриц, свободные от излишнего параметра b, который входит в формулы (79) и (80), даются следующей теоремой:

Теорема VII. *Метаканонические характеристические подстановки и однозначная составляющая метаканонической матрицы* (77), *а также коэффициенты разложения этой составляющей в ряд Тэйлора* (78) *суть равномерно голоморфные функции дифференциальных подстановок в окрестности системы нулевых подстановок*:

$$H_j^{(r)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \tag{81}$$

$$\overline{\Theta}_j \left(\left. \begin{matrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(s)} \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \right| x \right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right), \tag{82}$$

$$A_j^{(p)} \begin{pmatrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right). \tag{83}$$

$$(j = 1, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, s;\ p = 1, 2, \ldots),$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
&J_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}) = 1, \text{ если } j_1 = j,\ r_1 = r;\ J_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1}) = 0 \text{ во всех прочих случаях;} \\
&J_j^{(s)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = 0, \quad \text{если} \quad \nu \geqslant 2; \\
&J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = -\sum_{q=r+1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} J_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q-r)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \\
&\text{если} \quad r < s,\ j_\nu \neq j \quad \text{или} \quad \text{если} \quad r < s,\ j_\nu = j \quad \text{и} \quad r \geqslant r_\nu; \\
&J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = K_j^{(r_\nu - r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\right) - \\
&\qquad - \sum_{q=r+1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} J_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q-r)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \\
&\qquad\qquad \text{если} \quad r < s,\ j_\nu = j \quad \text{и} \quad r < r_\nu;
\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

$$\left.\begin{aligned}
&K_j^{(p)}(a_j^{r_1}) = 0; \quad K_j^{(1)}(a_{j_1}^{r_1}) = \frac{(-1)^{r_1}}{(a_{j_1} - a_j)^{r_1}}; \quad K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1}) = \\
&\qquad\qquad = \frac{(-1)^{r_1} r_1 (r_1 + 1) \ldots (r_1 + p - 2)}{p!\,(a_{j_1} - a_j)^{r_1 + p - 1}}, \\
&\qquad\qquad\qquad \text{если} \quad j_1 \neq j; \\
&K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \\
&= \frac{1}{p}\left[(-1)^{r_\nu} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{r_\nu (r_\nu + 1) \ldots (r_\nu + p - q - 2)}{(p - q - 1)!\,(a_{j_\nu} - a_j)^{r_\nu + p - q - 1}} K_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\right) - \right. \\
&\left. - \sum_{q=p}^{p+s-1} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} J_j^{(q-p+1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right], \quad \text{если} \quad j_\nu \neq j; \\
&\sum_{q=1}^{p-1} = 0, \quad \text{если} \quad p = 1; \\
&K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \frac{1}{p}\left[K_j^{(r_\nu + p - 1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\right) - \right. \\
&\left. - \sum_{q=p}^{p+s-1} \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} J_j^{(q-p+1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right], \quad \text{если } j_\nu = j;
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{N}_j(a_{j_1}^{r_1} | x) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{1}{(x - a_{j_1})^{r_1}} - \sum_{r=1}^{s} \frac{J_j^{(r)}(a_j^{r_1})}{(x - a_j)^r}\right] dx; \\
&\overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right) = \int_{a_j}^{x} \left[\frac{\overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}} \middle| x\right)}{(x - a_{j_\nu})^{r_\nu}} - \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{r=1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{1}{(x - a_j)^r} J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) \overline{N}_j\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right)\right] dx.
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Коэффициенты $K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ *и* $J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$, *таким образом, суть рациональные функции* $a_1, \ldots, a_m$. *Ряд* (82) *представляет голоморфную составляющую в каждой конечной области универсальной поверхности* $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$, *не содержащей внутри и на границе ни одной из точек* $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m$ *и точек* a_j, *отличных от той, которая входит в определение метаканонической матрицы.*

Все утверждения теоремы, относящиеся к сходимости рядов, непосредственно следуют из соотношений (79) и (80).

Остается получить только рекуррентные соотношения для коэффициентов. С этой целью заметим, что в силу соотношения (77) голоморфная составляющая (82) есть интегральная матрица системы

$$\frac{d\overline{Z}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{\overline{Z}_j U_h^{(r)}}{(x - a_h)^r} - \sum_{r=1}^{s} \frac{H_j^{(r)} \overline{Z}_j}{(x - a_j)^r}, \tag{87}$$

обращающаяся в I при $x = a_j$. Заменяя в этой системе подстановки $H_j^{(r)}$ рядами (81), подставляя в нее ряд вида (82) и принимая во внимание начальные условия, мы получим рекуррентные соотношения (86). Голоморфность голоморфной составляющей в некоторой окрестности точки a_j влечет голоморфность коэффициентов $\overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)$ в той же окрестности, так что мы имеем разложения Тэйлора

$$\overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)=\sum_{p=1}^{\infty}K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)(x-a_j)^p. \tag{88}$$

Тогда в силу первого из соотношений (86) коэффициенты $J_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})$ определяются соотношениями (84) и коэффициенты $K^{(p)}(a_{j_1}^{r_1})$ — соотношениями (85). При $\nu\geqslant 2$, подставляя разложения вида (88) в формулу (86) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x-a_j$, мы получим рекуррентные соотношения (84) и (85).

В силу формул (77) и (41) доказанная теорема дает общее относительно x представление метаканонической матрицы при заданных дифференциальных подстановках

$$\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1,\ldots,a_m & \end{array}\right)=(x-a_j)^{H_j^{(1)}}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C^{(p)}\begin{pmatrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\end{pmatrix}\frac{1}{(x-a_j)^p}\right]\times$$

$$\times\left[I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\overline{N}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right], \tag{89}$$

где

$$C^{(p)}\begin{pmatrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\end{pmatrix}=\sum_{r_1+\ldots+r_\nu-\nu=p}H_j^{(r_1)}\ldots H_j^{(r_\nu)}\gamma^{(r_1\ldots r_\nu)},$$

причем суммирование распространяется на все значения индексов $r_1,\ldots,r_\nu=1,\ldots,s$; $\nu=1,2,\ldots$, удовлетворяющих указанному неравенству. Это представление делает совершенно очевидной природу особенности рассматриваемой матрицы в точке a_j: первая составляющая характеризует ветвления и вторая — существенные однозначные особенности. Если мы заменим третью составляющую рядом Тэйлора (78), то получим локальное представление

$$\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)=(x-a_j)^{H_j^{(1)}}\times$$

$$\times\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C^{(p)}\begin{pmatrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\end{pmatrix}\frac{1}{(x-a_j)^p}\right]\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}\begin{pmatrix}U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)}\\ \cdots\cdots\\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)}\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}(x-a_j)^p\right], \tag{90}$$

имеющее место внутри круга с центром в точке a_j и радиусом, равным минимальному расстоянию от этой точки a_j до точек $a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_m$. Умножая матрицу (90) слева на матрицу, приводящую подстановку $H_j^{(1)}$ к каноническому виду, и выполняя умножение двух рядов, мы заменим их рядом Лорана и получим локальное представление, изученное Кохом. Это последнее локальное представление позволяет выявить лишь составляющую, характеризующую ветвления, и специфическая природа однозначной особенности в сущности остается далеко не ясной. Кроме того, метод Коха дает выражения коэффициентов в виде бесконечных определителей, в то время как коэффициенты представления (90) вычисляются с помощью рядов композиций дифференциальных подстановок с рациональными коэффициентами, зависящими от $a_1,\ldots,a_m$.

Замечание. Как мы уже говорили выше, $K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ и $J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ являются рациональными функциями от $a_1,\ldots,a_m$. Пользуясь рекуррентными формулами (84) и (85), мы можем доказать, что $K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ является однородным полиномом от аргументов

$$\frac{1}{a_s-a_j}\qquad (s=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m)$$

степени $(r_1+\ldots+r_\nu+p-\nu)$ и $J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ — однородным полиномом от указанных аргументов степени $(r_1+\ldots+r_\nu-r-\nu+1)$. При $\nu=1$ этот факт следует из формул

$$J_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})=1,\qquad \text{если } j_1=j \text{ и } r_1=r;$$
$$J_j^{(r)}(a_{j_1}^{r_1})=0 \text{ во всех прочих случаях;}$$
$$K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1})=0,\qquad \text{если } j_1=j;$$
$$K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1})=\frac{(-1)^{r_1}r_1(r_1+1)\ldots(r_1+p-2)}{p!\,(a_{j_1}-a_j)^{r_1+p-1}},\quad \text{если } j_1\neq j,$$

и в общем случае мы можем провести доказательство по индукции.

Рассмотрим еще случай, когда система дифференциальных подстановок коммутативна. В этом случае формула (13) дает интегральную нормированную матрицу в конечном виде, и, принимая во внимание формулу (46), мы можем записать формулу (13) следующим образом:

$$Y_b(x)=\theta\left(\begin{array}{c|c} U_j^{(s)} & \\ \vdots & x \\ U_j^{(1)} & \\ a_j & \end{array}\right)\overline{\Phi}_b^{(j)}(x),$$

где

$$\overline{\Phi}_b^{(j)}(x)=(b-a_j)^{-U_j^{(1)}}e^{\sum\limits_{r=2}^{s}U_j^{(r)}\frac{1}{(r-1)(b-a_j)^{r-1}}}\times$$
$$\times\prod_{h\neq j}\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{U_h^{(1)}}e^{-\sum\limits_{r=2}^{\infty}U_h^{(r)}\frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(x-a_h)^{r-1}}-\frac{1}{(b-a_h)^{r-1}}\right]}.$$

Наконец, применение формул (79) и (13) дает метаканоническую матрицу в конечном виде:

$$\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right)=\prod_{h=1}^{m}(x-a_h)^{U_h^{(1)}}e^{-\sum\limits_{r=2}^{s}U_h^{(r)}\frac{1}{(r-1)(x-a_h)^{r-1}}}\times$$
$$\times\prod_{h\neq j}(a_j-a_h)^{-U_h^{(1)}}e^{\sum\limits_{r=2}^{s}U_h^{(r)}\frac{1}{(r-1)(a_j-a_h)^{r-1}}}. \tag{91}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае характеристические подстановки $W_j^{(r)}$ совпадают, очевидно, с дифференциальными подстановками $U_j^{(r)}$.

§ 7. Решение проблемы (D)

Фундаментальная проблема теории функций комплексной переменной, как хорошо известно, есть проблема о построении функции или матрицы функций, обладающей особенностями заданного типа.

Тип особенности матрицы рационального определения полностью определяется соответствующими характеристическими подстановками как тип особенности элементарной метаканонической матрицы.

Следовательно, указанная выше проблема в классе матриц рационального определения сводится к проблеме (D), касающейся построения матрицы рационального определения ранга $s-1$ в предположении, что заданы характеристические подстановки $W_j^{(1)}, \ldots, W_j^{(s)}$ и дана конфигурация особых точек на конечном расстоянии a_j $(j=1, 2, \ldots, m)$.

Алгорифмическое решение этой проблемы при условии, что характеристические подстановки заданы в окрестности системы нулевых подстановок, дается следующей теоремой:

Теорема VIII. *Ряды композиций*

$$U_j^{(r)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} W_{j_1}^{(r_1)}\ldots W_{j_\nu}^{(r_\nu)}R_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,b\right) \tag{92}$$
$$(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s),$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &R_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\middle|\,b\right)=1, \quad \text{если} \quad j_1=j, \quad r_1=r;\\ &R_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\middle|\,b\right)=0 \quad \text{во всех прочих случаях};\\ &R_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,b\right)=\\ &=-\sum_{\mu=2}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{q_1,\ldots,q_\mu}^{(1,\ldots,s)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_{h_1}^{(q_1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\middle|\,b\right)\ldots\\ &\qquad\ldots R_{h_\mu}^{(q_\mu)}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,b\right)Q_j^{(r)}\left(a_{h_1}^{q_1}\ldots a_{h_\mu}^{q_\mu}\middle|\,b\right), \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

представляют равномерно голоморфные функции подстановок $W_j^{(r)}$ $(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$ *в окрестности системы нулевых подстановок, обладающие тем свойством, что нормированная матрица рационального определения*

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)}\ldots W_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ W_1^{(1)}\ldots W_m^{(1)} & x\\ a_1\ \ldots\ a_m & \end{array}\right)=\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\ldots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ U_1^{(1)}\ldots U_m^{(1)} & x\\ a_1\ \ldots\ a_m & \end{array}\right) \tag{94}$$

имеет характеристические подстановки $W_j^{(1)}, \ldots, W_j^{(s)}$ *в точках* a_j $(j=1, 2, \ldots, m)$. *Не существует другой системы подстановок* $U_j^{(r)}$, *удовлетворяющей указанным условиям.*

Очевидно, что если $W_j^{(r)}=0$ $(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$, то система подстановок $U_j^{(r)}$ удовлетворяет условиям теоремы. В силу леммы предыдущего параграфа это единственная система подстановок, обладающих требуемым

свойством. Следовательно, если подстановки $W_j^{(r)}$ находятся в окрестности системы нулевых подстановок, то система подстановок $U_j^{(r)}$, удовлетворяющих условиям теоремы, дается как единственная система решений системы уравнений (53):

$$U_j^{(r)}+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}Q_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,b\right)=W_j^{(r)}$$
$$(j=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s),$$

обращающихся в нуль при $W_j^{(r)}=0$. Ряды (92) с коэффициентами, определяемыми рекуррентными соотношениями (93), дают указанное решение рассматриваемой системы.

Пользуясь формулами (6) и (92), мы получаем явное выражение искомой матрицы (94) в виде голоморфной функции характеристических подстановок в окрестности системы нулевых подстановок:

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)}\ldots W_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ W_1^{(1)}\ldots W_m^{(1)} & x\\ a_1\ \ldots\ a_m & \end{array}\right)=$$
$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\ldots,s)} W_{j_1}^{(r_1)}\ldots W_{j_\nu}^{(r_\nu)}M_b\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,x\right),$$

где

$$M_b\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,x\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{h_1,\ldots,h_\mu}^{(1,\ldots,m)}\sum_{q_1,\ldots,q_\mu}^{(1,\ldots,s)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} R_{h_1}^{(q_1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\middle|\,b\right)\ldots$$
$$\ldots R_{h_\mu}^{(q_\mu)}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\middle|\,b\right)L_b\left(a_{h_1}^{q_1}\ldots a_{h_\mu}^{q_\mu}\middle|\,x\right).$$

Если заданная система характеристических подстановок коммутативна, то эта матрица может быть представлена в конечном виде

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)}\ldots W_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & \\ W_1^{(1)}\ldots W_m^{(1)} & x\\ a_1\ \ldots\ a_m & \end{array}\right)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{W_j^{(1)}} e^{-\sum\limits_{r=2}^{s}W_j^{(r)}\frac{1}{r-1}\left[\frac{1}{(x-a_j)^{r-1}}-\frac{1}{(b-a_j)^{r-1}}\right]}.$$

Решение нашей проблемы (D) одновременно дает решение классической проблемы Римана в классе матриц рационального определения, касающейся построения матрицы рационального определения ранга $s-1$, имеющей заданные интегральные подстановки V_j в точках a_j соответственно.

Действительно, если подстановки V_j заданы в окрестности системы единичных подстановок, то в силу соотношения (68) матрица, удовлетворяющая указанным условиям, есть

$$\Psi_b\left(\begin{array}{c|c} W_1^{(s)}\ldots W_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ W_1^{(2)}\ldots W_m^{(2)} & x\\ \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}V_1\ldots\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}V_m & \\ a_1\ldots a_m & \end{array}\right),$$

где мы берем значения логарифмов, обращающиеся в нулевую подстановку при $V_j=I$, и подстановки $W_j^{(r)}$ $(j=1,\ldots,m;\ r=2,\ldots,s)$ — произвольны.

§ 8. Метод степенных рядов в регулярном случае

Имеются два различных метода для построения метаканонической матрицы регулярной системы

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{h=1}^{m}\frac{YU_h}{x-a_h}. \tag{95}$$

Во второй статье, используя первый метод, мы построили сначала интегральную нормированную матрицу $Y_b(x)$ в виде ряда композиций. Затем мы представили эту матрицу в виде

$$Y_b(x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_b(x),$$

что привело к метаканонической матрице:

$$\theta_j(x)=\overline{Y}_b(a_j)^{-1}(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_b(x)=(x-a_j)^{H_j}\overline{\theta}_j(x),$$

где

$$\overline{\theta}_j(x)=I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p. \tag{96}$$

В упомянутой статье был указан еще второй метод для построения метаканонической матрицы [ст. II, § 5]. Представим теперь этот метод в виде, несколько отличающемся от того, которым мы пользовались в цитированной статье. Подставляя в систему (95)

$$Y(x)=(x-a_j)^{H_j}\overline{\theta}_j(x), \tag{97}$$

будем иметь для $\overline{\theta}_j(x)$ систему

$$\frac{d\overline{\theta}_j}{dx}=\sum_{h=1}^{m}\frac{\overline{\theta}_jU_h}{x-a_h}-\frac{H_j\overline{\theta}_j}{x-a_j}. \tag{98}$$

Подставляя в эту систему ряд (96) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x-a_j$, получим рекуррентные соотношения:

$$H_j=U_j,$$

$$U_jA_j^{(p)}+pA_j^{(p)}-A_j^{(p)}U_j=-\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}\qquad(p=1,2,\ldots). \tag{99}$$

Как было указано, если подставить в эти соотношения ряды композиций

$$A_j^{(p)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}K_j^{(p)}(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}),$$

то получим определения коэффициентов, даваемые первым методом.

Теперь построим метаканоническую матрицу, пользуясь только системой (99). Как мы видели [ст. I, § 22], уравнение (99) эквивалентно системе n^2 уравнений с n^2 неизвестными $\{A_j^{(p)}\}_{kl}$, определитель которой дается формулой

$$\Delta_p(U_j)=\pm p^n\prod_{k\neq l}(p+\sigma_k-\sigma_l), \tag{100}$$

где $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ суть характеристические числа матрицы U_j. Соотношения (99) дают последовательно $A_j^{(1)}, A_j^{(2)},\ldots$, и элементы $\{A_j^{(p)}\}_{kl}$, очевидно, имеют вид:

$$\{A_j^{(p)}\}_{kl}=\frac{f_{kl}^{(p)}}{\Delta_1(U_j)\ldots\Delta_p(U_j)}, \tag{101}$$

где числитель есть полином от аргументов $\{U_h\}_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим численную функцию подстановки U_j.

$$\Delta(U_j)=\prod_{k<l}\frac{\sin\pi(\sigma_k-\sigma_l)}{\sigma_k-\sigma_l}. \tag{102}$$

Эта функция есть целая функция элементов подстановки U_j.

В силу (100) и (101) элементы матриц

$$B_j^{(p)}=A_j^{(p)}\Delta(U_j) \tag{103}$$

суть целые функции элементов $\{U_h\}_{\alpha\beta}$ $(h=1,2,\ldots,m)$. Выполним теперь оценку для матриц $|A_j^{(p)}|$. Обозначая

$$T_p=-\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{A_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}, \tag{104}$$

мы имеем для $A_j^{(p)}$ представление [ст. I, § 22]

$$A_j^{(p)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^\lambda k!}{\lambda!(k-\lambda)!}U_j^\lambda T_pU_j^{k-\lambda},$$

имеющее место в области

$$|U_j|<\left\|\frac{p}{2n}\right\|.$$

Пусть D — некоторая замкнутая и ограниченная область пространства матриц $U_1,\ldots,U_m$, в которой $\Delta(U_j)$ не обращается в нуль. Напишем ряд Маклорена для целой функции

$$\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j), \tag{105}$$

где $\delta_\nu(U_j)$ — однородные полиномы степени ν от элементов матрицы U_j. Для произведения (103) мы имеем общее представление, имеющее место в области D:

$$A_j^{(p)}\Delta(U_j)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{p^{k+1}}\delta_{\nu-k}(U_j)\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^k k!}{\lambda!(k-\lambda)!}U_jT_pU_j^{k-\lambda}\right]. \tag{106}$$

Для членов ряда Маклорена (105) имеем в области D:

$$|\delta_\nu(U_j)|\leqslant M\theta^\nu, \tag{107}$$

где θ — произвольно, и постоянная M зависит от выбора θ. Предположим еще, что для T_p имеем оценку

$$|T_p|\leqslant\|\rho_p\|, \tag{108}$$

где ρ_p — положительное число. Формула (106) дает

$$|A_j^{(p)}|\,|\Delta(U_j)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{p^{k+1}}M\theta^{\nu-k}\times$$
$$\times\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{k!}{\lambda!(k-\lambda)!}\|n^{\lambda-1}\sigma^{\lambda}\|\ \|\rho_p\|\ \|n^{k-\lambda-1}\sigma^{k-\lambda}\|$$

или

$$|A_j^{(p)}|\,|\Delta(U_j)| \leqslant \rho_p\frac{M}{p}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu}\theta^{\nu}\|\omega^k\|, \tag{109}$$

где

$$\omega = \frac{2n\sigma}{p\theta}$$

и через σ мы обозначили такое положительное число, что в области D

$$|U_h| \leqslant \|\sigma\| \qquad (h=1,\ldots,m). \tag{110}$$

Фиксируем число θ таким образом, что $0<\theta<1$, и предположим, что индекс p удовлетворяет неравенству

$$\omega = \frac{2n\sigma}{p\theta} < 1. \tag{111}$$

В силу (109)

$$|A_j^{(p)}|\,|\Delta(U_j)| < \rho_p\|\omega_1\|, \tag{112}$$

где

$$\omega_1 = \frac{M}{p}\,\frac{1}{1-\theta}\,\frac{1}{1-\omega}.$$

Пусть η — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$|\Delta(U_j)| \geqslant \eta \qquad \text{в области } D. \tag{113}$$

В последующем будем предполагать, что целое число p, удовлетворяющее условию (111), столь большое, что мы имеем

$$\omega_1 < \eta. \tag{114}$$

Чтобы выполнить оценку матриц T_p, введем еще положительное число δ:

$$|a_h - a_j| \geqslant \delta \qquad (h=1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,m).$$

Возьмем число p, удовлетворяющее упомянутым выше условиям. Для матриц $A_j^{(q)}$ $(q=0,1,\ldots,p-1)$ мы можем записать в области D оценку вида

$$|A_j^{(q)}| \leqslant \|R^q\| \qquad (q=0,1,\ldots,p-1). \tag{115}$$

Возьмем число R столь большим, что имеет место неравенство

$$R\delta > 1 + n\sigma_1, \tag{116}$$

где

$$\sigma_1 = (m-1)\sigma.$$

Докажем, что оценка (115) имеет место также для матрицы $A_j^{(p)}$, т. е., что эта оценка имеет место для всех матриц $A_j^{(q)}$ $(q=0,1,2,\ldots)$.

В силу (104) и (115) имеем

$$|T_p| \leqslant \sum_{q=0}^{p-1}\frac{\|R^q\|\,\|\sigma_1\|}{\delta^{p-q}} = \frac{1}{\delta^p}\left\|n\sigma_1\frac{R^p\delta^p-1}{R\delta-1}\right\|$$

или в силу (116)

$$|T_p| < \frac{1}{\delta^p}\|R^p\delta^p\| = \|R^p\|,$$

т. е. мы можем взять $\rho_p = R^p$. Теперь неравенства (112) и (113) дают

$$|A_j^{(p)}| < R^p\left\|\frac{\omega_1}{\eta}\right\|$$

или в силу (114)

$$|A_j^{(p)}| < \|R^p\|,$$

что и требовалось доказать.

Из предыдущего следует, что ряд (96) сходится равномерно относительно матриц $U_1,\ldots,U_m$ в области D, если переменная x находится в круге

$$|x - a_j| < \frac{1}{R}. \tag{117}$$

Этот ряд дает интегральную матрицу системы (98), и, следовательно, мы можем утверждать, что ряд (96) сходится в круге $|x-a_j|<\delta$. Возьмем некоторую точку $x=b$ в круге (117). Элементы матрицы

$$\theta_j(b) = (b-a_j)^{U_j}\overline{\theta}_j(b)$$

суть голоморфные функции элементов матриц $U_1,\ldots,U_m$ в области D. Но мы можем написать

$$\theta_j(x) = \theta_j(b)\,\Phi_b(x)$$

и, следовательно, можем утверждать, что элементы матрицы $\theta_j(x)$ при каждом значении x суть голоморфные функции элементов матриц $U_1,\ldots,U_m$ в области D. Рассмотрим произведение

$$\Delta(U_j)\overline{\theta}_j(x) = \sum_{p=0}^{\infty}B_j^{(p)}(x-a_j)^p. \tag{118}$$

Элементы матриц $B_j^{(p)}$, определяемые формулами (103), суть целые функции элементов матриц $U_1,\ldots,U_m$. Докажем, что ряд (118) сходится равномерно относительно этих матриц в каждой замкнутой ограниченной области D_1 пространства этих матриц.

Умножая уравнение (99) на $\Delta(U_j)$, мы будем иметь для $B_j^{(p)}$ рекуррентные соотношения

$$U_jB_j^{(p)} + pB_j^{(p)} - B_j^{(p)}U_j = -\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{B_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}, \tag{119}$$

где должны положить

$$B_j^{(0)} = \Delta(U_j)\,I. \tag{120}$$

В области D_1 разности $\sigma_k - \sigma_l$ характеристических чисел матрицы U_j могут принимать целые значения. Если это обстоятельство имеет место, то обозначим через τ наибольшее из этих целых значений. Построим целые численные функции матриц U_j:

$$\varphi(U_j) = \prod_{k\neq l}(\sigma_k-\sigma_l+1)(\sigma_k-\sigma_l+2)\ldots(\sigma_k-\sigma_l+\tau)$$

и

$$\Delta^{(1)}(U_j) = \frac{\Delta(U_j)}{\varphi(U_j)}. \tag{121}$$

Для этой функции мы имеем разложение Маклорена

$$\Delta^{(1)}(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu}^{(1)}(U_j)$$

и для матриц $B_j^{(p)}$ $(p = \tau+1,\ \tau+2,\ \ldots)$ имеем общее представление

$$B_j^{(p)}\Delta^{(1)}(U_j) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{p^{k+1}}\delta_{\nu-k}^{(1)}(U_j)\sum_{\lambda=0}^{k}\frac{(-1)^k k!}{\lambda!\,(k-\lambda)!}U_j^{\lambda}S_pU_j^{k-\lambda}\right] \tag{122}$$

$$(p = \tau+1,\ \tau+2, \ldots),$$

где

$$S_p = -\sum_{h\neq j}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{B_j^{(q)}U_h}{(a_h-a_j)^{p-q}}. \tag{123}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, можем получить оценку

$$|B_j^{(p)}||\Delta^{(1)}(U_j)| < \rho_p' \|\omega_1\|,$$

где ρ_p' определяется условием

$$|S_p| \leqslant \|\rho_p'\|$$

и ω_1 — положительное число, стремящееся к нулю, когда целое число p стремится к бесконечности.

В области D_1 мы имеем

$$|\Delta^{(1)}(U_j)| \geqslant \eta > 0,$$

и можем предположить, что целое число p столь большое, что $p > \tau$ и $\omega_1 < \eta$. Для матриц $B_j^{(q)}$ $(q = 0, 1, \ldots, p-1)$ мы можем написать в области D_1 оценку вида

$$|B_j^{(q)}| \leqslant \|M_1R^q\| \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1), \tag{124}$$

где R — достаточно большое. Пользуясь тем же методом, каким мы пользовались выше, можем доказать, что неравенство (124) имеет место для всех значений q. Этот факт показывает, как и выше, что ряд (118) сходится равномерно относительно $U_1, \ldots, U_m$ в области D_1, если x удовлетворяет неравенству (117). Мы можем еще утверждать, как и выше, что ряд (118) сходится в круге $|x-a_j| < \delta$ и элементы интегральной матрицы

$$\Delta(U_j)(x-a_j)^{U_j}\bar{\theta}_j(x) = (x-a_j)^{U_j}\sum_{p=0}^{\infty}B_j^{(p)}(x-a_j)^p$$

суть целые функции элементов матриц $U_1, \ldots, U_m$. Легко доказать, пользуясь этими результатами, что ряд (118) сходится равномерно относительно $U_1, \ldots, U_m$ в области D_1, если x удовлетворяет неравенству вида

$$|x-a_j| \leqslant \delta_1 < \delta.$$

Заметим, что в случае, когда некоторые разности характеристических чисел матрицы U_j суть отличные от нуля целые числа, предыдущая формула дает, вообще говоря, лишь неполную систему решений дифференциальной системы.

§ 9. Иррегулярный случай

Применим теперь метод предыдущего параграфа к случаю иррегулярной системы (1). В этом случае метаканоническая матрица определяется формулой (77)

$$\theta_j(x) = \theta\left(\begin{array}{c|c} H_j^{(s)} & \\ \vdots & \\ H_j^{(1)} & x \\ a_j & \end{array}\right)\bar{\theta}_j(x), \tag{125}$$

где

$$\bar{\theta}_j(x) = I + \sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p \tag{126}$$

удовлетворяет системе (87)

$$\frac{d\bar{\theta}_j}{dx} = \sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\bar{\theta}_jU_h^{(r)}}{(x-a_h)^r} - \sum_{r=1}^{s}\frac{H_j^{(r)}\bar{\theta}_j}{(x-a_j)^r}. \tag{127}$$

Подставляя ряд (126) в эту систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a_j)$, получим уравнения:

$$\left.\begin{gathered}
\sum_{q=0}^{p}\left(A_j^{(q)}U_j^{(s+q-p)} - H^{(s+q-p)}A_j^{(q)}\right) = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots, s-1) \\
\sum_{q=p-s+1}^{p}\left(A_j^{(q)}U_j^{(s+q-p)} - H_j^{(s+q-p)}A_j^{(q)}\right) = (p-s+1)A_j^{(p-s+1)} - \\
-\sum_{h\neq j}\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{p-s}\frac{(-1)^r r(r+1)\ldots(r+p-s-q-1)}{(p-s-q)!\,(a_h-a_j)^{r+p-s-q}}A_j^{(q)}U_h^{(r)} \\
(p = s,\ s+1, \ldots).
\end{gathered}\right\} \tag{128}$$

Первое из этих уравнений при $p = 0$ дает

$$H_j^{(s)} = U_j^{(s)}. \tag{129}$$

Очевидно, что следующие уравнения имеют бесконечную систему решений относительно неизвестных подстановок:

$$H_j^{(1)}, \ldots, H_j^{(s-1)},\ A_j^{(1)},\ A_j^{(2)}, \ldots$$

С другой стороны, записывая уравнения (128) в виде

$$H_j^{(r)} = U_j^{(r)} + \sum_{q=r+1}^{s}\left(A_j^{(q-r)}U_j^{(q)} - H_j^{(q)}A_j^{(q-r)}\right) \qquad (r = s,\ s-1, \ldots, 1);$$

$$A_j^{(p)} = \frac{1}{p}\left[\sum_{h\neq j}\sum_{r=1}^{s}\sum_{q=0}^{p-1}\frac{(-1)^r r(r+1)\ldots(r+p-q-2)}{(p-q-1)!\,(a_h-a_j)^{r+p-q-1}}A_j^{(q)}U_h^{(r)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=p}^{p+s-1}\left(A_j^{(q)}U_j^{(q-p+1)} - H_j^{(q-p+1)}A_j^{(q)}\right)\right] \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

и подставляя в них ряды композиций вида (81) и (83), мы получим непосредственно рекуррентные соотношения (84) и (85) теоремы VII. Следовательно, ряды композиций (81) и (83) представляют специальную систему решений уравнений (128). Эта система решений не является наиболее простой, однако, как мы видели, это единственная система решений, определяющая характеристические подстановки и голоморфную составляющую рассматриваемой метаканонической матрицы.

Рассмотрим подробнее наиболее простой случай, когда $s=2$, и предположим, что матрица $U_j^{(2)}$ есть диагональная матрица:

$$U_j^{(2)}=[\tau_1, \ldots, \tau_n]$$

и что числа $\tau_1, \ldots, \tau_n$ различны. Формула (129) дает

$$H_j^{(2)}=[\tau_1, \ldots, \tau_n].$$

Первое из уравнений (128) при $p=1$ имеет вид

$$U_j^{(1)}-H_j^{(1)}+A_j^{(1)}U_j^{(2)}-H_j^{(2)}A_j^{(1)}=0$$

или

$$A_j^{(1)}[\tau_1, \ldots, \tau_n]-[\tau_1, \ldots, \tau_n]A_j^{(1)}=H_j^{(1)}-U_j^{(1)},$$

т. е.

$$\{A_j^{(1)}\}_{kl}\tau_l-\tau_k\{A_j^{(1)}\}_{kl}=\{H_j^{(1)}-U_j^{(1)}\}_{kl} \qquad (k, l=1, 2, \ldots, n). \qquad (130)$$

Мы должны, следовательно, иметь:

$$\{H_j^{(1)}-U_j^{(1)}\}_{kk}=0. \qquad (131)$$

Возьмем наиболее простой случай, когда $H_j^{(1)}$ есть диагональная матрица, диагональные элементы которой равны диагональным элементам матрицы $U_j^{(1)}$:

$$H_j^{(1)}=[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \quad \left(\text{где } \sigma_i=\{U_j^{(1)}\}_{ii}\right). \qquad (132)$$

В силу такого выбора матрицы $H_j^{(1)}$ уравнения (130) дают все элементы матрицы $A_j^{(1)}$, за исключением элементов $\{A_j^{(1)}\}_{ii}$, остающихся произвольными.

Возьмем теперь второе из уравнений (128) при $p=2$. Оно имеет вид:

$$A_j^{(1)}U_j^{(1)}-H_j^{(1)}A_j^{(1)}+A_j^{(2)}U_j^{(2)}-H_j^{(2)}A_j^{(2)}=A_j^{(1)}+T_2, \qquad (133)$$

где T_2 — известная матрица. Мы можем написать (133) следующим образом:

$$A_j^{(2)}[\tau_1, \ldots, \tau_n]-[\tau_1, \ldots, \tau_n]A_j^{(2)}=A_j^{(1)}+H_j^{(1)}A_j^{(1)}-A_j^{(1)}U_j^{(1)}+T_2$$

или

$$\{A_j^{(2)}\}_{kl}\tau_l-\tau_k\{A_j^{(2)}\}_{kl}=\{A_j^{(1)}+H_j^{(1)}A_j^{(1)}-A_j^{(1)}U_j^{(1)}\}_{kl}+\{T_2\}_{kl}. \qquad (134)$$

Следовательно, мы должны иметь

$$\{A_j^{(1)}+H_j^{(1)}A_j^{(1)}-A_j^{(1)}U_j^{(1)}\}_{kk}+\{T_2\}_{kk}=0 \qquad (k=1, \ldots, n)$$

или в силу (132)

$$\{A_j^{(1)}\}_{kk}+\sigma_k\{A_j^{(1)}\}_{kk}-\sum_{s=1}^{n}\{A_j^{(1)}\}_{ks}\{U_j^{(1)}\}_{sk}+\{T_2\}_{kk}=0. \qquad (135)$$

Но

$$\{U_j^{(1)}\}_{kk}=\sigma_k,$$

и предыдущее уравнение может быть записано в виде

$$\{A_j^{(1)}\}_{kk}-\sum_{s\neq k}\{A_j^{(1)}\}_{ks}\{U_j^{(1)}\}_{sk}+\{T_2\}_{kk}=0 \qquad (k=1, \ldots, n)$$

и оно дает диагональные элементы матрицы $A_j^{(1)}$. Уравнения (134) определяют все элементы матрицы $A_j^{(2)}$, за исключением диагональных элементов $\{A_j^{(2)}\}_{kk}$. Беря второе из уравнений (128) при $p=3$, мы можем получить, как и выше, элементы $\{A_j^{(2)}\}_{kk}$ и все элементы матрицы $A_j^{(3)}$, за исключением элементов $\{A_j^{(3)}\}_{kk}$ и т. д.

Так как подстановки $H_j^{(1)}$ и $H_j^{(2)}$ коммутативны, то мы получаем в соответствии с формулой (46) конечное выражение элементарной метаканонической матрицы

$$\theta\left(\begin{matrix}H_j^{(2)}\\ H_j^{(1)}\\ a_j\end{matrix}\middle| x\right)=(x-a_j)^{H_j^{(1)}}e^{-H_j^{(2)}\frac{1}{x-a_j}}=(x-a_j)^{[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]}e^{-[\tau_1, \ldots, \tau_n]\frac{1}{x-a_j}}=$$

$$=\left[(x-a_j)^{\sigma_1}e^{-\frac{\tau_1}{x-a_j}}, \ldots, (x-a_j)^{\sigma_n}e^{-\frac{\tau_n}{x-a_j}}\right],$$

и имеем для искомой метаканонической матрицы системы (1) выражение

$$\left[(x-a_j)^{\sigma_1}e^{-\frac{\tau_1}{x-a_j}}, \ldots, (x-a_j)^{\sigma_n}e^{-\frac{\tau_n}{x-a_j}}\right]\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p\right].$$

Эта матрица дает, вообще говоря, лишь асимптотическое представление, ибо ряд Тэйлора оказывается, вообще говоря, расходящимся. Следовательно, вообще говоря, элементарная метаканоническая матрица конечного вида, указанного выше, не характеризует особенности рассматриваемой матрицы в точке a_j. Противоположный случай наверно имеет место, когда система дифференциальных подстановок $U_j^{(r)}$ коммутативна, и в этом случае мы имеем тотальное представление в конечном виде, указанное в § 6.

Эти рассмотрения делают очевидной связь между представлением (90) и асимптотическими представлениями.

Заметим, наконец, что рассмотрения, аналогичные предыдущим, имеют место для какого угодно s.

§ 10. Представление характеристических матриц степенными рядами от величин, обратных разностям особых точек

Рассмотрим метаканоническую матрицу, определяемую формулой

$$\theta_j(x)=\theta\left(\begin{matrix}H_j^{(s)}\\ \vdots\\ H_j^{(1)}\\ a_j\end{matrix}\middle| x\right)\overline{\theta}_j(x), \quad \text{где} \quad \overline{\theta}_j(x)=I+\sum_{p=1}^{\infty}A_j^{(p)}(x-a_j)^p$$

и матрицы $H_j^{(r)}$ и $A_j^{(p)}$ представляются формулами (81) и (83) как ряды композиций дифференциальных матриц. Коэффициенты этих рядов, как мы видели выше [§ 6], суть однородные полиномы от аргументов

$$\frac{1}{a_h-a_j} \qquad (h=0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m).$$

Для упрощения записи возьмем $j=m$ и положим

$$\xi=x-a_m, \quad \alpha_h=\frac{1}{a_h-a_m} \qquad (h=1, \ldots, m-1). \qquad (136)$$

Мы можем представить $H_m^{(r)}$ и $\overline{\theta}_m(x)$ как степенные ряды аргументов α_h:

$$\overline{\theta}_m(x) = I + \sum_{p=1}^{\infty} A_m^{(p)}\xi^p = \sum_{p_1=0}^{\infty} \dots \sum_{p_{m-1}=0}^{\infty} \alpha_1^{p_1}\dots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\tilde{\theta}_{p_1,\dots,p_{m-1}}(\xi), \qquad (137)$$

$$H_m^{(r)} = \sum_{p_1=0}^{\infty}\dots\sum_{p_{m-1}=0}^{\infty} \alpha_1^{p_1}\dots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\tilde{H}^{(r)}_{p_1,\dots,p_{m-1}} \qquad (r=1,\dots,s-1),$$
$$H_m^{(s)} = U_m^{(s)}. \qquad (138)$$

В разложении

$$A_m^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} \sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)} U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} K_m^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$$

коэффициенты $K_m^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1}\dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ суть однородные полиномы от аргументов α_h степени $(r_1+\dots+r_\nu+p-\nu)\geqslant p$, откуда следует, что

$$\tilde{\theta}_{0\dots0}(\xi) = I,$$

и в общем случае $\tilde{\theta}_{p_1\dots p_{m-1}}(\xi)$ есть полином от ξ степени $p_1+\dots+p_{m-1}$ без постоянного члена.

Функция $\overline{\theta}_m(x)$ удовлетворяет системе (127), которую мы можем записать в виде

$$\frac{d\overline{\theta}_m}{d\xi} = \sum_{h=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{s} \frac{\overline{\theta}_m U_h^{(r)}}{\left(\xi-\frac{1}{\alpha_h}\right)^r} + \sum_{r=1}^{s} \frac{\overline{\theta}_m U_m^{(r)} - H_m^{(r)}\overline{\theta}_m}{\xi^r}. \qquad (139)$$

Подставляя ряды (137) и (138) в эту систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α_h, мы должны еще определить коэффициенты $\tilde{H}^{(r)}_{p_1\dots p_{m-1}}$ таким образом, чтобы $\tilde{\theta}_{p_1\dots p_{m-1}}(\xi)$ были функциями указанного выше типа.

После этих предварительных замечаний рассмотрим частный случай системы (1):

$$\frac{dY}{dx} = Y\left[\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{(x-a_2)^2}\right]. \qquad (140)$$

Положим в этом случае

$$\alpha = \frac{1}{a_1-a_2}; \quad \xi = x-a_2$$

и

$$\overline{\theta}_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p\tilde{\theta}_p(\xi); \quad H_2^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p\tilde{H}_p. \qquad (141)$$

Система (139) для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\frac{d\overline{\theta}_2}{d\xi} = \frac{\overline{\theta}_2 U_1}{\xi-\frac{1}{\alpha}} - \frac{H_2^{(1)}\overline{\theta}_2}{\xi} + \frac{\overline{\theta}_2 U_2 - U_2\overline{\theta}_2}{\xi^2}.$$

Очевидно, мы имеем

$$\frac{1}{\xi-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha\xi-1} = -\sum_{p=1}^{\infty} \alpha^p\xi^{p-1},$$

и, подставляя ряды (141), получим:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p\frac{d\tilde{\theta}_p(\xi)}{d\xi} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p\tilde{\theta}_p(\xi)\left[-U_1\sum_{p=1}^{\infty}\alpha^p\xi^{p-1}+\frac{U_2}{\xi^2}\right] - \left[\frac{1}{\xi}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\tilde{H}_p + \frac{U_2}{\xi^2}\right]\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\tilde{\theta}_p(\xi). \qquad (142)$$

Мы должны, как показано было выше, положить:

$$\tilde{\theta}_0(\xi) = I, \qquad (143)$$
$$\tilde{\theta}_p(\xi) = C_p^{(1)}\xi + C_p^{(2)}\xi^2+\dots+C_p^{(p)}\xi^p \qquad (p>0), \qquad (144)$$

где матрицы $C_p^{(k)}$ не зависят от ξ.

Приравнивая в уравнении (142) коэффициенты при α^0, будем иметь в силу (143):

$$\tilde{H}_0 = 0.$$

В общем случае какого угодно положительного p мы будем иметь

$$\frac{d\tilde{\theta}_p(\xi)}{d\xi} = \frac{\tilde{\theta}_p(\xi)U_2 - U_2\tilde{\theta}_p(\xi)}{\xi^2} + K_p(\xi), \qquad (145)$$

где

$$K_p(\xi) = -\sum_{q=0}^{p-1}\tilde{\theta}_q(\xi)\xi^{p-q-1}U_1 - \frac{1}{\xi}\sum_{q=0}^{p-1}\tilde{H}_{p-q}\tilde{\theta}_q(\xi).$$

Подставляя (143) и (144), получим для $K_p(\xi)$ выражение вида

$$K_p(\xi) = D_p^{(p-1)}\xi^{p-1} + D_p^{(p-2)}\xi^{p-2}+\dots+D_p^{(0)} - \frac{1}{\xi}\tilde{H}_p, \qquad (146)$$

где

$$\left.\begin{aligned} D_p^{(p-1)} &= -(I + C_1^{(1)} + C_2^{(2)}+\dots+C_{p-1}^{(p-1)})U_1, \\ D_p^{(q)} &= -(C_{p-q}^{(1)} + C_{p-q+1}^{(2)}+\dots+C_{p-1}^{(q)})U_1 - \tilde{H}_{p-q-1}C_{q+1}^{(q+1)} - \\ &\quad - \tilde{H}_{p-q-2}C_{q+2}^{(q+1)} - \dots - \tilde{H}_1 C_{p-1}^{(q+1)} \qquad (0<q<p-1) \\ D_p^{(0)} &= -\tilde{H}_{p-1}C_1^{(1)} - \tilde{H}_{p-2}C_2^{(1)} - \dots - \tilde{H}_1 C_{p-1}^{(1)} \end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

и

$$D_1^{(0)} = -U_1. \qquad (148)$$

Подставляя (144) и (146) в уравнение (145), будем иметь:

$$C_p^{(1)} + 2C_p^{(2)}\xi+\dots+pC_p^{(p)}\xi^{p-1} = \frac{1}{\xi}(C_p^{(1)}U_2 - U_2C_p^{(1)}) +$$
$$+ (C_p^{(2)}U_2 - U_2C_p^{(2)}) + (C_p^{(3)}U_2-U_2C_p^{(3)})\xi+\dots+(C_p^{(p)}U_2 -$$
$$- U_2C_p^{(p)})\xi^{p-2} + D_p^{(p-1)}\xi^{p-1}+\dots+D_p^{(1)}\xi + D_p^{(0)}\frac{1}{\xi} - \tilde{H}_p.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим соотношения:

$$\left.\begin{aligned} C_p^{(p)} &= \frac{1}{p}D_p^{(p-1)}, \\ C_p^{(q)} &= \frac{1}{q}(C_p^{(q+1)}U_2 - U_2C_p^{(q+1)} + D_p^{(q-1)}) \qquad (q=1,\dots,p-1), \\ \tilde{H}_p &= C_p^{(1)}U_2 - U_2C_p^{(1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

Полагая последовательно $p=1, 2, \ldots$ и пользуясь формулами (147) и (149), мы можем получить выражения матриц $C_p^{(q)}$ и $\widetilde{H}_p$ в виде полиномов матриц U_1 и U_2. Проделаем эти вычисления для $p=1$, 2 и 3.

Первое и третье из уравнений (149) в силу (148) дают

$$C_1^{(1)}=-U_1; \qquad \widetilde{H}_1=U_2U_1-U_1U_2. \tag{150}$$

Возьмем затем уравнения (147) при $p=2$:

$$D_2^{(1)}=-(I-U_1)U_1=U_1^2-U_1; \quad D_2^{(0)}=-\widetilde{H}_1C_1^{(1)}=U_2U_1^2-U_1U_2U_1.$$

Теперь, пользуясь формулами (149), мы можем получить коэффициенты $C_2^{(q)}$ и $\widetilde{H}_2$:

$$\begin{aligned} C_2^{(2)}&=\frac{1}{2}(U_1^2-U_1),\\ C_2^{(1)}&=C_2^{(2)}U_2-U_2C_2^{(2)}+D_2^{(0)}=\frac{1}{2}[(U_1^2-U_1)U_2-\\ &\quad -U_2(U_1^2-U_1)]+U_2U_1^2-U_1U_2U_1=\\ &=\frac{1}{2}(U_1^2U_2+U_2U_1^2-2U_1U_2U_1+U_2U_1-U_1U_2),\\ \widetilde{H}_2&=C_2^{(1)}U_2-U_2C_2^{(1)}=\frac{1}{2}(U_1^2U_2^2-2U_1U_2U_1U_2+\\ &\quad +2U_2U_1U_2U_1-U_2^2U_1^2-U_1U_2^2+2U_2U_1U_2-U_2^2U_1). \end{aligned} \tag{151}$$

При $p=3$ уравнения (147) дают:

$$\begin{aligned} D_3^{(2)}&=-(I+C_1^{(1)}+C_2^{(2)})U_1=\frac{1}{2}(-U_1^3+3U_1^2-2U_1),\\ D_3^{(1)}&=-C_2^{(1)}U_1-\widetilde{H}_1C_2^{(2)}=-\frac{1}{2}(U_1^2U_2U_1+2U_2U_1^3-3U_1U_2U_1^2),\\ D_3^{(0)}&=-\widetilde{H}_2C_1^{(1)}-\widetilde{H}_1C_2^{(1)}=\frac{1}{2}(U_1^2U_2^2U_1-4U_1U_2U_1U_2U_1+\\ &\quad +U_2U_1U_2U_1^2-U_2^2U_1^3+U_2U_1U_2U_1-U_2^2U_1^2+U_1U_2U_1^2U_2+\\ &\quad +U_1U_2^2U_1^2-U_1U_2U_1U_2-U_2U_1^3U_2+2U_2U_1^2U_2U_1+U_2U_1^2U_2), \end{aligned}$$

и пользуясь формулами (149) мы можем получить $C_3^{(q)}$ и $\widetilde{H}_3$. Вводя символ

$$XY-YX=(X;\ Y),$$

мы можем записать полученные выше формулы в более компактной форме, например:

$$\widetilde{H}_1=(U_2;\ U_1); \quad \widetilde{H}_2=\frac{1}{2}[((U_2;\ U_1);\ U_1);\ U_2)+((U_2;\ U_1);\ U_2)].$$

§ 11. Общий случай

Рассмотрим теперь общий случай системы (139). Мы имеем

$$\frac{1}{\left(\xi-\frac{1}{\alpha_h}\right)^r}=\alpha_h^r(\alpha_h\xi-1)^{-r}=(-1)^r\alpha_h^r\left(1+\alpha_h\xi r+\alpha_h^2\xi^2\,\frac{r(r+1)}{2}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{p=r}^{\infty}\alpha_h^p\xi^{p-r}\left(\binom{r}{p-r}\right),$$

где

$$\begin{aligned} &\left(\binom{r}{t}\right)=(-1)^r\frac{r(r+1)\ldots(r+t-1)}{t!} \qquad (t>0),\\ &\left(\binom{r}{0}\right)=(-1)^r,\\ &\left(\binom{r}{t}\right)=0 \quad \text{для} \quad t<0. \end{aligned} \tag{152}$$

Подставляя разложения (137) и (138) в систему (139), будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_{p_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_{m-1}=0}^{\infty}\alpha_1^{p_1}\ldots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\frac{d\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)}{d\xi}=\\ &=\sum_{p_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_{m-1}=0}^{\infty}\alpha_1^{p_1}\ldots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{s}U_h^{(r)}\sum_{p_h=r}^{\infty}\alpha_h^{p_h}\xi^{p_h-r}\left(\binom{r}{p_h-r}\right)+\\ &\quad+\sum_{p_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_{m-1}=0}^{\infty}\alpha_1^{p_1}\ldots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)\sum_{r=1}^{s}U_m^{(r)}\frac{1}{\xi^r}-\\ &\quad-\sum_{r_1=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}\left[\sum_{p_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_{m-1}=0}^{\infty}\alpha_1^{p_1}\ldots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\widetilde{H}^{(r)}_{p_1\ldots p_{m-1}}\right]\times\\ &\quad\times\sum_{p_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_{m-1}=0}^{\infty}\alpha_1^{p_1}\ldots\alpha_{m-1}^{p_{m-1}}\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\frac{d\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)}{d\xi}=\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)U_m^{(r)}-\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots 0}\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)}{\xi^r}+K_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi), \tag{153}$$

где

$$\begin{aligned} K_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi)&=\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{s}\sum_{q_h=0}^{p_h-1}\widetilde{\theta}_{p_1\ldots q_h\ldots p_{m-1}}(\xi)U_h^{(r)}\xi^{p_h-q_h-r}\left(\binom{r}{p_h-q_h-r}\right)-\\ &\quad-\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}\sum_{q_1=0}^{p_1}\cdots\sum_{q_{m-1}=0}^{p_{m-1}}\widetilde{H}^{(r)}_{q_1\ldots q_{m-1}}\widetilde{\theta}_{p_1-q_1,\ \ldots,\ p_{m-1}-q_{m-1}}(\xi)+\\ &\quad+\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots 0}\widetilde{\theta}_{p_1\ldots p_{m-1}}(\xi). \end{aligned} \tag{154}$$

В частности, уравнение (153) дает

$$\frac{d\widetilde{\theta}_{0\ldots 0}(\xi)}{d\xi}=\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{\theta}_{0\ldots 0}(\xi)U_m^{(r)}-H^{(r)}_{0\ldots 0}\widetilde{\theta}_{0\ldots 0}(\xi)}{\xi^r},$$

и мы должны иметь

$$\widetilde{\theta}_{0\ldots 0}(\xi)=I,$$

и, следовательно,

$$\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots 0}=U_m^{(r)} \qquad (r=1,\ \ldots,\ s). \tag{155}$$

Возьмем теперь следующий случай, когда все индексы, за исключением одного, равны нулю и один индекс равен единице. Пусть h — номер этого индекса.

Мы имеем для этого случая

$$K_{0\ldots1\ldots0}(\xi)=-U_h^{(1)}-\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots0},$$

$$\frac{d\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots0}(\xi)}{d\xi}=\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}[\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots0}(\xi)U_m^{(r)}-U_m^{(r)}\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots0}(\xi)]-$$
$$-U_h^{(1)}-\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots0},$$

и должны положить

$$\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots0}(\xi)=C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}\xi,$$

что дает

$$\left.\begin{aligned}&U_m^{(1)}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}+C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}-C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}U_m^{(1)}=-U_h^{(1)},\\&\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots0}=C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}U_m^{(r+1)}-U_m^{(r+1)}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}\qquad(r=1,\ldots,s-1),\\&\widetilde{H}^{(s)}_{0\ldots1\ldots0}=0.\end{aligned}\right\}\tag{156}$$

Первое из этих уравнений определяет матрицу $C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0}$ и прочие — матрицы $\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots0}$.

Возьмем теперь случай, когда два из индексов отличны от нуля и равны единице. Пусть h и g — номера этих индексов. Мы имеем для этого случая:

$$K_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(\xi)=-\widetilde{\theta}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}(\xi)U_h^{(1)}-\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}(\xi)U_g^{(1)}-$$
$$-\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}[(\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}\widetilde{\theta}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}(\xi)+\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}\theta_{0\ldots1\ldots0\ldots0}(\xi)+$$
$$+\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}]=-(C^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}U_h^{(1)}+C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}U_g^{(1)})\xi-$$
$$-(\widetilde{H}^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}+\widetilde{H}^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0})-$$
$$-\sum_{r=1}^{s-1}\frac{1}{\xi^r}(\widetilde{H}^{(r+1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}+\widetilde{H}^{(r+1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}+$$
$$+\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0})-\frac{1}{\xi^s}\widetilde{H}^{(s)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}$$

и

$$\frac{d\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(\xi)}{d\xi}=\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{\xi^r}(\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(\xi)U_m^{(r)}-U_m^{(r)}\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(\xi))+$$
$$+K_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(\xi),$$

где следует положить

$$\widetilde{\theta}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}(\xi)=C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}\xi+C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}\xi^2.$$

Это приводит нас к уравнениям:

$$U_m^{(1)}C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}+2C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}-C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}U_m^{(1)}=$$
$$=-C^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}U_h^{(1)}-C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}U_g^{(1)},$$
$$U_m^{(1)}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}+C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}-C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}U_m^{(1)}=$$
$$=C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}U_m^{(2)}-U_m^{(2)}C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}-$$
$$-(\widetilde{H}^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}+\widetilde{H}^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}),$$
$$\widetilde{H}^{(r)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}=C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}U_m^{(r+1)}-U_m^{(r+1)}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}+$$
$$+C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}U_m^{(r+2)}-U_m^{(r+2)}C^{(2)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}-$$
$$-\widetilde{H}^{(r+1)}_{0\ldots1\ldots0\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}-\widetilde{H}^{(r+1)}_{0\ldots0\ldots1\ldots0}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots\;\ldots0},$$
$$(r=1,\ldots,s-2)$$
$$\widetilde{H}^{(s-1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}=C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}U_m^{(s)}-U_m^{(s)}C^{(1)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0},$$
$$\widetilde{H}^{(s)}_{0\ldots1\ldots1\ldots0}=0.$$

§ 12. Интегральные и показательные подстановки интегральной нормированной матрицы как функции точки нормирования

Обозначим, как всегда, через $Y_b(x)$ интегральную матрицу системы (1), нормированную в точке $x=b$, через $V_j(b)$ — интегральную подстановку этой матрицы в точке $x=a_j$ и через $W_j(b)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}V_j(b)$ — показательную подстановку этой матрицы.

Мы имеем очевидные формулы

$$Y_b(x)=Y_b(c)Y_c(x),\tag{157}$$

$$V_j(b)=Y_c(b)^{-1}V_j(c)Y_c(b),\tag{158}$$

$$W_j(b)=Y_c(b)^{-1}W_j(c)Y_c(b).\tag{159}$$

Если точка b описывает замкнутый путь вокруг точки a_j, то мы имеем

$$Y_c^{+}(b)=V_j(c)Y_c(b);\quad Y_c^{+}(b)^{-1}=Y_c(b)^{-1}V_j(c)^{-1},$$

и, следовательно,

$$V_j^{+}(b)=V_j(b),$$

т. е. $V_j(b)$ есть однозначная функция в окрестности точки $b=a_j$. То же самое имеет место, очевидно, и для подстановки $W_j(b)$, что следует из коммутативности матриц $W_j(c)$ и $V_j(c)$.

Обозначим через $W_j^{(r)}(b)$ характеристические подстановки матрицы $Y_b(x)$. Мы имеем

$$Y_b(x)=\theta_j(b)^{-1}\theta_j(x)$$

и, следовательно, [§ 6]

$$W_j^{(r)}(b)=\theta_j(b)^{-1}H_j^{(r)}\theta_j(b).\tag{160}$$

Для метаканонической матрицы мы имеем представление

$$\theta_j(x)=(x-a_j)^{H_j^{(1)}}\overline{E}_j(x)\overline{\theta}_j(x),\tag{161}$$

где $\overline{E}_j(x)$ — однозначная составляющая элементарной метаканонической матрицы, удовлетворяющей системе

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{r=1}^{s}\frac{YH_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}. \tag{162}$$

Подставляя выражение (161) в формулу (160), мы имеем

$$W_j^{(r)}(b)=\overline{\theta}_j(b)^{-1}\overline{E}_j(b)^{-1}(b-a_j)^{-H_j^{(1)}}H_j^{(r)}(b-a_j)^{H_j^{(1)}}\overline{E}_j(b)\,\overline{\theta}_j(b). \tag{163}$$

Вообще говоря, матрицы $H_j^{(r)}$ и $H_j^{(1)}$ не коммутативны, и $W_j^{(r)}(b)$ многозначны в окрестности точки $b=a_j$.

Дифференцируя формулы (158) и (159) по b, получим уравнения [ст. II, § 5]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV_j(b)}{db}&=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{V_j(b)\,U_h^{(r)}-U_h^{(r)}V_j(b)}{(b-a_h)^r},\\ \frac{dW_j(b)}{db}&=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{W_j(b)\,U_h^{(r)}-U_h^{(r)}W_j(b)}{(b-a_h)^r}.\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Получим теперь некоторые разложения для матриц $V_j(b)$ и $W_j(b)$. Для сокращения записи положим $j=m$ и обозначим

$$\frac{1}{a_h-a_m}=\lambda\alpha_h\quad(h=1,\ \ldots,\ m-1);\quad b-a_m=\beta.$$

Уравнения (164) имеют вид:

$$\frac{dV_m}{d\beta}=\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{s}\frac{V_mU_h^{(r)}-U_h^{(r)}V_m}{\left(\beta-\frac{1}{\lambda\alpha_h}\right)^r}+\sum_{r=1}^{s}\frac{V_mU_m^{(r)}-U_m^{(r)}V_m}{\beta^r}, \tag{165}$$

и мы имеем, как в предыдущем параграфе,

$$\left(\beta-\frac{1}{\lambda\alpha_h}\right)^{-r}=\sum_{p=r}^{\infty}\lambda^p\alpha_h^p\beta^{p-r}\left(\binom{r}{p-r}\right).$$

Можно представить $V_m(\beta)$ как степенной ряд относительно параметра λ:

$$V_m(\beta)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\lambda^\mu\widetilde{V}_\mu(\beta),$$

подставляя этот ряд в уравнение (165) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$\frac{d\widetilde{V}_0(\beta)}{d\beta}=\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{V}_0(\beta)\,U_m^{(r)}-U_m^{(r)}\widetilde{V}_0(\beta)}{\beta^r}, \tag{166}$$

$$\frac{d\widetilde{V}_\mu(\beta)}{d\beta}=\sum_{r=1}^{s}\frac{\widetilde{V}_\mu(\beta)\,U_m^{(r)}-U_m^{(r)}\widetilde{V}_\mu(\beta)}{\beta^r}+M_\mu(\beta), \tag{167}$$

где

$$\begin{aligned}M_\mu(\beta)=&\sum_{r=1}^{\mu}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{\mu-r}V_q(\beta)\,\alpha_h^{\mu-q}\beta^{\mu-r-q}\left(\binom{r}{\mu-r-q}\right)U_h^{(r)}-\\ &-\sum_{r=1}^{\mu}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{\mu-r}U_h^{(r)}\alpha_h^{\mu-q}\beta^{\mu-r-q}\left(\binom{r}{\mu-r-q}\right)\widetilde{V}_q(\beta)\end{aligned}$$

для $\mu<s$,

$$\begin{aligned}M_\mu(\beta)=&\sum_{r=1}^{s}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{\mu-r}\widetilde{V}_q(\beta)\,\alpha_h^{\mu-q}\beta^{\mu-r-q}\left(\binom{r}{\mu-r-q}\right)U_h^{(r)}-\\ &-\sum_{r=1}^{s}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{\mu-r}U_h^{(r)}\alpha_h^{\mu-q}\beta^{\mu-r-q}\left(\binom{r}{\mu-r-q}\right)\widetilde{V}_q(\beta)\end{aligned} \tag{168}$$

для $\mu\geqslant s$.

Вместо $\widetilde{V}_\mu(\beta)$ введем новые функции

$$\overline{V}_\mu(\beta)=\overline{E}(\beta)\,\widetilde{V}_\mu(\beta)\,\overline{E}(\beta)^{-1}, \tag{169}$$

где

$$E(\beta)=\beta^{U_m^{(1)}}\overline{E}(\beta)$$

есть элементарная метаканоническая матрица, удовлетворяющая системе

$$\frac{dY}{d\beta}=\sum_{r=1}^{s}\frac{YU_m^{(r)}}{\beta^r}.$$

Для $\overline{E}(\beta)$ мы имеем, очевидно, систему

$$\frac{d\overline{E}(\beta)}{d\beta}=\sum_{r=1}^{s}\frac{\overline{E}(\beta)\,U_m^{(r)}}{\beta^r}-\frac{U_m^{(1)}\overline{E}(\beta)}{\beta}, \tag{170}$$

откуда следует

$$\frac{d\overline{E}(\beta)^{-1}}{d\beta}=-\sum_{r=1}^{s}\frac{U_m^{(r)}\overline{E}(\beta)^{-1}}{\beta^r}+\frac{\overline{E}(\beta)^{-1}U_m^{(1)}}{\beta}. \tag{171}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{V}_\mu(\beta)}{d\beta}=&\ \overline{E}(\beta)\,\frac{d\widetilde{V}_\mu(\beta)}{d\beta}\,\overline{E}(\beta)^{-1}+\left[\sum_{r=1}^{s}\frac{\overline{E}(\beta)\,U_m^{(r)}}{\beta^r}-\frac{U_m^{(1)}\overline{E}(\beta)}{\beta}\right]\widetilde{V}_\mu(\beta)\,\overline{E}(\beta)^{-1}+\\ &+\overline{E}(\beta)\,\widetilde{V}_\mu(\beta)\left[-\sum_{r=1}^{s}\frac{U_m^{(r)}\overline{E}(\beta)^{-1}}{\beta^r}+\frac{\overline{E}(\beta)^{-1}U_m^{(1)}}{\beta}\right].\end{aligned}$$

Пользуясь уравнением (166), мы получим уравнение для $\overline{V}_0(\beta)$:

$$\frac{d\overline{V}_0(\beta)}{d\beta}=\frac{\overline{V}_0(\beta)\,U_m^{(1)}-U_m^{(1)}\overline{V}_0(\beta)}{\beta}. \tag{172}$$

Рассмотрим теперь случай любого μ:

$$\frac{d\overline{V}_\mu(\beta)}{d\beta}=\frac{\overline{V}_\mu(\beta)\,U_m^{(1)}-U_m^{(1)}\overline{V}_\mu(\beta)}{\beta}+\overline{E}(\beta)\,M_\mu(\beta)\,\overline{E}(\beta)^{-1}$$

или

$$\frac{d\overline{V}_\mu(\beta)}{d\beta}=\frac{\overline{V}_\mu(\beta)\,U_m^{(1)}-U_m^{(1)}\overline{V}_\mu(\beta)}{\beta}+\sum_{r=1}^{[\mu,\,s]}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{\mu-r}\left[\overline{V}_q(\beta)\,\overline{E}(\beta)\,U_h^{(r)}\overline{E}(\beta)^{-1}-\right.$$

$$\left.-\overline{E}(\beta)\,U_h^{(r)}\overline{E}(\beta)^{-1}\overline{V}_q(\beta)\right]\alpha_h^{\mu-q}\beta^{\mu-r-q}\left(\binom{r}{\mu-r-q}\right), \tag{173}$$

где символ $[\mu,\ s]$ равен μ для $\mu<s$ и равен s для $\mu\geqslant s$.

Подставляя в уравнение (172)

$$\overline{V}_0(\beta)=\beta^{-U_m^{(1)}}F_0\beta^{U_m^{(1)}}, \tag{174}$$

мы будем иметь

$$\frac{dF_0}{d\beta}=0,$$

т. е. формула (174), где произвольная матрица F_0 не зависит от β, представляет общее решение уравнения (172).

Функции $\overline{V}_\mu(\beta)$ и $\overline{E}(\beta)$ суть однозначные функции β в окрестности точки $\beta=0$, и то же самое имеет место для $\overline{V}_\mu$, откуда следует

$$\beta^{-U_m^{(1)}}e^{-2\pi i U_m^{(1)}}F_0e^{2\pi i U_m^{(1)}}\beta^{U_m^{(1)}}=\beta^{-U_m^{(1)}}F_0\beta^{U_m^{(1)}}$$

или

$$e^{-2\pi i U_m^{(1)}}F_0e^{2\pi i U_m^{(1)}}=F_0. \tag{175}$$

Структура матриц $V_m(\beta)$ и $\overline{E}(\beta)$ показывает, что матрица

$$\overline{E}(\beta)\,V_m(\beta)\,\overline{E}(\beta)^{-1}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\lambda^\mu\overline{V}_\mu(\beta)$$

может быть представлена как ряд композиций матриц $U_j^{(r)}$, коэффициенты которого суть степенные ряды от λ и, следовательно, коэффициенты $\overline{V}_\mu(\beta)$ суть ряды композиций матриц $U_j^{(r)}$, когда эти последние матрицы находятся в некоторой окрестности нулевых матриц. То же самое имеет место для матрицы

$$F_0=\beta^{U_m^{(1)}}\overline{V}_0(\beta)\,\beta^{-U_m^{(1)}}.$$

Пользуясь формулой (175), мы можем легко доказать, что матрица F_0 зависит лишь от матрицы $U_m^{(1)}$. Действительно, положим

$$F_0=a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\,\dots,\,j_\nu}^{(1,\,\dots,\,m)}\sum_{r_1,\,\dots,\,r_\nu}^{(1,\,\dots,\,s)}a_{j_1\dots j_\nu}^{r_1\dots r_\nu}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}. \tag{176}$$

Формула (175) дает

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\,\dots,\,j_\nu}^{(1,\,\dots,\,m)}\sum_{r_1,\,\dots,\,r_\nu}^{(1,\,\dots,\,s)}a_{j_1\dots j_\nu}^{r_1\dots r_\nu}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}U_m^{(1)^\nu}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}U_m^{(1)^\nu}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\,\dots,\,j_\nu}^{(1,\,\dots,\,m)}\sum_{r_1,\,\dots,\,r_\nu}^{(1,\,\dots,\,s)}a_{j_1\dots j_\nu}^{r_1\dots r_\nu}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)},$$

откуда следует (если приравнять коэффициенты при $U_m^{(1)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}$ в рядах композиций, находящихся в обеих частях этой формулы), что $a_{j_1\dots j_\nu}^{r_1\dots r_\nu}$ может быть отлично от нуля лишь в случае, когда $r_1=1$ и $j_1=m$. Продолжая эти рассуждения, увидим, что ряд (176) зависит лишь от матрицы $U_m^{(1)}$ и, следовательно,

$$\overline{V}_0(\beta)=\beta^{-U_m^{(1)}}F_0(U_m^{(1)})\,\beta^{U_m^{(1)}}=F_0(U_m^{(1)}).$$

Если все матрицы $U_h^{(r)}$, за исключением $U_m^{(1)}$, равны нулю, то мы имеем $V_m=e^{2\pi i U_m^{(1)}}$ и $\overline{E}(\beta)=I$, откуда следует

$$F_0(U_m^{(1)})=e^{2\pi i U_m^{(1)}}. \tag{177}$$

Предыдущие рассуждения применимы и к матрице $W_j(b)$. Но в этом случае вместо (177) мы имеем

$$F_0(U_m^{(1)})=U_m^{(1)}. \tag{178}$$

Рассмотрим теперь $\overline{V}_\mu(\beta)$. Интегрирование уравнения (173) дает

$$\overline{V}_\mu(\beta)=\beta^{-U_m^{(1)}}\left[\int\beta^{U_m^{(1)}}\sum_{r=1}^{[\mu,\,s]}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{q=0}^{\mu-r}\left[\overline{V}_q(\beta)\,G_h^{(r)}(\beta)-G_h^{(r)}(\beta)\,\overline{V}_q(\beta)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,\alpha_h^{\mu-q}\beta^{\mu-r-q}\left(\binom{r}{\mu-r-q}\right)\beta^{-U_m^{(1)}}\,d\beta\right]\beta^{U_m^{(1)}}+\beta^{-U_m^{(1)}}F_\mu\beta^{U_m^{(1)}},$$

где

$$G_h^{(r)}(\beta)=\overline{E}(\beta)\,U_h^{(r)}\overline{E}(\beta)^{-1},$$

F_μ — матрица, не зависящая от β, и $\int N(\beta)\,d\beta$ есть произвольная фиксированная матрица, производная которой равна $N(\beta)$. F_μ следует выбирать таким образом, чтобы $\overline{V}_\mu(\beta)$ была однозначна относительно β в окрестности $\beta=0$.

СТАТЬЯ ШЕСТАЯ

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ГРУППЫ МОНОДРОМИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение

Целью статьи является построение явных выражений инвариантов группы монодромии данной системы линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами. Эти выражения должны сделать очевидной природу зависимости упомянутых инвариантов от дифференциальных подстановок и конфигурации особых точек. Решение указанной проблемы необходимо для общего решения фундаментальной проблемы о полной аналитической характеристике особенностей матрицы рационального определения, которая была поставлена и решена в нашей предыдущей статье при условии, что дифференциальные подстановки находятся в окрестности системы нулевых подстановок.

Пусть V_j — интегральная подстановка в точке a_j матрицы рационального определения Y, удовлетворяющей системе

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{YU_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}. \tag{1}$$

Обозначим через

$$\chi_1(V_j), \ldots, \chi_n(V_j), \tag{2}$$

где n — порядок рассматриваемых матриц, характеристические числа подстановки V_j. Инварианты этой подстановки

$$\left.\begin{aligned} \iota_1(V_j)&=\chi_1(V_j)+\ldots+\chi_n(V_j),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \iota_n(V_j)&=\chi_1(V_j)\chi_2(V_j)\ldots\chi_n(V_j)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

суть симметрические функции характеристических чисел. Совокупность инвариантов (3) для всех подстановок $V_1, \ldots, V_m$ образует систему инвариантов группы монодромии системы уравнений (1). Эти инварианты, очевидно, не зависят от выбора интегральной матрицы Y, и мы можем предполагать, что эта матрица нормирована в точке b. Инварианты (3) суть суммы главных миноров определителя матрицы V_j, являющегося равномерно целой функцией дифференциальных подстановок $U_j^{(r)}$. Следовательно, *инварианты*

$$\iota_1(V_j), \ldots, \iota_n(V_j)$$

суть целые численные функции дифференциальных подстановок $U_j^{(r)}$, и речь идет лишь о построении явных выражений этих функций в виде рядов, расположенных по степеням элементов дифференциальных подстановок, и об изучении природы зависимости коэффициентов этих рядов от особых точек.

Упомянутые представления до настоящего времени отсутствовали. Установив эти представления, мы получаем выражения для характеристических чисел (2) в виде корней *алгебраического уравнения* степени n, коэффициентами которого являются инварианты (3). Построение характеристических чисел (3) по методу Коха приводит к решению *трансцендентного уравнения*, которое получается приравниванием нулю некоторого бесконечного определителя, и не дает никаких сведений о природе их зависимости от дифференциальных подстановок и от конфигурации особых точек.

§ 2. Инварианты матрицы

Среди инвариантов инвариант первого порядка будет играть важную роль в последующем; мы назовем его *главным инвариантом*.

Главный инвариант подстановки X порядка n, или „след" этой подстановки, есть линейная численная функция элементов этой подстановки

$$\iota_1(X)=\chi_1 X+\chi_2(X)+\ldots+\chi_n(X)=\sum_{k=1}^{n}\{X\}_{kk}. \tag{4}$$

Отсюда следует свойство аддитивности

$$\iota_1\left(\sum_{\mu=1}^{\nu}X_\mu\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\iota_1(X_\mu). \tag{5}$$

Кроме того, все инварианты $\iota_p(X)$ обладают свойством коммутативности

$$\iota_p(X_1X_2)=\iota_p(X_2X_1) \qquad (p=1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Действительно, в случае, когда определитель подстановки X_1 или X_2 отличен от нуля, подстановки X_1X_2 и X_2X_1 подобны

$$X_1X_2=X_1(X_2X_1)X_1^{-1} \quad \text{или} \quad X_2X_1=X_2(X_1X_2)X_2^{-1},$$

откуда следует, что характеристические числа этих подстановок одни и те же и что равенства (6) имеют место. По непрерывности соотношения (6) справедливы и в случае произвольных X_1 и X_2.

Применяя формулы (6) несколько раз, получим соотношения

$$\iota_p(X_1X_2\ldots X_\nu)=\iota_p(X_\nu X_1\ldots X_{\nu-1})=\ldots=\iota_p(X_2X_3\ldots X_\nu X_1) \qquad (p=1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

которые выражают свойство циклической коммутативности инвариантов. Но очевидно, что, вообще говоря,

$$\iota_1(X_1X_2X_3)\neq\iota_1(X_1X_3X_2),$$

например, если мы возьмем

$$X_1=\begin{Vmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{Vmatrix}, \quad X_2=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{Vmatrix}, \quad X_3=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{Vmatrix},$$

то получим

$$\iota_1(X_1 X_2 X_3) = 1, \quad \iota_1(X_1 X_3 X_2) = 0.$$

Пусть

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} \tag{8}$$

голоморфная функция подстановок $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

В силу формул (5) и (7) мы имеем

$$\iota_1(F(X_1, X_2, \ldots X_m)) = n\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, m)} \iota_1(X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}) \overset{\circ}{\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}, \tag{9}$$

где

$$\overset{\circ}{\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\circ} \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}. \tag{10}$$

Сумма $\sum\limits_{\circ}$ распространяется на все различные перестановки, содержащиеся в системах циклических перестановок

$$j_1 j_2 \ldots j_\nu, \quad j_\nu j_1, \ldots j_{\nu-1}, \ldots, \quad j_2 j_3 \ldots j_\nu j_1, \tag{11}$$

и сумма $\overset{*}{\sum}$ — на представители всех циклических систем (11), в которых индексы $j_1, \ldots, j_\nu$ принимают независимо значения $1 \ldots m$. Например, для $m = 4$ ряд (9) будет записываться так:

$$\begin{aligned}
\iota_1(F(X_1, X_2, X_3, X_4)) = n\alpha_0 &+ \iota_1(X_1)\alpha_1 + \iota_1(X_2)\alpha_2 + \iota_1(X_3)\alpha_3 + \iota_1(X_4)\alpha_4 + \\
&+ \iota_1(X_1 X_1)\alpha_{11} + \iota_1(X_1 X_2)\overset{\circ}{\alpha}_{12} + \iota_1(X_1 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{13} + \iota_1(X_1 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{14} + \\
&+ \iota_1(X_2 X_2)\alpha_{22} + \iota_1(X_2 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{23} + \iota(X_2 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{24} + \\
&+ \iota_1(X_3 X_3)\alpha_{33} + \iota_1(X_3 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{34} + \\
&+ \iota_1(X_4 X_4)\alpha_{44} + \\
&+ \iota_1(X_1 X_1 X_1)\alpha_{111} + \iota_1(X_1 X_1 X_2)\overset{\circ}{\alpha}_{112} + \iota_1(X_1 X_1 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{113} + \iota_1(X_1 X_1 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{114} + \\
&+ \iota_1(X_1 X_2 X_2)\overset{\circ}{\alpha}_{122} + \iota_1(X_1 X_2 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{123} + \iota_1(X_1 X_2 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{124} + \\
&+ \iota_1(X_1 X_3 X_2)\overset{\circ}{\alpha}_{132} + \iota_1(X_1 X_3 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{133} + \iota_1(X_1 X_3 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{134} + \\
&+ \iota_1(X_1 X_4 X_2)\overset{\circ}{\alpha}_{142} + \iota_1(X_1 X_4 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{143} + \iota_1(X_1 X_4 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{144} + \\
&+ \iota_1(X_2 X_2 X_2)\alpha_{222} + \iota_1(X_2 X_2 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{223} + \iota_1(X_2 X_2 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{224} + \\
&+ \iota_1(X_2 X_3 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{233} + \iota_1(X_2 X_3 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{234} + \\
&+ \iota_1(X_2 X_4 X_3)\overset{\circ}{\alpha}_{243} + \iota_1(X_2 X_4 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{244} + \\
&+ \iota_1(X_3 X_3 X_3)\alpha_{333} + \iota_1(X_3 X_3 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{334} + \\
&+ \iota_1(X_3 X_4 X_4)\overset{\circ}{\alpha}_{344} + \\
&+ \iota_1(X_4 X_4 X_4)\alpha_{444} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Главный инвариант функции

$$F(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_m^{(s)}) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} X_{j_1}^{(r_1)} \ldots X_{j_\nu}^{(r_\nu)} \alpha_{\substack{r_1 \ldots r_\nu \\ j_1 \ldots j_\nu}}, \tag{12}$$

зависящей от ms подстановок $X_1^{(1)}, \ldots, X_m^{(s)}$, очевидно, есть

$$\iota_1(F(X_1^{(1)}, \ldots, X_m^{(s)})) = n\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, s)} \iota_1(X_{j_1}^{(r_1)} \ldots X_{j_\nu}^{(r_\nu)} \overset{\circ}{\alpha}_{\substack{r_1 \ldots r_\nu \\ j_1 \ldots j_\nu}}, \tag{13}$$

где

$$\overset{\circ}{\alpha}_{\substack{r_1 \ldots r_\nu \\ j_1 \ldots j_\nu}} = \sum_{\circ} \alpha_{\substack{r_1 \ldots r_\nu \\ j_1 \ldots j_\nu}}, \tag{14}$$

при этом сумма $\sum\limits_{\circ}$ распространяется на все различные перестановки

$$\begin{pmatrix} r_1 r_2 \ldots r_\nu \\ j_1 j_2 \ldots j_\nu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_\nu r_1 \ldots r_{\nu-1} \\ j_\nu j_1 \ldots j_{\nu-1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} r_2 r_3 \ldots r_\nu r_1 \\ j_2 j_3 \ldots j_\nu j_1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

и суммы $\overset{*}{\sum}$ — на представителей всех циклических систем (15), которые образуют множество всех строк

$$\begin{pmatrix} r_1 r_2 \ldots r_\nu \\ j_1 j_2 \ldots j_\nu \end{pmatrix},$$

отвечающих значениям индексов

$$j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, \ldots, m; \qquad r_1, r_2, \ldots, r_\nu = 1, \ldots, s.$$

Заметим теперь, что если равенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, m)} \iota_1(X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}) \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0 \tag{16}$$

имеет место для всех матриц X_j произвольного порядка, находящихся в окрестности системы нулевых подстановок, то мы должны иметь соотношения

$$\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0. \tag{17}$$

Доказательство вполне аналогично тому, которое было проведено для соответствующей теоремы об единственности ряда композиций [ст. I, § 15]. Сначала доказывается, что если тождество (16) имеет место, то мы должны также иметь

$$\sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, m)} \iota_1(X_{j_1} X_{j_2} \ldots X_{j_\nu}) \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0;$$

рассмотрим теперь фиксированный коэффициент $\beta_{r_1 r_2 \ldots r_\nu} = \gamma$. Если все индексы $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ различны, то мы положим:

$$X_{r_1} = Y_1; \quad X_{r_2} = Y_2 \ldots X_{r_\nu} = Y_\nu; \quad X_\alpha = 0, \quad \text{если} \quad \alpha \neq r_1, r_2, \ldots, r_\nu,$$

и получим равенство вида

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, \nu)} \iota_1(Y_{k_1} Y_{k_2} \ldots Y_{k_\nu}) \gamma_{k_1 k_2 \ldots k_\nu} = 0, \tag{18}$$

где $\gamma_{12 \ldots \nu} = \gamma$. Положим теперь все элементы подстановок $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$ порядка ν равными нулю, за исключением

$$\{Y_1\}_{12} = \{Y_2\}_{23} = \ldots = \{Y_\nu\}_{\nu 1} = 1;$$

тогда все инварианты

$$\iota_1(Y_{k_1}Y_{k_2}\ldots Y_{k_\nu})$$

в предыдущей формуле обращаются в нуль, за исключением

$$\iota_1(Y_1Y_2\ldots Y_\nu)=1;$$

следовательно, из формулы (18) вытекает, что $\gamma=0$, т. е. $\beta_{r_1\ldots r_\nu}=0$, если все индексы $r_1, \ldots, r_\nu$ различны. В случае, когда некоторые из индексов $r_1, \ldots, r_\nu$ равны, мы докажем сначала при помощи метода, аналогичного методу первой статьи § 15, что имеет место тождество вида (18), в котором $\gamma_{12\ldots\nu}=\gamma$ и каждый коэффициент $\gamma_{k_1k_2\ldots k_\nu}$ совпадает с одним из коэффициентов $\beta_{j_1j_2\ldots j_\nu}$. Но тогда такое же рассуждение, как выше, нам дает $\gamma=0$, т. е. $\beta_{r_1r_2\ldots r_\nu}=0$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует единственность (в указанном выше смысле) представления главного инварианта $\iota_1(F(X_1, X_2, \ldots, X_m))$ рядом вида (9).

§ 3. Составные матрицы

Чтобы построить ряды численных целых функций, представляющих инварианты интегральных подстановок, мы должны ввести некоторые матрицы, образованные минорами определителей заданных подстановок.

Пусть X — подстановка порядка n и

$$D^{(n)}(X)=\begin{vmatrix}\{X\}_{11} & \ldots & \{X\}_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \{X\}_{n1} & \ldots & \{X\}_{nn}\end{vmatrix} \tag{19}$$

ее определитель. Обозначим через

$$D_{\substack{k_1l_1\\k_2l_2\\\ldots\\k_pl_p}}=\begin{vmatrix}\{X\}_{k_1l_1} & \{X\}_{k_1l_2} & \ldots & \{X\}_{k_1l_p}\\ \{X\}_{k_2l_1} & \{X\}_{k_2l_2} & \ldots & \{X\}_{k_2l_p}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \{X\}_{k_pl_1} & \{X\}_{k_pl_2} & \ldots & \{X\}_{k_pl_p}\end{vmatrix} \tag{20}$$

минор определителя (19) порядка p, который мы получим, удерживая строки с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_p$ и столбцы с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_p$.

Все индексы

$$k_1, k_2, \ldots, k_p=1, 2, \ldots, n,$$

а также индексы $l_1, l_2, \ldots, l_p$ различны, и мы можем расположить их всегда таким образом, что

$$k_1<k_2<\ldots<k_p \quad \text{и} \quad l_1<l_2<\ldots<l_p. \tag{21}$$

Матрицу

$$\vartheta^{(p)}(X)$$

порядка $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}$, элементы которой

$$\{\vartheta^{(p)}(X)\}_{\substack{k_1l_1\\\ldots\\k_pl_p}}=D_{\substack{k_1l_1\\\ldots\\k_pl_p}}(X)$$

суть определители (20) с индексами, удовлетворяющими неравенствам (21), будем называть *составной матрицей* ϑ степени p относительно подстановки X. Система индексов $\begin{pmatrix}k_1\\\ldots\\k_p\end{pmatrix}$ образует сложный индекс, указывающий строку, и система индексов $\begin{pmatrix}l_1\\\ldots\\l_p\end{pmatrix}$ — сложный индекс, указывающий столбец рассматриваемой составной матрицы. Безразлично, в каком порядке мы расположим эти системы индексов для нумерации строк и столбцов составной матрицы $\vartheta^{(p)}$, однако размещение этих систем индексов должно быть одним и тем же для строк и столбцов. Например, если $n=3$, мы имеем

$$\vartheta^{(2)}(X)=\begin{Vmatrix}D_{\substack{11\\22}}(X) & D_{\substack{11\\23}}(X) & D_{\substack{12\\23}}(X)\\ D_{\substack{11\\32}}(X) & D_{\substack{11\\33}}(X) & D_{\substack{12\\33}}(X)\\ D_{\substack{21\\32}}(X) & D_{\substack{21\\33}}(X) & D_{\substack{22\\33}}(X)\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}\{X\}_{11}\{X\}_{22}-\{X\}_{12}\{X\}_{21} & \{X\}_{11}\{X\}_{23}-\{X\}_{13}\{X\}_{21} & \{X\}_{12}\{X\}_{23}-\{X\}_{13}\{X\}_{22}\\ \{X\}_{11}\{X\}_{32}-\{X\}_{12}\{X\}_{31} & \{X\}_{11}\{X\}_{33}-\{X\}_{13}\{X\}_{31} & \{X\}_{12}\{X\}_{33}-\{X\}_{13}\{X\}_{32}\\ \{X\}_{21}\{X\}_{32}-\{X\}_{22}\{X\}_{31} & \{X\}_{21}\{X\}_{33}-\{X\}_{23}\{X\}_{31} & \{X\}_{22}\{X\}_{33}-\{X\}_{23}\{X\}_{32}\end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что составная матрица ϑ первой степени имеет порядок n и совпадает с исходной подстановкой

$$D^{(1)}(X)=X. \tag{22}$$

Составная матрица ϑ n-й степени имеет порядок, равный единице, и ее единственный элемент совпадает с определителем исходной подстановки X:

$$\vartheta^{(n)}(X)=D_{\substack{11\\\ldots\\nn}}(X). \tag{23}$$

Пусть X и Y — произвольные подстановки порядка n; умножение составных матриц $\vartheta^p(x)$ и $\vartheta^{(p)}(Y)$ производится, очевидно, по формуле

$$\{\vartheta^{(p)}(X)\vartheta^{(p)}(Y)\}_{\substack{k_1l_1\\\ldots\\k_pl_p}}=\sum_{s_1<\ldots<s_p}\{\vartheta^{(p)}(X)\}_{\substack{k_1s_1\\\ldots\\k_ps_p}}\{\vartheta^{(p)}(Y)\}_{\substack{s_1l_1\\\ldots\\s_pl_p}},$$

где сумма распространяется на все значения индексов $s_1, \ldots, s_p=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих указанному неравенству.

Опираясь на известное тождество [1])

$$D_{\substack{k_1l_1\\\ldots\\k_pl_p}}(XY)=\sum_{s_1<\ldots<s_p}D_{\substack{k_1s_1\\\ldots\\k_ps_p}}(X)D_{\substack{s_1l_1\\\ldots\\s_pl_p}}(Y), \tag{24}$$

мы легко докажем замечательное соотношение

$$\vartheta^{(p)}(XY)=\vartheta^{(p)}(X)\vartheta^{(p)}(Y), \tag{25}$$

[1]) G. Kowalewski, Einführung in Determinantentheorie, 2 Aufl., 1925 г., § 34, стр. 63—66 и § 36, стр. 68—70.

которое является обобщением хорошо известной формулы

$$D_{\substack{11\\ \cdots\\ nn}}(XY)=D_{\substack{11\\ \cdots\\ nn}}(X)\,D_{\substack{11\\ \cdots\\ nn}}(Y),$$

для определителя произведения двух матриц.

Пользуясь введенными понятиями, получим выражения инвариантов данной подстановки X порядка n:

$$\iota_p(X)=\iota_1(\mathfrak{F}^{(p)}(X))=\sum_{k_1<\ldots<k_p}^{(1,\ldots,n)} D_{\substack{k_1k_1\\ \cdots\\ k_pk_p}}(X). \tag{26}$$

Следовательно, каждый инвариант $\iota_p(X)$ подстановки X можно рассматривать как инвариант первого порядка или след соответствующей составной матрицы $\mathfrak{F}^{(p)}(X)$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — произвольные матрицы порядка n. Положим

$$D_{\substack{k_1l_1\\ k_2l_2\\ \cdots\\ k_pl_p}}(X_1, X_2, \ldots, X_p)=\begin{vmatrix} \{X_1\}_{k_1l_1} & \{X_2\}_{k_1l_2} & \ldots & \{X_p\}_{k_1l_p}\\ \{X_1\}_{k_2l_1} & \{X_2\}_{k_2l_2} & \ldots & \{X_p\}_{k_2l_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \{X_1\}_{k_pl_1} & \{X_2\}_{k_pl_2} & \ldots & \{X_p\}_{k_pl_p}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1, k_2, \ldots, k_p=1, 2, \ldots, n,\\ l_1, l_2, \ldots, l_p=1, 2, \ldots, n,\\ 1\leq p\leq n\end{pmatrix}.$$

Положим затем

$$\mathfrak{E}_{k_1l_1}(X)=D_{k_1l_1}(X), \text{ если } p=1;$$

$$\mathfrak{E}_{\substack{k_1l_1\\ \cdots\\ k_pl_p}}(X)=D_{\substack{k_1l_1\\ \cdots\\ k_pl_p}}(X, I, \ldots, I)+D_{\substack{k_1l_1\\ \cdots\\ k_pl_p}}(I, X, \ldots, I)+\ldots+D_{\substack{k_1l_1\\ \cdots\\ k_pl_p}}(I, I, \ldots, X),$$
$$\text{если } p>1. \tag{27}$$

Матрица $\mathfrak{F}^{(p)}(X)$ порядка $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}$, элементы которой

$$\{\mathfrak{F}(X)\}_{\substack{k_1l_1\\ \cdots\\ k_pl_p}}=\mathfrak{E}_{\substack{k_1l_1\\ \cdots\\ k_pl_p}}(X)$$

суть выражения (27) с индексами, удовлетворяющими неравенствам

$$k_1<k_2<\ldots<k_p, \quad l_1<l_2<\ldots<l_p,$$

называется составной *матрицей* $\mathfrak{F}$ степени p относительно подстановки X. Способ нумерации строк составной матрицы $\mathfrak{F}$ должен быть таким же, как для составной матрицы $\mathfrak{F}$; то же замечание имеет место для столбцов матриц $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$. Например, мы имеем

$$\mathfrak{E}_{\substack{k_1l_1\\ k_2l_2}}(X)=D_{\substack{k_1l_1\\ k_2l_2}}(X, I)+D_{\substack{k_1l_1\\ k_2l_2}}(I, X),$$

и для $n=3$:

$$\mathfrak{F}^{(2)}(X)=\begin{Vmatrix} \{X\}_{11}+\{X\}_{22} & \{X\}_{23} & -\{X\}_{13}\\ \{X\}_{32} & \{X\}_{11}+\{X\}_{33} & \{X\}_{12}\\ -\{X\}_{31} & \{X\}_{21} & \{X\}_{22}+\{X\}_{33}\end{Vmatrix}.$$

Далее, очевидно,

$$\mathfrak{F}^{(1)}(X)=X. \tag{28}$$

Матрица $\mathfrak{F}^{(n)}(X)$ имеет порядок, равный единице, и ее единственный элемент есть

$$\mathfrak{F}^{(n)}(X)=\{X\}_{11}+\{X\}_{22}+\ldots+\{X\}_{nn}=\iota_1(X). \tag{29}$$

Так как элементы матрицы $\mathfrak{F}^{(p)}(X)$ суть линейные функции элементов матрицы X, то матрица $\mathfrak{F}^{(p)}(X)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\mathfrak{F}^{(p)}(X_1+X_2)=\mathfrak{F}^{(p)}(X_1)+\mathfrak{F}^{(p)}(X_2),\\ \mathfrak{F}^{(p)}(\lambda X)=\lambda\mathfrak{F}^{(p)}(X),\end{gathered} \tag{30}$$

которые почти очевидны.

Теперь легко проверить формулу

$$\mathfrak{E}_{\substack{s_1l_1\\ \cdots\\ s_pl_p}}(X)=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} X_{\alpha l_r}\, D_{\substack{s_1l_1\\ \cdots\\ s_r\alpha\\ \cdots\\ s_pl_p}}(I) \qquad \begin{pmatrix} s_1<s_2<\ldots<s_p\\ l_1<l_2<\ldots<l_p\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Заметим сначала, что

$$D_{\substack{s_1l_1\\ \cdots\\ s_pl_p}}(I)=\begin{cases} \pm 1, & \text{если все индексы } s_1, s_2, \ldots, s_p \text{ различны и } l_1, l_2, \ldots, l_p \text{ есть перестановка индексов } s_1, s_2, \ldots, s_p;\\ 0 & \text{во всех прочих случаях;}\end{cases} \tag{32}$$

следовательно, в предыдущей формуле мы должны обязательно брать

$$\alpha=s_1, s_2, \ldots, s_p;$$

в силу свойств (30) достаточно доказать формулу (31) только для случая, когда все элементы матрицы X нули, кроме одного $\{X\}_{\alpha\beta}$, равного единице. Но если $\alpha\neq s_t$ или $\beta\neq l_r$ $(1\leqslant t\leqslant p,\ 1\leqslant r\leqslant p)$, то обе части формулы (31) обращаются в нуль. Остается рассмотреть только тот случай, когда

$$\{X\}_{s_tl_r}=1; \quad \{X\}_{kl}=0, \quad \text{если} \quad k\neq s_t,\ l\neq s_r,$$

но в этом случае формула (31) обращается в тождество, ибо в этом случае мы имеем, очевидно:

$$\mathfrak{E}_{\substack{s_1l_1\\ \cdots\\ s_pl_p}}(X)=\begin{vmatrix} \delta_{s_1}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_1}^{l_{r-1}} & 0 & \delta_{s_1}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_1}^{l_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{s_{t-1}}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_{t-1}}^{l_{r-1}} & 0 & \delta_{s_{t-1}}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_{t-1}}^{l_p}\\ \delta_{s_t}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_t}^{l_{r-1}} & 1 & \delta_{s_t}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_t}^{l_p}\\ \delta_{s_{t+1}}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_{t+1}}^{l_{r-1}} & 0 & \delta_{s_{t+1}}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_{t+1}}^{l_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{s_p}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_p}^{l_{r-1}} & 0 & \delta_{s_p}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_p}^{l_p}\end{vmatrix}, \quad D_{\substack{s_1l_1\\ \cdots\\ s_rs_t\\ \cdots\\ s_pl_p}}(I)=\begin{vmatrix} \delta_{s_t}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_1}^{l_{r-1}} & \delta_{s_1}^{s_t} & \delta_{s_1}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_1}^{l_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{s_t}^{l_1} & \ldots & \delta_{s_t}^{l_{r-1}} & \delta_{s_t}^{s_t} & \delta_{s_t}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_t}^{l_p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{s_p}^{l_1} & \ldots & \delta_{s}^{l_{r-1}} & \delta_{s_p}^{s_t} & \delta_{s_p}^{l_{r+1}} & \ldots & \delta_{s_p}^{l_p}\end{vmatrix},$$

и эти два определителя тождественны.

§ 4. Фундаментальные теоремы о составных матрицах

Пользуясь введенными понятиями, докажем теперь основные теоремы о составных матрицах ϑ относительно матриц, удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений.

Теорема I. *Если матрица Y удовлетворяет системе*

$$\frac{dY}{dx} = YA, \tag{33}$$

где A — матрица, элементами которой являются функции от x, то матрица $\vartheta^{(p)}(Y)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\vartheta^{(p)}(Y)}{dx} = \vartheta^{(p)}(Y)\,\mathfrak{S}^{(p)}(A). \tag{34}$$

Доказательство. Мы имеем, очевидно,

$$\frac{d}{dx} D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_p l_p}}(Y) = \begin{vmatrix} \frac{d\{Y\}_{k_1 l_1}}{dx} & \{Y\}_{k_1 l_2} \cdots \{Y\}_{k_1 l_p} \\ \frac{d\{Y\}_{k_2 l_1}}{dx} & \{Y\}_{k_2 l_2} \cdots \{Y\}_{k_2 l_p} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{d\{Y\}_{k_p l_1}}{dx} & \{Y\}_{k_p l_2} \cdots \{Y\}_{k_p l_p} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \{Y\}_{k_1 l_1} & \frac{d\{Y\}_{k l_1}}{dx} \cdots \{Y\}_{k_1 l_p} \\ \{Y\}_{k_2 l_1} & \frac{d\{Y\}_{k_2 l_2}}{dx} \cdots \{Y\}_{k l_p} \\ \cdots & \cdots \\ \{Y\}_{k_p l_1} & \frac{d\{Y\}_{k_p l_2}}{dx} \cdots \{Y\}_{k_p l_p} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \{Y\}_{k_1 l_1} \{Y\}_{k_1 l_2} \cdots & \frac{d\{Y\}_{k_1 l_p}}{dx} \\ \{Y\}_{k_2 l_1} \{Y\}_{k_2 l_2} \cdots & \frac{d\{Y\}_{k_2 l_p}}{dx} \\ \cdots & \cdots \\ \{Y\}_{k_p l_1} \{Y\}_{k_p l_2} \cdots & \frac{d\{Y\}_{k_p l_p}}{dx} \end{vmatrix}.$$

Заменяя в этом соотношении элементы матрицы $\frac{dY}{dx}$ их выражениями

$$\frac{d\{Y\}_{kl}}{dx} = \{Y\}_{k1}\{A\}_{1l} + \{Y\}_{k2}\{A\}_{2l} + \ldots + \{Y\}_{kn}\{A\}_{nl} = \sum_{\alpha=1}^{n} \{Y\}_{k\alpha}\{A\}_{\alpha l},$$

получим

$$\frac{d}{dx} D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_p l_p}}(Y) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} \{A\}_{\alpha l_r} D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_r \alpha \\ \cdots \\ k_p l_p}}\{Y\},$$

но в силу формулы (24)

$$D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_p l_p}}(Y) = D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_p l_p}}(YI) = \sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_p} D_{\substack{k_1 s_1 \\ \cdots \\ k_p s_p}}(Y)\, D_{\substack{s_1 l_1 \\ \cdots \\ s_p l_p}}(I),$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dx} D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_p l_p}}(Y) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} \{A\}_{\alpha l_r} \sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_p} D_{\substack{k_1 s_1 \\ \cdots \\ k_p s_p}}(Y)\, D_{\substack{s_1 l_1 \\ \cdots \\ s_r \alpha \\ \cdots \\ s_p l_p}}(I) =$$

$$= \sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_p} D_{\substack{k_1 s_1 \\ \cdots \\ k_p s_p}}(Y) \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} \{A\}_{\alpha l_r} D_{\substack{s_1 l_1 \\ \cdots \\ s_r \alpha \\ \cdots \\ s_p l_p}}(I).$$

Применяя формулу (31) из § 3, можем написать

$$\frac{d}{dx} D_{\substack{k_1 l_1 \\ \cdots \\ k_p l_p}}(Y) = \sum_{s_1 < s_2 < \ldots < s_p} D_{\substack{k_1 s_1 \\ \cdots \\ k_p s_p}}(Y)\, \mathfrak{S}_{\substack{s_1 l_1 \\ \cdots \\ s_p l_p}}(A),$$

откуда следует

$$\frac{d\vartheta^{(p)}(Y)}{dx} = \vartheta^{(p)}(Y)\,\mathfrak{S}^{(p)}(A).$$

Хорошо известная формула Якоби является частным случаем теоремы I. Действительно, матрица $\vartheta^{(n)}(Y)$, которая сводится к числу, равному определителю матрицы Y, в силу доказанной теоремы и формулы (29) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\vartheta^{(n)}(Y)}{dx} = \vartheta^{(n)}(Y)\cdot\mathfrak{S}^{(n)}(A) = \vartheta^{(n)}(Y)\,\iota_1(A), \tag{35}$$

что дает

$$\vartheta^{(n)}(Y) = e^{\int_b^x \iota_1(A)\,dx}, \tag{36}$$

если $Y = I$ при $x = b$.

Если матрица A не зависит от x, то решением уравнения (33), нормированным в точке $x = 0$, является

$$Y = e^{Ax}.$$

Так как матрица $\vartheta^{(p)}(Y)$ в этом случае также нормирована в точке $x = 0$, то интегрирование уравнения (34) дает

$$\vartheta^{(p)}(Y) = e^{x\mathfrak{S}^{(p)}(A)}.$$

Полагая $x = 1$, мы получаем формулу

$$\vartheta^{(p)}(e^{A}) = e^{\mathfrak{S}^{(p)}(A)}. \tag{37}$$

Отсюда в силу (26) следует

$$\iota_p(e^{A}) = \iota_1(e^{\mathfrak{S}^{(p)}(A)}) \tag{38}$$

и, в частности,

$$\iota_n(e^{A}) = e^{\iota_1(A)}. \tag{39}$$

Эту последнюю формулу можно доказать и непосредственно. Действительно, если характеристические числа матрицы A различны, то мы имеем

$$A = S[\xi_1, \ldots, \xi_n] S^{-1},$$

$$e^A = S[e^{\xi_1}, \ldots, e^{\xi_n}] S^{-1},$$

$$\iota_n(e^A) = e^{\xi_1} \ldots e^{\xi_n} = e^{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = e^{\iota_1(A)},$$

по непрерывности формула (39) верна для всех матриц A. Применение теоремы I к случаю системы (1) приводит непосредственно к следующей теореме:

Теорема II. *Составные матрицы ϑ нормированной матрицы рационального определения и ее интегральных подстановок суть целые функции составных матриц дифференциальных подстановок:*

$$\vartheta^{(p)}\left(\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} \mathfrak{C}^{p}(U_1^{(s)}) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}(U_m^{(s)}) \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{C}^{(p)}(U_1^{(1)}) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}(U_m^{(1)}) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_1}^{(r_1)}\right) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right) L_b\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| x\right), \quad (40)$$

$$\vartheta^{(p)}\left(\Omega_j\left(\begin{matrix} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} \\ \cdots\cdots \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)\right) = \Omega_j\left(\begin{matrix} \mathfrak{C}^{(p)}(U_1^{(s)}) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}(U_m^{(s)}) \\ \cdots\cdots \\ \mathfrak{C}^{(p)}(U_1^{(1)}) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}(U_m^{(1)}) \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right) =$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_1}^{(r_1)}\right) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{r_\nu}\right) P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right). \quad (41)$$

Действительно, если матрица Y удовлетворяет системе

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{YU_j^{(r)}}{(x - a_j)^r}, \quad (42)$$

то в силу теоремы I матрица $\vartheta^{(p)}(Y)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\,\vartheta^{(p)}(Y)}{dx} = \vartheta^{(p)}(Y)\, \mathfrak{C}^{(p)}\left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_j^{(r)}}{(x - a_j)^r}\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{\vartheta^{(p)}(Y)\, \mathfrak{C}^{(p)}(U_j^{(r)})}{(x - a_j)^r}. \quad (43)$$

Кроме того, если матрица Y нормирована в точке b, то матрица $\vartheta^{(p)}(Y)$ также нормирована в этой точке. Следовательно, мы имеем соотношение (40). Полагая в этом соотношении $x = b_j$, где b_j — точка с комплексной координатой b на универсальной поверхности $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_m, \infty)$, мы получим соотношение (41).

§ 5. Инварианты интегральных подстановок

В соответствии с формулой (26) и теоремой II каждый инвариант $\iota_p(V_j)$ интегральной подстановки матрицы рационального определения Y, удовлетворяющей системе (1), есть главный инвариант функции

$$I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \ldots, s)} \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_1}^{(r_1)}\right) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right) P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right). \quad (44)$$

Следовательно, в силу формулы (13) мы имеем

$$\iota_p(V_j) = \frac{n(n-1) \ldots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, s)} \iota_1\left(\mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_1}^{(r_1)}\right) \ldots \mathfrak{C}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right) \mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \quad (45)$$

где

$$\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \sum_{\circ} P_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu} \middle| b\right). \quad (46)$$

В случае $p = 1$ мы имеем

$$\mathfrak{C}^{(1)}(U_j^{(r)}) = U_j^{(r)},$$

и ряд (45) приводится к ряду

$$\iota_1(V_j) = n + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1, \overset{*}{\ldots}, s)} \iota_1\left(U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right) \mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right). \quad (47)$$

Инварианты $\iota_p(V_j)$ не зависят от b; кроме того, мы доказали в § 2 единственность представления функции $\iota_p(V_j) - n$ рядом вида (9), если порядок рассматриваемых матриц может быть взят произвольным. Из этого вытекает, что циклические параметры (46) также не зависят от b. Остается изучить лишь природу их зависимости от особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Прежде всего мы имеем, очевидно:

$$\mathring{P}_j\,(\underbrace{a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_1}^{r_1}}_{\nu \text{ раз}}) = P_j(\underbrace{a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_1}^{r_1}}_{\nu \text{ раз}}) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}, & \text{если } j_1 = j,\ r_1 = 1; \\ 0 & \text{во всех прочих случаях.} \end{cases} \quad (48)$$

Для доказательства достаточно вспомнить формулу (15) из § 2 пятой статьи и положить в ней $\mu_{j_1}^{r_1} = \nu$ и все прочие $\mu_h^r = 0$. Рассмотрим далее случай, когда $r_1 = \ldots = r_\nu = 1$. Параметры

$$P_j\left(a_{j_1}^1 \ldots a_{j_\nu}^1 \middle| b\right) = P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \,|\, b),$$

где по крайней мере один из индексов $j_1, \ldots, j_\nu$ отличен от j, суть параметры конфигурации, обращающиеся в нуль при $b = a_j$, ибо в этом случае мы имеем [ст. II, § 5, (55)]

$$V_j(a_j) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \,|\, a_j) U_{j_1} \ldots U_{j_\nu} = e^{2\pi i U_j},$$

откуда следует, что

$$P_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,a_j)=0,$$

если по крайней мере один из индексов $j_1, \dots, j_\nu$ отличен от j.

Следовательно, мы имеем

$$\mathring{P}_j\left(a^1_{j_1}\dots a^1_{j_\nu}\right)=0 \;\text{(по крайней мере один из индексов } j_s\neq j). \tag{49}$$

Отсюда следует, что если система (1) регулярна, то имеем

$$\iota_p(V_j)=\iota_1\left(e^{2\pi i\,\mathfrak{G}^{(p)}(U_j^{(1)})}\right) \tag{50}$$

и в силу формулы (38) предыдущего параграфа

$$\iota_p(V_j)=\iota_p\left(e^{2\pi i U_j^{(1)}}\right), \tag{51}$$

что дает хорошо известный результат [ст. II, § 5, теорема VII]:

$$\chi_p(V_j)=\chi_p\left(e^{2\pi i U_j^{(1)}}\right). \tag{52}$$

Докажем теперь, что в общем случае *циклические параметры* $\mathring{P}_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)$ *суть рациональные функции особых точек.*

С этой целью заметим, что если дифференциальные подстановки находятся в окрестности системы нулевых подстановок, то мы имеем представления

$$\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)=\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & b\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)^{-1}\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & x\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right),$$

что дает

$$\Omega_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & b\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)=\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & b\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)^{-1} e^{2\pi i H_j^{(1)}}\theta_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & b\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right), \tag{53}$$

где метаканоническая характеристическая подстаиовка $H_j^{(1)}$ представляется рядом

$$H_j^{(1)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}J_j^{(1)}\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right) \tag{54}$$

и коэффициенты являются рациональными функциями особых точек, которые вычисляются с помощью рациональных операций над этими точками по рекуррентным формулам [ст. V, § 6].

Коэффициенты

$$S_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\dots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}J_j^{(1)}\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_{\varkappa_1}}_{j_{\varkappa_1}}\right)\dots$$
$$\dots J_j^{(1)}\left(a^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)\frac{(2\pi i)^\mu}{\mu!} \tag{55}$$

разложения

$$e^{2\pi i H_j^{(1)}}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\,S_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right) \tag{56}$$

обладают, очевидно, тем же свойством.

Но в силу формулы (53) имеем

$$\iota_1(V_j)=\iota_1\left(\Omega_j\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)}\dots U_m^{(s)} & \\ \cdots\cdots & b\\ U_1^{(1)}\dots U_m^{(1)} & \\ a_1\dots a_m & \end{array}\right)\right)=\iota_1\left(e^{2\pi i H_j^{(1)}}\right), \tag{57}$$

что дает

$$n+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\overset{*}{\dots},m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\overset{*}{\dots},s)}\iota_1\left(U_{j}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right)\mathring{P}_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)=$$
$$=n+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\overset{*}{\dots},m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\overset{*}{\dots},s)}\iota_1\left(U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right)\mathring{S}_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right), \tag{58}$$

где

$$\mathring{S}_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)=\sum_{\circ}S_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right). \tag{59}$$

Замечая, что тождество (58) имеет место для произвольных матриц $U_h^{(r)}$ любого порядка, мы заключаем в силу единственности представления с помощью ряда (9)

$$\mathring{P}_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)=\mathring{S}_j\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right), \tag{60}$$

откуда и следует доказываемое предложение.

§ 6. Коэффициенты характеристических подстановок метаканонических матриц

В § 6 пятой статьи мы указали разложения характеристических подстановок метаканонических матриц в ряды композиции дифференциальных подстановок

$$H_j^{(r)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\sum_{r_1,\dots,r_\nu}^{(1,\dots,s)}U_{j_1}^{(r_1)}\dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}J_j^{(r)}\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)$$

и нашли рекуррентные соотношения (84) и (85) для определения коэффициентов этих рядов.

Целью этого параграфа является более глубокое изучение зависимости этих коэффициентов от расположения особых точек.

Мы уже отмечали [ст. V, § 6], что

$$K_j^{(p)}\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right)\quad\text{и}\quad J_j^{(r)}\left(a^{r_1}_{j_1}\dots a^{r_\nu}_{j_\nu}\right) \tag{61}$$

суть однородные полиномы от аргументов

$$\frac{1}{a_h-a_j}\qquad(h=1,\dots,j-1,\,j+1,\dots,m) \tag{62}$$

соответственно, степени

$$r_1 + \ldots + r_\nu + p - \nu \quad \text{и} \quad r_1 + \ldots + r_\nu - r - \nu + 1. \tag{63}$$

Следовательно, коэффициенты (61) должны иметь следующий вид:

$$J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \sum_{\substack{\gamma_1 + \ldots + \gamma_{j-1} + \gamma_{j+1} + \ldots + \gamma_m = \\ = r_1 + \ldots + r_\nu - r - \nu + 1}} \frac{a^{(r)}_{\gamma_1 \ldots \gamma_{j-1} \gamma_{j+1} \ldots \gamma_m}\left(\begin{matrix} r_1 \ldots r_\nu \\ j_1 \ldots j_\nu \end{matrix}\,\middle|\, j\right)}{(a_1 - a_j)^{\gamma_1} \ldots (a_{j-1} - a_j)^{\gamma_{j-1}} (a_{j+1} - a_j)^{\gamma_{j+1}} \ldots (a_m - a_j)^{\gamma_m}}, \tag{64}$$

$$K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \sum_{\substack{\gamma_1 + \ldots + \gamma_{j-1} + \gamma_{j+1} + \ldots + \gamma_m = \\ = r_1 + \ldots + r_\nu + p - \nu}} \frac{\beta_{\gamma_1 \ldots \gamma_{j-1} \gamma_{j+1} \ldots \gamma_m}\left(\begin{matrix} r_1 \ldots r_\nu \\ j_1 \ldots j_\nu \end{matrix}\,\middle|\, j\right)}{(a_1 - a_j)^{\gamma_1} \ldots (a_{j-1} - a_j)^{\gamma_{j-1}} (a_{j+1} - a_j)^{\gamma_{j+1}} \ldots (a_m - a_j)^{\gamma_m}}. \tag{65}$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\left(\binom{t}{q}\right) = \begin{cases} (-1)^t \dfrac{t(t+1)\ldots(t+q-1)}{1 \cdot 2 \ldots q}, & \text{если} \quad q > 0; \\ (-1)^t, & \text{если} \quad q = 0; \\ 0, & \text{если} \quad q < 0, \end{cases} \tag{66}$$

и условимся считать

$$J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = 0, \text{ если } r_1 \leqslant 0 \text{ или } r > s; \tag{67}$$

$$K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = 0, \text{ если } p \leqslant 0. \tag{68}$$

Тогда упомянутые рекуррентные формулы [ст. V, § 6, (84) и (85)] могут быть записаны в следующем виде:

$$J_j^{(r)}(a_j^{r_1}) = \delta_r^{(r_1)} = \begin{cases} 1, \text{ если } r_1 = r; \\ 0, \text{ если } r_1 \neq r; \end{cases} \qquad J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1}\right) = 0, \text{ если } j_1 \neq j; \tag{69}$$

$$K_j^{(p)}(a_j^{r_1}) = 0; \quad K_j^{(p)}(a_{j_1}^{r_1}) = \frac{1}{p}\left(\binom{r_1}{p-1}\right)\frac{1}{(a_{j_1} - a_j)^{r_1 + p - 1}}, \text{ если } j_1 \neq j; \tag{70}$$

$$J_j^{(s)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = 0, \text{ если } \nu \geqslant 2; \tag{71}$$

$$J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = -\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \sum_{q=r+1}^{s} J_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q-r)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \tag{72}$$

$$\text{если } 1 \leqslant r < s, \quad j_\nu \neq j;$$

$$J_j^{(r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = K_j^{(r_\nu - r)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\right) - $$

$$-\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \sum_{q=r+1}^{s} J_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q-r)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \text{ если } 1 \leqslant r < s, j_\nu = j; \tag{73}$$

$$K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \frac{1}{p}\left[\sum_{q=1}^{p-1}\left(\binom{r_\nu}{p-q-1}\right)\frac{1}{(a_{j_\nu} - a_j)^{r_\nu + p - q - 1}} K_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \sum_{q=p}^{p+s-1} J_j^{(q-p+1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right], \text{ если } p \geqslant 1, \ j_\nu \neq j; \tag{74}$$

$$K_j^{(p)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) = \frac{1}{p}\left[K_j^{(r_\nu + p - 1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \sum_{q=p}^{p+s-1} J_j^{(q-p+1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right) K_j^{(q)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right], \text{ если } p \geqslant 1, \ j_\nu = j. \tag{75}$$

Изучая эти формулы, мы видим непосредственно, что каждый член полиномов (61) при $j_\mu \neq j$ содержит множитель вида

$$\left(\binom{r_\mu}{\rho}\right)\frac{1}{(a_{j_\mu} - a_j)^{r_\mu + \rho}} \qquad (\rho = 0, 1, \ldots),$$

при этом оставшийся множитель не зависит от r_μ. Действительно, это, очевидно, верно для случая $\nu = 1$, а в случае $\nu > 1$ мы можем применить метод математической индукции. Следовательно, коэффициенты (61) могут быть записаны в виде

$$J_j^{(r)}\left(a_j^{r_0^1} \ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}} a_{h_1}^{t_1} a_j^{r_1^1} \ldots a_j^{r_1^{\lambda_1}} a_{h_2}^{t_2} \ldots a_{h_\mu}^{t_\mu} a_j^{r_\mu^1} \ldots a_j^{r_\mu^{\lambda_\mu}}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\rho_1 + \ldots + \rho_\mu = r_0^1 + \ldots + \\ + r_\mu^{\lambda_\mu} - \lambda_0 - \ldots - \lambda_\mu - \mu + 1 - r}} \frac{\left(\binom{t_1}{\rho_1}\right) \ldots \left(\binom{t_\mu}{\rho_\mu}\right) \sigma(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0} [\rho_1] r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1} [\rho_2] \ldots [\rho_\mu] r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu})}{(a_{h_1} - a_j)^{t_1 + \rho_1} \ldots (a_{h_\mu} - a_j)^{t_\mu + \rho_\mu}},$$

$$K_j^{(p)}\left(a_j^{r_0^1} \ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}} a_{h_1}^{t_1} a_j^{r_1^1} \ldots a_{j_1}^{r_1^{\lambda_1}} a_{h_2}^{t_2} \ldots a_{h_\mu}^{t_\mu} a_j^{r_\mu^1} \ldots a_j^{r_\mu^{\lambda_\mu}}\right) = \tag{76}$$

$$= \sum_{\substack{\rho_1 + \ldots + \rho_\mu = r_0^1 + \ldots + \\ + r_\mu^{\lambda_\mu} - \lambda_0 - \ldots - \lambda_\mu - \mu + p}} \frac{\left(\binom{t_1}{\rho_1}\right) \ldots \left(\binom{t_\mu}{\rho_\mu}\right) \varkappa(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0} [\rho_1] r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1} [\rho_2] \ldots [\rho_\mu] r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu})}{(a_{h_1} - a_j)^{t_1 + \rho_1} \ldots (a_{h_\mu} - a_j)^{t_\mu + \rho_\mu}}. \tag{77}$$

Суммирование в этих формулах распространяется на все целые неотрицательные индексы $\rho_1, \ldots, \rho_\mu$, удовлетворяющие указанным равенствам, которые выражают, очевидно, тот факт, что степени полиномов $K_j^{(p)}$ и $J_j^{(r)}$ равны числам (63). Остается лишь получить рекуррентные формулы для коэффициентов $\sigma(r_0^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu})$ и $\varkappa(r_0^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu})$.

Сначала заметим, что из формул (69)—(73) и (75) следует

$$K_j^{(p)}\left(a_j^{r_0^1}\ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}}\right)=0, \tag{78}$$

$$J_j^{(r)}\left(a_j^{r_0^1}\ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}}\right)=0, \text{ за исключением случая } J_j^{(r)}(a_j^r)=1. \tag{79}$$

Условимся считать

$$\sigma\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\ldots[\rho_\mu]\,r_\mu^1\ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)=0, \tag{80}$$

$$\varkappa\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\ldots[\rho_\mu]\,r_\mu^1\ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)=0, \tag{81}$$

если по крайней мере один из индексов $\rho_1, \ldots, \rho_\mu$ отрицателен.

Последняя из формул (70) приводит далее к соотношению

$$K_j^{(p)}(a_{h_1}^{t_1})=\frac{\left(\binom{t_1}{p-1}\right)\varkappa([p-1])}{(a_{h_1}-a_j)^{t_1+p-1}}=\frac{1}{p}\left(\binom{t_1}{p-1}\right)\frac{1}{(a_{h_1}-a_j)^{t_1+p-1}},$$

откуда следует, что

$$\varkappa([\rho_1])=\frac{1}{\rho_1+1}\qquad(\rho_1=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{82}$$

Замечая, что член

$$\frac{\left(\binom{t_1}{\rho_1}\right)\ldots\left(\binom{t_\mu}{\rho_\mu}\right)\sigma\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\,r_1^1\ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2]\ldots[\rho_\mu]\,r_\mu^1\ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)}{(a_{h_1}-a_j)^{t_1+\rho_1}\ldots(a_{h_\mu}-a_j)^{t_\mu+\rho_\mu}}$$

входит в полином $J_j^{(r)}$, где

$$r=r_0^1+\ldots+r_\mu^{\lambda_\mu}-\lambda_0-\ldots-\lambda_\mu-\mu+1-\rho_1-\ldots-\rho_\mu,$$

и рассматривая формулы (67) и (71), мы можем заключить, что должно иметь место

$$\sigma\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\,r_1^1\ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2]\ldots[\rho_\mu]\,r_\mu^1\ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)=0, \tag{83}$$

если

$$r_0^1+\ldots+r_\mu^{\lambda_\mu}-\lambda_0-\ldots-\lambda_\mu-\mu+1-\rho_1-\ldots-\rho_\mu\geqslant s,$$

или

$$r_0^1+\ldots+r_\mu^{\lambda_\mu}-\lambda_0-\ldots-\lambda_\mu-\mu+1-\rho_1-\ldots-\rho_\mu\leqslant 0.$$

Мы должны положить также

$$\varkappa\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\,r_1^1\ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2]\ldots[\rho_\mu]\,r_\mu^1\ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)=0, \tag{84}$$

если

$$\rho_1+\ldots+\rho_\mu+\lambda_0+\ldots+\lambda_\mu+\mu-r_0^1-\ldots-r_\mu^{\lambda_\mu}\leqslant 0.$$

Сделаем теперь следующее замечание: чтобы получить выражения коэффициентов σ и $\varkappa$, мы можем предполагать, что все точки $a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots a_{h_\mu}$ в формулах (76) и (77) различны, ибо это допущение не изменяет выражений этих коэффициентов.

Применим теперь к функции

$$J_j^{(r)}\left(a_j^{r_0^1}\ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}}a_{h_1}^{t_1}a_j^{r_1^1}\ldots a_j^{r_1^{\lambda_1}}a_{h_2}^{t_2}\ldots a_{h_\mu}^{t_\mu}\right) \tag{85}$$

формулу (72) и сравним в обеих частях полученного равенства коэффициенты при члене

$$\frac{\left(\binom{t_1}{\rho_1}\right)\ldots\left(\binom{t_\mu}{\rho_\mu}\right)}{(a_{h_1}-a_j)^{t_1+\rho_1}\ldots(a_{h_\mu}-a_j)^{t_\mu+\rho_\mu}}. \tag{86}$$

Очевидно, что в формуле (72) сумма

$$\sum_{q=r+1}^{s}J_j^{(q)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\varkappa}^{r_\varkappa}\right)K_j^{(q-r)}\left(a_{j_{\varkappa+1}}^{r_{\varkappa+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right),$$

т. е. в нашем случае сумма типа

$$\sum_{q=r+1}^{s}J_j^{(q)}\left(a_j^{r_0^1}\ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}}a_{h_1}^{t_1}\ldots a_{h_\sigma}^{t_\sigma}a_j^{r_\sigma^1}\ldots a_j^{r_\sigma^\tau}\right)\times$$
$$\times K_j^{q-r}\left(a_j^{r_\sigma^{\tau+1}}\ldots a_j^{r_\sigma^{\lambda_\sigma}}a_{h_{\sigma+1}}^{t_{\sigma+1}}\ldots a_{h_\mu}^{t_\mu}\right) \tag{87}$$

может дать не более одного члена вида (86). Действительно, член (86) можно получить только при умножении члена

$$\frac{\left(\binom{t_1}{\rho_1}\right)\ldots\left(\binom{t_\sigma}{\rho_\sigma}\right)\sigma\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\ldots[\rho_\sigma]\,r_\sigma^1\ldots r_\sigma^\tau\right)}{(a_{h_1}-a_j)^{t_1+\rho_1}\ldots(a_{h_\sigma}-a_j)^{t_\sigma+\rho_\sigma}} \tag{88}$$

функции

$$J_j^{(q)}\left(a_j^{r_0^1}\ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}}a_{h_1}^{t_1}\ldots a_{h_\sigma}^{t_\sigma}a_j^{r_\sigma^1}\ldots a_j^{r_\sigma^\tau}\right) \tag{89}$$

на член

$$\frac{\left(\binom{t_{\sigma+1}}{\rho_{\sigma+1}}\right)\ldots\left(\binom{t_\mu}{\rho_\mu}\right)\varkappa\left(r_\sigma^{\tau+1}\ldots r_\sigma^{\lambda_\sigma}[\rho_{\sigma+1}]\ldots[\rho_\mu]\right)}{(a_{h_{\sigma+1}}-a_j)^{t_{\sigma+1}+\rho_{\sigma+1}}\ldots(a_{h_\mu}-a_j)^{t_\mu+\rho_\mu}} \tag{90}$$

функции

$$K_j^{(q-r)}\left(a_j^{r_\sigma^{\tau+1}}\ldots a_j^{r_\sigma^{\lambda_\sigma}}a_{h_{\sigma+1}}^{t_{\sigma+1}}\ldots a_{h_\mu}^{t_\mu}\right). \tag{91}$$

Но член (88) принадлежит, очевидно, полиному (89) с

$$q_0=r_0^1+\ldots+r_\sigma^\tau-\lambda_0-\ldots-\lambda_{\sigma-1}-\tau-\sigma+1-\rho_1-\ldots-\rho_\sigma,$$

и член (90) принадлежит полиному (91) с

$$q_0-r=\rho_{\sigma+1}+\ldots+\rho_\mu-r_\sigma^{\tau+1}-\ldots-r_\sigma^{\lambda_\sigma}-\ldots-r_{\mu-1}^{\lambda_{\mu-1}}+$$
$$+\lambda_\sigma-\tau+\lambda_{\sigma+1}+\ldots+\lambda_{\mu-1}+\mu-\sigma.$$

Если $r+1\leqslant q_0\leqslant s$, то сумма (87) содержит единственный член вида (86), который получается при умножении выражений (88) и (90). Если $q_0>s$ или $q_0<1$, то сумма (87) не может содержать ни одного члена вида (86), но в этом случае член (88) обращается в нуль в силу (83); точно так же, если $1 \leqslant q_0 \leqslant r$, то сумма (87) не содержит члена вида (86) и в то же время член (90) обращается в нуль в силу (84). Следовательно, произведение выражений (88) и (90) дает во всех случаях член вида (86), который содержится в сумме (87).

Сравнение коэффициентов при члене (86) в формуле (72), примененной к функции (85), теперь дает, если мы вспомним еще формулу (79), следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &\sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2] \ldots [\rho_\mu]\right) = \\ &\quad = -\varkappa\left(r_0^2 \ldots r_1^{\lambda_0}[\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2] \ldots [\rho_\mu]\right) - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\alpha]\right) \varkappa\left(r_\alpha^1 \ldots r_\alpha^{\lambda_\alpha}[\rho_{\alpha+1}] \ldots [\rho_\mu]\right) - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} \sum_{\beta=1}^{\lambda_\alpha} \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\alpha]\, r_\alpha^1 \ldots r_\alpha^\beta\right) \varkappa\left(r_\alpha^{\beta+1} \ldots r_\alpha^{\lambda_\alpha}[\rho_{\alpha+1}] \ldots [\rho_\mu]\right), \end{aligned} \tag{92}$$

где первый член в правой части отсутствует, если $\lambda_0 = 0$.

Аналогичное рассмотрение формулы (73) приводит нас далее к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} &\sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right) = \\ &= \varkappa\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu - 1}\right) - \varkappa\left(r_0^2 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right) - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\alpha]\right) \varkappa\left(r_\alpha^1 \ldots r_\alpha^{\lambda_\alpha}[\rho_{\alpha+1}] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right) - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} \sum_{\beta=1}^{\lambda_\alpha} \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\alpha]\, r_\alpha^1 \ldots r_\alpha^\beta\right) \varkappa\left(r_\alpha^{\beta+1} \ldots r_\alpha^{\lambda_\alpha}[\rho_{\alpha+1}] \ldots \right. \\ &\qquad\qquad \left. \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right), \end{aligned} \tag{93}$$

которые содержат как частный случай предыдущую формулу, если мы условимся опускать первый член правой части в случае $\lambda_\mu = 0$ и второй член правой части — в случае $\lambda_0 = 0$.

Из формул (74) и (75) мы получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &\varkappa\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1}[\rho_2] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right) = \\ &\qquad = \frac{1}{\rho_1 + \ldots + \rho_\mu + \lambda_0 + \ldots + \lambda_\mu + \mu - r_0^1 - \ldots - r_\mu^{\lambda_\mu}} \times \\ &\qquad \times \left[\varkappa\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu - 1}\right) - \varkappa\left(r_0^2 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots \right.\right. \\ &\qquad \left. \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right) - \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_\alpha]\right) \varkappa\left(r_\alpha^1 \ldots r_\alpha^{\lambda_\alpha}[\rho_{\alpha+1}] \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right) - \sum_{\alpha=1}^{\mu-1} \sum_{\beta=1}^{\lambda_\alpha} \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots \right. \\ &\qquad \left.\left. \ldots [\rho_\alpha]\, r_\alpha^1 \ldots r_\alpha^\beta\right) \varkappa\left(r_\alpha^{\beta+1} \ldots r_\alpha^{\lambda_\alpha}[\rho_{\alpha+1}] \ldots [\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)\right], \end{aligned} \tag{94}$$

где первый член в квадратных скобках должен быть заменен в случае $\lambda_\mu = 0$ на

$$\varkappa\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1] \ldots [\rho_{\mu-1}]\, r_{\mu-1}^1 \ldots r_{\mu-1}^{\lambda_{\mu-1}}\right)$$

и должен быть опущен в случае $\mu = 1$, $\lambda_\mu = 0$ и где второй член в квадратных скобках должен быть опущен, если $\lambda_0 = 0$.

Введем теперь обозначение

$$\left\|\frac{1}{p}\right\| = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{если } p > 0; \\ 0, & \text{если } p \leqslant 0, \end{cases}$$

и укажем в качестве примеров применения полученных формул следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varkappa\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\right) &= -\left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_0 + 1 - r_0^1 - \ldots - r_0^{\lambda_0}}\right\| \varkappa\left(r_0^2 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\right) = \\ &= (-1)^\lambda \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_0 + 1 - r_0^1 - \ldots - r_0^{\lambda_0}}\right\| \times \\ &\qquad \times \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_0 - r_0^2 - \ldots - r_0^{\lambda_0}}\right\| \ldots \left\|\frac{1}{\rho_1 + 2 - r_0^{\lambda_0}}\right\| \left\|\frac{1}{\rho_1 + 1}\right\|, \\ \sigma\left(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\right) &= -\varkappa\left(r_0^2 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\right) = \\ &= (-1)^\lambda \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_0 - r_0^2 - \ldots - r_0^{\lambda_0}}\right\| \ldots \left\|\frac{1}{\rho_1 + 2 - r_0^{\lambda_0}}\right\| \left\|\frac{1}{\rho_1 + 1}\right\|, \\ \varkappa\left([\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1}\right) &= \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_1 + 1 - r_1^1 - \ldots - r_1^{\lambda_1}}\right\| \varkappa\left([\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1 - 1}\right) = \\ &= \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_1 + 1 - r_1^1 - \ldots - r_1^{\lambda_1}}\right\| \times \\ &\qquad \times \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_1 - r_1^1 - \ldots - r_1^{\lambda_1 - 1}}\right\| \ldots \left\|\frac{1}{\rho_1 + 2 - r_1^1}\right\| \left\|\frac{1}{\rho_1 + 1}\right\|, \\ \sigma\left([\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1}\right) &= \varkappa\left([\rho_1]\, r_1^1 \ldots r_1^{\lambda_1 - 1}\right) = \\ &= \left\|\frac{1}{\rho_1 + \lambda_1 - r_1^1 - \ldots - r_1^{\lambda_1 - 1}}\right\| \ldots \left\|\frac{1}{\rho_1 + 2 - r_1^1}\right\| \left\|\frac{1}{\rho_1 + 1}\right\|. \end{aligned}$$

§ 7. Основная теорема об инвариантах интегральных подстановок

Исследования предыдущего параграфа приводят нас к следующей теореме:

Теорема III. *Инварианты $\iota_p(V_j)$ интегральных подстановок матрицы рационального определения Y, удовлетворяющей системе*

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{YU_j^{(r)}}{(x - a_j)^r}, \tag{95}$$

суть целые численные функции дифференциальных подстановок $U_h^{(r)}$ $(h = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, s)$ и дробей

$$\frac{1}{a_1 - a_j}, \ldots, \frac{1}{a_{j-1} - a_j}, \quad \frac{1}{a_{j+1} - a_j}, \ldots, \frac{1}{a_m - a_j}. \tag{96}$$

Их общие представления таковы:

$$\iota_p(V_j)=\iota_p\left(e^{2\pi i U_j^{(1)}}\right)+\sum_{\nu=2}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},m)'}\ \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},s)'}\iota_1\left(\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_{j_1}^{r_1}\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right)\mathring{P}_j\ldots\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \tag{97}$$

где циклические параметры $\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ *суть однородные полиномы степени* $r_1+\ldots+r_\nu-\nu$ *от дробей* (96), *вычисление которых производится с помощью рациональных операций по формулам:*

$$\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)=\sum_{\circ}\sum_{\mu=2}^{\nu-1}\ \sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}J_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\right)\ldots$$

$$\ldots J_j^{(1)}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\frac{(2\pi i)^\mu}{\mu!} \tag{98}$$

$$J_j^{(1)}\left(a_j^{r_0^1}\ldots a_j^{r_0^{\lambda_0}}a_{h_1}^{t_1}a_j^{r_1^1}\ldots a_j^{r_1^{\lambda_1}}a_{h_2}^{t_2}\ldots a_{h_\mu}^{t_\mu}a_j^{r_\mu^1}\ldots a_j^{r_\mu^{\lambda_\mu}}\right)=$$

$$=\sum_{\rho_1+\ldots+\rho_\mu=r_0^1+\ldots+r_\mu^{\lambda_\mu}-\lambda_1-\ldots-\lambda_\mu-\mu}\frac{\left(\binom{t_1}{\rho_1}\right)\ldots\left(\binom{t_\mu}{\rho_\mu}\right)\tau\left(r_0^1\ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\ldots[\rho_\mu]\,r_\mu^1\ldots r_\mu^{\lambda_\mu}\right)}{(a_{h_1}-a_j)^{t_1+\rho_1}\ldots(a_{h_\mu}-a_j)^{t_\mu+\rho_\mu}}, \tag{99}$$

и рекуррентным соотношениям (93) *и* (94), *при этом штрихи у знаков сумм в формулах* (97) *означают, что исключаются строки вида* $a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_1}^{r_1}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что $\iota_p(V_j)$ есть целая функция дробей (96), достаточно оценить $\mathring{P}_j(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu})$. Предположим, что выполнены неравенства

$$\left|\frac{1}{a_h-a_j}\right|<\eta\qquad(h=1,\,2,\,\ldots,\,j-1,\,j+1,\,\ldots,\,m),$$

возьмем точку b, удовлетворяющую равенству

$$|b-a_j|=\frac{1}{2\eta},$$

и рассмотрим окружность с центром a_j, проходящую через точку b. Тогда мы имеем, очевидно, в силу формул (4) и (5) пятой статьи оценки

$$\begin{aligned}&\left|L_b(a_{j_1}^{r_1}\,|\,x)\right|<s\,(2\eta)^{r_1},\\&\left|L_b\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots,\,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,x\right)\right|<\frac{s^\nu}{\nu!}(2\eta)^{r_1+\ldots+r_\nu},\\&\left|P_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots,\,a_{j_\nu}^{r_\nu}\,\middle|\,b\right)\right|<\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^\nu(2\eta)^{r_1+\ldots+r_\nu},\end{aligned} \tag{100}$$

если x находится на упомянутой выше окружности и если s означает длину дуги этой окружности, расположенной между точками b и x.

Действительно, вдоль этой дуги мы имеем

$$|x-a_{j_\varkappa}|\geqslant\frac{1}{2\eta}\qquad(j_\varkappa=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

и, следовательно, из формул (4) [ст. V] следует первая и вторая из формул (100), если провести рассуждение, вполне аналогичное рассуждению из второй статьи [ст. II, § 2]. Беря $x=b_j$, где b_j — точка с комплексной координатой b на универсальной поверхности, мы должны взять

$$s=2\pi\frac{1}{2\eta}=\frac{\pi}{\eta},$$

и, следовательно, получаем последнюю из формул (100). Из этой формулы теперь следует, что

$$\left|\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right|<\frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^\nu(2\eta)^{r_1+\ldots+r_\nu}=\frac{(2\pi)^\nu}{(\nu-1)!}(2\eta)^{r_1+\ldots+r_\nu-\nu}.$$

Если мы предположим еще $2\eta>1$ и заметим, что

$$1\leqslant r_\varkappa\leqslant s,$$

то получим требуемую оценку

$$\left|\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\right|<\frac{[2\pi\,(2\eta)^{s-1}]^\nu}{(\nu-1)!}. \tag{101}$$

Это неравенство показывает, что ряд (45) из § 5

$$\iota_p(V_j)=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot2\ldots p}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},m)}\ \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},s)}\iota_1\left(\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_{j_1}^{(r_1)}\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right)\right)\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$$

есть целая функция подстановок $U_h^{(r)}$ и дробей (96). Мы имеем теперь в соответствии с формулами (45) и (48) представление

$$\iota_p(V_j)=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot2\ldots p}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}\iota_1\left([\mathfrak{E}^{(p)}(U_j^{(1)})]^\nu\right)+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},m)'}\ \sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},s)'}\iota_1\left(\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_{j_1}^{(r_1)}\right)\ldots\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right)\right)\cdot\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \tag{102}$$

при этом штрихи у сумм имеют указанный в формулировке теоремы смысл.

Но в силу формулы (38) мы имеем

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot2\ldots p}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!}\iota_1\left([\mathfrak{E}^{(p)}(U_j^{(1)})]^\nu\right)=$$

$$=\iota_1\left(e^{2\pi i\mathfrak{E}^{(p)}\left(U_j^{(1)}\right)}\right)=\iota_p\left(e^{2\pi i U_j^{(1)}}\right), \tag{103}$$

и, следовательно, формула (97) доказана.

Далее, в силу формул (55) и (60):

$$\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)=\sum_{\circ}\sum_{\mu=1}^{\nu}\ \sum_{1\leqslant\varkappa_1<\ldots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}J_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_{\varkappa_1}}^{r_{\varkappa_1}}\right)\ldots$$

$$\ldots J_j^{(1)}\left(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}^{r_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)\frac{(2\pi i)^\mu}{\mu!}; \tag{104}$$

член, отвечающий $\mu=\nu$, т. е. член

$$\sum_{\circ} J_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\right) \ldots J_j^{(1)}\left(a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) \frac{(2\pi i)^\nu}{\nu!},$$

обращается в нуль, ибо строки $a_j^1 \ldots a_j^1$ исключены и, следовательно, или один из индексов $j_1, \ldots, j_\nu$ отличен от j, или один из индексов $r_1, \ldots, r_\nu$ отличен от единицы; в обоих случаях в силу соотношений $J_j^{(1)}(a_{j_1}^{r_1})=0$, если $j_1 \neq j$; $J_j^{(1)}(a_j^r)=0$, если $r \neq 1$, предыдущее выражение обращается в нуль.

С другой стороны, член, отвечающий $\mu=1$, т. е. член

$$\sum_{\circ} J_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right) 2\pi i,$$

где $\nu \geqslant 2$, также равен нулю. Действительно, мы имеем в силу формул (53) и (39)

$$\iota_n(V_j)=\iota_n\left(e^{2\pi i H_j^{(1)}}\right)=e^{2\pi i\,\iota_1\left(H_j^{(1)}\right)}; \tag{105}$$

с другой стороны,

$$\iota_n(V_j)=D(V_j)=\vartheta^{(n)}(V_j), \tag{106}$$

и из формулы (36)

$$\vartheta^{(n)}(Y)=e^{\int\limits_b^x \iota_1(A)\,dx},$$

в которой мы полагаем

$$Y=\Phi_b\left(\begin{array}{c|c} U_1^{(s)} \ldots U_m^{(s)} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ U_1^{(1)} \ldots U_m^{(1)} & x \\ a_1 \ \ldots \ a_m & \end{array}\right), \qquad A=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r},$$

$$x=b_j$$

и в которой принимаем за путь интегрирования контур, окружающий только один раз особую точку a_j в положительном направлении, следует, что

$$\vartheta^{(n)}(V_j)=e^{2\pi i\,\iota_1\left(U_j^{(1)}\right)}; \tag{107}$$

следовательно, мы имеем

$$\iota_n(V_j)=e^{2\pi i\,\iota_1\left(U_j^{(1)}\right)}. \tag{108}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (105) и замечая, что метаканоническая характеристическая подстановка $H_j^{(1)}$ обращается в нуль, когда дифференциальные подстановки равны нулю, мы получаем

$$\iota_1(H_j^{(1)})=\iota_1(U_j^{(1)}); \tag{109}$$

в силу формул (54) и (69) теперь находим

$$\iota_1(U_j^{(1)})+\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},m)}\sum_{r_1,\ldots,r_\nu}^{(1,\overset{*}{\ldots},s)}\iota_1\left(U_{j_1}^{(r_1)}\ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right)\mathring{J}_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1}\ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)=\iota_1\left(U_j^{(1)}\right),$$

что дает соотношения

$$\sum_{\circ} J_j^{(1)}\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)=0 \quad \text{для } \nu \geqslant 2. \tag{110}$$

Формула (104) обращается, следовательно, в формулу (98) теоремы.

Далее, из соотношений предыдущего параграфа непосредственно вытекает, что циклические параметры $\mathring{P}_j\left(a_{j_1}^{r_1} \ldots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right)$ суть однородные полиномы дробей (96) степени $r_1+\ldots+r_\nu-\nu$ и что формулы (99) имеют место, причем коэффициенты $\sigma(r_0^1 \ldots r_0^{\lambda_0}[\rho_1]\ldots[\rho_\mu]\, r_\mu^1 \ldots r_\mu^{\lambda_\mu})$ связаны рекуррентными соотношениями (93) и (94).

Доказанная теорема, очевидно, дает полное решение проблемы, поставленной в § 1.

СТАТЬЯ СЕДЬМАЯ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Введение

В пятой статье рассматривалась проблема о полной аналитической характеристике особенностей матрицы рационального определения, т. е. матрицы, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами. В упомянутой статье дано решение этой проблемы лишь при условии, что дифференциальные подстановки находятся в окрестности системы нулевых подстановок. В настоящей статье дается решение этой проблемы для случая произвольных дифференциальных подстановок. Однако сначала мы должны заняться некоторыми исследованиями интегральных уравнений специального вида. Интегральные уравнения этого вида имеют большое значение в теории систем линейных дифференциальных уравнений, как это вытекает из исследований Биркгофа. [1])

§ 2. Решение интегрального уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$F(\mathfrak{U}\,|\,x) = G(\mathfrak{U}\,|\,x) + \int\limits_{(c)} F(\mathfrak{U}\,|\,\xi)\,K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)\,d\xi, \tag{1}$$

где $G(\mathfrak{U}\,|\,x)$ и ядро $K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)$ — заданные матрицы и $F(\mathfrak{U}\,|\,x)$ — искомая матрица. Интегрирование в правой части формулы (1) производится вдоль спрямляемой кривой, замкнутой или незамкнутой. Через

$$\mathfrak{U} = (U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_m)$$

обозначена для краткости система m матриц

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_m.$$

Предположим, что заданные матрицы $G(\mathfrak{U}\,|\,x)$ и $K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)$ — целые функции матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$ [ст. I, § 14], т. е. функции, представимые

[1]) G. D. Birghoff. A Theoreme on Matrices of Analytic Functions. Math. Ann., т. 74, 1913, стр. 122—135; Equivalent Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations. Там же, стр. 134—139; Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc., т. 10, 1909, стр. 436—470.

в виде рядов композиций

$$\left.\begin{aligned} G(\mathfrak{U}\,|\,x) &= g_0(x)\,I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu} g_{j_1\ldots j_\nu}(x), \\ K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}\ldots U_{j_\nu} \varkappa_{j_1\ldots j_\nu}(\xi x), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

равномерно сходящихся в каждой области

$$|U_j| < R \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

где R — как угодно большое положительное число. Кроме того, мы предположим, что сходимость равномерна относительно точек x и ξ, принадлежащих замкнутой области D, содержащей внутри себя кривую c. Предположим еще, что $g_{j_1\ldots j_\nu}(x)$ и $\varkappa_{j_1\ldots j_\nu}(\xi x)$ — голоморфные функции своих аргументов в области D.

С помощью обозначений § 14 первой статьи мы можем записать ряды (2) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} G(\mathfrak{U}\,|\,x) &= g_0(x)\,I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\mathfrak{U}g(x)]_\nu, \\ K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} [\mathfrak{U}\varkappa(\xi x)]_\nu. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Наша цель состоит в том, чтобы дать общее представление решения $F(\mathfrak{U}\,|\,x)$ интегрального уравнения (1). Для этого мы докажем следующую теорему:

Теорема I. *При указанных выше предположениях решение $F(\mathfrak{U}\,|\,x)$ интегрального уравнения (1) есть мероморфная функция матриц $\mathfrak{U}$, которую мы можем представить в виде*

$$F(\mathfrak{U}\,|\,x) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu=0}^{\nu} [\mathfrak{U}f(x)]_\mu \,\|\mathfrak{U}\delta\|_{\nu-\mu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \|\mathfrak{U}\delta\|_\nu}, \tag{5}$$

при этом коэффициенты представляются формулами

$$f_0(x) = g_0(x),$$

$$\begin{aligned} f_{j_1\ldots j_\nu}(x) = g_{j_1\ldots j_\nu}(x) + \sum_{r=1}^{\nu} \int\limits_{(c)} \ldots \int\limits_{(c)} \{ & g_0(\xi_1)\,(\varkappa(\xi_1\xi_2)\,\varkappa(\xi_2\xi_3)\ldots\varkappa(\xi_r x))_{j_1\ldots j_\nu} + \\ & + (g(\xi_1)\,\varkappa(\xi_1\xi_2)\,\varkappa(\xi_2\xi_3)\ldots\varkappa(\xi_r x))_{j_1\ldots j_\nu}\}\,d\xi_1\ldots d\xi_r; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} & \delta_0 = 1, \\ & \delta^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda\ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda}{\beta_1!\ldots\beta_\tau!} \sum_{s=\lambda}^{\nu}\ \sum_{\sigma_1+\ldots+\sigma_\lambda=s} \frac{1}{\sigma_1\ldots\sigma_\lambda} \times \\ & \times \sum_{(h)} \prod_{t=1}^{\lambda} \int\limits_{(c)} \ldots \int\limits_{(c)} (\varkappa(\xi_1\xi_2)\,\varkappa(\xi_2\xi_3)\ldots\varkappa(\xi_{\sigma_t}\xi_1))_{h_1^t\ldots h_{\mu_t}^t}\, d\xi_1\ldots d\xi_{\sigma_t}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

если

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{\beta_1} > \mu_{\beta_1+1} = \mu_{\beta_1+2} = \ldots =$$
$$= \mu_{\beta_1+\beta_2} > \ldots > \mu_{\beta_1+\ldots+\beta_{\tau-1}+1} = \ldots = \mu_\lambda > 0,$$
$$\lambda = \beta_1 + \ldots + \beta_\tau, \quad \nu = \mu_1 + \ldots + \mu_\lambda,$$

где каждая сумма $\sum\limits_{(h)}$ *распространяется на все системы индексов*

$$\begin{matrix} h_1^1 \ldots h_{\mu_1}^1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_1^\lambda \ldots h_{\mu_\lambda}^\lambda, \end{matrix} \quad \text{получающиеся из системы} \quad \begin{matrix} j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda \end{matrix}$$

циклическими перестановками в одной или нескольких строках.

Мы воспользовались в формуле (5) следующим обозначением [ст. I, § 21]:

$$\|\mathfrak{U}\delta\|_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\substack{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=\nu \\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_\lambda > 0}} \sum_{j_1^1, \ldots, j_{\mu_1}^1}^{(1,\ldots,m)}{}' \cdots \sum_{j_1^\lambda, \ldots, j_{\mu_\lambda}^\lambda}^{(1,\ldots,m)}{}' \sigma\left(U_{j_1^1 \ldots j_{\mu_2}^1}\right) \ldots$$
$$\ldots \sigma\left(U_{j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}\right) \delta^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}}, \tag{8}$$

где каждая сумма

$$\sum_{j_1^\varkappa, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa}^{(1,\ldots,m)}{}'$$

распространяется на все системы индексов $j_1^\varkappa \ldots j_{\mu_\varkappa}^\varkappa$, которые не являются циклическимн перестановками друг друга.

Мы ввели также в формулах (6) и (7) следующие обозначения:

$$(\varkappa(\xi_1\xi_2)\varkappa(\xi_2\xi_3)\ldots\varkappa(\xi_r x))_{j_1\ldots j_\nu} =$$
$$= \sum_{1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{r-1} < \nu} \varkappa_{j_1 \ldots j_{\mu_1}}(\xi_1\xi_2)\varkappa_{j_{\mu_1+1}\ldots j_{\mu_2}}(\xi_2\xi_3)\ldots\varkappa_{j_{\mu_{r-1}+1}\ldots j_\nu}(\xi_r x),$$
$$(g(\xi_1)\varkappa(\xi_1\xi_2)\ldots\varkappa(\xi_r x))_{j_1\ldots j_\nu} =$$
$$= \sum_{1 \leq \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_{r-1} < \nu} g_{j_1 \ldots j_{\mu_0}}(\xi_1)\varkappa_{j_{\mu_0+1}\ldots j_{\mu_1}}(\xi_1\xi_2)\ldots\varkappa_{j_{\mu_{r-1}+1}\ldots j_\nu}(\xi_r x). \tag{9}$$

Доказательство. Применяя к уравнению (1) метод последовательных приближений, получаем ряд

$$F(\mathfrak{U}\,|\,x) = G(\mathfrak{U}\,|\,x) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{(c)} \ldots \int_{(c)} G(\mathfrak{U}\,|\,\xi_1)K(\mathfrak{U}\,|\,\xi_1\xi_2)K(\mathfrak{U}\,|\,\xi_2\xi_3)\ldots$$
$$\ldots K(\mathfrak{U}\,|\,\xi_r x)\,d\xi_1\ldots d\xi_r. \tag{10}$$

Этот ряд наверно дает решение уравнения (1), если он сходится равномерно относительно x в области D. Но если матрицы $U_1, \ldots, U_m$ находятся в окрестности (3) нулевых матриц, где R — достаточно малое положительное

число, то мы имеем для всех x и ξ, принадлежащих области D, оценку

$$|K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)| < \left\|\frac{\theta}{nl}\right\|,$$

где l — длина контура C и θ — положительное число, меньшее единицы. Если в той же области для матриц $\mathfrak{U}$ и переменной x мы имеем неравенство

$$|G(\mathfrak{U}\,|\,x)| < \|M\|,$$

то для общего члена ряда (10) получаем оценку

$$\left|\int_{(c)} \ldots \int_{(c)} G(\mathfrak{U}\,|\,\xi_1)K(\mathfrak{U}\,|\,\xi_1\xi_2)\ldots K(\mathfrak{U}\,|\,\xi_r x)\,d\xi_1\ldots d\xi_r\right| < \|M\theta^r\|,$$

откуда и следует равномерная сходимость ряда (10).

Преобразуя ряд (10) в ряд композиций матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$, мы получим для $F(\mathfrak{U}\,|\,x)$ следующее представление:

$$F(\mathfrak{U}\,|\,x) = g_0(x)\,I + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\mathfrak{U}f(x)]_\nu, \tag{11}$$

имеющее место в достаточно малой окрестности (3) нулевых матриц. Кроме того, легко видеть, что в силу правила умножения рядов композиций [ст. I, § 17] коэффициенты разложения (11) определяются формулами (6).

Чтобы получить общее представление матрицы $F(\mathfrak{U}\,|\,x)$, имеющее место для произвольных матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$, применим для решения уравнения (1) метод Фредгольма. Для этого заметим, что элементы

$$\{F(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{k1}, \quad \{F(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{k2}, \ldots, \{F(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{kn}$$

матрицы $F(\mathfrak{U}\,|\,x)$ удовлетворяют системе уравнений Фредгольма

$$\{F(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{kl} = \{G(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{kl} + \int_{(c)} \sum_{s=1}^{n} \{F(\mathfrak{U}\,|\,\xi)\}_{ks}\{K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)\}_{sl}\,d\xi \tag{12}$$
$$(l = 1, 2, \ldots, n).$$

Систему (12) мы можем заменить одним уравнением. Вместо контура c возьмем новый контур Γ, который получим, делая n раз обход контура c; обозначим для большей наглядности через c_1 контур c, описываемый при первом обходе, через c_2 — тот же контур, описываемый при втором обходе, и т. д.; наконец, через c_n — тот же контур, описываемый при n-м обходе.

Будем теперь считать переменные x и ξ заданными на контуре Γ и введем функции $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ и $\tau(\xi, x)$, полагая

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \{F(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{kl} && \text{на контуре } c_l; \\ \gamma(x) &= \{G(\mathfrak{U}\,|\,x)\}_{kl} && \text{на контуре } c_l; \\ \tau(\xi, x) &= \{K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)\}_{sl}, && \text{если } \xi \text{ на контуре } c_s \\ & && \text{и } x \text{ на контуре } c_l. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Очевидно, что функции $\gamma(x)$ и $\tau(\xi, x)$ определены для точек контура Γ и что эти функции терпят разрыв непрерывности, когда мы переходим с контура c_α на следующий контур $c_{\alpha+1}$.

Система интегральных уравнений (12) теперь может быть заменена интегральным уравнением

$$\varphi(x) = \gamma(x) + \int_{(\Gamma)} \varphi(\xi)\tau(\xi, x)\,d\xi. \tag{14}$$

Но при сделанных предположениях к этому уравнению полностью применима теория Фредгольма. Рассмотрим, в частности, знаменатель Фредгольма, отвечающий этому уравнению:

$$D=1-\int\limits_{(\Gamma)}\tau(\xi_1\xi_1)\,d\xi_1+\frac{1}{2!}\int\limits_{(\Gamma)}\int\limits_{(\Gamma)}\begin{vmatrix}\tau(\xi_1\xi_1) & \tau(\xi_1\xi_2)\\ \tau(\xi_2\xi_1) & \tau(\xi_2\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^s}{s!}\int\limits_{(\Gamma)}\ldots\int\limits_{(\Gamma)}\begin{vmatrix}\tau(\xi_1\xi_1) & \ldots & \tau(\xi_1\xi_s)\\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\\ \tau(\xi_s\xi_1) & \ldots & \tau(\xi_s\xi_s)\end{vmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_s+\ldots \quad (15)$$

Известно, что ряд (15) сходится абсолютно и равномерно относительно элементов всех матриц $U_1, \ldots, U_m$, принадлежащих произвольной окрестности нулевых матриц

$$|U_j|<\|R\| \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m). \quad (16)$$

Докажем, что ряд (15) есть целый ряд следов системы матриц $U_1, \ldots, U_m$.

Введем обозначения:

$$K(\mathfrak{U}\,|\,\xi_\alpha\xi_\beta)=k_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\ \beta=1,\,2,\,\ldots,\,n) \quad (17)$$

и рассмотрим следующую систему s^2 матриц:

$$\mathfrak{R}^{(s)}_{1\,2\,\ldots\,s}=\begin{Bmatrix}k_{11} & k_{12}\ldots k_{1s}\\ k_{21} & k_{22}\ldots k_{2s}\\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ k_{s1} & k_{s2}\ldots k_{ss}\end{Bmatrix}.$$

Обозначим еще через $\mathfrak{R}^{(s)}_{p_1\ldots p_\mu}$ (где $1\leqslant\mu\leqslant s$; $p_1, p_2, \ldots, p_\mu=1, 2, \ldots, s$; $p_1<p_2<\ldots<p_\mu$) систему матриц, которую мы получим из системы $\mathfrak{R}^{(s)}_{12\ldots s}$, если оставим в этой последней лишь строки и столбцы с номерами $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$.

Вспомним теперь обозначение следа матрицы X [ст. I, § 12], элементы которой суть $\{X\}_{kl}$:

$$\sigma(X)=\sum_{k=1}^{n}\{X\}_{kk}.$$

Обобщая это обозначение, положим

$$\left.\begin{aligned}\bar\sigma(\mathfrak{R}^{(s)}_{p_1})&=\sigma(k_{p_1p_1}),\\ \bar\sigma(\mathfrak{R}^{(s)}_{p_1\ldots p_\mu})&=\sum_{(q_1\ldots,q_\mu)}{}^{*}\,\sigma(k_{q_1q_2}k_{q_2q_3}\ldots k_{q_\mu q_1}),\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

где сумма распространяется на все перестановки $q_1, \ldots, q_\mu$ чисел $p_1, \ldots, p_\mu$ не являющиеся циклическими перестановками друг друга. Заметим попутно что число этих перестановок равно $(\mu-1)!$

Введем, наконец, обозначение

$$\tau(\mathfrak{R}^{(s)}_{1\,2\,\ldots\,s})=\sum_{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_s}^{(1,\,\ldots,\,n)}\begin{vmatrix}\{k_{11}\}_{r_1r_1} & \{k_{12}\}_{r_1r_2}\ldots\{k_{1s}\}_{r_1r_s}\\ \{k_{21}\}_{r_2r_1} & \{k_{22}\}_{r_2r_2}\ldots\{k_{2s}\}_{r_2r_s}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \{k_{s1}\}_{r_sr_1} & \{k_{s2}\}_{r_sr_2}\ldots\{k_{ss}\}_{r_sr_s}\end{vmatrix}. \quad (19)$$

Теперь легко доказать тождество

$$\tau(\mathfrak{R}^{(s)}_{1\,2\,\ldots\,s})=\sum_{\lambda=1}^{s}\ \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=s}\ \sum_{\substack{p_1^1,\,\ldots,\,p^1_{\mu_1}\\ \cdots\cdots\\ p_1^\lambda,\,\ldots,\,p^\lambda_{\mu_\lambda}}}{}'\ \bar\sigma(\mathfrak{R}^{(s)}_{p_1^1\ldots p^1_{\mu_1}})\ldots\bar\sigma(\mathfrak{R}^{(s)}_{p_1^\lambda\ldots p^\lambda_{\mu_\lambda}})(-1)^{s-\lambda}, \quad (20)$$

где последняя сумма распространяется на все системы индексов $p_1^1, \ldots, p^\lambda_{\mu_\lambda}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left.\begin{aligned}&p_1^1<p_2^1<\ldots<p^1_{\mu_1},\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &p_1^\lambda<p_2^\lambda<\ldots<p^\lambda_{\mu_\lambda},\\ &p_1^1<p_1^2<\ldots<p_1^\lambda\end{aligned}\right. \quad (21)$$

и составляющие в совокупности систему чисел $1, 2, \ldots, s$. Простое вычисление показывает, что число таких систем равно

$$\frac{s!}{(\mu_1-1)!\ldots(\mu_\lambda-1)!\,\mu_\lambda(\mu_\lambda+\mu_{\lambda-1})\ldots(\mu_\lambda+\mu_{\lambda-1}+\ldots+\mu_1)}.$$

Отметим частные случаи тождества (20):

$$\tau(\mathfrak{R}^{(1)}_1)=\sigma(k_{11}),$$

$$\tau(\mathfrak{R}^{(2)}_{12})=-\sigma(k_{12}k_{21})+\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{22}),$$

$$\begin{aligned}\tau(\mathfrak{R}^{(3)}_{123})=\ &\sigma(k_{12}k_{23}k_{31})+\sigma(k_{13}k_{32}k_{21})-\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{23}k_{32})-\sigma(k_{22})\,\sigma(k_{13}k_{31})-\\ &-\sigma(k_{33})\,\sigma(k_{12}k_{21})+\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{22})\,\sigma(k_{33}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\mathfrak{R}^{(4)}_{1234})=\ &-\sigma(k_{12}k_{23}k_{34}k_{41})-\sigma(k_{14}k_{42}k_{23}k_{13})-\sigma(k_{13}k_{34}k_{42}k_{21})-\\ &-\sigma(k_{12}k_{24}k_{43}k_{31})-\sigma(k_{13}k_{32}k_{24}k_{41})-\sigma(k_{14}k_{43}k_{32}k_{21})+\\ &+\sigma(k_{11})\,[\sigma(k_{23}k_{34}k_{41})+\sigma(k_{24}k_{43}k_{31})]+\\ &+\sigma(k_{22})\,[\sigma(k_{13}k_{34}k_{41})+\sigma(k_{14}k_{43}k_{31})]+\\ &+\sigma(k_{33})\,[\sigma(k_{12}k_{24}k_{41})+\sigma(k_{14}k_{42}k_{21})]+\end{aligned}$$

$$+\sigma(k_{44})\,[\sigma(k_{12}k_{23}k_{31})+\sigma(k_{13}k_{32}k_{21})]+\sigma(k_{12}k_{21})\,\sigma(k_{34}k_{43})+\sigma(k_{13}k_{31})\,\sigma(k_{24}k_{42})+$$

$$+\sigma(k_{14}k_{41})\,\sigma(k_{23}k_{32})-\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{22})\,\sigma(k_{34}k_{43})-\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{33})\,\sigma(k_{24}k_{42})-$$

$$-\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{44})\,\sigma(k_{23}k_{32})-\sigma(k_{22})\,\sigma(k_{33})\,\sigma(k_{14}k_{41})-\sigma(k_{22})\,\sigma(k_{44})\,\sigma(k_{13}k_{31})-$$

$$-\sigma(k_{33})\,\sigma(k_{44})\,\sigma(k_{12}k_{21})+\sigma(k_{11})\,\sigma(k_{22})\,\sigma(k_{33})\,\sigma(k_{44}).$$

Перейдем теперь к доказательству тождества (20). Вычисляя по общему правилу определитель, который входит в сумму (19), мы получим

$$\begin{vmatrix}\{k_{11}\}_{r_1r_1} & \{k_{12}\}_{r_1r_2}\ldots\{k_{1s}\}_{r_1r_s}\\ \{k_{21}\}_{r_2r_1} & \{k_{22}\}_{r_2r_2}\ldots\{k_{2s}\}_{r_2r_s}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \{k_{s1}\}_{r_sr_1} & \{k_{s2}\}_{r_sr_2}\ldots\{k_{ss}\}_{r_sr_s}\end{vmatrix}=\sum\pm\{k_{1\alpha_1}\}_{r_1r_{\alpha_1}}\{k_{2\alpha_2}\}_{r_2r_{\alpha_2}}\ldots\{k_{s\alpha_s}\}_{r_sr_{\alpha_s}}, \quad (22)$$

где сумма распространяется на все перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ системы чисел $1, 2, \ldots, s$ и где каждое произведение берется со знаком $+$, если соответствующая перестановка четная, и со знаком —, если соответствующая перестановка нечетная. Но каждое произведение

$$\{k_{1\alpha_1}\}_{r_1 r_{\alpha_1}} \ldots \{k_{s\alpha_s}\}_{r_s r_{\alpha_s}} \tag{23}$$

может быть разложено, при этом единственным образом, в произведение нескольких циклов

$$\left[\{k_{q_1^1 q_2^1}\}_{r_{q_1^1} r_{q_2^1}} \{k_{q_2^1 q_3^1}\}_{r_{q_2^1} r_{q_3^1}} \cdots \{k_{q_{\mu_1}^1 q_1^1}\}_{r_{q_{\mu_1}^1} r_{q_1^1}}\right] \times$$
$$\times \left[\{k_{q_1^2 q_2^2}\}_{r_{q_1^2} r_{q_2^2}} \cdots\right] \cdots \left[\cdots \{k_{q_{\mu_\lambda}^\lambda q_1^\lambda}\}_{r_{q_{\mu_\lambda}^\lambda} r_{q_1^\lambda}}\right], \tag{24}$$

где наименьший индекс q первого цикла меньше, чем наименьший индекс q второго цикла, наименьший индекс второго цикла в свою очередь меньше, чем наименьший индекс третьего цикла, и т. д. Число λ циклов может изменяться от 1 до s.

Перестановка

$$q_1^1 q_2^1 \ldots q_{\mu_1}^1 q_1^2 \ldots q_{\mu_2}^2 \ldots q_1^\lambda \ldots q_{\mu_\lambda}^\lambda$$

преобразуется в перестановку

$$q_2^1 q_3^1 \ldots q_{\mu_1}^1 q_1^1 q_2^2 \ldots q_1^2 q_2^3 \ldots q_{\mu_\lambda}^\lambda q_1^\lambda$$

с помощью $s-\lambda$ транспозиций двух соседних элементов, отсюда следует, что перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ системы чисел $1, 2, \ldots, s$ четная, если $s-\lambda$ — четное число, и нечетна в противном случае.

Замечая еще, что каждая система индексов, образующая цикл, например $q_1^1, \ldots, q_{\mu_1}^1$, после соответствующей перестановки этих индексов превращается в систему

$$p_1^1, \ldots, p_{\mu_1}^1,$$

удовлетворяющую первому из условий (21), мы легко находим следующее разложение определителя (22):

$$\begin{vmatrix} \{k_{11}\}_{r_1 r_1} & \{k_{12}\}_{r_1 r_2} \cdots \{k_{1s}\}_{r_1 r_s} \\ \{k_{21}\}_{r_2 r_1} & \{k_{22}\}_{r_2 r_2} \cdots \{k_{2s}\}_{r_2 r_s} \\ \cdots & \cdots \\ \{k_{s1}\}_{r_s r_1} & \{k_{s2}\}_{r_s r_2} \cdots \{k_{ss}\}_{r_s r_s} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=1}^{s} (-1)^{s-\lambda} \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=s} \sum_{\substack{p_1^1, \ldots, p_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ p_1^\lambda, \ldots, p_{\mu_\lambda}^\lambda}}' \sum_{q_1^1, \ldots, q_{\mu_1}^1}^{(p_1^1, \ldots, p_{\mu_1}^1)*} \cdots$$
$$\cdots \sum_{q_1^\lambda, \ldots, q_{\mu_\lambda}^\lambda}^{p_1^\lambda, \ldots, p_{\mu_\lambda}^\lambda *} \prod_{t=1}^{\lambda} \{k_{q_1^t q_2^t}\}_{r_{q_1^t} r_{q_2^t}} \cdots \{k_{q_{\mu_t}^t q_1^t}\}_{r_{q_{\mu_t}^t} r_{q_1^t}}. \tag{25}$$

Штрих у третьего знака суммы указывает, что мы должны суммировать по всем перестановкам $p_1^1, \ldots, p_{\mu_\lambda}^\lambda$ системы чисел $1, 2, \ldots, s$, удовлетворяющих неравенствам (21), и звездочка у четвертого знака суммы (а также у следующих знаков суммы) указывает, что мы должны суммировать по всем перестановкам $q_1^1, \ldots, q_{\mu_1}^1$ системы чисел $p_1^1, \ldots, p_{\mu_1}^1$, которые не являются циклическими перестановками друг друга.

Замечая еще, что

$$\sum_{r_{q_1}, r_{q_2}, \ldots, r_{q_\mu}}^{(1, \ldots, n)} \{k_{q_1 q_2}\}_{r_{q_1} r_{q_2}} \{k_{q_2 q_3}\}_{r_{q_2} r_{q_3}} \ldots \{k_{q_\mu q_1}\}_{r_{q_\mu} r_{q_1}} = \sigma(k_{q_1 q_2} k_{q_2 q_3} \ldots k_{q_\mu q_1}), \tag{26}$$

мы получим из формул (19), (25), (26) и (18) тождество (20).

Вернемся к знаменателю Фредгольма (15). Очевидно, что в силу обозначений (13) и (17) мы имеем:

$$\int_{(\Gamma)} \ldots \int_{(\Gamma)} \begin{vmatrix} \tau(\xi_1\xi_1) \ldots \tau(\xi_1\xi_s) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tau(\xi_s\xi_1) \ldots \tau(\xi_s\xi_s) \end{vmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_s =$$
$$= \sum_{r_1=1}^{n} \ldots \sum_{r_s=1}^{n} \int_{(c)} \ldots \int_{(c)} \begin{vmatrix} \{k_{11}\}_{r_1 r_1} \ldots \{k_{1s}\}_{r_1 r_s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \{k_{s1}\}_{r_s r_1} \ldots \{k_{ss}\}_{r_s r_s} \end{vmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_s; \tag{27}$$

с помощью обозначения (19) мы можем, следовательно, записать знаменатель Фредгольма (15) в виде

$$D = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int_{(c)} \ldots \int_{(c)} \tau(\mathfrak{R}_{12\ldots s}^{(s)})\, d\xi_1 \ldots d\xi_s \tag{28}$$

и в силу тождества (20)

$$D = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_{(c)} \ldots \int_{(c)} \sum_{\lambda=1}^{s} (-1)^\lambda \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda=s} \sum_{\substack{p_1^1 \ldots p_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ p_1^\lambda \ldots p_{\mu_\lambda}^\lambda}}' \bar{\sigma}\left(\mathfrak{R}_{p_1^1 \ldots p_{\mu_1}^1}^{(s)}\right) \cdots$$
$$\cdots \bar{\sigma}\left(\mathfrak{R}_{p_1^\lambda \ldots p_{\mu_\lambda}^\lambda}^{(s)}\right) d\xi_1 \ldots d\xi_s. \tag{29}$$

Положим теперь

$$\bar{\varkappa}_{j_1 \ldots j_\nu}^{(p_1 \ldots p_\mu)} = \sum_{q_1, \ldots, q_\mu}^{(p_1, \ldots, p_\mu)*} (\varkappa(\xi_{q_1}\xi_{q_2})\, \varkappa(\xi_{q_2}\xi_{q_3}) \ldots \varkappa(\xi_{q_\mu}\xi_{q_1}))_{j_1 \ldots j_\nu}. \tag{30}$$

Тогда в силу (18), (17), (2) и правила умножения рядов композиций находим

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{R}_{p_1, \ldots p_\mu}^{(s)}) = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \sigma\left[\mathfrak{U}\bar{\varkappa}^{(p_1, \ldots, p_\mu)}\right] = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1, \ldots, m)} \sigma(U_{j_1} \ldots U_{j_\nu})\, \bar{\varkappa}_{j_1 \ldots j_\nu}^{(p_1 \ldots p_\mu)} \tag{31}$$

и далее

$$\prod_{t=1} \bar{\sigma}\left(\mathfrak{R}_{p_1^t \ldots p_{\mu_t}^t}^{(s)}\right) = \sum_{\nu=s}^{\infty} \sum_{\rho_1+\ldots+\rho_\lambda=\nu} \sum_{\substack{j_1^1, \ldots, j_{\rho_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda, \ldots, j_{\rho_1}^\lambda}}^{(1, \ldots, m)} \sigma\left(U_{j_1^1} \ldots U_{j_{\rho_1}^1}\right) \cdots$$
$$\cdots \sigma\left(U_{j_1^\lambda} \ldots U_{j_{\rho_\lambda}^\lambda}\right) \bar{\varkappa}_{j_1^1, \ldots, j_{\rho_1}^1}^{(p_1^1, \ldots, p_{\mu_1}^1)} \ldots \bar{\varkappa}_{j_1^\lambda \ldots j_{\rho_\lambda}^\lambda}^{(p_1^\lambda \ldots p_{\mu_\lambda}^\lambda)}, \tag{32}$$

при условии, что

$$\bar{\varkappa}^{(p_1,\ \dots,\ p_\mu)}_{j_1,\ \dots,\ j_\rho} = 0, \quad \text{если} \quad \rho < \mu. \tag{33}$$

Мы имеем, наконец,

$$\sum_{\lambda=1}^{s} (-1)^\lambda \sum_{\mu_1+\ \dots\ +\mu_\lambda = s} \sum'_{\substack{p_1^1,\ \dots,\ p_{\mu_\lambda}^1 \\ \cdots\cdots \\ p_1^\lambda,\ \dots,\ p_{\mu_\lambda}^\lambda}} \prod_{t=1}^{\lambda} \bar{\sigma}\left(\mathfrak{N}^{(s)}_{p_1^t \dots p_{\mu_t}^t}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{s} (-1)^\lambda \sum_{\rho_1+\ \dots\ \rho_\lambda = \nu} \sum_{\substack{j_1^1\ \dots,\ j_{\rho_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda,\ \dots,\ j_{\rho\lambda}^\lambda}} \sigma\left(U_{j_1^1} \dots U_{j_{\rho_1}^1}\right) \dots$$

$$\dots \sigma\left(U_{j_1^\lambda} \dots U_{j_{\mu_\lambda}^\lambda}\right) \sum_{\mu_1+\ \dots\ +\mu_\lambda = s} \sum'_{\substack{p_1^1,\ \dots,\ p_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ p_1^\lambda,\ \dots,\ p_{\mu_\lambda}^\lambda}} \bar{\varkappa}^{\left(p_1^1 \cdots p_{\mu_1}^1\right)}_{j_1^1 \dots j_{\rho_1}^1} \dots \bar{\varkappa}^{\left(p_1^\lambda \cdots p_{\mu_\lambda}^\lambda\right)}_{j_1^\lambda \dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}. \tag{34}$$

Теперь по формуле (29) получаем следующее выражение знаменателя Фредгольма:

$$D = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\rho_1+\ \dots\ +\rho_\lambda = \nu} \sum_{\substack{j_1^1,\ \dots,\ j_{\rho_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda,\ \dots,\ j_{\rho_\lambda}^\lambda}} \sigma\left(U_{j_1^1} \dots U_{j_{\rho_1}^1}\right) \dots \sigma\left(U_{j_1^\lambda} \dots U_{j_{\rho_\lambda}^\lambda}\right) \bar{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \dots j_{\rho_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}}, \tag{35}$$

где

$$\bar{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \dots j_{\rho_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}} = (-1)^\lambda \sum_{s=\lambda}^{\nu} \frac{1}{s!} \sum_{\mu_1+\ \dots\ +\mu_\lambda = s} \sum'_{\substack{p_1^1 \dots p_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ p_1^\lambda \dots p_{\mu_\lambda}^\lambda}} \int\limits_{(c)} \dots \int\limits_{(c)} \bar{\varkappa}^{\left(p_1^1 \cdots p_{\mu_1}^1\right)}_{j_1^1 \dots j_{\rho_1}^1} \dots$$

$$\dots \bar{\varkappa}^{\left(p_1^\lambda \cdots p_{\mu_\lambda}^\lambda\right)}_{j_1^\lambda \dots j_{\rho_\lambda}^\lambda} d\xi_1 \dots d\xi_s. \tag{36}$$

Таким образом, мы представили знаменатель Фредгольма D рядом следов матриц $U_1, \dots, U_m$. Легко видеть, что этот ряд есть целый ряд следов матриц, ибо он получается в результате преобразования ряда (29), абсолютно и равномерно сходящегося в каждой области (16) и общий член которого есть целый ряд матриц $U_1, \dots, U_m$.

Для матриц $U_1, \dots, U_m$ в окрестности нулевых матриц можно дать другое представление знаменателя Фредгольма. Действительно, хорошо известно, что в этом случае мы имеем следующее представление логарифма знаменателя Фредгольма, определяемого рядом (15):

$$\lg D = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \int\limits_{(\Gamma)} \dots \int\limits_{(\Gamma)} \tau(\xi_1\xi_2)\,\tau(\xi_2\xi_3) \dots \tau(\xi_s\xi_1)\, d\xi_1 \dots d\xi_s. \tag{37}$$

Но из формул (13) и (17) следует:

$$\int\limits_{(\Gamma)} \dots \int\limits_{(\Gamma)} \tau(\xi_1\xi_2)\,\tau(\xi_2\xi_3) \dots \tau(\xi_s\xi_1)\, d\xi_1 \dots d\xi_s =$$

$$= \sum_{r_1=1}^{n} \dots \sum_{r_s=1}^{n} \int\limits_{(c)} \dots \int\limits_{(c)} \{k_{12}\}_{r_1r_2} \{k_{23}\}_{r_2r_3} \dots \{k_{s1}\}_{r_sr_1}\, d\xi_1 \dots d\xi_s =$$

$$= \int\limits_{(c)} \dots \int\limits_{(c)} \sigma(k_{12}k_{23} \dots k_{s1})\, d\xi_1 \dots d\xi_s, \tag{38}$$

откуда

$$\lg D = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \int\limits_{(c)} \dots \int\limits_{(c)} \sigma(k_{12}k_{23} \dots k_{s1})\, d\xi_1 \dots d\xi_s. \tag{39}$$

Но мы имеем

$$\sigma(k_{12}k_{23} \dots k_{s1}) = \sum_{\nu=s}^{\infty} \sum_{j_1,\ \dots,\ j_\nu}^{(1,\ \dots,\ m)} \sigma(U_{j_1} \dots U_{j_\nu}) \left(\varkappa(\xi_1\xi_2)\,\varkappa(\xi_2\xi_3) \dots \varkappa(\xi_s\xi_1)\right)_{j_1 \dots j_\nu},$$

и формула (39) обращается тогда в такую:

$$\lg D = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{\nu=s}^{\infty} \sigma\left([\mathfrak{U}\rho^{(s)}]_\nu\right), \tag{40}$$

где

$$\rho^{(s)}_{j_1 \dots j_\nu} = \int\limits_{(c)} \dots \int\limits_{(c)} \left(\varkappa(\xi_1\xi_2)\,\varkappa(\xi_2\xi_3) \dots \varkappa(\xi_s\xi_1)\right)_{j_1 \dots j_\nu} d\xi_1 \dots d\xi_s. \tag{41}$$

Вводя еще обозначения

$$\omega_{j_1 \dots j_\nu} = -\sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s}\, \rho^{(s)}_{j_1 \dots j_\nu} =$$

$$= -\sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s} \int\limits_{(c)} \dots \int\limits_{(c)} \left(\varkappa(\xi_1\xi_2)\,\varkappa(\xi_2\xi_3) \dots \varkappa(\xi_s\xi_1)\right)_{j_1 \dots j_s} d\xi_1 \dots d\xi_s, \tag{42}$$

находим формулу

$$\lg D = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ \dots,\ j_\nu}^{(1,\ \dots,\ m)} \sigma(U_{j_1} \dots U_{j_\nu})\, \omega_{j_1,\ \dots,\ j_\nu}. \tag{43}$$

Зная $\lg D$, легко вычислить знаменатель D:

$$D = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu_1+\ \dots\ +\mu_\lambda = \nu} \sum_{\substack{j_1^1,\ \dots,\ j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda,\ \dots,\ j_{\mu_\lambda}^\lambda}} \sigma\left(U_{j_1^1} \dots U_{j_{\mu_1}^1}\right) \dots$$

$$\dots \sigma\left(U_{j_1^\lambda} \dots U_{j_{\mu_\lambda}^\lambda}\right) \tilde{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \dots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}}, \tag{44}$$

где коэффициенты $\tilde{\delta}$ определяются формулами:

$$\tilde{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{1}{\lambda!}\,\omega_{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1}\cdots\omega_{j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}, \tag{45}$$

или, в силу (42), формулами:

$$\tilde{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\sum_{s_1=1}^{\mu_1}\frac{1}{\sigma_1}\,\rho^{(\sigma_1)}_{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1}\cdots\sum_{\sigma_\lambda=1}^{\mu_\lambda}\frac{1}{\sigma_\lambda}\,\rho^{(\sigma_\lambda)}_{j_1^\lambda,\dots,j_{\mu_\lambda}^\lambda} =$$

$$= \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\sum_{s=\lambda}^{\nu=\mu_1+\dots+\mu_\lambda}\ \sum_{\sigma_1+\dots+\sigma_\lambda=s}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_\lambda}\,\rho^{(\sigma_1)}_{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1}\cdots\rho^{(\sigma_\lambda)}_{j_1^\lambda,\dots,j_{\mu_\lambda}^\lambda}, \tag{46}$$

причем мы положили

$$\rho^{(s)}_{j_1\dots j_\nu} = 0 \quad \text{для } s > \nu.$$

Формулы (35) и (44) дают два разложения одной и той же функции D в ряды следов матриц $U_1, \dots, U_m$. Но коэффициенты $\bar{\delta}$ и $\tilde{\delta}$ этих разложений имеют различные значения. Можно, однако, упростить эти ряды; докажем, что тогда мы получим тождественные выражения.

Прежде всего из формул (30) и (41) следует, что

$$\int\limits_{(c)}\cdots\int\limits_{(c)}\bar{\chi}^{\left(p_1^1\dots p_{\mu_1}^1\right)}_{j_1^1\dots j_{\rho_1}^1}\cdots\bar{\chi}^{\left(p_1^\lambda\dots p_{\mu_\lambda}^\lambda\right)}_{j_1^\lambda\dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}\,d\xi_1\dots d\xi_s =$$

$$= \sideset{}{^*}\sum_{q_1^1,\dots,q_{\mu_1}^1}^{\left(p_1^1,\dots,p_{\mu_1}^1\right)}\cdots\sum_{q_1^\lambda,\dots,q_{\mu_\lambda}^\lambda}^{\left(p_1^\lambda,\dots,p_{\mu_\lambda}^\lambda\right)}\int\limits_{(c)}\cdots\int\limits_{(c)}\times$$

$$\times\prod_{t=1}^{\lambda}\left(\chi\left(\xi_{q_1^t}\xi_{q_2^t}\right)\chi\left(\xi_{q_2^t}\xi_{q_3^t}\right)\cdots\chi\left(\xi_{q_{\mu_t}^t}\xi_{q_1^t}\right)\right)_{j_1^t\dots j_{\rho_t}^t}\,d\xi_1\dots d\xi_s =$$

$$= \sideset{}{^*}\sum_{q_1^1,\dots,q_{\mu_1}^1}^{\left(p_1^1,\dots,p_{\mu_1}^1\right)}\cdots\sideset{}{^*}\sum_{q_1^\lambda,\dots,q_{\mu_\lambda}^\lambda}^{\left(p_1^\lambda,\dots,p_{\mu_\lambda}^\lambda\right)}\rho^{(\mu_1)}_{j_1^1\dots j_{\rho_1}^1}\cdots\rho^{(\mu_\lambda)}_{j_1^\lambda\dots j_{\rho_\lambda}^\lambda} =$$

$$= (\mu_1-1)!\dots(\mu_\lambda-1)!\,\rho^{(\mu_1)}_{j_1^1\dots j_{\rho_1}^1}\cdots\rho^{(\mu_\lambda)}_{j_1^\lambda\dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}. \tag{47}$$

Теперь из формулы (36) следует

$$\bar{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\dots j_{\rho_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}} = (-1)^\lambda\sum_{s=\lambda}^{\nu=\rho_1+\dots+\rho_\lambda}\frac{1}{s!}\sum_{\mu_1+\dots+\mu_\lambda=s}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{p_1^1,\dots,p_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ p_1^\lambda,\dots,p_{\mu_\lambda}^\lambda}}(\mu_1-1)!\dots$$

$$\dots(\mu_\lambda-1)!\,\rho^{(\mu_1)}_{j_1^1\dots j_{\rho_1}^1}\cdots\rho^{(\mu_\lambda)}_{j_1^\lambda\dots j_{\rho_\lambda}^\lambda} =$$

$$=(-1)^\lambda\sum_{s=\lambda}^{\nu=\rho_1+\dots+\rho_\lambda}\ \sum_{\mu_1+\dots+\mu_\lambda=s}\frac{1}{\mu_\lambda(\mu_\lambda+\mu_{\lambda-1})\dots(\mu_\lambda+\mu_{\lambda-1}+\dots+\mu_1)}\,\rho^{(\mu_1)}_{j_1^1\dots j_{\rho_1}^1}\cdots\rho^{(\mu_\lambda)}_{j_1^\lambda\dots j_{\rho_\lambda}^\lambda}. \tag{48}$$

Мы можем теперь записать ряд (35) в виде

$$D = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\nu}\ \sum_{\substack{\mu_1+\dots+\mu_\lambda=\nu\\ \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\dots\geqslant\mu_\lambda>0}}\ \sum_{j_1^1,\dots,j_{\mu_1}^1}^{(1,\dots,m)}\cdots\sum_{j_1^\lambda,\dots,j_{\mu_\lambda}^\lambda}^{(1,\dots,m)}\sigma\left(U_{j_1^1}\dots U_{j_{\mu_1}^1}\right)\dots$$

$$\dots\sigma\left(U_{j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}\right)\overset{*}{\delta}{}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}}, \tag{49}$$

где должны положить

$$\overset{*}{\delta}{}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{1}{\beta_1!\dots\beta_\tau!}\sum_{(\alpha)}\tilde{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{\alpha_1\\ j_1\dots j_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\\ \cdots\cdots\\ j_1^{\alpha_\lambda}\dots j_{\mu_{\alpha_\lambda}}^{\alpha_\lambda}}}, \tag{50}$$

если

$$\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_{\beta_1}>\mu_{\beta_1+1}=\mu_{\beta_1+2}=\dots=\mu_{\beta_1+\beta_2}>\dots>\mu_{\beta_1+\dots+\beta_{\tau-1}+1}=\dots$$

$$\dots=\mu_\lambda>0,$$

$$\lambda=\beta_1+\dots+\beta_\tau,\quad \nu=\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\lambda,$$

при этом суммирование распространяется на все перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda$ системы чисел $1, 2, \dots, \lambda$.

Применяя формулу (48), получим равенство:

$$\overset{*}{\delta}{}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1\\ \cdots\cdots\\ j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda}{\beta_1!\dots\beta_\tau!}\sum_{s=\lambda}^{\nu=\mu_1+\dots+\mu_\lambda}\ \sum_{\sigma_1+\dots+\sigma_\lambda=s}\frac{1}{\sigma_\lambda(\sigma_\lambda+\sigma_{\lambda-1})\dots(\sigma_\lambda+\sigma_{\lambda-1}+\dots+\sigma_1)}\sum_{(\alpha)}\rho^{(\alpha_1)}_{\substack{\alpha_1\\ j_1\dots j_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1}}}\cdots$$

$$\cdots\rho^{(\sigma_\lambda)}_{j_1^{\alpha_\lambda}\dots j_{\mu_{\alpha_\lambda}}^{\alpha_\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda}{\beta_1!\dots\beta_\tau!}\sum_{s=\lambda}^{\nu}\ \sum_{\sigma_1+\dots+\sigma_\lambda=s}\rho^{(\sigma_1)}_{j_1^1\dots j_{\mu_1}^1}\cdots$$

$$\cdots\rho^{(\sigma_\lambda)}_{j_1^\lambda\dots j_{\mu_\lambda}^\lambda}\sum_{(\alpha)}\frac{1}{(\sigma_{\alpha_1}+\dots+\sigma_{\alpha_\lambda})(\sigma_{\alpha_2}+\dots+\sigma_{\alpha_\lambda})\dots\sigma_{\alpha_\lambda}}. \tag{51}$$

Чтобы вычислить сумму

$$\gamma_{\sigma_1 \ldots \sigma_\lambda} = \sum_{(\alpha)} \frac{1}{(\sigma_{\alpha_1} + \ldots + \sigma_{\alpha_\lambda})(\sigma_{\alpha_2} + \ldots + \sigma_{\alpha_\lambda}) \ldots \sigma_{\alpha_\lambda}}, \tag{52}$$

применим метод индукции. Прежде всего

$$\gamma_{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_1}, \quad \gamma_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{(\sigma_1+\sigma_2)\sigma_2} + \frac{1}{(\sigma_2+\sigma_1)\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2};$$

предполагая, что для $k = 1, 2, \ldots, (\lambda - 1)$ имеет место равенство

$$\gamma_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_k}, \tag{53}$$

докажем это равенство для $k = \lambda$, т. е. для любого k. Действительно, часть суммы (52), отвечающая перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$, для которых $\alpha_1 = \lambda$, равна в силу сделанного предположения

$$\frac{1}{\sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{\lambda-1}};$$

точно так же часть суммы (52), отвечающая перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$, при $\alpha_1 = 1$ равна

$$\frac{1}{\sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sigma_3 \ldots \sigma_\lambda}$$

и т. д. Отсюда следует, что

$$\gamma_{\sigma_1 \ldots \sigma_\lambda} = \frac{1}{\sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_\lambda}(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\lambda) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_\lambda},$$

что и требовалось доказать.

Мы получаем, следовательно, формулы

$$\overset{*}{\delta}{}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda}{\beta_1! \ldots \beta_\tau!} \sum_{s=\lambda}^{\nu} \sum_{\sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda = s} \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_\lambda} \rho^{(\sigma)}_{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1} \ldots \rho^{(\sigma_\lambda)}_{j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}. \tag{54}$$

Применим к ряду (44) те же упрощения, с помощью которых мы перешли от ряда (35) к ряду (49), и докажем, что в результате получим тот же ряд (49). Действительно, легко видеть, что имеют место формулы, аналогичные формулам (50):

$$\overset{*}{\delta}{}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{1}{\beta_1! \ldots \beta_\tau!} \sum_{(\alpha)} \tilde{\delta}^{(\lambda)}_{\substack{j_1^{\alpha_1} \ldots j_{\mu_{\alpha_1}}^{\alpha_1} \\ \cdots\cdots \\ j_1^{\alpha_\lambda} \ldots j_{\mu_{\alpha_\lambda}}^{\alpha_\lambda}}}. \tag{55}$$

В самом деле, сумма в правой части этого равенства в силу формулы (46) равна

$$\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \sum_{s=\lambda}^{\nu} \sum_{\sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda = s} \rho^{(\sigma_1)}_{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1} \ldots \rho^{(\sigma_\lambda)}_{j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda} \sum_{(\alpha)} \frac{1}{\sigma_{\alpha_1} \ldots \sigma_{\alpha_\lambda}};$$

но все члены последней суммы равны

$$\frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_\lambda},$$

и число членов этой суммы равно $\lambda!$; тогда очевидно, что в правой части формулы (55) стоит выражение, тождественное с правой частью формулы (54), что и доказывает наше утверждение.

Два метода вычисления знаменателя Фредгольма D дают нам, следовательно, один и тот же ряд следов (49). Мы можем записать этот последний ряд в следующей окончательной форме:

$$D = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\substack{\mu_1 + \ldots + \mu_\lambda = \nu \\ \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_\lambda > 0}} \sideset{}{'}\sum_{j_1^1, \ldots, j_{\mu_1}^1}^{(1, \ldots, m)} \ldots \sideset{}{'}\sum_{j_1^\lambda, \ldots, j_{\mu_\lambda}^\lambda}^{(1, \ldots, m)} \sigma\left(U_{j_1^1} \ldots U_{j_{\mu_1}^1}\right) \ldots$$
$$\ldots \sigma\left(U_{j_1^\lambda} \ldots U_{j_{\mu_\lambda}^\lambda}\right) \cdot \delta^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}}, \tag{56}$$

штрихи у знаков суммы указывают, что суммирование распространяется только на те системы индексов $j_1^\varkappa, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa$, которые не являются циклическими перестановками друг друга. Коэффициенты δ в формуле (56) определяются соотношениями

$$\delta^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \sum_{(h)} \overset{*}{\delta}{}^{(\lambda)}_{\substack{h_1^1 \ldots h_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ h_1^\lambda \ldots h_{\mu_\lambda}^\lambda}}, \tag{57}$$

где суммирование распространяется на все различные системы индексов $h_1^\varkappa, \ldots, h_{\mu_\varkappa}^\varkappa$, получающиеся из системы $j_1^\varkappa, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa$ циклическими перестановками. Подставляя в (57) выражения (54), найдем

$$\delta^{(\lambda)}_{\substack{j_1^1 \ldots j_{\mu_1}^1 \\ \cdots\cdots \\ j_1^\lambda \ldots j_{\mu_\lambda}^\lambda}} = \frac{(-1)^\lambda}{\beta_1! \ldots \beta_\tau!} \sum_{s=\lambda}^{\nu = \mu_1 + \ldots + \mu_\lambda} \sum_{\sigma_1 + \ldots + \sigma_\lambda = s} \sum_{(h)} \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_\lambda} \rho^{(\sigma_1)}_{h_1^1 \ldots h_{\mu_1}^1} \ldots \rho^{(\sigma_\lambda)}_{h_1^\lambda \ldots h_{\mu_\lambda}^\lambda}; \tag{58}$$

если мы воспользуемся еще формулами (41)

$$\rho^{(s)}_{j_1, \ldots, j_\nu} = \int_{(c)} \ldots \int_{(c)} (\varkappa(\xi_1\xi_2)\varkappa(\xi_2\xi_3) \ldots \varkappa(\xi_s\xi_1))_{j_1 \ldots j_\nu} d\xi_1 \ldots d\xi_s, \tag{59}$$

то получим выражения коэффициентов δ, которые даются формулами (7), указанными в формулировке теоремы.

Умножая выражение (11) для $F(\mathfrak{U} \mid x)$ на значение (56) знаменателя Фредгольма D, найдем:

$$F(\mathfrak{U} \mid x) D = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\nu} [\mathfrak{U} f(x)]_\mu \, [\![\mathfrak{U}\delta]\!]_{\nu-\mu}. \tag{60}$$

Из теории Фредгольма следует, что правая часть этой формулы есть целая функция элементов матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и, следовательно, целая функция матриц и следов. Теорема доказана полностью.

§ 3. Аналитическая характеристика особенностей иррегулярных матриц

В этом параграфе мы будем изучать вопрос о полной аналитической характеристике особенностей иррегулярных матриц. Докажем сначала лемму, полезную для последующего.

Лемма. *Пусть $F(x)$ — матрица, элементы которой суть аналитические функции от x, однозначные в окрестности точки $x=a$ и такие, что для них эта точка является обыкновенной или изолированной особой точкой; тогда имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{F(\xi)}{\xi-x}\,\frac{x-a}{\xi-a}\,d\xi=\sum_{p=1}^{\infty}(x-a)^p\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}F(\xi)(\xi-a)^{-p-1}\,d\xi, \tag{61}$$

где (a) — произвольный простой контур, охватывающий точку $x=a$ и не содержащий внутри и на контуре никаких других особых точек матрицы $F(x)$, и x — произвольная точка внутри этого контура, принадлежащая одновременно кругу $|x-a|<R$, где R — расстояние от точки a до ближайшей особой точки матрицы $F(x)$.

Доказательство. При условиях теоремы мы можем преобразовать контур (a) в окружность c с центром в точке a и радиусом, равным $\frac{|x-a|+R}{2}$, не изменяя величин интегралов, входящих в формулу (61). Но на окружности c мы имеем $|\xi-a|>|x-a|$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\xi-x}=\frac{1}{(\xi-a)-(x-a)}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(x-a)^{p-1}}{(\xi-a)^p},$$

откуда после умножения на $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{x-a}{\xi-a}F(\xi)$ и интегрирования вдоль окружности c получим формулу (61).

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основной формулы, которая позволяет установить существование полной аналитической характеристики особенностей интегральной нормированной матрицы, а также изучить природу матриц, с помощью которых дается эта характеристика.

Рассматривая систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dY(x)}{dx}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{Y(x)\,U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r}, \tag{62}$$

обозначим, как всегда, через $Y_b(x)$ решение этой системы, обращающееся в единичную матрицу в точке $x=b$.

Если матрицы

$$U_h^{(r)}\qquad (h=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$$

находятся в окрестности нулевых матриц, то мы имеем представление [ст. V, § 5]

$$Y_b(x)=G_b^{(j)}(x)\,\overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{63}$$

где

$$G_b^{(j)}(x)=(x-a_j)^{W_j^{(1)}}\left[I+\sum_{p=1}^{\infty}C_j^{(p)}\frac{1}{(x-a_j)^p}\right] \tag{64}$$

есть элементарная метаканоническая матрица, т. е. решение уравнения

$$\frac{dG_b^{(j)}(x)}{dx}=\sum_{r=1}^{s}\frac{G_b^{(j)}(x)\,W_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}, \tag{65}$$

и матрицы $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ остаются голоморфными в окрестности точки $x=a_j$. Мы доказали, что матрицы $W_j^{(r)}$ $(r=1,\ldots,s)$, характеризующие природу особенности матрицы $Y_b(x)$ в точке a_j, суть голоморфные функции матриц

$$U_h^{(r)}\qquad (h=1,\ldots,m;\ r=1,\ldots,s)$$

в окрестности системы нулевых матриц и могут быть представлены в этой окрестности рядами композиций матриц $U_h^{(r)}$.

Построим теперь аналитические представления матриц $W_j^{(r)}$, имеющие место во всей области их существования. Для первой из этих матриц возьмем показательную матрицу

$$W_j^{(1)}(b)=\frac{1}{2\pi i}\lg V_j(b), \tag{66}$$

где $\lg V_j(b)$ есть любое значение логарифма подстановки $V_j(b)$, которую претерпевает матрица $Y_b(x)$, когда переменная x описывает контур, окружающий точку a_j. Матрицы $Y_b(x)$ и $V_j(b)$ суть целые функции матриц $U_h^{(r)}$, которые могут быть представлены рядами композиций [ст. V, § 2].

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ характеристические числа матрицы $V_j(b)$ и заметим, что в силу формулы Лагранжа — Сильвестра [ст. I, § 11] мы имеем (предполагаем, что все характеристические числа различны):

$$\lg V_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{(V_j-\omega_1)\ldots(V_j-\omega_{k-1})(V_j-\omega_{k+1})\ldots(V_j-\omega_n)}{(\omega_k-\omega_1)\ldots(\omega_k-\omega_{k-1})(\omega_k-\omega_{k+1})\ldots(\omega_k-\omega_n)}\lg\omega_k. \tag{67}$$

Так как определитель матрицы V_j равен $\omega_1\omega_2\ldots\omega_n$ и по хорошо известной теореме он отличен от нуля, то числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ также отличны от нуля. Следовательно, матрица V_j может оказаться особенной для функции $\lg V_j$ в том случае, когда по крайней мере два характеристических числа ω_h и ω_l этой матрицы совпадают и когда мы получаем в формуле (67) различные значения $\lg\omega_h$ и $\lg\omega_l$.

Запишем формулу (67) в виде

$$\lg V_j(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_j^{(k)}V_j^k(b), \tag{68}$$

где $\lambda_j^{(k)}$ — рациональные функции характеристических чисел матрицы $V_j(b)$ и линейные функции логарифмов этих характеристических чисел. Важно заметить, что числа $\lambda_j^{(k)}$ не зависят от выбора точки b. Действительно, матрицы $V_j(c)$ и $V_j(b)$ связаны равенством

$$V_j(c)=Y_b(c)^{-1}V_j(b)\,Y_b(c),$$

откуда следует, что матрицы $V_j(b)$ и $V_j(c)$ имеют одни и те же характеристические числа, и, следовательно, одни и те же значения параметров $\lambda_j^{(k)}$. После этих предварительных замечаний сформулируем основную теорему.

Теорема VI. *Существует единственное представление интегральной матрицы $Y_b(x)$ дифференциальной системы* (62):

$$Y_b(x) = G_b^{(j)}(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x), \tag{69}$$

обладающее следующими свойствами:

1°. *$G_b^{(j)}$ есть элементарная метаканоническая матрица,* т. е. *решение элементарной дифференциальной системы*

$$\frac{dG_b^{(j)}(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{s} \frac{G_b^{(j)}(x)\,W_j^{(r)}(b)}{(x-a_j)^r}, \tag{70}$$

где $W_j^{(1)}(b)$ — любое значение $W_j^{(1)}(b)$, даваемое формулами (66) *и* (67). *Для каждого выбора матрицы $W_j^{(1)}(b)$ мы получаем свое представление* (69).

2°. *Матрица $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ и матрица $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ — голоморфны в точке $x=a_j$.*

3°. *Матрица $W_j^{(1)}(b)$ — показательная матрица интегральной матрицы $Y_b(x)$ — есть целая функция матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$, и матрицы*

$$W_j^{(2)}(b),\ \ldots,\ W_j^{(s)}(b),\ \widetilde{Y}_b^{(j)}(x),\ \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$$

суть мероморфные функции матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$.

Доказательство. Положим

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = (x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\,Y_b(x), \quad \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} = Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)} \tag{71}$$

и рассмотрим матрицы $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$, которые на контуре (a_j) и внутри этого контура являются решениями интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_b^{(j)}(x) &= \widetilde{Y}_b^{(j)}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \left[I - \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\right] F_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x},\\ \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x) &= \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\left[I - \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}\right]\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}; \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

при этом контур (a_j) есть окружность круга с центром в a_j, не содержащего внутри и на границе никаких других особых точек системы (62). Хотя первое из интегральных уравнений (72) имеет форму, несколько отличную от формы уравнения (1) [переставлены множители $F(\mathfrak{U}\,|\,\xi)$ и $K(\mathfrak{U}\,|\,\xi x)$], результаты теоремы I с соответствующими видоизменениями коэффициентов разложений остаются в силе. Ядра

$$\frac{I - \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}}{\xi - x}\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j} \quad \text{и} \quad \frac{I - \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}}{\xi - x}\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j} \tag{73}$$

суть аналитические функции переменных x и ξ на окружности (a_j) и внутри нее, если исключить из рассмотрения точки

$$x = a_j \text{ и } \xi = a_j.$$

Так как матрица $W_j^{(1)}(b)$, определяемая формулами (66) и (68), является целой функцией дифференциальных матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$, то

матрицы $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\widetilde{Y}_b^{j}(x)^{-1}$, определяемые формулами (71), а также ядра (73) являются целыми функциями матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$.

Тогда в силу результатов предыдущего параграфа мы можем утверждать, что решения $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$ интегральных уравнений (72) суть мероморфные функции матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$. Матрицы $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$, рассматриваемые как функции переменной x, могут иметь в точке $x=a_j$ только однозначную особенность и, следовательно, представляются в окрестности этой точки рядами Лорана; очевидно, что функции $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$ обладают теми же свойствами.

Запишем разложение в ряд Лорана

$$F_b^{(j)}(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (x-a_j)^p\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} F_b^{(j)}(\xi)\,(\xi-a_j)^{-p-1}\,d\xi,$$

имеющее место в окрестности точки a_j; но если x находится внутри окружности (a_j), то в силу леммы мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - x}\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,d\xi = \sum_{p=1}^{\infty}(x-a_j)^p\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} F_b^{(j)}(\xi)\,(\xi-a_j)^{-p-1}\,d\xi.$$

Сопоставляя два последних равенства, получаем для всех точек $x \neq a_j$, находящихся внутри окружности (a_j), следующее равенство:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_b^{(j)}(x) &= F_b^{(j)}(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} F_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(x-a_j)^p}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} F^{(j)}(\xi)\,(\xi-a_j)^{p-1}\,d\xi. \end{aligned} \tag{74}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_b^{(j)}(x) &= \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}{}^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(x-a_j)^p}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\,(\xi-a_j)^{p-1}\,d\xi. \end{aligned} \tag{75}$$

Вводя еще обозначения

$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}_j(x)^{-1} &= I - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}F_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x},\\ \overset{*}{\overline{Z}}_j(x)^{-1} &= I - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

получаем из уравнений (72):

$$\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x) = \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)\,\overline{Z}_j(x)^{-1}, \quad \overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_b^{(j)}(x) = \overset{*}{\overline{Z}}_j(x)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}. \tag{77}$$

Матрицы (76), очевидно, голоморфные функции от x внутри окружности (a_j), обращающиеся в I в точке $x = a_j$. Следовательно, обратные матрицы также голоморфны в окрестности точки $x = a_j$ и обращаются в I в этой точке.

Из уравнений (77) мы находим

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)\,\overline{Z}_j(x), \quad \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} = \overset{*}{\overline{Z}}_j(x)\,\overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_b^{(j)}(x), \tag{78}$$

и, следовательно,

$$\overset{*}{\overline{Z}}_j(x)\,\overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_b^{(j)}(x)\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)\,\overline{Z}_j(x) = I,$$

откуда

$$\overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_b^{(j)}(x)\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x) = \overset{*}{\overline{Z}}_j(x)^{-1}\,\overline{Z}_j(x)^{-1}.$$

Матрица в правой части этого равенства в силу (76) разлагается в ряд по возрастающим степеням $(x - a_j)$ со свободным членом I; матрица в левой части разлагается в силу (74) и (75) в ряд по отрицательным степеням $(x - a_j)$. Следовательно, мы необходимо должны иметь

$$\overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_b^{(j)}(x) = \overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1}, \tag{79}$$

$$\overline{Z}_j(x) = \overset{*}{\overline{Z}}_j(x)^{-1} = I - \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x - a_j}{\xi - a_j}\,\frac{d\xi}{\xi - x}. \tag{80}$$

Положим теперь

$$\Gamma_b^{(j)}(x) = (x - a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x), \tag{81}$$

тогда из уравнения (78) следует

$$Y_b(x) = \Gamma_b^{(j)}(x)\,\overline{Z}_j(x). \tag{82}$$

Далее мы имеем

$$\Gamma_b^{(j)}(x) = Y_b(x)\,\overline{Z}_j(x)^{-1}, \tag{83}$$

откуда в силу (62) находим

$$\Gamma_b^{(j)}(x)^{-1}\,\frac{d\Gamma_b^{(j)}(x)}{dx} = \overline{Z}_j(x)\,Y_b(x)^{-1} \times$$

$$\times \left[Y_b(x) \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_h^{(r)}}{(x - a_h)^r}\,\overline{Z}_j(x)^{-1} - Y_b(x)\,\overline{Z}_j(x)^{-1}\,\frac{d\overline{Z}_j(x)}{dx}\,\overline{Z}_j(x)^{-1} \right] =$$

$$= \overline{Z}_j(x) \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_h^{(r)}}{(x - a_h)^r}\,\overline{Z}_j(x)^{-1} - \frac{d\overline{Z}_j(x)}{dx}\,\overline{Z}_j(x)^{-1}. \tag{84}$$

Так как матрицы $\overline{Z}_j(x)$ и $\overline{Z}_j(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x = a_j$, то правая часть предыдущего равенства не может иметь в этой точке никаких других особенностей, кроме полюса порядка не выше s. С другой стороны,

левая часть может быть представлена в виде

$$\Gamma_b^{(j)}(x)^{-1}\,\frac{d\Gamma_b^{(j)}(x)}{dx} = \overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1}\,(x - a_j)^{-W_j^{(1)}} \left\{ (x - a_j)^{W_j^{(1)}}\,\frac{W_j^{(1)}}{x - a_j}\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x) + \right.$$

$$\left. + (x - a_j)^{W_j^{(1)}}\,\frac{d\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)}{dx} \right\} = \frac{\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1}\,W_j^{(1)}\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)}{x - a_j} + \overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1}\,\frac{d\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)}{dx}. \tag{85}$$

Из формул (74), (75) и (79) непосредственно следует, что левая часть равенства (84) есть целая функция от $\dfrac{1}{x - a_j}$, в разложении которой отсутствует свободный член, и коэффициент при $\dfrac{1}{x - a_j}$ равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\; W_j^{(1)}(b)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi.$$

Но тогда очевидно, что обе части равенства (84) должны иметь вид конечной суммы

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{H_j^{(r)}}{(x - a_j)^r},$$

где, в частности,

$$H_j^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\; W_j^{(1)}(b)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi. \tag{86}$$

Мы доказали, следовательно, что матрица $\Gamma_b^{(j)}(x)$ есть решение элементарной системы

$$\frac{d\Gamma_b^{(j)}(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{s} \frac{\Gamma_b^{(j)}(x)\,H_j^{(r)}}{(x - a_j)^r}. \tag{87}$$

Для определения матриц $H_j^{(r)}$ имеем формулы

$$H_j^{(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \Gamma_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,\frac{d\Gamma_b^{(j)}(\xi)}{d\xi}\,(\xi - a_j)^{r-1}\,d\xi \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{88}$$

Чтобы получить представление (69), указанное в теореме, рассмотрим свободные члены

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{(\xi - a_j)}\,d\xi \tag{89}$$

разложений (74) и (75). Уравнение (79) показывает, что обе матрицы (89) неособенные (их определители отличны от нуля) и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi = \left\{ \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi \right\}^{-1}. \tag{90}$$

Построим теперь матрицу

$$G_b^{(j)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\Gamma_b^{(j)}(x)\int\limits_{(a_j)}\frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi; \tag{91}$$

она удовлетворяет в силу (87) дифференциальной системе

$$\frac{dG_b^{(j)}(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{s}\frac{G_b^{(j)}(x)\,W_j^{(r)}(b)}{(x-a_j)^r}, \tag{92}$$

где подстановки $W_j^{(r)}(b)$ определяются формулами

$$W_j^{(r)}(b) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)}\frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\, H_j^{(r)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)}\frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi \quad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{93}$$

В силу (86) и (90) находим для $W_j^{(1)}(b)$ то же самое значение, которое мы использовали в формулах (71) с самого начала нашего рассуждения.

С другой стороны, из уравнений (81), (74) и (91) следует, что

$$G_b^{(j)}(x) = (x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\left\{I + \sum_{p=1}^{\infty}C_j^{(p)}\frac{1}{(x-a_j)^p}\right\} = (x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\,\overline{G}_b^{(j)}(x). \tag{94}$$

Уравнения (92) и (94) показывают, что $G_b^{(j)}(x)$ есть метаканоническая интегральная матрица дифференциальной системы (92).

Положим, наконец,

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y}_b^{(j)}(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)}\frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\,\overline{Z}_j(x), \\ \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} &= \overline{Z}_j(x)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)}\frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi; \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

тогда из (82) в силу (90) и (91) следует

$$Y_b(x) = G_b^{(j)}(x)\,\overline{Y}_b^{(j)}(x). \tag{96}$$

Полученное представление интегральной нормированной матрицы $Y_b(x)$ системы (62) обладает всеми свойствами, указанными в теореме II. Действительно, свойство 1° мы только что доказали. Из формул (95), (76) и (80) непосредственно следует, что матрицы $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ голоморфны в окрестности точки a_j. Остается доказать свойство 3°. В силу (66) и (68) показательная подстановка $W_j^{(1)}(b)$ есть целая функция подстановок $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$. На основании (71) матрицы $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ обладают тем же свойством. Так как матрицы $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$ суть мероморфные функции матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$, то тем же свойством обладают: матрицы $\Gamma_b^{(j)}(x)$ и $\Gamma_b^{(j)}(x)^{-1}$ в силу равенств (74), (75) и (79), матрицы $\overline{Z}_j(x)$ и $\overline{Z}_j(x)^{-1}$ — в силу (76) и (80), матрицы $H_j^{(r)}$ — в силу (85) и (88), матрицы $W_j^{(r)}$ — в силу (93) и, наконец, матрицы $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ — в силу (95). Таким образом свойство 3° теоремы доказано.

Изучим теперь вопрос об единственности представления матрицы $Y_b(x)$ в виде (96).

Предположим, что мы имеем два представления этого вида, обладающие, кроме того, свойствами 1° и 2° теоремы II.

В эти два разложения входит одна и та же матрица $W_j^{(1)}(b)$; следовательно, в силу (71) и (94) мы имеем два представления

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \widetilde{G}_b^{(j)}(x)\,\overline{Y}_b^{(j)}(x); \qquad \widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \overline{\mathfrak{G}}_b^{(j)}(x)\,\mathfrak{Y}_b^{(j)}(x), \tag{97}$$

где

$$\overline{G}_b^{(j)}(x),\quad \overline{G}_b^{(j)}(x)^{-1},\quad \overline{\mathfrak{G}}_b^{(j)}(x),\quad \overline{\mathfrak{G}}_b^{(j)}(x)^{-1}$$

целые функции от $\dfrac{1}{x-a_j}$ со свободным членом I и

$$\overline{Y}_b^{(j)}(x),\ \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1},\ \mathfrak{Y}_b^{(j)}(x),\ \mathfrak{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$$

голоморфные функции от x в окрестности точки a_j. Но тогда из формулы (97) следует

$$\overline{\mathfrak{G}}_b^{(j)}(x)^{-1}\,\overline{G}_b^{(j)}(x) = \mathfrak{Y}_b^{(j)}(x)\,\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}.$$

Функция в левой части может быть разложена в окрестности точки $x = a_j$ по отрицательным степеням $(x - a_j)$ и правая часть — по положительным степеням, при этом свободные члены равны I. Отсюда следует

$$\overline{\mathfrak{G}}_b^{(j)}(x) = \overline{G}_b^{(j)}(x),\quad \mathfrak{Y}_b^{(j)}(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(x),$$

так что представление (69) единственно.

Замечание I. Очевидно, что если дифференциальные подстановки $U_h^{(r)}$ находятся в окрестности нулевых подстановок и если мы возьмем в формуле (66) значение $\lg V_j$, которое представляется рядом композиций матриц $U_h^{(r)}$ и обращается в нулевую матрицу при $U_h^{(r)} = 0$, то получим представление (69), тождественное с разложением (63), указанным выше (ст. V, § 3).

Замечание II. Пусть C — постоянная неособенная матрица, не зависящая от дифференциальных подстановок $U_h^{(r)}$ и от параметров $\lambda_j^{(r)}$, или мероморфная функция этих переменных. Рассмотрим решение $Y(x)$ дифференциальной системы (62):

$$Y(x) = CY_b(x), \tag{98}$$

тогда мы имеем разложение

$$Y(x) = G_j(x)\,\overline{Y}_j(x), \tag{99}$$

где: 1) $G_j(x)$ — элементарная метаканоническая матрица дифференциальной системы

$$\frac{dG_j(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{s}\frac{G_j(x)\,W_j^{(r)}}{(x-a_j)^r}, \tag{100}$$

причем

$$W_j^{(1)} = CW_j^{(1)}(b)C^{-1}; \tag{101}$$

2) матрицы $\overline{Y}_j(x)$ и $\overline{Y}_j(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x = a_j$; 3) матрицы $W_j^{(r)}$ $(r = 2, \ldots, s)$, $\overline{Y}_j(x)$ и $\overline{Y}_j(x)^{-1}$ суть мероморфные функции дифференциальных подстановок $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$. Если мы выбираем матрицу $W_j^{(1)}$ по формуле (101), то существует единственное разложение (99), удовлетворяющее условиям 1) и 2). Все это вытекает из следующих простых соот-

ношений, которые необходимо должны иметь место:

$$G_j(x) = CG_b^{(j)}(x)\,C^{-1}, \tag{102}$$

$$\overline{Y}_j(x) = C\overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{103}$$

$$W_j^{(r)} = CW_j^{(r)}(b)\,C^{-1}. \tag{104}$$

Замечание III. При соответствующем выборе матрицы C в формуле (98) мы можем получить метаканоническую матрицу $Y(x)$, отвечающую особой точке $x = a_j$.

Мы имеем

$$Y_b(x) = (x - a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)\,\overline{Z}_j(x) = \Gamma_b^{(j)}(x)\,\overline{Z}_j(x), \tag{105}$$

где $\Gamma_b^{(j)}(x)$ определяется формулой (74) и $\overline{Z}_j(x)$ — формулой (80). Возьмем теперь в качестве C матрицу

$$C = \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{F_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\right)^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi. \tag{106}$$

В результате находим матрицу

$$Z_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\,Y_b(x), \tag{107}$$

которая разлагается в произведение

$$Z_j(x) = \Gamma_j(x)\,\overline{Z}_j(x), \tag{108}$$

где матрица

$$\Gamma_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\,\Gamma_b^{(j)}(x) \tag{109}$$

удовлетворяет в силу (87) уравнению

$$\frac{d\Gamma_j(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{s} \frac{\Gamma_j(x)\,H_j^{(r)}}{(x - a_j)^r}. \tag{110}$$

Далее, мы имеем по (109), (81) и (86):

$$\Gamma_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\,(x - a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x) =$$

$$= (x - a_j)^{H_j^{(1)}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi\,\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x), \tag{111}$$

т. е. в силу (74) получаем представление

$$\Gamma_j(x) = (x - a_j)^{H_j^{(1)}}\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} C_j^{(p)}\,\frac{1}{(x - a_j)^p}\right]. \tag{112}$$

Матрица $\overline{Z}_j(x)$ в формуле (108) на основании (80) есть голоморфная функция x в точке a_j со свободным членом I. Но это свойство и равенства

(108), (100) и (112) характеризуют метаканоническую матрицу. Следовательно, матрица (107) есть метаканоническая матрица, отвечающая особой точке a_j.

Вспоминая, что матрицы $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$ суть мероморфные функции дифференциальных подстановок $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(r)}$, мы можем сделать заключение, что тем же свойством обладают метаканоническая матрица $Z_j(x)$, обратная матрица $Z_j(x)^{-1}$ и характеристические подстановки $H_j^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots, s)$ метаканонической матрицы. Далее мы видим, что матрица $\overline{Z}_j(x)$, определяемая формулой (80), есть голоморфная составляющая метаканонической матрицы; мы уже видели ранее, что $\overline{Z}_j(x)$, а также обратная матрица $\overline{Z}_j(x)^{-1}$, суть мероморфные функции $U_h^{(r)}$ и $\lambda_j^{(k)}$.

Полагая в формуле (107) $x = b$, заменяя затем b на x, находим

$$Z_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overset{*}{F}{}_x^{(j)}(\xi)}{\xi - a_j}\,d\xi, \tag{113}$$

откуда непосредственно следует, что метаканоническая матрица не зависит от выбора точки b.

Но тогда показательная подстановка этой матрицы, т. е. матрица $H_j^{(1)}$, также не зависит от выбора точки b. Докажем теперь, что голоморфная составляющая метаканонической матрицы, разлагающаяся в окрестности точки $x = a_j$ в ряд

$$\overline{Z}_j(x) = I + \sum_{p=1}^{\infty} A_j^{(p)}(x - a_j)^p, \tag{114}$$

также не может зависеть от выбора точки b. Построим для этого интегральное уравнение, которому удовлетворяет $Z_j(x)$.

Из формул (77), (79) и (80) следует

$$\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1} = \overline{Z}_j(x)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}, \quad \overline{Z}_j(x) = \overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x), \tag{115}$$

откуда

$$\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1} = \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} + [\overline{Z}_j(x) - I]\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}. \tag{116}$$

Применяя лемму, запишем равенства

$$\overline{Z}_j(x) - I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overline{Z}_j(\xi)}{\xi - x}\,\frac{x - a_j}{\xi - a_j}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{\overline{\Gamma}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)}{\xi - x}\,\frac{x - a_j}{\xi - a_j}\,d\xi, \tag{117}$$

$$\int\limits_{(a_j)} \frac{\overline{\Gamma}_b^{(j)}(\xi)^{-1}}{\xi - x}\,\frac{x - a_j}{\xi - a_j}\,d\xi = 0. \tag{118}$$

В силу этих формул равенство (116) мы можем записать в виде интегрального уравнения

$$\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1} = \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overline{\Gamma}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,[Y_b^{(j)}(\xi)\,\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} - I]\,\frac{x - a_j}{\xi - a_j}\,\frac{d\xi}{\xi - x}. \tag{119}$$

Умножая это равенство на $Y_b^{(j)}(x)$ справа, находим

$$\overline{\Gamma}_b^{(j)}(x)^{-1}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x) =$$
$$= I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overline{\Gamma}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,[\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi) - \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)]\,\frac{x - a_j}{\xi - a_j}\,\frac{d\xi}{\xi - x}, \tag{120}$$

т. е. в силу (115)

$$\overline{Z}_j(x)=I+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\overline{Z}_j(\xi)\,[I-\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)]\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{121}$$

Матрица

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)=Y_b(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\,Y_b(x) \tag{122}$$

есть мероморфная функция дифференциальных подстановок $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$, не зависящая от параметра b. Действительно, так как матрицы $Z_1(x)$ и $Y_b(x)$ — два решения одной и той же дифференциальной системы, то имеет место соотношение

$$Y_b(x)=Z_j(b)^{-1}\,Z_j(x); \tag{123}$$

с другой стороны, из (86) и (113) следует

$$W_j^{(1)}(b)=Z_j(b)^{-1}\,H_j^{(1)}\,Z_j(b). \tag{124}$$

Но тогда тождество (122) дает

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)=$$

$$=Z_j(\xi)^{-1}\,Z_j(b)\,Z_j(b)^{-1}(\xi-a_j)^{H_j^{(1)}}\,Z_j(b)\,Z_j(b)^{-1}(x-a_j)^{-H_j^{(1)}}\times$$

$$\times Z_j(b)\,Z_j(b)^{-1}\,Z_j(x)=Z_j(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{H_j^{(1)}}(x-a_j)^{-H_j^{(1)}}\,Z_j(x), \tag{125}$$

и так как $Z_j(x)$ и $H_j^{(1)}$ не зависят от параметра b, то матрица (125) не может зависеть от b.

Следовательно, уравнение (121) эквивалентно такому:

$$\overline{Z}_j(x)=$$

$$=I+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\overline{Z}_j(\xi)\left[I-Z_j(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{H_j^{(1)}}(x-a_j)^{-H_j^{(1)}}\,Z_j(x)\right]\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{126}$$

Мы получаем также аналогичные уравнения

$$\overline{Z}_j(x)^{-1}=I+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}[I-\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)]\,\overline{Z}_j(\xi)^{-1}\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}, \tag{127}$$

$$\overline{Z}_j(x)^{-1}=$$

$$=I+\frac{1}{2\pi i}\int\left[I-Z_j(x)^{-1}(x-a_j)^{H_j^{(1)}}(\xi-a_j)^{-H_j^{(1)}}\,Z_j(\xi)\right]\overline{Z}_j(\xi)^{-1}\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{128}$$

Матрица (122) не зависит от выбора параметра b. Положим в этой матрице $b=\xi$; мы получим, что

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)^{-1}\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)=\left(\frac{\xi-a_j}{x-a_j}\right)^{W_j^{(1)}(\xi)}Y_\xi(x) \tag{129}$$

есть известная функция x и ξ и целая функция дифференциальных подстановок $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$.

Следовательно, голоморфная составляющая метаканонической матрицы может быть получена как решение интегрального уравнения

$$\overline{Z}_j(x)=I+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\overline{Z}_j(\xi)\left[I-\left(\frac{\xi-a_j}{x-a_j}\right)^{W_j^{(1)}(\xi)}Y_\xi(x)\right]\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}, \tag{130}$$

и очевидно, что это решение не зависит от b.

Матрица $\overline{Z}_j(x)^{-1}$ также может быть получена как решение интегрального уравнения

$$\overline{Z}_j(x)^{-1}=$$

$$=I+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\left[I-Y_\xi(x)^{-1}\left(\frac{\xi-a_j}{x-a_j}\right)^{-W_j^{(1)}(\xi)}\right]\overline{Z}_j(\xi)^{-1}\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{131}$$

Так как матрица $Z_j(x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (62), а матрица $\Gamma_j(x)$ — системе (110), то матрица $\overline{Z}_j(x)$ в силу (108) есть решение системы

$$\frac{d\overline{Z}_j(x)}{dx}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\overline{Z}_j(x)\,U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r}-\sum_{r=1}^{s}\frac{H_j^{(r)}\,\overline{Z}_j(x)}{(x-a_j)^r}. \tag{132}$$

Отсюда легко получить следующие выражения характеристических подстановок метаканонической матрицы

$$H_j^{(r)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\sum_{k=1}^{s}\frac{\overline{Z}_j(x)\,U_j^{(k)}\,\overline{Z}_j(x)^{-1}}{(x-a_j)^k}(x-a_j)^{r-1}\,dx \qquad (r=1,2,\ldots,s), \tag{133}$$

в частности, из этих выражений следует, что $H_j^{(r)}$ не зависят от b и являются мероморфными функциями от $U_h^{(r)}$ и $\lambda_j^{(k)}$.

Рассмотрим в качестве иллюстрации теории один частный пример. Предположим, что

$$U_j^{(r)}=0 \text{ для } r>1,\quad \overline{U}_j^{(1)}=U_j. \tag{134}$$

В этом случае из формул (133) следует, что

$$H_j^{(r)}=0 \text{ для } r>1,\quad H_j^{(1)}=U_j \tag{135}$$

и, следовательно,

$$\Gamma_j(x)=(x-a_j)^{U_j}, \tag{136}$$

$$Z_j(x)=(x-a_j)^{U_j}\,\overline{Z}_j(x), \tag{137}$$

$$Y_b(x)=Z_j(b)^{-1}Z_j(x)=Z_j(b)^{-1}(x-a_j)^{U_j}\,\overline{Z}_j(x)=(x-a_j)^{W_j(b)}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{138}$$

где

$$W_j(b)=Z_j(b)^{-1}\,U_j Z_j(b), \tag{139}$$

$$\overline{Y}_b^{(j)}(x)=Z_j(b)^{-1}\,\overline{Z}_j(x). \tag{140}$$

Функция $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$, очевидно, голоморфна в точке $x=a_j$ и

$$\overline{Y}_b^{(j)}(a_j)=Z_j(b)^{-1},\quad Z_j(b)=\overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1}. \tag{141}$$

Заметим еще, что

$$Z_j(x) = Z_j(b)\, Y_b(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1}\, Y_b(x), \tag{142}$$

$$\overline{Z}_j(x) = Z_j(b)\, \overline{Y}_b^{(j)}(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1}\, \overline{Y}_b^{(j)}(x). \tag{143}$$

Рассмотрим теперь интегральную нормированную матрицу

$$Y_b(x) = (x-a_j)^{W_j(b)}\, \overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{144}$$

однозначная составляющая которой

$$\widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{145}$$

а также обратная матрица суть голоморфные функции в точке $x = a_j$. Применим к матрице (144) теорию этого параграфа. Нужно решить интегральные уравнения (72), последнее из которых таково:

$$\overset{*}{F}_b^{(j)}(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\,[I - \overline{Y}_b^{(j)}(\xi)\, \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}]\, \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\, \frac{d\xi}{\xi-x}; \tag{146}$$

решение этого уравнения, очевидно, есть голоморфная функция от x в точке a_j и его легко найти. Действительно, точка $\xi = a_j$ есть единственная особая точка подинтегральной функции в правой части (146). Применяя теорему о вычетах, мы находим

$$\overset{*}{F}_b^{(j)}(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} + \overset{*}{F}_b^{(j)}(a_j)\,[I - \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)\, \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}]\, \frac{x-a_j}{a_j-x} =$$

$$= \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} - \overset{*}{F}_b^{(j)}(a_j) + \overset{*}{F}_b^{(j)}(a_j)\, \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)\, \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}.$$

Полагая в этом равенстве $x = a_j$, мы получаем

$$\overset{*}{F}_b^{(j)}(a_j) = \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1} \tag{147}$$

и, следовательно,

$$\overset{*}{F}_b^{(j)}(x) = 2\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1} - \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1}. \tag{148}$$

Аналогичным путем находим решение

$$F_b^{(j)}(x) = 2\overline{Y}_b^{(j)}(x) - \overline{Y}_b^{(j)}(a_j) \tag{149}$$

первого из интегральных уравнений (72).

Формула (80) позволяет получить голоморфную составляющую метаканонической матрицы

$$Z_j(x) = I - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, \overline{Y}_b^{(j)}(\xi)\, \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\, \frac{d\xi}{\xi-x};$$

так как подынтегральная функция имеет два полюса первого порядка, $\xi = a_j$ и $\xi = x$, то мы находим

$$\overline{Z}_j(x) = I + \overset{*}{F}_b^{(j)}(a_j)\, \overline{Y}_b^{(j)}(a_j) - \overset{*}{F}_b^{(j)}(x)\, \overline{Y}_b^{(j)}(x) =$$

$$= I + I - 2I + \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1}\, \overline{Y}_b^{(j)}(x),$$

т. е.

$$\overline{Z}_j(x) = \overline{Y}_b^{(j)}(a_j)^{-1}\, \overline{Y}_b^{(j)}(x). \tag{150}$$

Полученная формула, как и следовало ожидать, совпадает с (143).

В заключение этого параграфа дадим для общего случая иррегулярной системы (62) выражение производной от голоморфной составляющей метаканонической матрицы. Для этой производной мы уже имеем формулу (132).

Теперь будем исходить из формулы (80)

$$\overline{Z}_j(x) = I - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\, \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\, \frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{151}$$

В силу

$$\frac{x-a_j}{(\xi-a_j)(\xi-x)} = \frac{1}{\xi-x} - \frac{1}{\xi-a_j}$$

имеем

$$\overline{Z}_j(x) = I + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi) \left[\frac{1}{\xi-a_j} - \frac{1}{\xi-x}\right] d\xi,$$

$$\frac{d\overline{Z}_j(x)}{dx} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\, \frac{d\xi}{(\xi-x)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\, d\left(\frac{1}{\xi-x}\right),$$

и после интегрирования по частям получаем

$$\frac{d\overline{Z}_j(x)}{dx} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \frac{d\overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)}{d\xi}\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi-x} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, \frac{d\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{152}$$

§ 4. Решения рассматриваемых интегральных уравнений как функции точки нормирования

В предыдущем параграфе мы видели, что уравнения (72) играют важную роль в проблеме аналитической характеристики особенностей иррегулярных матриц. Мы доказали, что решения $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}_b^{(j)}(x)$ этих уравнений суть мероморфные функции матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{\varkappa}$. Эти матрицы, рассматриваемые как функции переменной x, являются однозначными функциями x в окрестности точки a_j и разлагаются в ряды Лорана. Изучим кратко этот вопрос. Вспоминая формулу (75)

$$\overset{*}{\Gamma}_b^{(j)}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x-a_j)^p}\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, (\xi-a_j)^{p-1}\, d\xi \tag{153}$$

и вводя обозначение

$$\overset{*}{H}_b^{(j)}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (x-a_j)^p\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(a_j)} \overset{*}{F}_b^{(j)}(\xi)\, (\xi-a_j)^{-p-1}\, d\xi, \tag{154}$$

получаем

$$\overset{*}{F}_b^{(j)}(x) = \overset{*}{\Gamma}_b^{(j)}(x) + \overset{*}{H}_b^{(j)}(x). \tag{155}$$

В силу формул (77), (79) и (80) мы имеем

$$\overset{*}{\Gamma}_b^{(j)}(x) = \overline{Z}_j(x)\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}, \quad \overset{*}{\Gamma}_b^{(j)}(x)\, \widetilde{Y}_b^{(j)}(x) = \overline{Z}_j(x); \tag{156}$$

но тогда из (80) следует

$$\bar{Z}_j(x) = I - \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\,\tilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x} =$$

$$= I - \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \bar{Z}_j(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{H}{}_b^{(j)}(\xi)\,\tilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\cdot\frac{d\xi}{\xi-x} =$$

$$= I + I - \bar{Z}_j(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{H}{}_b^{(j)}(\xi)\,\tilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x};$$

затем получаем формулу

$$\bar{Z}_j(x) = I - \frac{1}{4\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{H}{}_b^{(j)}(\xi)\,\tilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\cdot\frac{d\xi}{\xi-x}, \tag{157}$$

которую имели в виду.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как зависят матрицы $F_b^{(j)}(x)$ и $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$ от точки нормирования b.

Второе из уравнений (72) может быть записано в виде:

$$\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x) = Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\times$$

$$\times\left[I - (\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(\xi)\,Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\right]\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{158}$$

Заменим в этом уравнении параметр b через c и матрицу $W_j^{(1)}(b)$ через

$$W_j^{(1)}(c) = Y_c(b)\,W_j^{(1)}(b)\,Y_c(b)^{-1}, \tag{159}$$

причем последняя матрица есть одно из возможных значений логарифма интегральной подстановки интегральной нормированной матрицы в точке c. Преобразуя полученное уравнение с учетом очевидных формул

$$Y_c(x) = Y_c(b)\,Y_b(x), \quad Y_c(x)^{-1} = Y_b(x)^{-1}Y_c(b)^{-1}, \tag{160}$$

мы находим

$$\overset{*}{F}{}_c^{(j)}(x) = Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}Y_c(b)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_c^{(j)}(\xi)\left[I - Y_c(b)(\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\, Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}Y_c(b)^{-1}\right]\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\cdot\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{161}$$

С другой стороны, полагая

$$\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)\,Y_c(b)^{-1} = \tilde{F}_j(x), \tag{162}$$

будем иметь для $\tilde{F}_j(x)$ в силу (158) интегральное уравнение

$$\tilde{F}_j(x) = Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}Y_c(b)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \tilde{F}_j(\xi)\,Y_c(b)\left[I - (\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(\xi)\,Y_b(x)^{-1}(x-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\right]\times$$

$$\times\, Y_c(b)^{-1}\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}, \tag{163}$$

тождественное с интегральным уравнением (161) для функции $F_c^{(j)}(x)$.

Отсюда выводим

$$\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)\,Y_c(b)^{-1} = \overset{*}{F}{}_c^{(j)}(x), \quad \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x) = \overset{*}{F}{}_c^{(j)}(x)\,Y_c(b). \tag{164}$$

В силу последнего уравнения заключаем, что матрица $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$, рассматриваемая как функция параметра b, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет матрица $Y_c(b)$, т. е. уравнению

$$\frac{d\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)}{db} = \sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)\,U_h^{(r)}}{(b-a_h)^r}. \tag{165}$$

Мы получим аналогичный результат для матрицы $F_b^{(j)}(x)$. Имеем интегральное уравнение

$$F_b^{(j)}(x) = (x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\,Y_b(x) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\left[I - (x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\,Y_b(x)\,Y_b(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\right]F_b^{(j)}(\xi)\times$$

$$\times\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{166}$$

Заменяя b через c и пользуясь формулами (159) и (160), находим

$$F_c^{(j)}(x) = Y_c(b)\,(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(x) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\left[I - Y_c(b)(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(x)\,Y_b(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}Y_c(b)^{-1}\right]\times$$

$$\times F_c^{(j)}(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}; \tag{167}$$

вводя матрицу

$$Y_c(b)\,F_b^{(j)}(x) = \tilde{\tilde{F}}_j(x),$$

мы будем иметь в силу (166) уравнение

$$\tilde{\tilde{F}}_j(x) = Y_c(b)\,(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(x) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} Y_c(b)\left[I - (x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(x)\,Y_b(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}\right]\times$$

$$\times\, Y_c(b)^{-1}\,\tilde{\tilde{F}}_j(\xi)\,\frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x};$$

сравнивая это уравнение с уравнением (167), получаем

$$Y_c(b)\,F_b^{(j)}(x) = F_c^{(j)}(x), \quad F_b^{(j)}(x) = Y_c(b)^{-1} F_c^{(j)}(x). \tag{168}$$

Последняя из этих формул показывает, что матрица $F_b^{(j)}(x)$, рассматриваемая как функция точки нормирования b, удовлетворяет такой же дифференциальной системе, как и матрица $Y_c(b)^{-1}$, т. е. системе

$$\frac{dF_b^{(j)}(x)}{db} = -\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s} \frac{U_h^{(r)} F_b^{(j)}(x)}{(b-a_h)^r}. \tag{169}$$

Таким образом, мы получили следующий результат: матрица $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$, рассматриваемая как функция точки b, является решением данной системы (62), и матрица $F_b^{(j)}(x)$ является решением сопряженной системы (169).

Далее, мы видим, что в силу формул (164) и (168) матрица

$$\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)\,F_b^{(j)}(x) = \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)\,Y_c(b)\,Y_c(b)^{-1} F_c^{(j)}(x) = \overset{*}{F}{}_c^{(j)}(x)\,F_c^{(j)}(x) \tag{170}$$

не зависит от выбора точки b.

Положим в последней формуле (164) $c = x$; тогда получим

$$\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x) = \overset{*}{F}{}_x^{(j)}(x)\,Y_x(b). \tag{171}$$

Представляет интерес изучение матрицы $\overset{*}{F}{}_x^{(j)}(x)$. Построим интегральное уравнение для этой матрицы. Полагая в уравнении (158) $b = x$, находим

$$\overset{*}{F}{}_x^{(j)}(x) = (x-a_j)^{W_j^{(1)}(x)} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_x^{(j)}(\xi)\left[I - (\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(x)} Y_x(\xi)\,(x-a_j)^{W_j^{(1)}(x)}\right] \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x};$$

но в силу (164) имеем

$$\overset{*}{F}{}_x^{(j)}(\xi) = \overset{*}{F}{}_\xi^{(j)}(\xi)\,Y_\xi(x)$$

и, следовательно, получаем требуемое интегральное уравнение в виде

$$\overset{*}{F}{}_x^{(j)}(x) = (x-a_j)^{W_j^{(1)}(x)} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \overset{*}{F}{}_\xi^{(j)}(\xi)\,Y_\xi(x)\left[I - (\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(x)} Y_x(\xi)\,(x-a_j)^{W_j^{(1)}(x)}\right] \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{172}$$

Умножая обе части этого уравнения на $(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(x)}$ и вводя новую матрицу $\hat{F}_j(x)$ по формуле

$$\hat{F}_j(x) = \overset{*}{F}{}_x^{(j)}(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(x)}, \tag{173}$$

мы представим интегральное уравнение (172) так:

$$\hat{F}_j(x) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \hat{F}_j(\xi)\,(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(\xi)}\,Y_\xi(x)\left[(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(x)} - \right. \\ \left. - (\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(x)}\,Y_x(\xi)\right] \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x} \tag{174}$$

или, используя соотношение (159), запишем это уравнение в виде

$$\hat{F}_j(x) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} \hat{F}_j(\xi)\left[Y_\xi(x)\left(\frac{\xi-a_j}{x-a_j}\right)^{W_j^{(1)}(x)} - I\right] \frac{x-a_j}{\xi-a_j}\,\frac{d\xi}{\xi-x}. \tag{175}$$

§ 5. Несколько замечаний о вычислении знаменателя Фредгольма

Наши предыдущие рассуждения основывались на изучении интегральных уравнений (72). Последнее из этих уравнений является частным случаем интегрального уравнения

$$F(x) = L(x)^{-1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} F(\xi)\,\frac{I - L(\xi)\,L(x)^{-1}}{\xi - x}\,\frac{x-a}{\xi-a}\,d\xi, \tag{176}$$

где мы полагали

$$F(x) = \overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x), \quad L(x) = \tilde{Y}_b^{(j)}(x) = (x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\,Y_b(x), \quad a = a_j. \tag{177}$$

Матрица $\tilde{Y}_b^{(j)}(x)$ обладает следующими свойствами: она является целой функцией дифференциальных матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$; с другой стороны, она является аналитической функцией x, однозначной в окрестности изолированной особой точки a_j, и, следовательно, разлагается в этой окрестности в ряд Лорана. Первое свойство позволило изучить решение $\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)$ уравнения (72) как функцию матриц $U_h^{(r)}$ и параметров $\lambda_j^{(k)}$. Используем теперь второе свойство функции $\tilde{Y}_b^{(j)}(x)$. Следовательно, поставим вопрос о решении интегрального уравнения (176), считая матрицу $F(x)$ неизвестной функцией и матрицу $L(x)$ — заданной аналитической функцией x. Предположим еще, что $L(x)$ — однозначная функция x в окрестности точки $x = a$ и определитель матрицы $L(x)$ не обращается в нуль в указанной окрестности (матрица $\tilde{Y}_b^{(j)}(x)$, очевидно, обладает этими свойствами). Тогда обратная матрица $L(x)^{-1}$ будет существовать в окрестности точки $x = a$ и будет однозначной аналитической функцией x в этой окрестности.

Пусть

$$L(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p(x-a)^p, \quad L(x)^{-1} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \overset{*}{C}_p(x-a_p)^p \tag{178}$$

разложения матриц $L(x)$ и $L(x)^{-1}$ в ряд Лорана.

Пусть еще

$$F(x) = L(x)^{-1} + \int_{(a)} F(\xi)\,K(\xi x)\,d\xi \tag{179}$$

наше интегральное уравнение, и значит его ядро:

$$K(\xi x) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{I - L(\xi)\,L(x)^{-1}}{\xi - x}\,\frac{x-a}{\xi-a} = -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{L(\xi) - L(x)}{\xi - x}\,L(x)^{-1}\,\frac{x-a}{\xi-a}. \tag{180}$$

Легко указать разложение этого ядра в ряд Лорана; мы имеем

$$\frac{L(\xi)-L(x)}{\xi-x}=\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p \frac{(\xi-a)^p-(x-a)^p}{(\xi-a)-(x-a)}=$$

$$=-\sum_{p=-\infty}^{-1} C_p\left[(\xi-a)^p(x-a)^{-1}+(\xi-a)^{p+1}(x-a)^{-2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(\xi-a)^{-2}(x-a)^{p+1}+(\xi-a)^{-1}(x-a)^p\right]+\sum_{p=1}^{\infty} C_p\left[(\xi-a)^{p-1}+\right.$$

$$\left.+(\xi-a)^{p-2}(x-a)+\ldots+(\xi-a)(x-a)^{p-2}+(x-a)^{p-1}\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{L(\xi)-L(x)}{\xi-x}L(x)^{-1}=-\sum_{p=-\infty}^{-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_p\overset{*}{C}_q\left[(\xi-a)^p(x-a)^{q-1}+\right.$$

$$+(\xi-a)^{p+1}(x-a)^{q-2}+\ldots+(\xi-a)^{-2}(x-a)^{q+p+1}+$$

$$\left.+(\xi-a)^{-1}(x-a)^{q+p}\right]+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p\overset{*}{C}_q\left[(\xi-a)^{p-1}(x-a)^q+\right.$$

$$\left.+(\xi-a)^{p-2}(x-a)^{q+1}+\ldots+(\xi-a)(x-a)^{q+p-2}+(x-a)^{q+p-1}\right].$$

Итак, мы находим требуемое разложение

$$\frac{L(\xi)-L(x)}{\xi-x}L(x)^{-1}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} D_{pq}(\xi-a)^p(x-a)^q, \tag{181}$$

где

$$D_{pq}=\sum_{r=p+1}^{\infty} C_r\overset{*}{C}_{p+q+1-r}=C_{p+1}\overset{*}{C}_q+C_{p+2}\overset{*}{C}_{q-1}+C_{p+3}\overset{*}{C}_{q-2}+\ldots, \text{ если } p\geqslant 0; \tag{182}$$

$$D_{pq}=-\sum_{r=p}^{-\infty} C_r\overset{*}{C}_{p+q+1-r}=-C_p\overset{*}{C}_{q+1}-C_{p-1}\overset{*}{C}_{q+2}-C_{p-2}\overset{*}{C}_{q+3}-\ldots,$$
$$\text{если } p<0.$$

Докажем сходимость рядов (182). Для коэффициентов рядов Лорана (178) имеют место оценки типа

$$|C_p|<\|AR^{-p}\|,\quad |\overset{*}{C}_p|<\|AR^{-p}\|,$$

где A и R — положительные числа, зависящие от выбора функций $L(x)$, $L(x)^{-1}$. С другой стороны, имеют место неравенства

$$|C_{-p}|<\|B\rho^p\|,\quad |\overset{*}{C}_p|<\|B\rho^p\|,$$

где положительное число $\rho<R$ выбирается произвольно и B — положительное число, зависящее от выбора числа ρ и функций $L(x)$, $L(x)^{-1}$. Очевидно, что ряды (182) мажорируются сходящимися рядами

$$\sum_{r=p+1}^{\infty}\left\|\frac{ABn}{\rho^{p+q+1}}\left(\frac{\rho}{R}\right)^r\right\| \quad\text{и}\quad \sum_{r=p}^{-\infty}\left\|\frac{ABn}{R^{p+q+1}}\left(\frac{R}{\rho}\right)^r\right\|,$$

откуда и следует наше утверждение.

Из формулы (181) можно получить оценки коэффициентов D_{pq}:

$$\left.\begin{aligned}
|D_{pq}|&<\left\|\frac{M}{R^{p+q}}\right\|, &&\text{если } p\geqslant 0,\ q\geqslant 0;\\
|D_{pq}|&<\left\|\frac{M}{R^p\rho^q}\right\|, &&\text{если } p\geqslant 0,\ q<0;\\
|D_{pq}|&<\left\|\frac{M}{\rho^p R^q}\right\|, &&\text{если } p<0,\ q\geqslant 0;\\
|D_{pq}|&<\left\|\frac{M}{\rho^{p+q}}\right\|, &&\text{если } p<0,\ q<0,
\end{aligned}\right\} \tag{183}$$

где положительное число ρ выбирается произвольно и положительные числа R и M зависят от выбора ρ и функций $L(x)$, $L(x)^{-1}$. Применяя для решения уравнения (176) метод Фредгольма, получим решение этого уравнения в виде отношения, знаменатель которого обозначим через D. Разумеется, может случиться так, что D обращается в нуль.

Нашей основной целью является вычисление знаменателя D. Будем исходить из формулы (39) § 2

$$\lg D=-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\int\limits_{(a)}\ldots\int\limits_{(a)}\sigma\left(k(\xi_1\xi_2)k(\xi_2\xi_3)\ldots k(\xi_\mu\xi_1)\right)d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_\mu. \tag{184}$$

Известно, что ряд в правой части не всегда сходится, но если мы построим знаменатель D с помощью формулы

$$D=e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\int\limits_{(a)}\ldots\int\limits_{(a)}\sigma\left(k(\xi_1\xi_2)k(\xi_2\xi_3)\ldots k(\xi_\mu\xi_1)\right)d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_\mu}, \tag{185}$$

записывая сначала формально разложение в ряд правой части и затем группируя члены одного и того же измерения относительно k, то получим абсолютно сходящийся ряд. Условимся понимать формулу (185) в этом смысле. Мы видим в таком случае, что для образования знаменателя D достаточно оценить интегралы

$$\int\limits_{(a)}\ldots\int\limits_{(a)}\sigma\left(k(\xi_1\xi_2)k(\xi_2\xi_3)\ldots k(\xi_\mu\xi_1)\right)d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_\mu.$$

Формулы (180) и (181) дают

$$k(\xi_1\xi_2)k(\xi_2\xi_3)\ldots k(\xi_\mu\xi_1)=$$

$$=\frac{(-1)^\mu}{(2\pi i)^\mu}\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{q_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1q_2}(\xi-a)^{p_1}(\xi-a)^{q_2}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\sum_{q_3=-\infty}^{\infty} D_{p_2q_3}(\xi_2-a)^{p_2}(\xi_3-a)^{q_3}\ldots$$

$$\ldots\sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{q_1=-\infty}^{\infty} D_{p_\mu q_1}(\xi_\mu-a)^{p_\mu}(\xi_1-a)^{q_1}=$$

$$=\frac{(-1)^\mu}{(2\pi i)^\mu}\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{q_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{q_\mu=-\infty}^{\infty} D_{p_1q_2}D_{p_2q_3}\ldots D_{p_\mu q_1}\times$$

$$\times(\xi_1-a)^{p_1+q_1}(\xi_2-a)^{p_2+q_2}\ldots(\xi_\mu-a)^{p_\mu+q_\mu}.$$

Применяя теорему Коши, получим

$$\int\limits_{(a)} \ldots \int\limits_{(a)} k(\xi_1\xi_2)\, k(\xi_2\xi_3) \ldots k(\xi_\mu\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_\mu =$$

$$= (-1)^\mu \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} \ldots D_{p_\mu,\,-p_1-1}, \qquad (186)$$

где ряд в правой части сходится абсолютно; действительно, если функции $L(x)$ и $L(x)^{-1}$ голоморфны на окружности (a) круга с центром в точке a и внутри этого круга, за исключением точки a, то все ряды

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_{pq} (\xi - a)^p (x - a)^q,$$

рассматриваемые как функции точки x или как функции точки ξ, сходятся равномерно и абсолютно на этом контуре.

Следовательно, мы имеем

$$\int\limits_{(a)} \ldots \int\limits_{(a)} \sigma\left(k(\xi_1\xi_2)\, k(\xi_2\xi_3) \ldots k(\xi_\mu\xi_1)\right) d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_\mu =$$

$$= (-1)^\mu \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty} \sigma\left(D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} \ldots D_{p_\mu,\,-p_1-1}\right). \qquad (187)$$

Можно еще несколько упростить выражение (186). Для этого рассмотрим суммы

$$\left.\begin{aligned} S_{pq} &= C_{p+1}\overset{*}{C}_{-q-1} + C_{p+2}\overset{*}{C}_{-q-2} + C_{p+3}\overset{*}{C}_{-q-3} + \ldots = \sum_{r=1}^{\infty} C_{p+r}\overset{*}{C}_{-q-r}, \\ \overline{S}_{pq} &= -C_p\overset{*}{C}_{-q} - C_{p-1}\overset{*}{C}_{-q+1} - C_{p-2}\overset{*}{C}_{-q+2} - \ldots = -\sum_{r=0}^{-\infty} C_{p+r}\overset{*}{C}_{-q-r}. \end{aligned}\right\} \qquad (188)$$

Заметим сначала, что в силу равенств

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{p+r}\overset{*}{C}_{-q-r} = \delta_p^q I = \begin{cases} I, & \text{если } p = q, \\ 0, & \text{если } p \neq q, \end{cases} \qquad (189)$$

которые непосредственно вытекают из (178), мы имеем

$$\begin{aligned} S_{pq} &= \overline{S}_{pq}, \quad \text{если } p \neq q; \\ S_{pp} &= \overline{S}_{pp} + I. \end{aligned} \qquad (190)$$

Сравнивая (182) и (188), находим:

$$\begin{aligned} D_{p,\,-q-1} &= S_{pq}, \quad \text{если } p \geqslant 0; \\ D_{p,\,-q-1} &= \overline{S}_{pq}, \quad \text{если } p < 0. \end{aligned} \qquad (191)$$

Мы получаем теперь в силу (189) следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_{pr}S_{rq} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} [C_{p+1}\overset{*}{C}_{-r-1} + C_{p+2}\overset{*}{C}_{-r-2} + \ldots] \times \\ &\qquad \times [C_{r+1}\overset{*}{C}_{-q-1} + C_{r+2}C_{-q-2} + \ldots] = S_{pq}, \\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \overline{S}_{pr}\overline{S}_{rq} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} [C_p\overset{*}{C}_{-r} + C_{p-1}\overset{*}{C}_{-r+1} + \ldots] \times \\ &\qquad \times [C_r\overset{*}{C}_{-q} + C_{r-1}\overset{*}{C}_{-q+1} + \ldots] = -\overline{S}_{pq}, \\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_{pr}\overline{S}_{rq} &= -\sum_{r=-\infty}^{\infty} [C_{p+1}\overset{*}{C}_{-r-1} + C_{p+2}\overset{*}{C}_{-r-2} + \ldots] \times \\ &\qquad \times [C_r\overset{*}{C}_{-q} + C_{r-1}\overset{*}{C}_{-q+1} + \ldots] = 0, \\ \sum_{r=-\infty}^{\infty} \overline{S}_{pr}S_{rq} &= -\sum_{r=-\infty}^{\infty} [C_p\overset{*}{C}_{-r} + C_{p-1}\overset{*}{C}_{-r+1} + \ldots] \times \\ &\qquad \times [C_{r+1}\overset{*}{C}_{-q-1} + C_{r+2}\overset{*}{C}_{-q-2} + \ldots] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (192)$$

Рассмотрим далее тождество

$$\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} = \sum_{p_2=0}^{\infty} S_{p_1p_2}S_{p_2p_3} + \sum_{p_2=-1}^{-\infty} S_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_3}, \text{ если } p_1 \geqslant 0. \qquad (193)$$

Но

$$\overline{S}_{p_2p_3} = S_{p_2p_3}, \quad \text{если } p_3 \geqslant 0,\ p_2 < 0$$

и, следовательно,

$$\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} = \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} S_{p_1p_2}S_{p_2p_3} = S_{p_1p_3} \text{ если } p_1 \geqslant 0,\ p_3 \geqslant 0; \qquad (194)$$

с другой стороны, в случае $p_3 < 0$ мы должны заменить в последней сумме правой части тождества (193) $\overline{S}_{p_3p_2}$ на $S_{p_3p_3} - I$ и, следовательно,

$$\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} = \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} S_{p_1p_2}S_{p_2p_3} - S_{p_1p_3} = S_{p_1p_3} - S_{p_1p_3} = 0, \qquad (195)$$

если $p_1 \geqslant 0,\ p_3 < 0$.

Аналогичным путем находим

$$\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} = \sum_{p_2=0}^{\infty} \overline{S}_{p_1p_2}S_{p_2p_3} + \sum_{p_2=-1}^{-\infty} \overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_3} = 0; \qquad (196)$$

если $p_1 < 0,\ p_3 \geqslant 0$,

$$\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1} D_{p_2,\,-p_3-1} = \sum_{p_2=0}^{\infty} \overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_3} + \sum_{p_2=-1}^{-\infty} \overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_3} = -\overline{S}_{p_1p_3}, \qquad (197)$$

если $p_1 < 0,\ p_3 < 0$.

Теперь легко упростить выражение (186). В случае $\mu = 1$ непосредственно имеем:

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_1-1} = \sum_{p_1=0}^{\infty} S_{p_1p_1} + \sum_{p_1=-1}^{-\infty} \overline{S}_{p_1p_1}; \qquad (198)$$

в случае $\mu=2$ в силу (194) и (197) находим:

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_1-1}=\sum_{p_1=0}^{\infty} S_{p_1p_1}-\sum_{p_1=-1}^{-\infty}\overline{S}_{p_1p_1}. \tag{199}$$

Пусть теперь $\mu=2\lambda-1$ и $p_1\geqslant 0$, тогда в сумме

$$\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\sum_{p_3=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{p_{2\lambda-1}=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_3-1}\dots D_{p_{2\lambda-1},\,-p_1-1}$$

в силу (195) и (196) остаются лишь члены, у которых

$$p_3\geqslant 0,\ \dots,\ p_{2\lambda-1}\geqslant 0.$$

Также для $p_1<0$ в предыдущей сумме остаются лишь члены с $p_3<0,\dots,p_{2\lambda-1}<0$. Но тогда, применяя формулы (194) и (197) и заменяя индексы суммирования, мы легко получаем

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{p_{2\lambda-1}=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_3-1}\dots D_{p_{2\lambda-1},\,-p_1-1}=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\dots\sum_{p_\lambda=0}^{\infty} S_{p_1p_2}S_{p_2p_3}\dots S_{p_\lambda p_1}+$$

$$+(-1)^{\lambda-1}\sum_{p_1=-1}^{-\infty}\sum_{p_2=-1}^{-\infty}\dots\sum_{p_\lambda=-1}^{-\infty}\overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_3}\dots\overline{S}_{p_\lambda p_1}. \tag{200}$$

Аналогичная формула

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{p_{2\lambda}=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}\dots D_{p_{2\lambda},\,-p_1-1}=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{\infty}\dots\sum_{p_\lambda=0}^{\infty} S_{p_1p_2}S_{p_2p_3}\dots S_{p_\lambda p_1}+$$

$$+(-1)^{\lambda}\sum_{p_1=-1}^{-\infty}\dots\sum_{p_\lambda=-1}^{-\infty}\overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_3}\dots\overline{S}_{p_\lambda p_1} \tag{201}$$

получается таким же путем.

Частные случаи формул (200) и (201) следующие: для $\mu=3$

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\sum_{p_3=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_3-1}D_{p_3,\,-p_1-1}=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_1}-\sum_{p_1=-1}^{-\infty}\sum_{p_2=-1}^{-\infty}\overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_1} \tag{202}$$

и для $\mu=4$

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}\sum_{p_3=-\infty}^{\infty}\sum_{p_4=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_3-1}D_{p_3,\,-p_4-1}D_{p_4,\,-p_1-1}=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty} S_{p_1p_2}S_{p_2p_1}+\sum_{p_1=-1}^{-\infty}\sum_{p_2=-1}^{-\infty}\overline{S}_{p_1p_2}\overline{S}_{p_2p_1}. \tag{203}$$

Мы можем представить ряды (198) и (199) в несколько ином виде. Действительно, в силу формул (188) имеем

$$\sum_{p=0}^{\infty} S_{pp}=\sum_{p=0}^{\infty}\left[C_{p+1}\overset{*}{C}_{-p-1}+C_{p+2}\overset{*}{C}_{-p-2}+C_{p+3}\overset{*}{C}_{-p-3}+\dots\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty} pC_p\overset{*}{C}_{-p}=\sum_{p=0}^{\infty} pC_p\overset{*}{C}_p, \tag{204}$$

$$\sum_{p=-1}^{-\infty}\overline{S}_{pp}=-\sum_{p=-1}^{\infty}\left[C_p\overset{*}{C}_{-p}+C_{p-1}\overset{*}{C}_{-p+1}+C_{p-2}\overset{*}{C}_{-p+2}+\dots\right]=$$

$$=\sum_{p=-1}^{-\infty} pC_p\overset{*}{C}_{-p}=-\sum_{p=1}^{\infty} pC_{-p}\overset{*}{C}_p; \tag{205}$$

следовательно, мы можем записать формулы (198) и (199) в виде:

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_1-1}=\sum_{p=-\infty}^{\infty} pC_p\overset{*}{C}_{-p}, \tag{206}$$

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_1-1}=\sum_{p=1}^{\infty} pC_p\overset{*}{C}_{-p}+\sum_{p=1}^{\infty} pC_{-p}\overset{*}{C}_p. \tag{207}$$

Дадим еще представление сумм (206) и (207). Положим:

$$\begin{aligned} G(x)&=\sum_{p=0}^{-\infty} C_p(x-a)^p, & H(x)&=\sum_{p=1}^{\infty} C_p(x-a)^p,\\ \overset{*}{G}(x)&=\sum_{p=0}^{-\infty}\overset{*}{C}_p(x-a)^p, & \overset{*}{H}(x)&=\sum_{p=1}^{\infty}\overset{*}{C}_p(x-a)^p, \end{aligned} \tag{208}$$

так что

$$L(x)=G(x)+H(x)L(x)^{-1}=\overset{*}{G}(x)+\overset{*}{H}(x). \tag{209}$$

Очевидно мы имеем

$$\frac{dH(x)}{dx}\overset{*}{G}(x)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda C_\lambda(x-a)^{\lambda-1}\sum_{\mu=0}^{-\infty}\overset{*}{C}_\mu(x-a)^\mu=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\lambda C_\lambda\overset{*}{C}_{-\mu}(x-a)^{\lambda-\mu-1},$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dH(x)}{dx}\overset{*}{G}(x)\,dx=\sum_{p=0}^{\infty} pC_p\overset{*}{C}_{-p}=\sum_{p=0}^{\infty} S_{pp}. \tag{210}$$

Также

$$\frac{dG(x)}{dx}\overset{*}{H}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\lambda C_\lambda(x-a)^{\lambda-1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\overset{*}{C}_\mu(x-a)^\mu=$$

$$=-\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\lambda C_{-\lambda}\overset{*}{C}_\mu(x-a)^{\mu-\lambda-1},$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dG(x)}{dx}\overset{*}{H}(x)\,dx=-\sum_{p=1}^{\infty}pC_{-p}\overset{*}{C}_p=\sum_{p=-1}^{-\infty}\overline{S}_{pp}. \tag{211}$$

Следовательно, мы можем представить равенства (206) и (207) в виде:

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}D_{p_1,\,-p_1-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dH(x)}{dx}\overset{*}{G}(x)\,dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dG(x)}{dx}\overset{*}{H}(x)\,dx, \tag{212}$$

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_1-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dH(x)}{dx}\overset{*}{G}(x)\,dx-\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dG(x)}{dx}\overset{*}{H}(x)\,dx. \tag{213}$$

В силу очевидных формул

$$\int_{(a)}\frac{dH(x)}{dx}\overset{*}{H}(x)\,dx=0,\qquad \int_{(a)}\frac{dG(x)}{dx}\overset{*}{G}(x)\,dx=0$$

и формул (209) мы можем написать вместо (212) следующую формулу:

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}D_{p_1,\,-p_1-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{dL(x)}{dx}L(x)^{-1}\,dx. \tag{214}$$

Впрочем, можно доказать эту последнюю формулу непосредственно, отправляясь от формулы (186)

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}D_{p_1,\,-p_1-1}=-\int_{(a)}k(\xi,\ \xi)\,d\xi \tag{215}$$

и замечая, что по формуле (180)

$$k(\xi,\ \xi)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{dL(\xi)}{d\xi}L(\xi)^{-1}. \tag{216}$$

Докажем еще другим методом формулу (207). Мы имеем

$$\sum_{p_1=-\infty}^{\infty}\sum_{p_2=-\infty}^{\infty}D_{p_1,\,-p_2-1}D_{p_2,\,-p_1-1}=\int_{(a)}\int_{(a)}k(\xi_1\xi_2)\,k(\xi_2\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2. \tag{217}$$

Но по формулам (180)

$$k(\xi_1\xi_2)\,k(\xi_2\xi_1)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{[L(\xi_1)L(\xi_2)^{-1}-I]\,[L(\xi_2)L(\xi_1)^{-1}-I]}{(\xi_1-\xi_2)^2}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2(\xi_1-\xi_2)^2}\left[L(\xi_1)L(\xi_2)^{-1}+L(\xi_2)L(\xi_1)^{-1}-2I\right]$$

и по формулам (178)

$$L(\xi_1)L(\xi_2)^{-1}=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p+q=s}C_p\overset{*}{C}_q(\xi_1-a)^p(\xi_2-a)^q,$$

$$L(\xi_2)L(\xi_1)^{-1}=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p+q=s}C_p\overset{*}{C}_q(\xi_1-a)^q(\xi_2-a)^p.$$

Следовательно, мы находим:

$$\int_{(a)}\int_{(a)}k(\xi_1\xi_2)\,k(\xi_2\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(a)}\int_{(a)}\Bigg[\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{p+q=s}C_p\overset{*}{C}_q\{(\xi_1-a)^p(\xi_2-a)^q+$$

$$+(\xi_1-a)^q(\xi_2-a)^p\}-2I\Bigg]\frac{d\xi_1\,d\xi_2}{(\xi_1-\xi_2)^2}. \tag{218}$$

Полагая

$$\xi_1-a=\rho_1e^{i\theta_1},\quad \xi_2-a=\rho_2e^{i\theta_2},$$

где, например, $0<\rho_1<\rho_2$, без труда находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{(\xi_1-a)^p}{(\xi_1-\xi_2)^2}\,d\xi_1=\begin{cases}0, & \text{если } p\geqslant 0\\ -p(\xi_2-a)^{p-1}, & \text{если } p<0\end{cases}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(a)}\int_{(a)}\frac{(\xi_1-a)^p(\xi_2-a)^q}{(\xi_1-\xi_2)^2}\,d\xi_1\,d\xi_2=\begin{cases}-p, & \text{если } p<0,\ q=-p;\\ 0 & \text{во всех прочих случаях;}\end{cases}$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(a)}\int_{(a)}\frac{(\xi_1-a)^q(\xi_2-a)^p}{(\xi_1-\xi_2)^2}\,d\xi_1\,d\xi_2=\begin{cases}-q=p, & \text{если } p>0,\ q=-p;\\ 0 & \text{во всех прочих случаях.}\end{cases}$$

Из формулы (218) мы получаем теперь требуемое равенство

$$\int_{(a)}\int_{(a)}k(\xi_1\xi_2)\,k(\xi_2\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi_2=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}pC_p\overset{*}{C}_p-\sum_{p=-1}^{-\infty}pC_p\overset{*}{C}_p=\sum_{p=1}^{\infty}pC_p\overset{*}{C}_{-p}+\sum_{p=1}^{\infty}pC_{-p}\overset{*}{C}_p. \tag{219}$$

В случае интегрального уравнения

$$\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(x)=\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)}\overset{*}{F}{}_b^{(j)}(\xi)\,\frac{I-\widetilde{Y}_b^{(j)}(\xi)\,\widetilde{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}}{\xi-x}\,\frac{x-a}{\xi-a_j}\,d\xi \tag{220}$$

мы имеем

$$L(x)=(x-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(x), \tag{221}$$

и формула (216) дает

$$k(\xi\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{-W_j^{(1)}(b)}{\xi-a_j}(\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}Y_b(\xi)+\right.$$

$$\left.+(\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\frac{dY_b(\xi)}{d\xi}\right\}Y_b(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{W_j^{(1)}(b)}{\xi-a_j}-\frac{1}{2\pi i}(\xi-a_j)^{-W_j^{(1)}(b)}\frac{dY_b(\xi)}{d\xi}Y_b(\xi)^{-1}(\xi-a_j)^{W_j^{(1)}(b)}.$$

Но матрица $Y_b(\xi)$ удовлетворяет дифференциальной системе

$$\frac{dY_b(\xi)}{d\xi} = Y_b(\xi) \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_h^{(r)}}{(\xi - a_h)^r};$$

следовательно, мы получаем

$$k(\xi\xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{W_j^{(1)}(b)}{\xi - a_j} - $$
$$- \frac{1}{2\pi i} (\xi - a_j)^{-W_j^{(1)}(b)} Y_b(\xi) \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{s} \frac{U_h^{(r)}}{(\xi - a_h)^r} Y_b(\xi)^{-1} (\xi - a_j)^{W_j^{(1)}(b)}. \quad (222)$$

В частности, отсюда непосредственно вытекает

$$\int_{(a_j)} \sigma(k(\xi\xi))\, d\xi = \sigma(W_j^{(1)}(b) - U_j^{(1)}). \quad (223)$$

Рассмотрим несколько подробнее случай, когда дифференциальные подстановки, а также значение $W_j^{(1)}(b)$ находятся в окрестности нулевых подстановок.

В этом случае мы можем, подставив в формулу (180) выражение (221), разложить $k(\xi x)$ в ряд композиций подстановок $U_h^{(r)}$ без свободного члена. Мы можем также разложить в ряд композиций сумму

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \int_{(a_j)} \dots \int_{(a_j)} k(\xi_1\xi_2)\, k(\xi_2\xi_3) \dots k(\xi_\mu\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_\mu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} T_j\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right). \quad (224)$$

Мы без труда убеждаемся, рассматривая формулу (222), что

$$\int_{(a_j)} k(\xi\xi)\, d\xi$$

не может содержать членов первого измерения относительно матриц $U_h^{(r)}$. Но тогда очевидно, что такие члены не входят в ряд (224); т. е.

$$T_j(a_{j_1}^{r_1}) = 0 \quad \text{для всех } j,\ j_1 \text{ и } r_1. \quad (225)$$

Формулы (224) и (184) дают теперь равенство

$$\lg D = -\sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_\nu}^{(1, \dots, m)} \sum_{r_1, \dots, r_\nu}^{(1, \dots, s)} \sigma\left(U_{j_1}^{(r_1)} \dots U_{j_\nu}^{(r_\nu)}\right) T_j\left(a_{j_1}^{r_1} \dots a_{j_\nu}^{r_\nu}\right), \quad (226)$$

позволяющее оценить знаменатель Фредгольма в том случае, когда дифференциальные подстановки $U_h^{(r)}$ находятся в окрестности нулевых подстановок.

Возвращаясь к общему уравнению (179), предположим, что решение этого уравнения может быть получено методом последовательных приближений, так что

$$F(x) = L(x)^{-1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{(a)} \dots \int_{(a)} L(\xi_1)^{-1} k(\xi_1\xi_2)\, k(\xi_2\xi_3) \dots k(\xi_\mu x)\, d\xi_1 \dots d\xi_\mu. \quad (227)$$

Тогда в силу формул (178), (180) и (181) мы имеем

$$L(\xi_1)^{-1} k(\xi_1\xi_2)\, k(\xi_2\xi_3) \dots k(\xi_\mu x) =$$
$$= \frac{(-1)^\mu}{(2\pi i)^\mu} \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \overset{*}{C}_{q_1} (\xi_1 - a)^{q_1} \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} D_{p_1 p_2} (\xi_1 - a)^{p_1} \cdot (\xi_2 - a)^{q_2} \times$$
$$\times \sum_{p_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_3=-\infty}^{\infty} D_{p_2 p_3} (\xi_2 - a)^{p_2} (\xi_3 - a)^{q_3} \dots$$
$$\dots \sum_{p_{\mu-1}=-\infty}^{\infty} \sum_{q_\mu=-\infty}^{\infty} D_{p_{\mu-1} q_\mu} (\xi_{\mu-1} - a)^{p_{\mu-1}} (\xi_\mu - a)^{q_\mu} \times$$
$$\times \sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} D_{p_\mu r} (\xi_\mu - a)^{p_\mu} (x - a)^r \frac{x - a}{\xi_1 - a} =$$
$$= \frac{(-1)^\mu}{(2\pi i)^\mu} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{q_\mu=-\infty}^{\infty} \overset{*}{C}_{q_1} D_{p_1 q_2} D_{p_2 q_3} \dots$$
$$\dots D_{p_{\mu-1} q_\mu} D_{p_\mu r} (\xi_1 - a)^{p_1 + q_1 - 1} \cdot (\xi_2 - a)^{p_2 + q_2} \dots (\xi_\mu - a)^{p_\mu + q_\mu} (x - a)^{r+1},$$

и, следовательно,

$$\int_{(a)} \dots \int_{(a)} L(\xi_1)^{-1} k(\xi_1\xi_2)\, k(\xi_2\xi_3) \dots k(\xi_\mu x)\, d\xi_1 \dots d\xi_\mu =$$
$$= (-1)^\mu \sum_{p_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{p_\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \overset{*}{C}_{-p_1} D_{p_1, -p_2-1} D_{p_2, -p_3-1} \dots$$
$$\dots D_{p_{\mu-1}, -p_\mu-1} D_{p_\mu r} (x - a)^{r+1}. \quad (228)$$

СТАТЬЯ ВОСЬМАЯ

РАЗЛИЧНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ МАТРИЦЫ, ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ НА КОНЕЧНОМ РАССТОЯНИИ

§ 1. Введение

Пусть $Y_b(x)$ — интегральная матрица системы

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{YU_j}{x-a_j}, \tag{1}$$

обращающаяся в единичную матрицу в точке $x=b$. Если разности различных характеристических чисел подстановки U_j не являются целыми числами, то существует единственная матрица W_j, обладающая тем свойством, что имеет место представление [ст. IV, § 1]:

$$Y_b(x)=(x-a_j)^{W_j}\overline{Y}_b^{(j)}(x), \tag{2}$$

где матрицы $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ голоморфны относительно x в точке $x=a_j$. Матрица W_j называется показательной подстановкой в точке $x=a_j$ для интегральной нормированной матрицы $Y_b(x)$. Мы знаем [ст. II, § 6], что матрицы W_j являются мероморфными функциями матриц $U_1, \ldots, U_m$, и особенности матриц W_j доставляются значениями подстановок U_j с целыми ненулевыми разностями характеристических чисел.

Точка $x=\infty$, как и точка a_j, есть особая точка системы (1), и дифференциальная подстановка в этой точке определяется формулой

$$U_\infty=-(U_1+U_2+\ldots+U_m). \tag{3}$$

Если разности различных характеристических чисел подстановки U_∞ не являются целыми числами, то существует единственная матрица W_∞, обладающая тем свойством, что имеет место представление

$$Y_b(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty}\overline{Y}_b^{\infty}(x), \tag{4}$$

где $\overline{Y}_b^{\infty}(x)$ и $\overline{Y}_b^{\infty}(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x=\infty$. Эта подстановка (показательная подстановка в бесконечно далекой точке W_∞) есть мероморфная функция подстановок $U_1, \ldots, U_m$, особенности которой доставляются

значениями подстановок U_j, для которых U_∞ имеет ненулевые целые разности характеристических чисел. Мы знаем также [ст. IV, § 2], что не существует двух различных систем вида (1) с одними и теми же показательными подстановками $W_1, W_2, \ldots, W_m, W_\infty$ во всех особых точках $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_\infty$. Заметим еще, что для точного определения показательных подстановок W_j интегральной матрицы $Y_b(x)$ мы должны фиксировать на плоскости x непересекающиеся разрезы $(a_1, \infty), (a_2, \infty), \ldots, (a_m, \infty)$, и для точного определения подстановки W_∞ мы должны фиксировать определенную окрестность бесконечно далекой точки, которая образована частью плоскости между двумя соседними на бесконечности разрезами [ст. IV, § 1], например, между разрезами (a_m, ∞) и (a_1, ∞). Мы можем перенумеровать особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ таким образом, что точка, описывающая в положительном направлении окружность достаточно большого радиуса с центром в начале координат, пересекает в последовательном порядке разрезы $(a_1, \infty), (a_2, \infty), \ldots, (a_m, \infty)$. Эти факты мы должны принимать во внимание в последующем.

Настоящая статья содержит исследование проблемы об определении систем дифференциальных уравнений вида (1), имеющих такие же показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$ матрицы $Y_b(x)$ в точках на конечном расстоянии, как и система (1) с фиксированными дифференциальными подстановками U_j.

Если разности различных характеристических чисел матрицы U_j не являются целыми, то единственная показательная подстановка W_j подобна матрице U_j [ст. II, § 5.] Если среди разностей различных характеристических чисел матрицы U_j имеется по крайней мере одна, равная целому числу, могут представиться два случая: 1) вообще $Y_b(x)$ не имеет показательной матрицы в точке a_j; 2) $Y_b(x)$ имеет несколько показательных матриц в точке a_j. В последнем случае все эти показательные матрицы также подобны матрице U_j [ст. IV, § 1]. В последующем мы будем предполагать, что разности различных характеристических чисел каждой матрицы U_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ не являются целыми числами. Очевидно, что матрицы W_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ будут обладать тем же свойством, и из предыдущих рассмотрений следует, что дифференциальные подстановки U_j' $(j=1, 2, \ldots, m)$ искомых систем, имеющих те же показательные подстановки W_j $(j=1, 2, \ldots, m)$, должны иметь также не целочисленные разности различных характеристических чисел.

§ 2. Основные теоремы

Начнем с доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы интегральная матрица $Y_b'(x)$ системы*

$$\frac{dY'}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{Y'U_j'}{x-a_j}, \tag{5}$$

нормированная в точке $x=b$, имела те же показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$, что и интегральная матрица $Y_b(x)$ заданной системы (1), можно сформулировать следующим образом: элементы интегральной матрицы системы

$$\frac{dX}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{XU_j'-U_jX}{x-a_j}, \tag{6}$$

обращающейся в I при $x=b$, а также элементы обратной к ней матрицы являются полиномами от x.

Пусть, как и выше, $Y_b(x)$ и $Y_b'(x)$ — интегральные нормированные в точке $x=b$ матрицы систем (1) и (5). Образуем матрицу:

$$X=Y_b(x)^{-1}Y_b'(x);\qquad X^{-1}=Y_b'^{-1}(x)\,Y_b(x). \tag{7}$$

Мы имеем

$$\frac{dX}{dx}=-Y_b(x)^{-1}\frac{dY_b(x)}{dx}Y_b(x)^{-1}Y_b'(x)+Y_b(x)^{-1}\frac{dY_b'(x)}{dx},$$

или в силу (1) и (5)

$$\frac{dX}{dx}=-\sum_{j=1}^{m}\frac{U_jX}{x-a_j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{XU_j'}{x-a_j},$$

т. е. матрица (7) есть интегральная матрица системы (6), обращающаяся в I при $x=b$. Предположим теперь, что $Y_b(x)$ и $Y_b'(x)$ имеют одни и те же показательные подстановки $W_j\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$

$$Y_b(x)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x);\qquad Y_b'(x)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{Y}_b'^{(j)}(x),$$

где

$$\overline{Y}_b^{(j)}(x),\ \ \overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1},\ \ \overline{Y}_b'^{(j)}(x)\ \text{и}\ \overline{Y}_b'^{(j)}(x)^{-1}$$

голоморфны в точке $x=a_j$. Мы имеем

$$X=\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}\,\overline{Y}_b'^{(j)}(x);\ \ X^{-1}=\overline{Y}_b'^{(j)}(x)^{-1}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x),$$

откуда следует, что элементы матриц X и X^{-1} суть целые функции. С другой стороны, принимая во внимание, что системы (1) и (5) регулярны, мы можем утверждать, что элементы подстановок X и X^{-1} могут иметь в бесконечно далекой точке лишь полюс и, следовательно, эти элементы суть полиномы от x.

Остается доказать, что условие теоремы I достаточно. Для этого предположим, что элементы матриц X и X^{-1}, определяемых формулами (7), суть полиномы от x. Для матрицы $Y_b(x)$ мы имеем в окрестности особой точки a_j представление (2), где $\overline{Y}_b^{(j)}(x)$ и $\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$ голоморфны в точке $x=a_j$. Первая из формул (7) дает

$$Y_b'(x)=(x-a_j)^{W_j}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x)X,$$

где матрицы

$$\overline{Y}_b^{(j)}(x)X\ \ \text{и}\ \ [\overline{Y}_b^{(j)}(x)X]^{-1}=X^{-1}\,\overline{Y}_b^{(j)}(x)^{-1}$$

голоморфны в точке $x=a_j$ и, следовательно, матрица $Y_b'(x)$ имеет те же самые показательные подстановки $W_1,\,W_2,\,\ldots,\,W_m$, что и матрица $Y_b(x)$, и теорема I доказана.

В силу этой теоремы решение проблемы сводится к построению матриц $U_j'\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$, обладающих тем свойством, что интегральная матрица системы (6), нормированная в точке $x=b$, а также обратная к ней матрица составлены из полиномов от x. Мы можем записать систему (6) в виде

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{X^{-1}U_jX}{x-a_j}+X^{-1}\frac{dX}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j'}{x-a_j}, \tag{8}$$

и поставленная проблема сводится к следующей: найти матрицу X, обращающуюся в I при $x=b$ и составленную из полиномов от x так, чтобы X^{-1} была составлена также из полиномов от x и левая часть уравнения (8) была бы матрицей, равной нулю при $x=\infty$. Если мы можем построить такую матрицу X, то формула (7) даст матрицу $Y_b'(x)$, и в силу (8) мы будем иметь

$$U_j'=X^{-1}(a_j)\,U_jX(a_j). \tag{9}$$

Пользуясь уравнением (8), мы можем указать один элементарный случай, когда проблема не имеет решений. Это случай, когда каждая матрица U_j есть число, т. е. диагональная матрица, у которой элементы на главной диагонали равны между собой:

$$U_j=[a_j,\ a_j,\ \ldots,\ a_j]\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m).$$

В этом случае

$$X^{-1}U_jX=X^{-1}XU_j=U_j$$

и, следовательно, левая часть уравнения (8) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}+X^{-1}\frac{dX}{dx},$$

и мы получаем

$$X^{-1}\frac{dX}{dx}=0,$$

откуда следует

$$X(x)\equiv 1\ \ \text{и}\ \ U_j'=U_j\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m).$$

Сделаем теперь еще одно предположение относительно заданных матриц U_j. Предположим, что матрица

$$U_\infty=-(U_1+U_2+\ldots+U_m)$$

не имеет равных характеристических чисел и разности ее характеристических чисел не являются целыми.

В этом случае интегральная матрица $Y_b(x)$ системы (1), очевидно, будет иметь определенную показательную матрицу W_∞ в бесконечно далекой точке, подобную матрице U_∞, и интегральная матрица в бесконечно далекой точке

$$V_\infty=e^{2\pi iW_\infty}$$

будет иметь также различные характеристические числа.

Теперь докажем, что интегральная матрица $Y_b'(x)$ каждой системы (5), которая дает решение основной проблемы, поставленной в этой статье, будет также иметь показательную подстановку W_∞' в бесконечно далекой точке. Действительно, матрицы $Y_b'(x)$ и $Y_b(x)$ имеют одни и те же интегральные подстановки в точках a_j:

$$V_j=e^{2\pi iW_j}\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

и, следовательно, они имеют одни и те же интегральные подстановки в бесконечно далекой точке:

$$V_\infty=(V_1V_2\ldots V_m)^{-1}=(e^{2\pi iW_1}e^{2\pi iW_2}\ldots e^{2\pi iW_m})^{-1}.$$

Но мы видели, что характеристические числа этой матрицы V_∞ различны, откуда следует, что характеристические числа матрицы

$$U'_\infty = -(U'_1 + U'_2 + \ldots + U'_m)$$

также различны и разности этих чисел не являются целыми. Это утверждение является непосредственным следствием того факта, что матрицы

$$V_\infty \quad \text{и} \quad e^{2\pi i U'_\infty}$$

имеют одни и те же характеристические числа.

Принимая во внимание свойства характеристических чисел матрицы U'_∞, мы можем утверждать, что $Y'_b(x)$ имеет показательную матрицу W'_∞ в бесконечно далекой точке. Эта матрица, как и матрица W_∞, есть одно из значений логарифма матрицы V_∞, деленное на $2\pi i$. Пусть

$$V_\infty = S[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m] S^{-1}.$$

Мы имеем

$$W_\infty = S\left[\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_1, \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_2, \ldots, \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_n\right] S^{-1}, \tag{10$_1$}$$

где $\operatorname{Lg}\omega_k$ — определенные значения логарифмов чисел ω_k. Для матрицы W'_∞ мы будем иметь

$$W'_\infty = S\left[\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_1 + r_1, \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_2 + r_2, \ldots, \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_n + r_n\right] S^{-1}, \tag{10$_2$}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_m$ — целые числа. Как нам известно [ст. I, § 11], значения этих целых чисел вполне определяют значение логарифма

$$\frac{1}{2\pi i}\lg V_\infty$$

и мы обозначим подстановку (10$_2$) следующим образом:

$$W_\infty^{(r_1, \ldots, r_n)}.$$

С другой стороны, мы знаем [ст. V, § 2], что полная система показательных подстановок:

$$W_1, \ldots, W_m, W_\infty^{(r_1, \ldots, r_n)} \tag{11}$$

может дать лишь одно решение проблемы, т. е. единственную систему (5) с показательными подстановками $W_1, \ldots, W_m$. В соответствии с этим фактом вместо U'_j, U'_∞ и $Y'_b(x)$ удобно писать

$$U_j^{(r_1, \ldots, r_n)}, \; U_\infty^{(r_1, \ldots, r_n)} \; \text{и} \; Y_b^{(r_1, \ldots, r_n)}. \tag{12}$$

Показательные подстановки (11) должны быть подобны соответствующим дифференциальным подстановкам

$$U_1^{(r_1, \ldots, r_n)}, \ldots, U_m^{(r_1, \ldots, r_n)}, U_\infty^{(r_1, \ldots, r_n)},$$

и из соотношения

$$\sum_{j=1}^{m} U_j^{(r_1, \ldots, r_n)} + U_\infty^{(r_1, \ldots, r_n)} = 0$$

вытекает, что сумма характеристических чисел матриц (11) должна равняться нулю, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_1 + r_1 + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_n + r_n + \sum_{j=1}^{m}(\sigma_j^{(1)} + \ldots + \sigma_j^{(m)}) = 0,$$

где $\sigma_j^{(1)}, \ldots, \sigma_j^{(n)}$ — характеристические числа матрицы W_j. Для заданной системы (1) мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_1 + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Lg}\omega_n + \sum_{j=1}^{m}(\sigma_j^{(1)} + \ldots + \sigma_j^{(m)}) = 0,$$

и, следовательно, целые числа $r_1, \ldots, r_n$ оказываются связанными соотношениями

$$r_1 + \ldots + r_n = 0. \tag{13}$$

Отсюда следует, что все значения матриц U'_j и $Y'_b(x)$, отвечающих фиксированной системе показательных подстановок в точках на конечном расстоянии $W_1, \ldots, W_m$, содержатся в системе матриц (12), *где целые числа $r_1, \ldots, r_n$ удовлетворяют условию* (13).

Заметим, что из предыдущих рассуждений не вытекает, что каждой системе целых чисел, удовлетворяющих соотношению (13), отвечает действительно решение нашей основной проблемы, и в последующем мы будем иметь примеры, когда все сделанные выше предположения относительно матриц U_j выполнены, и в то же время существуют системы целых чисел $r_1, \ldots, r_n$, удовлетворяющих соотношению (13), которым не отвечают решения проблемы. Укажем еще на связь между степенями полиномов X и X^{-1} и целыми числами $r_1, \ldots, r_n$, где степень полинома X (или X^{-1}) есть максимальная степень полиномов, которые являются элементами матрицы X (или X^{-1}).

Предположим, что мы имеем решение проблемы, которое приводит к матрицам X, $Y'_b(x)$ и W'_∞. Сначала заметим, что в силу формул (10$_1$) и (10$_2$) матрицы W_∞ и W'_∞ коммутативны. Мы имеем

$$Y_b(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}_b(x) \text{ и } Y'_b(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W'_\infty} \overline{Y}'_b(x),$$

где

$$\overline{Y}_b(x), \; \overline{Y}_b(x)^{-1}, \; \overline{Y}'_b(x), \; \overline{Y}'_b(x)^{-1} \tag{14}$$

голоморфны в бесконечно далекой точке. С другой стороны,

$$Y'_b(x) = Y_b(x) X, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{W'_\infty} \overline{Y}'_b(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}_b(x) X,$$

откуда следует

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty - W'_\infty} = \overline{Y}'_b(x) X^{-1} \overline{Y}_b(x)^{-1}, \tag{15}$$

$$X^{-1} = \overline{Y}'_b(x)^{-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty - W'_\infty} \overline{Y}_b(x).$$

Принимая во внимание соотношение

$$W'_\infty - W_\infty = S[r_1, \ldots, r_n] S^{-1}$$

и тот факт, что матрицы (14) голоморфны в бесконечно далекой точке, мы можем утверждать, что степень полинома X^{-1} равна наибольшему из чисел $r_1, \ldots, r_n$. Аналогичным путем можно доказать, что степень полинома X равна наибольшему из чисел $-r_1, \ldots, -r_n$.

Рассуждения этого параграфа приводят к теореме:

Теорема II. *Если разности различных характеристических чисел матриц U_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ не являются целыми числами и характеристические числа матрицы U_∞ различны, причем разности этих чисел также не являются целыми, то каждому решению проблемы отвечает определенная система целых чисел $r_1, \ldots, r_n$, удовлетворяющих соотношению* (13), *и каждой такой системе целых чисел может отвечать лишь одно решение проблемы. Для каждого решения проблемы степень полинома X^{-1} равна наибольшему из чисел $r_1, \ldots, r_n$ и степень полинома X равна наибольшему из чисел $-r_1, \ldots, -r_n$.*

Замечание. Если не делать никаких предположений относительно характеристических чисел матрицы U_∞, то из предыдущих рассуждений следует, что каждому значению матриц U_j' и $Y_b'(x)$ отвечает такая система целых чисел $r_1, \ldots, r_n$, связанных соотношениями (13), что если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — характеристические числа матрицы U_∞, то характеристические числа матрицы U_∞' суть $\sigma_1 + r_1, \ldots, \sigma_n + r_n$. Но мы не можем утверждать, что каждой системе этих чисел отвечает только одно решение проблемы.

§ 3. Случай полиномов первой степени

Исследуем теперь подробнее тот случай, когда степень полиномов X и X^{-1} не превосходит единицы:

$$X = I + (x-b)T; \quad X^{-1} = I + (x-b)\overset{*}{T}.$$

Мы должны иметь

$$[I + (x-b)T][I + (x-b)\overset{*}{T}] = I + (x-b)(T + \overset{*}{T}) + (x-b)^2 T\overset{*}{T} = I,$$

откуда следует

$$\overset{*}{T} = -T \quad \text{и} \quad T^2 = 0,$$

т. е. должно быть

$$X = I + (x-b)T; \qquad X^{-1} = I - (x-b)T, \tag{16}$$

где

$$T^2 = 0. \tag{17}$$

Подставляя выражения (16) в левую часть уравнения (8), выделяя полином относительно x и принимая во внимание соотношение (17), будем иметь

$$-\sum_{j=1}^{m}(x-a_j)TU_jT + \sum_{j=1}^{m}U_jT - T\sum_{j=1}^{m}U_j - 2\sum_{j=1}^{m}(a_j-b)TU_jT + T = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при x, получим

$$T\sum_{j=1}^{m}U_jT = 0, \tag{18}$$

и пользуясь этим соотношением, можем записать второе условие в виде

$$T\sum_{j=1}^{m}U_j - \sum_{j=1}^{m}U_jT = T - T\sum_{j=1}^{m}a_jU_jT. \tag{19}$$

Но, умножая это уравнение на T справа и пользуясь условием (17), мы получим условие (18), т. е. матрица T должна быть определена условиями (17) и (19). Если мы нашли эту матрицу, то дифференциальные подстановки U_j' можно определить в силу (9) формулами:

$$U_j' = [I - (a_j - b)T]U_j[I + (a_j - b)T]. \tag{20}$$

Мы имеем, таким образом, следующую теорему:

Теорема III. *Решения системы* (6), *для которых X и X^{-1} являются полиномами первой степени относительно x, определяются формулами* (16), *где матрица T должна удовлетворять двум условиям:*

$$T\sum_{j=1}^{m}U_j - \sum_{j=1}^{m}U_jT = T - T\sum_{j=1}^{m}a_jU_jT; \qquad T^2 = 0, \tag{21}$$

и коэффициенты U_j' системы (5) *определяются формулами* (20).

В этой теореме мы не делали никаких предположений относительно матрицы U_∞. В последующем будем предполагать, как и при доказательстве теоремы II, что характеристические числа этой матрицы различны и разности этих чисел не являются целыми. Цель этого параграфа состоит в построении решений уравнений (21), которые отвечают случаю, когда два из чисел $r_1, \ldots, r_n$ равны ± 1 и все прочие — равны нулю. Прежде всего сделаем некоторые предварительные замечания. Равенство $T^2 = 0$, очевидно, эквивалентно тому факту, что все характеристические числа матрицы T равны нулю и степени элементарных делителей этой матрицы не более двух. Возьмем наиболее простой случай, когда один из элементарных делителей матрицы T — второй степени и все прочие элементарные делители — простые. Если T — такая матрица, а Y — произвольная матрица, то мы можем доказать формулу:

$$TYT = T\sigma(YT). \tag{22}$$

При доказательстве этой формулы можно считать, что матрицы T и Y заменены подобными матрицами STS^{-1} и SYS^{-1}, где S — произвольная неособенная матрица. Следовательно, можно предположить, что T имеет канонический вид, например:

$$\{T\}_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{для } i=2 \text{ и } k=1, \\ 0 & \text{во всех прочих случаях.} \end{cases}$$

Теперь легко проверить формулу (22). Действительно, в левой части этой формулы имеем

$$\{TYT\}_{ik} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\{T\}_{is}\{Y\}_{st}\{T\}_{tk} = \begin{cases} \{Y\}_{12} & \text{для } i=2 \text{ и } k=1, \\ 0 & \text{во всех прочих случаях.} \end{cases}$$

В правой части мы получаем тот же результат. Заметим, что для матриц второго порядка формула (22) имеет место при одном только условии $D(T) = 0$ [гл. I, § 19]. Если матрица T обладает указанными выше свойствами, то имеется подобная матрица, у которой все элементы, за исключением одного, равны нулю. Очевидно, что и обратно, если для матрицы T существует подобная матрица, у которой все элементы, за исключением одного, расположенного на главной диагонали, равны нулю, то матрица T обладает указанными выше свойствами. Рассмотрим теперь первое из уравнений (21).

Пусть

$$U_\infty = -\sum_{j=1}^{m} U_j = S[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] S^{-1} \tag{23}$$

каноническое представление матрицы U_∞. Мы можем записать указанное выше уравнение в виде

$$[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] T' - T'[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] = T' - T'YT', \tag{24}$$

где для упрощения записи положили

$$T' = S^{-1}TS; \qquad Y = S^{-1}\sum_{j=1}^{m} a_j U_j S. \tag{25}$$

Уравнение (24) в силу формулы (22) дает

$$\{T'\}_{ik}(\sigma_i - \sigma_k) = \{T'\}_{ik}(1-\lambda) \qquad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

где

$$\lambda = \sigma(YT'). \tag{27}$$

Фиксируя два целых числа p и q, где $p \neq q$, мы можем удовлетворить уравнениям (26), если положим

$$\{T'\}_{ik} = 0$$

во всех случаях, за исключением $i = q$, $k = p$, и

$$\lambda = 1 + \sigma_p - \sigma_q.$$

Условие (27) дает

$$1 + \sigma_p - \sigma_q = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \{Y\}_{is}\{T'\}_{si} = \{Y\}_{pq}\{T'\}_{qp},$$

и мы получаем следующие решения уравнения (26):

$$T'_{pq} = \frac{\sigma_p - \sigma_q + 1}{\{Y\}_{pq}} \mathcal{E}_{qp},$$

где $\mathcal{E}_{kl}$ — матрица, у которой все элементы равны нулю, за исключением $\{\mathcal{E}_{kl}\}_{kl} = 1$. Мы должны предположить, очевидно, что $\{Y\}_{pq} \neq 0$. Принимая во внимание формулы (25), получаем следующие решения уравнений (21):

$$T_{pq} = \frac{\sigma_p - \sigma_q + 1}{\sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1}U_j S\}_{pq}} S\mathcal{E}_{qp}S^{-1}. \tag{28}$$

Докажем теперь, что это решение отвечает следующему случаю:

$$r_p = 1, \quad r_q = -1 \ \text{и}\ r_k = 0 \ \text{для}\ k \neq p \ \text{и}\ k \neq q. \tag{29}$$

Матрицы U'_∞ и W'_∞ подобны, и достаточно доказать, что характеристические числа матрицы

$$U'_\infty = -\sum_{j=1}^{m} U'_j$$

могут быть получены из характеристических чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ матрицы U_∞ заменой характеристических чисел

$$\sigma_p \ \text{на}\ \sigma_p + 1 \quad \text{и} \quad \sigma_q \ \text{на}\ \sigma_q - 1,$$

причем все прочие характеристические числа остаются неизменными.

В силу формулы (20) мы имеем

$$U'_\infty = -\sum_{j=1}^{m} [I - (a_j - b)T_{pq}] U_j [I + (a_j - b)T_{pq}].$$

Обозначая

$$\sum_{j=1}^{m} (a_j - b) U_j = P; \qquad \sum_{j=1}^{m} (a_j - b)^2 U_j = Q, \tag{30}$$

мы имеем

$$U'_\infty = U_\infty + T_{pq}P - PT_{pq} + T_{pq}QT_{pq},$$

или в силу (22)

$$U'_\infty = U_\infty + T_{pq}P - PT_{pq} + T_{pq}\sigma(QT_{pq}).$$

Рассмотрим вместо U'_∞ подобную матрицу $S^{-1}U'_\infty S$:

$$S^{-1}U'_\infty S = [\sigma_1, \ldots, \sigma_n] + \lambda_{pq}\mathcal{E}_{qp}P' - \lambda_{pq}P'\mathcal{E}_{qp} + a\mathcal{E}_{qp}, \tag{31}$$

где обозначено

$$P' = S^{-1}PS; \qquad \lambda_{pq} = \frac{\sigma_p - \sigma_q + 1}{\sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1}U_j S\}_{pq}}; \qquad a = \lambda_{pq}\sigma(QT_{pq}).$$

Нужно доказать, что характеристические числа этой матрицы $S^{-1}U'_\infty S$ могут быть получены из характеристических чисел матрицы U_∞ заменой σ_p на $\sigma_p + 1$ и σ_q — на $\sigma_q - 1$, а все прочие характеристические числа этих матриц остаются неизменными. Мы имеем

$$\{\mathcal{E}_{qp}P'\}_{ik} = \sum_{s=1}^{m} \{\mathcal{E}_{qp}\}_{is}\{P'\}_{sk},$$

т. е.

$$\{\mathcal{E}_{qp}P'\}_{ik} = 0 \quad \text{для}\ i \neq q \ \text{и}\ \{\mathcal{E}_{qp}P'\}_{qk} = \{P'\}_{pk}. \tag{32}$$

Аналогично

$$\{P'\mathcal{E}_{qp}\}_{ik} = 0 \quad \text{для}\ k \neq p \ \text{и}\ \{P'\mathcal{E}_{qp}\}_{ip} = \{P'\}_{iq}. \tag{33}$$

Не умаляя общности, можем положить $p = 1$ и $q = 2$. В этом случае в силу (31) мы имеем

$$\{S^{-1}U'_\infty S\}_{11} = \sigma_1 - \lambda_{12}\{P'\}_{12}; \ \{S^{-1}U'_\infty S\}_{22} = \sigma_2 + \lambda_{12}\{P'\}_{12};$$

$$\{S^{-1}U'_\infty S\}_{kk} = \sigma_k \ \text{для}\ k > 2,$$

и элементы матрицы (31), расположенные над главной диагональю, равны нулю, за исключением элементов первого столбца. Последнее обстоятельство непосредственно следует из формул (32) и (33). Таким образом, характеристическими числами матрицы (31) являются

$$\sigma_1 - \lambda_{12}\{P'\}_{12}, \quad \sigma_2 + \lambda_{12}\{P'\}_{12}, \quad \sigma_3, \ldots, \sigma_n.$$

Но определения матриц P' и P дают

$$P' = \sum_{j=1}^{m} (a_j - b) S^{-1}U_j S = b[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] + \sum_{j=1}^{m} a_j S^{-1}U_j S$$

и

$$\lambda_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + 1}{\sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1}U_jS\}_{12}},$$

откуда следует

$$\lambda_{12}\{P'\}_{12} = \sigma_1 - \sigma_2 + 1,$$

и характеристическими числами матрицы U'_∞ являются

$$\sigma_2 - 1, \quad \sigma_1 + 1, \quad \sigma_3, \ldots, \sigma_n,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если $\sigma_p - \sigma_q = -1$, то матрица (28) есть нулевая матрица и мы не имеем решения T_{pq}.

Сделаем еще одно замечание. Выше мы сделали предположение, что числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ различны и разности этих чисел не являются целыми. Но мы не пользовались этим предположением в предыдущих исследованиях о решении уравнений (21) и о характеристических числах матрицы U'_∞. Достаточно было для проведения доказательства предположить, что элементарные делители матрицы U_∞ простые. Смысл упомянутого выше предположения состоит в том, что оно гарантирует существование показательной подстановки W'_∞ в бесконечно далекой точке. Предыдущие исследования приводят нас к теореме:

Теорема IV. *Если матрица*

$$U_\infty = -\sum_{j=1}^{m} U_j \tag{34}$$

имеет каноническое представление

$$U_\infty = S[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] S^{-1} \tag{35}$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1}U_jS\}_{pq} \neq 0, \tag{36}$$

то система (21) *имеет решение*

$$T_{pq} = \frac{\sigma_p - \sigma_q + 1}{\sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1}U_jS\}_{pq}} S\mathfrak{E}_{qp}S^{-1}, \tag{37}$$

где $\mathfrak{E}_{kl}$ — подстановка, у которой все элементы нули, за исключением $\{\mathfrak{E}_{kl}\}_{kl} = 1$. Для этого решения системы (21) *характеристические числа матрицы U'_∞ могут быть получены из характеристических чисел матрицы U_∞ заменой σ_p на $\sigma_p + 1$ и σ_q на $\sigma_q - 1$, причем все прочие характеристические числа этих матриц остаются неизменными.*

Легко видеть, каким образом нужно сформулировать аналогичную теорему, если вместо U'_∞ ввести показательную подстановку W'_∞.

§ 4. Пример

Применяя несколько раз преобразование, указанное в теореме IV, мы можем получить новые преобразования, которые приведут нас к системам (5), интегральные матрицы которых $Y'_b(x)$ имеют те же показательные подстановки $W_1, \ldots, W_m$, что и интегральная матрица $Y_b(x)$ системы (1). Но мы не можем утверждать, что этот метод даст всегда все решения проблемы.

Действительно, мы можем построить пример, когда X и X^{-1} суть полиномы второй степени, и в то же время не существует решений, где X и X^{-1} были бы полиномами первой степени. В этом примере все сделанные выше предположения относительно U_j и U_∞ выполнены.

Положим $b = 0$, $n = 2$ и пусть

$$X = I + Ax + Bx^2; \qquad X^{-1} = I + \overset{*}{A}x + \overset{*}{B}x^2.$$

Перемножая, получим:

$$\overset{*}{A} = -A; \quad \overset{*}{B} = A^2 - B,$$

где A и B должны удовлетворять соотношениям

$$A^3 - AB - BA = 0; \qquad BA^2 - B^2 = 0. \tag{38}$$

Следовательно, мы имеем

$$X = I + Ax + Bx^2; \qquad X^{-1} = I - Ax + (A^2 - B)x^2; \tag{39}$$

чтобы удовлетворить соотношениям (38), положим

$$B = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A = \alpha B, \tag{40}$$

где α — отличное от нуля число. Мы имеем, очевидно, $B^2 = 0$, и условия (38) удовлетворены.

Докажем теперь, что матрица X есть решение уравнения (6) при соответствующем выборе U_j и a_j. В силу (40) $A^2 = 0$ и, следовательно,

$$X^{-1} = I - Ax - Bx^2.$$

Подставляя выражения X и X^{-1} в левую часть уравнения (8) и принимая во внимание равенства

$$A^2 = B^2 = AB = BA = 0,$$

получим

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{(I - Ax - Bx^2)U_j(I + Ax + Bx^2)}{x - a_j} + A + 2Bx.$$

Мы видели, что это выражение должно быть матрицей, равной нулю при $x = \infty$. Это приводит к четырем условиям:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} BU_jB = 0,\\
&\sum_{j=1}^{m} (BU_jA + AU_jB + a_jBU_jB) = 0,\\
&\sum_{j=1}^{m} (BU_j - U_jB + AU_jA + a_jBU_jA + a_jAU_jB + a_j^2BU_jB) - 2B = 0,\\
&\sum_{j=1}^{m} (AU_j - U_jA + a_jBU_j - a_jU_jB + a_jAU_jA + a_j^2BU_jA + a_j^2AU_jB +\\
&\qquad + a_j^3BU_jB) - A = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{j=1}^{m} U_j = Y; \quad \sum_{j=1}^{m} a_j U_j = Z; \quad \sum_{j=1}^{m} a_j^2 U_j = U; \quad \sum_{j=1}^{m} a_j^3 U_j = V,$$

и пусть y_{ik}, z_{ik}, u_{ik}, v_{ik} — элементы этих матриц. В силу (40) мы можем записать условия (41) в виде

$$\left.\begin{aligned} & y_{12} = z_{12} = 0; \;\; y_{11} - y_{22} + u_{12} - 2 = 0, \\ & \alpha(y_{11} - y_{22}) + z_{11} - z_{22} + 2\alpha u_{12} + v_{12} - \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Положим $m = 3$ и обозначим через $u_{ik}^{(j)}$ элементы матрицы U_j. Мы имеем четыре следующих условия

$$\left.\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{3} u_{12}^{(j)} = 0, \\ & \sum_{j=1}^{3} a_j u_{12}^{(j)} = 0, \\ & \sum_{j=1}^{3} \left(u_{11}^{(j)} - u_{22}^{(j)} + a_j^2 u_{12}^{(j)}\right) - 2 = 0, \\ & \sum_{j=1}^{3} \left(\alpha u_{11}^{(j)} - \alpha u_{22}^{(j)} + a_j u_{11}^{(j)} - a_j u_{22}^{(j)} + 2\alpha a_j^2 u_{12}^{(j)} + a_j^3 u_{12}^{(j)}\right) - \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Определим элементы $u_{12}^{(j)}$ из системы

$$\sum_{j=1}^{3} u_{12}^{(j)} = 0; \quad \sum_{j=1}^{3} a_j u_{12}^{(j)} = 0; \quad \sum_{j=1}^{3} a_j^2 u_{12}^{(j)} = \frac{1}{2}. \tag{44}$$

Полагая

$$u = u_{11}^{(1)} - u_{22}^{(1)}; \quad v = u_{11}^{(2)} - u_{22}^{(2)}; \quad w = u_{11}^{(3)} - u_{22}^{(3)}, \tag{45}$$

будем иметь два уравнения для u, v и w

$$u + v + w = \frac{3}{2}, \quad (\alpha + a_1) u + (\alpha + a_2) v + (\alpha + a_3) w = k,$$

где k — известная величина, не зависящая от α. Мы можем записать эту систему следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u + v + w &= \frac{3}{2}, \\ a_1 u + a_2 v + a_3 w &= k - \frac{3}{2}\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Докажем теперь, что можно так определить элементы $u_{ik}^{(j)}$, что матрицы U_1, U_2, U_3 и

$$U_\infty = -(U_1 + U_2 + U_3)$$

удовлетворяют всем условиям теоремы II, т. е. так, что разности различных характеристических чисел матриц

$$U_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

не являются целыми и характеристические числа матрицы U_∞ различны и разности этих чисел не являются целыми.

Система (44) дает определенные значения для $u_{12}^{(j)}$. Положим

$$u_{21}^{(j)} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Элементы $u_{11}^{(j)}$ и $u_{22}^{(j)}$ должны удовлетворять системе (46), где u, v и w определяются формулами (45). Разности характеристических чисел матриц U_1, U_2, U_3 суть u, v, w, и разность характеристических чисел матрицы U_∞ равна $u + v + w$. Но очевидно, что можно указать не целые значения u, v и w, удовлетворяющие системе (46), что и доказывает наше утверждение.

Остается доказать, что для полученной дифференциальной системы не существует решений проблемы вида

$$X = I + xT.$$

Действительно,

$$U_\infty = -(U_1 + U_2 + U_3) = -[y_{11}, \; y_{22}], \qquad \sum_{j=1}^{3} a_j U_j = [z_{11}, \; z_{22}],$$

где

$$y_{11} - y_{22} = \frac{3}{2}.$$

Теперь можно применить формулы (23)—(26) для

$$\left.\begin{aligned} & S = I, \quad \sigma_1 = -y_{11}, \quad \sigma_2 = -y_{22}, \quad T' = T, \\ & \lambda = \sigma\left(T \sum_{j=1}^{3} a_j U_j\right) = z_{11}\{T\}_{11} + z_{22}\{T\}_{22}. \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Из формул (26) следует:

$$\left.\begin{aligned} & \{T\}_{11}(1 - \lambda) = 0; \quad \{T\}_{22}(1 - \lambda) = 0, \\ & \{T\}_{12}\left(\frac{5}{2} - \lambda\right) = 0, \quad \{T\}_{21}\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Если $\lambda \neq 1$, то мы имеем

$$\{T\}_{11} = \{T\}_{22} = 0$$

и по последней из формул (47) $\lambda = 0$. Но тогда формулы (48) дают $T \equiv 0$. Если $\lambda = 1$, то формулы (48) вновь дают

$$\{T\}_{12} = \{T\}_{21} = 0, \quad \text{т. е.} \quad T = [\{T\}_{11}, \; \{T\}_{22}],$$

и так как $T^2 = 0$, то, очевидно, $T \equiv 0$.

Если мы положим $m = 2$, $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$, то система (43) примет вид

$$u_{12}^{(1)} = u_{12}^{(2)} = 0; \quad u + v = 2; \quad u - v = -\alpha.$$

При соответствующем выборе α для u и v мы получим не целые значения, однако разность характеристических чисел матрицы U_∞ равна двум.

§ 5. Преобразование инвариантов $\sigma(U_j U_h)$

В этом последнем параграфе рассмотрим фундаментальное преобразование, касающееся инвариантов $\sigma(U_j U_h)$ $(j, h = 1, 2, \ldots, m)$ в случае, когда порядок матриц равен двум. На основании формул (20) имеем

$$U_j' U_h' = [I - (a_j - b) T] \, U_j \, [I + (a_j - b) T] \, [I - (a_h - b) T] \, U_h \, [I + (a_h - b) T]$$

и

$$\sigma(U_j' U_h') = \sigma(U_j [I + (a_j - b) T] [I - (a_h - b) T] U_h [I + (a_h - b) T] [I - (a_j - b) T]).$$

Но

$$[I + (a_j - b) T] [I - (a_h - b) T] = I + (a_j - a_h) T,$$

и

$$\begin{aligned}\sigma(U_j' U_h') &= \sigma(U_j [I + (a_j - a_h) T] U_h [I - (a_j - a_h) T]) = \\ &= \sigma(U_j U_h) + (a_j - a_h) [\sigma(U_h U_j T) - \sigma(U_j U_h T)] - \\ &\quad - (a_j - a_h)^2 \sigma(U_j T) \sigma(U_h T).\end{aligned} \tag{49}$$

Полагая в формуле (28), например, $p = 1$ и $q = 2$, будем иметь

$$T = \frac{\delta + 1}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r \{S^{-1} U_r S\}_{12}} S\mathfrak{E}_{21} S^{-1}, \quad \text{где} \qquad \delta = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Следовательно, если X — произвольная подстановка, мы находим

$$\sigma(XT) = \frac{(\delta + 1) \{S^{-1} X S\}_{12}}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r \{S^{-1} U_r S\}_{12}},$$

и формула (49) дает

$$\sigma(U_j' U_h') = \sigma(U_j U_h) + \frac{(a_j - a_h)(\delta + 1)}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r \{S^{-1} U_r S\}_{12}} [\{S^{-1} U_h U_j S\}_{12} - \{S^{-1} U_j U_h S\}_{12}] -$$

$$- \left[\frac{(a_j - a_h)(\delta + 1)}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r \{S^{-1} U_r S\}_{12}} \right]^2 \{S^{-1} U_j S\}_{12} \{S^{-1} U_h S\}_{12}. \tag{50}$$

Теперь мы должны выразить правую часть этой формулы через инварианты $\sigma(U_j U_h)$, $\sigma(U_j U_h U_g)$.

С этой целью рассмотрим выражения

$$\frac{\{S^{-1} A S\}_{12}}{\{S^{-1} B S\}_{12}}; \quad \{S^{-1} A S\}_{11}; \quad \{S^{-1} A S\}_{22},$$

где A и B — произвольные матрицы и S — матрица, приводящая произвольную матрицу к каноническому виду

$$U = S [\sigma_1, \sigma_2] S^{-1}.$$

Элементарные вычисления дают следующие формулы:

$$\frac{\{S^{-1} A S\}_{12}}{\{S^{-1} B S\}_{12}} =$$

$$= \frac{\sigma(U)}{2} \frac{\sigma(U) [\sigma(AUB) + \sigma(BUA)] - 2\sigma(AU) \sigma(BU) +}{\delta^2 [\sigma(BUB) - \sigma(BU) \sigma(B)] + \sigma(U) \sigma(B) \sigma(UBU) - \sigma(U) \sigma(BU)^2}$$

$$\frac{+ \frac{1}{2} [\delta^2 - \sigma(U)^2] [2\sigma(AB) - \sigma(A) \sigma(B)] + \delta [\sigma(BUA) - \sigma(AUB)]}{\delta^2 [\sigma(BUB) - \sigma(BU) \sigma(B)] + \sigma(U) \sigma(B) \sigma(UBU) - \sigma(U) \sigma(BU)^2},$$

$$\{S^{-1} A S\}_{11} = \frac{1}{2\delta} [2\sigma(AU) - \sigma(A) \sigma(U) + \delta \sigma(A)],$$

$$\{S^{-1} A S\}_{22} = \frac{1}{2\delta} [\sigma(A) \sigma(U) - 2\sigma(AU) + \delta \sigma(A)],$$

где

$$\delta = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Полагая

$$\lambda_{rj} = \sigma(U_\infty) \Big\{ \sigma(U_\infty) [\sigma(U_r U_\infty U_j) + \sigma(U_j U_\infty U_r)] - 2\sigma(U_r U_\infty) \sigma(U_j U_\infty) -$$

$$- \frac{1}{2} [\sigma(U_\infty)^2 - \delta^2] [2\sigma(U_r U_j) - \sigma(U_r) \sigma(U_j)] \Big\},$$

$$\mu_{rj} = \sigma(U_j U_\infty U_r) - \sigma(U_r U_\infty U_j),$$

$$\nu_j = 2 \{\delta^2 [\sigma(U_j U_\infty U_j) - \sigma(U_j U_\infty) \sigma(U_j)] +$$

$$+ \sigma(U_\infty) \sigma(U_j) \sigma(U_\infty U_j U_\infty) - \sigma(U_\infty) \sigma(U_j U_\infty)^2\},$$

получим

$$\frac{\{S^{-1} U_r S\}_{12}}{\{S^{-1} U_j S\}_{12}} = \frac{\lambda_{rj} + \delta \mu_{rj}}{\nu_j}.$$

Полагая затем

$$\frac{1}{\delta} [2\sigma(U_j U_\infty) - \sigma(U_j) \sigma(U_\infty)] = \varkappa_j$$

и замечая, что

$$\{S^{-1} U_h U_j S\}_{12} - \{S^{-1} U_j U_h S\}_{12} = \{S^{-1} U_j S\}_{12} \varkappa_h - \{S^{-1} U_h S\}_{12} \varkappa_j,$$

получим

$$\sigma(U_j' U_h') = \sigma(U_j U_h) + \frac{(a_j - a_h)(1 + \delta) \varkappa_h \nu_j}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r (\lambda_{rj} + \delta \mu_{rj})} -$$

$$- \frac{(a_j - a_h)(1 + \delta) \varkappa_j \nu_h}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r (\lambda_{rh} + \delta \mu_{rh})} - \frac{(a_j - a_h)^2 (1 + \delta)^2 \nu_j \nu_h}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_r (\lambda_{rj} + \delta \mu_{rj}) \sum\limits_{r=1}^{m} a_r (\lambda_{rh} + \delta \mu_{rh})}. \tag{51}$$

СТАТЬЯ ДЕВЯТАЯ

ПРОБЛЕМА РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ГАУССА

§ 1. Введение

Во второй статье мы дали полное решение проблемы Пуанкаре для системы Гаусса

$$\frac{dY}{dx}=Y\left(\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{x-a_2}\right), \tag{1}$$

где U_1 и U_2 — матрицы второго порядка [ст. II, § 8]. Напомним обозначения и некоторые результаты этих исследований. Обозначим через $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ и $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$ характеристические числа матриц U_1 и U_2 и положим

$$U_1-\xi_1^{(1)}=\overline{U}_1, \qquad U_2-\xi_2^{(1)}=\overline{U}_2. \tag{2}$$

Характеристические числа двух новых матриц $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ суть соответственно 0, $\xi_1^{(2)}-\xi_1^{(1)}=\xi_1$ и 0, $\xi_2^{(2)}-\xi_2^{(1)}=\xi_2$, и мы имеем

$$\sigma(\overline{U}_1)=\xi_1^{(2)}-\xi_1^{(1)}=\xi_1; \qquad \sigma(\overline{U}_2)=\xi_2^{(2)}-\xi_2^{(1)}=\xi_2. \tag{3}$$

Положим еще

$$\sigma(\overline{U}_1\overline{U}_2)=\sigma(\overline{U}_2\overline{U}_1)=\rho. \tag{4}$$

Для этого параметра ρ мы имеем формулу

$$\rho=\xi_1\xi_2-D(\overline{U}_\infty), \tag{5}$$

где

$$\overline{U}_\infty=-(\overline{U}_1+\overline{U}_2). \tag{6}$$

Формула (5) имеет место для всех матриц U_1 и U_2, определители которых равны нулю.

Интегральная нормированная матрица системы (1) и ее интегральные и показательные подстановки могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}Y_b(x)=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{\xi_1^{(1)}}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{\xi_2^{(1)}}[I+\overline{U}_1\varphi_{11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\\ +\overline{U}_1\overline{U}_2\varphi_{12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\overline{U}_2\overline{U}_1\varphi_{21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)+\overline{U}_2\varphi_{22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)],\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}V_j=e^{2\pi i\xi_j^{(1)}}[I+\overline{U}_1\omega_{j11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_1\overline{U}_2\omega_{j12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\\ +\overline{U}_2\overline{U}_1\omega_{j21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_2\omega_{j22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)],\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}W_j=\Xi_j\left(\begin{matrix}U_1U_2\\a_1a_2\end{matrix}\middle|\,b\right)=\xi_j^{(1)}+\overline{U}_1\sigma_{j11}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_1\overline{U}_2\sigma_{j12}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\\ +\overline{U}_2\overline{U}_1\sigma_{j21}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{U}_2\sigma_{j22}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\varphi_{kl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^\nu\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x), \tag{10}$$

$$\omega_{jkl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^\nu\omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b), \tag{11}$$

$$\sigma_{jkl}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^\nu\sigma_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b) \tag{12}$$

суть целые функции параметра ρ, при этом коэффициенты $\varphi_{kl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,x)$ определяются рекуррентными соотношениями, указанными в теореме XII второй статьи, $\omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)$ выражаются интегралами по контуру (a_j), охватывающему точку $x=a_j$ и

$$\sigma_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=\frac{\xi_j}{e^{2\pi i\xi_j}-1}\,\omega_{jkl}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b). \tag{13}$$

Эти последние формулы делают совершенно очевидной природу мероморфности функций (9).

Сделаем еще замечание относительно параметра ρ, определение которого зависит от выбора характеристического числа $\xi_j^{(1)}$. Мы имеем формулы [ст. I, § 20]:

$$\xi_j=\xi_j^{(2)}-\xi_j^{(1)}=\pm\sqrt{\sigma(U_j)^2-4D(U_j)},$$

$$\rho=\sigma(U_1U_2)-\frac{\sigma(U_1)\,\sigma(U_2)}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{[\sigma(U_1)^2-4D(U_1)]\,[\sigma(U_2)^2-4D(U_2)]},$$

где фиксируем определенные значения радикалов

$$\sqrt{\sigma(U_j)^2-4D(U_j)} \qquad (j=1,\,2).$$

Предположим, что удовлетворено одно из двух следующих условий:

$$2\sigma(U_1U_2)-\sigma(U_1)\,\sigma(U_2)\pm\sqrt{[\sigma(U_1)^2-4D(U_1)]\,[\sigma(U_2)^2-4D(U_2)]}=0. \tag{14}$$

Положим

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1 \quad \text{или} \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=-1,$$

если перед радикалом в (14) стоит знак $+$; наоборот, если перед радикалом стоит знак $-$, то положим

$$\varepsilon_1=+1,\quad \varepsilon_2=-1 \quad \text{или} \quad \varepsilon_1=-1,\quad \varepsilon_2=+1.$$

Тогда, если мы возьмем

$$\xi_j=-\varepsilon_j\sqrt{\sigma(U_j)^2-4D(U_j)},$$

то получим в силу (14) $\rho=0$. Если бы мы положили

$$\xi_1=\varepsilon_1\sqrt{\sigma(U_1)^2-4D(U_1)}, \qquad \xi_2=-\varepsilon_2\sqrt{\sigma(U_2)^2-4D(U_2)},$$

то нашли бы $\rho=\xi_1\xi_2$. Следовательно, мы можем, меняя роль чисел $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$ в первой из формул, случай $\rho=\xi_1\xi_2$ свести к случаю $\rho=0$.

§ 2. Решение проблемы в общем случае

Переходим теперь к решению проблемы Римана для системы Гаусса (1), что сводится к построению дифференциальных подстановок

$$U_j = H_j\begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} b\Big) \qquad (j = 1,\ 2) \tag{15}$$

как функций показательных подстановок W_1 и W_2. Подстановки U_j и W_j подобны и, следовательно, мы можем сохранить обозначения $\xi_j^{(1)}$ и $\xi_j^{(2)}$ для характеристических чисел матрицы W_j. Кроме того, положим

$$W_1 - \xi_1^{(1)} = \overline{W}_1; \quad W_2 - \xi_2^{(1)} = \overline{W}_2, \qquad \sigma(\overline{W}_1\overline{W}_2) = \sigma(\overline{W}_2\overline{W}_1) = \tau.$$

Характеристические числа матриц $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$, подобных матрицам $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$, суть 0, $\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}$ и 0, $\xi_2^{(2)} - \xi_2^{(1)}$.

Функции (15) являются решениями системы

$$\Xi\left(\begin{matrix} U_1 & U_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\,\Big|\, b\right) = W_j \qquad (j = 1,\ 2). \tag{16}$$

Но на основании формулы (9) мы имеем

$$\Xi\left(\begin{matrix} U_1 & U_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\,\Big|\, b\right) = \xi_j^{(1)} + \Xi\left(\begin{matrix} \overline{U}_1 & \overline{U}_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\,\Big|\, b\right).$$

Следовательно, вместо уравнения (16) можно взять уравнение

$$\Xi\left(\begin{matrix} \overline{U}_1 & \overline{U}_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}\,\Big|\, b\right) = \overline{W}_j \qquad (j = 1,\ 2). \tag{17}$$

и найдя $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, следует положить

$$U_j = \overline{U}_j + \xi_j^{(1)}.$$

Итак, речь идет о решении системы (17) относительно $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, причем подстановки $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ предполагаются заданными. Начнем с построения выражения параметра ρ, отправляясь от матриц $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$. Мы имеем интегральную подстановку в бесконечно далекой точке:

$$\overline{V}_\infty = \left(e^{2\pi i\overline{W}_1}e^{2\pi i\overline{W}_2}\right)^{-1}$$

и, следовательно, дифференциальная подстановка в этой точке будет

$$\overline{U}_\infty = -\frac{1}{2\pi i}\lg\left(e^{2\pi i\overline{W}_1}e^{2\pi i\overline{W}_2}\right), \tag{18}$$

где

$$\overline{U}_\infty = -(\overline{U}_1 + \overline{U}_2),$$

и на основании формулы (5) мы имеем

$$\rho = \xi_1\xi_2 + \frac{1}{4\pi^2}D\left(\lg\left[e^{2\pi i\overline{W}_1}e^{2\pi i\overline{W}_2}\right]\right). \tag{19}$$

Построим инварианты матрицы $e^{2\pi i\overline{W}_1}e^{2\pi i\overline{W}_2}$. Формула Лагранжа—Сильвестра дает

$$e^{2\pi i\overline{W}_j} = I + \overline{W}_j\frac{e^{2\pi i\xi_j} - 1}{\xi_j},$$

и, следовательно,

$$\sigma\left(e^{2\pi i\overline{W}_1}e^{2\pi i\overline{W}_2}\right) = \sigma\left(\left[I + \overline{W}_1\frac{e^{2\pi i\xi_1} - 1}{\xi_1}\right]\left[I + \overline{W}_2\frac{e^{2\pi i\xi_2} - 1}{\xi_2}\right]\right) =$$
$$= \tau\frac{(e^{2\pi i\xi_1} - 1)(e^{2\pi i\xi_2} - 1)}{\xi_1\xi_2} + e^{2\pi i\xi_1} + e^{2\pi i\xi_2}.$$

С другой стороны,

$$D\left(e^{2\pi i\overline{W}_1}e^{2\pi i\overline{W}_2}\right) = D\left(e^{2\pi i\overline{W}_1}\right)D\left(e^{2\pi i\overline{W}_2}\right) = e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2)}.$$

Поэтому характеристические числа подстановки $\overline{V}_\infty$ суть

$$\left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)^{-1},$$

где мы положили

$$\alpha = \tau\frac{(e^{2\pi i\xi_1} - 1)(e^{2\pi i\xi_2} - 1)}{\xi_1\xi_2} + e^{2\pi i\xi_1} + e^{2\pi i\xi_2}, \qquad \beta = e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2)}, \tag{20}$$

и характеристические числа подстановки $\overline{U}_\infty$

$$-\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right). \tag{21}$$

В силу формулы (6) значения этих логарифмов должны удовлетворять соотношению

$$\xi_1 + \xi_2 - \frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) - \frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) = 0 \tag{22}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) = \xi_1 + \xi_2 - \frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right). \tag{23}$$

Формула (5) дает теперь выражение параметра ρ, при этом подстановки $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ предполагаются заданными:

$$\rho = \xi_1\xi_2 + \frac{1}{4\pi^2}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)\lg\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) \tag{24}$$

или

$$\rho = \xi_1\xi_2 - (\xi_1 + \xi_2)\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) - \frac{1}{4\pi^2}\lg^2\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right). \tag{25}$$

Заметим, что разрешая это последнее уравнение относительно α, мы получим выражение τ через ρ:

$$\tau\frac{(e^{2\pi i\xi_1} - 1)(e^{2\pi i\xi_2} - 1)}{\xi_1\xi_2} = 2e^{(\xi_1+\xi_2)\pi i}\left[\cos\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + 4\rho}\,\pi - \cos(\xi_1 - \xi_2)\pi\right]. \tag{26}$$

Рассмотрим сначала общий случай, когда

$$\tau \neq 0 \quad \text{и} \quad \tau \neq \xi_1\xi_2. \tag{27}$$

Мы знаем [гл. IV, § 2], что если подстановки $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ находятся в окрестности нулевой подстановки, то имеет место представление

$$\overline{U}_j = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2)}\overline{W}_{j_1}\ldots\overline{W}_{j_\nu}R_j(a_{j_1},\ldots a_{j_\nu}\,|\,b). \tag{28}$$

Это разложение может быть представлено в виде [ст. I, § 20]

$$\overline{U}_j = \overline{W}_1\tau_{j11}(\tau \mid \xi_1\xi_2 \mid b) + \overline{W}_1\overline{W}_2\tau_{j12}(\tau \mid \xi_1\xi_2 \mid b) + \\ + \overline{W}_2\overline{W}_1\tau_{j21}(\tau \mid \xi_1\xi_2 \mid b) + \overline{W}_2\tau_{j22}(\tau \mid \xi_1\xi_2 \mid b); \tag{28}$$

где коэффициенты

$$\tau_{jkl}(\tau \mid \xi_1\xi_2 \mid b) = \tau_{jkl}$$

определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \tau_{j11} &= \frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}[\xi_2^2\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1) - \xi_2\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1\overline{W}_2) - \xi_2\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2\overline{W}_1) + \tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2)],\\ \tau_{j12} &= \frac{1}{\tau(\tau-\xi_1\xi_2)^2}[-\xi_2\tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1) + \tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1\overline{W}_2) + \\ &\qquad + \xi_1\xi_2\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2\overline{W}_1) - \xi_1\tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2)],\\ \tau_{j21} &= \frac{1}{\tau(\tau-\xi_1\xi_2)^2}[-\xi_2\tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1) + \xi_1\xi_2\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1\overline{W}_2) + \\ &\qquad + \tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_3\overline{W}_1) - \xi_1\tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2)],\\ \tau_{j22} &= \frac{1}{(\tau-\sigma_1\sigma_2)^2}[\tau\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1) - \xi_1\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_1\overline{W}_2) - \xi_1\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2\overline{W}_1) + \xi_1^2\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Когда подстановки $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ находятся в окрестности нулевых подстановок и $\overline{U}_j$ выражаются формулами (28), мы должны, очевидно, взять главные значения логарифмов в формулах для характеристических чисел матрицы $\overline{U}_\infty$ и, следовательно, в формулах (24) и (25). Итак, мы окончательно получили значение ρ и, следовательно, коэффициенты в формулах (9):

$$\sigma_{jkl}(\rho \mid \xi_1\xi_2 \mid b) = \sigma_{jkl}.$$

В силу этой формулы

$$\overline{W}_j = \overline{U}_1\sigma_{j11} + \overline{U}_1\overline{U}_2\sigma_{j12} + \overline{U}_2\overline{U}_1\sigma_{j21} + \overline{U}_2\sigma_{j22}, \tag{31}$$

и мы непосредственно вычисляем инварианты правых частей формул (30):

$$\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_k) = \sigma(\overline{U}_j[\overline{U}_1\sigma_{k11} + \overline{U}_1\overline{U}_2\sigma_{k12} + \overline{U}_2\overline{U}_1\sigma_{k21} + \overline{U}_2\sigma_{k22}]) = \\ = \sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{kpq}\lambda_{jpq}, \tag{32}$$

$$\sigma(\overline{U}_j\overline{W}_k\overline{W}_l) = \sum_{p,q,r,s=1}^{2}\sigma_{kpq}\sigma_{lrs}\mu_{jpqrs}, \tag{33}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda_{jjj} = \xi_j^2; & \lambda_{jjh} = \xi_j\rho; & \lambda_{jhj} = \xi_j\rho; & \lambda_{jhh} = \rho,\\ \mu_{jjjjj} = \xi_j^3; & \mu_{jjjjh} = \xi_j^2\rho; & \mu_{jjjhj} = \xi_j^2\rho; & \mu_{jjjhh} = \xi_j\rho,\\ \mu_{jjhjj} = \xi_j^2\rho; & \mu_{jjhjh} = \xi_j\rho^2; & \mu_{jjhhj} = \xi_j^2\xi_h\rho; & \mu_{jjhhh} = \xi_j\xi_h\rho, \quad (j \neq h)\\ \mu_{jhjjj} = \xi_j^2\rho; & \mu_{jhjjh} = \xi_j\rho^2; & \mu_{jhjhj} = \xi_j\rho^2; & \mu_{jhjhh} = \rho^2,\\ \mu_{jhhjj} = \xi_j\rho; & \mu_{jhhjh} = \rho^2; & \mu_{jhhhj} = \xi_j\xi_h\rho; & \mu_{jhhhh} = \xi_h\rho. \end{array}\right\} \tag{34}$$

Подставляя значения инвариантов (32) и (33) в формулы (30), получаем выражения:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{jkk} &= \frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\Bigg[\xi_l^2\sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{kpq}\lambda_{jpq} - \xi_l\sum_{p,q,r,s=1}^{2}\sigma_{kpq}\sigma_{lrs}(\mu_{jpqrs} + \\ &\qquad + \mu_{jrspq}) + \tau\sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{lpq}\lambda_{jpq}\Bigg],\\ \tau_{jkl} &= \frac{1}{\tau(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\Bigg[-\xi_l\tau\sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{kpq}\lambda_{jpq} + \sum_{p,q,r,s=1}^{2}\sigma_{kpq}\sigma_{lrs}(\tau\mu_{jpqrs} + \\ &\qquad + \xi_1\xi_2\mu_{jrspq}) - \xi_k\tau\sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{lpq}\lambda_{jpq}\Bigg] \qquad (k \neq l). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Беря инварианты от обеих частей соотношения (31), получаем равенство

$$\xi_1\sigma_{j11} + \rho\sigma_{j12} + \rho\sigma_{j21} + \xi_2\sigma_{j22} = \xi_j,$$

которое можно записать в виде

$$\sigma_{kjj}\xi_j + \sigma_{kjh}\rho + \sigma_{khj}\rho + \sigma_{khh}\xi_h = \xi_k$$

или

$$\sigma_{ljj}\xi_j + \sigma_{ljh}\rho + \sigma_{lhj}\rho + \sigma_{lhh}\xi_h = \xi_l \qquad (j \neq h).$$

Пользуясь этими равенствами, можно упростить представления (35). Действительно,

$$\sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{kpq}\lambda_{jpq} = \sigma_{kjj}\xi_j^2 + \sigma_{kjh}\xi_j\rho + \sigma_{khj}\xi_j\rho + \sigma_{khh}\rho = \\ = \xi_j(\xi_k - \sigma_{khh}\xi_h) + \sigma_{khh}\rho = \xi_j\xi_k + \sigma_{khh}(\rho - \xi_j\xi_h),$$

и аналогичным образом

$$\sum_{p,q=1}^{2}\sigma_{lpq}\lambda_{jpq} = \xi_j\xi_l + \sigma_{lhh}(\rho - \xi_j\xi_h).$$

Затем имеем

$$\sum_{p,q,r,s=1}^{2}\sigma_{kpq}\sigma_{lrs}\mu_{jpqrs} = \sigma_{kjj}\sigma_{ljj}\xi_j^3 + \sigma_{kjj}\sigma_{ljh}\xi_j^2\rho + \sigma_{kjj}\sigma_{lhj}\xi_j^2\rho + \\ + \sigma_{kjj}\sigma_{lhh}\xi_j\rho + \sigma_{kjh}\sigma_{ljj}\xi_j^2\rho + \sigma_{kjh}\sigma_{ljh}\xi_j\rho^2 + \sigma_{kjh}\sigma_{lhj}\xi_j^2\xi_h\rho + \\ + \sigma_{kjh}\sigma_{lhh}\xi_j\xi_h\rho + \sigma_{khj}\sigma_{ljj}\xi_j^2\rho + \sigma_{khj}\sigma_{ljh}\xi_j\rho^2 + \sigma_{khj}\sigma_{lhj}\xi_j\rho^2 + \\ + \sigma_{khj}\sigma_{lhh}\rho^2 + \sigma_{khh}\sigma_{ljj}\xi_j\rho + \sigma_{khh}\sigma_{ljh}\rho^2 + \sigma_{khh}\sigma_{lhj}\xi_j\xi_h\rho + \sigma_{khh}\sigma_{lhh}\xi_h\rho = \\ = \xi_j\xi_k\xi_l + \sigma_{khh}(\rho-\xi_j\xi_h)\xi_l + (\rho-\xi_j\xi_h)(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh}\xi_j - \sigma_{kjh}\sigma_{lhj}\xi_j\rho + \sigma_{khj}\sigma_{lhh}\rho - \sigma_{khh}\sigma_{lhj}\rho),$$

и аналогичным образом

$$\sum_{p,q,r,s=1}^{2}\sigma_{kpq}\sigma_{lrs}\mu_{jrspg} = \xi_j\xi_k\xi_l + \sigma_{lhh}(\rho - \xi_j\xi_h)\xi_k + \\ + (\rho - \xi_j\xi_h)(\sigma_{khh}\sigma_{ljj}\xi_j - \sigma_{khj}\sigma_{ljh}\xi_j\rho + \sigma_{khh}\sigma_{lhj}\rho - \sigma_{khj}\sigma_{lhh}\rho).$$

Подставляя эти значения в выражения (35), мы получим формулы

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{jkk}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b) &= \frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\{-\xi_l(\rho-\xi_1\xi_2)[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh}+\sigma_{khh}\sigma_{ljj})\xi_j-\\
&\quad-(\sigma_{kjh}\sigma_{lhj}+\sigma_{khj}\sigma_{ljh})\xi_j\rho]+\sigma_{lhh}(\rho-\xi_1\xi_2)(\tau-\xi_1\xi_2)+(\tau-\xi_1\xi_2)\xi_j\xi_l\},\\
\tau_{jkl}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b) &= \frac{1}{\tau(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\{(\rho-\xi_1\xi_2)[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh}\tau+\sigma_{khh}\sigma_{ljj}\xi_1\xi_2)\xi_j-\\
&\quad-(\sigma_{kjh}\sigma_{lhj}\tau+\sigma_{khj}\sigma_{ljh}\xi_1\xi_2)\xi_j\rho+(\sigma_{khj}\sigma_{lhh}-\sigma_{khh}\sigma_{lhj})\rho(\tau-\xi_1\xi_2)]-\\
&\quad-\sigma_{lhh}(\rho-\xi_1\xi_2)(\tau-\xi_1\xi_2)\xi_k-\xi_j\xi_1\xi_2(\tau-\xi_1\xi_2)\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

В этих выражениях функции

$$\sigma_{kpq}=\sigma_{kpq}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,[b)$$

суть целые функции параметра ρ, определяемого формулой (24) или (25). Подставляя выражения (36) в формулу (29), мы будем иметь аналитическое продолжение разложений (28), откуда вытекает следующая теорема.

Теорема I. *Функции* (15) *могут быть представлены в виде:*

$$U_j=\xi_j^{(1)}+\overline{W}_1\tau_{j11}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{W}_1\overline{W}_2\tau_{j12}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+$$
$$+\overline{W}_2\overline{W}_1\tau_{j21}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{W}_2\tau_{j22}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b),\qquad(37)$$

при этом коэффициенты $\tau_{jpq}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)$ *определяются формулами* (36), *где параметр* ρ *может быть вычислен по формуле* (24) *или* (25) *и функции* $\sigma_{kpq}=\sigma_{kpq}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)$ — *по формулам* (13).

Из этой теоремы следует, что дифференциальные подстановки U_j могут быть представлены в виде рядов по степеням параметра ρ, причем эти ряды всегда сходятся:

$$U_j=\xi_j^{(1)}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{\nu}\,[\overline{W}_1\zeta_{j11}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{W}_1\overline{W}_2\zeta_{j12}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)+$$
$$+\overline{W}_2\overline{W}_1\zeta_{j21}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{W}_2\zeta_{j22}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)],$$

и коэффициенты определяются формулами:

$$\zeta_{jkk}^{(0)}=\frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\left\{\xi_1\xi_2\xi_j\xi_l\left[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh})^{(0)}+(\sigma_{khh}\sigma_{ljj})^{(0)}\right]-\sigma_{lhh}^{(0)}\xi_1\xi_2(\tau-\xi_1\xi_2)+(\tau-\xi_1\xi_2)\xi_j\xi_l\right\},$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{jkk}^{(\nu)}&=\frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\left\{\xi_1\xi_2\xi_j\xi_l\left[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh})^{(\nu)}+(\sigma_{khh}\sigma_{ljj})^{(\nu)}\right]-\sigma_{lhh}^{(\nu)}\xi_1\xi_2(\tau-\xi_1\xi_2)-\right.\\
&\quad-\xi_j\xi_l\left[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh})^{(\nu-1)}+(\sigma_{khh}\sigma_{ljj})^{(\nu-1)}\right]-\xi_1\xi_2\xi_j\xi_l\left[(\sigma_{kjh}\sigma_{lhj})^{(\nu-1)}+(\sigma_{khj}\sigma_{ljh})^{(\nu-1)}\right]\\
&\quad\left.+\sigma_{lhh}^{(\nu-1)}(\tau-\xi_1\xi_2)+\xi_j\xi_l\left[(\sigma_{kjh}\sigma_{lhj})^{(\nu-2)}+(\sigma_{khj}\sigma_{ljh})^{(\nu-2)}\right]\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{jkl}^{(0)}&=\frac{1}{\tau(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\{-\xi_1\xi_2\xi_j[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh})^{(0)}\tau+(\sigma_{khh}\sigma_{ljj})^{(0)}\xi_1\xi_2]+\\
&\quad+\sigma_{lhh}^{(0)}\xi_1\xi_2\xi_k(\tau-\xi_1\xi_2)-\xi_j\xi_1\xi_2(\tau-\xi_1\xi_2)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{jkl}^{(\nu)}&=\frac{1}{\tau(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\{-\xi_1\xi_2\xi_j[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh})^{(\nu)}\tau+(\sigma_{khh}\sigma_{ljj})^{(\nu)}\xi_1\xi_2]+\\
&\quad+\sigma_{lhh}^{(\nu)}\xi_1\xi_2\xi_k(\tau-\xi_1\xi_2)+\xi_j[(\sigma_{kjj}\sigma_{lhh})^{(\nu-1)}\tau+(\sigma_{khh}\sigma_{ljj})^{(\nu-1)}\xi_1\xi_2]+\\
&\quad+\xi_1\xi_2\xi_j[(\sigma_{kjh}\sigma_{lhj})^{(\nu-1)}\tau+(\sigma_{khj}\sigma_{ljh})^{(\nu-1)}\xi_1\xi_2]-\xi_1\xi_2(\tau-\xi_1\xi_2)[(\sigma_{khj}\sigma_{lhh})^{(\nu-1)}-\\
&\quad-(\sigma_{khh}\sigma_{lhj})^{(\nu-1)}]-\xi_k(\tau-\xi_1\xi_2)\sigma_{lhh}^{(\nu-1)}-\xi_j[(\sigma_{kjh}\sigma_{lhj})^{(\nu-2)}\tau+\\
&\quad+(\sigma_{khj}\sigma_{ljh})^{(\nu-2)}\xi_1\xi_2]+(\tau-\xi_1\xi_2)[(\sigma_{khj}\sigma_{lhh})^{(\nu-2)}-(\sigma_{khh}\sigma_{lhj})]\},
\end{aligned}$$

где

$$\sigma_{jpq}^{(\nu)}=\sigma_{jpq}^{(\nu)}(\xi_1\xi_2\,|\,b);\quad(\sigma_{kpq}\sigma_{lrs})^{(\nu)}=\sum_{\mu=0}^{\nu}\sigma_{kpq}^{(\mu)}\sigma_{lrs}^{(\nu-\mu)};\quad\sigma_{kpq}^{(\mu)}=0,\ \text{если}\ \mu<0.$$

Из предыдущих рассмотрений следует, что дифференциальные подстановки U_j суть *многозначные* функции показательных подстановок W_j, ветвления которых определяются ветвлениями логарифмической функции

$$\lg\frac{1}{2}\left[\tau\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)}{\xi_1\xi_2}+e^{2\pi i\xi_1}+e^{2\pi i\xi_2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(\tau\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)}{\xi_1\xi_2}+e^{2\pi i\xi_1}+e^{2\pi i\xi_2}\right)^2-4e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2)}}\right],\qquad(38)$$

которая входит в выражение параметра ρ.

Кроме того, функции (37) имеют особенности, доставляемые значениями $\overline{W}_j$, для которых

$$e^{2\pi i\xi_1}=1;\quad e^{2\pi i\xi_2}=1\qquad(\xi_1\neq0;\ \xi_2\neq0);\qquad(39)$$

$$\tau=0;\quad\tau=\xi_1\xi_2.\qquad(40)$$

Особенности (39) соответствуют тому случаю, когда разности характеристических чисел W_1 и W_2 суть целые числа. Эти целые значения ξ_1 или ξ_2 являются особенностями функций $\sigma_{jpq}(\rho\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)$.

§ 3. Особый случай

Рассмотрим теперь особенности (40). Как мы видели выше, случай $\tau=\xi_1\xi_2$ всегда можно свести к случаю $\tau=0$, и можно рассматривать лишь этот последний случай. Если $\tau=0$, то

$$\alpha=e^{2\pi i\xi_1}+e^{2\pi i\xi_2}\quad\text{и}\quad\alpha^2-4\beta=(e^{2\pi i\xi_1}-e^{2\pi i\xi_2})^2.$$

Принимая во внимание соотношение (23), мы видим, что в этом случае

$$\rho=\xi_1\xi_2-(\xi_1+k)(\xi_2-k),$$

где k — целое число и, следовательно, можно взять значение логарифма (38) так, чтобы было $\rho=0$. Будем теперь рассматривать формулы (36) в предельном случае, когда $\rho=\tau=0$.

Результаты теоремы XII второй статьи дают соотношения

$$\sigma_{kjj}^{(0)}=\begin{cases}1, & \text{если}\ k=j,\\ 0, & \text{если}\ k\neq j,\end{cases}$$

и в силу (36)

$$[\sigma_{jkk}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)]_{\substack{\tau=0\\ \rho=0}}=\tau_{jkk}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=$$
$$=\frac{1}{(\xi_1\xi_2)^2}\left[\xi_1\xi_2\xi_j\xi_l\left(\sigma_{kjj}^{(0)}\sigma_{lhh}^{(0)}+\sigma_{ljj}^{(0)}\sigma_{khh}^{(0)}\right)+(\xi_1\xi_2)^2\sigma_{lhh}^{(0)}-\xi_1\xi_2\xi_j\xi_l\right],$$

откуда следует

$$\sigma_{jkk}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=\begin{cases}1, & \text{если } j=k;\\ 0, & \text{если } j\neq k.\end{cases}$$

Положим далее

$$\tau_{jkl}(\tau\,|\,\xi_1\xi_2\,|\,b)=\tau'_{jkl}+\tau''_{jkl},$$

где

$$\tau'_{jkl}=\frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\{(\rho-\xi_1\xi_2)[\sigma_{kjj}\sigma_{lhh}\xi_j-\sigma_{kjh}\sigma_{lhj}\xi_j\rho+$$
$$+(\sigma_{khj}\sigma_{lhh}-\sigma_{khh}\sigma_{lhj})\rho-\sigma_{lhh}(\rho-\xi_1\xi_2)\xi_k-\xi_j\xi_1\xi_2\},$$
$$\tau''_{jkl}=\frac{1}{(\tau-\xi_1\xi_2)^2}\Big\{\frac{1}{\tau}[-(\xi_1\xi_2)^2\xi_j\sigma_{khh}\sigma_{ljj}+\xi_j(\xi_1\xi_2)^2-\sigma_{lhh}(\xi_1\xi_2)^2\xi_k]+$$
$$+\frac{\rho}{\tau}[\sigma_{khh}\sigma_{ljj}\xi_1\xi_2\xi_j-(\rho-\xi_1\xi_2)\sigma_{khj}\sigma_{ljh}\xi_1\xi_2\xi_j-$$
$$-(\rho-\xi_1\xi_2)(\sigma_{khj}\sigma_{lhh}-\sigma_{khh}\sigma_{lhj})\xi_1\xi_2+\sigma_{lhh}\xi_1\xi_2\xi_k]\Big\}.$$

Рассмотрим теперь случай $\rho=\tau=0$ как предельный случай матриц $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$, для которых $\tau\neq 0$, причем числа ξ_1 и ξ_2 предполагаются фиксированными. Формула (24) или (26) дает при этом предположении

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\rho}{\tau}=\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)(\xi_2-\xi_1)}{2\pi i\xi_1\xi_2(e^{2\pi i\xi_2}-e^{2\pi i\xi_1})},$$

и из предыдущих формул получаются предельные значения τ'_{jkl} и τ''_{jkl}:

если $j=k$:

$$\lim\tau'_{jkl}=-\frac{1}{\xi_l},$$
$$\lim\tau''_{jkl}=\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)(\xi_2-\xi_1)}{2\pi i(\xi_1\xi_2)^3(e^{2\pi i\xi_2}-e^{2\pi i\xi_1})}[-(\xi_1\xi_2)^2\xi_j\sigma_{lhh}^{(1)}+(\xi_1\xi_2)^2\xi_j\sigma_{khj}^{(0)}\sigma_{ljh}^{(0)}+$$
$$+(\xi_1\xi_2)^2\sigma_{khj}^{(0)}+\xi_1\xi_2\xi_k];$$

если $j=l$:

$$\lim\tau'_{jkl}=-\frac{1}{\xi_k},$$
$$\lim\tau''_{jkl}=\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)(\xi_2-\xi_1)}{2\pi i(\xi_1\xi_2)^3(e^{2\pi i\xi_2}-e^{2\pi i\xi_1})}\Big[-(\xi_1\xi_2)^2\xi_j\left(\sigma_{khh}^{(1)}+\sigma_{ljj}^{(1)}\right)-$$
$$-(\xi_1\xi_2)^2\xi_k\sigma_{lhh}^{(1)}+\xi_1\xi_2\xi_j+(\xi_1\xi_2)^2\xi_j\sigma_{khj}^{(0)}\sigma_{ljh}^{(0)}-(\xi_1\xi_2)^2\sigma_{lhj}^{(0)}\Big].$$

Принимая во внимание эти соотношения и замечая, что соотношения (40) эквивалентны условию (14), примененному к матрицам W_1 и W_2:

$$2\sigma(W_1W_2)-\sigma(W_1)\sigma(W_2)\pm\sqrt{[\sigma(W_1)^2-4D(W_1)][\sigma(W_2)^2-4D(W_2)]}=0,\quad (41)$$

мы можем дополнить теорему I следующей теоремой:

Теорема II. *Если выполнено условие* (41), *то мы имеем решение проблемы Римана в виде*

$$U_j=\xi_j^{(1)}+\overline{W}_1\tau_{j11}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{W}_1\overline{W}_2\tau_{j12}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)+$$
$$+\overline{W}_2\overline{W}_1\tau_{j21}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)+\overline{W}_2\tau_{j22}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b),\qquad (42)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\tau_{jjj}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=1,\\
&\tau_{jjh}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)(\xi_2-\xi_1)}{2\pi i\xi_j\xi_h^2(e^{2\pi i\xi_2}-e^{2\pi i\xi_1})}\big[\xi_1\xi_2\sigma_{jhj}^{(0)}\sigma_{hjh}^{(0)}-\xi_1\xi_2\sigma_{hhh}^{(1)}+\\
&\qquad\qquad+\xi_h\sigma_{jhj}^{(0)}+1\big]-\frac{1}{\xi_h},\\
&\tau_{jhj}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=\frac{(e^{2\pi i\xi_1}-1)(e^{2\pi i\xi_2}-1)(\xi_2-\xi_1)}{2\pi i\xi_j\xi_h^2(e^{2\pi i\xi_2}-e^{2\pi i\xi_1})}\big[\xi_1\xi_2\sigma_{hhj}^{(0)}\sigma_{jjh}^{(0)}-\\
&\qquad\qquad-\xi_1\xi_2\left(\sigma_{hhh}^{(1)}+\sigma_{jjj}^{(1)}\right)-\xi_h^2\sigma_{jhh}^{(1)}-\xi_h\sigma_{jhj}^{(0)}+1\big]-\frac{1}{\xi_h},\\
&\tau_{jhh}^{(0)}(\xi_1\xi_2\,|\,b)=0
\end{aligned}\right\}\qquad (43)$$

и

$$\xi_j^{(1)}=\frac{1}{2}\left[\sigma(W_j)+\varepsilon_j\sqrt{\sigma(W_j)^2-4D(W_j)}\right],$$

причем следует положить $\varepsilon_1=\varepsilon_2=+1$ *или* $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$, *если перед радикалом в* (41) *стоит знак* $+$, *и* $\varepsilon_1=+1$, $\varepsilon_2=-1$ *или* $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=+1$, *если знак* $-$.

Отметим еще раз, что можно было выполнить предельный переход иным способом и получить другой результат.

§ 4. Многозначность решения проблемы

Теперь мы должны изучить природу многозначности функций (15), дающих решение проблемы Римана.

Заметим, что если U_j есть значение функций (15), отвечающее значениям W_1 и W_2 показательных подстановок, то с помощью преобразования вида:

$$U'_j=[I-(a_j-b)T]\,U_j\,[I+(a_j-b)T],\qquad (44)$$

можно получить другое значение этих функций, отвечающее тем же самым значениям показательных подстановок, где T — решение уравнения

$$T\sum_{j=1}^{2}U_j-\sum_{j=1}^{2}U_jT=T-T\sum_{j=1}^{2}a_jU_jT,\qquad (45)$$

удовлетворяющее условию

$$T^2=0.\qquad (46)$$

Мы знаем, кроме того, что уравнения (45) и (46), вообще говоря, имеют два решения, и если канонический вид дифференциальной подстановки в бесконечно далекой точке

$$U_\infty=-(U_1+U_2)=S[\sigma_1,\ \sigma_2]\,S^{-1},\qquad (47)$$

то эти два решения таковы:

$$T_{pq}=\frac{\sigma_p-\sigma_q+1}{\sum\limits_{j=1}^{2}a_j\{S^{-1}U_jS\}_{pq}}\,S\mathfrak{E}_{qp}S^{-1}\qquad (q,\ p=1,\ 2;\ q\neq p),\qquad (48)$$

где $\mathfrak{E}_{qp}$ — матрица, у которой все элементы равны нулю, за исключением $\{\mathfrak{E}_{qp}\}_{qp}=1$. Представим теперь решения (48) в форме, наиболее пригодной для дальнейших исследований.

Заметим прежде всего, что уравнение (45) может быть записано в виде

$$T(\overline{U}_1+\overline{U}_2)-(\overline{U}_1+\overline{U}_2)T=T-T(a_1\overline{U}_1+a_2\overline{U}_2)T$$

и, так как $D(T)$ равно нулю, мы имеем

$$T(a_1\overline{U}_1+a_2\overline{U}_2)T=T\sigma(a_1\overline{U}_1T+a_2\overline{U}_2T)$$

и, следовательно, уравнение (45) может быть записано в виде

$$(\overline{U}_1+\overline{U}_2)T-T(\overline{U}_1+\overline{U}_2)=\delta T, \tag{49}$$

где

$$\delta=\sigma(a_1\overline{U}_1T+a_2\overline{U}_2T)-1. \tag{50}$$

Положим

$$\overline{U}_\infty=-(\overline{U}_1+\overline{U}_2)=-(U_1+U_2)+\xi_1^{(1)}+\xi_2^{(1)}.$$

Мы имеем

$$\overline{U}_\infty=S[\bar\sigma_1,\ \bar\sigma_2]\,S^{-1},\ \text{где}\ \bar\sigma_j=\sigma_j+\xi_1^{(1)}+\xi_2^{(1)}.$$

Уравнение (49) может быть записано следующим образом:

$$\widetilde{T}[\bar\sigma_1,\ \bar\sigma_2]-[\bar\sigma_1,\ \bar\sigma_2]\,\widetilde{T}=\delta\widetilde{T}, \tag{51}$$

где все элементы матрицы

$$\widetilde{T}_{pq}=S^{-1}T_{pq}S$$

являются нулями, за исключением $\{\widetilde{T}_{pq}\}_{qp}$, и из уравнения (51) следует, что [ст. I, § 22]

$$\delta=\bar\sigma_p-\bar\sigma_q=\sigma_p-\sigma_q. \tag{52}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\bar\sigma_1+\bar\sigma_2=\sigma(\overline{U}_\infty)=-\sigma(\overline{U}_1)-\sigma(\overline{U}_2)=-(\xi_1+\xi_2),$$

и в силу (5)

$$\bar\sigma_1\bar\sigma_2=D(\overline{U}_\infty)=\xi_1\xi_2-\rho,$$

откуда следует

$$\delta_p=\bar\sigma_p-\bar\sigma_q=\pm\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+4\rho}. \tag{53}$$

Сделаем теперь замечание, полезное для дальнейших исследований. Пусть Y_1 и Y_2 — заданные матрицы второго порядка. Рассмотрим представление любой подстановки X второго порядка в виде

$$X=Y_1\lambda_{11}+Y_1Y_2\lambda_{12}+Y_2Y_1\lambda_{21}+Y_2\lambda_{22}, \tag{54}$$

где λ_{ij} — численные коэффициенты. Для этих коэффициентов мы имеем систему

$$\{X\}_{ik}=\{Y_1\}_{ik}\lambda_{11}+\{Y_1Y_2\}_{ik}\lambda_{12}+\{Y_2Y_1\}_{ik}\lambda_{21}+\{Y_2\}_{ik}\lambda_{22},$$

определитель которой, как легко видеть, вообще говоря, отличен от нуля. Следовательно, мы имеем, вообще говоря, представление (54), при этом коэффициенты λ_{ij} определяются единственным образом. Следовательно,

подстановка T может быть представлена в виде

$$T=\overline{U}_1\lambda_{11}+\overline{U}_1\overline{U}_2\lambda_{12}+\overline{U}_2\overline{U}_1\lambda_{21}+\overline{U}_2\lambda_{22}, \tag{55}$$

и для того, чтобы определить коэффициенты λ_{ij} мы должны подставить выражение (55) в уравнение (49).

Замечая, что [ст. I, § 19]

$$\overline{U}_j^2=\xi_j\overline{U}_j,\quad \overline{U}_i\overline{U}_j\overline{U}_i=\overline{U}_i\rho$$

и приравнивая коэффициенты при матрицах $\overline{U}_1$, $\overline{U}_1\overline{U}_2$, $\overline{U}_2\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\delta\lambda_{11}+\rho\lambda_{12}-\rho\lambda_{21}\qquad\qquad\qquad\qquad &=0,\\
\lambda_{11}+(\xi_2-\xi_1+\delta)\lambda_{12}\qquad\qquad\qquad-\lambda_{22}&=0,\\
-\lambda_{11}\qquad\qquad+(\xi_1-\xi_2+\delta)\lambda_{21}+\lambda_{22}&=0,\\
-\rho\lambda_{12}\qquad+\rho\lambda_{21}+\delta\lambda_{22}&=0,
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

определитель которой равен нулю. Кроме того, равенство (50) дает уравнение

$$(a_1\xi_1^2+a_2\rho)\lambda_{11}+(a_1\xi_1\rho+a_2\xi_2\rho)(\lambda_{12}+\lambda_{21})+(a_1\rho+a_2\xi_2^2)\lambda_{22}=1+\delta. \tag{57}$$

Решая уравнения (56) и (57) относительно λ_{ij}, мы находим

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{11}&=\frac{1+\delta}{(a_2-a_1)(\rho-\xi_1\xi_2)}; & \lambda_{12}&=\frac{(\xi_2-\xi_1-\delta)(1+\delta)}{2(a_2-a_1)(\rho-\xi_1\xi_2)},\\
\lambda_{21}&=\frac{(\xi_2-\xi_1+\delta)(1+\delta)}{2(a_2-a_1)\rho(\rho-\xi_1\xi_2)}; & \lambda_{22}&=-\frac{1+\delta}{(a_2-a_1)(\rho-\xi_1\xi_2)},
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

и решения уравнения (49), удовлетворяющие условию (50), могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}T=\frac{1+\delta}{2(a_2-a_1)\rho(\rho-\xi_1\xi_2)}\,[2\rho\overline{U}_1+(\xi_2-\xi_1-\delta)\overline{U}_1\overline{U}_2+\\
+(\xi_2-\xi_1+\delta)\overline{U}_2\overline{U}_1-2\rho\overline{U}_2],\end{aligned} \tag{59}$$

где

$$\delta=\pm\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+4\rho}. \tag{60}$$

Полагая

$$\overline{U}'_j=U'_j-\xi_j^{(1)},$$

мы можем написать на основании (44)

$$\overline{U}'_j=[I-(a_j-b)T]\,\overline{U}_j\,[I+(a_j-b)T]$$

или

$$\overline{U}'_j=\overline{U}_j+(a_j-b)(\overline{U}_jT-T\overline{U}_j)-(a_j-b)^2T\sigma(\overline{U}_jT).$$

Но

$$\begin{aligned}
\overline{U}_jT&=\overline{U}_j^2\lambda_{jj}+\overline{U}_j^2\overline{U}_h\lambda_{jh}+\overline{U}_j\overline{U}_h\overline{U}_j\lambda_{hj}+\overline{U}_j\overline{U}_h\lambda_{hh}=\\
&=\overline{U}_j(\xi_j\lambda_{jj}+\rho\lambda_{hj})+\overline{U}_j\overline{U}_h(\xi_j\lambda_{jh}+\lambda_{hh}),\\
T\overline{U}_j&=\overline{U}_j^2\lambda_{jj}+\overline{U}_j\overline{U}_h\overline{U}_j\lambda_{jh}+\overline{U}_h\overline{U}_j^2\lambda_{hj}+\overline{U}_h\overline{U}_j\lambda_{hh}=\\
&=\overline{U}_j(\xi_j\lambda_{jj}+\rho\lambda_{jh})+\overline{U}_h\overline{U}_j(\xi_j\lambda_{hj}+\lambda_{hh})
\end{aligned}$$

$$(j,\ h=1,\ 2;\ j\neq h).$$

Формулы (58) дают:

$$\lambda_{jj} = -\frac{1+\delta}{(a_j - a_h)(\rho - \xi_1\xi_2)}; \qquad \lambda_{jh} = \frac{(\xi_j - \xi_h + \delta)(1+\delta)}{2(a_j - a_h)\rho(\rho - \xi_1\xi_2)}.$$

Таким образом мы имеем:

$$\sigma(\overline{U}_j T) = \frac{1+\delta}{a_j - a_h},$$

$$\overline{U}_j T - T\overline{U}_j = -\overline{U}_j \frac{\delta(1+\delta)}{(a_j - a_h)(\rho - \xi_1\xi_2)} +$$

$$+\overline{U}_j\overline{U}_h \frac{(\xi_j^2 + \xi_j\delta + 2\rho - \xi_j\xi_h)(1+\delta)}{2(a_j - a_h)\rho(\rho - \xi_1\xi_2)} + \overline{U}_h\overline{U}_j \frac{(\xi_j\xi_h + \xi_j\delta - \xi_j^2 - 2\rho)(1+\delta)}{2(a_j - a_h)\rho(\rho - \xi_1\xi_2)}.$$

Следовательио,

$$\overline{U}_j' = \overline{U}_j\left[1 - \left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)\frac{\delta(1+\delta)}{\rho - \xi_1\xi_2} + \left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)^2 \frac{(1+\delta)^2}{\rho - \xi_1\xi_2}\right] +$$

$$+\overline{U}_j\overline{U}_h\left[\left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)\frac{(\xi_j^2 + \xi_j\delta + 2\rho - \xi_j\xi_h)(1+\delta)}{2\rho(\rho - \xi_1\xi_2)} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)^2 \frac{(\xi_h - \xi_j - \delta)(1+\delta)^2}{2\rho(\rho - \xi_1\xi_2)}\right] +$$

$$+\overline{U}_h\overline{U}_j\left[\left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)\frac{(\xi_j\xi_h + \xi_j\delta - \xi_j^2 - 2\rho)(1+\delta)}{2\rho(\rho - \xi_1\xi_2)} -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)^2 \frac{(\xi_j - \xi_h - \delta)(1+\delta)^2}{2\rho(\rho - \xi_1\xi_2)}\right] - \overline{U}_h\left(\frac{a_j - b}{a_j - a_h}\right)^2 \frac{(1+\delta)^2}{\rho - \xi_1\xi_2}. \tag{61}$$

Формула (59), очевидно, дает решение уравнения (45), удовлетворяющее условию (46) при

$$\rho \neq 0 \quad \text{и} \quad \rho \neq \xi_1\xi_2.$$

§ 5. Исследование основного уравнения

Мы можем просто провести полное исследование уравнения (45), эквивалентного уравнению

$$T(\overline{U}_1 + \overline{U}_2) - (\overline{U}_1 + \overline{U}_2)T = T - T(a_1\overline{U}_1 + a_2\overline{U}_2)T,$$

которое можно записать также в виде

$$\overline{U}_\infty T - T\overline{U}_\infty = T + T[a_2\overline{U}_\infty + (a_2 - a_1)\overline{U}_1]T. \tag{62}$$

Рассмотрим случай, когда характеристические числа матрицы $\overline{U}_\infty$ различны, или более общий случай, когда элементарные делители $\overline{U}_\infty$ простые. Мы имеем в этом случае

$$\overline{U}_\infty = S[\bar\sigma_1, \bar\sigma_2]S^{-1}$$

и уравнение (62) эквивалентно уравнению

$$[\bar\sigma_1, \bar\sigma_2]T' - T'[\bar\sigma_1, \bar\sigma_2] = T' + T'BT', \tag{63}$$

где

$$T' = S^{-1}TS;$$

$$B = a_2[\sigma_1, \sigma_2] + (a_2 - a_1)S^{-1}\overline{U}_1 S = a_2[\bar\sigma_1, \bar\sigma_2] + (a_2 - a_1)\overline{U}_1'.$$

Матрицы T', удовлетворяющие уравнению $T'^2 = 0$, имеют следующую общую форму:

$$T' = \begin{Vmatrix} xy, & -x^2 \\ y^2, & -xy \end{Vmatrix}, \tag{64}$$

где x и y — произвольные параметры, и обозначая через b_{ik} элементы матрицы B, мы имеем в силу (63) четыре уравнения:

$$\begin{aligned} &xy(1+\tau) = 0; \quad -xy(1+\tau) = 0, \\ &-x^2(1 + \bar\sigma_2 - \bar\sigma_1 + \tau) = 0; \quad y^2(1 + \bar\sigma_1 - \bar\sigma_2 + \tau) = 0, \end{aligned} \tag{65}$$

где

$$\tau = \sigma(BT') = b_{11}xy + b_{11}y^2 - b_{21}x^2 - b_{22}xy. \tag{66}$$

Предположим прежде всего, что $\sigma_2 - \bar\sigma_1 \neq 0$, т. е, что $\delta \neq 0$. Уравнения (65) приводят к двум случаям:

$$x = 0; \; \tau = \bar\sigma_2 - \bar\sigma_1 - 1,$$

$$y = 0; \; \tau = \bar\sigma_1 - \bar\sigma_2 - 1,$$

или

$$x = 0; \qquad b_{12}y^2 = \bar\sigma_2 - \bar\sigma_1 - 1, \tag{67_1}$$

$$y = 0; \quad -b_{21}x^2 = \bar\sigma_1 - \bar\sigma_2 - 1, \tag{67_2}$$

и

$$b_{kl} = (a_2 - a_1)\{\overline{U}_1'\}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2; \; k \neq l). \tag{68}$$

Если

$$\delta = \bar\sigma_2 - \bar\sigma_1 = 0,$$

то уравнения (65) дают единственное условие

$$b_{11}xy + b_{12}y^2 - b_{21}x^2 - b_{22}xy = -1,$$

т. е.

$$(b_{11} - b_{22})xy + b_{12}y^2 - b_{21}x^2 = -1. \tag{69}$$

В рассматрнваемом случае мы имеем

$$\overline{U}_1' = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \qquad \overline{U}_2' = \begin{vmatrix} \beta_{11}, & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21}, & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\alpha_{22} = \beta_{11}\beta_{22} = \alpha_{12}\alpha_{21}; \quad \bar\sigma_1 = -(\alpha_{11} + \beta_{11}); \quad \bar\sigma_2 = -(\alpha_{22} + \beta_{22}), \\ \xi_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22}; \quad \xi_2 = \beta_{11} + \beta_{22}; \quad \rho = (\alpha_{11} - \beta_{22})(\beta_{11} - \alpha_{22}), \\ \rho - \xi_1\xi_2 = -(\alpha_{11} + \beta_{11})(\alpha_{22} + \beta_{22}), \end{gathered} \tag{69_1}$$

и вместо (59) мы можем написать

$$\begin{aligned} T' = \frac{1+\delta}{2(a_2 - a_1)\rho(\rho - \xi_1\xi_2)}[2\rho\overline{U}_1' + (\xi_2 - \xi_1 - \delta)\overline{U}_1'\overline{U}_2' + \\ + (\xi_2 - \xi_1 + \delta)\overline{U}_2'\overline{U}_1' - 2\rho\overline{U}_2']. \end{aligned} \tag{70}$$

Легко убедиться, что условие $\delta = 0$ равносильно тому факту, что выполнено одно из двух соотношений $\rho = 0$ или $\rho = \xi_1\xi_2$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \{2\rho\overline{U}_1' + (\xi_2 - \xi_1 - \delta)\overline{U}_1'\overline{U}_2' + (\xi_2 - \xi_1 + \delta)\overline{U}_2'\overline{U}_1' - 2\rho\overline{U}_2'\}_{kl} = \\ = \alpha_{kl}\delta[\delta + (\bar\sigma_l - \bar\sigma_k)]. \end{aligned} \tag{71}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha_{12}=0$, $\alpha_{21}\neq 0$ и $\delta\neq 0$. Предыдущие формулы показывают, что мы имеем два решения, представляемые формулой (70). Одно из этих решений будет равно нулевой матрице, если

$$\delta=\pm 1.$$

В случае $\alpha_{12}\neq 0$, $\alpha_{21}=0$ и $\delta\neq 0$ знаменатель в формуле (70) равен нулю, ибо $\rho=0$ или $\rho=\xi_1\xi_2$, и матрица в квадратных скобках этой формулы равна нулю при $\delta=\bar\sigma_1-\bar\sigma_2$ и отлична от нуля при $\delta=\bar\sigma_2-\bar\sigma_1$. Следовательно, одно из решений (70) не имеет смысла и второе имеет неопределенную форму, за исключением того случая $\bar\sigma_2-\bar\sigma_1=-1$, когда оба решения (70) имеют неопределенную форму. Теперь в общем случае для $\bar\sigma_1$ и $\bar\sigma_2$ мы имеем единственное решение

$$T'=\left\|\begin{matrix} 0, & 0 \\ \dfrac{\bar\sigma_2-\bar\sigma_1-1}{(a_2-a_1)\,\alpha_{12}}, & 0\end{matrix}\right\|. \tag{72}$$

Если $\bar\sigma_1-\bar\sigma_2=-1$, то мы не имеем решений, и если $\bar\sigma_1-\bar\sigma_2=+1$, то мы имеем решение (72) и бесконечное множество решений

$$T'=\left\|\begin{matrix} 0, & t' \\ 0, & 0\end{matrix}\right\|, \tag{73}$$

где t' — произвольный параметр. В случае $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$ оба решения (70) неопределенны, и в общем случае для $\bar\sigma_1$, $\bar\sigma_2$ мы не имеем решений, а в случае $\delta=\pm 1$ мы имеем решения (73) или решения вида

$$T'=\left\|\begin{matrix} 0, & 0 \\ t', & 0\end{matrix}\right\|. \tag{74}$$

Рассмотрим теперь случай $\delta=\bar\sigma_k-\bar\sigma_l=0$. В этом случае $\rho=0$ или $\rho=\xi_1\xi_2$, и решения (70) имеют неопределенную форму. Мы имеем для параметров x и y формулы (64) единственное соотношение (69) и, следовательно, бесконечное множество решений T'.

Остается теперь исследовать случай, когда матрица $\overline{U}_\infty$ имеет один элементарный делитель второй степени. Вместо (63) мы будем иметь уравнение

$$\left\|\begin{matrix} \bar\sigma, & 0 \\ 1, & \bar\sigma\end{matrix}\right\| T'-T'\left\|\begin{matrix} \bar\sigma, & 0 \\ 1, & \bar\sigma\end{matrix}\right\| = T'+T'BT', \tag{75}$$

где

$$B=a_2\left\|\begin{matrix} \bar\sigma, & 0 \\ 1, & \bar\sigma\end{matrix}\right\|+(a_2-a_1)\,\overline{U}_1',$$

и вместо (65) — систему

$$xy(1+\tau)-x^2=0;\quad x^2(1+\tau)=0;\quad y^2(1+\tau)-2xy=0, \tag{76}$$

где τ определяется формулой (66). Система (76) дает

$$x=0\quad \tau=-1\quad\text{или}\quad x=0;\quad b_{12}y^2=-1,$$

где b_{12} определяется формулой (68). Мы имеем также в этом случае

$$\overline{U}_\infty=S\left\|\begin{matrix} \bar\sigma, & 0 \\ 1, & \bar\sigma\end{matrix}\right\|S^{-1},\quad \overline{U}_1'=\left\|\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|;\quad \overline{U}_2'=\left\|\begin{matrix} -\bar\sigma-\alpha_{11}, & -\alpha_{12} \\ -1-\alpha_{21}, & -\bar\sigma-\alpha_{22}\end{matrix}\right\|,$$

где

$$\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=0;\quad \bar\sigma^2+(\alpha_{11}+\alpha_{22})\bar\sigma-\alpha_{12}=0,$$

$$\xi_1=\alpha_{11}+\alpha_{22};\quad \xi_2=-2\bar\sigma-\xi_1;\quad \rho=-(\bar\sigma+\xi_1)^2;\quad \rho-\xi_1\xi_2=-\bar\sigma^2.$$

Если $\alpha_{12}\neq 0$, то имеется единственное решение

$$T'=\left\|\begin{matrix} 0, & 0 \\ -\dfrac{1}{(a_2-a_1)\,\alpha_{12}}, & 0\end{matrix}\right\| \tag{77}$$

и если $\alpha_{12}=0$, то решений не существует.

Рассмотрим формулы (70) и (71). Вместо (71) мы имеем

$$\left\{2\rho\overline{U}_1'+(\xi_2-\xi_1-\delta)\,\overline{U}_1'\overline{U}_2'+(\xi_2-\xi_1+\delta)\,\overline{U}_2'\overline{U}_1'-2\rho\overline{U}_2'\right\}_{12}=0,$$

$$\left\{2\rho\overline{U}_1'+(\xi_2-\xi_1-\delta)\,\overline{U}_1'\overline{U}_2'+(\xi_2-\xi_1+\delta)\,\overline{U}_2'\overline{U}_1'-2\rho\overline{U}_2'\right\}_{21}=-2\bar\sigma\,(\bar\sigma+\xi_1).$$

В случае $\alpha_{12}\neq 0$ формула (70) дает решение (77) и в случае $\alpha_{12}=0$ эта формула теряет смысл.

§ 6. Выводы

Преобразования (44), где T определяется формулой (48), дают дифференциальные подстановки U_1', U_2', которым отвечают те же показательные подстановки W_1, W_2, что и подстановкам U_1, U_2. Если σ_1 и σ_2 — характеристические числа подстановки U_∞, то подстановка

$$U_\infty'=-(U_1'+U_2')$$

имеет характеристические числа $\sigma_1\pm 1$ и $\sigma_2\mp 1$. Повторяя несколько раз преобразования типа (44), мы будем получать более сложные преобразования, дающие дифференциальные подстановки, которым отвечают те же показательные подстановки W_1 и W_2. Но нельзя утверждать, что каждое значение U_j', отвечающее одним и тем же показательным подстановкам W_1 и W_2, может быть получено с помощью последовательных преобразований вида (44).

Однако можно указать случай, когда это обстоятельство имеет место, именно, это тот случай, когда матрицы $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ удовлетворяют условиям

$$\tau\neq 0\ \text{ и }\ \tau\neq\xi_1\xi_2. \tag{78}$$

Действительно, аналитические функции (37) от элементов матриц W_1 и W_2, являющиеся решениями системы (16), где функции

$$\Xi\left(\begin{matrix} U_1U_2 \\ a_1\ a_2\end{matrix}\middle|\, b\right)$$

суть мероморфные функции, не имеют особенностей, если выполнены условия (78). Из этого факта вытекает, что формула (37) дает все значения матриц U_j, которым отвечают в силу (16) матрицы W_j, удовлетворяющие условиям (78), причем ξ_1 и ξ_2 не являются отличными от нуля целыми числами. Многозначность функций (37) определяется параметром ρ, который определяется формулой

$$\rho = \xi_1\xi_2 - D(\overline{U}_\infty), \tag{79}$$

где характеристические числа матрицы $\overline{U}_\infty$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= -\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right), \\ \bar{\sigma}_2 &= -\frac{1}{2\pi i} \lg \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) - (\xi_1 - \xi_2). \end{aligned} \tag{80}$$

Пользуясь формулами (69_1), мы легко покажем, что условия (78) эквивалентны тому факту, что выражения

$$\beta_{22} - \alpha_{11}, \quad \beta_{11} - \alpha_{22}, \quad \alpha_{11} + \beta_{11} \text{ и } \alpha_{22} + \beta_{22}$$

не являются целыми числами, и если эти условия выполнены, то мы имеем $\alpha_{12} \neq 0$ и $\alpha_{21} \neq 0$, откуда следует, что можно построить преобразования (44), (48).

Эти преобразования отвечают случаю, когда числа $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ заменены на $\bar{\sigma}_1 \pm 1$, $\bar{\sigma}_2 \mp 1$, и очевидно, что каждое значение U_j, отвечающее заданным значениям W_j, может быть получено с помощью последовательных преобразований вида (44).

Если разность $\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1$ не является целым числом, то мы имеем показательную подстановку $\overline{W}_\infty$ в бесконечно далекой точке с характеристическими числами (80). Если эта разность является целым четным числом, то, взяв подходящее значение логарифма по формуле (80), мы будем иметь случай, когда $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$, и тогда U_∞ имеет элементарный делитель второй степени. Действительно, из формул (69_1) следует, что если $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$, то $\rho = 0$ или $\rho = \xi_1\xi_2$ и в силу (26) $\tau = 0$ или $\tau = \xi_1\xi_2$. Тогда, как мы уже видели [§ 5], существует только одно преобразование, которое заменяет совокупность характеристических чисел $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ на совокупность характеристических чисел $\bar{\sigma} \pm 1$, $\bar{\sigma} \mp 1$. Если $\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1$ — целое нечетное число, то, взяв подходящее значение логарифма, мы будем иметь случай $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_1 + 1$, и тогда не существует преобразования, которое заменяет $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ на

$$\bar{\sigma}_1 + 1, \quad \bar{\sigma}_2 - 1$$

[§ 5]. Эти обстоятельства связаны с тем фактом, что в силу (79) совокупность характеристических чисел матрицы $\overline{U}_\infty$ полностью определяет матрицы U_j, если выполнены условия (78).

СТАТЬЯ ДЕСЯТАЯ

АЛГОРИФМИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ОКРЕСТНОСТИ ЕДИНИЧНЫХ ПОДСТАНОВОК

§ 1. Дифференциальные подстановки и регулярная база как функции интегральных подстановок

Обозначим, как и во второй статье, через $a_1, a_2, \ldots, a_m$ особые точки, через $U_1, U_2, \ldots, U_m$ — дифференциальные подстановки, через b — точку нормирования, через $Y_b(x)$ — решение системы

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{h=1}^{m} \frac{YU_h}{x - a_h}, \tag{1}$$

определяемое начальным условием

$$Y_b(b) = I, \tag{2}$$

и через V_j — интегральные подстановки матрицы $Y_b(x)$.

Если подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ находятся в окрестности нулевых подстановок, то интегральные подстановки $V_1, V_2, \ldots, V_m$ находятся в окрестности единичных подстановок.

В четвертой статье мы рассматривали проблему Римана, отправляясь от показательных подстановок. Теперь рассмотрим ту же проблему, беря за исходный пункт интегральные подстановки. Во второй статье мы доказали, что интегральные подстановки суть целые функции дифференциальных подстановок

$$V_j = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\ldots,m)} U_{j_1}U_{j_2}\ldots U_{j_\nu} P_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}\ldots a_{j_\nu}) = \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \ldots & U_m \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

где $P_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu})$ — параметры конфигурации.

Если интегральные подстановки $V_1, V_2, \ldots, V_m$ заданы и если эти подстановки находятся в окрестности единичных подстановок, то мы можем разрешить систему (3) относительно $U_1, U_2 \ldots, U_m$ на основании теоремы из первой статьи. Мы получим

$$U_j = \Delta_b^{(j)}\begin{pmatrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_{j_1}-I)(V_{j_2}-I)\dots(V_{j_\nu}-I)\,Q_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}), \tag{4}$$

где коэффициенты $Q_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2},\dots,a_{j_\nu})$ суть линейные комбинации параметров конфигурации, определяемые рекуррентными соотношениями

$$Q_b^{(j)}(a_j) = 1; \quad Q_b^{(j)}(a_{j_1}) = 0, \text{ если } j_1 \neq j;$$

$$Q_b^{(j)}(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}) =$$

$$= -\sum_{\mu=2}^{\nu}\sum_{h_1,\dots,h_\mu}^{(1,\dots,m)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\dots<\varkappa_{\mu-1}<\nu} Q_b^{(h_1)}(a_{j_1}\dots a_{j_{\varkappa_1}})\,Q_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\dots a_{j_{\varkappa_2}})\dots$$

$$\dots Q_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\dots a_{j_\nu})\frac{P_b^{(j)}(a_{h_1}a_{h_2}\dots a_{h_\mu})}{(2\pi i)^\mu}. \tag{5}$$

Во второй статье мы доказали, что интегральная матрица $Y_b(x)$ есть целая функция подстановок $U_1, U_2, \dots, U_m$:

$$Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)} U_{j_1}\dots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|\,x). \tag{6}$$

Подставляя в этот ряд ряды композиций (4), получим для матрицы

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1\,U_2 \dots U_m \\ a_1\,a_2 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \Phi_b\left(\begin{matrix} \Delta_b^{(1)} \dots \Delta_b^{(m)} \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) \tag{7}$$

разложение

$$\theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}\Delta_b^{(j_1)}\begin{pmatrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix}\Delta_b^{(j_2)}\begin{pmatrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix}\dots$$

$$\dots\Delta_b^{(j_\nu)}\begin{pmatrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix}L_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x). \tag{8}$$

Применяя теперь теорему первой статьи, мы можем представить матрицу $\theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right)$ в виде ряда композиций подстановок $V_1 - I, V_2 - I, \dots$ $\dots, V_m - I$:

$$\theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_{j_1}-I)(V_{j_2}-I)\dots$$

$$\dots(V_{j_\nu}-I)\frac{1}{(2\pi i)^\nu}H_b(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}|\,x), \tag{9}$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями:

$$H_b(a_{j_1}|\,x) = L_b(a_{j_1}|\,x),$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^{\nu-1}}H_b(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}|\,x) = \sum_{h_1=1}^{m}\theta_b^{(h_1)}(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu})L_b(a_{h_1}|\,x) +$$

$$+\sum_{\mu=2}^{\nu}\sum_{h_1,\dots,h_\mu}^{(1,\dots,m)}\sum_{1\leqslant\varkappa_1<\varkappa_2<\dots<\varkappa_{\mu-1}<\nu}\theta_b^{(h_1)}(a_{j_1}\dots a_{j_{\varkappa_1}})\,\theta_b^{(h_2)}(a_{j_{\varkappa_1+1}}\dots a_{j_{\varkappa_2}})\dots$$

$$\dots\theta_b^{(h_\mu)}(a_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1}}\dots a_{j_\nu})L_b(a_{h_1}\dots a_{h_\mu}|\,x)\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-1}}. \tag{10}$$

Выполненное преобразование, очевидно, не изменяет характера сходимости ряда (6) относительно x, и ряд (9) есть голоморфная функция от x в каждой конечной части универсальной поверхности наложения $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \dots$ $\dots, a_m, \infty)$, не содержащей точек $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Остается еще уточнить характер зависимости коэффициентов $H_b(a_{j_1}a_{j_2}\dots$ $\dots a_{j_\nu}|x)$ от конфигурации особых точек. С этой целью мы введем понятие „гиперлогарифмов второго рода“ и, пользуясь этим понятием, получим рекуррентные соотношения для указанных коэффициентов.

§ 2. Гиперлогарифмы второго рода

Будем называть „гиперлогарифмами второго рода конфигурации особых точек $a_1, a_2, \dots, a_m$“ систему функций

$$E_b(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}|\,x) \qquad (j_1, j_2, \dots j_\nu = 1, 2, \dots, m; \ \nu = 1, 2, \dots), \tag{11}$$

определяемых рекуррентными соотношениями:

$$E_b(a_j|\,x) = -\int_{a_j}^{b}\frac{ds}{s-x},$$

$$E_b(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_\nu}|\,x) = -\int_{a_{j_0}}^{b}\frac{E_b(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}|\,\overset{+}{s})\,ds}{s-x}, \tag{12}$$

где b — произвольная фиксированная точка на конечном расстоянии, отличная от точек $a_1, a_2, \dots, a_m$, и интегралы берутся по положительным берегам фиксированных разрезов (a_j, b) [положительный берег разреза (a_j, b) тот, который находится слева при движении от точки a_j к точке b]. Число ν называется „рангом“ гиперлогарифма (11). Гиперлогарифм ранга нуль положим равным единице.

В силу хорошо известной теоремы о предельных значениях интеграла Коши на берегах каждого из разрезов (a_j, b) имеют место соотношения

$$E_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|\,\overset{-}{x}) - E_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|\,\overset{+}{x}) =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i E_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|\,\overset{+}{x}) & \text{для } j_0 = j, \\ 0 & \text{для } j_0 \neq j. \end{cases} \tag{13}$$

Эти соотношения полностью определяют характер ветвления гиперлогарифмов второго рода в особых точках

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m.$$

Пользуясь полученными соотношениями, преобразуем ряд (9) следующим образом.

Пусть β и γ — два произвольных числа таких, что $\beta b \neq \gamma$. Тогда мы можем представить базу

$$\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right),$$

даваемую системой интегральных подстановок $V_1,\dots,V_m$ для окрестности единичных подстановок, в виде

$$\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_{j_1}-I)(V_{j_2}-I)\dots(V_{j_\nu}-I)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^\nu}E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b},\ \frac{\beta a_{j_2}-\gamma}{a_{j_2}-b},\ \dots,\ \frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right),\quad(14)$$

где коэффициенты суть гиперлогарифмы второго рода.

Указанное разложение представляет базу в каждой конечной части поверхности $\mathfrak{S}(a_1,\ a_2,\dots,a_m,\ \infty)$, не содержащей ни одной из точек $a_1,\ a_2,\dots\ a_m$. Для доказательства заметим, что на основании определения интегральных подстановок на берегах разреза $(a_j,\ \infty)$ имеет место соотношение

$$\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\overset{-}{x}\right)-\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\overset{+}{x}\right)=(V_j-I)\,\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right).\quad(15)$$

Следовательно, в силу (9) мы имеем

$$\sum_{j_0=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_{j_0}-I)(V_{j_1}-I)\dots$$

$$\dots(V_{j_\nu}-I)\frac{1}{(2\pi i)^{\nu+1}}\left[H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{-}{x})-H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x})\right]=$$

$$=V_j-I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_j-I)(V_{j_1}-I)\dots(V_{j_\nu}-I)\frac{1}{(2\pi i)^\nu}H_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых композициях, мы получим соотношения для берегов разреза $(a_j,\ \infty)$

$$H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{-}{x})-H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x})=$$

$$=\begin{cases}2\pi i H_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x}) & \text{для } j_0=j,\\ 0 & \text{для } j_0\neq j.\end{cases}\quad(16)$$

Пользуясь этими соотношениями, легко докажем равенство

$$H_b(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)=E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}\,\frac{\beta a_{j_2}-\gamma}{a_{j_2}-b}\dots\frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right).\quad(17)$$

Действительно, принимая во внимание формулы (12), мы получим для первого ранга:

$$E_\beta\left(\frac{\beta a_j-\gamma}{a_j-b}\middle|\frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right)=L_b(a_j\,|\,x)=H_b(a_j\,|\,x),$$

ибо

$$\int_{\beta}^{\frac{\beta a_j-\gamma}{a_j-b}}\frac{ds}{s-\frac{\beta x-\gamma}{x-b}}=\int_b^x\frac{dx}{x-a_j}=\lg\frac{x-a_j}{b-a_j}.$$

Предполагая, что равенство (17) имеет место для фиксированного ранга ν, мы получаем на основании равенств (16) и (13) на берегах каждого разреза $(a_j,\ \infty)$ соотношения

$$H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{-}{x})-H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,\overset{+}{x})=$$

$$=\begin{cases}2\pi i E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}\dots\frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta\overset{+}{x}-\gamma}{\overset{+}{x}-b}\right) & \text{для } j_0=j,\\ 0 & \text{для } j_0\neq j;\end{cases}$$

$$E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_0}-\gamma}{a_{j_0}-b}\,\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}\dots\frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta\overset{-}{x}-\gamma}{\overset{-}{x}-b}\right)-$$

$$-E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_0}-\gamma}{a_{j_0}-b}\,\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}\dots\frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta\overset{+}{x}-\gamma}{\overset{+}{x}-b}\right)=$$

$$=\begin{cases}2\pi i E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}\dots\frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta\overset{+}{x}-\gamma}{\overset{+}{x}-b}\right) & \text{для } j=j_0,\\ 0 & \text{для } j\neq j_0.\end{cases}$$

Из этих соотношений следует, что функция

$$H_b(a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\,|\,x)-E_\beta\left(\frac{\beta a_{j_0}-\gamma}{a_{j_0}-b}\,\frac{\beta a_{j_1}-\gamma}{a_{j_1}-b}\dots\frac{\beta a_{j_\nu}-\gamma}{a_{j_\nu}-b}\middle|\frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right)\quad(18)$$

однозначна на всей плоскости переменной x. Функция (18), которая может иметь лишь особые точки логарифмического типа (что можно доказать точно так же, как и в четвертой статье), голоморфна на всей плоскости и сводится к постоянной, которая должна быть нулем, так как в точке $x=0$ оба члена выражения (18) равны нулю. Следовательно, равенство (17) имеет место для любого ранга ν, и коэффициенты разложений (9) и (14) тождественны.

§ 3. Частичное суммирование ряда, представляющего базу функций интегральных подстановок

Представим ряд (14) в ином виде, совершенно аналогичном тому, который мы получили во второй статье, преобразуя ряд, определяющий базу $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$ как функцию дифференциальных подстановок.

Прежде всего докажем вспомогательную формулу

$$E_\beta(\alpha_{j_0}^{\mu}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi)=\frac{1}{(\mu-1)!}\int_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\left(\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\times$$
$$\times\left(\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-4\pi i\right)\dots$$
$$\dots\left(\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2(\mu-1)\pi i\right)E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\xi}$$
$$(j_0\neq j_1), \tag{19}$$

где интегрирование совершается вдоль положительного берега разреза. Действительно, обозначая через $\Delta_{\alpha_{j_0}}$ разность между значениями на отрицательном и положительном берегах разреза $(\alpha_{j_0},\ \beta)$, мы получаем при $\mu=2$

$$\Delta_{\alpha_{j_0}}\left\{-\int_{\alpha_{j_0}}^{\beta}\left(\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\frac{E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)}{\sigma-\xi}\,d\xi\right\}=$$
$$=2\pi i\int_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\frac{E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)}{\sigma-\xi}\,d\sigma+(2\pi i)^2E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi)-(2\pi i)^2E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi)=$$
$$=2\pi i\int_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\frac{E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)}{\sigma-\xi}\,d\sigma=2\pi iE_\beta(\alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi),$$

и, следовательно, принимая во внимание очевидное соотношение

$$\Delta_{\alpha_j}\left\{-\int_{\alpha_{j_0}}^{\beta}\left(\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\frac{P_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)}{\sigma-\xi}\,d\sigma\right\}=0,\quad\text{если } j\neq j_0,$$

и проводя такие же рассуждения, как и в предыдущем параграфе, мы найдем

$$E_\beta(\alpha_{j_0}^{2}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi)=\int_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\left(\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_\nu}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\frac{E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)}{\sigma-\xi}\,d\sigma.$$

Предполагая теперь, что соотношение (19) имеет место для некоторого фиксированного μ, и вводя обозначения

$$\eta=\lg\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta},$$

а также

$$\overline{\eta}=\eta+2\pi i$$

и

$$F(\eta,\ \xi)=\frac{1}{\mu!}\int_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-4\pi i\right)\dots$$
$$\dots\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\mu\pi i\right)E_p(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\xi},$$

находим

$$\Delta_{\alpha_{j_0}}F(\eta,\ \xi)=F(\overline{\eta},\ \overline{\xi})-F(\overset{+}{\eta},\ \overset{+}{\xi})=F(\overline{\eta},\ \overline{\xi})-F(\overline{\eta},\ \overset{+}{\xi})+F(\overline{\eta},\ \overset{+}{\xi})-F(\overset{+}{\eta},\ \overset{+}{\xi})=$$
$$=\frac{1}{\mu!}\int_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\left[\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}\right)\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\dots\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta_0}-\right.\right.$$
$$\left.-2(\mu-1)\pi i\right)-\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\cdot\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-4\pi i\right)\dots$$
$$\left.\dots\left(\eta-\lg\frac{\sigma-\alpha_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\mu\pi i\right)\right]E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\xi}=2\pi iE_\beta(\alpha_{j_0}^{\mu}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi),$$

и отсюда следует

$$F(\eta,\ \xi)=E_\beta(\alpha_{j_0}^{\mu+1}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi).$$

Таким образом, формула (19) доказана.

Положим теперь

$$F(\xi)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_{j_1}-I)(V_{j_2}-I)\dots(V_{j_\nu}-I)\frac{1}{(2\pi i)^\nu}E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi); \tag{20}$$

в силу формулы (14) имеет место соотношение

$$\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\,x\right)=F\left(\frac{\beta x-\gamma}{x-b}\right), \tag{21}$$

если

$$\alpha_j=\frac{\beta a_j-\gamma}{a_j-\beta},\qquad a_j=\frac{b\alpha_j-\gamma}{\alpha_j-\beta}. \tag{22}$$

Отсюда следует

$$F(\xi)=\theta_b\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle|\,\frac{b\xi-\gamma}{\xi-\beta}\right). \tag{23}$$

Следовательно, функция $F(\xi)$ имеет особые точки $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_m,\ \beta$ и подвергается подстановкам $V_1,\ V_2,\ \dots,\ V_m,\ V=(V_1V_2\dots V_m)^{-1}$, когда переменная ξ описывает соответствующие контуры. Точка ∞, очевидно, обыкновенная точка функции $F(\xi)$, и мы имеем

$$F(\infty)=I.$$

Отсюда следует

$$F(\xi)=\theta_\infty\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m&V\\ \alpha_1\dots\alpha_m&\beta\end{matrix}\middle|\,\xi\right) \tag{24}$$

и

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix}V_1\dots V_m&V\\ \alpha_1\dots\alpha_m&\beta\end{matrix}\middle|\,\xi\right)=$$
$$=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}(V_{j_1}-I)\dots(V_{j_\nu}-I)\frac{1}{(2\pi i)^\nu}E_\beta(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\,|\,\xi). \tag{25}$$

База

$$\theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) = \theta_b\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j},$$

где

$$U_j = \Delta_b^{(j)}\begin{pmatrix} V_1 \dots V_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$x = \frac{b\xi-\gamma}{\xi-\beta}, \qquad \xi = \frac{\beta x-\gamma}{x-b}, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{\gamma-b\beta}{(x-b)^2} = \frac{(\xi-\beta)^2}{\gamma-b\beta},$$

мы найдем

$$\frac{d}{d\xi}\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m\ V \\ a_1 \dots a_m\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right)\frac{(\xi-\beta)^2}{\gamma-b\beta} = \theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m\ V \\ a_1 \dots a_m\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{(\xi-\beta)(a_j-\beta)U_j}{(\xi-a_j)(\gamma-b\beta)}$$

или

$$\frac{d}{d\xi}\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m\ V \\ a_1 \dots a_m\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = \theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m\ V \\ a_1 \dots a_m\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right)\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{m}U_j}{x-\beta}\right]. \tag{26}$$

Отсюда следует, что соотношение

$$U_1+U_2+\dots+U_m = 0,$$

связывающее дифференциальные подстановки базы

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right),$$

дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка ∞ не была точкой разветвления этой базы.

Вводя обозначения

$$\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}V_{j_2}\dots V_{j_\nu}V \\ a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = \sum_{\mu_1=1}^{\infty}\sum_{\mu_2=1}^{\infty}\dots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi i)^\mu}(V_{j_1}-I)^{\mu_1}(V_{j_2}-I)^{\mu_2}\dots$$
$$\dots(V_{j_\nu}-I)^{\mu_\nu}E_\beta\left(a_{j_1}^{\mu_1}a_{j_2}^{\mu_2}\dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\middle|\xi\right), \tag{27}$$

где

$$\mu = \mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\nu,$$

на основании (14) получим

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1 \dots V_m V \\ a_1 \dots a_m\beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1\neq j_2,\dots,j_{\nu-1}\neq j_\nu}^{(1,\dots,m)}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}V_{j_2}\dots V_{j_\nu}V \\ a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\beta \end{matrix}\middle| \xi\right). \tag{28}$$

Пользуясь формулой (19), мы легко получим рекуррентные соотношения, определяющие функции (27). Действительно, мы имеем:

$$\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}V_{j_2}\dots V_{j_\nu}V \\ a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = \int_\beta^{a_{j_0}}\sum_{\mu_0=1}^{\infty}\frac{(V_{j_0}-I)^{\mu_0}}{(\mu_0-1)!\,(2\pi i)^{\mu_0}}\times$$
$$\times\left(\lg\frac{\xi-a_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-a_{j_0}}{\sigma-\beta}-2\pi i\right)\times$$
$$\times\left(\lg\frac{\xi-a_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-a_{j_0}}{\sigma-\beta}-4\pi i\right)\dots$$
$$\dots\left(\lg\frac{\xi-a_{j_0}}{\xi-\beta}-\lg\frac{\sigma-a_{j_0}}{\sigma-\beta}-2(\mu_0-1)\pi i\right)\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\dots\sum_{\mu_\nu=1}^{\infty}(V_{j_1}-I)^{\mu_1}\dots$$
$$\dots(V_{j_\nu}-I)^{\mu_\nu}\frac{E_\beta\left(a_{j_1}^{\mu_1}\dots a_{j_\nu}^{\mu_\nu}\middle|\sigma\right)}{(2\pi i)^\mu(\sigma-\xi)}\,d\sigma =$$
$$= \frac{V_{j_0}-I}{2\pi i}\int_\beta^{a_{j_0}}V_{j_0}^{\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{\xi-a_{j_0}}{\xi-\beta}-\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{\sigma-a_{j_0}}{\sigma-\beta}-1}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu} \\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu} \end{matrix}\middle| \sigma\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\xi}.$$

Отсюда следует

$$\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\beta \end{matrix}\middle| \xi\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}(I-V^{-1})\left(\frac{\xi-a_{j_0}}{\xi-\beta}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_{j_0}}\int_\beta^{a_{j_0}}\left(\frac{\sigma-\beta}{\sigma-a_{j_0}}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_{j_0}}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\beta \end{matrix}\middle| \sigma\right)\frac{d\sigma}{\sigma-\xi}. \tag{29}$$

Отметим, в частности, что формула (28) в случае $m=1$ дает

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_j\ V \\ a_j\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = I + \theta\left(\begin{matrix} V_j\ V \\ a_j\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right).$$

С другой стороны, в этом случае, очевидно, мы имеем

$$\theta_b\left(\begin{matrix} V_j \\ a_j \end{matrix}\middle| x\right) = \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_j},$$

и, следовательно,

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_j\ V \\ a_j\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = \left(\frac{\xi-a_j}{\xi-\beta}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_j}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\theta\left(\begin{matrix} V_j\ V \\ a_j\ \beta \end{matrix}\middle| \xi\right) = \left(\frac{\xi-a_j}{\xi-\beta}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_j} - I. \tag{30}$$

Теперь из соотношения (29) следует, что матрица (28) удовлетворяет соотношениям

$$\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1\ V_2 \dots V_m\ V \\ a_1\ a_2 \dots a_m\ \beta \end{matrix}\middle| \bar{\xi}\right) = V_j\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1\ V_2 \dots V_m\ V \\ a_1\ a_2 \dots a_m\ \beta \end{matrix}\middle| \overset{+}{\xi}\right) \tag{31}$$

на берегах каждого из разрезов (a_j, β).

Действительно, мы имеем

$$\Delta_{\alpha_j}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}(I-V_{j_0}^{-1})(V_{j_0}-I)\left(\frac{\xi-\alpha_{j_0}}{\xi-\beta}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_{j_0}}\int\limits_{\beta}^{\alpha_{j_0}}\left(\frac{\sigma-\beta}{\sigma-\alpha_{j_0}}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V_{j_0}}\times$$

$$\times\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu} \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\end{matrix}\,\middle|\,\sigma\right)d\sigma+(I-V_{j_0})^{-1}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)+$$

$$+(I-V_{j_0}^{-1})(V_{j_0}-I)\,\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)=$$

$$=(V_{j_0}-I)\left[\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)+\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)\right]\quad\text{для } j_0=j,$$

$$\Delta_{\alpha_j}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)=0\quad\text{для } j_0\neq j.$$

Отсюда следует

$$\Delta_{\alpha_{j_0}}\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1\dots V_m V \\ \alpha_1\dots\alpha_m\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)=\Delta_{\alpha_{j_0}}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1\neq j_2,\dots,j_{\nu-1}\neq j_\nu}^{(1,\dots,m)}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)\right\}=$$

$$=(V_{j_0}-I)\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1\neq j_2\dots j_{\nu-1}\neq j_\nu}^{(1,\dots,m)}\left[\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)+\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)\right].$$

Сумма

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1\neq j_2,\dots,j_{\nu-1}\neq j_\nu}^{(1,\dots,m)}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)$$

дает все слагаемые суммы (28), у которых первый столбец аргументов отличен от $\begin{smallmatrix}V_{j_0}\\ \alpha_{j_0}\end{smallmatrix}$ и сумма

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\substack{j_1\neq j_2,\dots,j_{\nu-1}\neq j_\nu\\ j_1\neq j_0}}^{(1,\dots,m)}\theta\left(\begin{matrix} V_{j_0}V_{j_1}\dots V_{j_\nu}V \\ \alpha_{j_0}\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_\nu}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)$$

дает все слагаемые суммы (28), у которых первый столбец есть $\begin{smallmatrix}V_{j_0}\\ \alpha_{j_0}\end{smallmatrix}$. Отсюда следует

$$\Delta_{\alpha_{j_0}}\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1\dots V_m V \\ \alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_m}\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right)=(V_{j_0}-I)\,\theta_\infty\left(\begin{matrix} V_1\dots V_m V \\ \alpha_1\dots\alpha_m\beta\end{matrix}\,\middle|\,\xi\right),$$

т. е. формула (31).

СТАТЬЯ ОДИННАДЦАТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Интегральные и показательные подстановки регулярных метаканонических матриц

Пусть

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\qquad(j=1,2,\dots,m,\infty)\tag{1}$$

метаканоническая матрица в точке a_j или в бесконечно далекой точке регулярной системы

$$\frac{dY}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{YU_j}{x-a_j}.\tag{2}$$

Нормированная матрица $Y_b(x)$ этой системы может быть представлена в виде

$$Y_b(x)=\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)^{-1}\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

откуда мы получаем соотношение

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)^{-1}\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\theta_h\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)^{-1}\theta_h\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right).\tag{3}$$

Пользуясь этим соотношением, мы найдем выражения интегральных подстановок V_{jh} и показательных подстановок W_{jh} в точке a_h $(h=1, 2, \dots, m)$ для интегральной матрицы (1). Действительно, полагая

$$\theta_{jh}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right)=\theta_h\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,b\right)^{-1},\tag{4}$$

мы имеем

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\theta_{jh}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right)^{-1}\theta_h\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} V_{jh}&=\theta_{jh}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right)^{-1}e^{2\pi i U_h}\theta_{jh}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right),\\ W_{jh}&=\theta_{jh}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right)^{-1}U_h\theta_{jh}\left(\begin{matrix} U_1\dots U_m \\ a_1\dots a_m\end{matrix}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Подстановку

$$Z_{jh}=\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{pmatrix}$$

будем называть *подстановкой перехода* относительно пары точек (a_j, a_h), отвечающей подстановкам $U_1, \dots, U_m$ в точках $a_1, \dots, a_m$. Из формулы (3) следует, что параметр b входит в выражение (4) лишь формально, так что подстановки перехода зависят только от дифференциальных подстановок и от конфигурации особых точек.

В силу формулы (4) подстановки перехода являются голоморфными функциями дифференциальных подстановок в окрестности системы нулевых подстановок:

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{pmatrix}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}N_{jh}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}). \tag{6}$$

Действительно, мы имеем [ст. I, § 5 и 6]

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=(x-a_j)^{U_j}\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

и

$$\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\overline{N}_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x),$$

$$\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)^{-1}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\overline{N}{}^*_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x),$$

откуда следует

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}N_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x),$$

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)^{-1}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\nu}\overset{*}{N}_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x),$$

где

$$\left.\begin{aligned}N_j(a_j^{\lambda}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)&=\sum_{\varkappa=0}^{\lambda}\frac{1}{\varkappa!}\lg^{\varkappa}(x-a_j)\overline{N}_j(a_j^{\lambda-\varkappa}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x)\qquad(j_1\neq j),\\ \overset{*}{N}_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}\mid x)&=\sum_{\varkappa=0}^{\lambda}\overline{N}{}^*_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}^{\varkappa}\mid x)\frac{(-1)^{\lambda-\varkappa}}{(\lambda-\varkappa)!}\lg^{\lambda-\varkappa}(x-a_j)\ (j_\nu\neq j),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

и в силу (4) коэффициенты разложения (6) определяются формулами

$$N_{jh}(a_{j_1}\dots a_{j_\nu})=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}N_h(a_{j_1}\dots a_{j_\varkappa}\mid b)\,\overset{*}{N}_j(a_{j_{\varkappa+1}}\dots a_{j_\nu}\mid b). \tag{8}$$

Очевидно [ст. I, § 6], что элементы матрицы

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{pmatrix}\Delta(U_j)\,\Delta(U_h)$$

суть целые функции элементов дифференциальных подстановок.

Полагая

$$\delta_\nu(U_j, U_h)=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\delta_\varkappa(U_j)\,\delta_{\nu-\varkappa}(U_h),$$

получим

$$\Delta(U_j)\,\Delta(U_h)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j, U_h).$$

Таким образом, мы получаем общее представление подстановки перехода

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{pmatrix}=\frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\sum_{j_1,\dots,j_\varkappa}^{(1,\dots,m)}U_{j_1}\dots U_{j_\varkappa}\delta_{\nu-\varkappa}(U_j, U_h)\,N_{jh}(a_{j_1}\dots a_{j_\varkappa})}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_\nu(U_j, U_h)} \tag{9}$$

в виде мероморфной функции дифференциальных подстановок. Особенностями этой функции являются, очевидно, значения подстановок U_j и U_h, у которых некоторые разности различных характеристических чисел являются целыми.

Интегральные подстановки V_{jh} $(h=1, 2, \dots, m)$ порождают, очевидно, группу монодромии системы (2).

Изучим теперь θ_{jh} как функцию особых точек. С этой целью докажем следующую теорему:

Теорема. *Подстановка перехода*

$$Z_{jh}=\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{pmatrix}\qquad(j, h=1, 2, \dots, m),$$

рассматриваемая как функция особых точек $a_1, a_2, \dots, a_m$, удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с частными производными

$$\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_q}=0,\quad \sum_{q=1}^{m}\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_q}a_q=U_hZ_{jh}-Z_{jh}U_j \tag{10}$$

и начальным условиям

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_{p-1}U_pU_{p+1}\dots U_m\\ a_1\dots a_{p-1}a_p\,a_{p+1}\dots a_m\end{pmatrix}\Bigg|_{a_p=\infty}=\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\dots U_{p-1}U_{p+1}\dots U_m\\ a_1\dots a_{p-1}a_{p+1}\dots a_m\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $p\neq j$ и $p\neq h$.

Доказательство. Пусть $Y(x)$ — интегральная матрица системы (2). Если мы произведем линейное преобразование

$$x'=\alpha x+\beta,\quad a_h'=\alpha a_h+\beta\qquad(h=1, \dots, m), \tag{12}$$

где коэффициенты α и β не зависят от x, то получим матрицу

$$Y'(x')=Y(x),$$

которая удовлетворяет аналогичной системе

$$\frac{dY'}{dx'}=\sum_{h-1}^{m}\frac{Y'U_h}{x'-a_h'}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что метаканоническая матрица

$$\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1'\dots a_m'\end{matrix}\,\middle|\,x'\right)=\theta_j\left(\begin{pmatrix}U_1&\dots&U_m\\ \alpha a_1+\beta&\dots&\alpha a_m+\beta\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha x+\beta\right)=$$

$$=\alpha^{U_j}(x-a_j)^{U_j}\bar\theta_j\left(\begin{matrix}U_1&\dots&U_m\\ \alpha a_1+\beta&\dots&\alpha a_m+\beta\end{matrix}\,\middle|\,\alpha x+\beta\right),$$

рассматриваемая как функция x, имеет дифференциальные подстановки $U_1, \ldots, U_m$ в точках $a_1, \ldots, a_m$. Кроме того, из предыдущей формулы получаем

$$\theta_j\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Big) = \alpha^{-U_j}\theta_j \begin{pmatrix} U_1 & \ldots & U_m \\ \alpha a_1+\beta & \ldots & \alpha a_m+\beta \end{pmatrix} \alpha x+\beta \Big). \tag{14}$$

что дает формулу линейного преобразования метаканонической матрицы.

Предположим теперь, что две точки a_p' и a_q' фиксированы. Тогда коэффициентами преобразования (12) являются

$$\alpha = \frac{a_p'-a_q'}{a_p-a_q}, \quad \beta = \frac{a_p a_q' - a_p' a_q}{a_p-a_q}. \tag{15}$$

Полагая

$$Z_j(x) = \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right), \quad Z_j'(x') = \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1' \ldots a_m' \end{matrix} \middle| x\right)$$

и дифференцируя формулу (14) по a_h ($h \neq p$, $h \neq q$) и a_p, находим

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_h} = \alpha^{-U_j+1}\frac{\partial Z_j'}{\partial a_h'}, \quad \frac{\partial Z_j}{\partial a_p} =$$

$$= -U_j\frac{\partial\alpha}{\partial a_p}\alpha^{-U_j-1}Z_j' + \alpha^{-U_j}\sum_{\substack{h\neq p\\ h\neq q}}\frac{\partial Z_j'}{\partial a_h'}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a_p}a_h+\frac{\partial\beta}{\partial a_p}\right)+\alpha^{-U_j}\frac{\partial Z_j'}{\partial x'}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a_p}x+\frac{\partial\beta}{\partial a_p}\right). \tag{16}$$

В силу формул (13) — (16) последняя формула дает

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_p} = \frac{U_jZ_j}{a_p-a_q} + \sum_{\substack{h\neq p\\ h\neq q}}\frac{\partial Z_j}{\partial a_h}\frac{a_q-a_h}{a_p-a_q} + \sum_{s=1}^{m}\frac{Z_jU_s}{x-a_s}\frac{a_q-x}{a_p-a_q}.$$

Следовательно, метаканоническая матрица $Z_j(x)$ удовлетворяет системе

$$\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_h}(a_h-a_q) = U_jZ_j - \sum_{h=1}^{m}Z_jU_h\frac{x-a_q}{x-a_h} \qquad (q=1, 2, \ldots, m).$$

которая может быть записана в следующем виде

$$(x-a_q)\sum_{h=1}^{m}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial a_h}+\frac{Z_jU_h}{x-a_h}\right) = U_jZ_j - \sum_{h=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_h}(a_h-x) \qquad (q=1, 2, \ldots, m). \tag{17}$$

Замечая, что правая часть этих уравнений не зависит от индекса q, мы заключаем, что система (17) эквивалентна системе двух уравнений

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}+\frac{Z_jU_s}{x-a_s}\right)=0, \qquad \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}(a_s-x)-U_jZ_j=0. \tag{18}$$

Но, дифференцируя формулу

$$Z_{jh} = Z_hZ_j^{-1} \tag{19}$$

и принимая во внимание первое из этих уравнений, мы получим

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s} = \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial Z_h}{\partial a_s}Z_j^{-1} - Z_hZ_j^{-1}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}\right) =$$

$$= -\sum_{s=1}^{m}\frac{Z_hU_sZ_j^{-1}}{x-a_s} + \sum_{s=1}^{m}\frac{Z_hU_sZ_j^{-1}}{x-a_s} = 0,$$

что дает первое из уравнений (10). Кроме того, из второй формулы (18) следует, что

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s}(a_s-x) = \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_h}{\partial a_s}(a_s-x)Z_j^{-1} - Z_hZ_j^{-1}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}(a_s-x)Z_j^{-1} =$$

$$= U_hZ_hZ_j^{-1} - Z_hZ_j^{-1}U_j,$$

или на основании соотношения

$$x\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s} = 0$$

мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s}a_s = U_hZ_{jh} - Z_{jh}U_j,$$

т. е. второе из уравнений (10).

Чтобы проверить начальные условия (11), вспомним представление

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) = (x-a_j)^{U_j}\sum_{r=0}^{\infty}A_j^{(r)}\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix}(x-a_j)^r$$

метаканонической матрицы в точке a_j в окрестности этой точки. Непосредственно из рекуррентных соотношений, определяющих матрицы $A_j^{(r)}$, и из оценок, которые мы установили ранее [ст. V, § 8] следует:

$$A_j^{(r)}\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_{p-1}U_pU_{p+1}\ldots U_m \\ a_1 \ldots a_{p-1}a_pa_{p+1}\ldots a_m \end{pmatrix}\Bigg|_{a_p=\infty} = A_j^{(r)}\begin{pmatrix} U_1 \ldots U_{p-1}U_{p+1}\ldots U_m \\ a_1 \ldots a_{p-1}a_{p+1}\ldots a_m \end{pmatrix}$$

и

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_{p-1}U_pU_{p+1}\ldots U_m \\ a_1 \ldots a_{p-1}a_pa_{p+1}\ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)\Bigg|_{a_p=\infty} = \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \ldots U_{p-1}U_{p+1}\ldots U_m \\ a_1 \ldots a_{p-1}a_{p+1}\ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$$

для $j \neq p$. На основании формулы (4) мы получаем соотношения (11). Теорема, таким образом, доказана.

§ 2. Случай системы Гаусса

Природа начальных условий (11) делает очевидным тот факт, что общее изучение характера зависимости подстановки перехода от особых точек требует предварительного изучения случая $m = 2$. В этом случае системы Гаусса [ст. I, § 8] имеем

$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_j}+\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_h}=0,$$
$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_j}a_j+\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_h}a_h=U_hZ_{jh}-Z_{jh}U_j \qquad (j,\ h=1,\ 2),$$

что дает

$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_j}=\frac{U_hZ_{jh}-Z_{jh}U_j}{a_j-a_h}, \qquad \frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_h}=\frac{U_hZ_{jh}-Z_{jh}U_j}{a_h-a_j}.$$

Подставляя

$$Z_{jh}=(a_j-a_h)^{U_h}\Gamma_{jh}(a_h-a_j)^{-U_j}, \tag{20}$$

мы будем иметь

$$\frac{\partial\Gamma_{jh}}{\partial a_h}=\frac{\partial\Gamma_{jh}}{\partial a_j}=0,$$

т. е. подстановка перехода Z_{jh} имеет вид (20), где матрица Γ_{jh} зависит только от подстановок U_j и U_h.

Из формул (16) и (20) следует, что матрица Γ_{jh} есть голоморфная функция дифференциальных подстановок в окрестности системы нулевых подстановок, и мы имеем разложение

$$\Gamma_{jh}=I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,\,2)}U_{j_1}\ldots U_{j_\nu}\gamma_{j_1\ldots j_\nu}^{(jh)},$$

где $\gamma_{j_1\ldots j_\nu}^{(jh)}$ — *абсолютные константы.*

Будем теперь вычислять эти константы. Сначала заметим, что, умножая ряды композиций, мы получим в силу (20):

$$N_{jh}\left(a_h^{\alpha}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}a_j^{\beta}\right)=$$
$$=\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(a_j-a_h)\,\gamma_{h^\varkappa j_1\ldots j_\nu j^\lambda}^{(jh)}\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(a_h-a_j)$$
$$(j_1=j;\ j_\nu=h).$$

С другой стороны, в силу рекуррентных соотношений для коэффициентов $\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,x)$ [ст. II, § 5], мы имеем

$$\overline{N}_j(a_j^s|\,x)=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots),$$

что на основании очевидного соотношения

$$\sum_{s=0}^{\nu}\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_s}|\,x)\overline{N}_j^*(a_{j_{s+1}}\ldots a_{j_\nu}|\,x)=0 \tag{21}$$

дает аналогичные соотношения

$$\overline{N}_j^*(a_j^s|\,x)=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из этого факта в силу формул (7) следует:

$$N_j(a_j^s|\,x)=\frac{1}{s!}\lg^s(x-a_j),\quad \overset{*}{N}_j(a_j^s|\,x)=\frac{(-1)^s}{s!}\lg^s(x-a_j),$$

и, пользуясь формулами (7) и (8), мы можем записать другое выражение для коэффициентов $N_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}a_j^{\beta})$, что приводит нас к соотношению

$$\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(a_j-a_h)\,\gamma_{h^\varkappa j_1\ldots j_\nu j^\lambda}^{(jh)}\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(a_h-a_j)=$$
$$=\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(b-a_h)\overline{N}_h(a_h^{\varkappa}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|\,b)\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_j)+$$
$$+\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(b-a_h)\overline{N}_h(a_h^{\varkappa}a_{j_1}\ldots a_{j_\mu}|\,b)\overline{N}_j^*(a_{j_{\mu+1}}\ldots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|\,b)\times$$
$$\times\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_h)+$$
$$+\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(b-a_h)\overline{N}_j^*(a_h^{\varkappa}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|\,b)\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_j), \tag{22}$$

где $j_1=j$, $j_\nu=h$ и второй член правой части считаем равным нулю при $\nu=0$. Заметим, что правая часть зависит лишь формально от параметра b.

Известно [ст. II, § 5], что коэффициенты $\overline{N}_j(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,x)$ суть голоморфные функции в точке $x=a_j$ и обращаются в нуль в этой точке. В силу (21) коэффициенты $\overline{N}_j^*(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,x)$ обладают такими же свойствами, и, следовательно,

$$\lim\overline{N}_j^*(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b)\lg^p(b-a_j)=0 \qquad (\nu\geqslant 2;\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{23}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\theta_h\begin{pmatrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}x\Big)=C\theta_j\begin{pmatrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}x\Big),$$

где C — постоянная матрица, которая является голоморфной функцией дифференциальных подстановок в окрестности системы нулевых подстановок. Следовательно, мы имеем

$$\overline{\theta}_h\begin{pmatrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}x\Big)=(x-a_h)^{-U_h}C(x-a_j)^{U_j}\overline{\theta}_j\begin{pmatrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}x\Big), \tag{24}$$

откуда следует, что $\overline{N}_h(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,x)$ — полиномы от $\lg(x-a_j)$, коэффициенты которых являются голоморфными функциями в точке $x=a_j$. Из этих исследований вытекает, что мы можем положить

$$\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(a_j-a_h)\,\gamma_{h^\varkappa j_1\ldots j_\nu j^\lambda}^{(jh)}\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(a_h-a_j)=$$
$$=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(b-a_h)\overline{N}_h(a_h^{\varkappa}a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|\,b)\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_j)\right\}. \tag{25}$$

Полагая в этой формуле $\alpha=\beta=0$, мы получим

$$\gamma_{j_1\ldots j_\nu}^{(jh)}=\lim_{b\to a_j}\{\overline{N}_h(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}|\,b)\} \qquad (j_1=j,\ j_\nu=h).$$

Полагая затем $\beta = 0$, получим формулу

$$\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(a_j-a_h)\,\gamma^{(jh)}_{h^{\varkappa}j_1\dots j_\nu}=$$

$$=\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\frac{1}{(\alpha-\varkappa)!}\lg^{\alpha-\varkappa}(a_j-a_h)\lim_{b\to a_j}\{\overline{N}_h(a_h^{\varkappa}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)\}.$$

Применяя эту формулу последовательно при $\alpha = 1, 2, \dots,$ будем иметь

$$\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu}=\lim_{b\to a_j}\{\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)\}\qquad (j_\nu=h). \tag{26}$$

Получим теперь аналогичную формулу для общего случая. Заметим прежде всего, что рекуррентные соотношения для

$$\overline{N}_j(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|x)$$

[ст. II, § 5] дают

$$\overline{N}_h(a_j|b)=\lg\frac{b-a_j}{a_h-a_j},$$

$$\overline{N}_h(a_j^2|b)=\int_{a_h}^{b}\frac{1}{x-a_j}\lg\frac{x-a_j}{a_h-a_j}\,dx=\frac{1}{2!}\lg^2\frac{b-a_j}{a_h-a_j},$$

и вообще

$$\overline{N}_h(a_j^{\nu}|b)=\frac{1}{\nu!}\lg^{\nu}\frac{b-a_j}{a_h-a_j}\qquad(\nu=1, 2, \dots). \tag{27}$$

Взяв теперь формулу (25) при $\alpha = 0$, получим

$$\sum_{\lambda=0}^{\beta}\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu j^{\lambda}}\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(a_h-a_j)=$$

$$=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\beta}\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_j)\right\}.$$

Беря формулу (25) при $\alpha = 1$ и принимая во внимание предыдущую формулу, будем иметь

$$\sum_{\lambda=0}^{\beta}\gamma^{(jh)}_{hj_1\dots j_\nu j^{\lambda}}\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(a_h-a_j)=$$

$$=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\beta}\overline{N}_h(a_h a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_j)\right\};$$

и вообще

$$\sum_{\lambda=0}^{\beta}\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu j^{\lambda}}\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(a_h-a_j)=$$

$$=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\beta}\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)\frac{(-1)^{\beta-\lambda}}{(\beta-\lambda)!}\lg^{\beta-\lambda}(b-a_j)\right\}. \tag{28}$$

Для $\beta = 1$ мы имеем

$$\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu j}-\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu}\lg(a_h-a_j)=$$

$$=\lim_{b\to a_j}\{\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j|b)-\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)\lg(b-a_j)\},$$

откуда в силу (26) и (27) следует

$$\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu j}=\lim_{b\to a_j}\{\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j|b)-\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)\overline{N}_h(a_j|b)\}. \tag{29}$$

При $\beta = 2$ мы имеем

$$\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu j^2}-\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu j}\lg(a_h-a_j)+\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu}\frac{1}{2}\lg^2(a_h-a_j)=$$

$$=\lim_{b\to a_j}\Big\{\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^2|b)-\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j|b)\lg(b-a_j)+$$

$$+\overline{N}_h(a_h^{2}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)\frac{1}{2}\lg^2(b-a_j)\Big\},$$

откуда в силу (26), (27) и (29) следует

$$\gamma^{(jh)}_{h^{\alpha}j_1\dots j_\nu j^2}=\lim_{b\to a_j}\{\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^2|b)-\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j|b)\overline{N}_h(a_j|b)+$$

$$+\overline{N}_h(a_h^{\alpha}a_{j_1}\dots a_{j_\nu}|b)\cdot\overline{N}_h(a_j^2|b)\}.$$

Рассмотрим теперь следующую общую формулу:

$$\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu j^{\beta}}=\lim_{b\to a_j}\sum_{\lambda=0}^{\beta}\{\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)\overline{N}_h(a_j^{\beta-\lambda}|b)(-1)^{\beta-\lambda}\} \tag{30}$$

для $j_\nu = h$ и j_1 — произвольного. Как мы видели выше, эта формула имеет место для $\beta = 0$, $\beta = 1$ и $\beta = 2$. Предполагая, что эта формула имеет место для $\beta = 0, 1, \dots, p-1$, докажем, что она имеет место и для $\beta = p$.

Формула (28) при $\beta = p$ дает

$$\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu j^p}=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\lambda=0}^{p}\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)\frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-\lambda)!}\lg^{p-\lambda}(b-a_j)\right. -$$

$$-\sum_{s=0}^{p-1}\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu j^s}\frac{(-1)^{p-s}}{(p-s)!}\lg^{p-s}(a_h-a_j).$$

Но в силу нашего предположения мы имеем

$$\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu j^s}=\lim_{b\to a_j}\sum_{i=0}^{s}\{\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{i}|b)\overline{N}_h(a_j^{s-i}|b)(-1)^{s-i}\},$$

и, следовательно,

$$\gamma^{(jh)}_{j_1\dots j_\nu j^p}=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\lambda=0}^{p}\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)\frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-\lambda)!}\lg^{p-\lambda}(b-a_j)\right\}-$$

$$-\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{s}\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{i}|b)\frac{(-1)^{p-i}}{(p-s)!}\lg^{p-s}(a_h-a_j)\right\}=$$

$$=\lim_{b\to a_j}\left\{\sum_{\lambda=0}^{p}\overline{N}_h(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}a_j^{\lambda}|b)K_{\lambda}^{p}\right\}.$$

где коэффициенты K_λ^p определяются формулами

$$K_\lambda^p = \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-\lambda)!}\lg^{p-\lambda}(b-a_j) - \sum_{s=\lambda}^{p-1}\frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-s)!\,(s-\lambda)!}\lg^{s-\lambda}\frac{b-a_j}{a_h-a_j}\lg^{p-s}(a_h-a_j) =$$

$$= \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-\lambda)!}\Big[\lg^{p-\lambda}(b-a_j) - \sum_{k=0}^{p-\lambda-1}\frac{(p-\lambda)!}{k!\,(p-\lambda-k)!}\lg^{k}\frac{b-a_j}{a_h-a_j}\lg^{p-\lambda-k}(a_h-a_j)\Big] =$$

$$= \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-\lambda)!}\Big[\lg^{p-\lambda}(b-a_j) - \lg^{p-\lambda}(b-a_j) + \lg^{p-\lambda}\frac{b-a_j}{a_h-a_j}\Big] =$$

$$= \frac{(-1)^{p-\lambda}}{(p-\lambda)!}\lg^{p-\lambda}\frac{b-a_j}{a_h-a_j} = (-1)^{p-\lambda}\,\overline{N}_h(a_j^{p-\lambda}\,|\,b),$$

и, следовательно, формула (30) имеет место для $\beta = p$, т. е. мы доказали эту формулу в общем случае.

Заметим еще, что в предыдущих формулах мы должны считать $\gamma_{h^\alpha}^{(jh)} = 1$ и $\gamma_{j\beta}^{(jh)} = 1$ при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Эти формулы дают, в частности,

$$\gamma_{h^\alpha}^{(jh)} = \gamma_{j\beta}^{(jh)} = 0 \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

§ 3. Регулярные матрицы как функции особых точек при заданных дифференциальных подстановках

Уравнения (10) суть дифференциальные уравнения для матриц перехода, рассматриваемых как функции особых точек. Будем теперь рассматривать метаканонические и нормированные матрицы как функции особых точек. Получим сначала выражения производных регулярной матрицы по координатам особых точек.

Пусть Y — регулярная матрица для дифференциальных подстановок $U_1, \ldots, U_m$ и точек $a_1, \ldots, a_m$. Очевидно, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial a_p}Y^{-1}\right) = \frac{\partial}{\partial a_p}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)Y^{-1} - \frac{\partial Y}{\partial a_p}Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial x}Y^{-1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_p}\left(\sum_{q=1}^{m}\frac{YU_q}{x-a_q}\right)Y^{-1} - \frac{\partial Y}{\partial a_p}\sum_{q=1}^{m}\frac{U_qY^{-1}}{x-a_q},$$

что дает

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial a_p}Y^{-1}\right) = \frac{YU_pY^{-1}}{(x-a_p)^2}. \tag{31}$$

Применим эту формулу к нормированной матрице

$$Y_b(x) = \Phi_b\begin{pmatrix}U_1 \ldots U_m \\ a_1 \ldots a_m\end{pmatrix}\Big|\, x\Big).$$

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial Y_b}{\partial a_p}\right)_{x=b} = 0,$$

находим

$$\frac{\partial Y_b(x)}{\partial a_p} = \int_b^x \frac{Y_b(\xi)\,U_pY_b(\xi)^{-1}\,Y_b(x)}{(\xi-a_p)^2}\,d\xi. \tag{32}$$

Если мы устремим точку a_p к бесконечности, то каждый гиперлогарифм $L_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)$, у которого строка содержит a_p, будет стремиться к нулю, и, принимая во внимание оценку [гл. II, § 2]

$$|\,Y_b(a_{j_1}\ldots a_{j_\nu}\,|\,x)\,| < \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu,$$

мы получаем начальное условие:

$$\left[\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_{p-1}U_pU_{p+1}\ldots U_m \\ a_1\ldots a_{p-1}a_pa_{p+1}\ \ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,x\right)\right]_{a_p=\infty} = \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_{p-1}U_{p+1}\ldots U_m \\ a_1\ldots a_{p-1}a_{p+1}\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,x\right). \tag{33}$$

Следовательно, интегрирование формулы (32) дает соотношение

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,x\right) =$$

$$= \int_\infty^{a_p}\int_b^x \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,\xi\right)U_p\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,\xi\right)^{-1}\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,x\right)\frac{d\xi\,da_p}{(\xi-a_p)^2} +$$

$$+ \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_{p-1}U_{p+1}\ldots U_m \\ a_1\ldots a_{p-1}a_{p+1}\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,x\right). \tag{34}$$

Переходим теперь к метаканонической матрице

$$Z_j(x) = \theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m \\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Big|\,x\right) = (x-a_j)^{U_j}\,\overline{Z}_j(x).$$

Пусть $p \neq j$. Очевидно, мы имеем:

$$\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_p}Z_j^{-1}(x) = (x-a_j)^{U_j}\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_p}\overline{Z}_j^{-1}(x)\,(x-a_j)^{-U_j}.$$

Из оценок, которые мы получили выше [гл. V, § 8], следует, что степенной ряд для $\overline{Z}_j(x)$ можно дифференцировать по a_p почленно и, следовательно, матрица $\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_p}\overline{Z}_j^{-1}(x)$ имеет разложение вида

$$\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_p}\overline{Z}_j^{-1}(x) = (x-a_j)\sum_{r=0}^{\infty}B_r(x-a_j)^r,$$

где матрицы B_r не зависят от x. Мы имеем

$$\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_p}Z_j^{-1}(x) = (x-a_j)^{U_j+1}\sum_{r=0}^{\infty}B_r(x-a_j)^r(x-a_j)^{-U_j}.$$

Предположим сначала, что характеристические числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ матрицы U_j удовлетворяют условиям

$$|\,\mathrm{Re}\,(\sigma_k-\sigma_l)\,| < 1 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n); \tag{35}$$

это имеет место всегда, если матрица U_j находится в соответствующей окрестности нулевой матрицы. Тогда мы имеем [ст. I, § 8]:

$$\left[\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_p} Z_j^{-1}(x)\right]_{x=a_j} = 0,$$

и интегрирование формулы (31) дает

$$\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_p} = \int_{a_j}^{x} \frac{Z_j(\xi) U_p Z_j(\xi)^{-1} Z_j(x)}{(\xi - a_p)^2} d\xi \qquad (p \neq j). \tag{36}$$

Принимая во внимание формулу

$$\theta_j\begin{pmatrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{pmatrix} x\Bigg|_{a_p=\infty} = \theta_j\begin{pmatrix} U_1 \dots U_{p-1} U_{p+1} \dots U_m \\ a_1 \dots a_{p-1} a_{p+1} \dots a_m \end{pmatrix} x\Bigg),$$

мы будем иметь соотношение

$$\theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) =$$

$$= \int_{\infty}^{a_p} \int_{a_j}^{x} \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, \xi\right) U_p \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, \xi\right)^{-1} \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) \frac{d\xi\, da_p}{(\xi - a_p)^2} +$$

$$+ \theta_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_{p-1} U_{p+1} \dots U_m \\ a_1 \dots a_{p-1} a_{p+1} \dots a_m \end{matrix}\,\middle|\, x\right) \qquad (p \neq j). \tag{37}$$

Если $p = j$, то мы имеем

$$\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_j} Z_j(x)^{-1} = -\frac{U_j}{x - a_j} + (x - a_j)^{U_j} \frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_j} \overline{Z}_j(x)^{-1} (x - a_j)^{-U_j}; \tag{38}$$

полагая

$$\overline{Z}_j(x) = I + A_j^{(1)}(x - a_j) + A_j^{(2)}(x - a_j)^2 + \dots,$$

получим разложение

$$\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_j} \overline{Z}_j(x)^{-1} = -A_j^{(1)} + (x - a_j) \sum_{r=0}^{\infty} B_j^{(r)} (x - a_j)^r,$$

и, следовательно, по условию (35)

$$\left[(x - a_j)^{U_j} \left[\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_j} \overline{Z}_j(x)^{-1} + A_j^{(1)}\right] (x - a_j)^{-U_j}\right]_{x=a_j} = 0. \tag{39}$$

Записывая соотношение (38) в виде

$$\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_j} Z_j(x)^{-1} = -\frac{U_j}{x - a_j} - (x - a_j)^{U_j} A_j^{(1)} (x - a_j)^{-U_j} +$$

$$+ (x - a_j)^{U_j} \left[\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_j} \overline{Z}_j(x)^{-1} + A_j^{(1)}\right] (x - a_j)^{-U_j}$$

и пользуясь формулой (31), мы находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x - a_j)^{U_j} \left[\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_j} \overline{Z}_j(x)^{-1} + A_j^{(1)}\right] (x - a_j)^{-U_j}\right] =$$

$$= \frac{Z_j(x) U_j Z_j(x)^{-1}}{(x - a_j)^2} - \frac{U_j}{(x - a_j)^2} + \frac{(x - a_j)^{U_j} [U_j A_j^{(1)} - A_j^{(1)} U_j] (x - a_j)^{-U_j}}{x - a_j}.$$

Интегрируя и принимая во внимание соотношение (39), получим

$$(x - a_j)^{U_j} \left[\frac{\partial \overline{Z}_j(x)}{\partial a_j} \overline{Z}_j(x)^{-1} + A_j^{(1)}\right] (x - a_j)^{-U_j} =$$

$$= \int_{a_j}^{x} [Z_j(x) U_j Z_j(x)^{-1} - U_j +$$

$$+ (x - a_j)^{U_j+1} (U_j A_j^{(1)} - A_j^{(1)} U_j)(x - a_j)^{-U_j}] \frac{dx}{(x - a_j)^2}, \tag{40}$$

откуда следует

$$\frac{\partial Z_j(x)}{\partial a_j} Z_j(x)^{-1} = -\frac{U_j}{x - a_j} - (x - a_j)^{U_j} A_j^{(1)} (x - a_j)^{-U_j} +$$

$$+ \int_{a_j}^{x} \Big[Z_j(x) U_j Z_j(x)^{-1} - U_j +$$

$$+ (x - a_j)^{U_j+1} (U_j A_j^{(1)} - A_j^{(1)} U_j)(x - a_j)^{-U_j}\Big] \frac{dx}{(x - a_j)^2}. \tag{41}$$

Мы можем записать формулы в ином виде, вводя специальный тип первообразных функций. Положим

$$\int_{(a)}^{x} (x - a)^p \lg^q (x - a)\, dx = \begin{cases} \displaystyle\int_a^x (x - a)^p \lg^q (x - a)\, dx, & \text{если } p > -1; \\ \displaystyle\frac{\lg^{q+1}(x - a)}{q + 1}, & \text{если } p = -1; \\ \displaystyle\int_{\infty}^{x} (x - a)^p \lg^q (x - a)\, dx, & \text{если } p < -1. \end{cases} \tag{42}$$

Интеграл (42) будем называть *каноническим интегралом*.

Если функция $f(x)$ регулярна в смысле Фукса в окрестности точки a, то мы имеем разложение вида

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{0r} (x - a)^{\rho+r} + \sum_{r=0}^{\infty} c_{1r} (x - a)^{\rho+r} \lg (x - a) + \dots +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} c_{sr} (x - a)^{\rho+r} \lg^s (x - a).$$

Канонический интеграл функции $f(x)$ определяется формулой

$$\int_{(a)}^{x} f(x)\, dx = \sum_{r=0}^{\infty} c_{0r} \int_{(a)}^{x} (x - a)^{\rho+r} dx +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} c_{1r} \int_{(a)}^{x} (x - a)^{\rho+r} \lg (x - a)\, dx + \dots +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} c_{sr} \int_{(a)}^{x} (x - a)^{\rho+r} \lg^s (x - a)\, dx. \tag{43}$$

Отсюда следует, что канонический интеграл (43) характеризуется следующим свойством: каждый член разложения этого интеграла в окрестности точки $x=a$ содержит множитель вида

$$(x-a)^p \lg^q (x-a),$$

где p и q не равны нулю одновременно. Если разложение некоторой функции $f(x)$ содержит член, для которого $p=q=0$, то мы будем обозначать этот член символом $\{f(x)\}_0$, при этом будем считать символ равным нулю, когда такого члена нет. Заметим, наконец, что мы имеем, очевидно:

$$\int_{(a)}^{x} f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx,$$

если интеграл в левой части имеет смысл.

Пользуясь понятием канонического интеграла, мы можем написать

$$\int_{a_j}^{x} [Z_jU_jZ_j^{-1} - U_j + (x-a_j)^{U_j+1}(U_jA_j^{(1)} - A_j^{(1)}U_j)(x-a_j)^{-U_j}]\,\frac{dx}{(x-a_j)^2} =$$

$$= \int_{(a_j)}^{x} \frac{Z_jU_jZ_j^{-1}}{(x-a_j)^2}\,dx + \int_{(a_j)}^{x} \frac{(x-a_j)^{U_j+1}(U_jA_j^{(1)} - A_j^{(1)}U_j)(x-a_j)^{-U_j} - U_j}{(x-a_j)^2}\,dx.$$

Но, замечая, что

$$\int_{(a_j)}^{x} \frac{(x-a_j)^{U_j+1}(U_jA_j^{(1)} - A_j^{(1)}U_j)(x-a_j)^{-U_j} - U_j}{(x-a_j)^2}\,dx =$$

$$= \frac{U_j}{x-a_j} + (x-a_j)^{U_j}A_j^{(1)}(x-a_j)^{-U_j} - \{(x-a_j)^{U_j}A_j^{(1)}(x-a_j)^{-U_j}\}_0,$$

мы представим соотношение (41) в виде

$$\frac{dZ_j}{da_j}Z_j^{-1} = \int_{(a_j)}^{x} \frac{Z_jU_jZ_j^{-1}}{(x-a_j)^2}\,dx - \{(x-a_j)^{U_j}A_j^{(1)}(x-a_j)^{-U_j}\}_0. \qquad (44)$$

Формулу (36) мы можем, очевидно, записать в виде

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_p}Z_j^{-1} = \int_{(a_j)}^{x} \frac{Z_jU_pZ_j^{-1}}{(x-a_p)^2}\,dx \qquad (p \neq j). \qquad (45)$$

Пользуясь формулами (44) и (45), мы можем получить уравнения (18) для метаканонической матрицы:

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial a_s} + \frac{Z_jU_s}{x-a_s}\right) = 0, \qquad \sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}(a_s - x) - U_jZ_j = 0. \qquad (46)$$

Интегрируя по частям, мы получим в силу (45)

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1} = \int_{(a_j)}^{x} \frac{1}{x-a_p}\frac{d}{dx}(Z_jU_sZ_j^{-1})\,dx - \frac{Z_jU_sZ_j^{-1}}{x-a_s} + \left\{\frac{Z_jU_sZ_j^{-1}}{x-a_s}\right\}_0$$

$$(s \neq j)$$

или в силу (35):

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1} = \int_{(a_j)}^{x} \frac{1}{x-a_s}\frac{d}{dx}(Z_jU_sZ_j^{-1})\,dx - \frac{Z_jU_sZ_j^{-1}}{x-a_s} +$$

$$+ \left\{\frac{(x-a_j)^{U_j}U_s(x-a_j)^{-U_j}}{a_j-a_s}\right\}_0 \qquad (s \neq j).$$

Точно так же формула (44) дает

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_j}Z_j^{-1} = \int_{(a_j)}^{x} \frac{1}{x-a_j}\frac{d}{dx}(Z_jU_jZ_j^{-1})\,dx - \frac{Z_jU_sZ_j^{-1}}{x-a_j} -$$

$$-\{(x-a_j)^{U_j}A_j^{(1)}(x-a_j)^{-U_j}\}_0 + \{(x-a_j)^{U_j}(A_j^{(1)}U_j - U_jA_j^{(1)})(x-a_j)^{-U_j}\}.$$

Но мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m}\int_{(a_j)}^{x} \frac{1}{x-a_s}\frac{d}{dx}(Z_jU_jZ_j^{-1})\,dx = \sum_{s=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\int_{(a_j)}^{x} \frac{Z_jU_hU_sZ_j^{-1} - Z_jU_sU_hZ_j^{-1}}{(x-a_h)(x-a_s)}\,dx = 0,$$

и, пользуясь формулой

$$A_j^{(1)}U_j - U_jA_j^{(1)} - A_j^{(1)} + \sum_{s \neq j}\frac{U_s}{a_j-a_s} = 0,$$

мы можем, очевидно, записать

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1} = -\sum_{s=1}^{m}\frac{Z_jU_sZ_j^{-1}}{x-a_s},$$

откуда вытекает первая из формул (46). Чтобы доказать вторую из этих формул, положим

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}(x-a_s) = F.$$

Тогда мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}(x-a_s) = FZ_j^{-1}$$

и

$$\sum_{s=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}\right)(x-a_s) + \frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}\right] = \frac{\partial(FZ_j^{-1})}{\partial x}.$$

Далее мы имеем в силу (31) и первой из формул (46):

$$\frac{\partial(FZ_j^{-1})}{\partial x} = 0.$$

С другой стороны, в силу формул (36) и (41) мы имеем

$$[FZ_j^{-1}]_{x=a_j} = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}(x-a_s)\right]_{x=a_j} = -U_j.$$

Следовательно,

$$FZ_j^{-1}=-U_j,$$

и вторая из формул (46) имеет место.

Формулы (46) были доказаны при условиях (35), но в силу принципа аналитического продолжения эти формулы имеют место и в общем случае.

Можно, наконец, записать формулы для матриц перехода, аналогичные формулам (32) и (34).

Предполагая $s\neq j$ и $s\neq h$, найдем

$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s}=\frac{\partial Z_h}{\partial a_s}Z_j^{-1}-Z_hZ_j^{-1}\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}=$$

$$=\int_{a_h}^{x}\frac{Z_h(\xi)U_sZ_j(\xi)^{-1}Z_h(x)Z_j(x)^{-1}}{(\xi-a_s)^2}d\xi-\int_{a_j}^{x}\frac{Z_h(x)Z_j(x)^{-1}Z_j(\xi)U_sZ_j(\xi)^{-1}}{(\xi-a_s)^2}d\xi.$$

Замечая, что

$$Z_h(x)Z_j(x)^{-1}=Z_h(\xi)Z_j(\xi)^{-1},$$

получаем

$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s}=\int_{a_h}^{a_j}\frac{Z_h(\xi)U_sZ_j(\xi)^{-1}}{(\xi-a_s)^2}d\xi. \tag{47}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}\Bigg|_{a_s=\infty}=\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\ldots U_{s-1}U_{s+1}\ldots U_m\\ a_1\ldots a_{s-1}a_{s+1}\ \ldots a_m\end{pmatrix}.$$

Следовательно, мы можем положить

$$\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{pmatrix}=\int_{\infty}^{a_s}\int_{a_h}^{a_j}\theta_h\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Bigg|\,\xi\right)U_s\theta_j\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Bigg|\,\xi\right)\frac{d\xi\,da_s}{(\xi-a_s)^2}+$$

$$+\theta_{jh}\begin{pmatrix}U_1\ldots U_{s-1}U_{s+1}\ldots U_m\\ a_1\ldots a_{s-1}a_{s+1}\ \ldots a_m\end{pmatrix}. \tag{48}$$

Все эти формулы имеют место, если матрицы U_j и U_h находятся в окрестности нулевой матрицы.

Формула (36) имеет место при предположении (35) и мы имеем в этом случае

$$\left\{\frac{\partial Z_j}{\partial a_s}Z_j^{-1}\right\}_0=0.$$

Аналитическое продолжение относительно элементов матрицы U_j показывает, что в общем случае вместо (36) мы должны написать:

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_p}=\int_{(a_j)}^{x}\frac{Z_j(\xi)U_pZ_j(\xi)^{-1}Z_j(x)}{(\xi-a_p)^2}d\xi. \tag{49}$$

Таким же путем можно доказать, что формула (44) имеет место в общем случае, и вместо формулы (47) мы должны записать в общем случае:

$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_s}=\int_{(a_h)}^{(a_j)}\frac{Z_h(\xi)U_sZ_j(\xi)^{-1}}{(\xi-a_s)^2}d\xi=\int_{(a_h)}^{x}\frac{Z_h(\xi)U_sZ_j(\xi)^{-1}}{(\xi-a_s)^2}d\xi-$$

$$-\int_{(a_j)}^{x}\frac{Z_h(\xi)U_sZ_j(\xi)^{-1}}{(\xi-a_s)^2}d\xi. \tag{50}$$

§ 4. Дифференциальные подстановки и метаканонические матрицы как функции особых точек при заданных показательных подстановках

В предыдущем параграфе мы изучали регулярные матрицы как функции особых точек, при этом дифференциальные подстановки считались фиксированными. В настоящем параграфе мы будем рассматривать аналогичный вопрос, предполагая, что фиксированы показательные подстановки.

Пусть $\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\,\Bigg|\,x\right)$ — метаканоническая матрица, определяемая конфигурацией особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и показательными подстановками $W_1, W_2, \ldots, W_m$. Дифференциальные подстановки U_{jh} метаканонических матриц зависят только от конфигурации особых точек и показательных подстановок. Чтобы изучить характер этой зависимости, мы составим производные от подстановок U_{jh} по $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

С этой целью рассмотрим регулярную матрицу Y, имеющую фиксированные показательные подстановки $W_1, W_2, \ldots, W_m$ и дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ в особых точках $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Предположим, что точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ суть аналитические функции параметра t и что подстановки $W_1, W_2, \ldots, W_m$ не зависят от t. Так как интегральные подстановки $e^{2\pi iW_1}, \ldots, e^{2\pi iW_m}$, очевидно, также не зависят от t, то матрица

$$Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial t}=H \tag{51}$$

остается неизменной, когда x описывает контуры, окружающие точки

$$a_1, \ldots, a_m, \infty.$$

Отсюда следует, что эта матрица является рациональной функцией от x.

Если точка a_q не зависит от t, то, принимая во внимание представления

$$Y=(x-a_q)^{W_q}\overline{Y}_q,\qquad Y=\left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty}\overline{Y}_\infty, \tag{52}$$

где матрицы $\overline{Y}_q$, $\overline{Y}_q^{-1}$, $\overline{Y}_\infty$, $\overline{Y}_\infty^{-1}$ голоморфны в окрестности точки a_q или точки ∞, соответственно, мы получим

$$H=\overline{Y}_q^{-1}\frac{\partial\overline{Y}_q}{\partial t};\qquad H=\overline{Y}_\infty^{-1}\frac{\partial\overline{Y}_\infty}{\partial t}. \tag{53}$$

Отсюда следует, что матрица H голоморфна относительно x в рассматриваемых окрестностях.

Матрица $Y\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dY}{dx}=Y\sum_{q=1}^{m}\frac{U_q}{x-a_q}. \tag{54}$$

Положим $t=a_p$ и соответственно

$$Y^{-1}\frac{\partial Y}{\partial a_p}=H_p. \tag{55}$$

Мы имеем

$$Y=(x-a_p)^{W_p}\overline{Y}_p,$$

откуда следует

$$H_p=\overline{Y}_p^{-1}\frac{\partial Y_p}{\partial a_p}-\frac{\overline{Y}_p^{-1}W_p\overline{Y}_p}{x-a_p}.$$

Мы можем положить

$$Y=C\theta_p(x)=C(x-a_p)^{U_p}\overline{\theta}_p(x),$$

где C — постоянная матрица и $\theta_p(x)$ — метаканоническая матрица в точке $x=a_p$. Мы имеем:

$$W_p=CU_pC^{-1};\qquad \overline{Y}_p(x)=C\overline{\theta}_p(x),$$

откуда следует

$$H_p=\overline{Y}_p^{-1}\frac{\partial\overline{Y}_p}{\partial a_p}-\frac{\overline{\theta}_p^{-1}U_p\overline{\theta}_p}{x-a_p}$$

и

$$[\overline{\theta}_p^{-1}U_p\overline{\theta}_p]_{x=a_p}=U_p.$$

Следовательно, мы имеем для H_p представление:

$$H_p=-\frac{U_p}{x-a_p}+G_p, \tag{56}$$

где G_p голоморфна относительно x в окрестности точки a_p. Но из предыдущих рассуждений следует, что H_p голоморфна в окрестности точек $a_1,\dots,a_{p-1},a_{p+1},\dots,a_m,\infty$. Следовательно, матрица G_p не зависит от x. Отсюда вытекает, что производные по координатам особых точек от регулярной матрицы с фиксированными показательными подстановками суть

$$\frac{\partial Y}{\partial a_p}=Y\left(-\frac{U_p}{x-a_p}+G_p\right)\qquad (p=1,2,\dots,m). \tag{57}$$

Чтобы получить выражения производных от дифференциальных подстановок, продифференцируем предыдущее уравнение по x; используя уравнение (54), находим

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial a_p\,\partial x}=\sum_{q=1}^{m}\frac{YU_q}{x-a_q}\left(-\frac{U_p}{x-a_p}+G_p\right)+\frac{YU_p}{(x-a_p)^2}. \tag{58}$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (54) по a_p и используя уравнение (57), мы найдем

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial a_p}=\sum_{q=1}^{m}Y\left(-\frac{U_p}{x-a_p}+G_p\right)\frac{U_q}{x-a_q}+Y\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{x-a_q}\frac{\partial U_q}{\partial a_p}+\frac{YU_p}{(x-a_p)^2}. \tag{59}$$

Сравнивая выражения (58) и (59), получаем

$$\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{x-a_q}\frac{\partial U_q}{\partial a_p}=\sum_{q=1}^{m}\frac{U_qG_p-G_pU_q}{x-a_q}+\sum_{q\neq p}\frac{1}{a_p-a_q}\left(\frac{1}{x-a_p}-\frac{1}{x-a_q}\right)(U_pU_q-U_qU_p).$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U_q}{\partial a_p}&=U_qG_p-G_pU_q+\frac{U_qU_p-U_pU_q}{a_p-a_q}, \quad \text{если } p\neq q;\\ \frac{\partial U_p}{\partial a_p}&=U_pG_p-G_pU_p+\sum_{q\neq p}\frac{U_pU_q-U_qU_p}{a_p-a_q}.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

В частности, производные дифференциальных подстановок U_{jh} метаканонических матриц $\theta_j\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right)$ [ст. IV, § 3] имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial U_{jh}}{\partial a_p}&=U_{jh}G_{jp}-G_{jp}U_{jh}+\frac{U_{jh}U_{jp}-U_{jp}U_{jh}}{a_p-a_h}, \quad \text{если } p\neq h;\\ \frac{\partial U_{jh}}{\partial a_h}&=U_{jh}G_{jh}-G_{jh}U_{jh}+\sum_{q\neq h}\frac{U_{jh}U_{jq}-U_{jq}U_{jh}}{a_h-a_q}\qquad (j=1,2,\dots,m).\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Так как матрица $U_{jj}=W_j$ не зависит от конфигурации особых точек, то мы имеем

$$\left.\begin{aligned}0&=W_jG_{jp}-G_{jp}W_j+\frac{W_jU_{jp}-U_{jp}W_j}{a_p-a_j}, \quad \text{если } p\neq j;\\ 0&=W_jG_{jj}-G_{jj}W_j+\sum_{q\neq j}\frac{W_jU_{jq}-U_{jq}W_j}{a_j-a_q}.\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Чтобы решить эту систему уравнений относительно функций G_{jp} и G_{jj}, заметим, что если

$$\overline{T}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}X_{j_1}\dots X_{j_\nu}\overline{\tau}_{j_1\dots j_\nu} \tag{63}$$

есть заданная функция подстановок $X_1, X_2, \dots, X_m$, голоморфная в окрестности нулевых подстановок, то любое голоморфное решение уравнения

$$X_jT-TX_j=X_j\overline{T}-\overline{T}X_j, \tag{64}$$

представимое рядом композиций, имеет вид

$$T=\overline{T}+F(X_j), \tag{65}$$

где $F(X_j)$ — голоморфная функция от единственной подстановки X_j. Действительно, подставляя в рассматриваемое уравнение выражение

$$T=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\dots,m)}X_{j_1}\dots X_{j_\nu}\tau_{j_1\dots j_\nu} \tag{66}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых композициях дифференциальных подстановок, мы получим

$$\tau_{j_1 \ldots j_\nu} = \bar{\tau}_{j_1 \ldots j_\nu}, \tag{67}$$

если по крайней мере один из индексов $j_1, \ldots, j$ отличен от j. Введя обозначение

$$[T]_j = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_j^\nu \tau_{j_\nu} \tag{68}$$

мы можем написать

$$T = \bar{T} + [T]_j - [\bar{T}]_j. \tag{69}$$

Пользуясь этим замечанием, получаем из уравнений (62)

$$\left.\begin{aligned} G_{jp} &= \frac{U_{jp}}{a_j - a_p} + F_{jp}(W_j), \qquad \text{если } p \neq j; \\ G_{jj} &= \sum_{q \neq j} \frac{U_{jq}}{a_q - a_j} + F_{jj}(W_j), \end{aligned}\right. \tag{70}$$

где $F_{jp}(W_j)$ и $F_{jj}(W_j)$ — функции от одной подстановки W_j. Все члены разложений подстановок U_{jp} и U_{jq} в ряды композиций показательных подстановок содержат множители W_p или соответственно W_q, отличные от W_j. Следовательно, мы имеем

$$F_{jp}(W_j) = [G_{jp}]_j, \qquad F_{jj}(W_j) = [G_{jj}]_j. \tag{71}$$

Но если мы положим для сокращения

$$Z_j = \vartheta_j \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Big), \tag{72}$$

то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial Z_j}{\partial x} = Z_j \sum_{h=1}^{m} \frac{U_{jh}}{x - a_h} \tag{73}$$

и вместо (57) получим

$$\frac{\partial Z_j}{\partial a_p} = Z_j \left(-\frac{U_{jp}}{x - a_p} + G_{jp} \right), \tag{74}$$

откуда следует

$$G_{jp} = Z_j^{-1} \frac{\partial Z_j}{\partial a_p} + \frac{U_{jp}}{x - a_p}, \qquad G_{jj} = Z_j^{-1} \frac{\partial Z_j}{\partial a_j} + \frac{W_j}{x - a_j}. \tag{75}$$

Теперь очевидно

$$[Z_j]_j = \vartheta_j \left(\begin{matrix} 0 \ldots 0 & W_j & 0 \ldots 0 \\ a_1 \ldots a_{j-1} & a_j & a_{j+1} \ldots a_m \end{matrix} \middle| x \right) = (x - a_j)^{W_j}, \tag{76}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial Z_j}{\partial a_p}\right]_j = 0, \quad \left[\frac{\partial Z_j}{\partial a_j}\right] &= -\frac{W_j}{x - a_j}(x - a_j)^{W_j}, \\ \left[Z_j^{-1} \frac{\partial Z_j}{\partial a_j}\right]_j &= -\frac{W_j}{x - a_j}. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Следовательно, мы имеем

$$[G_{jp}]_j = [G_{jj}]_j = 0; \quad F_{jp}(W_j) = F_{jj}(W_j) = 0, \tag{78}$$

и функции G_{jp} и G_{jj} определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} G_{jp} &= \frac{U_{jq}}{a_j - a_p}, \qquad \text{если } p \neq j; \\ G_{jj} &= \sum_{q \neq j} \frac{U_{jq}}{a_q - a_j}. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Подставляя полученные выражения в соотношения (61), получим следующие выражения производных дифференциальных подстановок для метаканонических матриц при фиксированных показательных подстановках:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_{jh}}{\partial a_p} &= \left(\frac{1}{a_p - a_h} - \frac{1}{a_p - a_j} \right) (U_{jh} U_{jp} - U_{jp} U_{jh}), \quad \text{если } p \neq j, \ p \neq h; \\ \frac{\partial U_{jh}}{\partial a_j} &= \frac{U_{jh} W_j - W_j U_{jh}}{a_j - a_h} + \sum_{\substack{q \neq j \\ q \neq h}} \frac{U_{jq} U_{jh} - U_{jh} U_{jq}}{a_j - a_q}, \quad \text{если } j \neq h; \\ \frac{\partial U_{jh}}{\partial a_h} &= \frac{U_{jh} W_j - W_j U_{jh}}{a_h - a_j} + \sum_{\substack{q \neq j \\ q \neq h}} \frac{U_{jh} U_{jq} - U_{jq} U_{jh}}{a_h - a_q}, \quad \text{если } j \neq h; \\ \frac{\partial U_{jj}}{\partial a_p} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{80}$$

Таким образом мы получаем следующее заключение: дифференциальные подстановки $U_{j1}, \ldots, U_{jj-1}, U_{jj+1}, \ldots, U_{jm}$ метаканонической матрицы

$$\vartheta_j \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Big)$$

при фиксированных показательных подстановках, рассматриваемые как функции особой точки a_j, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_{jh}}{da_j} = \frac{U_{jh} W_j - W_j U_{jh}}{x_j - a_h} + \sum_{\substack{q \neq j \\ q \neq h}} \frac{U_{jq} U_{jh} - U_{jh} U_{jq}}{a_j - a_q}. \tag{81}$$

$$(h = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m).$$

Рассмотрим теперь бесконечно далекую особую точку. Выражения производных дифференциальных подстановок $U_{\infty h}$ метаканонической матрицы

$$\vartheta_\infty \begin{pmatrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix} x \Big) \tag{82}$$

на основании соотношений (61) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_{\infty_h}}{\partial a_p} &= U_{\infty_h} G_{\infty_p} - G_{\infty_p} U_{\infty_h} + \frac{U_{\infty_h} U_{\infty_p} - U_{\infty_p} U_{\infty_h}}{a_p - a_h}, \quad \text{если } p \neq h; \\ \frac{\partial U_{\infty_h}}{\partial a_h} &= U_{\infty_h} G_{\infty_h} - G_{\infty_h} U_{\infty_h} + \sum_{q \neq h} \frac{U_{\infty_h} U_{\infty_q} - U_{\infty_q} U_{\infty_h}}{a_h - a_q}. \end{aligned}\right. \tag{83}$$

Но показательная подстановка в бесконечно далекой точке для матрицы (82), совпадающая с соответствующей дифференциальной подстановкой, определяется формулой

$$W_\infty = -(W_{\infty 1} + W_{\infty 2} + \ldots + W_{\infty m}) \tag{84}$$

и не зависит от конфигурации особых точек. Но если мы составим в силу уравнений (83) сумму

$$\sum_{h \neq p} \frac{\partial U_{\infty p}}{\partial a_p} + \frac{\partial U_{\infty p}}{\partial a_p} = - \frac{\partial W_\infty}{\partial a_p} = 0,$$

то без труда найдем

$$W_\infty G_{\infty p} - G_{\infty p} W_\infty = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, m). \tag{85}$$

Показательная подстановка W_∞ связана с показательными подстановками $W_1, W_2, \ldots, W_m$ соотношением

$$e^{2\pi i W_\infty} = e^{-2\pi i W_m} \ldots e^{-2\pi i W_2} e^{-2\pi i W_1} \tag{86}$$

[ст. IV, § 2]. Мы можем, следовательно, выразить W_m как функцию аргументов $W_\infty, W_1, W_2, \ldots, W_{m-1}$. Считая введенные функции зависящими от подстановок $W_\infty, W_1, W_2, \ldots, W_{m-1}$ (вместо $W_1, W_2, \ldots, W_m$) найдем прежде всего, что

$$G_{\infty p} = F_p(W_\infty). \tag{87}$$

С другой стороны, вместо (75) мы имеем соотношение

$$G_{\infty p} = Z_\infty^{-1} \frac{\partial Z_\infty}{\partial a_p} + \frac{U_{\infty p}}{x - a_p}. \tag{88}$$

Пусть $p < m$; тогда, повторяя проведенные выше рассуждения, получим формулу

$$[U_{\infty p}]_\infty = 0, \tag{89}$$

ибо все члены разложения подстановки $U_{\infty p}$ в ряд композиций подстановок $W_\infty, W_1, \ldots, W_{m-1}$ содержат множитель W_p. Для того чтобы найти $[Z_\infty]_\infty$, мы можем взять

$$W_1 = W_2 = \ldots = W_{m-1} = 0.$$

Но тогда $W_m = -W_\infty$ и, следовательно,

$$[Z_\infty]_\infty = (x - a)^{W_m} = (x - a_m)^{-W_\infty}. \tag{90}$$

Далее мы находим

$$\left[\frac{\partial Z_\infty}{\partial a_p}\right]_\infty = 0 \qquad (p < m). \tag{91}$$

Из формул (89) и (91) в силу (87) и (88) вытекает

$$G_{\infty p} = 0 \qquad (p < m). \tag{92}$$

Очевидно, что тот же результат должен иметь место и для значения $p = m$. Это можно проверить и непосредственно; действительно, положив

$$W_1 = W_2 = \ldots = W_{m-1} = 0,$$

мы найдем

$$W_{\infty m} = W_m = -W_\infty,$$

т. е.

$$[U_{\infty m}]_\infty = -W_\infty;$$

далее, в силу (90) имеем

$$\left[\frac{\partial Z_\infty}{\partial a_m}\right]_\infty = \frac{W_\infty}{x - a_m}(x - a_m)^{-W_\infty}$$

и в силу (88)

$$G_{\infty m} = \left[Z_\infty^{-1} \frac{\partial Z_\infty}{\partial a_m}\right]_\infty + \left[\frac{U_{\infty m}}{x - a_m}\right]_\infty = \frac{W_\infty}{x - a_m} - \frac{W_\infty}{x - a_m} = 0. \tag{93}$$

Подставляя в формулы (83) $G_{\infty h} = 0$, мы получим выражения производных дифференциальных подстановок метаканонической матрицы в бесконечно далекой точке при фиксированных показательных подстановках

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_{\infty h}}{\partial a_p} &= \frac{U_{\infty h} U_{\infty p} - U_{\infty p} U_{\infty h}}{a_p - a_h}, \quad \text{если} \quad p \neq h; \\ \frac{\partial U_{\infty h}}{\partial a_h} &= \sum_{q \neq h} \frac{U_{\infty h} U_{\infty q} - U_{\infty q} U_{\infty h}}{a_h - a_q}. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Укажем еще некоторые соотношения, непосредственно вытекающие из полученных формул. Из формул (80) получаем такие следствия:

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial U_{jh}}{\partial a_s} = 0, \qquad \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial U_{jh}}{\partial a_s} a_s = U_{jh} W_j - W_j U_{jh} \qquad (j, h = 1, 2, \ldots, m). \tag{95}$$

Точно так же получаем из формул (94)

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial U_{\infty h}}{\partial a_s} = 0, \qquad \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial U_{\infty h}}{\partial a_s} a_s = W_\infty U_{\infty h} - U_{\infty h} W_\infty. \tag{96}$$

Пользуясь полученными соотношениями, мы можем указать выражения производных дифференциальных подстановок

$$U_j(b) = H_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b\right) \tag{97}$$

регулярной нормированной матрицы по координатам особых точек. Пользуясь обозначением (72), получаем соотношения [ст. IV, § 3]:

$$\begin{gathered} U_j(b) = Z_j(b) W_j Z_j(b)^{-1}; \quad U_h(b) = Z_j(b) U_{jh} Z_j(b)^{-1}, \\ U_{jh} = Z_j(b)^{-1} Z_h(b) W_h Z_h(b)^{-1} Z_j(b). \end{gathered} \tag{98}$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial U_j}{\partial a_h} = \frac{\partial Z_j}{\partial a_h} W_j Z_j^{-1} Z_j W_j Z_j^{-1} \frac{\partial Z_j}{\partial a_h} Z_j^{-1} = \frac{\partial Z_j}{\partial a_h} Z_j^{-1} U_j - U_j \frac{\partial Z_j}{\partial a_h} Z_j^{-1}.$$

Но формулы (74) и (79) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_j(b)}{\partial a_h} &= Z_j(b) U_{jh} \left(\frac{1}{a_j - a_h} - \frac{1}{b - a_h}\right) = \\ &= U_h(b) Z_j(b) \left(\frac{1}{a_j - a_h} - \frac{1}{b - a_h}\right) \qquad (h \neq j), \\ \frac{\partial Z_j(b)}{\partial a_j} &= Z_j(b) \left[\sum_{h \neq j} \frac{U_{jh}}{a_h - a_j} - \frac{W_j}{b - a_j}\right] = \sum_{h \neq j} \frac{U_h(b) Z_j(b)}{a_h - a_j} - \frac{Z_j(b) W_j}{b - a_j}. \end{aligned} \tag{99}$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{\partial U_j}{\partial a_h}=\left(\frac{1}{a_j-a_h}-\frac{1}{b-a_h}\right)(U_hU_j-U_jU_h),\qquad \frac{\partial U_j}{\partial a_j}=\sum_{h\neq j}\frac{U_hU_j-U_jU_h}{a_h-a_j}\qquad (h\neq j). \tag{100}$$

Отсюда следует, что дифференциальные подстановки регулярной нормированной матрицы при фиксированных показательных подстановках, рассматриваемые как функции особых точек и точки нормирования, суть интегральные матрицы системы уравнений в частных производных

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_j}{\partial b}=\sum_{h\neq j}\frac{U_hU_j-U_jU_h}{b-a_h},\qquad \frac{\partial U_j}{\partial a_j}=\sum_{h\neq j}\frac{U_hU_j-U_jU_h}{a_h-a_j},\\ \frac{\partial U_j}{\partial a_h}=\left(\frac{1}{a_j-a_h}-\frac{1}{b-a_h}\right)(U_hU_j-U_jU_h)\qquad (h\neq j).\end{gathered} \tag{101}$$

Первая из этих формул доказана в § 4 четвертой статьи.

Получим еще системы дифференциальных уравнений для подстановок перехода. Подстановками перехода мы называем подстановки

$$Z_{jh}=\vartheta_{jh}\begin{pmatrix}W_1 & \dots & W_m\\ a_1 & \dots & a_m\end{pmatrix}=Z_j^{-1}Z_h=\vartheta_j^{-1}\left(\begin{matrix}W_1 & \dots & W_m\\ a_1 & \dots & a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1 & \dots & W_m\\ a_1 & \dots & a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right). \tag{102}$$

Легко видеть, что эти подстановки не зависят от переменной x. Так как подстановки $W_1, \dots, W_m$ фиксированы, то мы имеем

$$Y_b(x)=\vartheta_j(x)\vartheta_j^{-1}(b)=\vartheta_h(x)\vartheta_h^{-1}(b),$$

и, следовательно,

$$\vartheta_j^{-1}(b)\vartheta_h(b)=\vartheta_j^{-1}(x)\vartheta_h(x),$$

откуда следует наше утверждение.

Мы имеем также:

$$\vartheta_h(x)=\vartheta_j(x)C$$

и для постоянной матрицы C:

$$C=\vartheta_j^{-1}(x)\vartheta_h(x)=Z_{jh},\ \text{т. е. }\ \vartheta_h(x)=\vartheta_j(x)Z_{jh}.$$

Мы имеем

$$\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_r}=-Z_j^{-1}\frac{\partial Z_j}{\partial a_r}Z_j^{-1}+Z_j^{-1}\frac{\partial Z_h}{\partial a_r}. \tag{103}$$

Принимая во внимание соотношения

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z_\infty}{\partial a_p}&=-\frac{Z_\infty U_{\infty p}}{x-a_p}=-\frac{Z_pW_pZ_p^{-1}Z_\infty}{x-a_p},\\ \frac{\partial Z_j}{\partial a_p}&=Z_jU_{jp}\left(\frac{1}{a_j-a_p}-\frac{1}{x-a_p}\right)=Z_pW_pZ_p^{-1}Z_j\left(\frac{1}{a_j-a_p}-\frac{1}{x-a_p}\right),\\ \frac{\partial Z_j}{\partial a_j}&=Z_j\left[\sum_{q\neq j}\frac{U_{jq}}{a_q-a_j}-\frac{W_j}{x-a_j}\right]=\sum_{q\neq j}\frac{Z_qW_qZ_q^{-1}Z_j}{a_q-a_j}-\frac{Z_jW_j}{x-a},\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

после простых преобразований найдем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Z_{\infty h}}{\partial a_p}=\frac{Z_{\infty p}W_pZ_{\infty p}^{-1}Z_{\infty h}}{a_h-a_p},\qquad \frac{\partial Z_{\infty h}}{\partial a_h}=\sum_{q\neq h}\frac{Z_{\infty q}W_qZ_{\infty q}^{-1}Z_{\infty h}}{a_q-a_h},\\ &\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_p}=Z_{jp}W_pZ_{jp}^{-1}Z_{jh}\left(\frac{1}{a_h-a_p}-\frac{1}{a_j-a_p}\right),\\ &\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_j}=-\sum_{q\neq j}\frac{Z_{jq}W_qZ_{jq}^{-1}Z_{jh}}{a_q-a_j}+\frac{W_jZ_{jh}}{a_h-a_j},\\ &\frac{\partial Z_{jh}}{\partial a_h}=\sum_{q\neq}\frac{Z_{jq}W_qZ_{jq}^{-1}Z_{jh}}{a_q-a_h}-\frac{Z_{jh}W_h}{a_j-a_h}.\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Наряду с переменной конфигурацией $a_1, a_2, \dots, a_m$ особых точек рассмотрим фиксированную конфигурацию $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ особых точек и положим для сокращения

$$Z_{jh}=\vartheta_{jh}\begin{pmatrix}W_1 & \dots & W_m\\ a_1 & \dots & a_m\end{pmatrix},\quad Z'_{jh}=\vartheta_{jh}\begin{pmatrix}W_1 & \dots & W_m\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m\end{pmatrix}. \tag{106}$$

Если дифференциальные подстановки матрицы

$$\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1 & \dots & W_m\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$$

суть U'_{jh}, то мы имеем соотношения

$$U_{jh}=Z_{jh}W_hZ_{jh}^{-1},\quad U'_{jh}=Z'_{jh}W_h\,Z'^{-1}_{jh}. \tag{107}$$

Очевидно,

$$U_{jh}=Z_{jh}Z'^{-1}_{jh}U'_{jh}Z'_{jh}Z_{jh}^{-1}. \tag{108}$$

Зная подстановки $U'_{jh}\ (h=1, 2, \dots, m)$ и особые точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, мы можем построить метаканоническую матрицу

$$\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1 & \dots & W_m\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

а также показательные подстановки $W_1, \dots, W_m$, по которым можем определить дифференциальные подстановки U_{jh} метаканонической матрицы

$$\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1 & \dots & W_m\\ a_1 & \dots & a_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right).$$

Отсюда следует, что мы можем положить

$$Z_{jh}Z'^{-1}_{jh}=\Gamma_{jh}\begin{pmatrix}U'_{j1} & \dots & U'_{jm}\\ a_1 & \dots & a_m\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m\end{pmatrix}\qquad (j=1, 2, \dots, m, \infty,\ h=1, 2, \dots, m). \tag{109}$$

Введенные матрицы, очевидно, удовлетворяют начальным условиям

$$\Gamma_{jh}\begin{pmatrix}U'_{j1} & \dots & U'_{jm}\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m\\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m\end{pmatrix}=I. \tag{110}$$

С другой стороны, так как матрицы Z'_{jh} не зависят от особых точек $a_1, \ldots, a_m$, то весьма легко, опираясь на формулы (105), получить дифференциальные уравнения для матриц Γ_{jh}. Например, мы имеем

$$\frac{\partial \Gamma_{\infty h}}{\partial a_p} = \frac{\partial \Gamma_{\infty h}}{\partial a_p} Z'^{-1}_{\infty h} = \frac{Z_{\infty p} W_p Z^{-1}_{\infty p} Z_{\infty h} Z'^{-1}_{\infty h}}{a_h - a_p} = \frac{\Gamma_{\infty p} U'_{\infty p} \Gamma^{-1}_{\infty p} \Gamma_{\infty h}}{a_h - a_p}.$$

Аналогичные вычисления приводят к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{\infty h}}{\partial a_p} &= \frac{\Gamma_{\infty p} U'_{\infty p} \Gamma^{-1}_{\infty p} \Gamma_{\infty h}}{a_h - a_p}, \\
\frac{\partial \Gamma_{\infty h}}{\partial a_h} &= \sum_{q \neq h} \frac{\Gamma_{\infty q} U'_{\infty q} \Gamma^{-1}_{\infty q} \Gamma_{\infty h}}{a_q - a_h}, \\
\frac{\partial \Gamma_{jh}}{\partial a_p} &= \Gamma_{jp} U'_{jp} \Gamma'_{jp} \Gamma_{jh} \left(\frac{1}{a_h - a_p} - \frac{1}{a_j - a_p} \right), \\
\frac{\partial \Gamma_{jh}}{\partial a_j} &= -\sum_{q \neq j} \frac{\Gamma_{jq} U'_{jq} \Gamma^{-1}_{jq} \Gamma_{jh}}{a_q - a_j} + \frac{U'_{jj} \Gamma_{jh}}{a_h - a_j}, \\
\frac{\partial \Gamma_{jh}}{\partial a_h} &= \sum_{q \neq h} \frac{\Gamma_{jq} U'_{jq} \Gamma^{-1}_{jq} \Gamma_{jh}}{a_q - a_h} - \frac{\Gamma_{jh} U'_{jh}}{a_j - a_h}.
\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Предположим теперь, что нам известна регулярная матрица

$$Y'_\beta(\xi) = \Psi_\beta \left(\begin{array}{ccc|c} W_1 & \ldots & W_m & \xi \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) \tag{112}$$

и соответствующие дифференциальные подстановки

$$U'_j = E_j \left(\begin{array}{ccc|c} W_1 & \ldots & W_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right), \tag{113}$$

и требуется определить регулярную матрицу

$$Y_b(x) = \Psi_b \left(\begin{array}{ccc|c} W_1 & \ldots & W_m & x \\ a_1 & \ldots & a_m & \end{array} \right) \tag{114}$$

и соответствующие дифференциальные подстановки

$$U_j = H_j \left(\begin{array}{ccc|c} W_1 & \ldots & W_m & b \\ a_1 & \ldots & a_m & \end{array} \right). \tag{115}$$

Полагая для сокращения

$$\vartheta_j \left(\begin{array}{ccc|c} W_1 & \ldots & W_m & x \\ a_1 & \ldots & a_m & \end{array} \right) = Z_j(x), \qquad \vartheta_j \left(\begin{array}{ccc|c} W_1 & \ldots & W_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) = Z'_j(\beta), \tag{116}$$

получим

$$\begin{aligned} Y'_\beta(\xi) = Z'_j(\xi) Z'_j(\beta)^{-1}; \quad Y_b(x) = Z_j(x) Z_j(b)^{-1}, \\ U_j = Z_j(b) W_j Z_j(b)^{-1}; \quad U'_j = Z'_j(\beta) W_j Z'_j(\beta)^{-1}. \end{aligned} \tag{117}$$

Мы можем теперь положить

$$Z_j(x) Z'_j(\beta)^{-1} = \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & x \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right). \tag{118}$$

Тогда имеем

$$Z_j(x) = \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & x \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) Z'_j(\beta), \qquad Z_j(b) = \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & b \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) Z'_j(\beta) \tag{119}$$

и, следовательно, в силу (117) находим:

$$Y_b(x) = \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & x \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & b \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right)^{-1}, \tag{120}$$

$$U_j = \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & b \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) U'_j \Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & b \\ a_1 & \ldots & a_m & \beta \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right)^{-1}. \tag{121}$$

Следовательно, мы получили решение поставленной задачи с помощью матрицы Δ_j.

Матрицы Δ_j удовлетворяют начальным условиям

$$\Delta_j \left(\begin{array}{ccc|c} U'_1 & \ldots & U'_m & \xi \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \xi \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & \end{array} \right) = I \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{122}$$

что очевидно на основании формул (118).

Кроме того, легко построить дифференциальные уравнения для матриц Δ_j. Дифференцируя эти матрицы по $x, a_1, a_2, \ldots, a_m$ и принимая во внимание соотношения (73) и (104), после простых преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta_j}{\partial x} &= \sum_{h=1}^{m} \frac{\Delta_h U'_h \Delta^{-1}_h \Delta_j}{x - a_h}, \\
\frac{\partial \Delta_j}{\partial a_j} &= \sum_{h \neq j} \frac{\Delta_h U'_h \Delta^{-1}_h \Delta_j}{a_h - a_j} - \frac{\Delta_j U'_j}{x - a_j}, \\
\frac{\partial \Delta_j}{\partial a_h} &= \Delta_h U'_h \Delta^{-1}_h \Delta_j \left(\frac{1}{a_j - a_h} - \frac{1}{x - a_h} \right).
\end{aligned}\right\} \tag{123}$$

РАЗНОЕ

1. О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ КОМПОЗИЦИЙ

В первой статье [§ 9], доказывая вторично формулу Лагранжа — Сильвестра, мы ввели для матрицы X ортогональные составляющие $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, \ldots, X^{(n)}$. Каждая из этих матриц имеет только одно отличное от нуля характеристическое число. В § 19 мы произвели суммирование рядов композиций m матриц *второго* порядка $X_1, X_2, \ldots, X_m$, причем каждая из этих матриц имеет одно характеристическое число, равное нулю. Эти матрицы обладают свойствами, выражаемыми формулами (324), (326) и (327) первой статьи.

Матрицы $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$ обладают аналогичными свойствами; например, если Y — произвольная матрица, то мы имеем формулы

$$(X^{(k)}Y)^{\mu} = X^{(k)}Y\sigma\,(X^{(k)}Y)^{\mu-1},$$

$$(YX^{(k)})^{\mu} = YX^{(k)}\sigma\,(YX^{(k)})^{\mu-1},$$

$$X^{(k)}YX^{(k)} = X^{(k)}\sigma\,(X^{(k)}Y)$$

$$(\mu = 2, 3, \ldots).$$

Предыдущие формулы верны в более общем случае, если матрица $X^{(k)}$ подобна матрице, у которой все элементы равны нулю, за исключением одного. Если этот последний элемент находится на главной диагонали, то мы имеем предыдущий случай; в противном случае мы имеем матрицу, у которой все характеристические числа равны нулю и элементарные делители простые, за исключением одного второго порядка.

Предыдущие соотношения могут быть использованы при суммировании рядов композиций нескольких матриц.

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ $XU - UX = \lambda X$

Мы рассматривали это уравнение в первой статье [§ 22]. Можно указать другую форму решения этого уравнения. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — характеристические числа матрицы U и пусть

$$U = S\,[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\,S^{-1}$$

— каноническое представление матрицы U.

Обозначим через $\widetilde{C}_{kl}$ произвольную матрицу, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов главной диагонали и элементов $\{\widetilde{C}_{kl}\}_{kl}$ и $\{\widetilde{C}_{kl}\}_{lk}$. Пусть теперь

$$C_{kl} = S\widetilde{C}_{kl}S^{-1};$$

тогда матрица

$$X = \lambda_{kl}(C_{kl}U - UC_{kl}) + C_{kl}U^2 - 2UC_{kl}U + U^2C_{kl}, \tag{1}$$

где

$$\lambda_{kl} = \sigma_l - \sigma_k \tag{2}$$

есть решение уравнения

$$XU - UX = \lambda_{kl}X. \tag{3}$$

Мы можем убедиться без труда, что решение (1) совпадает с упомянутым выше решением [стр. 119, формула (413)]. Если матрицы второго порядка, то матрица C_{kl} — произвольная, матрица C и решение (1) принимают вид:

$$X = \lambda_{kl}(CU - UC) + CU^2 - 2UCU + U^2C. \tag{4}$$

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $HX + pX - XU = T$

В первой статье [§ 22] мы подробно рассматривали уравнение

$$UX + pX - XU = T, \tag{1}$$

где U и T — заданные матрицы, p — заданное число, отличное от нуля, и X — неизвестная матрица.

Аналогичные методы можно применить для решения более общего уравнения

$$HX + pX - XU = T, \tag{2}$$

где H, U и T — заданные матрицы, X — неизвестная матрица и $p \neq 0$ — заданный параметр.

Прежде всего заменим уравнение (2) системой n^2 уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}\{H\}_{ks}\{X\}_{sl} + p\{X\}_{kl} - \sum_{s=1}^{n}\{X\}_{ks}\{U\}_{sl} = \{T\}_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

с n^2 неизвестными $\{X\}_{kl}$. Определитель этой системы

$$\Delta(H, U \mid p) \tag{4}$$

является полиномом от элементов матриц H и U вида

$$\Delta(H, U \mid p) = \sum_{\nu=0}^{n^2}\delta_\nu(H, U \mid p), \tag{5}$$

где $\delta_\nu(H, U \mid p)$ — однородные полиномы степени ν от элементов матриц U и H и

$$\delta_0(H, U \mid p) = p^{n^2}. \tag{6}$$

Так как определитель (4) есть полином степени n^2 относительно p, то мы можем представить его в виде:

$$\Delta(H, U \mid p) = \prod_{k,\, l=1}^{n}[p - J_{kl}(H, U)], \tag{7}$$

где $J_{kl}(H, U)$ — алгебраические функции от элементов матриц H и U. Если матрицы H и U находятся в окрестности нулевых матриц, то, очевидно, матрица X является голоморфной функцией этих матриц. Действительно, мы

можем проверить, что имеет место разложение

$$X = \sum_{\lambda+\mu=0}^{\infty} H^\lambda T U^\mu \frac{(-1)^\lambda(\lambda+\mu)!}{p^{\lambda+\mu+1}\lambda!\,\mu!}. \tag{8}$$

Но элементы матрицы

$$X\Delta(H, U \mid p) = \sum_{\lambda+\mu+\nu=0}^{\infty} H^\lambda T U^\mu \delta_\nu(H, U \mid p)\frac{(\lambda+\mu)!\,(-1)^\lambda}{p^{\lambda+\mu+1}\lambda!\,\mu!} \tag{9}$$

должны быть полиномами степени $(n^2 - 1)$ от элементов матриц H и U. Отсюда следует, что общее представление матрицы X таково:

$$X = \frac{1}{\Delta(H, U \mid p)}\sum_{\lambda+\mu+\nu=0}^{n^2-1} H^\lambda T U^\mu \delta_\nu(H, U \mid p)\frac{(-1)^\lambda(\lambda+\mu)!}{p^{\lambda+\mu+1}\lambda!\,\mu!}. \tag{10}$$

Элементы матриц X суть рациональные функции от элементов матриц H и U, знаменатели которых могут обращаться в нуль лишь для матриц, удовлетворяющих одному из условий

$$J_{kl}(H, U) = p. \tag{11}$$

Мы можем использовать решение (2) для преобразования уравнений (128) пятой статьи [§ 9], которые нам встретились в задаче о построении метаканонической матрицы иррегулярной системы.

Вводя обозначения

$$T_j^{(p)} = \sum_{h \neq j}\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^r r(r+1)\ldots(r+p-2)}{(p-1)!\,(a_h - a_j)^{r+p-1}}U_h^r, \tag{12}$$

мы можем преобразовать уравнения (128) следующим образом:

$$H_j^{(r)} = U_j^{(r)} + \sum_{q=r+1}^{s}(A_j^{(q-r)}U_j^{(q)} - H_j^{(q)}A_j^{(q-r)}) \qquad (r = s, s-1, \ldots, 1), \tag{13}$$

$$A_j^{(p)} = \frac{1}{p}\left[\sum_{q=0}^{p-1}A_j^{(q)}T_j^{(p-q)} + \sum_{q=p}^{p+s-1}(A_j^{(q)}U_j^{(q-p+1)} - H_j^{(q-p+1)}A_j^{(q)}\right]. \tag{14}$$

$$(p = 1, 2, \ldots)$$

Разрешая уравнения (14) по формулам (10), мы можем заменить систему (14) следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} A_j^{(p)} = \frac{1}{\Delta(H_j^{(1)}U_j^{(1)} \mid p)}\Bigg[&\sum_{\lambda+\mu+\nu=0}^{n^2-1}\sum_{q=0}^{p-1}H_j^{(1)\lambda}A_j^{(q)}T^{(p-q)}U_j^{(1)\mu}\delta_\nu(H_j^{(1)}, U_j^{(1)} \mid p)\times \\ &\times\frac{(-1)^\lambda(\lambda+\mu)!}{p^{\lambda+\mu+1}\lambda!\,\mu!} + \sum_{\lambda+\mu+\nu=0}^{n^2-1}\sum_{q=p+1}^{s+p-1}H_j^{(1)\lambda}(A_j^{(q)}U_j^{(q-p+1)} - H_j^{(q-p+1)}A_j^{(q)})U_j^{(1)\mu}\times \\ &\times\delta_\nu(H_j^{(1)}, U_j^{(1)} \mid p)\frac{(-1)^\lambda(\lambda+\mu)!}{p^{\lambda+\mu+1}\lambda!\,\mu!}\Bigg] = \\ &= F_p(A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(p-1)}, A_j^{(p+1)}, \ldots, A_j^{(p+s-1)}). \end{aligned} \tag{15}$$

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ

$$T\sum_{j=1}^{m} U_j - \sum_{j=1}^{m} U_j T = T - T\sum_{j=1}^{m} a_j U_j T; \qquad T^2 = 0$$

Эта система встречалась нам в девятой статье. Из результатов этой статьи следует, что в случае матриц второго порядка указанная выше система имеет, вообще говоря, два решения. Мы записали эти два решения в случае $m=2$ и в предположении

$$D(U_1) = D(U_2) = 0$$

в простой форме [ст. IX, формулы (59) и (60)].

Рассмотрим теперь общий случай матриц второго порядка. Полагая

$$-\sum_{j=1}^{m} U_j = U, \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j U_j = S, \tag{1}$$

запишем систему в виде

$$UT - TU = \delta T, \qquad T^2 = 0, \tag{2}$$

где

$$\delta = \sigma(ST) - 1. \tag{3}$$

Непосредственное изучение системы (2) приводит к решению этой системы в виде

$$T = \frac{\sigma(U)(1+\delta)\left[\delta(SU-US) + SU^2 - 2USU + U^2 S\right]}{2\left\{\sigma(U)\sigma(S)\sigma(USU) - \sigma(U)\sigma(SU)^2 + \delta^2\left[\sigma(SUS) - \sigma(SU)\sigma(S)\right]\right\}}, \tag{4}$$

где

$$\delta^2 = 4\{U\}_{12}\{U\}_{21} + [\{U\}_{22} - \{U\}_{11}]^2. \tag{5}$$

Форма решения (4) тесно связана с формулой (4), заметки (2).

Формула (59) из девятой статьи, упомянутая выше, получается непосредственно из формулы (4).

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ФУНКЦИИ $\mathrm{Lg}\left(e^{X_1}e^{X_2}\ldots e^{X_m}\right)$

Теорема. *Если матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_m$ находятся в окрестности нулевых матриц, то существуют подстановки $S_1, S_2, \ldots, S_m, S_\infty$ такие, что имеет место следующее равенство:*

$$S_\infty^{-1}\,\mathrm{Lg}\left(e^{X_1}e^{X_2}\ldots e^{X_m}\right)S_\infty = S_1^{-1}X_1S_1 + \ldots + S_m^{-1}X_mS_m, \tag{1}$$

где логарифмическая функция определяется рядом

$$\mathrm{Lg}\,Y = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(Y-I)^{\nu}}{\nu}. \tag{2}$$

Доказательство. Возьмем m различных точек

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

и построим систему

$$\frac{dY}{dx} = Y\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{x-a_j}, \tag{3}$$

такую, что интегральная матрица этой системы, нормированная в точке b:

$$Y_b(b) = I, \tag{4}$$

имеет в особых точках a_j показательные подстановки

$$W_j = -\frac{1}{2\pi i}X_{m-j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Мы имеем [ст. IV, (38)]

$$U_j = -\frac{1}{2\pi i}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)X_{m-j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}. \tag{6}$$

Интегральными подстановками матрицы $Y_b(x)$ в точке a_j являются

$$V_j = e^{-X_{m-j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь в окрестности точки $x=\infty$ соответствующую ветвь матрицы $Y_b(x)$ (некоторые указания по этому поводу мы сделали в четвертой статье [§ 1]); тогда имеем для интегральной подстановки матрицы $Y_b(x)$ в особой точке $x=\infty$ выражение [ст. IV, § 2]

$$V_\infty = (V_1\ldots V_m)^{-1} = V_m^{-1}\ldots V_1^{-1} = e^{X_1}\ldots e^{X_m} \tag{8}$$

и для показательной подстановки в той же точке — выражение

$$W_\infty = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Lg}\,V_\infty = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Lg}\left(e^{X_1}\ldots e^{X_m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[X_1 + \ldots + X_m + \frac{1}{2}\sum_{k<l}(X_kX_l - X_lX_k) + \ldots\right]. \tag{9}$$

Далее мы имеем

$$U_\infty = \bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)W_\infty\bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}, \tag{10}$$

с другой стороны,

$$U_\infty = -(U_1 + \ldots + U_m). \tag{11}$$

Сравнивая предыдущие формулы, получаем

$$\bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)\mathrm{Lg}\left(e^{X_1}\ldots e^{X_m}\right)\bar{\vartheta}_\infty\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1} =$$

$$= 2\pi i U_\infty = -2\pi i(U_1 + \ldots + U_m) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)X_{m-j}\bar{\vartheta}_j\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}. \tag{12}$$

Полагая теперь

$$S_j = \bar{\vartheta}_{m-j}\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2\pi i}X_m & \ldots & -\frac{1}{2\pi i}X_1\\ a_1 & \ldots & a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}, \tag{13}$$

мы докажем формулу (1).

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНФИГУРАЦИИ

Имеется связь между значениями параметров конфигурации и значениями гиперлогарифмов, что мы и хотим показать на некоторых примерах.

Исключив одну из особых точек a_j, мы будем обозначать через $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}, \ldots$ точки множества

$$a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m.$$

Само определение гиперлогарифмов [ст. II, § 2]

$$L_b(a_j \mid x) = \int_b^x \frac{dx}{x-a_j}, \qquad L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}}\, dx \tag{1}$$

и параметров конфигурации

$$P_j(a_{j_1} \mid b) = \int_{(a_j)} \frac{dx}{x-a_j}, \qquad P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = \int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}}\, dx \tag{2}$$

приводит прежде всего к формуле

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = 0. \tag{3}$$

Далее, очевидно (символ a_j^λ означает сокращение для $\overbrace{a_j \ldots a_j}^{\lambda \text{ раз}}$)

$$\left.\begin{aligned} L_b(a_j \mid x) &= \lg \frac{x-a_j}{b-a_j}, \\ L_b(a_j^\lambda \mid x) &= \frac{1}{\lambda!} \lg \left(\frac{x-a_j}{b-a_j}\right)^\lambda = \frac{1}{\lambda!}\,[L_b(a_j \mid x)]^\lambda \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и, следовательно,

$$P_j(a_j \mid b) = 2\pi i, \qquad P_j(a_j^\lambda \mid b) = \frac{(2\pi i)^\lambda}{\lambda!}. \tag{5}$$

Так как функция $L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} \mid x)$ голоморфна в окрестности точки a_j, то применение последней из формул (2) дает непосредственно равенство

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} a_j \mid b) = 2\pi i L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} \mid a_j). \tag{6}$$

Вычислим теперь $P_j(a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}})$. Обозначим через b_j точку с комплексной координатой b, которую получим, обходя в положительном направлении путь (a_j), тогда мы имеем:

$$P_j(a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}} \mid b) = \int_b^{b_j} \frac{L_b(a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu-1}} \mid \xi_{\mu+1})\, d\xi_{\mu+\nu}}{\xi_{\mu+\nu} - a_{j_{\mu+\nu}}} =$$

$$= \int_b^{b_j} \frac{1}{\xi_{\mu+\nu} - a_{j_{\mu+\nu}}} \int_b^{\xi_{\mu+\nu}} \frac{1}{\xi_{\mu+\nu-1} - a_{j_{\mu+\nu-1}}} \int_b^{\xi_{\mu+\nu-1}} \cdots$$

$$\cdots \int_b^{\xi_{\mu+2}} \frac{1}{\xi_{\mu+1} - a_{j_{\mu+1}}} \int_b^{\xi_{\mu+1}} \frac{dx}{x-a_j}\, d\xi_{\mu+1} \ldots d\xi_{\mu+\nu}, \tag{7}$$

где точки $b, x, \xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}, \ldots, \xi_{\mu+\nu-1}, \xi_{\mu+\nu}, b_j$ расположены на контуре (a_j) в указанном порядке, что можно записать символически следующим образом:

$$b < x < \xi_{\mu+1} < \xi_{\mu+2} < \ldots < \xi_{\mu+\nu-1} < \xi_{\mu+\nu} < b_j. \tag{8}$$

В интеграле (7) мы можем переменить порядок интегрирования, применяя обычные правила. Сделаем первое интегрирование по $\xi_{\mu+\nu}$, второе — по $\xi_{\mu+\nu-1}, \ldots$, последнее — по x. Очевидно, новыми пределами интегрирования будут

$$\left.\begin{aligned} b < {}&x < b_j, \\ x < {}&\xi_{\mu+1} < b_j, \\ &\cdots\cdots \\ \xi_{\mu+\nu-1} < {}&\xi_{\mu+\nu} < b_j, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ибо области (8) и (9) тождественны. Следовательно, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} P_j(a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}} \mid b) &= \int_b^{b_j} \frac{1}{x-a_j} \int_x^{b_j} \frac{1}{\xi_{\mu+1} - a_{j_{\mu+1}}} \int_{\xi_{\mu+1}}^{b_j} \cdots \\ &\cdots \int_{\xi_{\mu+\nu-1}}^{b_j} \frac{d\xi_{\mu+\nu}}{\xi_{\mu+\nu} - a_{j_{\mu+\nu}}}\, d\xi_{\mu+\nu-1} \ldots d\xi_{\mu+1}\, dx = \\ &= (-1)^\nu \int_b^{b_j} \frac{1}{x-a_j} \int_{b_j}^{x} \frac{1}{\xi_{\mu+1} - a_{j_{\mu+1}}} \int_{b_j}^{\xi_{\mu+1}} \cdots \\ &\cdots \int_{b_j}^{\xi_{\mu+\nu-1}} \frac{d\xi_{\mu+\nu}}{\xi_{\mu+\nu} - a_{j_{\mu+\nu}}}\, d\xi_{\mu+\nu-1} \ldots d\xi_{\mu+1}\, dx = \\ &= (-1)^\nu \int_b^{b_j} \frac{L_{b_j}(a_{j_{\mu+\nu}} \ldots a_{j_{\mu+1}} \mid x)\, dx}{x-a_j}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Но, очевидно,

$$L_{b_j}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = L_b(a_j \ldots a_{j_\nu} \mid x).$$

Следовательно, мы имеем

$$P_j(a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}} \mid b) = (-1)^\nu \int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_{\mu+\nu}} \ldots a_{j_{\mu+1}} \mid x)\, dx}{x-a_j},$$

т. е.

$$P_j(a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}} \mid b) = 2\pi i\, (-1)^\nu L_b(a_{j_{\mu+\nu}} \ldots a_{j_{\mu+1}} \mid a_j). \tag{11}$$

Формулы (6) и (11) являются частными случаями более общей формулы

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}}) =$$

$$= 2\pi i\, (-1)^\nu L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} \mid a_j) L_b(a_{j_{\mu+\nu}} \ldots a_{j_{\mu+1}} \mid a_j), \tag{12}$$

доказательство которой вполне аналогично доказательству формулы (11).

Прежде всего мы имеем

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}} | b) =$$

$$= \int\limits_b^{b_j} \frac{1}{\xi_{\mu+\nu} - a_{j_{\mu+\nu}}} \int\limits_b^{\xi_{\mu+\nu}} \frac{1}{\xi_{\mu+\nu-1} - a_{j_{\mu+\nu-1}}} \int\limits_b^{\xi_{\mu+\nu-1}} \ldots \int\limits_b^{\xi_{\mu+2}} \frac{1}{\xi_{\mu+1} - a_{j_{\mu+1}}} \times$$

$$\times \int\limits_b^{\xi_{\mu+1}} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} | x)}{x - a_j} dx \, d\xi_{\mu+1} \ldots d\xi_{\lambda+\nu}$$

и далее по изменении порядка интегрирования:

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} a_j a_{j_{\mu+1}} \ldots a_{j_{\mu+\nu}} | b) =$$

$$= \int\limits_b^{b_j} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} | x)}{x - a_j} \int\limits_x^{b_j} \frac{1}{\xi_{\mu+1} - a_{j_{\mu+1}}} \int\limits_{\xi_{\mu+1}}^{b_j} \ldots \int\limits_{\xi_{\mu+\nu-1}}^{b_j} \frac{d\xi_{\mu+\nu}}{\xi_{\mu+\nu} - a_{j_{\mu+\nu}}} d\xi_{\mu+\nu-1} \ldots d\xi_{\mu+1} \, dx =$$

$$= (-1)^\nu \int\limits_b^{b_j} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} | x) \, L_b(a_{j_{\mu+\nu}} \ldots a_{j_{\mu+1}} | x) \, dx}{x - a_j} =$$

$$= 2\pi i (-1)^\nu L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\mu} | a_j) \, L_b(a_{j_{\mu+\nu}} \ldots a_{j_{\mu+1}} | a_j),$$

что и требовалось доказать.

Введем теперь обозначение

$$L_b\left(\begin{matrix} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \\ t^\lambda \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_\nu = \lambda} L_b(t^{\varkappa_1} a_{j_1} t^{\varkappa_2} a_{j_2} \ldots t^{\varkappa_\nu} a_{j_\nu} | x), \qquad (13)$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным значениям индексов

$$\varkappa_1, \ \varkappa_2, \ \ldots, \ \varkappa_\nu,$$

удовлетворяющим указанному равенству.

Докажем следующее соотношение:

$$P_j(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda | b) = \frac{(2\pi i)^\lambda}{\lambda!} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} | a_j) - \frac{(2\pi i)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} L_b\left(\begin{matrix} a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \\ a_j \end{matrix} \middle| a_j\right) +$$

$$+ \frac{(2\pi i)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!} L_b\left(\begin{matrix} a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \\ a_j^2 \end{matrix} \middle| a_j\right) - \ldots + 2\pi i (-1)^{\lambda-1} L_b\left(\begin{matrix} a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \\ a_j^{\lambda-1} \end{matrix} \middle| a_j\right). \qquad (14)$$

Мы имеем

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda | x) =$$

$$= \int\limits_b^{x} \frac{1}{x_1 - a_j} \int\limits_b^{x_1} \frac{1}{x_2 - a_j} \ldots \int\limits_b^{x_{\lambda-1}} \frac{1}{x_\lambda - a_j} \int\limits_b^{x_\lambda} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu}{\xi - a_{j_\nu}} dx_\lambda \ldots dx_1.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda | x) =$$

$$= \int\limits_b^{x} \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} \int\limits_{\xi_\nu}^{x} \frac{1}{x_\lambda - a_j} \int\limits_{x_\lambda}^{x} \ldots \int\limits_{x_2}^{x} \frac{dx_1}{x_1 - a_j} dx_2 \ldots dx_\lambda \, d\xi_\nu.$$

Но мы имеем

$$\int\limits_{\xi_\nu}^{x} \frac{1}{x_\lambda - a_j} \int\limits_{x_\lambda}^{x} \frac{1}{x_{\lambda-1} - a_j} \ldots \int\limits_{x_2}^{x} \frac{dx_1}{x_1 - a_j} \, dx_2 \ldots dx_\lambda =$$

$$= (-1)^\lambda L_x(a_j^\lambda | \xi_\nu) = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \left(\lg \frac{\xi_\nu - a_j}{x - a_j}\right)^\lambda =$$

$$= \frac{1}{\lambda!} [\lg(x - a_j) - \lg(\xi_\nu - a_j)]^\lambda = \frac{1}{\lambda!} [L_b(a_j | x) - L_b(a_j | \xi_\nu)]^\lambda, \qquad (15)$$

и, следовательно,

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda | x) = \frac{1}{\lambda!} \int\limits_b^{x} \frac{[L_b(a_j | x) - L_b(a_j | \xi_\nu)]^\lambda}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu =$$

$$= \sum_{r=0}^{\lambda} \frac{(-1)^r}{r!(\lambda-r)!} L_b(a_j | x)^{\lambda-r} \int\limits_b^{x} \frac{L_b(a_j | \xi_\nu)^r}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu =$$

$$= \sum_{r=0}^{\lambda} \frac{(-1)^r L_b(a_j | x)^{\lambda-r}}{(\lambda-r)!} \int\limits_b^{x} \frac{L_b(a_j^r | \xi_\nu)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu. \qquad (16)$$

Подставляя в полученную формулу $x = b_j$, находим:

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda | b) = L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda | b_j) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{(-1)^r (2\pi i)^{\lambda-r}}{r!(\lambda-r)!} \int\limits_b^{b_j} \frac{L_b(a_j | \xi_\nu)^r}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu, \qquad (17)$$

так как член, отвечающий $r = 0$, обращается в нуль.

Заменяя контур (a_j) путем, который соединяет точку b с точкой a_j, затем обходит точку a_j и, наконец, возвращается в точку b, мы без труда находим

$$\int\limits_b^{b_j} \frac{L_b(a_j | \xi_\nu)^r}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu =$$

$$= -\int\limits_b^{a_j} \frac{[L_b(a_j | \xi_\nu) + 2\pi i]^r - L_b(a_j | \xi_\nu)^r}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu =$$

$$= -\sum_{s=0}^{r-1} \frac{r!(2\pi i)^{r-s}}{s!(r-s)!} \int\limits_b^{a_j} \frac{L_b(a_j | \xi_\nu)^s}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} | \xi_\nu) \, d\xi_\nu. \qquad (18)$$

Замечая еще, что

$$\frac{1}{s!} L_b(a_j \mid \xi_\nu)^s = L_b(a_j^s \mid \xi_\nu),$$

мы можем написать после простых преобразований

$$P_j(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} a_j^\lambda \mid b) =$$

$$= -\sum_{r=1}^{\lambda} \sum_{s=0}^{r-1} \frac{(-1)^r (2\pi i)^{\lambda-s}}{(\lambda-r)!\,(r-s)!} \int_b^{a_j} \frac{L_b(a_j^s \mid \xi_\nu)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid \xi_\nu)\, d\xi_\nu =$$

$$= \sum_{s=0}^{\lambda-1} \frac{(-1)^s (2\pi i)^{\lambda-s}}{(\lambda-s)!} \int_b^{a_j} \frac{L_b(a_j^s \mid \xi_\nu)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid \xi_\nu)\, d\xi_\nu. \tag{19}$$

Можно преобразовать последний интеграл следующим образом:

$$\int_b^{a_j} \frac{L_b(a_j^s \mid \xi_\nu)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid \xi_\nu)\, d\xi_\nu =$$

$$= \int_b^{a_j} \frac{1}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} \left[\int_b^{\xi_\nu} \frac{1}{y_s - a_j} \int_b^{s} \frac{1}{y_{s-1} - a_j} \int_b^{y_{s-1}} \ldots \int_b^{y_2} \frac{dy_1}{y_1 - a_j} dy_2 \ldots dy_s \right] \times$$

$$\times \left[\int_b^{\xi_\nu} \frac{1}{\xi_{\nu-1} - a_{j_{\nu-1}}} \int_b^{\xi_{\nu-1}} \ldots \int_b^{\xi_2} \frac{d\xi_2}{\xi_1 - a_{j_1}} \ldots d\xi_{\nu-1} \right] d\xi_\nu,$$

где область интегрирования определяется символически формулами

$$b < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_\nu < a_j,$$
$$b < y_1 < y_2 < \ldots < y_s < \xi_\nu.$$

Эта область представляет собой сумму областей

$$b < y_1 < \ldots < y_{\varkappa_1} < \xi_1 < y_{\varkappa_1+1} < \ldots < y_{\varkappa_1+\varkappa_2} < \xi_2 < y_{\varkappa_1+\varkappa_2+1} < \ldots$$
$$\ldots < y_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\nu} < \xi_\nu < a_j,$$

где неотрицательные числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu$ пробегают все системы значений, удовлетворяющих равенству

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_\nu = s.$$

Следовательно, мы находим

$$\int_b^{a_j} \frac{L_b(a_j^s \mid \xi_\nu)\, L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid \xi_\nu)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}}\, d\xi_\nu =$$

$$= \sum_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\nu = s} \int_b^{a_j} \frac{1}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} \int_b^{\xi_\nu} \frac{1}{y_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\nu} - a_j} \int_b^{y_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\nu}} \ldots \int_b^{y_2} \frac{1}{y_1 - a_j}\, dy_1 \ldots d\xi_\nu =$$

$$= \sum_{\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\nu = s} L_b\left(a_j^{\varkappa_1} a_{j_1} a_j^{\varkappa_2} a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_j^{\varkappa_\nu} a_{j_\nu} \,\middle|\, a_j\right) = L_b\left(\begin{matrix} a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \\ a_j^s \end{matrix} \,\middle|\, a_j\right). \tag{20}$$

Формула (19) приводит теперь к равенству (14), что и требовалось доказать.

Аналогичное вычисление дает такого же типа соотношение

$$P_j(a_j^\lambda a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid b) = (-1)^\nu \left[\frac{(2\pi i)^\lambda}{\lambda!} L_b(a_{j_\nu} \ldots a_{j_2} a_{j_1} \mid a_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{(2\pi i)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} L_b\left(\begin{matrix} a_{j_\nu} \ldots a_{j_2} a_{j_1} \\ a_j \end{matrix} \,\middle|\, a_j\right) + \ldots + 2\pi i L_b\left(\begin{matrix} a_{j_\nu} \ldots a_{j_2} a_{j_1} \\ a_j \end{matrix} \,\middle|\, a_j\right) \right] =$$

$$= (-1)^\nu \sum_{s=0}^{\lambda-1} \frac{(2\pi i)^{\lambda-s}}{(\lambda-s)!} L_b\left(\begin{matrix} a_{j_\nu} \ldots a_{j_1} \\ a_j^s \end{matrix} \,\middle|\, a_j\right). \tag{21}$$

Прежде всего мы имеем:

$$P_j(a_j^\lambda a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid b) =$$

$$= \int_b^{b_j} \frac{1}{\xi_\nu - a_{j_\nu}} \int_b^{\xi_\nu} \frac{1}{\xi_{\nu-1} - a_{j_{\nu-1}}} \int_b^{\xi_{\nu-1}} \ldots \int_b^{\xi_2} \frac{L_b(a_j^\lambda \mid \xi_1)}{\xi_1 - a_{j_1}}\, d\xi_1 \ldots d\xi_{\nu-1}\, d\xi_\nu$$

и по изменении порядка интегрирования:

$$P_j(a_j^\lambda a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid b) =$$

$$= \int_b^{b_j} \frac{1}{\xi_1 - a_{j_1}} \int_{\xi_1}^{b_j} \frac{1}{\xi_2 - a_{j_2}} \int_{\xi_2}^{b_j} \ldots \int_{\xi_{\nu-1}}^{b_j} \frac{L_b(a_j^\lambda \mid \xi_1)}{\xi_\nu - a_{j_\nu}}\, d\xi_\nu\, d\xi_{\nu-1} \ldots d\xi_1 =$$

$$= (-1)^{\nu-1} \int_b^{b_j} \frac{L_b(a_j^\lambda \mid \xi_1)\, L_b(a_{j_\nu} \ldots a_{j_2} \mid \xi_1)\, d\xi_1}{\xi_1 - a_{j_1}}.$$

Замечая, что

$$L_{b_j}(a_{j_\nu} \ldots a_{j_2} \mid \xi_1) = L_b(a_{j_\nu} \ldots a_{j_2} \mid \xi_1),$$

и применяя формулы (18) и (20), без труда находим соотношение (21).

7. АБСОЛЮТНЫЕ ГИПЕРЛОГАРИФМЫ

Гиперлогарифмы $L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$, определяемые некоторой конфигурацией особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, зависят, кроме этих точек, еще от переменных b и x.

Введем теперь абсолютную систему гиперлогарифмов

$$\mathfrak{C}(t_{j_1} \ldots t_{j_\nu}) \qquad (j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

зависящую только от m переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и определяемую рекуррентными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}(t_{j_1}) &= \int_1^{t_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} = \lg t_{j_1}, \\ \mathfrak{C}(t_{j_1} t_{j_2}) &= \int_1^{t_{j_2}} \frac{\mathfrak{C}(t_{j_1} + t_{j_2})}{t_{j_2}}\, dt_{j_2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}(t_{j_1}t_{j_2}t_{j_3}) &= \int_1^{t_{j_3}} \frac{\mathfrak{E}(t_{j_1}t_{j_2}+t_{j_3})}{t_{j_3}}\,dt_{j_3},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \mathfrak{E}(t_{j_1}t_{j_2}\dots t_{j_{\nu-1}}t_{j_\nu}) &= \int_1^{t_{j_\nu}} \frac{\mathfrak{E}(t_{j_1}t_{j_2}\dots t_{j_{\nu-2}}t_{j_{\nu-1}}+t_{j_\nu})}{t_{j_\nu}}\,dt_{j_\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Каждый абсолютный гиперлогарифм $\mathfrak{E}(t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_\nu})$ представляет собой, очевидно, функцию от m комплексных переменных $t_1, t_2, \dots, t_m$, регулярную в некоторой окрестности каждой точки m-мерного комплексного пространства, за исключением точек

$$t_{j_\nu}=0,\ t_{j_\nu}+t_{j_{\nu-1}}=0, \dots, t_{j_\nu}+t_{j_{\nu-1}}+\dots+t_{j_1}=0.$$

Определим гиперлогарифмы $L(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\mid x)$ конфигурации $a_1, a_2, \dots, a_m$ соотношениями

$$L(a_{j_1}\mid x) = \int_{a_{j_1}+1}^{x} \frac{dx}{x-a_{j_1}}, \qquad L(a_{j_1}\dots a_{j_\nu}\mid x) = \int_{a_{j_\nu}+1}^{x} \frac{L(a_{j_1}\dots a_{j_{\nu-1}}\mid x)\,dx}{x-a_{j_\nu}}. \tag{2}$$

Тогда легко проверить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}(x-a_{j_1}) &= L(a_{j_1}\mid x),\\ \mathfrak{E}(a_{j_2}-a_{j_1}\ x-a_{j_2}) &= L(a_{j_1}a_{j_2}\mid x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \mathfrak{E}(a_{j_2}-a_{j_1}\ a_{j_3}-a_{j_2}\dots a_{j_\nu}-a_{j_{\nu-1}}\ x-a_{j_\nu}) &= L(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\mid x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Можно дать непосредственное обобщение абсолютных гиперлогарифмов (1), если ввести систему функций

$$\mathfrak{E}^{(r_1r_2\dots r_\nu)}(t_{j_1}t_{j_2}\dots t_{j_\nu}) \qquad \begin{pmatrix} r_1r_2\dots r_\nu = 1, 2, \dots s;\ j_1j_2\dots j_\nu = 1, 2, \dots, m\\ \nu = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix},$$

определяемых рекуррентными соотношениями:

$$\mathfrak{E}^{(r_1)}(t_{j_1}) = \int_1^{t_{j_1}} \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}^{r_1}} = \begin{cases} \lg t_{j_1}; & \text{если } r_1 = 1;\\ \dfrac{1}{1-r_1}(t_{j_1}^{1-r_1}-1), & \text{если } r_1 > 1; \end{cases}$$

$$\mathfrak{E}^{(r_1r_2)}(t_{j_1}t_{j_2}) = \int_1^{t_{j_2}} \mathfrak{E}^{(r_1)}(t_{j_1}+t_{j_2})\frac{dt_{j_2}}{t_{j_2}^{r_2}},$$

$$\mathfrak{E}^{(r_1r_2r_3)}(t_{j_1}t_{j_2}t_{j_3}) = \int_1^{t_{j_3}} \mathfrak{E}^{(r_1r_2)}(t_{j_1}t_{j_2}+t_{j_3})\frac{dt_{j_3}}{t_{j_3}^{r_3}},$$

. . . .

$$\mathfrak{E}^{(r_1r_2\dots r_\nu)}(t_{j_1}t_{j_2}\dots t_{j_{\nu-1}}t_{j_\nu}) = \int_1^{t_{j_\nu}} \mathfrak{E}^{(r_1r_2\dots r_{\nu-1})}(t_{j_1}\dots t_{j_{\nu-2}}t_{j_{\nu-1}}+t_{j_\nu})\frac{dt_{j_\nu}}{t_{j_\nu}^{r_\nu}}.$$

8. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ГАУССА В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

Интегральная матрица регулярной системы

$$\frac{dY}{dx} = Y\left(\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{x-a_2}\right), \tag{1}$$

нормированная в точке $x=b$, представляет собой целую функцию матриц U_1 и U_2:

$$Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1U_2\\ a_1a_2\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty}\ \sum_{j_1,\dots,j_\nu}^{(1,\,2)} U_{j_1}U_{j_2}\dots U_{j_\nu}L_b(a_{j_1}a_{j_2}\dots a_{j_\nu}\mid x). \tag{2}$$

В случае, когда матрицы U_1 и U_2 коммутативны, мы получаем представление ряда (2) в конечном виде:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1U_2\\ a_1a_2\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}. \tag{3}$$

Гиперлогарифмы $L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_\nu}\mid x)$, входящие в формулу (2), связаны рядом соотношений; например, мы имеем:

$$L_b(a_1a_2\mid x) = L_b(a_1\mid x)\,L_b(a_2\mid x) - L_b(a_2a_1\mid x). \tag{4}$$

И. А. Лаппо-Данилевский провел большие вычисления с целью упрощения выражения ряда (2) с помощью указанных соотношений.

В частности, он поставил и решил, в сущности, следующий вопрос: при каких условиях ряд (2) может быть представлен формулой

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1U_2\\ a_1a_2\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\sum_{\mu=0}^{\infty}[U_2U_1]^{\mu}L_b(a_2,\ a_1\mid x)^{\mu}c_{\mu}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}, \tag{5}$$

где

$$[U_2U_1] = U_2U_1 - U_1U_2 \tag{6}$$

и c_μ — численные коэффициенты.

Он указал следующий результат: для возможности представления нормированного решения уравнения (1) в виде (5) достаточно, чтобы матрицы U_1 и U_2 были коммутативны с матрицей $[U_2U_1]$:

$$\left.\begin{aligned} [U_1[U_2U_1]] &= U_1(U_2U_1-U_1U_2)-(U_2U_1-U_1U_2)U_1 =\\ &= 2U_1U_2U_1 - U_1^2U_2 - U_2U_1^2 = 0,\\ [U_2[U_2U_1]] &= U_2(U_2U_1-U_1U_2)-(U_2U_1-U_1U_2)U_2 =\\ &= U_2^2U_1 - 2U_2U_1U_2 + U_1U_2^2 = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Более точно можно доказать, что при выполнении условий (7) ряд (2) имеет сумму

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1U_2\\ a_1a_2\end{matrix}\,\middle|\, x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}e^{L_b(a_2a_1\mid x)[U_2U_1]}, \tag{8}$$

и функция в правой части является частным случаем ряда (5), отвечающим частному выбору коэффициентов $c_\mu = \frac{1}{\mu!}$. Для доказательства введем обозначения

$$\tilde{Y}(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}[U_2U_1]^{\mu}L_b(a_2a_1\,|\,x)^{\mu}c_{\mu}. \tag{9}$$

Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} Y_b(x)&=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\tilde{Y}(x)\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2},\\ \tilde{Y}(x)&=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{-U_1}Y_b(x)\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{-U_2}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Простое вычисление показывает, что если матрица есть решение уравнения (1), то функция $\tilde{Y}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tilde{Y}}{dx}=\frac{1}{x-a_1}\left[\tilde{Y}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}U_1\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{-U_2}-U_1\tilde{Y}\right]. \tag{11}$$

Теперь заметим, что

$$L_b(a_2\,|\,x)=\int_b^x\frac{dx}{x-a_2}=\lg\frac{x-a_2}{b-a_2},\qquad \left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}=e^{U_2L_b(a_2\,|\,x)}, \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}&U_1\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{-U_2}=\\ &=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda!}U_2^{\lambda}L_b(a_2\,|\,x)^{\lambda}U_1\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}}{\mu!}U_2^{\mu}L_b(a_2\,|\,x)^{\mu}=\\ &=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}L_b(a_2\,|\,x)^{\nu}\Big[U_2^{\nu}U_1-\frac{\nu}{1}U_2^{\nu-1}U_1U_2+\\ &\qquad+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}U_2^{\nu-2}U_1U_2^2-\ldots+(-1)^{\nu}U_1U_2^{\nu}\Big].\end{aligned} \tag{13}$$

Подставим теперь ряд (9) в уравнение (11); вспоминая, что

$$\frac{d}{dx}L_b(a_2a_1\,|\,x)=\frac{L_b(a_2\,|\,x)}{x-a_1}, \tag{14}$$

мы получаем равенство

$$\begin{aligned}[U_2U_1]&\sum_{\nu=0}^{\infty}[U_2U_1]^{\nu}L_b(a_2a_1\,|\,x)^{\nu}L_b(a_2\,|\,x)(\nu+1)c_{\nu+1}=\\ &=\sum_{\nu=0}^{\infty}[U_2U_1]^{\nu}L_b(a_2a_1\,|\,x)^{\nu}c_{\nu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}L_b(a_2\,|\,x)^{\nu}\Big[U_2^{\nu}U_1-\\ &-\frac{\nu}{1}U_2^{\nu-1}U_1U_2+\ldots+(-1)^{\nu}U_1U_2^{\nu}\Big]-U_1\sum_{\nu=0}^{\infty}[U_2U_1]^{\nu}L_b(a_2a_1\,|\,x)^{\nu}c_{\nu}.\end{aligned} \tag{15}$$

Условие $\tilde{Y}(b)=I$ определяет коэффициент

$$c_0=1. \tag{16}$$

Запишем теперь условия, при которых равенство (15) обращается в тождество относительно $L_b(a_2\,|\,x)$ и $L_b(a_2a_1\,|\,x)$.

Сравнение в (15) членов, содержащих $L_b(a_2\,|\,x)$ в первой степени, дает равенства

$$(\nu+1)c_{\nu+1}[U_2U_1]^{\nu+1}=c_{\nu}[U_2U_1]^{\nu+1}\qquad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{17}$$

В случае $[U_2U_1]=0$ формула (5) всегда имеет место, если коэффициент c_0 определяется формулой (16).

В последующем будем считать

$$[U_2U_1]\neq 0. \tag{18}$$

Сравнивая в (15) члены, не содержащие множителя $L_b(a_2\,|\,x)$, получим соотношения

$$c_{\nu}\{[U_2U_1]^{\nu}U_1-U_1[U_2U_1]^{\nu}\}=0\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots). \tag{19}$$

Сравним еще в (15) коэффициенты при членах, содержащих $L_b(a_2\,|\,x)^{\nu}$ и не содержащих $L_b(a_2a_1\,|\,x)$. Это дает

$$\begin{aligned}U_2^{\nu}U_1-\frac{\nu}{1}U_2^{\nu-1}U_1U_2&+\\ +\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}U_2^{\nu-2}U_1U_2^2-\ldots&+(-1)^{\nu}U_1U_2^{\nu}=0\\ &(\nu=2,\ 3,\ \ldots);\end{aligned} \tag{20}$$

и, очевидно, при выполнении условий (17), (19) и (20) равенство (15) имеет место.

Из (17) в случае $\nu=0$ следует

$$c_1=1; \tag{21}$$

далее, из (19) в случае $\nu=1$ и из (20) в случае $\nu=2$ вытекает

$$\left.\begin{aligned}[U_2U_1]U_1-U_1[U_2U_1]&=0,\\ U_2^2U_1-2U_2U_1U_2+U_1U_2^2=U_2[U_2U_1]-[U_2U_1]U_2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Следовательно, мы доказали, что матрица $[U_2U_1]$ должна быть коммутативной с U_1 и с U_2. Но тогда все соотношения (19) и (20) выполнены; действительно, если обозначить левую часть формулы (20) через $D_{\nu}(U_2,\ U_1)$, то мы имеем тождество

$$D_{\nu+1}(U_2,\ U_1)=U_2D_{\nu}(U_2,\ U_1)-D_{\nu}(U_2,\ U_1)U_1, \tag{23}$$

откуда в силу формул (22) следует наше утверждение.

Если все степени матрицы $[U_2U_1]$ отличны от нуля, то мы получаем из (17)

$$c_{\nu+1}=\frac{1}{\nu+1}c_{\nu}, \tag{24}$$

и, принимая во внимание (16):

$$c_{\nu}=\frac{1}{\nu!}\qquad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{25}$$

Если, наоборот, $[U_2U_1]^{s}\neq 0$ $(s\leqslant k)$, но $[U_2U_1]^{k+1}=0$, то из (17) и (16) находим:

$$c_0=1,\quad c_1=\frac{1}{1!},\quad c_2=\frac{1}{2!},\ \ldots,\quad c_k=\frac{1}{k!},$$

при этом все прочие коэффициенты c_ν оказываются произвольными. Но формула (9) показывает, что в этом случае выбор коэффициентов c_ν при $\nu > k$ не влияет на значение $\widetilde{Y}(x)$. Мы можем, следовательно, во всех случаях определять коэффициенты c_ν формулами (25). Но тогда мы имеем

$$\widetilde{Y}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!}[U_2U_1]^{\mu} L_b(a_2a_1|x)^{\mu} = e^{[U_2U_1]L_b(a_2a_1|x)}. \tag{26}$$

Окончательно, если матрицы U_1 и U_2 удовлетворяют условиям (22), то мы имеем следующее представление интегральной нормированной матрицы системы (1):

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\,U_2\\ a_1\,a_2\end{matrix}\middle| x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1} e^{[U_2U_1]L_b(a_2a_1|x)} \left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}. \tag{27}$$

В силу коммутативности матриц $[U_2U_1]$ и U_2 этот ряд можно представить также в виде (8).

И. А. Лаппо-Данилевский поставил также более общий вопрос: при каких условиях ряд (2) может быть преобразован следующим образом:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\,U_2\\ a_1\,a_2\end{matrix}\middle| x\right) = \left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\Bigg[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_1^1+\dots+\mu_1^s+\\ +\mu_2^1+\dots+\mu_2^s=\nu}} [U_2^{\mu_2^1}U_1^{\mu_1^1}]\dots$$
$$\dots [U_2^{\mu_2^s}U_1^{\mu_1^s}]\, L_b\left(a_2^{\mu_2^1}a_1^{\mu_1^1}\middle| x\right)\dots L_b\left(a_2^{\mu_2^s}a_1^{\mu_1^s}\middle| x\right)\gamma(\mu_2^1\mu_1^1\dots$$
$$\dots\mu_2^s\mu_1^s)\Bigg]\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}, \tag{28}$$

где

$$[U_2U_1] = U_2U_1 - U_1U_2;$$
$$[U_2U_1^{\mu}] = [U_2U_1^{\mu-1}]U_1 - U_1[U_2U_1^{\mu-1}], \quad \text{если } \mu > 1;$$
$$[U_2^{\mu_2}U_1^{\mu_1}] = U_2[U_2^{\mu_2-1}U_1^{\mu_1}] - [U_2^{\mu_2-1}U_1^{\mu_1}]U_2, \quad \text{если } \mu_2 > 1.$$

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ КАК ФУНКЦИИ ТОЧКИ НОРМИРОВАНИЯ

Если показательные подстановки $W_1, W_2, \dots, W_m$ регулярной нормированной в точке b матрицы заданы, то дифференциальные матрицы $U_j(b)$ являются голоморфными функциями от b во всех точках плоскости комплексного переменного, за исключением особых точек $a_1, a_2, \dots, a_m, \infty$. В § 4 четвертой статьи мы изучили подстановку $U_j(b)$ в окрестности точки $b = a_j$. Рассмотрим теперь зависимость подстановок $U_j(b)$ от точки b в окрестности точки $b = a_h$ $(h = 1, 2, \dots, m)$.

В силу формул (50) и (39) четвертой статьи мы имеем представление

$$U_j(b) = \left(\frac{b-a_h}{c-a_h}\right)^{W_h}\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1}\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\dots U_m(c)\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right)U_j(c)\times$$
$$\times\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\dots U_m(c)\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)\left(\frac{c-a_h}{b-a_h}\right)^{W_h}. \tag{1}$$

Следовательно, мы можем положить

$$U_j(b) = (c-a_h)^{W_h}\overline{U}_{h_j}(b)(b-a_h)^{-W_h}, \tag{2}$$

где матрицы

$$\overline{U}_{h_j}(b) = (c-a_h)^{-W_h}\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1}\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\dots U_m(c)\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)U_j(c)\times$$
$$\times\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\dots U_m(c)\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)(c-a_h)^{W_h}, \tag{3}$$

очевидно, голоморфны в окрестности точки $b = a_h$.

В силу формул

$$\begin{aligned}
&\bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}U_1\dots U_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| a_h\right) = I,\\
&\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right) = \bar\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)(c-a_h)^{W_h},\\
&U_{h_j} = \vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1}U_j(c)\,\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right),\\
&U_j(c) = \vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)W_j\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1},
\end{aligned} \tag{4}$$

значения матриц (3) в точке $b = a_h$ таковы:

$$\overline{U}_{h_j}(a_h) = \vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1}\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)\times$$
$$\times W_j\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right)^{-1}\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| c\right) = U_{h_j}; \tag{5}$$

эти значения, следовательно, не зависят от точки c и совпадают с дифференциальными подстановками метаканонических матриц

$$\vartheta_h\left(\begin{matrix}W_1\dots W_m\\ a_1\dots a_m\end{matrix}\middle| x\right).$$

В частности, мы имеем:

$$\overline{U}_{jj}(a_j) = U_{jj} = W_j. \tag{6}$$

Отсюда следует, что в окрестности точки $b = a_h$ мы имеем представление вида

$$U_j(b) = (b-a_h)^{W_h}\left[U_{h_j} + \sum_{s=1}^{\infty} U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s\right](b-a_h)^{-W_h}, \tag{7}$$

где матрицы $U_{hj}^{(s)}$ не зависят от b.

Положим для сокращения

$$U_{hj} = U_{hj}^{(0)}.$$

Но мы составили в четвертой статье дифференциальные уравнения (51) для матрицы $U_j(b)$:

$$\frac{dU_j(b)}{db} = \sum_{p\neq j}\frac{U_p(b)U_j(b) - U_j(b)U_p(b)}{b-a_p}. \tag{8}$$

Подставляя в эту систему выражения (7) и уничтожая множители $(b-a_h)^{W_h}$ и $(b-a_h)^{-W_h}$, мы получим в случае $j=h$:

$$W_h\sum_{s=0}^{\infty}U_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s+\sum_{s=1}^{\infty}sU_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s-\sum_{s=0}^{\infty}U_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s W_h=$$
$$=-\sum_{p\neq h}\left[\sum_{s=0}^{\infty}U_{hp}^{(s)}(b-a_h)^s\sum_{s=0}^{\infty}U_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s-\sum_{s=0}^{\infty}U_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{s=0}^{\infty}U_{hp}^{(s)}(b-a_h)^s\right]\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(b-a_h)^s}{(a_p-a_h)^s} \tag{9}$$

и в случае $j\neq h$:

$$W_h\sum_{s=0}^{\infty}U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s+\sum_{s=1}^{\infty}sU_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s-\sum_{s=0}^{\infty}U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s W_h=$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}U_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s\sum_{s=0}^{\infty}U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s-$$
$$-\sum_{s=0}^{\infty}U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s\sum_{s=0}^{\infty}U_{hh}^{(s)}(b-a_h)^s-\sum_{\substack{p\neq h\\ j\neq h}}\left[\sum_{s=0}^{\infty}U_{hp}^{(s)}(b-a_h)^s\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{s=0}^{\infty}U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s-\sum_{s=0}^{\infty}U_{hj}^{(s)}(b-a_h)^s\sum_{s=0}^{\infty}U_{hp}^{(s)}(b-a_h)^s\right]\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(b-a_h)^s}{(a_p-a_h)^s}. \tag{10}$$

Члены, не содержащие множителя $(b-a_h)$, уничтожаются. Приравнивая коэффициенты при степенях $(b-a_h)^s$ $(s=1, 2, \ldots)$, получим соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&W_hU_{hh}^{(1)}+U_{hh}^{(1)}-U_{hh}^{(1)}W_h=-\sum_{p\neq h}\left(U_{hp}^{(0)}U_{hh}^{(0)}-U_{hh}^{(0)}U_{hp}^{(0)}\right)\frac{1}{a_p-a_h},\\
&U_{hj}^{(1)}=U_{hh}^{(1)}U_{hj}^{(0)}-U_{hj}^{(0)}U_{hh}^{(1)}-\sum_{\substack{p\neq h\\ p\neq j}}\left(U_{hp}^{(0)}U_{hj}^{(0)}-U_{hj}^{(0)}U_{hp}^{(0)}\right)\frac{1}{a_p-a_h},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&W_hU_{hh}^{(s)}+sU_{hh}^{(0)}-U_{hh}^{(0)}W_h=-\sum_{p\neq h}\sum_{\sigma=0}^{s-1}\left(U_{hp}^{(\sigma)}U_{hh}^{(0)}-U_{hh}^{(0)}U_{hp}^{(\sigma)}+\right.\\
&\quad+U_{hp}^{(\sigma-1)}U_{hh}^{(1)}-U_{hh}^{(1)}U_{hp}^{(\sigma-1)}+\ldots+U_{hp}^{(0)}U_{hh}^{(\sigma)}-\\
&\quad\left.-U_{hh}^{(\sigma)}U_{hp}^{(0)}\right)\frac{1}{(a_p-a_h)^{s-\sigma}}\ sU_{hj}^{(s)}=U_{hh}^{(s)}U_{hj}^{(0)}-U_{hj}^{(0)}U_{hh}^{(s)}+U_{hh}^{(s-1)}U_{hj}^{(1)}-\\
&\quad-U_{hj}^{(1)}U_{hh}^{(s-1)}+\ldots+U_{hh}^{(1)}U_{hj}^{(s-1)}-U_{hj}^{(s-1)}U_{hh}^{(1)}-\\
&\quad-\sum_{\substack{p\neq h\\ p\neq j}}\sum_{\sigma=0}^{s-1}\left(U_{hp}^{(\sigma)}U_{hj}^{(0)}-U_{hj}^{(0)}U_{hp}^{(\sigma)}+U_{hp}^{(\sigma-1)}U_{hj}^{(1)}-U_{hj}^{(1)}U_{hp}^{(\sigma-1)}+\ldots+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+U_{hp}^{(0)}U_{hj}^{(\sigma)}-U_{hj}^{(\sigma)}U_{hp}^{(0)}\right)\frac{1}{(a_p-a_h)^{s-\sigma}}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти соотношения определяют последовательно матрицы

$$U_{hh}^{(s)},\quad U_{hj}^{(s)}\qquad (s=1, 2, \ldots)$$

как функции матриц

$$U_{h1}^{(0)}=U_{h1},\ \ldots,\ U_{hh-1}^{(0)}=U_{hh-1},\ U_{hh}^{(0)}=W_h,\ U_{hh+1}^{(0)}=U_{hh+1},\ \ldots,\ U_{hm}^{(0)}=U_{hm}.$$

Отметим еще две формулы, тесно связанные с предыдущими формулами.

Полагая в формуле (3) $b=a_h$, найдем в силу (5) и соотношения [ст. IV, § 3, формула (33)]

$$\bar{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)=\bar{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right), \tag{12}$$

что

$$\bar{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)^{-1}U_j(c)\,\bar{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)=$$
$$=(c-a_h)^{W_h}U_{hj}(c-a_h)^{W_h}\qquad (j=1, 2, \ldots m). \tag{13}$$

Введем обозначение

$$(c-a_h)^{W_h}U_{hj}(c-a_h)^{-W_h}=\overset{1}{U}_{hj} \tag{14}$$

и разрешим систему m уравнений (13) относительно $U_1(c), \ldots, U_m(c)$. Заменяя аргументы $U_j(c)$ функций

$$\bar{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)$$

их выражениями — функциями от матриц $\overset{1}{U}_{hj}$, получим функции

$$\bar{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}U_1(c)\ldots U_m(c)\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)=\overset{1}{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}\overset{1}{U}_{h1}\ldots \overset{1}{U}_{hm}\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right). \tag{15}$$

Уравнения (13) теперь дают, если принять во внимание последнее из уравнений (4):

$$W_j=\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)^{-1}\overset{1}{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}\overset{1}{U}_{h1}\ldots \overset{1}{U}_{hm}\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)\overset{1}{U}_{hj}\overset{1}{\vartheta}_h\left(\begin{matrix}\overset{1}{U}_{h1}\ldots \overset{1}{U}_{hm}\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)^{-1}\times$$
$$\times\vartheta_j\left(\begin{matrix}W_1\ldots W_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,c\right)\qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

10. РАЗЛОЖЕНИЯ W_j ПО СТЕПЕНЯМ $(b-a_j)$

В § 5 второй статьи мы получили дифференциальную систему

$$\frac{dW_j(b)}{db}=\sum_{h=1}^{m}\frac{W_j(b)U_h-U_hW_j(b)}{b-a_h}\qquad (j=1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

которой удовлетворяют показательные подстановки регулярной нормированной матрицы

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1\ldots U_m\\ a_1\ldots a_m\end{matrix}\Big|\,x\right)$$

при фиксированных дифференциальных подстановках $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Начальные условия для $W_j(b)$

$$W_j(a_j) = U_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Для решения системы (1) мы можем применить метод, использованный в § 8 пятой статьи.

Положим

$$W_j = U_j + \sum_{s=1}^{\infty} A_j^{(s)} (b - a_j)^s, \tag{3}$$

где матрицы $A_j^{(s)}$ зависят лишь от матриц $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Тогда мы имеем:

$$\frac{dW_j}{db} = \sum_{s=1}^{\infty} s A_j^{(s)} (b - a_j)^{s-1},$$

$$\frac{1}{b - a_h} = -\frac{1}{(a_h - a_j)} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{b - a_j}{a_h - a_j}\right)^s \qquad (j \neq h),$$

и равенство (1) принимает вид:

$$\sum_{s=1}^{\infty} s A_j^{(s)} (b - a_j)^s = \sum_{s=1}^{\infty} A_j^{(s)} (b - a_j)^s U_j - U_j \sum_{s=1}^{\infty} A_j^{(s)} (b - a_j)^s -$$

$$- \sum_{h \neq j} \left[U_j + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(s)} (b - a_j)^s \right] \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{b - a_j}{a_h - a_j}\right)^s U_h +$$

$$+ \sum_{h \neq j} U_h \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{b - a_j}{a_h - a_j}\right)^s \left[U_j + \sum_{s=1}^{\infty} A_j^{(s)} (b - a_j)^s \right].$$

Приравнивая коэффициенты при $(b - a_j)^s$ в обеих частях предыдущего равенства, найдем

$$U_j A_j^{(1)} + A_j^{(1)} - A_j^{(1)} U_j = \sum_{h \neq j} \frac{U_h U_j - U_j U_h}{a_h - a_j},$$

$$U_j A_j^{(s)} + s A_j^{(s)} - A_j^{(s)} U_j = \sum_{h \neq j} \frac{U_h U_j - U_j U_h}{(a_h - a_j)^s} + \sum_{h \neq j} \sum_{r=1}^{s-1} \frac{U_h A_j^{(r)} - A_j^{(r)} U_h}{(a_h - a_j)^{s-r}}$$

$$(s = 2, 3, \ldots).$$

Полученные уравнения определяют последовательно все коэффициенты $A_j^{(s)}$, если разности различных характеристических чисел матрицы U_j не являются целыми.

11. ОБОБЩЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА

Проблему Римана можно рассматривать как частный случай следующей проблемы:

Пусть заданы m линейных подстановок $T_1, T_2, \ldots, T_m$ и m особых точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$ на универсальной поверхности наложения

$$\mathfrak{S}(a_1 a_2 \ldots a_m, \infty)$$

таких, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_b(a_1 | t_1) & L_b(a_2 | t_1) \ldots L_b(a_m | t_1) \\ L_b(a_1 | t_2) & L_b(a_2 | t_2) \ldots L_b(a_m | t_2) \\ \ldots & \ldots \\ L_b(a_1 | t_m) & (L_b(a_2 | t_m) \ldots L_b(a_m | t_m) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Требуется построить базу $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$, регулярную и нормированную в точке b, удовлетворяющую условиям

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| t_j\right) = T_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

и определить дифференциальные подстановки $U_1, U_2, \ldots, U_m$ этой базы (мы пользуемся обозначениями второй статьи). Эту последнюю проблему мы будем называть проблемой интерполирования, относящейся к регулярным базам.

Фиксируя точку b на одном из листов поверхности

$$\mathfrak{S}(a_1 a_2 \ldots a_m \infty),$$

обозначим через b_j точку с комплексной координатой b, в которую придем, отправляясь из точки b и обходя один раз в положительном направлении контур, содержащий внутри точку a_j и не содержащий никаких других особых точек.

Проведя через точку b разрез $(a_j \infty)$ и положив в соотношении

$$\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| \overset{-}{x}\right) = \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix} \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| \overset{+}{x}\right) \tag{3}$$

$\overset{+}{x} = b$, получим соотношение

$$V_j = \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{pmatrix} = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| b_j\right), \tag{4}$$

так как база $\Phi_b\left(\begin{matrix} U_1 U_2 \ldots U_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right)$ нормирована в точке b.

Отсюда следует, что если мы обозначим через

$$\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) \quad \text{и} \quad \Theta_b\left(\begin{matrix} T_1 T_2 \ldots T_m \\ t_1 t_2 \ldots t_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) \tag{5}$$

решения проблемы Римана и указанной проблемы интерполирования, то получим

$$\Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right) = \Theta_b\left(\begin{matrix} V_1 V_2 \ldots V_m \\ b_1 b_2 \ldots b_m \\ a_1 a_2 \ldots a_m \end{matrix} \middle| x\right). \tag{6}$$

Следовательно, проблема интерполирования сводится к проблеме Римана, если в качестве точек t_j условий (2) мы возьмем точки b_j.

Если система подстановок $T_1, T_2, \ldots, T_m$ коммутативна, то мы можем дать решение проблемы интерполирования в конечном виде. Действительно, если мы временно предположим, что система подстановок

$$U_1, U_2, \ldots, U_m$$

также коммутативна, то найдем, что

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1U_2\dots U_m\\ a_1a_2\dots a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}\dots\left(\frac{x-a_m}{b-a_m}\right)^{U_m}, \tag{7}$$

и условия (2) дают систему m уравнений, линейных относительно U_1, $U_2, \dots, U_m$:

$$\sum_{k=1}^{m} U_k \lg\left(\frac{t_j-a_k}{b-a_k}\right)=\lg T_j \qquad (j=1, 2, \dots, m),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{m} U_k L_b(a_k \mid t_j)=\lg T_j \qquad (j=1, 2, \dots, m). \tag{8}$$

Если $\Delta_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $L_b(a_j \mid t_r)$ определителя Δ, то мы найдем без труда

$$U_j=\frac{1}{\Delta}\sum_{r=1}^{m}\Delta_{rj}\lg T_r \qquad (j=1, 2, \dots, m) \tag{9}$$

и проверим сделанное предположение о коммутативности подстановок U_j.

12. О ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВОК ИРРЕГУЛЯРНОЙ МАТРИЦЫ ОТ ТОЧКИ НОРМИРОВАНИЯ

Рассмотрим иррегулярную систему

$$\frac{dY(x)}{dx}=Y(x)F(x), \tag{1}$$

предполагая, например,

$$F(x)=\sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{s}\frac{U_h^{(r)}}{(x-a_h)^r}. \tag{2}$$

Пусть $Y_b(x)$ — интегральная матрица системы (1), нормированная в точке $x=b$, и пусть $V(b)$ — интегральная подстановка этой матрицы, отвечающая обходу вокруг особой точки $a_j=0$; обозначим через G интегральную подстановку метаканонической матрицы, отвечающую той же особой точке; эта матрица G, очевидно, не зависит от выбора точки b.

Известно, что характеристические числа матриц $V(b)$ и G одни и те же; обозначим эти характеристические числа через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и предположим, что они различны.

Мы имеем каноническое представление матриц $V(b)$ и G вида

$$\begin{gathered}V(b)=T^{-1}(b)[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]T(b),\\ G=S^{-1}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]S.\end{gathered} \tag{3}$$

Если $\overline{Z}(x)$ — однозначная составляющая метаканонической матрицы, то имеет место равенство

$$V(b)=\overline{Z}(b)^{-1}G\overline{Z}(b), \tag{4}$$

откуда вытекает

$$S\overline{Z}(b)T(b)^{-1}[\omega_1, \dots, \omega_n]=[\omega_1, \dots, \omega_n]S\overline{Z}(b)T(b)^{-1}. \tag{5}$$

Это дает следующие уравнения

$$\{S\overline{Z}(b)T(b)^{-1}\}_{kl}(\omega_l-\omega_k)=0 \qquad (k, l=1, 2, \dots, n), \tag{6}$$

откуда без труда находим

$$S\overline{Z}(b)T(b)^{-1}=[\zeta_1(b), \dots, \zeta_n(b)], \tag{7}$$

$$\overline{Z}(b)=S^{-1}[\zeta_1(b), \dots, \zeta_n(b)]T(b). \tag{8}$$

Но мы имеем равенство

$$Y_b(x)=\overline{Z}(b)^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)^{H}\overline{Z}(x), \tag{9}$$

где

$$H=\frac{1}{2\pi i}\lg G=\frac{1}{2\pi i}S^{-1}[\lg\omega_1, \dots, \lg\omega_n]S \tag{10}$$

есть показательная подстановка метаканонической матрицы. Следовательно,

$$Y_b(x)=T(b)^{-1}\left[\frac{\zeta_1(x)}{\zeta_1(b)}\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1}, \dots, \frac{\zeta_n(x)}{\zeta_n(b)}\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n}\right]T(x). \tag{11}$$

Таким образом, матрица $T(b)$ существенно входит в выражения для $V(b)$ и $Y_b(x)$.

Но матрица $T(b)$ не определяется однозначно. Можем, например, считать, что матрица T равна матрице

$$T_0(b)=S\overline{Z}(b); \tag{12}$$

в этом случае каждая из функций $\zeta_1(b), \dots, \zeta_n(b)$ равна единице, и формула (11) упрощается:

$$Y_b(x)=T_0(b)^{-1}\left[\left(\frac{x}{b}\right)^{\sigma_1}, \dots, \left(\frac{x}{b}\right)^{\sigma_n}\right]T_0(x), \tag{13}$$

здесь мы положили

$$\sigma_k=\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_k \qquad (k=1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

Так как матрица

$$Y(x)=[x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_n}]T_0(x) \tag{15}$$

удовлетворяет уравнению (1), то очевидно, что матрица $T_0(b)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dT_0(b)}{db}=T_0(b)F(b)-\frac{[\sigma_1, \dots, \sigma_n]T_0(b)}{b}. \tag{16}$$

Мы видим, что матрицы $T_0(b)$ и $T(b)$ связаны следующим соотношением:

$$T_0(b)=[\zeta_1(b), \dots, \zeta_n(b)]T(b), \tag{17}$$

откуда получаем следующее уравнение для $T(b)$:

$$\frac{dT}{db}=TF-\left[\frac{\zeta_1'}{\zeta_1}+\frac{\sigma_1}{b}, \dots, \frac{\zeta_n'}{\zeta_n}+\frac{\sigma_n}{b}\right]T. \tag{18}$$

В частном случае матриц второго порядка мы можем получить с помощью простых вычислений, что общим решением уравнения (3) является

$$T(b)=[\eta_1, \eta_2](V(b)^{-1}\omega_1\omega_2-[\omega_1, \omega_2]),$$

где η_1 и η_2 — произвольные функции от b.

РЕЧЬ, ПРОИЗНЕСЕННАЯ И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИМ НА ЗАЩИТЕ ЕГО ДИССЕРТАЦИИ
5 апреля 1929 года

Основной, общей задачей всех моих работ является исследование функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Этот обширный класс функций, в частности заключающий в себе все алгебраические функции, в общей классификации аналитических функций логически непосредственно следует за классом рациональных функций. Последнее обстоятельство и обусловливает фундаментальное значение функций указанного класса как в чистой математике, так и в приложениях ее к естествознанию.

Построение теории рассматриваемого класса функций определяется основными фактами. С точки зрения теории дифференциальных уравнений исследуемые функции составляют решение систем линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Системы решений всякой указанной системы дифференциальных уравнений суть квадратные таблицы функций, каждая строка которых дает отдельное решение. Функции, образующие эти таблицы, зависят: 1) от независимого комплексного переменного, 2) от параметров, определяющих конфигурацию особых точек, и 3) от коэффициентов системы дифференциальных уравнений, составляющих в свою очередь квадратные таблицы чисел. Эти таблицы коэффициентов и конфигурация особых точек и определяют исходную систему дифференциальных уравнений.

С точки зрения теории функций комплексного переменного исследуемые функции суть многозначные аналитические функции, голоморфные на всей плоскости аргумента, за исключением каждый раз конечного числа особых точек. В этих точках упомянутые функции имеют, вообще говоря, смешанного типа особенности, содержащие: 1) моменты разветвления и 2) момент существенной однозначной особенности.

Сопоставляя указанные две точки зрения, приходим к нижеследующей формулировке основных задач теории рассматриваемого класса функций:

I. *Прямые задачи*: дана система линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, т. е. дана конфигурация особых точек и таблицы коэффициентов системы. Требуется: 1) построить генеральное аналитическое представление некоторой таблицы ее решений, т. е. такое аналитическое выражение, которое представляло бы упомянутые решения во всей области их существования на плоскости аргумента и выявляло бы характер их зависимости от коэффициентов системы и конфигурации ее особых точек; 2) дать полную аналитическую характеристику особенностей указанных решений в каждой особой точке системы.

Как известно, при обходе независимым переменным особой точки системы таблица ее решений претерпевает линейное преобразование. Коэффициенты этих преобразований составляют новые квадратные таблицы чисел, определяющие разветвление таблицы решений в каждой особой точке и производящие группу монодромии системы. Построение явных аналитических выражений для таблиц, производящих группу монодромии, составляет существенный частный случай второй задачи о полной аналитической характеристике решений.

Общее решение этой последней задачи, как выяснится из дальнейшего, введет в рассмотрение еще одну, четвертую, категорию квадратных таблиц чисел: характеристические таблицы в каждой особой точке.

Таким образом анализ прямых задач сводится в существенной части к исследованию зависимости таблицы решений, таблиц, производящих группу монодромии, и характеристических таблиц от таблиц коэффициентов данной системы дифференциальных уравнений.

Упомянутые прямые задачи суть очевидно: 1) общая задача об интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и 2) задача об исследовании особенностей системы решений. Эти основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений были предметом многочисленных исследований Римана, Фукса, Фробениуса, Пуанкаре, Миттаг-Леффлера, фон-Коха и многих других. Основные результаты упомянутых исследований свелись, однако: 1) к построению локальных аналитических представлений решения, годных лишь в некоторой конечной части плоскости комплексного переменного, и 2) к указанию некоторых свойств зависимости таблиц, производящих группу монодромии, от коэффициентов системы. Небезынтересно отметить, что все упомянутые исследования относятся ко второй половине прошлого столетия и что первая четверть настоящего столетия ознаменовалась некоторым застоем в этой области.

Для полного представления решения во всей области его существования необходим целый ряд упомянутых локальных представлений, порождаемых одно другим, посредством принципа аналитического продолжения. Характер зависимости решений от коэффициентов системы и конфигурации особых точек остается при этом совершенно невыясненным. Задача о построении генерального аналитического представления решения, годного во всей области его существования, объединяющего все локальные представления и выясняющего характер зависимости решения от коэффициентов уравнения и конфигурации особых точек, до сих пор не была решена, хотя совершенно определенно ставилась уже со времени Пуанкаре. Равным образом оставалась нерешенной поставленная тем же Пуанкаре задача о явном аналитическом представлении таблиц, производящих группу монодромии. Задача о полной аналитической характеристике особенностей решения отчетливо до сего времени не формулировалась. Мною решены все эти прямые задачи.

II. *Обратная задача* есть задача о построении таблицы функций рассматриваемого класса, имеющей данного типа особенности в данных точках, и о восстановлении системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами, которой она удовлетворяет. Эта основная общая задача теории функций комплексного переменного в исследуемом классе функций ставится мною впервые и содержит в себе, как частный случай, классическую задачу Римана о построении регулярной таблицы функций, претерпевающей данные линейные преобразования при обходе независимой переменной данных особых точек. Последняя задача сводится к исследованию зависимости таблицы решений регулярной системы дифференциальных уравнений и таблицы коэффициентов этой системы от данных таблиц, производящих группу монодромии. Доказательства существования решений классической задачи Римана были даны Гильбертом, Племель и Биркхоффом. Методы, которыми пользуются упомянутые авторы, существенно зависят, однако, от некоторых не аналитических функций. Вопрос о построении аналитического алгорифма, дающего явное решение этой задачи, т. е. вопроса о том, какие аналитические операции следует выполнить над данными величинами, чтобы в действительности построить искомое, оставался совершенно открытым. Мною найден аналитический алгорифм, дающий полное явное решение классической задачи Римана. Анализ моей общей обратной задачи сводится в существенной части к исследованию зависимости таблицы решений и таблиц коэффициентов систем дифференциальных уравнений от данных характеристических таблиц. Я построил алгорифмическое решение этой общей обратной задачи в предположении, что элементы заданных характеристических таблиц близки к нулю.

Все перечисленные результаты я получил, пользуясь новым, мною построенным методом. Основная идея этого метода заключается в следующем: как я уже упоминал, все прямые задачи сводятся, в сущности, к исследованию зависимости таблицы решений, таблиц, производящих группу монодромии, и характеристических таблиц от таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений. Обратные задачи — к исследованию зависимости таблицы решений и таблиц коэффициентов системы дифференциальных уравнений от таблиц, производящих группу монодромии, или от характеристических таблиц. Таким образом логическим основанием анализа всех этих задач является понятие функциональной зависимости в области таблиц. Некоторый намек на теорию функций таблиц мы встречаем у Вейра (1887) и Шлезингера (1922). Вейр рассматривал степенные ряды одной переменной таблицы с точки зрения теории гиперкомплексных чисел и дал условие их сходимости. Шлезингер рассматривал степенной ряд одной переменной таблицы, состоящей из четырех элементов, представляющий функцию e^X, где X есть таблица, и пользовался этим лишь для упрощения в формулах аналитической теории дифференциальных уравнений, известных еще со времен Фукса. Упомянутые исследования никак нельзя назвать даже началом теории аналитических функций от таблиц, ибо в основе указанной теории лежит не ряд степеней одной переменной таблицы, а ряд композиций нескольких переменных таблиц, так как только в последнем случае выявляется характернейшая особенность этого нового исчисления — некоммутативность композиции, соответствующей умножению. Замечу, между прочим, что если бы композиция таблиц была коммутативна, то все упомянутые выше прямые и обратные задачи допускали бы совершенно элементарное решение в конечном виде. Я дал формулы этих конечных решений, которые имеют место в том случае, когда данная таблица коэффициентов системы дифференциальных уравнений или данные таблицы, производящие группу монодромии, или данные характеристические таблицы составляют коммутативные системы. Как это ни странно, но до сих пор указанные конечные решения известны не были. Возвращаясь к моему методу, я должен сказать, что я построил до сего времени не существовавший аппарат теории аналитических функций таблиц, являющийся обобщением обычной Вейерштрассовой теории функций комплексных переменных. В обычной теории функций значения функций и аргументов суть числа. В моей новой теории функций таблиц значениями функций и аргументов являются квадратные таблицы чисел. Степенно́му ряду численных аргументов здесь соответствует ряд композиций аргументов таблиц, определяющий в области его сходимости аналитическую голоморфную

функцию этих таблиц. Я даю основные положения исчисления таких рядов композиций, положение о подстановке ряда в ряд и положение об обращении рядов. Я рассматриваю аналитические функции от таблиц: целые, мероморфные, функции, имеющие изолированные существенные особенности, и функции многозначные.

Применение описанного метода дает прежде всего полное алгорифмическое решение всех прямых задач. Таблица решений данной системы линейных дифференциальных уравнений, определенная начальными условиями в любой не особой точке, оказывается целой функцией таблиц коэффициентов и представляется рядом композиций этих таблиц. Коэффициенты указанного ряда композиций суть многозначные аналитические функции от текущей переменной и от конфигурации особых точек, которые определяются простой итерацией интегралов. Если исходная система дифференциальных уравнений регулярна, то эти коэффициенты суть функции, имеющие логарифмического типа особенности в особых точках и названные мной гиперлогарифмами. В общем случае коэффициенты рассматриваемого ряда композиций суть линейные комбинации гиперлогарифмов с рациональными функциями и имеют полярно-логарифмические особенности в особых точках. Построенный таким образом ряд композиций представляет таблицы решений во всей области его существования на плоскости аргумента при всех значениях коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений и для всех конфигураций особых точек. Кроме того, это представление вскрывает характер зависимости таблицы решений не только от текущей переменной, но и от коэффициентов системы и от конфигурации особых точек. Таким образом, рассматриваемый ряд композиций есть действительно требуемое генеральное представление таблицы решений произвольной заданной системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

Таблицы, производящие группы монодромии, оказываются также целыми функциями таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений и допускают аналогичное по общности генеральное представление в виде ряда композиций этих таблиц коэффициентов с коэффициентами, зависящими исключительно от конфигурации особых точек и определенными также простой итерацией интегралов. Отметим также, что ряды композиций, представляющие таблицу решений, и таблицы, производящие группу монодромии, обладают весьма высокой сходимостью — они имеют сходимость ряда для e^X, где X — переменная таблица. Это явление весьма существенно для приложений.

Таблицы, производящие группу монодромии, характеризуют лишь разветвление таблицы решений в особых точках. Если исходная система дифференциальных уравнений регулярна в смысле Фукса, то полная аналитическая характеристика особенностей решения в этих точках достигается введением показательных таблиц. Показательная таблица в особой точке a есть некоторое значение логарифма соответствующей таблицы из группы монодромии. Таблица решений распадается на два компонента: первый компонент есть $(x-a)$ в степени показательной таблицы, а второй компонент есть таблица голоморфных около $x=a$ функций с определителем, не обращающимся в нуль в этой точке. Таким образом показательные таблицы характеризуют не только разветвление решения, но и его полярность, равно как и несущественную особенность. Я доказал, что показательные таблицы суть мероморфные функции от таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений, и дал генеральное аналитическое представление этих таблиц в виде частного двух целых функций.

В общем случае иррегулярности исходной системы дифференциальных уравнений исследование генерального представления таблицы решений вблизи какой-нибудь особой точки $x=a$ приводит к декомпозиции этой таблицы на два компонента: первый элементарный компонент представляет собою таблицу решений некоторой элементарной вспомогательной системы дифференциальных уравнений, регулярной в смысле Фукса на бесконечности и имеющей лишь одну особую точку $x=a$ на конечном расстоянии. С такой точки зрения этот элементарный компонент может быть рассматриваем как таблица, состоящая из обобщенных функций Бесселя. Второй компонент есть таблица функций, голоморфных в окрестности точки. Эта декомпозиция дает возможность охарактеризовать особенность исходной таблицы решений в точке $x=a$ посредством упомянутой элементарной системы дифференциальных уравнений с единственной особой точкой $x=a$ на конечном расстоянии. Таблицы коэффициентов указанной элементарной системы и составляют характеристические таблицы исходной системы в точке $x=a$. Первая из этих таблиц есть показательная таблица, являющаяся некоторым значением логарифма соответствующей таблицы, принадлежащей группе монодромии. В случае регулярности системы уравнений в точке $x=a$ она и есть единственная характеристическая таблица в этой точке. Она определяет полностью разветвление решения в рассматриваемой точке. Все последующие характеристические таблицы не оказывают никакого влияния на разветвление и характеризуют момент однозначной существенной особенности решения. Рассматриваемый элементарный компонент распадается в свою очередь на два компонента: первый компонент есть $(x-a)$ в степени соответствующей показательной таблицы, характеризующей разветвление таблицы решения, а второй компонент имеет генеральное представление в виде ряда, расположенного по отрицательным степеням $(x-a)$, и определяет момент однозначной существенной особенности в точке $x=a$. Характеристические таблицы оказываются голоморфными функциями от таблиц коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений в окрестности нулевых значений этих коэффициентов и в этой окрестности представляются рядами композиций таблиц коэффициентов. Исследование характеристических таблиц как функций таблиц коэффициентов вне окрестности их нулевых значений не входит в состав работ, представленных к защите. Однако в настоящее время я имею основание утверждать, что характеристические таблицы суть мероморфные функции от таблиц коэффициентов и представимы в виде частного двух целых функций во всей области их существования. Декомпозиция таблицы решений исходной системы дифференциальных уравнений на элементарный и голоморфный компоненты и введение характеристических таблиц, очевидно, разрешают задачу о полной аналитической характеристике особенностей решений данной системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

Моя основная обратная задача, как я уже упоминал, заключается в построении таблицы решений, имеющей данного типа особенности в данных точках, и в восстановлении соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Мое исследование прямых задач показало, что тип особенностей таблицы решений в некоторой точке $x=a$ вполне определяется системой характеристических таблиц как тип особенности элементарного компонента, представляющего собою таблицу решений элементарной системы дифференциальных уравнений с единственной особой точкой $x=a$ на конечном расстоянии. Таким образом, основная обратная задача сводится к определению таблиц коэффициентов системы дифференциальных уравнений и таблиц решений как функций от характеристических таблиц в данных особых точках. Оказывается, что таблицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений, равно как и таблица

решений, суть голоморфные функции от характеристических таблиц в окрестности нулевых значений этих таблиц и представляются в упомянутой окрестности рядом композиций характеристических таблиц. Эти ряды получаются посредством обращения рядов композиций, представляющих характеристические таблицы как функции таблиц коэффициентов, и посредством подстановки найденных таблиц коэффициентов в упомянутые выше представления таблиц решений через таблицы коэффициентов. Таким образом я получаю алгорифмическое решение моей общей обратной задачи, если характеристические таблицы заданы в окрестности нулевых значений.

Полное алгорифмическое решение классической задачи Римана я даю посредством обращения мероморфных функций, представляющих показательные таблицы как функции от таблиц коэффициентов регулярной системы линейных дифференциальных уравнений, и посредством подстановки найденных значений таблиц коэффициентов в генеральное представление таблицы решений. Если показательные таблицы находятся в окрестности нулевых значений, то таблицы коэффициентов и таблица решений представляются рядом композиций показательных таблиц. В общем случае обращение достигается аналитическим алгорифмом последовательных приближений, и таблицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений, равно как и таблица решений, представляются рядом мероморфных функций от показательных таблиц. Заменяя в этих выражениях показательные таблицы логарифмами данных таблиц, производящих группу монодромии, я получаю полное алгорифмическое решение классической задачи Римана.

Резюмируя все сказанное, я утверждаю, что мною построена теория аналитических функций от таблиц, пользуясь которой я получил нижеследующие, до сего времени неизвестные результаты:

1. Алгорифмическое решение прямых задач о построении генерального представления таблицы решений данной системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и решение задачи об аналитической характеристике особенностей этой таблицы.

2. Постановка общей обратной задачи о построении таблицы решений, имеющих данного типа особенности в данных точках, и о восстановлении соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

3. Алгорифмическое решение этой общей обратной задачи при упомянутых выше условиях относительно систем характеристических таблиц.

4. Полное алгорифмическое решение классической задачи Римана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗНОЕ

Лаппо-Данилевский Иван Александрович

Применение функций от матриц к теории линейных системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *К. М. Волчок* Корректор *А. И. Исакова*

Сдано в набор 15/I 1957 г. Подписано к печати 23/VII 1957 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 28,5. Условн. печ. л. 39,04. Уч.-изд. л. 33,53. Тираж 4000 экз. Т-06661. Цена книги 18 р. 75 к.. Заказ № 1780.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности.
4-я типография им. Евг. Соколовой. Ленинград, Измайловский пр., 29.