Г. Ф. ЛАПТЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1975

517.3
Л 24
УДК 512.942

Элементы векторного исчисления. Лаптев Г. Ф.

Книга представляет собой учебное руководство для студентов втузов. В ней содержится предусмотренный учебными программами материал по векторной алгебре, дифференциальной геометрии и теории поля. Изложение построено с учетом потребностей технических дисциплин, в которых используется векторное исчисление. Книга написана просто и ясно; это делает ее доступной пониманию студентов первого курса, впервые приступающих к изучению высшей математики. Книга окажется полезной и в условиях заочного обучения.

Герман Федорович Лаптев

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

М., 1975 г., 336 стр. с илл.

Редакторы *И. И. Твейкин*, *В. В. Донченко*
Техн. редактор *Л. В. Лихачева*. Корректор *Л. С. Сомова*

Сдано в набор 30/VII 1975 г. Подписано к печати 1/XII 1975 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 10,5. Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 16,22. Тираж 35000 экз. Т-21301. Цена книги 73 коп. Заказ 2681

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10. Отпечатано с матриц 2-й типографии изд-ва «Наука» на ордена Трудового Красного Знамени ф-ке «Детская книга» № 1 Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, Сущевский вал, 49.

Л $\frac{20203-163}{053(02)-75}$ 15-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

1*

ВВЕДЕНИЕ

Мы каждый раз сталкиваемся с предметом математического исследования, когда нам приходится изучать пространственные формы и количественные закономерности окружающего нас мира. В математике рассматриваются разнообразные общие методы таких исследований. К их числу относятся и возникшие из арифметики алгебраические методы.

Основные понятия арифметики прошли длительный путь развития. Потребности счета предметов привели к одному из самых ранних понятий — к понятию натурального числа. Из задач измерения расстояний, площадей, объемов, промежутков времени возникли числа дробные и иррациональные. Под влиянием необходимости производить расчеты появилась арифметика, а затем и алгебра. Развитие арифметики и алгебры потребовало введения чисел относительных и комплексных. Одновременно с расширением понятия числа расширялся и смысл арифметических операций. Так, сложение натуральных чисел сводится к последовательному пересчету единиц, содержащихся в этих числах; сложение дробей основывается на сложении и умножении целых чисел:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};$$

сложение же иррациональных чисел представляет собой сложный процесс последовательных приближений.

Таким образом, для каждого рода чисел арифметические операции имеют свой особый смысл. И тем не менее мы знаем, что в элементарной алгебре числа обозначают буквами, независимо от характера этих чисел, и изучают действия над числами независимо от конкретного содержания этих действий. Основой для таких отвлечений является общность арифметических законов, которым подчиняются действия над числами независимо от их природы. Такими общими арифметическими законами являются законы сочетательности:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a\,(bc);$$

законы переместительности:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba;$$

закон распределительности:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Эти законы образуют тот фундамент, на котором строится и теория алгебраических преобразований, и методы решения алгебраических уравнений, т. е. строится вся элементарная алгебра.

В начале прошлого века после построения теории комплексных чисел могло казаться, что развитие понятия числа достигло своего завершения, а вместе с тем вполне определилась и область применимости арифметических операций и вытекающих из них алгебраических методов. Однако очень быстро обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в алгебре, геометрии, механике, физике над различными объектами нечисловой природы, также подчиняются основным законам обычной арифметики. Эти объекты можно рассматривать как «алгебраические величины», к которым применимы алгебраические методы изучения. Таким образом, предмет алгебры чрезвычайно расширился. С современной точки зрения можно сказать, что алгебра занимается изучением систем объектов любой природы, над которыми установлены операции, сходные по своим закономерностям с арифметическими действиями над числами.

Изучением одной из таких систем и занимается векторная алгебра. Она возникла под влиянием задач геометрии и механики, а затем получила широкое развитие в связи с учением об электричестве и магнетизме.

В физике очень часто приходится иметь дело с величинами, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и своим направлением в пространстве. К таким величинам относятся скорость, ускорение, сила, напряженность магнитного поля и т. д. Векторная алгебра и имеет предметом изучения системы направленных величин и выполняемых над ними операций.

Направленные величины в математике и физике уже давно стали изображать направленными отрезками, и для решения физических задач стали применять геометрические построения. Так, уже в самом начале XVII века механики пользовались изображением сил в виде отрезков и употребляли правило параллелограмма для определения равнодействующей. Однако векторное исчисление в современном смысле возникло сравнительно недавно, когда были открыты операции над векторами, которые, с одной стороны, подчиняются законам арифметики, а с другой — отражают объективно существующие соотношения между конкретными направленными величинами в геометрии и механике.

Основы векторного исчисления были построены в середине XIX века ирландским математиком и астрономом Гамильтоном (1805—1865) и немецким математиком Грассманом (1809—1877), которые различными путями пришли к открытию векторных операций. Новые идеи не сразу получили распространение и признание. Прежде всего, недостаточно ясна была их практическая ценность: в середине XIX века еще не сформировались те физические теории, в развитии которых векторное исчисление сыграло затем существенную роль. Кроме того, сами работы Гамильтона и Грассмана *) отличались туманностью изложения, представляя большие трудности для изучения.

Непосредственным толчком для распространения и интенсивного развития векторного исчисления было построение Максвеллом (1831—1879) теории электромагнитного поля (1873), в которой идеи векторного исчисления играли решающую роль. Этот факт привлек внимание многих ученых, и в их трудах векторное исчисление приобрело к началу текущего столетия современную форму.

В настоящее время на основе векторного исчисления строятся все современные курсы теоретической механики, аэрогидромеханики, теории электричества, аналитической и дифференциальной геометрии и т. д. Широкое

---

*) Г. Грассман, Учение о протяженных величинах, 1844.

применение векторного исчисления объясняется рядом его свойств.

Во-первых, векторные представления адекватно передают суть многих понятий и закономерностей геометрии и физики.

Во-вторых, в векторном исчислении достигается единство аналитического и геометрического методов исследования, благодаря чему векторные формулы и выводы отличаются сжатостью, ясностью и наглядностью.

В-третьих, векторные формулы, выражающие физические закономерности, не зависят от выбора той или иной координатной системы, т. е. имеют инвариантный характер и отражают сущность явления в чистом виде.

Благодаря своим качествам векторное исчисление вошло в обиход математиков, физиков и техников как полезный математический метод.

В связи с запросами физики в начале текущего столетия трудами многих ученых было создано тензорное исчисление, охватывающее теорию векторов. Одно время считалось, что круг замкнулся и дальнейшее принципиальное развитие идей в этом направлении закончилось. Однако развитие науки в последние десятилетия доказало противное. На базе синтеза идей алгебры, анализа и геометрии возникли новые отрасли математики — функциональный анализ, теория представлений непрерывных групп, исчисление геометрических объектов и т. д. Эти новые отрасли математики, обобщающие и широко использующие идеи и методы векторного исчисления, тесно сомкнулись с проблемами новейшей физики.

В нашем курсе мы принуждены будем ограничиться лишь тем элементарным векторным исчислением, которое является теоретической базой для механики, гидромеханики и теории электричества.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Глава I
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

§ 1. Скаляры и векторы

1. Скалярные и векторные величины. При изучении количественных и пространственных закономерностей окружающего нас мира выявляется важное значение так называемых скалярных и векторных величин. Скалярная величина с точки зрения этих закономерностей вполне характеризуется своей числовой мерой. Такими величинами являются объем тела, его масса, температура, электрический заряд и т. п.

Векторная величина характеризуется своей числовой мерой и определенным направлением в пространстве. Такими величинами являются скорость точки, сила, напряженность магнитного поля и т. п.

2. Скаляры и векторы. Для математического изучения скалярных и векторных величин отвлекаются от их конкретного содержания и вводят отвлеченные понятия скаляра и вектора.

Определение. *Скаляром* называется всякое действительное число. *Вектором* называется направленный прямолинейный отрезок.

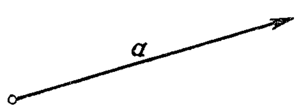

Рис. 1.

Направление вектора фиксируется тем, что одна его конечная точка считается началом, а вторая — концом. В соответствии с этим считается, что вектор направлен от своего начала к своему концу. На чертеже вектор изображается стрелкой (рис. 1).

В векторном исчислении скаляры и векторы рассматриваются как особого рода алгебраические величины, над которыми производятся алгебраические операции.

Эти операции отражают характерные зависимости, которые существуют между различными скалярными и векторными величинами в геометрии и в различных отделах физики. Изучение этих операций и составляет предмет векторной алгебры.

В векторной алгебре всякая скалярная величина изображается скаляром, выражающим ее меру при выбранной единице измерения. Всякая векторная величина изображается вектором, который имеет то же направление, что и данная величина, и содержит столько единиц длины, сколько она содержит своих единиц измерения. Таким образом, скаляры и векторы в векторной алгебре представляют собой абстрактные математические понятия, при помощи которых изображаются конкретные скалярные и векторные величины, когда мы отвлекаемся от их конкретного содержания, сохраняя лишь их числовые меры и направления.

В векторной алгебре, как и в обычной алгебре, скаляры обозначаются буквами или записываются при помощи цифр:

$$a;\ b;\ c;\ \alpha;\ \beta;\quad 2{,}71;\ \ldots$$

Векторы, в отличие от скаляров, обозначаются буквами полужирного шрифта:

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k},\ \ldots$$

Часто вектор обозначают парой букв с общей стрелкой над ними: $\overrightarrow{AB}$. При этом первая буква A обозначает начало вектора, а вторая B — его конец (рис. 2). В этом случае говорят также, что вектор $\overrightarrow{AB}$ соединяет точку A с точкой B и что вектор $\overrightarrow{AB}$ исходит из точки A.

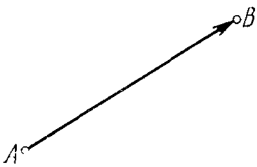

Рис. 2.

В векторной алгебре приходится рассматривать также и нулевой вектор. Нулевым вектором является точка. Направление нулевого вектора считается неопределенным. Нулевой вектор обозначается числом нуль, набранным полужирным шрифтом.

3. Равенство векторов. В векторной алгебре два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

При этом два вектора считаются одинаково направленными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых и направлены в одну сторону. Таким образом, два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ считаются равными, если один из них путем параллельного переноса можно совместить с другим так, что совпадут их начала и концы (рис. 3).

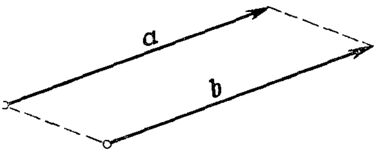

Рис. 3.

Для обозначения равенства двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ употребляется обычный знак равенства:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}. \tag{1.1}$$

Итак, с точки зрения векторной алгебры вектор не меняется при его параллельном переносе с сохранением его длины и его направления, т. е. точку приложения вектора можно помещать в любую точку пространства. Поэтому говорят, что в векторной алгебре изучаются *свободные* векторы.

4. Скользящие и приложенные векторные величины. В векторной алгебре мы интересуемся только длиной и направлением вектора, отвлекаясь не только от конкретного смысла изображаемой им векторной величины, но и от точки ее приложения. По этой причине математическое понятие равенства векторов не тождественно с понятием эквивалентности изображаемых ими векторных величин. Как равные в отвлеченном смысле числа могут изображать меры совершенно различных величин (например, объема и температуры), так и равные векторы могут изображать совершенно различные векторные величины. Более того, при сравнении векторных величин существенное значение могут иметь не только их наименования, но и точки их приложения.

Нельзя, например, считать эквивалентными две силы, действующие на твердое тело и изображаемые равными векторами, если линии их действия параллельны, но не совпадают. В связи с этим конкретные векторные величины в физике подразделяются на приложенные, скользящие и свободные.

Если векторная величина определяется численной мерой, направлением и точкой приложения, то она называется *приложенной*. Так, в движущейся жидкости скорость ее частицы является приложенной векторной величиной.

Если векторная величина определяется численной мерой, направлением и прямой линией, имеющей это направление, то она называется *скользящей*, а прямая — *линией ее приложения* или *линией ее действия*. Примером такой величины является сила, приложенная к твердому телу: точку приложения такой силы можно переносить вдоль линии ее действия, но нельзя смещать с этой линии, так как в этом случае действие силы на тело изменится.

Если векторная величина определяется только численной мерой и направлением (точка приложения значения не имеет), то она называется *свободной*. Так, все точки поступательно движущегося твердого тела имеют одинаковую по величине и по направлению скорость. Эта скорость и может рассматриваться как свободная векторная величина, называемая скоростью тела.

Таким образом, принятое в векторной алгебре математическое понятие равенства векторов тождественно с понятием эквивалентности изображаемых ими векторных величин лишь тогда, когда эти величины являются однотипными и свободными.

5. Модуль вектора. В векторной алгебре выбирается определенная единица измерения длин всех векторов независимо от их направлений. Поэтому длина каждого не нулевого вектора выражается вполне определенным положительным числом. Это число и называется модулем вектора.

Итак, *модулем* вектора называется его длина при условии, что выбрана определенная единица измерения длин.

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается той же буквой, поставленной между двумя вертикальными черточками, или той же буквой светлого шрифта:

$$|\boldsymbol{a}| = a. \tag{1.2}$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ имеют один и тот же модуль. Его обозначают как соответствующий ненаправленный отрезок, т. е. AB или BA.

Ясно, что равные векторы имеют равные модули.

Модуль вектора равен нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой:

$$|\mathbf{0}| = 0. \tag{1.3}$$

6. Орт вектора. *Ортом* данного вектора называется вектор, который направлен одинаково с данным вектором и имеет модуль, равный единице.

Орт вектора a обозначается a^0. Следовательно,

$$|a^0| = 1. \tag{1.4}$$

Очевидно, что равные векторы имеют равные орты.

7. Угол между двумя векторами. *Углом между двумя векторами* называется меньшая часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки и направленными одинаково с данными векторами (рис. 4).

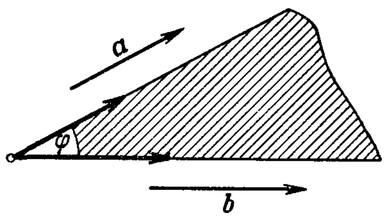

Рис. 4.

Ясно, что этот угол не может превышать двух прямых углов. Следовательно, радианная мера φ угла между двумя векторами всегда заключена между 0 и π:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

§ 2. Сложение векторов

1. Сложение двух векторов. При объединении двух одноименных скалярных величин в одну их числовые меры складываются и дают меру объединенной величины. Например, если два тела соединить в одно, то его масса будет суммой масс соединяемых тел. Таким образом, арифметическая операция сложения чисел отражает операцию объединения величин.

Подобно этому существует математическая операция сложения векторов, отражающая операцию объединения векторных величин.

Хорошо известно, что действие двух сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ на точку M тела можно заменить действием одной силы $\boldsymbol{F}_3$, их равнодействующей, определяемой по правилу параллелограмма (рис. 5). Если тело участвует в двух поступательных движениях, то результирующая скорость также

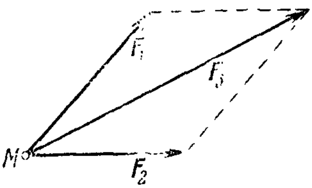

Рис. 5.

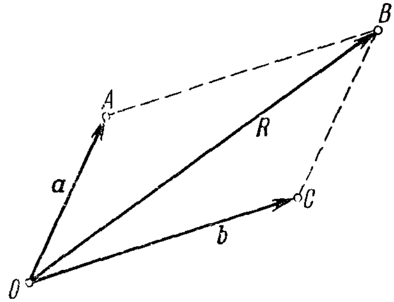

Рис. 6.

находится по правилу параллелограмма. Такая замена двух векторных величин (одинаковой природы) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ их равнодействующей $\boldsymbol{R}$ (по правилу параллелограмма) и составляет содержание операции сложения векторов: за с у м м у двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, исходящих из одной точки O, принимается вектор $\boldsymbol{R}$, исходящий из той же точки и изображающийся диагональю параллелограмма $OABC$, построенного на слагаемых векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 6).

Заметим, что для построения суммарного вектора $\overrightarrow{OB}$ нет надобности строить весь параллелограмм $OABC$, достаточно построить треугольник OAB. Поэтому сформулированное выше определение суммы векторов можно заменить более удобным.

О п р е д е л е н и е. *Суммой двух векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{R}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора $\boldsymbol{a}$ с концом второго при условии, что начало второго слагаемого совмещено с концом первого (рис. 7). При этом ясно, что результат сложения не зависит от того, в какой точке пространства помещено начало первого слагаемого: при ее изменении весь треугольник параллельно перенесется.

Операция нахождения суммы векторов называется их *сложением*. Для обозначения употребляется обычный знак плюс:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}. \tag{1.5}$$

2. Сложение более чем двух векторов. *Сложение многих векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, ... *совершается последовательно: сначала складывается первый вектор* $\boldsymbol{a}$ *со вторым* $\boldsymbol{b}$, *затем к их сумме* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ *прибавляется третий вектор* $\boldsymbol{c}$,

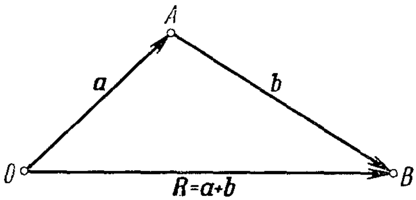

Рис. 7.

затем к полученной сумме $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ *прибавляется четвертый вектор* $\boldsymbol{d}$ *и т. д.* (рис. 8).

Непосредственно видно, что получается следующее правило для сложения векторов.

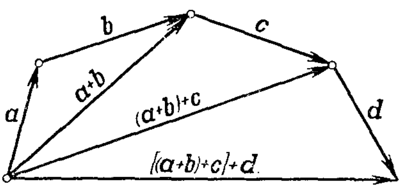

Рис. 8.

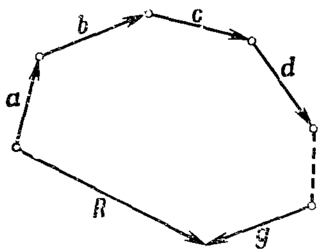

Рис. 9.

Правило многоугольника. *Суммой нескольких векторов является вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдущего* (рис. 9).

Условимся при последовательном сложении векторов скобки опускать:

$$\{[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}] + \ldots\} + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \ldots + \boldsymbol{g}. \tag{1.6}$$

3. Модуль суммы. Длина отрезка прямой, соединяющего две точки, не превосходит длины ломаной, соединяющей те же точки. Поэтому (рис. 10) *модуль суммы векторов не превосходит суммы модулей слагаемых*:

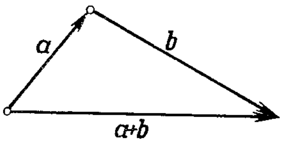

Рис. 10.

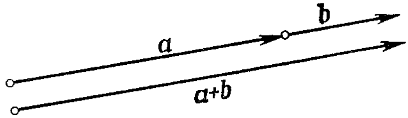

Рис. 11.

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|. \tag{1.7}$$

З а м е ч а н и е. *Если слагаемые векторы имеют одинаковые направления* (рис. 11), *то модуль суммы равен сумме модулей*:

$$|a+b| = |a|+|b|. \tag{1.8}$$

Если два слагаемых вектора имеют противоположные направления (рис. 12), *то модуль их суммы равен разности их модулей*:

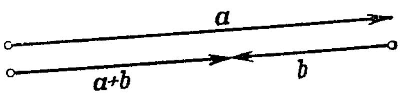

Рис. 12.

$$|a+b| = |a|-|b|, \tag{1.9}$$

причем из большего модуля вычитается меньший.

4. Законы сложения. Итак, в векторной алгебре геометрическая операция построения замыкающей многоугольника возникла как обобщение операции определения равнодействующей приложенных к точке сил и была названа операцией сложения. Оправданием такому названию служит и то обстоятельство, что эта операция подчиняется всем тем законам, которым подчиняется арифметическая операция сложения чисел. Таких законов два: з а к о н с о ч е т а т е л ь н о с т и и з а к о н п е р еместительности. Покажем их справедливость при сложении векторов.

а) Закон сочетательности. *Сумма не изменится, если любую группу последовательных слагаемых заменить их суммой.*

Для трех слагаемых этот закон выражается формулой

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{1.10}$$

Для доказательства мы из слагаемых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ составим многоугольник $OABC$, поместив начало каждого последующего вектора в конец предыдущего (рис. 13).

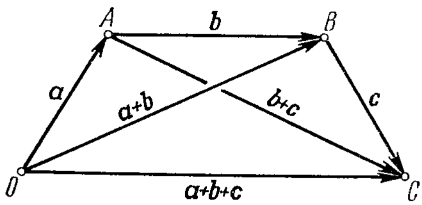

Рис. 13.

Соединив точки O и B, A и C, O и C соответственно векторами $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$, мы получим, с одной стороны,

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c},$$

с другой стороны,

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

т. е. закон сочетательности справедлив для суммы трех слагаемых.

Для доказательства справедливости закона в общем случае выделим в сумме $\boldsymbol{R}$ многих слагаемых какие-либо два последовательных слагаемых $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$. Сумму всех предшествующих слагаемых обозначим $\boldsymbol{S}$, тогда вся рассматриваемая сумма запишется так:

$$\boldsymbol{R}=[(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{m})+\boldsymbol{n}]+\ldots \quad .$$

Так как закон справедлив для трех слагаемых, то эту сумму можно записать так:

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{S} + (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n})] + \ldots \qquad (1.11)$$

Тем самым мы доказали возможность объединения двух рядом стоящих слагаемых. Заменяя два последовательных слагаемых их суммой, можно любое число последовательных слагаемых заменить их суммой (рис. 14).

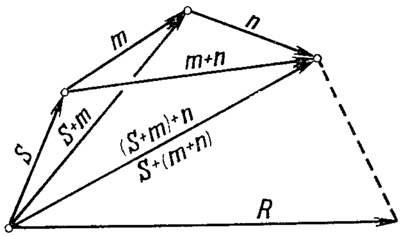

Рис. 14.

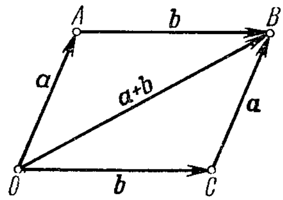

Рис. 15.

б) Закон переместительности. *От перестановки слагаемых сумма не меняется.*

Для двух слагаемых этот закон выражается формулой

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}. \qquad (1.12)$$

Для доказательства построим параллелограмм $OABC$ (рис. 15), две смежные стороны которого $\overrightarrow{OA}$ и $\overline{OC}$ образованы слагаемыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, исходящими из точки O. Тогда

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{b}.$$

Из треугольников OAB и OCB соответственно следует

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Теперь легко показать справедливость закона переместительности в общем случае. Действительно, при сложении многих векторов два последовательных слагаемых, на основании закона сочетательности, можно объединить и заменить их суммой. По доказанному (см. (1.12)) сумма двух векторов не изменится от перестановки слагаемых. Следовательно, сумма многих векторов не изменится, если поменять местами соседние слагаемые. Меняя же последовательно местами соседние слагаемые, мы можем как угодно изменить порядок сложения векторов, не изменив суммы.

§ 3. Вычитание векторов

1. Противоположный вектор. Два вектора называются *противоположными* друг другу, если они имеют одинаковые модули, расположены на одной прямой или на параллельных прямых и направлены в противоположные стороны.

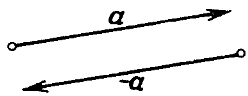

Рис. 16.

Вектор, противоположный данному вектору $\boldsymbol{a}$, обозначается той же буквой с поставленным перед нею знаком минус: $-\boldsymbol{a}$ (рис. 16).

Сумма двух противоположных векторов, очевидно, *равна нулю*:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0. \tag{1.13}$$

Вектор, противоположный противоположному, совпадает с исходным:

$$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}. \tag{1.14}$$

2. Вычитание векторов. *Разностью* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, из которых первый именуется *уменьшаемым*, а второй — *вычитаемым*, называется сумма уменьшаемого вектора и вектора, противоположного вычитаемому.

Операция нахождения разности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется *вычитанием* и обозначается обычным знаком минус:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1.15}$$

3. Вычитание как операция, обратная сложению. Из чертежа (рис. 17), на котором изображено построение разности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, видно, что

$$\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}, \tag{1.16}$$

т. е. сумма разности и вычитаемого вектора равна уменьшаемому вектору. Этот факт можно проверить и чисто алгебраически:

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}.$$

Итак, *операция вычитания векторов есть операция, обратная сложению векторов: при помощи ее по сумме* $\boldsymbol{a}$ *и одному слагаемому* $\boldsymbol{b}$ *находится второе слагаемое* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. При желании этот факт можно было бы принять за определение действия вычитания (как это и делается в арифметике).

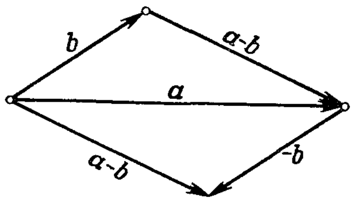

Рис. 17.

Замечание. Положив

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},$$

в силу (1.16) мы получим

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Следовательно, слагаемый вектор из одной части равенства можно переносить в другую с противоположным знаком.

§ 4. Умножение и деление вектора на скаляр

1. Умножение вектора на скаляр. Естественно считать, что умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на целое положительное число n сводится к последовательному сложению вектора $\boldsymbol{a}$ с самим собою n раз (рис. 18). В результате получается

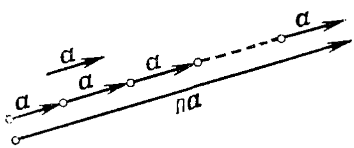

Рис. 18.

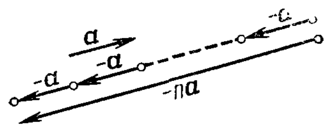

Рис. 19.

новый вектор $n\boldsymbol{a}$, имеющий то же направление, что и данный вектор $\boldsymbol{a}$, и в n раз больший модуль:

$$n\boldsymbol{a} = \underbrace{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \ldots + \boldsymbol{a}}_{n \text{ слагаемых}}. \qquad (1.17)$$

Умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на отрицательное число $-n$ естественно считать равносильным умножению противоположного вектора — $\boldsymbol{a}$ на абсолютную величину n этого числа:

$$(-n)\boldsymbol{a} = n(-\boldsymbol{a}), \tag{1.18}$$

т. е. считать, что при таком умножении получается вектор, противоположно направленный по отношению к $\boldsymbol{a}$ (рис. 19).

Обобщение этих определений приводит к следующему общему определению.

Определение. *Произведением вектора и скаляра* называется новый вектор, который имеет:

1) модуль, равный произведению модуля умножаемого вектора на абсолютную величину скаляра;

2) направление, одинаковое с умножаемым вектором, если скаляр положительный, и противоположное, если скаляр отрицательный.

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ и скаляра λ обозначается $\boldsymbol{a}\lambda$ или $\lambda\boldsymbol{a}$. Таким образом,

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}\lambda| = |\lambda|\,|\boldsymbol{a}|. \tag{1.19}$$

Замечание. Из определения следует, что *произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю*:

$$\lambda\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0};\quad 0\cdot\boldsymbol{a} = \mathbf{0}. \tag{1.20}$$

2. Законы умножения вектора на скаляр. Эти законы те же самые, что и законы умножения чисел. Их три: закон переместительности, закон сочетательности и закон распределительности. Покажем их справедливость при умножении вектора на скаляр.

а) Закон переместительности. *Произведение не меняется при перестановке сомножителей*:

$$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\lambda. \tag{1.21}$$

Действительно, по определению мы не отличаем произведения вектора на скаляр от произведения скаляра на вектор, считая обе эти операции тождественными.

б) Закон сочетательности для скалярных множителей. *Последовательное умножение вектора на несколько скалярных множителей* *равносильно умножению этого вектора на произведение этих множителей:*

$$\lambda (\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu) \boldsymbol{a}. \qquad (1.22)$$

Действительно, оба вектора $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ и $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ имеют одинаковые направления: если λ и μ имеют одинаковые знаки, то они оба будут направлены одинаково с $\boldsymbol{a}$; если же λ и μ имеют разные знаки, то они оба будут направлены противоположно $\boldsymbol{a}$. Модули этих векторов также одинаковы:

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})| = |\lambda|\,|\mu\boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\mu|\,|\boldsymbol{a}|;$$
$$|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}| = |\lambda\mu|\,|\boldsymbol{a}| = |\lambda|\,|\mu|\,|\boldsymbol{a}|.$$

Но векторы, имеющие одинаковые направления и модули, совпадают. Следовательно,

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

в) Закон двоякой распределительности. *Умножение суммы векторов на скаляр, а также умножение суммы скаляров на вектор можно производить почленно,* т. е.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\lambda = \boldsymbol{a}\lambda + \boldsymbol{b}\lambda, \qquad (1.23)$$

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}. \qquad (1.24)$$

Доказательство 1. Построим треугольник OAB из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и треугольник $O_1A_1B_1$ из векторов

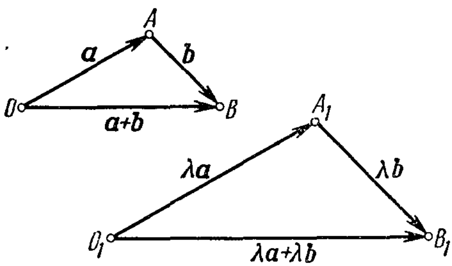

Рис. 20.

$\lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{b}$, $\lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ (рис. 20). У этих треугольников стороны OA, AB и O_1A_1, A_1B_1 соответственно параллельны и пропорциональны: $O_1A_1/OA = A_1B_1/AB = \lambda$. Поэтому треугольники подобны, их третьи стороны также параллельны и их отношение также равно λ.

Следовательно,

$$\lambda a + \lambda b = \lambda (a + b),$$

и первый закон распределительности доказан.

Замечание. Чертеж (рис. 20) сделан в предположении, что λ положительно. Если λ будет отрицательно, то направления всех сторон треугольника $O_1A_1B_1$ изменятся на противоположные и доказательство останется в силе.

Доказательство 2. Если сумма $\lambda + \mu$ положительна, то векторы $(\lambda + \mu)a$ и $\lambda a + \mu a$ будут направлены одинаково с a и будут иметь одинаковые модули:

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda + \mu|\, a = \lambda a + \mu a,$$

$$|\lambda a + \mu a| = \lambda a + \mu a.$$

Следовательно.

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$$

т. е. в этом случае закон распределительности справедлив.

Пусть теперь сумма скаляров $\lambda + \mu$ отрицательна; тогда та же сумма с противоположным знаком $-\lambda - \mu$ будет положительна и по доказанному

$$(-\lambda - \mu)a = -\lambda a + (-\mu a),$$

откуда умножением на -1 получаем

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

Итак, второй закон распределительности также доказан.

3. Деление вектора на скаляр. *Деление вектора на скаляр определяется как умножение этого вектора на обратный скаляр*:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} a. \tag{1.25}$$

Замечание. Иногда вводят операцию деления вектора на другой вектор, одинаково или противоположно с ним направленный. Однако прямой необходимости во введении такого деления нет, и мы вводить его не будем.

4. Выражение вектора через его модуль и орт. Ясно, что если умножить орт вектора на модуль вектора, то получится сам вектор, т. е. всякий вектор равен произведению своего орта на свой модуль:

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0. \tag{1.26}$$

5. Замечание. Если над векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ выполнять действия сложения, вычитания и умножения на скаляр, то в результате любого числа таких действий получится вектор вида

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d},$$

представляющий собой, как говорят, *линейную комбинацию* исходных векторов. Поэтому операции сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на скаляр называют *линейными операциями.*

§ 5. Линейные зависимости между векторами

1. Линейно зависимые векторы. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ называются *линейно зависимыми* (связанными линейной зависимостью), если между ними выполняется соотношение следующего вида:

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{d} + \varepsilon\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \tag{1.27}$$

где скалярные коэффициенты α, β, γ, δ, ε не все равны нулю.

Заметим, что если все скаляры α, β, γ, δ, ε равны нулю, то линейное соотношение (1.27) будет, разумеется, выполняться, но оно не будет устанавливать зависимости между векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$.

Понятие линейной зависимости между векторами является важным потому, что такие зависимости используются для алгебраической характеристики взаимного расположения векторов в пространстве.

2. Коллинеарные векторы. Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой. Нулевой вектор считается *коллинеарным* любому вектору.

Таким образом, коллинеарные векторы, и только коллинеарные, располагаются на одной прямой, если их начала поместить в одну точку. Направления коллинеарных векторов могут быть одинаковыми, а могут быть и противоположными (рис. 21).

Рассмотрим два коллинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Пусть один из них, например $\boldsymbol{a}$, отличен от нуля. Тогда второй вектор $\boldsymbol{b}$ получится из него умножением на некоторый скаляр:

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}, \tag{1.28}$$

причем $\lambda = +b/a$, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинаково направлены, и $\lambda = -b/a$, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ противоположно направлены.

Следовательно, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ связаны линейной зависимостью:

$$-\lambda \boldsymbol{a} + 1 \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Эта зависимость сохранится и тогда, когда оба вектора $\boldsymbol{a}$

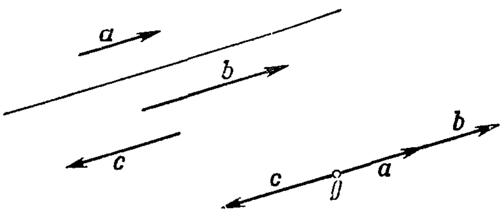

Рис. 21.

и $\boldsymbol{b}$ нулевые. В этом случае можно брать любой скаляр λ.

Итак, два коллинеарных вектора всегда линейно зависимы.

Пусть теперь, обратно, два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ связаны линейной зависимостью

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \tag{1.29}$$

причем хотя бы один из скалярных коэффициентов, например β, не равен нулю. Тогда мы получим

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \boldsymbol{a}.$$

А это означает, что вектор $\boldsymbol{b}$, являясь произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр $-\alpha/\beta$, коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$.

Итак, два линейно зависимых вектора всегда коллинеарны.

Оба доказанных положения мы можем теперь объединить в одно.

Теорема. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Следствие. *Если между двумя неколлинеарными векторами выполняется линейное соотношение*

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

то оба скалярных коэффициента должны равняться нулю:

$$\alpha = \beta = 0.$$

3. Компланарные векторы. Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости. Нулевой вектор считается *компланарным* любой системе компланарных между собой векторов.

Таким образом, *компланарные векторы* (*и только компланарные*) *расположатся в одной плоскости, если их начала поместить в одну точку* (рис. 22).

Заметив, что два вектора всегда компланарны, мы будем искать условие компланарности трех векторов.

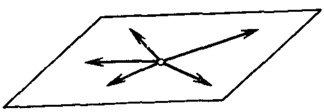

Рис. 22.

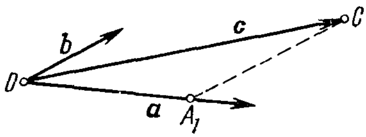

Рис. 23.

Пусть из трех компланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, имеющих общее начало O, два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны (рис. 23). Через конец C третьего вектора $\boldsymbol{c}$ проведем прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{b}$, до пересечения в точке A_1 с прямой, на которой лежит вектор $\boldsymbol{a}$. Тогда

$$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C}.$$

Но $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ суть векторы, соответственно коллинеарные векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и потому

$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{A_1C} = \mu \boldsymbol{b}.$$

Следовательно, получается линейная зависимость

$$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}. \qquad (1.30)$$

В исключительном случае, когда три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не только компланарны, но и коллинеарны, каждые два вектора будут связаны линейной зависимостью, которую можно рассматривать как зависимость между тремя векторами:

$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{b}.$$

Итак, три компланарных вектора всегда линейно зависимы.

Пусть теперь три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ связаны линейной зависимостью

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \tag{1.31}$$

причем хотя бы один скаляр, например γ, отличен от нуля. Тогда мы получаем

$$\boldsymbol{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\boldsymbol{a} - \frac{\beta}{\gamma}\boldsymbol{b},$$

т. е. векторы $\boldsymbol{c}$, $-\frac{\alpha}{\gamma}\boldsymbol{a}$, $-\frac{\beta}{\gamma}\boldsymbol{b}$ образуют три стороны треугольника (рис. 24) и лежат в одной плоскости.

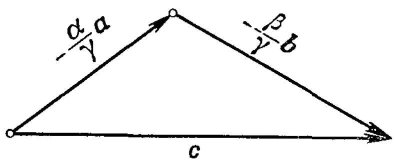

Рис. 24.

Итак, три линейно зависимых вектора всегда компланарны.

Два доказанных положения мы можем теперь объединить в одно.

Теорема. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Отсюда следует, что если выполняется линейное соотношение

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

между заведомо некомпланарными векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, то все скалярные коэффициенты должны равняться нулю:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

4. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{R}$ и тройку некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Поместим начала всех четырех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{R}$ в одну точку O (рис. 25). Через конец M вектора $\boldsymbol{R}$ проведем прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{c}$. до пересечения в точке P с плоскостью векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Через эту точку P проведем прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{b}$, до пересечения в точке Q с прямой, на которой расположен вектор $\boldsymbol{a}$. Тогда

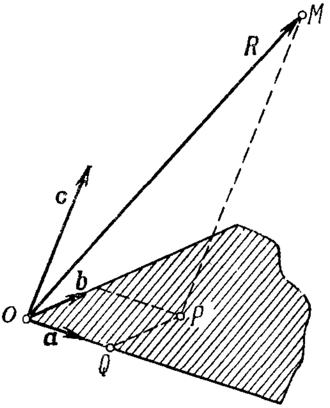

Рис. 25.

$$\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM}.$$

Но векторы $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PM}$ соответственно коллинеарны векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Следовательно, $\overrightarrow{OQ} = \lambda\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{QP} = \mu\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{PM} = \nu\boldsymbol{c}$. В силу этого получаем

$$\boldsymbol{R} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}. \qquad (1.32)$$

Эта формула и называется *формулой разложения вектора* $\boldsymbol{R}$ *по трем некомпланарным векторам* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Докажем теперь, что полученное разложение — единственное. Пусть имеется другое разложение

$$\boldsymbol{R} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \mu_1\boldsymbol{b} + \nu_1\boldsymbol{c}. \qquad (1.33)$$

Вычитание (1.33) из (1.32) дает

$$(\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{a} + (\mu - \mu_1)\boldsymbol{b} + (\nu - \nu_1)\boldsymbol{c} = 0.$$

Так как векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ заведомо не компланарны, то все коэффициенты этого линейного соотношения должны быть нулями, т. е.

$$\lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1, \quad \nu = \nu_1.$$

Следовательно, второе разложение (1.33) совпадает с первым (1.32). Получается следующая

Т е о р е м а. *Каждый вектор* $\boldsymbol{R}$ *единственным образом разлагается по трем некомпланарным векторам* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *т. е. представляется в виде*

$$\boldsymbol{R} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}.$$

Здесь скалярные коэффициенты λ, μ, ν определяются однозначно и называются *координатами вектора* $\boldsymbol{R}$ относительно векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Замечание. Из доказанного положения следует, что *любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.*

Действительно, если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то четвертый вектор $\boldsymbol{d}$ по ним разлагается и мы получаем линейную зависимость

$$\boldsymbol{d}-\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}-\nu\boldsymbol{c}=0. \tag{1.34}$$

Если же четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ компланарны, то каждые три из них, например $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, связаны нетривиальной линейной зависимостью, которую можно записать так: $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0$. Отсюда можно получить линейную зависимость четырех векторов

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}+0\cdot\boldsymbol{d}=0. \tag{1.35}$$

5. Метод координат. Теорема об однозначном разложении любого вектора по трем некомпланарным векторам (см. предыдущий пункт) позволяет векторы, а вслед за тем и точки пространства определять тройками чисел (координат). Благодаря этому становится возможным широкое применение в векторном исчислении скалярных аналитических методов, оперирующих не с векторами, а с заменяющими их тройками чисел. С другой стороны, становится возможным широкое применение векторной алгебры в аналитической геометрии. В дальнейшем эти идеи будут развиты подробно. Сейчас же мы остановимся лишь на их самых общих основах.

Фиксированная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ с общим началом в фиксированной точке O называется *аффинной координатной системой или аффинным репером пространства*. Фиксированная точка O называется *началом координат.*

Как было показано, всякий вектор $\boldsymbol{R}$ может быть однозначно разложен по трем координатным векторам:

$$\boldsymbol{R}=R^1\boldsymbol{e}_1+R^2\boldsymbol{e}_2+R^3\boldsymbol{e}_3. \tag{1.36}$$

Коэффициенты разложения в этой формуле мы обозначили буквой R с индексами наверху (R^1, R^2, R^3), как это принято в тензорном исчислении.

Итак, *всякому вектору* $\boldsymbol{R}$ *однозначно соответствует тройка чисел* R^1, R^2, R^3 — *тройка его координат* — *и, обратно, каждой тройке чисел* R^1, R^2, R^3 *соответствует определенный вектор, имеющий эти числа своими координатами.*

Положение всякой точки M в пространстве (рис. 26) можно определить ее радиусом-вектором, т. е. вектором $\boldsymbol{r}$, соединяющим начало координат O с данной точкой M:

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}. \qquad (1.37)$$

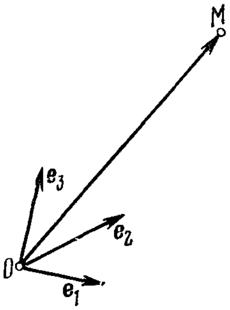

Рис. 26.

Разложив радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M по координатным векторам, мы определим его координаты x^1, x^2, x^3.

$$\boldsymbol{r} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3. \qquad (1.38)$$

Координаты радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M называются в то же время и *координатами* самой *точки* M.

Таким образом, *каждой точке пространства соответствует определенная тройка чисел* (*тройка ее кординат*) и, обратно, *каждой тройке чисел* (*координат*) *соответствует определенная точка.* В этом заключается первый принцип аналитической геометрии в пространстве.

В следующей главе мы рассмотрим так называемую прямоугольную систему координат, векторами которой служат три взаимно перпендикулярных орта.

Замечание. Формулы разложения (1.36) и (1.38) коротко записываются так:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{k=1}^{3} R^k\boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{3} x^k\boldsymbol{e}_k;$$

или еще короче так:

$$\boldsymbol{R} = R^k\boldsymbol{e}_k, \qquad (1.39)$$

$$\boldsymbol{r} = x^k\boldsymbol{e}_k. \qquad (1.40)$$

Глава II

ТЕОРИЯ ПРОЕКЦИЙ. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Проекции векторов на ось

1. *Осью* называется направленная прямая. Ось обозначается какой-либо буквой: x, y, z, s, t. Направление оси s обычно определяется вектором $\boldsymbol{s}$, имеющим с ней одинаковое направление. Орт $\boldsymbol{s}^0$ этого вектора называют также *ортом оси*.

2. *Проекцией точки M на ось s* называется основание перпендикуляра M_1, опущенного из этой точки на данную ось s.

Проекция точки на ось s может быть также определена как точка пересечения оси s с проектирующей плоскостью, т. е. с плоскостью, проходящей через данную точку перпендикулярно оси s (рис. 27).

3. *Векторной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось s* называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, началом и концом которого являются

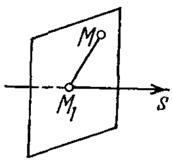

Рис. 27.

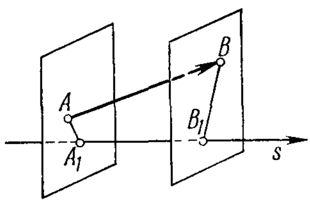

Рис. 28.

соответственно проекция A_1 начала A и проекция B^1 конца B исходного вектора $\overrightarrow{AB}$ на данную ось s (рис. 28).

Векторная проекция вектора $\boldsymbol{R}$ на ось s обозначается $\overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{R}_s$:

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_s. \tag{2.1}$$

4. *Проекцией* или *скалярной проекцией вектора $\boldsymbol{R}$ на ось s* называется скаляр, абсолютная величина которого равна модулю векторной проекции того же вектора на ту же ось. При этом проекция считается *положительной*, если направление векторной проекции совпадает с направлением оси, и *отрицательной* в противном случае.

Скалярная проекция вектора $\boldsymbol{R}$ на ось s обозначается $\text{Пр}_s\boldsymbol{R}$ или R_s:

$$\text{Пр}_s\boldsymbol{R} = R_s. \tag{2.2}$$

Теорема о векторной проекции. *Векторная проекция вектора на ось равна произведению орта оси на скалярную проекцию вектора на эту ось*, т. е.

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{R} = \boldsymbol{s}^0\text{Пр}_s\boldsymbol{R} \tag{2.3}$$

или

$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{s}^0 R_s. \tag{2.4}$$

Действительно, модули векторов $\boldsymbol{R}_s$ и $\boldsymbol{s}^0 R_s$ одинаковы, так как оба они равны абсолютной величине скалярной проекции R_s. Направления этих векторов также одинаковы: если векторы $\boldsymbol{R}_s$ и $\boldsymbol{s}^0$ направлены одинаково, то скалярная проекция R_s положительна и $\boldsymbol{s}^0 R_s$ направлен одинаково с $\boldsymbol{R}_s$; если же векторы $\boldsymbol{R}_s$ и $\boldsymbol{s}^0$ направлены в противоположные стороны, то скалярная проекция R_s отрицательна, а потому вектор $\boldsymbol{s}^0 R_s$ опять направлен одинаково с $\boldsymbol{R}_s$.

Таким образом, векторы $\boldsymbol{R}_s$ и $\boldsymbol{s}^0 R_s$ всегда имеют одинаковые модули и одинаковые направления. Следовательно,

$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{s}^0 R_s.$$

§ 2. Основные теоремы о скалярных проекциях

1. Первая теорема о проекциях. *Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось s равна произведению модуля вектора a на косинус угла φ между вектором и осью, т. е.*

$$\text{Пр}_s\boldsymbol{a} = a\cos\varphi \tag{2.5}$$

или

$$a_s = a\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}}). \tag{2.6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен оси s, то его проекция равна нулю и косинус угла равен нулю; следовательно, в этом случае теорема верна.

Пусть теперь вектор $\boldsymbol{a}$ образует острый угол φ с осью s (рис. 29). Через начало A и конец B вектора проведем проектирующие плоскости. Их точки пересечения A_1,

B_1 с осью s будут соответственно проекциями точек A и B, т. е.

$$\text{Пр}_s \boldsymbol{a} = A_1B_1.$$

Через начало A проведем прямую, параллельную оси s,

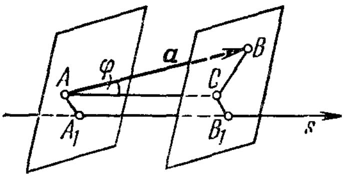

Рис. 29.

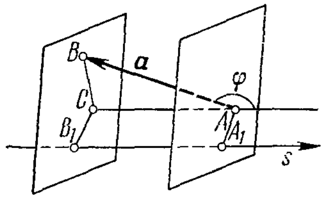

Рис. 30.

до пересечения в точке C с проектирующей плоскостью конца B. Очевидно,

$$A_1B_1 = AC.$$

Треугольник ACB прямоугольный, причем

$$\angle BAC = \varphi, \quad \angle ACB = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$AC = a\cos\varphi,$$

т. е.

$$\text{Пр}_s \boldsymbol{a} = a\cos\varphi.$$

Пусть, наконец, вектор $\boldsymbol{a}$ образует т у п о й угол φ с осью s (рис. 30). Повторяя аналогичные построения и рассуждения, мы получим

$$\text{Пр}_s \boldsymbol{a} = -A_1B_1,$$

$$A_1B_1 = AC, \quad AC = a\cos(\pi - \varphi) = -a\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$\text{Пр}_s \boldsymbol{a} = a\cos\varphi.$$

Теорема доказана во всех случаях.

С л е д с т в и е 1. *Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.*

С л е д с т в и е 2. *Проекции двух взаимно противоположных векторов на одну и ту же ось отличаются только* *знаком*:

$$\text{Пр}_s\,(-\boldsymbol{a}) = -\,\text{Пр}_s\boldsymbol{a}. \tag{2.7}$$

Действительно, если $\boldsymbol{a}$ образует угол φ с осью s, то $-\boldsymbol{a}$ образует с ней угол $\pi-\varphi$ (рис. 31). Поэтому $\text{Пр}_s\,(-\boldsymbol{a}) = a\cos(\pi-\varphi) = -a\cos\varphi = -\,\text{Пр}_s\boldsymbol{a}$.

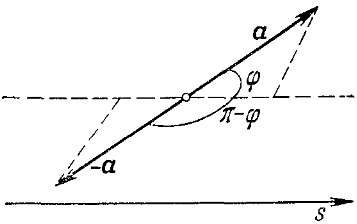

Рис. 31.

2. Вторая теорема о проекциях. *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось*:

$$\text{Пр}_s\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\ldots+\boldsymbol{g}) = \text{Пр}_s\boldsymbol{a} + \text{Пр}_s\boldsymbol{b} + \ldots + \text{Пр}_s\boldsymbol{g} \tag{2.8}$$

Доказательство. Слагаемые векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{g}$ расположим так, чтобы начало последующего слагаемого совпадало с концом предыдущего. Получится многоугольник $ABCD\ldots GH$ (рис. 32). Его замыкающий

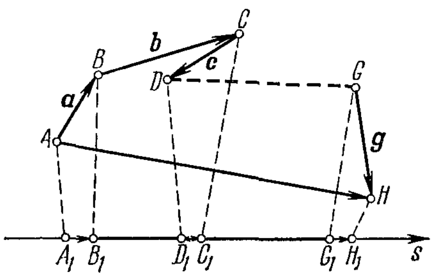

Рис. 32.

вектор, т. е. вектор $\overrightarrow{AH}$, соединяющий начало A первого слагаемого $\boldsymbol{a}$ с концом H последнего слагаемого $\boldsymbol{g}$, будет суммой рассматриваемых векторов:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \ldots + \overrightarrow{GH} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots+\boldsymbol{g}.$$

Спроектируем построенный многоугольник $ABCD\ldots GH$ на произвольно взятую ось s. Векторные проекции слагаемых векторов расположатся так, что начало последующей будет совпадать с концом предыдущей (рис. 32). Поэтому вектор $\overrightarrow{A_1H_1}$, соединяющий начало A_1 первой векторной проекции с концом H_1 последней, будет равен сумме всех векторных проекций:

$$\overrightarrow{A_1H_1} = \overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{a} + \overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{b} + \ldots + \overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{g}.$$

С другой стороны, этот вектор $\overrightarrow{A_1H_1}$ является векторной проекцией замыкающего вектора $\overrightarrow{AH}$, т. е.

$$\overrightarrow{A_1H_1} = \overrightarrow{\text{Пр}}_s\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\text{Пр}}_s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{g}).$$

Сравнив оба выражения для вектора $\overrightarrow{A_1H_1}$, мы получим

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{g}) = \overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{a} + \overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{b} + \ldots + \overrightarrow{\text{Пр}}_s\boldsymbol{g}.$$

По доказанной теореме векторная проекция вектора на ось равна произведению орта оси на скалярную проекцию вектора на эту ось. Поэтому полученное равенство можно переписать так:

$$\boldsymbol{s}^0\text{Пр}_s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{s}^0\text{Пр}_s\boldsymbol{a} + \boldsymbol{s}^0\text{Пр}_s\boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{s}^0\text{Пр}_s\boldsymbol{g}$$

или

$$\boldsymbol{s}^0\text{Пр}_s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{s}^0(\text{Пр}_s\boldsymbol{a} + \text{Пр}_s\boldsymbol{b} + \ldots + \text{Пр}_s\boldsymbol{g}).$$

Но два произведения орта $\boldsymbol{s}^0$ на скалярные множители будут одинаковыми тогда и только тогда, когда одинаковы эти скалярные множители. Поэтому

$$\text{Пр}_s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \ldots + \boldsymbol{g}) = \text{Пр}_s\boldsymbol{a} + \text{Пр}_s\boldsymbol{b} + \ldots + \text{Пр}_s\boldsymbol{g}.$$

Теорема доказана.

3. Третья теорема о проекциях. *Проекция произведения скаляра на вектор равна произведению этого скаляра на проекцию вектора на ту же ось:*

$$\text{Пр}_s(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\text{Пр}_s\boldsymbol{a}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Обозначим через φ угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью s и будем пользоваться первой теоремой о проекциях.

Если $\lambda > 0$, то вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ образует с осью s тот же угол φ. Следовательно, в этом случае

$$\text{Пр}_s\,(\lambda\boldsymbol{a}) = |\,\lambda\boldsymbol{a}\,|\cos\varphi = \lambda a\cos\varphi = \lambda\,\text{Пр}_s\boldsymbol{a}.$$

Если $\lambda < 0$, то вектор $\lambda\boldsymbol{a}$ образует с осью s угол $\pi - \varphi$. Следовательно, в этом случае

$$\text{Пр}_s\,(\lambda\boldsymbol{a}) = |\,\lambda\boldsymbol{a}\,|\cos(\pi-\varphi) = (-\lambda a)(-\cos\varphi) = \\ = \lambda a\cos\varphi = \lambda\,\text{Пр}_s\boldsymbol{a}.$$

Таким образом, теорема верна во всех случаях (при $\lambda = 0$ она очевидна).

Следствие из теорем 2 и 3. *Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации их проекций:*

$$\text{Пр}_s\,(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) = \alpha\,\text{Пр}_s\boldsymbol{a} + \beta\,\text{Пр}_s\boldsymbol{b} + \gamma\,\text{Пр}_s\boldsymbol{c}.$$

§ 3. Прямоугольная система координат в пространстве

1. Правая и левая прямоугольные системы координат. *Прямоугольной системой координат в пространстве* называется тройка взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке O, именуемой *началом* координат.

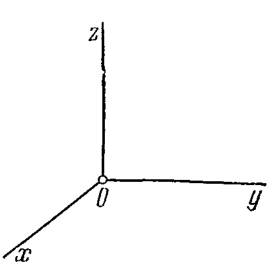

Рис. 33.

Координатные оси обычно обозначают буквами X, Y, Z и называют соответственно *осью абсцисс*, *осью ординат*, *осью аппликат*, или же осью Ox, осью Oy, осью Oz (рис. 33).

Орты координатных осей Ox, Oy, Oz обозначаются соответственно x^0, y^0, z^0, или $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Мы будем пользоваться преимущественно последним обозначением.

Различают правую и левую координатные системы.

Система координат называется *правой*, если из конца третьего орта $\boldsymbol{k}$ поворот от первого орта $\boldsymbol{i}$ ко второму орту $\boldsymbol{j}$ виден происходящим против хода стрелки часов (рис. 34, *а*).

Система координат называется *левой*, если из конца третьего орта $\boldsymbol{k}$ поворот от первого орта $\boldsymbol{i}$ ко второму

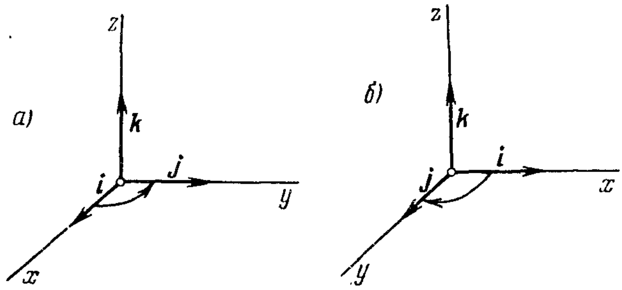

Рис. 34.

орту $\boldsymbol{j}$ виден происходящим по ходу часовой стрелки (рис. 34, *б*).

Таким образом, если ввинчивать винт в направлении вектора $\boldsymbol{k}$, вращая его от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$, то в случае правой системы резьба должна быть правой, а в случае левой системы — левой (рис. 35).

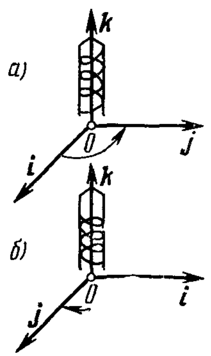

Рис. 35.

Многие положения векторной алгебры не зависят от того, пользуемся ли мы правой или левой системой координат. Однако иногда это обстоятельство имеет значение. В дальнейшем мы всегда будем применять п р а в у ю систему координат, как это принято в физике.

2. Разложение вектора по ортам осей (см. гл. I, § 5, п. 5). Поместим начало произвольно взятого вектора $\boldsymbol{R}$ в начало координат O (рис. 36). Из конца M вектора $\boldsymbol{R}$ проведем прямую, параллельную Oz, до пересечения в точке P с координатной плоскостью Oxy. Из полученной точки P проведем прямую, параллельную Oy, до пересечения с Ox в точке A. Вектор $\boldsymbol{R}$ замыкает ломаную $OAPM$. Поэтому

$$\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}.$$

Через конец M вектора $\boldsymbol{R}$ проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям Oyz, Ozx, Oxy. Они отсекут на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно три вектора $\overline{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Эти векторы, с одной стороны, соответственно равны векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PM}$, а с другой стороны, они являются векторными проекциями вектора $\boldsymbol{R}$ на координатные оси:

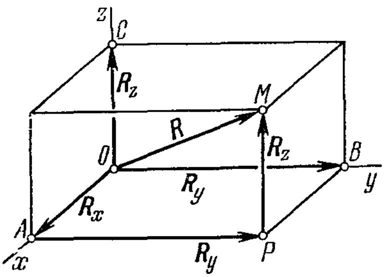

Рис. 36.

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{R}_x,$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{R}_y,$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{R}_z.$$

В силу этого мы получим

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x + \boldsymbol{R}_y + \boldsymbol{R}_z. \tag{2.10}$$

Но каждая векторная проекция равна произведению орта соответствующей оси на скалярную проекцию вектора на эту ось. Поэтому

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}R_x + \boldsymbol{j}R_y + \boldsymbol{k}R_z. \tag{2.11}$$

Итак, *коэффициентами разложения вектора* $\boldsymbol{R}$ *по координатным ортам прямоугольной системы являются его проекции* R_x, R_y, R_z *на соответствующие координатные оси.*

3. Линейные операции над векторами в координатной форме. При выполнении линейных операций над векторами тем же операциям подвергаются и их проекции на координатные оси.

Действительно, при сложении двух векторов

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}b_x + \boldsymbol{j}b_y + \boldsymbol{k}b_z$$

их проекции складываются:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}(a_x + b_x) + \boldsymbol{j}(a_y + b_y) + \boldsymbol{k}(a_z + b_z). \tag{2.12}$$

При вычитании векторов их проекции вычитаются:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\,(a_x - b_x) + \boldsymbol{j}\,(a_y - b_y) + \boldsymbol{k}\,(a_z - b_z). \qquad (2.13)$$

При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр λ его проекции умножаются на этот скаляр:

$$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}\lambda a_x + \boldsymbol{j}\lambda a_y + \boldsymbol{k}\lambda a_z. \qquad (2.14)$$

4. Радиус-вектор и координаты точки. *Радиусом-вектором* $\boldsymbol{r}$ *точки* M называется вектор, соединяющий начало координат O с этой точкой:

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}. \qquad (2.15)$$

Всякой точке пространства соответствует вполне определенный радиус-вектор, и, обратно, любой радиус-вектор определяет единственную точку пространства.

Таким образом, точки пространства представляются в векторной алгебре их радиусами-векторами (рис. 37).

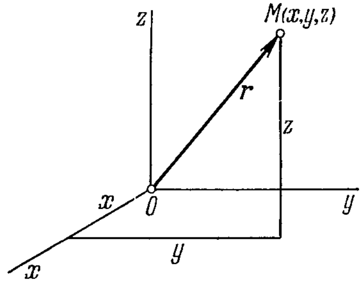

Рис. 37.

Координатами x, y, z *точки* M *пространства* называются проекции ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ на координатные оси, т. е.

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z.$$

Следовательно, *координаты точки являются коэффициентами разложения ее радиуса-вектора по ортам осей*, т. е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z. \qquad (2.16)$$

Координаты x, y, z или радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M обычно пишут в скобках вслед за буквой, обозначающей точку, т. е.

$$M\,(x, y, z) \text{ или } M\,(\boldsymbol{r}).$$

5. Определение вектора по его началу и концу. Задача состоит в том, чтобы найти разложение вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ по ортам осей, зная координаты его начала $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$

и конца $M_2(x_2, y_2, z_2)$, т. е. зная радиусы-векторы начала и конца:

$$\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{i}x_1 + \boldsymbol{j}y_1 + \boldsymbol{k}z_1, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = \boldsymbol{i}x_2 + \boldsymbol{j}y_2 + \boldsymbol{k}z_2. \tag{2.18}$$

Из треугольника OM_1M_2 (рис. 38) мы найдем

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2},$$

откуда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

или

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \tag{2.19}$$

Подставив сюда разложения (2.17) и (2.18) радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, мы получим

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{i}(x_2 - x_1) + \boldsymbol{j}(y_2 - y_1) + \boldsymbol{k}(z_2 - z_1). \tag{2.20}$$

Итак, *проекции вектора на координатные орты равны*

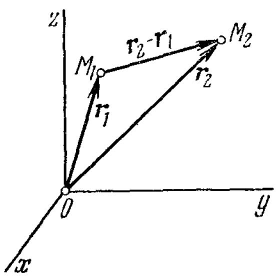

Рис. 38.

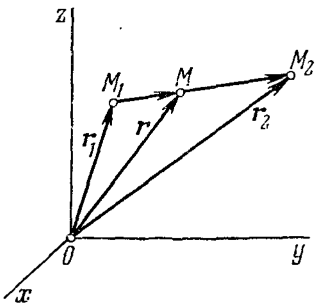

Рис. 39.

разностям соответствующих координат конца и начала вектора.

6. Деление отрезка в данном отношении. Найдем точку $M(\boldsymbol{r})$, делящую отрезок $M_1(\boldsymbol{r}_1)M_2(\boldsymbol{r}_2)$ в отношении λ:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Вектор $\overrightarrow{M_1M}$ направлен одинаково с вектором $\overrightarrow{MM_2}$ (рис. 39), причем отношение их длин равно λ. Поэтому

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}.$$

Но из треугольников OM_1M и OMM_2 следует:

$$\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1,$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}),$$

откуда

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}. \tag{2.21}$$

Эта формула и определяет радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ искомой точки M через радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ концов отрезка.

Из равенства векторов следует равенство их проекций. Поэтому из полученной формулы (2.21) следуют три координатных формулы:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \tag{2.22}$$

выражающие координаты искомой точки $M\,(x,\,y,\,z)$ через координаты конечных точек $M_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$, $M_2\,(x_2,\,y_2,\,z_2)$.

Глава III

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ

§ 1. Скалярное произведение двух векторов

1. Операция перемножения двух векторов, с одной стороны, должна повиноваться в основном тем же законам, что и операция умножения чисел, с другой стороны, она должна обобщать распространенные в геометрии и физике конкретные операции. Оказывается, что и с той и с другой точек зрения возможны две операции умножения двух векторов. Одна дает в результате скаляр и поэтому называется *скалярным умножением*. Другая дает в результате вектор и потому называется

векторным умножением. Мы сначала изучим скалярное умножение, начав с приводящего к нему понятия работы.

2. Работа силы. Пусть сила $\boldsymbol{F}$, действующая на прямолинейно перемещающуюся точку M, постоянна и составляет постоянный угол φ с перемещением $\boldsymbol{s}$ точки M (рис. 40). Тогда, как известно из физики, работа A силы

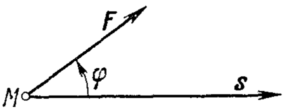

Рис. 40.

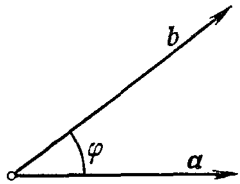

Рис. 41.

$\boldsymbol{F}$ на перемещении $\boldsymbol{s}$ определяется произведением модуля силы F на величину перемещения s и на косинус угла между ними, т. е.

$$A = Fs\cos\varphi. \tag{3.1}$$

Таким образом, двум векторам — силе $\boldsymbol{F}$ и перемещению $\boldsymbol{s}$ — оказался сопоставленным вполне определенный скаляр A — работа. Этот скаляр A и называется скалярным произведением силы $\boldsymbol{F}$ на перемещение $\boldsymbol{s}$. Дадим теперь общее определение.

3. Определение. *Скалярным произведением двух векторов* называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначают одним из следующих трех способов:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{ab}, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{3.2}$$

Мы будем придерживаться первого из этих обозначений: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. Таким образом, скалярное умножение будет обозначаться точкой.

Итак, на основании определения

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.3}$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 41).

4. Равенство скалярного произведения нулю. По определению скалярного произведения равенство

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$$

равносильно следующему равенству:

$$ab \cos \varphi = 0.$$

А это равенство означает, что либо $a = 0$, либо $b = 0$, либо $\cos \varphi = 0$, т. е. либо $\boldsymbol{a} = 0$, либо $\boldsymbol{b} = 0$, либо $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Итак, *скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю или когда эти векторы перпендикулярны.*

Если условно считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому вектору, то полученный результат можно сформулировать короче: *условием перпендикулярности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения:*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0. \tag{3.4}$$

5. Законы скалярного умножения. Мы видим, что скалярное произведение двух векторов в алгебраическом отношении существенно отличается от произведения чисел: из равенства скалярного произведения нулю уже не вытекает обязательное равенство нулю одного из сомножителей. Тем не менее мы покажем, что алгебраические законы умножения чисел полностью сохраняются и для скалярного умножения.

а) Закон переместительности. *Скалярное произведение не меняется от перестановки множителей,* т. е.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}. \tag{3.5}$$

Действительно, если φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \varphi \text{ и } \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = ba \cos \varphi,$$

т. е.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}.$$

б) Закон распределительности. *Скалярное умножение вектора на сумму векторов можно производить почленно,* т. е.

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}. \tag{3.6}$$

Для доказательства этого закона сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора на проекцию другого на первый* *), т. е.

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = p\,\text{Пр}_{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{q}. \tag{3.7}$$

Действительно, по определению (рис. 42)

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = pq\cos\varphi.$$

Но по первой теореме о проекциях $q\cos\varphi = \text{Пр}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{q}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = p\,\text{Пр}_{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{q},$$

и лемма доказана.

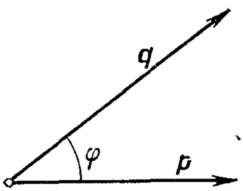

Рис. 42.

Рис. 43.

Докажем теперь закон распределительности. На основании леммы имеем

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a\,\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

По второй теореме о проекциях

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} + \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a\,(\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} + \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c}).$$

Закон распределительности справедлив для чисел. Поэтому

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = a\,\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b} + a\,\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c},$$

откуда, на основании леммы, получаем

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

Закон доказан.

*) Проекцией вектора $\boldsymbol{q}$ на вектор $\boldsymbol{p}$ называется проекция вектора $\boldsymbol{q}$ на ось, направленную одинаково с $\boldsymbol{p}$.

в) Закон сочетательности относительно скалярных множителей. *Скалярное произведение не изменится, если скалярный множитель вынести за скобки:*

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b} = \lambda\,(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}). \tag{3.8}$$

Действительно, если скаляр λ положительный (рис. 43), то

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b} = \lambda ab \cos\varphi = \lambda\,(ab\cos\varphi) = \lambda\,(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}).$$

Если же скаляр λ отрицательный, то

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b} = |\lambda|\, ab\cos(\pi-\varphi) = -|\lambda|\, ab\cos\varphi = \\ = \lambda ab\cos\varphi = \lambda\,(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}),$$

т. е. закон верен во всех случаях.

6. Скалярный квадрат вектора. Так называется *скалярное произведение вектора на себя:*

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{a}. \tag{3.9}$$

По определению скалярного произведения мы получим

$$\boldsymbol{a}^2 = aa\cos 0^\circ,$$

т. е.

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2. \tag{3.10}$$

Итак, *скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.*

7. Скалярные произведения координатных ортов. Координатные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ имеют модули, равные единице, скалярный же квадрат вектора равен квадрату его модуля; поэтому

$$\boldsymbol{i}^2 = 1, \quad \boldsymbol{j}^2 = 1, \quad \boldsymbol{k}^2 = 1. \tag{3.11}$$

Далее, координатные орты взаимно перпендикулярны, а скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю; поэтому

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0. \tag{3.12}$$

Итак, *скалярное произведение одноименных координатных ортов равно единице, а разноименных — нулю.*

8. Скалярное произведение в координатной форме. Пусть два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разложены по координатным ортам:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z,$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}b_x + \boldsymbol{j}b_y + \boldsymbol{k}b_z.$$

Перемножив почленно, мы получим

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}^2 a_x b_x + \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} a_x b_y + \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} a_x b_z + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} a_y b_x + \boldsymbol{j}^2 a_y b_y + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} a_y b_z + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} a_z b_x + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} a_z b_y + \boldsymbol{k}^2 a_z b_z,$$

откуда, в силу правила перемножения ортов, будет следовать:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (3.13)$$

Итак, *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих проекций.*

В частности, скалярный квадрат вектора равен сумме квадратов его проекций:

$$\boldsymbol{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \qquad (3.14)$$

9. Неопределенность действия, обратного скалярному умножению.

Поместим начала двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в одну точку O и через конец вектора $\boldsymbol{b}$ проведем плоскость Q, перпендикулярную $\boldsymbol{a}$. Эта плоскость пересечет ось вектора $\boldsymbol{a}$ в точке A_1 (рис. 44).

Имеем

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi = a\,\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = a\,(\pm OA_1).$$

Мы видим, что если взять любой вектор $\boldsymbol{b}_1$ с началом O и концом на плоскости Q, то таким же образом получим

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1 = a\,(\pm OA_1). \qquad (3.15)$$

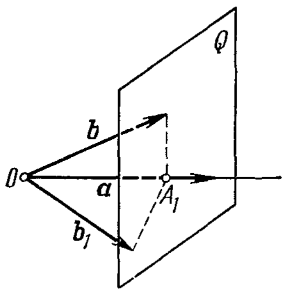

Рис. 44.

Итак, если известно скалярное произведение двух векторов и известен один множитель, то существует бесчисленное множество векторов, которые при умножении на данный множитель будут давать данное скалярное произведение. Следовательно, *нельзя однозначно определить операцию деления скаляра на вектор.*

§ 2. Векторное произведение двух векторов

1. Момент силы. Как понятие скалярного произведения возникает из понятия работы, так понятие векторного произведения возникает из понятия момента силы.

Пусть твердое тело имеет одну неподвижную точку O (рис. 45). Пусть к точке M этого тела приложена сила $\boldsymbol{F}$. Из физики известно, что воздействие этой силы $\boldsymbol{F}$ на тело с неподвижной точкой O характеризуется особой векторной

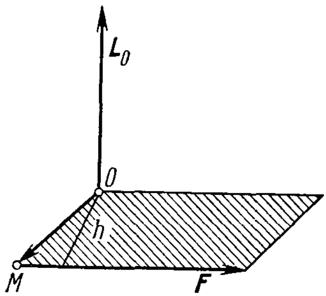

Рис. 45.

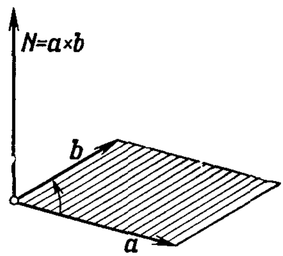

Рис. 46.

величиной $\boldsymbol{L}_0$, которая называется моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O. Числовая мера момента (его модуль) является произведением модуля силы $\boldsymbol{F}$ на расстояние h линии ее действия от точки O («плечо силы»). Иначе говоря, модуль момента численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OM}$ и $\boldsymbol{F}$.

Направлен момент $\boldsymbol{L}_0$ по перпендикуляру к плоскости, проходящей через точку O и силу $\boldsymbol{F}$, в ту сторону, откуда вращение тела вокруг точки O, вызываемое силой $\boldsymbol{F}$, видно происходящим против хода часовой стрелки. Следовательно, направление момента силы $\boldsymbol{F}$ определяет ось, проходящую через неподвижную точку O, вокруг которой эта сила стремится вращать тело.

Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O и называется векторным произведением вектора $\overrightarrow{OM}$, соединяющего точку O с точкой M приложения силы, и вектора $\boldsymbol{F}$, который изображает силу. Дадим теперь общее определение.

2. Определение. *Векторным произведением двух векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{N}$, который (рис. 46):

1) имеет модуль, численно равный площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах;

2) направлен перпендикулярно к перемножаемым векторам в ту сторону, откуда наименьший поворот первого множителя, совмещающий его направление с направлением второго множителя, виден происходящим против хода часовой стрелки.

Векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается одним из следующих способов:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \quad [\boldsymbol{ab}], \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]. \tag{3.16}$$

Мы будем пользоваться первым из этих обозначений:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{3.17}$$

Таким образом, векторное умножение, в отличие от скалярного, будет обозначаться косым крестом.

Известно, что площадь параллелограмма равна произведению двух его непараллельных сторон на синус угла, заключенного между ними. Поэтому получается следующая формула для модуля векторного произведения:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab \sin \varphi, \tag{3.18}$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Замечание 1. Момент $\boldsymbol{L}_0$ силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к точке M, относительно некоторой точки O (рис. 45) в принятых обозначениях будет определяться формулой

$$\boldsymbol{L}_0 = \overrightarrow{OM} \times \boldsymbol{F}. \tag{3.19}$$

Замечание 2. Установленное в определении направление векторного произведения по перпендикуляру к сомножителям в ту сторону, откуда наименьший поворот от первого сомножителя ко второму виден происходящим против хода стрелки часов, является совершенно условным. С тем же успехом можно было условиться направлять векторное произведение по тому же перпендикуляру, но в противоположную сторону. Выбор этого направления в целях простоты и общности формул обычно связывают с принятой системой координат. Наш выбор соответствует правой системе координат.

В общем случае векторное произведение направляют в ту сторону, откуда поворот от первого множителя ко второму виден так же, как виден поворот оси Ox к оси Oy со стороны положительного направления оси Oz.

3. Условия равенства нулю векторного произведения. Равенство нулю векторного произведения, т. е.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0,$$

равносильно равенству нулю его модуля:

$$ab \sin \varphi = 0.$$

А это равносильно тому, что либо $a = 0$, либо $b = 0$, либо $\sin \varphi = 0$, т. е. либо $\boldsymbol{a} = 0$, либо $\boldsymbol{b} = 0$, либо $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Итак, *векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю или когда эти векторы коллинеарны.*

Имея в виду, что нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, мы можем сформулировать полученный результат короче: условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0. \tag{3.20}$$

Замечание. Векторное произведение вектора на самого себя всегда равно нулю:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0. \tag{3.21}$$

Поэтому для векторного квадрата вектора не вводится особое обозначение.

4. Законы векторного умножения. При векторном перемножении уже не все законы обычного умножения сохраняются в неизменном виде: закон переместительности заменяется законом противопереместительности.

1) Закон противопереместительности. *При перестановке множителей векторное произведение меняет только свой знак*:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}). \tag{3.22}$$

Действительно, оба векторных произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ имеют одинаковые модули и оба направлены по перпендикуляру к перемножаемым векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Однако направления у них противоположны: произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ направляется в ту сторону, откуда виден происходящим против хода часовой стрелки поворот, совмещающий направление $\boldsymbol{a}$ с направлением $\boldsymbol{b}$; произведение же $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ направляется в противоположную сторону, т. е. в ту, откуда виден происходящим против хода часовой стрелки поворот, совмещающий направление $\boldsymbol{b}$ с направлением $\boldsymbol{a}$. Следовательно, произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ являются противоположными векторами, т. е.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}).$$

2) Закон распределительности. *Векторное умножение вектора на сумму векторов можно производить почленно:*

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}. \qquad (3.23)$$

Для доказательства закона распределительности сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Чтобы найти векторное произведение двух векторов $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$, достаточно* (рис. 47): а) *спроектировать первый вектор $\boldsymbol{p}$ на плоскость, перпендикулярную второму вектору $\boldsymbol{q}$*; б) *полученный вектор $\boldsymbol{p}_1$ повернуть в этой плоскости на прямой угол так, чтобы поворот наблюдался происходящим по ходу часовой стрелки с той стороны, куда направлен $\boldsymbol{q}$*; в) *повернутый вектор $\boldsymbol{p}_2$ умножить на модуль второго множителя q. Полученный в результате этих трех операций вектор $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 q$ и будет векторным произведением $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$.*

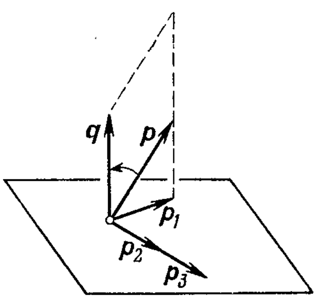

Рис. 47.

Действительно, $\boldsymbol{p}_3$ направлен перпендикулярно к $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ в ту сторону, откуда поворот от $\boldsymbol{p}$ к $\boldsymbol{q}$ виден происходящим против хода часовой стрелки. Так как $p_2 = p_1$, то модуль $\boldsymbol{p}_3$ равен qp_1, т. е. произведению основания q на высоту p_1 параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{p}$ и

q, которое дает площадь этого параллелограмма. Этим лемма доказана.

Докажем теперь закон распределительности (3.23).

а) Через начало O вектора $\boldsymbol{c}$ проведем (рис. 48) перпендикулярную к нему плоскость P и спроектируем на нее треугольник OAB со сторонами

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

б) Полученный в проекции треугольник OA_1B_1 повернем в плоскости P вокруг точки O на прямой угол так, чтобы

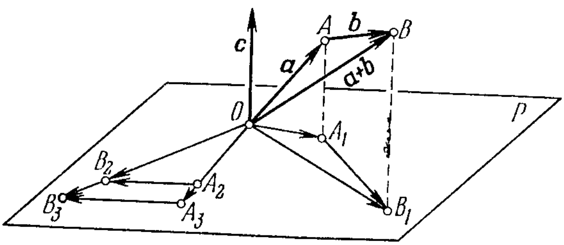

Рис. 48.

этот поворот наблюдался происходящим по ходу часовой стрелки с той стороны, куда направлен $\boldsymbol{c}$.

в) Все векторы, являющиеся сторонами повернутого треугольника OA_2B_2, умножим на $|\boldsymbol{c}|$. Получим треугольник OA_3B_3, подобный треугольнику OA_2B_2.

На основании доказанной леммы

$$\overrightarrow{OA_3} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{A_3B_3} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{OB_3} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{OB}_3 = \overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{A_3B_3}.$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c},$$

т. е. закон распределительности доказан.

3) Закон сочетательности относительно скалярных множителей. *Скалярный множитель можно вынести за знак векторного*

произведения, т. е.

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{3.24}$$

Для доказательства достаточно заметить, что модули обоих векторов $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$ и $\lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ одинаковы и равны произведению $|\lambda|$ на площадь параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; направления же этих векторов совпадают

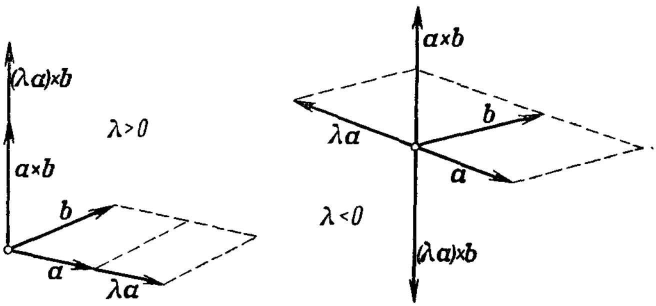

Рис. 49.

с направлением вектора $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, когда $\lambda > 0$, и противоположны ему, когда $\lambda < 0$ (рис. 49).

5. Векторные произведения координатных ортов. Векторное произведение вектора на самого себя всегда равно нулю. Поэтому

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = 0, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0, \tag{3.25}$$

т. е. векторное произведение одноименных ортов равно нулю.

При рассмотрении векторных произведений разноименных координатных ортов существенным является сделанное выше предположение, что наша координатная система $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ является правой (рис. 50). При этом предположении вектор $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ будет направлен одинаково с вектором $\boldsymbol{k}$, а вектор $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}$ — в противоположную сторону. Так как, кроме того,

$$|\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1,$$

то мы получим

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}.$$

Аналогично вычислив произведения других разноименных ортов, получим следующую таблицу:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\\ &\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\\ &\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Для определения получающихся знаков обычно пользуются следующим «круговым правилом». На

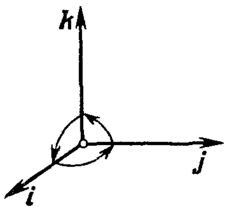

Рис. 50.

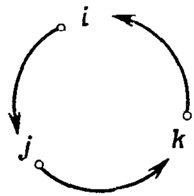

Рис. 51.

окружности (рис. 51) отметим три точки, которые обозначим, как и орты осей, буквами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Будем считать положительным обход окружности от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$, а следовательно, и от $\boldsymbol{j}$ к $\boldsymbol{k}$ и от $\boldsymbol{k}$ к $\boldsymbol{i}$. Мы видим, что *векторное произведение двух разноименных ортов, следующих друг за другом в направлении положительного обхода окружности, равно третьему орту со знаком плюс, в противном же случае — со знаком минус.*

Замечание. Сформулированное правило сохранится и для левой координатной системы, если только принятое в определении направление векторного произведения заменить на противоположное.

6. Определители. Для удобной записи ряда формул векторного исчисления приходится пользоваться определителями (детерминантами) второго и третьего порядков.

Определителем второго порядка называется алгебраическое выражение, составленное из четырех величин (элементов), которое условно записывается в форме таблицы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ и определяется формулой

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Согласно этой формуле *для вычисления определителя второго порядка надо взять разность произведений элементов первой и второй диагоналей*:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ \text{II} \qquad \text{I} \end{array} = ad - bc .$$

Определителем третьего порядка называется алгебраическое выражение, составленное из девяти величин, которое условно записывается в форме таблицы из трех строк и трех столбцов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и определяется формулой

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Согласно этому определению *для вычисления определителя каждый элемент первой строки умножается на определитель второго порядка (минор этого элемента), который получается, если вычеркнуть строку и столбец, пересекающиеся на указанном элементе, затем эти произведения берутся с чередующимися знаками и из них составляется сумма.*

Развернув определители второго порядка, через которые выражается определитель третьего порядка, мы получим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2).$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 28 - 2 \cdot (4 - 25) = -42.$$

Аналогично определяются определители более высоких порядков:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

и т. д.

7. Векторное произведение в координатной форме. Пусть два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разложены по координатным ортам:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z,$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}b_x + \boldsymbol{j}b_y + \boldsymbol{k}b_z.$$

Перемножив почленно эти разложения, мы получим

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}a_xb_x + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}a_xb_y + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k}a_xb_z + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}a_yb_x + \\ + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}a_yb_y + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}a_yb_z + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}a_zb_x + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j}a_zb_y + \\ + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}a_zb_z.$$

Отсюда, согласно правилам векторного перемножения ортов, будет следовать:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}a_xb_y - \boldsymbol{j}a_xb_z - \boldsymbol{k}a_yb_x + \boldsymbol{i}a_yb_z + \boldsymbol{j}a_zb_x - \boldsymbol{i}a_zb_y$$

или

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}(a_yb_z - a_zb_y) - \boldsymbol{j}(a_xb_z - a_zb_x) + \boldsymbol{k}(a_xb_y - a_yb_x).$$

Полученные коэффициенты при $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ являются определителями второго порядка:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Мы видим, что в правой части получился развернутый определитель третьего порядка с той лишь особенностью, что элементами первой строки являются векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Итак,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Это и есть окончательная формула, выражающая векторное произведение в координатной форме.

8. Неопределенность действия, обратного векторному умножению. Поместим начала двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в одну точку O и через конец B вектора $\boldsymbol{b}$ проведем прямую L, параллельную вектору $\boldsymbol{a}$ (рис. 52). Возьмем вектор $\boldsymbol{b}_1$, соединяющий точку O с произвольно взятой точкой B_1 на прямой L. Тогда векторные произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1$ совпадут и по направлению и по модулю, т. е.

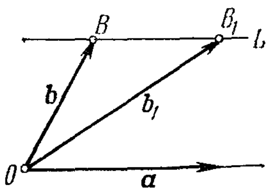

Рис. 52.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1.$$

Итак, если известно векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и один из множителей $\boldsymbol{a}$, то существует бесчисленное множество векторов $\boldsymbol{b}_1$, которые при векторном умножении на данный вектор $\boldsymbol{a}$ будут давать то же самое векторное произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Следовательно, *нельзя однозначно определить операцию деления вектора на вектор.*

Глава IV

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

§ 1. Простейшее произведение трех векторов

1. Типы произведений трех векторов. Из трех векторов можно составить только три различных типа произведений.

Во-первых, можно перемножить два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ скалярно и полученный скаляр умножить на третий вектор $\boldsymbol{c}$. В результате получится вектор, называемый *простейшим произведением трех векторов*:

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}. \tag{4.1}$$

Во-вторых, можно перемножить два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторно и полученный вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ умножить тоже векторно на третий вектор $\boldsymbol{c}$. В результате получится вектор, называемый *векторно-векторным* или *двойным векторным произведением трех векторов*:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}. \tag{4.2}$$

В-третьих, можно перемножить два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторно и полученный вектор $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ умножить скалярно на третий вектор $\boldsymbol{c}$. В результате получится скаляр, называемый *векторно-скалярным* или *смешанным произведением трех векторов*:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}. \tag{4.3}$$

Этими тремя произведениями и исчерпываются все типы произведений трех векторов. Мы изучим их подробно и установим два замечательных факта. Во-первых, мы покажем, что векторно-векторное произведение $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ можно представить как разность двух простейших произведений $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b}$ и $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a}$. Во-вторых, мы покажем, что векторно-скалярное произведение $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ выражается через попарные скалярные произведения своих сомножителей.

2. Простейшее произведение трех векторов по нашему определению получается умножением скалярного произведения двух векторов $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ на третий вектор $\boldsymbol{c}$:

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}.$$

Мы видим, что в результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором $\boldsymbol{c}$.

Итак, *простейшее произведение трех векторов есть вектор, коллинеарный с тем своим множителем, который стоит за знаком скалярного умножения.*

Из этого свойства в общем случае вытекает неравенство

$$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}, \tag{4.4}$$

которое заменится равенством лишь в том особом случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны.

Итак, *в общем случае простейшее произведение трех векторов не подчиняется закону сочетательности.*

Этими двумя замечаниями и исчерпываются все особенности простейшего произведения, которые полезно иметь в виду.

§ 2. Векторно-векторное произведение трех векторов

1. Векторно-векторное произведение трех векторов по определению получается векторным умножением векторного произведения двух векторов $a \times b$ на третий вектор c:

$$(a \times b) \times c.$$

Нашей целью будет получение формулы разложения, которая выражает это произведение через простейшие и которая фактически исчерпывает всю теорию векторно-векторного произведения.

2. **Формула разложения векторно-векторного произведения.** Векторно-векторное произведение трех векторов является вектором. Мы обозначим его R:

$$R = (a \times b) \times c. \tag{4.5}$$

Этот вектор R является векторным произведением вектора $a \times b$ и вектора c. Поэтому вектор R перпендикулярен и к вектору $a \times b$ и к вектору c (рис. 53).

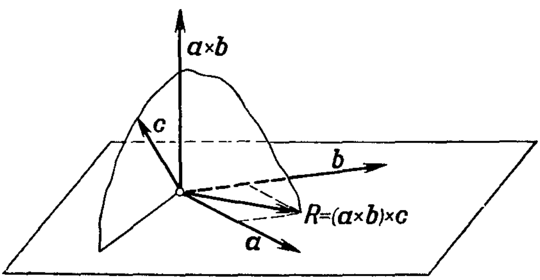

Рис. 53.

Из перпендикулярности вектора R к векторному произведению $a \times b$ вытекает, что он лежит в плоскости перемножаемых векторов a и b, так как они тоже перпендикулярны своему векторному произведению. Следовательно, вектор R компланарен векторам a, b и разлагается по ним. Запишем это разложение так:

$$R = \lambda a + \mu b. \tag{4.6}$$

Из перпендикулярности векторов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{c}$ вытекает, что их скалярное произведение равно нулю. Поэтому, умножив скалярно обе части формулы разложения (4.6) на $\boldsymbol{c}$, мы получим

$$0 = \lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c},$$

или

$$\frac{\mu}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}} = -\frac{\lambda}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}.$$

Обозначив эти равные отношения через σ, т. е.

$$\frac{\mu}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}} = -\frac{\lambda}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}} = \sigma,$$

мы найдем

$$\mu = \sigma (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}); \quad \lambda = -\sigma (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Подставив эти выражения для λ и μ в формулу разложения (4.6), мы получим

$$\boldsymbol{R} = \sigma \{\boldsymbol{b} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a} (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\}. \tag{4.7}$$

Теперь остается определить скаляр σ. С этой целью введем систему координат: ось OX направим по вектору $\boldsymbol{a}$, ось OY проведем перпендикулярно к ней в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; тогда ось OZ направится по перпендикуляру к этой плоскости. Разлагая векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ по ортам осей введенной координатной системы, мы получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i} a_x, \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{i} b_x + \boldsymbol{j} b_y, \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{i} c_x + \boldsymbol{j} c_y + \boldsymbol{k} c_z. \end{aligned}$$

Вычислим, во-первых, $\boldsymbol{R}$ по исходной формуле (4.5):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & 0 & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} a_x b_y,$$

следовательно,

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & a_x b_y \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} a_x b_y c_y + \boldsymbol{j} a_x b_y c_x. \tag{4.8}$$

Вычислим, во-вторых, $\boldsymbol{R}$ по найденной формуле (4.7):

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = a_x c_x, \quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = b_x c_x + b_y c_y;$$

следовательно,

$$\boldsymbol{R} = \sigma\,\{\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\} = \sigma\,\{(\boldsymbol{i}b_x + \boldsymbol{j}b_y)\,a_xc_x - \\ - \boldsymbol{i}a_x\,(b_xc_x + b_yc_y)\} = \sigma\,\{-\boldsymbol{i}a_xb_yc_y + \boldsymbol{j}a_xb_yc_x\}. \quad (4.9)$$

Сравнивая полученные выражения (4.8) и (4.9) для вектора $\boldsymbol{R}$, мы заключаем, что $\sigma = 1$. Следовательно, наша формула (4.7) для $\boldsymbol{R}$ принимает вид

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \quad (4.10)$$

С другой стороны, ввиду (4.5) вектор $\boldsymbol{R}$ обозначает векторно-векторное произведение: $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

Сопоставив оба эти выражения для $\boldsymbol{R}$, мы и получим искомую формулу разложения векторно-векторного произведения:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \quad (4.11)$$

Эта замечательная формула выражает векторно-векторное произведение любых трех векторов через их простейшие произведения.

З а м е ч а н и е. При выводе формулы (4.11) мы неявным образом опирались на два допущения: 1) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ предполагались не коллинеарными; 2) предполагалось, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ не перпендикулярны вектору $\boldsymbol{c}$ одновременно. Однако если хотя бы одно из этих допущений не выполняется, то обе части нашей формулы (4.11) обращаются в нуль и она, следовательно, сохраняет свою силу независимо от этих допущений.

3. Правило разложения векторно-векторного произведения. Чтобы сформулировать общее правило разложения векторно-векторного произведения, мы предварительно из найденной формулы (4.11) выведем формулу разложения для произведения $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$, в котором сначала перемножаются два последних множителя.

Переставив в этом произведении первый множитель на последнее место, мы получим

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -\{(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}\}. \quad (4.12)$$

Применим теперь к произведению в фигурных скобках нашу формулу разложения (4.11), заменив в ней $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ соответственно на $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$. Мы получим

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -\{\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\},$$

или окончательно:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}). \qquad (4.13)$$

Обе полученные формулы (4.11) и (4.13) объединяются следующим правилом разложения векторно-векторного произведения.

Правило. *Векторно-векторное произведение трех векторов равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение крайних, минус тот крайний вектор, который заключен в скобки, умноженный на скалярное произведение двух остальных векторов.*

Замечание. Из формул (4.11) и (4.13) непосредственно следует, что в общем случае

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}), \qquad (4.14)$$

т. е., вообще говоря, *для векторно-векторного произведения закон сочетательности силы не имеет.*

§ 3. Векторно-скалярное произведение трех векторов

1. Векторно-скалярное произведение и его геометрический смысл. *Векторно-скалярным* или *смешанным произведением трех векторов* называется произведение, которое получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор, т. е. произведение вида

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}.$$

Смешанное произведение представляет собой скаляр. Выясним его геометрический смысл.

Обозначив

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \qquad (4.15)$$

получим

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{c} = Sc\cos(\widehat{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{c}}) = Sc\cos\varphi. \qquad (4.16)$$

Чтобы истолковать полученный результат, мы построим на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ параллелепипед, основанием которого будем считать параллелограмм со сторонами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Площадь этого основания такова:

$$S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|.$$

Обозначим через H высоту, опущенную на это основание. Тогда объем V параллелепипеда определится известной формулой

$$V = SH. \tag{4.17}$$

Теперь нам придется различать два случая.

В первом случае, когда перемножаемые векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют правую систему (рис. 54), т. е. когда из

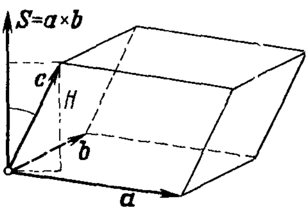

Рис. 54.

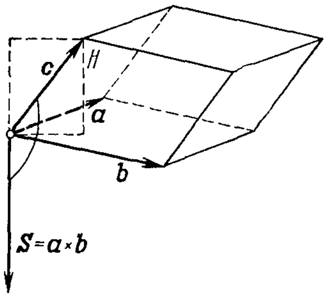

Рис. 55.

конца третьего вектора $\boldsymbol{c}$ поворот от первого вектора $\boldsymbol{a}$ ко второму $\boldsymbol{b}$ виден происходящим против хода часовой стрелки,

$$c \cos \varphi = H$$

и формула (4.16) примет вид

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = SH = V. \tag{4.18}$$

Таким образом, *векторно-скалярное произведение трех векторов, образующих правую систему, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

Во втором случае, когда перемножаемые векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют левую систему (рис. 55), т. е. когда с конца третьего вектора $\boldsymbol{c}$ поворот от первого вектора $\boldsymbol{a}$ ко второму $\boldsymbol{b}$ виден происходящим по ходу часовой стрелки,

$$c \cos \varphi = -H$$

и формула (4.16) примет вид

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = -SH = -V.$$

Таким образом, *векторно-скалярное произведение трех векторов, образующих левую систему, отличается только* *знаком от объема параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах.*

Итак,

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \pm V, \qquad (4.19)$$

причем знак «+» получается, когда перемножаемые векторы образуют правую систему, и знак «—», когда их система левая.

Отсюда следует, что *объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, всегда равен абсолютной величине их векторно-скалярного произведения*:

$$V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|. \qquad (4.20)$$

2. Законы векторно-скалярного умножения. а) Закон сочетательности. *Векторно-скалярное произведение трех векторов не зависит от группировки множителей*, т. е.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}). \qquad (4.21)$$

Действительно, оба эти произведения имеют одинаковые абсолютные величины, равные объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Знаки этих произведений также совпадают, так как если система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ правая, то и система $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ правая (см. рис. 54), если же система $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ левая, то и система $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ левая (см. рис. 55).

Следовательно, оба произведения $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ одинаковы.

Учитывая закон сочетательности, векторно-скалярное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ обозначают условно так: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

б) Закон круговой переместительности. Знак векторного умножения можно поставить между любой парой соседних множителей векторно-скалярного произведения. Поэтому перестановка этих множителей изменит только знак. На основании этого мы последовательно получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \\ = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}). \qquad (4.22)$$

Чтобы сформулировать получающийся закон переместительности, отметим на окружности (рис. 56) три точки, которые обозначим, как множители, буквами a, b, c. Будем считать положительным обход окружности в направлении $abca$. Мы видим (4.22), что *при перестановке множителей, не нарушающей их кругового порядка, векторно-скалярное произведение не меняется; при перестановке же множителей, нарушающей круговой порядок, векторно-скалярное произведение меняет только свой знак.*

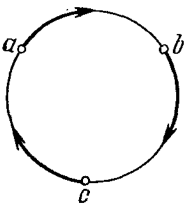

Рис. 56.

в) Закон распределительности. *Векторно-скалярное умножение суммы векторов на два других вектора можно выполнять почленно*, т. е.

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}). \qquad (4.23)$$

Этот закон не нуждается в доказательстве, так как он непосредственно вытекает из закона распределительности скалярного произведения двух векторов.

г) Закон сочетательности относительно скалярных множителей. *Скалярный множитель можно выносить за знак векторно-скалярного произведения*, т. е.

$$(\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}). \qquad (4.24)$$

Этот закон также не нуждается в доказательстве, так как он является непосредственным следствием соответствующих законов для векторного и скалярного умножений двух векторов.

3. Обращение в нуль векторно-скалярного произведения трех векторов. *Векторно-скалярное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы компланарны.* Действительно, объем параллелепипеда, построенного на компланарных векторах, равен нулю, и, наоборот, если объем равен нулю, то векторы компланарны.

Таким образом, *условием компланарности трех векторов является равенство нулю их векторно-скалярного произведения:*

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0. \qquad (4.25)$$

В частности, *векторно-скалярное произведение равно нулю, если в нем два множителя одинаковы*:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0. \tag{4.26}$$

4. Векторно-скалярное произведение в координатной форме. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ разложены по ортам осей:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i}a_x + \boldsymbol{j}a_y + \boldsymbol{k}a_z, \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{i}b_x + \boldsymbol{j}b_y + \boldsymbol{k}b_z, \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{i}c_x + \boldsymbol{j}c_y + \boldsymbol{k}c_z. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Тогда, согласно (3.27), получаем

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

следовательно,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

или, окончательно,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.28}$$

§ 4. Выражение векторно-скалярного произведения через скалярные произведения

1. Основное тождество, связывающее квадраты скалярного и векторного произведений. Обозначим через φ угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Тогда

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = pq\cos\varphi, \quad |\,\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}\,| = pq\sin\varphi. \tag{4.29}$$

Возведя эти равенства в квадрат и сложив, мы получим следующее тождество:

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2 + |\,\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}\,|^2 = p^2q^2. \tag{4.30}$$

Но квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату этого вектора. Поэтому

$$|\,\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}\,|^2 = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})^2, \quad p^2 = \boldsymbol{p}^2, \quad q^2 = \boldsymbol{q}^2, \tag{4.31}$$

в силу чего предыдущее тождество принимает такой вид:

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})^2 + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})^2 = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}^2. \qquad (4.32)$$

Это тождество мы и будем называть основным. Его полезно сформулировать так: *сумма квадратов скалярного и векторного произведений двух векторов равна произведению квадратов этих векторов.*

2. Формула, выражающая векторно-скалярное произведение через попарные скалярные произведения сомножителей. Квадрат векторно-скалярного произведения трех векторов, т. е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\}^2,$$

можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{c}$.

Согласно основному тождеству (4.32) квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения. Поэтому

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\boldsymbol{c}^2 - \{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\}^2. \qquad (4.33)$$

Квадрат векторного произведения $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством (4.32):

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2. \qquad (4.34)$$

Для вычисления квадрата векторно-векторного произведения $[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]^2$ воспользуемся формулой разложения (4.11) этого произведения:

$$[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]^2 = [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]^2 =$$
$$= \boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2 - 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2.$$

Подставив все это в выражение для квадрата векторно-скалярного произведения (4.33), мы получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2 -$$
$$- \boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}). \qquad (4.35)$$

Эта формула и является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду.

Для этого перегруппируем члены так:

$$(a, b, c)^2 = a^2 [b^2c^2 - (b\cdot c)^2] - (a\cdot b) [(a\cdot b) c^2 - \\ - (a\cdot c)(b\cdot c)] + (a\cdot c) [(a\cdot b)(b\cdot c) - (a\cdot c) b^2]. \quad (4.36)$$

Нетрудно видеть, что правая часть представляет собой развернутый определитель третьего порядка. Окончательно формула принимает такой вид:

$$(a, b, c)^2 = \begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c \\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c \\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c \end{vmatrix}. \quad (4.37)$$

Как мы увидим, эта замечательная формула вместе с формулой разложения векторно-векторного произведения в известном смысле замыкает всю векторную алгебру, позволяя все вычисления сводить к вычислениям лишь скалярных произведений.

Глава V

ФУНКЦИИ ВЕКТОРОВ

Целью настоящей главы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций векторной алгебры и аналитических функций математического анализа. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, рассмотренные в первой главе, скалярные и векторные произведения, рассмотренные в третьей главе, а также произведения троек векторов, рассмотренные в четвертой главе. В настоящей главе мы предварительно рассмотрим важные формулы для преобразования произведений, а уже затем перейдем к более общим выражениям, которые можно составить из векторов.

§ 1. Произведения четырех векторов

1. Типы произведений четырех векторов. Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами: 1) умножением произведения трех векторов на четвертый вектор; 2) умножением произведения двух векторов на произведение двух других векторов.

В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

$$\left.\begin{array}{ll} [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}, & (\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{d}, \\ [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]\times\boldsymbol{d}, & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}), \\ [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}, & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}), \\ [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\times\boldsymbol{d}, & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}), \\ & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

Не все девять получившихся произведений различны между собой.

Действительно, во-первых, мы знаем (гл. III), что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведения. Поэтому

$$[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}),\quad [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]\times\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \qquad (5.2)$$

Во-вторых, считая векторное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ за один вектор, мы можем рассматривать $[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}$ как векторно-скалярное произведение трех векторов: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Применив к нему закон сочетательности, получим

$$[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c},\,\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \qquad (5.3)$$

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов:

$$\left.\begin{array}{lc} \text{I.} & [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}). \\ \text{II.} & [(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}]\times\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \\ \text{III.} & (\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{d}. \\ \text{IV.} & [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \\ \text{V.} & [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\times\boldsymbol{d}. \\ \text{VI.} & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \end{array}\right\} \qquad (5.4)$$

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые и следует считать основными.

2. Выражение скалярного произведения двух векторных произведений $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})$ через скалярные произведения. Указанное произведение, как уже отмечалось, является векторно-скалярным произведением трех векторов:

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{p}$ и результат умножить скалярно на третий множитель $\boldsymbol{q}$. Следовательно,

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{p}] \cdot \boldsymbol{q}. \tag{5.5}$$

Развернув получившееся в квадратных скобках векторно-векторное произведение по формуле разложения (4.11), мы получим

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p})] \cdot \boldsymbol{q}$$

или, раскрыв скобки,

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{q}) \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p}) \tag{5.6}$$

или

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{q} \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Таким образом, *скалярное произведение двух векторных произведений, т. е. произведение* (5.4) *IV типа, выражается через произведения* (5.4) *I типа.*

3. Разложение вектора $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{R}$ по трем векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Векторное произведение двух векторных произведений

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{R}) \tag{5.8}$$

можно преобразовать двумя способами.

Во-первых, рассматривая это произведение (5.8) как векторно-векторное произведение трех векторов $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{R}$, мы получим

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}). \tag{5.9}$$

Во-вторых, рассматривая то же произведение как векторно-векторное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{R}$, мы получим

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R}). \tag{5.10}$$

Таким образом, *векторное произведение двух векторных произведений, т. е. произведение* (5.4) *VI типа, можно двумя способами представить в виде линейной комбинации произведений* (5.4) *III типа.*

Сравнив оба выражения (5.9) и (5.10) для одного и того же произведения (5.8), мы получим

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R})$$

или

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{R}). \quad (5.11)$$

З а м е ч а н и е. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — некомпланарные векторы, т. е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0,$$

то из формулы (5.11) получаем разложение вектора $\boldsymbol{R}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{R}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{R})]. \quad (5.12)$$

Заметим, что эта формула (5.12) является обобщением формулы (2.11) разложения вектора $\boldsymbol{R}$ по координатным ортам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

4. Разложение вектора $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{R}$ по векторным произведениям $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Тройное векторное произведение четырех векторов

$$[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{R}] \times \boldsymbol{c} \quad (5.13)$$

можно преобразовать двумя способами.

Во-первых, разложив векторно-векторное произведение внутри квадратных скобок (см. (4.11)) и умножив векторно на четвертый вектор $\boldsymbol{c}$, получим

$$[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{R}] \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{R})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{R})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}). \quad (5.14)$$

Эта формула выражает наше тройное векторное произведение, т. е. произведение (5.4) V типа, через произведения (5.4) II типа.

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение как векторно-векторное произведение трех векторов, получим

$$[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{R}] \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{c}). \quad (5.15)$$

Эта формула выражает то же самое тройное векторное произведение через произведения (5.4) II и III типов.

Сравнив оба выражения (5.14) и (5.15), получим

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{R})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{R})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{c}).$$

Отсюда найдем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{5.16}$$

Эта формула выражает произведение (5.4) *III типа через произведения* (5.4) *II типа.*

З а м е ч а н и е. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, т. е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0,$$

то из формулы (5.16) получаем разложение произвольно взятого вектора $\boldsymbol{R}$ по трем векторным произведениям:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\left[(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\right]. \tag{5.17}$$

Итак, мы показали, что *все произведения четырех векторов выражаются линейно через произведения только двух типов:*

$$\text{I.}\quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}) \qquad \text{II.}\quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}). \tag{5.18}$$

§ 2. Произведения пяти и шести векторов

1. Типы произведений пяти и шести векторов. Всякое произведение пяти векторов мы можем получить одним из двух способов: 1) умножением произведения четырех векторов на пятый вектор; 2) умножением произведения трех векторов на произведение двух векторов.

Нетрудно показать, что *всякое произведение пяти векторов линейно выражается через произведения следующих трех типов*:

$$\text{I.}\quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{e}. \qquad \text{II.}\quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}).$$
$$\text{III.}\quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{e}). \tag{5.19}$$

Всякое произведение шести векторов получается одним из трех способов: 1) умножением произведения пяти векторов на шестой вектор; 2) умножением произведения четырех векторов на произведение двух векторов; 3) умножением произведений по три множителя в каждом.

Нетрудно показать, что *всякое произведение шести векторов является линейной комбинацией из произведений* *следующих трех типов*:

$$\text{I.}\quad (a\cdot b)(c\cdot d)(e\cdot f). \qquad \text{II.}\quad (a\cdot b)(c\cdot d)(e\times f).$$

$$\text{III.}\quad (a,\ b,\ c)(d,\ e,\ f). \tag{5.20}$$

Доказательство высказанных утверждений и формул, выражающих произведения пяти и шести векторов через соответствующие типичные произведения (5.19), (5.20), предоставляется читателю. Мы же займемся более трудным вопросом, а именно, мы покажем, что произведение пяти векторов (5.19) III типа и произведение шести векторов (5.20) III типа линейно выражаются через соответствующие произведения первых типов.

2. Разложение вектора $(a,\ b,\ c)(m\times n)$ по векторам $a,\ b,\ c$. Подставив

$$R = m\times n$$

в формулу (5.11), дающую разложение вектора $(a,\ b,\ c)\,R$ по векторам $a,\ b,\ c$, получим

$$(a,\ b,\ c)(m\times n) = a\,[(b\times c)\cdot(m\times n)] - \\ - b\,[(a\times c)\cdot(m\times n)] + c\,[(a\times b)\cdot(m\times n)].$$

Отсюда на основании формулы (5.7) для скалярного произведения двух векторных произведений следует:

$$(a,\ b,\ c)(m\times n) = \\ = a\begin{vmatrix} b\cdot m & c\cdot m \\ b\cdot n & c\cdot n \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c\cdot m & a\cdot m \\ c\cdot n & a\cdot n \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a\cdot m & b\cdot m \\ a\cdot n & b\cdot n \end{vmatrix} \tag{5.21}$$

или

$$(a,\ b,\ c)(m\times n) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a\cdot m & b\cdot m & c\cdot m \\ a\cdot n & b\cdot n & c\cdot n \end{vmatrix}. \tag{5.22}$$

Таким образом, произведение (5.19) III типа действительно выражается через произведения (5.19) I типа.

Итак, *все произведения пяти векторов являются линейными комбинациями из произведений только двух типов*:

$$\text{I.}\quad (a\cdot b)(c\cdot d)\,e. \qquad \text{II.}\quad (a,\ b,\ c)(d\cdot e). \tag{5.23}$$

З а м е ч а н и е. Если векторы $a,\ b,\ c$ не компланарны, т. е.

$$(a,\ b,\ c)\neq 0,$$

то из формулы (5.22) получается следующая формула разложения векторного произведения $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ по трем некомпланарным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} \end{vmatrix}. \tag{5.24}$$

Заметим, что полученная формула (5.24) является обобщением формулы (3.27), выражающей векторное произведение через координатные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

3. Выражение произведения двух смешанных произведений $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ через скалярные произведения. Умножив скалярно на вектор $\boldsymbol{l}$ обе части формулы (5.21), дающей разложение вектора $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})$ по векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) =$$

$$= (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{a}) \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} \end{vmatrix} + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{b}) \begin{vmatrix} \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} \end{vmatrix} + (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{c}) \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} \end{vmatrix}$$

или

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{l} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{l} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} \end{vmatrix}. \tag{5.25}$$

Эта формула является обобщением формулы (4.37) для квадрата смешанного произведения. Она выражает произведение шести векторов (5.20) III типа через произведения шести векторов (5.20) I типа. Таким образом, *все произведения шести векторов выражаются лишь через произведения двух типов*:

$$\text{I.}\quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}). \qquad \text{II.}\quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f}). \tag{5.26}$$

§ 3. Основные теоремы о функциях векторов

1. Рациональные функции векторов. Пусть задана произвольная система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ..., которые мы будем называть векторными аргументами.

При помощи действий векторной алгебры (сложения и вычитания векторов, умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного умножения вектора на вектор) можно составлять разнообразные алгебраические выражения из векторных аргументов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ...

Все такие выражения мы будем называть целыми рациональными функциями от рассматриваемых векторных аргументов.

В силу законов распределительности всякую целую рациональную функцию можно представить в виде линейной комбинации из произведений векторных аргументов.

Пример.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) + \mu \boldsymbol{a} (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) [\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})] =$$
$$= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) + \lambda \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) + \mu \boldsymbol{a} (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) -$$
$$- 2\mu \boldsymbol{a} (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})^2.$$

Целая рациональная функция векторов называется *скалярной*, если она является скаляром, и *векторной*, если она является вектором.

2. Элементарные функции векторов. Различные произведения векторных аргументов являются наиболее простыми рациональными функциями. Из них и составляются все другие рациональные функции.

Произведение нескольких векторных аргументов назовем *элементарной функцией этих аргументов*, если оно не может быть представлено в виде произведения двух произведений, из которых хотя бы одно является скаляром, отличным от единицы.

Так произведения $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $[(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})] \cdot \boldsymbol{e}$ являются элементарными функциями.

Произведения же $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ являются неэлементарными функциями.

Всякое произведение векторных аргументов, дающее в результате скаляр, либо само является элементарной скалярной функцией, либо распадается в произведение нескольких скалярных элементарных функций. Следовательно, *всякая скалярная рациональная функция является функцией от элементарных скалярных функций.*

3. Произвольные скалярные функции от векторов. Любую аналитическую функцию от любых рациональных скалярных функций векторных аргументов мы будем называть *скалярной функцией* этих векторных аргументов.

Примерами таких функций могут служить

$$\frac{\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2}},\qquad \frac{e^{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$$

и т. д.

Первая основная теорема. *Всякая скалярная функция от векторов может быть представлена как функция только от попарных скалярных произведений этих векторов.*

Доказательство. а) Выразим через элементарные скалярные функции все рациональные скалярные функции, от которых зависит произвольно взятая функция W. Тогда W также выразится только через элементарные скалярные функции.

б) Докажем теперь, что всякая элементарная скалярная функция выражается только через попарные скалярные произведения векторных аргументов. Действительно, всякая скалярная элементарная функция x есть произведение некоторого числа n векторных аргументов, не содержащее скалярных множителей.

Так как это произведение должно быть скаляром, то заключительным действием в нем может быть только скалярное умножение двух векторов:

$$x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{5.27}$$

Могут представиться лишь четыре следующих случая:

1) Оба векторных множителя $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ являются аргументами; тогда требуемое доказано.

2) Один множитель, например $\boldsymbol{A}$, является аргументом $\boldsymbol{a}$, другой множитель $\boldsymbol{B}$ является векторным произведением двух аргументов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Тогда, применив формулу (4.37), выражающую смешанное произведение через попарные скалярные произведения, получим

$$x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \pm\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}}. \tag{5.28}$$

Следовательно, в этом случае требуемое тоже доказано.

3) Один множитель, например $\boldsymbol{A}$, является аргументом $\boldsymbol{a}$. Другой же множитель $\boldsymbol{B}$ являотся векторным произведением двух множителей, из которых хотя бы один не

аргумент, т. е. сам является векторным произведением. В этом случае наша скалярная функция x имеет вид

$$x = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a} \cdot [\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E})]. \tag{5.29}$$

Применив формулу для векторно-векторного произведения, получим

$$x = \boldsymbol{a} \cdot [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D})]$$

или

$$x = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E})(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}).$$

Мы видим, что в этом случае исходная скалярная функция выразилась через четыре новых элементарных скалярных функции $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{D})$, $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E})$, $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E})$, $(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D})$, каждая из которых содержит заведомо меньше множителей, чем исходная функция x.

4) Ни один из множителей $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не является аргументом, т. е.

$$x = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}). \tag{5.30}$$

Это произведение можно преобразовать посредством (5.6):

$$x = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{E})(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{F}) - (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{F})(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}).$$

Таким образом, в двух последних случаях исходная элементарная скалярная функция x выражается через элементарные скалярные функции с меньшим числом сомножителей. Повторяя по отношению к каждой из них аналогичные рассуждения, мы в конце концов выразим исходную элементарную функцию через попарные скалярные произведения векторных аргументов.

Теорема доказана.

4. Произвольные векторные функции векторов. *Произвольной векторной функцией от векторных аргументов* называется всякая линейная комбинация из рациональных векторных функций этих аргументов с коэффициентами, являющимися любыми скалярными функциями рассматриваемых аргументов. Например,

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^3}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \frac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}).$$

Вторая основная теорема. *Коэффициенты разложения любой векторной функции* $\boldsymbol{R}$ *по трем некомпланарным векторам,* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{s}$ *являются скалярными* *функциями от этих векторов и от исходных векторных аргументов функции* $\boldsymbol{R}$. *Эти скалярные функции могут быть выражены через попарные скалярные произведения указанных векторных аргументов и векторов* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{s}$.

Доказательство. Разложение векторной функции $\boldsymbol{R}$ по векторам $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{s}$ имеет вид

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{q} + z\boldsymbol{s}. \tag{5.31}$$

Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты x, y, z.

Умножим скалярно обе части формулы разложения (5.31) на $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{s}$. Учитывая, что векторно-скалярное произведение, содержащее два одинаковых множителя, равно нулю, мы получим

$$\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{s}) = x\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{s}).$$

Отсюда находим

$$x = \frac{(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})}.$$

Аналогично найдем

$$y = \frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})}, \quad z = \frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{R})}{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})}.$$

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{p}\frac{(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})} + \boldsymbol{q}\frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})} + \boldsymbol{s}\frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{R})}{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s})}. \tag{5.32}$$

Мы видим, что коэффициенты полученного разложения являются скалярными функциями от векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{R}$, т. е. от векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{s}$ и тех векторных аргументов, от которых зависит разлагаемая векторная функция $\boldsymbol{R}$. Эти коэффициенты на основании первой теоремы можно выразить через попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{s}$ и векторных аргументов функции $\boldsymbol{R}$. Теорема доказана.

Глава VI

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Основная цель векторной алгебры состоит в том, чтобы исходя из условий той или иной задачи, выразить неизвестные векторы и скаляры через известные векторы и скаляры посредством действий векторной алгебры.

Лишь после того, как такое выражение найдено, возникает дополнительный вопрос о выполнении действия при том или ином способе задания известных векторов. С особой простотой все действия векторной алгебры выполняются над векторами, заданными в прямоугольной системе координат. При других способах задания векторов выполнение этих действий приводит к более сложным вычислениям.

Ниже рассматривается ряд основных задач, которые решаются методами векторной алгебры.

§ 1. Основные задачи, связанные с линейными операциями над векторами

Задача 1. Определение замыкающей ломаной линии. Пусть из нескольких известных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ составлена ломаная линия, причем не обязательно конец предшествующего вектора совпадает с началом последующего (рис. 57). Требуется определить вектор $\boldsymbol{R}$, замыкающий эту ломаную, т. е. соединяющий одну ее конечную точку с другой. Для решения этой задачи мы из правила многоугольника и из определения вычитания векторов (гл. I, § 2 и § 3) получаем следующее правило.

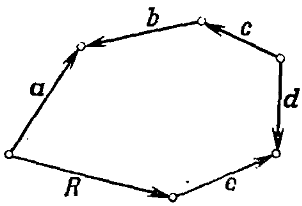

Рис. 57.

Обобщенное правило многоугольника. *Замыкающая векторной ломаной линии равна сумме векторов, которая образуется так: данная ломаная обходится в направлении от начала замыкающей к ее концу, причем каждый встречающийся вектор (звено ломаной) прибавляется, если он направлен по направлению обхода, и вычитается, если он направлен против обхода.*

Так, в соответствии с нашим чертежом (рис. 57), мы получим

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{e}. \qquad (6.1)$$

Задача 2. Определение вектора, коллинеарного данному вектору. Всякий вектор $\boldsymbol{R}$, коллинеарный данному вектору $\boldsymbol{a}$, получается умножением данного вектора на некоторый скаляр ρ:

$$\boldsymbol{R} = \rho \boldsymbol{a}. \tag{6.2}$$

Абсолютная величина этого скаляра ρ равна отношению модулей искомого и данного векторов:

$$|\rho| = \frac{R}{a}. \tag{6.3}$$

Положительному скаляру соответствует совпадение направлений векторов $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{a}$, отрицательному — их противоположность.

Задача 3. Определение вектора, компланарного двум данным векторам. Всякий вектор $\boldsymbol{R}$, компланарный двум данным (неколлинеарным) векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, разлагается по ним (рис. 58), т. е. является их линейной комбинацией (гл. I, § 5):

$$\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}. \tag{6.4}$$

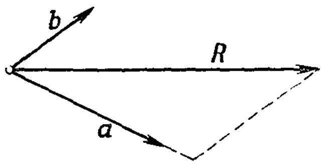

Рис. 58.

Скалярные коэффициенты λ и μ могут быть определены лишь из каких-либо дополнительных условий. Если же таких условий нет и скаляры λ, μ произвольны, то полученная формула (6.4) определяет совокупность всех векторов, компланарных векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Пример. В плоскости векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ требуется найти вектор $\boldsymbol{R}$, у которого проекции на оси Ox и Oy соответственно равны 3 и 1.

Вектор $\boldsymbol{R}$, лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, определяется формулой

$$\boldsymbol{R} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{R} = \lambda (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) + \mu (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} (\lambda + \mu) + \boldsymbol{j} (\lambda - \mu) - \boldsymbol{k}\lambda.$$

По условию проекции этого вектора на оси Ox и Oy, т. е. величины $\lambda + \mu$ и $\lambda - \mu$, должны соответственно равняться 3 и 1, т. е.

$$\lambda + \mu = 3, \quad \lambda - \mu = 1.$$

Из этой системы находим $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Подставив эти значения в выражение для вектора $\boldsymbol{R}$, получим

$$\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

§ 2. Основные задачи, связанные со скалярным умножением векторов

Задача 4. Определение модуля вектора. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = aa \cos 0 = a^2. \qquad (6.5)$$

В силу этого

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \qquad (6.6)$$

Итак, *модуль вектора равен квадратному корню из скалярного квадрата этого вектора.*

Пример 1. Даны длины a, b, c трех ребер OA, OB, OC параллелепипеда, исходящих из одной вершины O, и плоские углы α, β, γ при той же вершине (рис. 59). Требуется найти длину диагонали параллелепипеда, исходящей из той же вершины O.

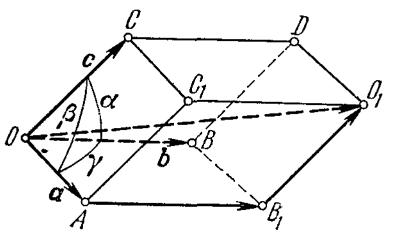

Рис. 59.

Указанные ребра OA, OB, OC будем рассматривать как векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Тогда вектор диагонали $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OO_1}$ мы найдем по правилу многоугольника:

$$\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1O_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Скалярный квадрат этого вектора равен

$$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \gamma + 2ac \cos \beta + 2bc \cos \alpha.$$

Следовательно, длина диагонали $\boldsymbol{R}$ равна

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab \cos \gamma + 2\,ac \cos \beta + 2\,bc \cos \alpha}.$$

Задача 5. Определение орта вектора. Вектор $\boldsymbol{a}$ равен произведению своего орта $\boldsymbol{a}^0$ на свой модуль a:

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0.$$

Отсюда находим

$$\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \qquad (6.7)$$

Итак, *орт вектора равен отношению этого вектора к его модулю.*

Задача 6. Определение угла между двумя направлениями в пространстве. Пусть два направления в пространстве определены векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и пусть φ — угол между ними (рис. 60). Тогда по определению скалярного произведения

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab} \qquad (6.8)$$

или

$$\cos\varphi = \boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}^0. \qquad (6.9)$$

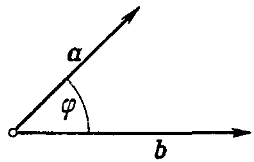

Рис. 60.

Итак, *косинус угла между двумя направлениями равен скалярному произведению ортов этих направлений.*

Пример 2. Определим угол между диагональю $\overrightarrow{OO_1}$ и ребром $\overrightarrow{OC}$ параллелепипеда, указанного в предыдущем примере (рис. 59).

Имеем

$$\overrightarrow{OO_1} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2 = ac\cos\beta+bc\cos\alpha+c^2,$$

$$OO_1 = \sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2ac\cos\beta+2bc\cos\alpha}, \quad OC = c.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OC}}{OO_1\,OC} =$$

$$= \frac{a\cos\beta+b\cos\alpha+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2ac\cos\beta+2bc\cos\alpha}}.$$

Задача 7. Определение скалярной и векторной проекции вектора на ось. Проекция a_s вектора $\boldsymbol{a}$ на ось s равна произведению модуля a вектора на косинус угла φ между вектором и осью (гл. II, § 1):

$$a_s = a\cos\varphi.$$

Но косинус угла φ между направлениями вектора $\boldsymbol{a}$ и оси

s равен скалярному произведению ортов этих направлений (задача 6):

$$\cos\varphi = \boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{s}^0.$$

Следовательно,

$$a_s = a\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{s}^0,$$

или

$$a_s = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s}^0. \qquad (6.10)$$

Итак, *проекция вектора на ось равна скалярному произведению этого вектора на орт оси.*

Как мы уже отмечали (гл. II, § 1), из определения скалярной и векторной проекций следует, что векторная проекция вектора на ось равна произведению скалярной проекции на орт оси:

$$\boldsymbol{a}_s = a_s\boldsymbol{s}^0. \qquad (6.11)$$

§ 3. Основные задачи, связанные с векторным умножением векторов

Задача 8. Определение площади треугольника. Модуль векторного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, являющихся сторонами треугольника (рис. 61), равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Площадь $\sigma_\triangle$ этого треугольника составляет половину площади параллелограмма. Следовательно,

$$\sigma_\triangle = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|. \qquad (6.12)$$

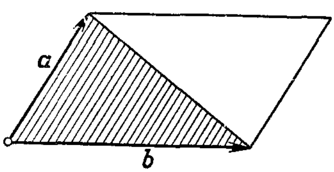

Рис. 61.

Итак, *площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения двух векторов, являющихся сторонами этого треугольника.*

П р и м е р 3. Определим площадь треугольника с вершинами A (1; 2; 3), B (0; 2; 7) и C (7; 5; 1).

а) Мы знаем (гл. II, § 2), что проекции вектора на координатные оси получаются вычитанием из координат конца вектора соответствующих координат начала. Пользуясь этим правилом, находим

$$\overrightarrow{AB} = -\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

б) Эти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ являются двумя сторонами нашего треугольника. Перемножив их векторно, получим:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -12\boldsymbol{i} + 22\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

в) Искомая площадь треугольника ABC равна половине модуля полученного векторного произведения, т. е.

$$\sigma_{\triangle} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{637}}{2}.$$

Задача 9. Определение расстояния от точки до прямой. Будем предполагать, что известен направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ прямой *), а также вектор $\boldsymbol{R}$, соединяющий какую-либо точку прямой с данной точкой M (рис. 62).

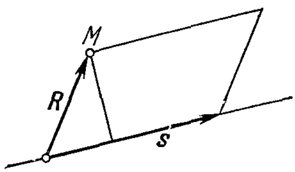

Рис. 62.

Площадь $\sigma_{\square}$ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{R}$, равна модулю векторного произведения этих векторов:

$$\sigma_{\square} = |\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}|; \tag{6.13}$$

с другой стороны, площадь того же параллелограмма равна произведению основания на высоту, т. е. произведению модуля s на расстояние δ от точки M до прямой:

$$\sigma_{\square} = s\delta. \tag{6.14}$$

Сравнивая оба выражения для площади параллелограмма, получим

$$s\delta = |\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}|.$$

Отсюда и найдем искомое расстояние:

$$\delta = \frac{|\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}|}{s}. \tag{6.15}$$

Задача 10. Определение нормального вектора плоскости. *Нормальным вектором* $\boldsymbol{N}$ *плоскости* называется любой

*) *Направляющим вектором прямой* называется всякий вектор $\boldsymbol{s}$, параллельный этой прямой.

вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ получится, если векторно перемножить два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, лежащих в данной плоскости (рис. 63):

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{6.16}$$

Примечание. Нормальными векторами приходится пользоваться, например, при определении угла между двумя плоскостями (см. задачу 13).

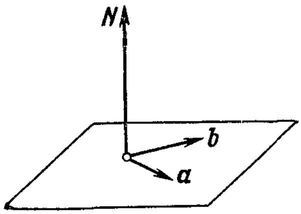

Рис. 63.

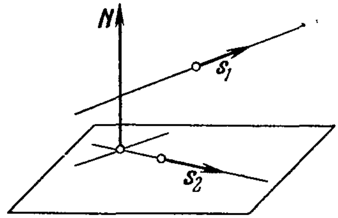

Рис. 64.

Задача 11. Определение вектора общего перпендикуляра к двум прямым. Вектор общего перпендикуляра $\boldsymbol{N}$ к двум прямым получится, если векторно перемножить направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ этих прямых (рис. 64):

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2. \tag{6.17}$$

§ 4. Основные задачи, связанные с произведениями трех и более векторов

Задача 12. Определение угла между прямой и плоскостью.

а) Угол φ между прямой и плоскостью есть угол между направляющим вектором $\boldsymbol{s}$ прямой и его векторной проекцией на плоскость (рис. 65). Этот угол φ всегда острый, его синус равен абсолютной величине косинуса угла ψ между направляющим вектором $\boldsymbol{s}$ прямой и нормальным вектором $\boldsymbol{N}$ плоскости:

$$\sin\varphi = |\cos\psi|.$$

Поэтому формула для угла φ между прямой и плоскостью имеет вид

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{N}|}{sN}. \tag{6.18}$$

б) Если плоскость определена парой расположенных в ней векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то сначала находим нормальный вектор:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

Формула для угла φ между прямой и плоскостью приобретает в этом случае вид

$$\sin\varphi = \frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{s})|}{s\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}. \tag{6.19}$$

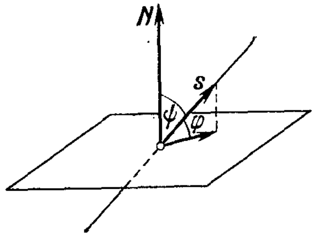

Рис. 65.

Замечание. Полученная скалярная функция векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}$ может быть выражена через попарные скалярные произведения этих векторов (см. формулы (4.32), 4.37)) следующим образом:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s} \end{vmatrix}}{s^2\,[a^2b^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]}}. \tag{6.20}$$

Задача 13. Определение угла между двумя плоскостями.

а) Угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ (рис. 66). Поэтому этот угол φ определится формулой

$$\cos\varphi = \boldsymbol{N}_1^0\cdot\boldsymbol{N}_2^0 = \frac{\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2}{N_1N_2}. \tag{6.21}$$

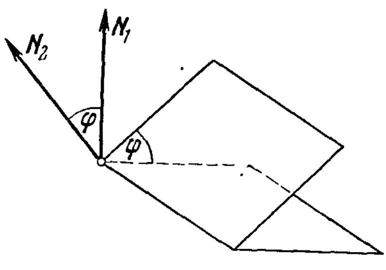

Рис. 66.

б) Если плоскости определены парами расположенных в них векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2$, то сначала находим нормальные векторы:

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}_1,\quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}_2.$$

Угол φ между плоскостями определится в этом случае формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_1)\cdot(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_2)}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_1|\,|\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_2|}. \tag{6.22}$$

Замечание. Полученное выражение для $\cos\varphi$ может быть представлено как функция от попарных скалярных произведений векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2$ (см. формулы (4.32), (5.7)), следующим образом:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2) - (\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1)}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 - (\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1)^2}\sqrt{a_2^2 b_2^2 - (\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2)^2}}. \tag{6.23}$$

Задача 14. Определение направляющего вектора линии пересечения двух плоскостей.

а) Линия пересечения двух плоскостей перпендикулярна к нормальным векторам $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$ этих плоскостей (рис. 67). Поэтому векторное произведение нормальных

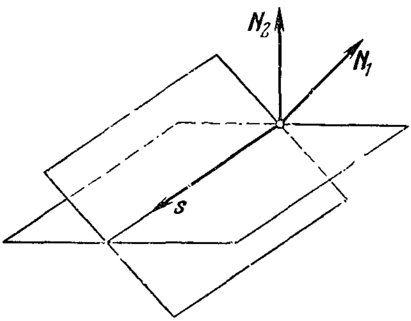

Рис. 67.

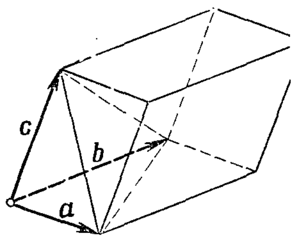

Рис. 68.

векторов может служить направляющим вектором $\boldsymbol{s}$ этой линии:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2. \tag{6.24}$$

б) Если плоскости определены парами расположенных в них векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2$, то сначала находим нормальные векторы:

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_2,$$

а затем направляющий вектор линии пересечения:

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}_1) \times (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}_2), \tag{6.25}$$

или (см. (5.9))

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) - \boldsymbol{b}_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2). \tag{6.26}$$

Задача 15. Определение объема тетраэдра. Объем V произвольного тетраэдра равен одной шестой части объема параллелепипеда, построенного на трех ребрах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ тетраэдра, исходящих из одной вершины (рис. 68). Следовательно (см. (4.20)),

$$V = \frac{1}{6}\,|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|. \tag{6.27}$$

З а м е ч а н и е. Объем тетраэдра можно выразить через попарные скалярные произведения указанных ребер (см. (4.37)) следующим образом:

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}}. \tag{6.28}$$

П р и м е р. Определим объем V тетраэдра по координатам его вершин $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$, $M_4\ (x_4;\ y_4;\ z_4)$.

Сначала найдем три вектора-ребра, исходящие из одной вершины M_1:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{i}\,(x_2 - x_1) + \boldsymbol{j}\,(y_2 - y_1) + \boldsymbol{k}\,(z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{i}\,(x_3 - x_1) + \boldsymbol{j}\,(y_3 - y_1) + \boldsymbol{k}\,(z_3 - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_4} = \boldsymbol{i}\,(x_4 - x_1) + \boldsymbol{j}\,(y_4 - y_1) + \boldsymbol{k}\,(z_4 - z_1).$$

Одна шестая часть абсолютной величины векторно-скалярного произведения этих векторов и даст искомый объем:

$$V = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_4})|,$$

или

$$V = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}^{*)}. \tag{6.29}$$

*) Выражение mod x означает абсолютную величину x.

Замечание. Полученную формулу можно представить в более симметричном виде. Для этого мы сначала заменим в ней определитель третьего порядка равным ему определителем четвертого порядка:

$$V = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 1 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ 1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Такая замена называется окаймлением определителя. В совпадении окаймленного определителя с исходным мы непосредственно убедимся, если развернем его по элементам первой строки.

Прибавив теперь к элементам 2-го, 3-го и 4-го столбцов элементы 1-го столбца, предварительно умноженные соответственно на x_1, y_1 и z_1, мы получим следующую формулу для вычисления объема тетраэдра по координатам его вершин:

$$V = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}. \qquad (6.30)$$

Задача 16. Определение расстояния от точки до плоскости.

а) Будем предполагать, что известен нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ плоскости и вектор $\boldsymbol{R}$, соединяющий какую-либо точку A плоскости с данной точкой M (рис. 69).

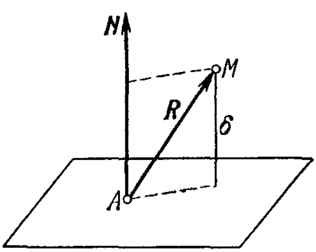

Рис. 69.

Расстоянием δ от данной точки M до данной плоскости будет являться абсолютная величина проекции вектора $\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{R}$ на нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{N}$, т. е.

$$\delta = |\,\text{Пр}_{\boldsymbol{N}}\, \boldsymbol{R}\,| = |\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}^{\bullet}\,|. \qquad (6.31)$$

б) Если даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в плоскости и вектор $\boldsymbol{R}$, соединяющий какую-либо точку A плоскости с данной точкой M, то сначала находим нормальный вектор

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},$$

а уже затем определяем расстояние от точки до плоскости:

$$\delta = |\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}^0| = \left|\boldsymbol{R}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}\right|.$$

Итак,

$$\delta = \frac{|(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}. \tag{6.32}$$

Замечание 1. Последнюю формулу можно было получить непосредственно из тех соображений, что высота параллелепипеда равна отношению его объема к площади его основания.

Замечание 2. Расстояние δ от точки до плоскости выражается через попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (см. формулы (4.32), (4.37)) так:

$$\delta = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R} & \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{R} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{R} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix}}{a^2b^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}. \tag{6.33}$$

Задача 17. Определение кратчайшего расстояния между двумя прямыми. Будем предполагать, что известны направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ двух прямых и вектор $\boldsymbol{R}$, соединяющий какую-либо точку M_1 одной прямой с какой-либо точкой M_2 другой прямой (рис. 70).

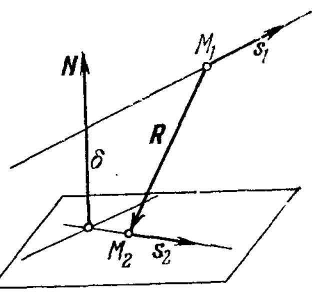

Рис. 70.

Перемножив векторно направляющие векторы прямых $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, мы найдем вектор их общего перпендикуляра $\boldsymbol{N}$:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2.$$

Как видно из чертежа, кратчайшее расстояние δ между нашими прямыми равно абсолютной величине проекции вектора $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на вектор $\boldsymbol{N}$:

$$\delta = |\,\text{Пр}_{\boldsymbol{N}}\,\boldsymbol{R}\,| = |\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}^0\,|. \tag{6.34}$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{|(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}. \tag{6.35}$$

Замечание. Полученное выражение для кратчайшего расстояния δ можно представить (см. формулы (4.32), (4.37)) как функцию только от попарных скалярных произведений векторов $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$:

$$\delta = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R} & \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{s}_2 \\ \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{R} & \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2 \\ \boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{R} & \boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_1 & \boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{s}_2 \end{vmatrix}}{s_1^2 s_2^2 - (\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)^2}}. \tag{6.36}$$

Задача 18. Определение проекции вектора на плоскость. Найдем векторную проекцию $\boldsymbol{R}_P$ данного вектора $\boldsymbol{R}$ на плоскость P с данным нормальным вектором $\boldsymbol{N}$. Эта проекция $\boldsymbol{R}_P$ является разностью (рис. 71) между вектором $\boldsymbol{R}$ и его векторной проекцией $\boldsymbol{R}_N$ на нормальный вектор $\boldsymbol{N}$, т. е.

$$\boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_N.$$

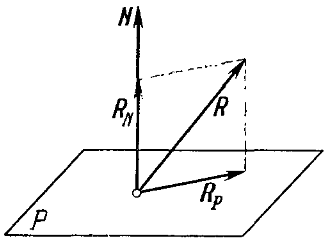

Рис. 71.

Но мы знаем (задача 7), что векторная проекция вектора на ось равна произведению орта оси на скалярную проекцию вектора:

$$\boldsymbol{R}_N = (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}^0)\,\boldsymbol{N}^0.$$

Вследствие этого

$$\boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{N}^0(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}^0). \tag{6.37}$$

Модуль полученной векторной проекции определяется по теореме Пифагора:

$$|\boldsymbol{R}_P| = \sqrt{R^2 - (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{N}^0)^2}. \tag{6.38}$$

Замечание 1. Если даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в плоскости P, то сначала находим нормальный вектор плоскости, т. е.

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

а затем уже проекцию

$$\boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{R} - \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2}. \tag{6.39}$$

Замечание 2. Векторную проекцию $\boldsymbol{R}_P$ вектора $\boldsymbol{R}$ на плоскость P с нормальным вектором $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ можно представить еще так:

$$\boldsymbol{R}_P = (\boldsymbol{N}^0\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{N}^0, \tag{6.40}$$

или

$$\boldsymbol{R}_P = \frac{[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{R}]\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2}, \tag{6.41}$$

откуда, пользуясь формулами (5.8), (5.3) и (5.7), получаем разложение проекции $\boldsymbol{R}_P$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{a}\frac{b^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{R})}{a^2b^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} + \boldsymbol{b}\frac{a^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{R})}{a^2b^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}. \tag{6.42}$$

§ 5. Простейшие векторные уравнения

Задача 19. Определение вектора по векторному и скалярному произведениям. Требуется определить неизвестный вектор $\boldsymbol{r}$ из системы двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r} &= \lambda, \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

где скаляр λ и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ считаются известными, причем предполагается, что вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}$ и не перпендикулярен вектору $\boldsymbol{c}$, т. е.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \neq 0.$$

Умножив векторно первое уравнение системы на вектор $\boldsymbol{c}$, мы получим

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

или

$$-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

откуда, воспользовавшись вторым уравнением системы, мы найдем

$$\boldsymbol{r}=\frac{\lambda\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}+\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}. \tag{6.44}$$

Подстановкой в уравнения нашей системы можем убедиться, что полученный вектор им удовлетворяет.

Итак, рассматриваемая система имеет единственное решение.

Задача 20. Определение вектора по векторному произведению. Требуется найти неизвестный вектор $\boldsymbol{r}$ из уравнения

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}, \tag{6.45}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — известные взаимно перпендикулярные векторы.

Скалярное умножение решения $\boldsymbol{r}$ этого уравнения на данный вектор $\boldsymbol{a}$ дает некоторый скаляр λ, т. е.

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda.$$

По скалярному и векторному произведениям мы теперь найдем вектор $\boldsymbol{r}$ (6.44):

$$\boldsymbol{r}=\frac{\lambda\boldsymbol{a}}{a^2}+\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{a^2}. \tag{6.46}$$

Обозначив $\lambda/a^2=\Lambda$, мы получим

$$\boldsymbol{r}=\Lambda\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{a^2}. \tag{6.47}$$

Нетрудно убедиться подстановкой, что при любом Λ полученный вектор $\boldsymbol{r}$ удовлетворяет уравнению (6.45). Следовательно, общее решение (6.47) нашего уравнения содержит в своем составе произвольный скаляр Λ.

З а м е ч а н и е. При $\Lambda=0$ получается единственное решение, расположенное в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$. Это частное решение имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}{a^2}. \tag{6.48}$$

Задача 21. Определение вектора по скалярному произведению. Требуется определить неизвестный вектор $\boldsymbol{r}$ из уравнения

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda. \tag{6.49}$$

Пусть $\boldsymbol{r}$ есть решение этого уравнения. Умножив его векторно на $\boldsymbol{a}$, мы получим некоторый вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}.$$

На основании найденной выше формулы (6.46) мы найдем теперь

$$\boldsymbol{r} = \frac{\lambda \boldsymbol{a}}{a^2} + \frac{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}}{a^2}.$$

Обозначив $\boldsymbol{b}/a^2 = \boldsymbol{B}$, получим следующую формулу для решения:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\lambda \boldsymbol{a}}{a^2} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{a}. \tag{6.50}$$

Нетрудно убедиться, что при любом векторе $\boldsymbol{B}$ (даже не обязательно перпендикулярном к $\boldsymbol{a}$) полученный вектор $\boldsymbol{r}$ удовлетворяет уравнению (6.49). Таким образом, общее решение (6.50) нашего уравнения содержит в своем составе произвольный вектор $\boldsymbol{B}$.

Задача 22. Определение вектора по трем скалярным произведениям. Требуется определить неизвестный вектор $\boldsymbol{r}$ из системы трех уравнений

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} = \alpha, \quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r} = \beta, \quad \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r} = \gamma, \tag{6.51}$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — три некомпланарных вектора.

Умножив скалярно первое уравнение на $\boldsymbol{b}$, второе уравнение на $-\boldsymbol{a}$ и сложив их, получим

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{b}\alpha - \boldsymbol{a}\beta,$$

или

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{r} = \alpha \boldsymbol{b} - \beta \boldsymbol{a}. \tag{6.52}$$

Полученное уравнение вместе с третьим уравнением исходной системы

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r} = \gamma$$

образует систему рассмотренного выше типа (6.43). Ее решение (6.44) будет иметь вид

$$\boldsymbol{r} = \gamma \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}} + \frac{(\alpha \boldsymbol{b} - \beta \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}, \tag{6.53}$$

или

$$\boldsymbol{r} = \frac{\alpha (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \beta (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \gamma (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}. \tag{6.54}$$

Задача 23. Определение вектора $\boldsymbol{r}$ из уравнения

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}, \tag{6.55}$$

где векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и скаляр λ известны. Умножив скалярно наше уравнение на вектор $\boldsymbol{a}$, мы получим

$$\lambda \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b},$$

откуда

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\lambda}. \tag{6.56}$$

Умножим теперь исходное уравнение (6.55) векторно на тот же вектор $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \tag{6.57}$$

Развернув векторно-векторное произведение в получившемся уравнении, мы получим

$$\boldsymbol{r} a^2 - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}) + \lambda (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \tag{6.58}$$

Заменив векторное произведение $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}$ его выражением из исходного уравнения (6.55), а скалярное произведение $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}$ — найденным выше его значением (6.56), мы получим

$$\boldsymbol{r} a^2 - \boldsymbol{a} \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{\lambda} + \lambda (\lambda \boldsymbol{r} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a},$$

откуда

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \lambda^2 \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}}{\lambda (a^2 + \lambda^2)}.$$

Задача 24. Определение коэффициентов разложения. Требуется определить неизвестные скаляры x, y, z из уравнения

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}, \tag{6.59}$$

где три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и вектор $\boldsymbol{R}$ считаются известными.

Умножая наше уравнение последовательно на $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \\ (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) &= y(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}), \\ (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= z(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

Отсюда находим

$$x=\frac{(\boldsymbol{R},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\quad y=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{R},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\quad z=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{R})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}. \qquad (6.61)$$

§ 6. Геометрические инварианты фигур

1. В геометрии с каждой фигурой связываются различные скалярные величины и геометрические образы, характеризующие геометрические свойства фигуры. Так, с треугольником связывается ряд скаляров: его углы, длины сторон, площадь и т. д., а также ряд геометрических образов: биссектрисы углов, медианы, вписанная и описанная окружности и т. д.

Все такие скаляры и образы, связанные с фигурой, характеризуются двумя особенностями:

1) каждый из них однозначно определяется рассматриваемой фигурой и не зависит ни от способа задания этой фигуры, ни от ее расположения относительно других фигур в пространстве;

2) если перемещать фигуру как твердое тело, то связанные с ней скаляры не будут меняться, а присоединенные к ней геометрические образы будут перемещаться вместе с фигурой, не меняя своего относительного расположения. Скаляры и геометрические образы, обладающие указанными особенностями, называют *геометрическими инвариантами фигуры.*

В аналитической геометрии фигуру определяют при помощи системы координат. При этом определяется и ее положение в пространстве относительно взятой системы координат.

Часто фигуру определяют заданием той или иной системы ее скалярных инвариантов, достаточной для определения фигуры как твердого тела. Такая система скалярных инвариантов называется *полной.* При помощи нее можно определить все другие инварианты системы. Однако следует иметь в виду, что *полная система инвариантов определяет фигуру как твердое тело, но не определяет ее положения в пространстве.* Именно так задаются фигуры в элементарной геометрии. Например, треугольник там задается той или иной системой трех независимых инвариантов: длинами трех сторон или длинами двух сторон и углом между ними и т. д. В курсах элементарной геометрии и тригонометрии уделяется большое внимание «решению треугольников», т. е. определению различных инвариантов треугольника при помощи той или иной системы трех независимых инвариантов.

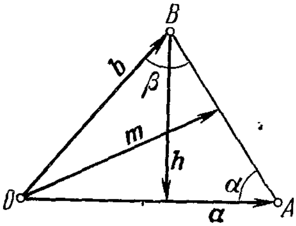

Рис. 72.

Мы рассмотрим векторные методы определения инвариантов простейших фигур: треугольника, тетраэдра и гексаэдра.

2. Треугольник. Пусть два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются сторонами треугольника OAB (рис. 72):

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}. \tag{6.62}$$

Этими двумя векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, исходящими из точки O, треугольник OAB полностью определяется. Все инварианты и вспомогательные векторы этого треугольника выразятся через данные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Найдем для примера несколько таких выражений.

а) Длина стороны AB:

$$AB=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{a^2+b^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}. \tag{6.63}$$

б) Угол:

$$\cos\widehat{OAB}=\frac{-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})}{a\,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}=\frac{a^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{a\sqrt{a^2+b^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}}. \tag{6.64}$$

в) Площадь:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}. \tag{6.65}$$

г) Вектор-высота $\boldsymbol{h}$, исходящий из вершины B:

$$\boldsymbol{h}=\overrightarrow{\text{Пр}}_{a}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^0(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0)-\boldsymbol{b},$$

т. е.

$$\boldsymbol{h}=\frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{a^2}-\boldsymbol{b}. \tag{6.66}$$

д) Длина h высоты, опущенной из вершины B:

$$h=\sqrt{\boldsymbol{h}^2}=\sqrt{\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{a^2}+b^2-2\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{a^2}},$$

т е.

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{a}\right)^2}. \qquad (6.67)$$

е) Вектор-биссектриса $\boldsymbol{m}$, исходящий из вершины O. С одной стороны, $\boldsymbol{m} = \lambda(\boldsymbol{a}^0 + \boldsymbol{b}^0)$, с другой стороны, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} + \mu(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. Сравнив эти два выражения, найдем $\lambda = \frac{ab}{a+b}$. Следовательно.

$$\boldsymbol{m} = \frac{b\boldsymbol{a} + a\boldsymbol{b}}{a+b}. \qquad (6.68)$$

ж) Длина m биссектрисы, исходящей из вершины O:

$$m = \sqrt{\boldsymbol{m}^2} = \frac{\sqrt{2b^2a^2 - 2ab\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}}{a+b}. \qquad (6.69)$$

Замечание. Мы видим, что в полном соответствии с общей теорией (см. гл. V, § 3) *все скалярные инварианты треугольника выражаются через попарные скалярные произведения данных векторов*, т. е. через

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2; \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^2, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

3. Полные системы инвариантов треугольника. Мы рассмотрим несколько полных систем инвариантов треугольника OAB и покажем, как через них выражаются скалярные произведения $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{b}^2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, через которые в свою очередь, выражаются все остальные инварианты треугольника.

а) Треугольник OAB задан длинами двух сторон $OA = a$, $OB = b$ и углом $\varphi = \widehat{AOB}$ между ними.

В этом случае получим

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2; \ \boldsymbol{b}^2 = b^2; \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi. \qquad (6.70)$$

При помощи этих формул можно рассчитать любой инвариант, предварительно выраженный через скалярные произведения. Например, длина высоты h будет равна (см. (6.67))

$$h = \sqrt{b^2 - b^2\cos^2\varphi} = b\sin\varphi. \qquad (6.71)$$

б) Треугольник OAB задан длинами трех сторон $OA = a$, $OB = b$, $AB = c$. В этом случае мы получим

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{b}^2 = b^2. \qquad (6.72)$$

Для вычисления скалярного произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ мы, возведя в квадрат векторное равенство

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a},$$

получим

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

откуда

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}. \tag{6.73}$$

Следовательно, *все инварианты треугольника мы можем выразить сначала через скалярные произведения* $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{b}^2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, *а затем по полученным формулам через длины сторон.*

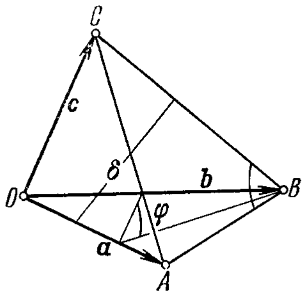

Рис. 73.

в) Треугольник OAB задан стороной $AB = c$ и прилежащими к ней углами $\widehat{OAB} = \alpha$, $\widehat{OBA} = \beta$. Для вычисления скалярных произведений $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ проще всего сначала по теореме синусов определить длины остальных сторон:

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \tag{6.74}$$

а затем вычислить указанные произведения:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}^2 &= \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}, \quad \boldsymbol{b}^2 = \frac{c^2\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}, \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.75}$$

4. Тетраэдр. Пусть три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, исходящих из общего начала O, являются ребрами тетраэдра $OABC$ (рис. 73):

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}. \tag{6.76}$$

Этими тремя векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, исходящими из точки O, тетраэдр $OABC$ полностью определяется. Все его инварианты и инвариантные векторы выразятся через данные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. При этом скалярные инварианты (гл. V, § 3) должны выражаться только через попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Найдем для примера несколько таких выражений.

а) Длина ребра AB:

$$AB = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}. \tag{6.77}$$

б) Плоский угол ABC:

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}^2}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\,\sqrt{\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}}. \tag{6.78}$$

в) Двугранный угол φ при ребре OA:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|} = \frac{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\,\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2}}. \tag{6.79}$$

г) Объем тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6}\,|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}}. \tag{6.80}$$

д) Угол ψ между ребром OA и гранью OBC:

$$\sin\psi = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}{a\,|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|} = \frac{1}{a\sqrt{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2}}\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}}. \tag{6.81}$$

е) Кратчайшее расстояние δ между ребрами OA и BC:

$$\delta = |\text{Пр}_{\boldsymbol{N}}\overrightarrow{OB}| = \overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{N}^0,$$

где

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2-[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]^2}} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}}. \tag{6.82}$$

Замечание. Мы видим, что в полном соответствии с общей теорией (гл. V, § 3) *все найденные скалярные инварианты тетраэдра выразились через попарные скалярные произведения определяющих тетраэдр векторов.*

5. Полные системы инвариантов тетраэдра. Рассмотрим три такие системы.

а) Заданы длины всех ребер тетраэдра $OABC$ (рис. 74): $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $AB = c_1$, $BC = a_1$, $CA = b_1$.

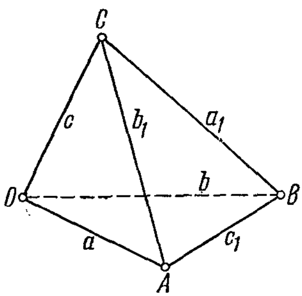

Рис. 74.

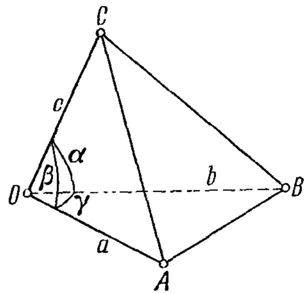

Рис. 75.

Из треугольников OAB, OBC, OAC мы находим по этим данным все необходимые попарные скалярные произведения:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a}^2 = a^2; \quad \boldsymbol{b}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{c}^2 = c^2, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{a^2 + b^2 - c_1^2}{2}, \\ &\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2}, \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{c^2 + a^2 - b_1^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.83}$$

По скалярным произведениям мы можем вычислить все инварианты тетраэдра (см. п. 4).

б) Заданы длины ребер, исходящих из вершины O тетраэдра $OABC$ и плоские углы при этой вершине (рис. 75)

$$OA = a, \ OB = b, \ OC = c,$$

$$\widehat{BOC} = \alpha, \quad \widehat{COA} = \beta; \quad \widehat{AOB} = \gamma.$$

Из треугольников OAB, OBC, OCA мы находим все необходимые скалярные произведения:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{b}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{c}^2 = c^2; \\ &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\gamma, \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = bc\cos\alpha, \quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = ca\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{6.84}$$

в) Заданы длины пяти ребер тетраэдра и двугранный угол против незаданного ребра:

$$OA = a;\ OB = b,\ OC = c,\ AC = b_1;\ BC = a_1,\ \varphi,$$

где φ — двугранный угол при ребре OC.

Непосредственно находим:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{a}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{b}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{c}^2 = c^2, \\ &\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \frac{a^2 + c^2 - b_1^2}{2}; \quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.85}$$

Таким образом, остается определить скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. С этой целью сначала определим векторы

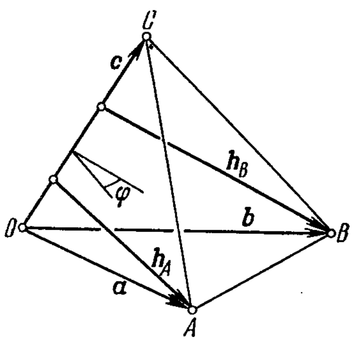

Рис. 76.

$\boldsymbol{h}_A$ и $\boldsymbol{h}_B$, направленные по высотам треугольников OAC и OBC, опущенным на их общую сторону OC (рис. 76).

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{h}_A = \boldsymbol{a} - \overrightarrow{\text{Пр}}_c\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}^0(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}^0) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\,\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{c^2}, \\ &\boldsymbol{h}_B = \boldsymbol{b} - \overrightarrow{\text{Пр}}_c\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}^0(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}^0) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\,\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{c^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.86}$$

Из этих уравнений находим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{h}_A + \boldsymbol{c}\,\frac{a^2 + c^2 - b_1^2}{2c^2}, \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{h}_B + \boldsymbol{c}\,\frac{b^2 + c^2 - a_1^2}{2c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.87)$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ разложились по трем векторам $\boldsymbol{h}_A$, $\boldsymbol{h}_B$, $\boldsymbol{c}$. При этом

$$\boldsymbol{c}^2 = c^2, \quad \boldsymbol{h}_A \cdot \boldsymbol{c} = 0, \quad \boldsymbol{h}_B \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

Из формул (6.86) для $\boldsymbol{h}_A$ и $\boldsymbol{h}_B$ определяем их квадраты:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{h}_A^2 &= a^2 - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2}{c^2} = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b_1^2)^2}{4c^2}, \\ \boldsymbol{h}_B^2 &= b^2 - \frac{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})^2}{c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a_1^2)^2}{4c^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.88)$$

Учитывая, что угол между векторами $\boldsymbol{h}_A$ и $\boldsymbol{h}_B$ является углом φ, измеряющим данный двугранный угол при ребре OC, мы получим

$$\boldsymbol{h}_A \cdot \boldsymbol{h}_B = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b_1^2)^2}{4c^2}}\sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a_1^2)^2}{4c^2}}\cos\varphi. \qquad (6.89)$$

Теперь, перемножив выражения (6.87) для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы найдем необходимое скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{h}_A \cdot \boldsymbol{h}_B + \frac{(a^2 + c^2 - b_1^2)(b^2 + c^2 - a_1^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{1}{4c^2}\left[\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b_1^2)^2} \times \right. \\ &\quad \times \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a_1^2)^2}\cos\varphi + \\ &\quad \left. + (a^2 + c^2 - b_1^2)(b^2 + c^2 - a_1^2)\right]. \end{aligned} \qquad (6.90)$$

Итак, все необходимые скалярные произведения $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{b}^2$, $\boldsymbol{c}^2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ найдены (см. формулы (6.85) и (6.90)).

Замечание. В рассматриваемом случае можно взять за базисные векторы не $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, а векторы $\boldsymbol{h}_A$, $\boldsymbol{h}_B$, $\boldsymbol{c}$ и через них все выражать.

6. Гексаэдр с треугольными гранями. Такой гексаэдр (шестигранник) $CABOC_1$ состоит из двух тетраэдров $CABO$ и C_1ABO с общим основанием ABO (рис. 77). Оба эти тетраэдра вполне определяются четырьмя векторами:

$$\vec{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \vec{OB} = \boldsymbol{b},$$

$$\vec{OC} = \boldsymbol{c}, \quad \vec{OC_1} = \boldsymbol{c}_1. \qquad (6.91)$$

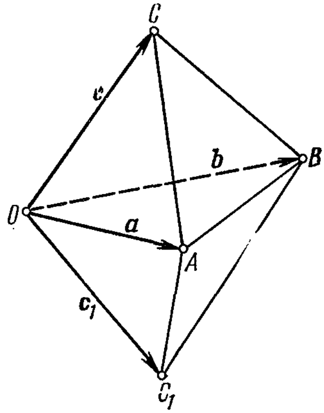

Рис. 77.

Через них и будут выражаться все инварианты гексаэдра. Пусть, например, заданы длины a, b, c, c_1 сторон $\vec{OA} = \boldsymbol{a}, \vec{OB} = \boldsymbol{b}$, $\vec{OC} = \boldsymbol{c}$, $\vec{OC_1} = \boldsymbol{c}_1$ гексаэдра, исходящих из вершины O, и углы AOC, COB, BOA, AOC_1, C_1OB между этими векторами.

Попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}_1$, через которые выражаются все инварианты гексаэдра, находятся в рассматриваемом случае очень просто:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\widehat{AOB}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = ac\cos\widehat{AOC},$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = bc\cos\widehat{BOC}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_1 = ac_1\cos\widehat{AOC_1},$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_1 = bc_1\cos\widehat{BOC_1}.$$

Исключение составляет произведение $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1$, Это произведение можно определить по формуле (5.25)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix}, \qquad (6.92)$$

где смешанные произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1)$ находятся по формуле (4.37).

П р и м е р. Рассматривается гексаэдр $CABOC_1$ с треугольными гранями (рис. 78). Заданы длины ребер, исходящих из вершины O, и углы при этой вершине: $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 4$, $OC_1 = 2\sqrt{2}$, $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} = \widehat{AOB} = 60°$, $\widehat{AOC_1} = \widehat{BOC_1} = 45°$.

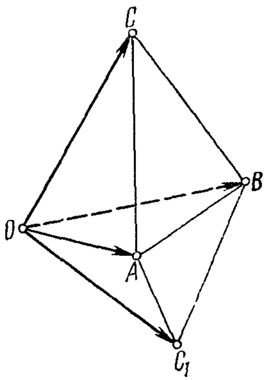

Рис. 78.

Требуется найти расстояние CC_1 между вершинами C и C_1 и угол COC_1.

Так как

$$CC_1 = \sqrt{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_1)^2} = \sqrt{\boldsymbol{c}^2 - 2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_1^2}$$

и

$$\cos\widehat{COC_1} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1}{cc_1},$$

то для решения того и другого вопросов нужно найти произведение $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1$. По формуле (5.25)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix}. \tag{6.93}$$

Смешанные произведения, стоящие в левой части этого уравнения, найдем по формуле (4.37)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm\sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}} = \pm\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix}} = \pm 4\sqrt{2},$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) = \pm 2\sqrt{2}.$$

Так как вершины C и C_1 лежат по разные стороны от плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то одна из троек векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1$ правая, а другая левая. Это значит, что произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1)$ не положительно. Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) = -16.$$

Правую часть уравнения (6.93) преобразуем так:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 - 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 - 4 \end{vmatrix} = 3(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1) - 16.$$

Сравнив результаты, получим уравнение

$$-16 = 3\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1) - 16,$$

из которого найдем

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1 = 0.$$

Отсюда находим

$$CC_1 = \sqrt{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_1)^2} = \sqrt{c^2 + c_1^2} = \sqrt{16 + 8} = 2\sqrt{6},$$

$$\cos \widehat{COC_1} = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}_1}{cc_1} = \frac{0}{4\cdot 2\sqrt{2}} = 0, \quad \widehat{COC_1} = 90^\circ.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава VII

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СКАЛЯРНОМУ АРГУМЕНТУ

§ 1. Векторы, зависящие от скаляра

1. Вектор-функция скаляра. Мы будем рассматривать теперь не только переменные скаляры, но и переменные векторы. Вектор называется *переменным*, если в условиях рассматриваемой задачи он может менять свою длину и свое направление (или хотя бы одну из этих характеристик). Всякое частное положение такого вектора мы будем называть его значением. Следовательно, значение переменного вектора есть определенный вектор.

Определение. Переменный вектор $\boldsymbol{R}$ называется *функцией скалярного аргумента* t, если каждому значению скаляра t из области допустимых значений соответствует определенное значение вектора $\boldsymbol{R}$.

Тот факт, что вектор $\boldsymbol{R}$ является функцией скалярного аргумента t, мы будем записывать так:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t). \tag{7.1}$$

Примерами векторных функций могут служить радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и скорость $\boldsymbol{v}$ движущейся в пространстве точки (рис. 79). Эти векторы являются функциями времени t.

2. Вектор-функция в координатной форме. Если вектор $\boldsymbol{R}$ является функцией скаляра t:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t),$$

то его проекции R_x, R_y, R_z также будут функциями от этого скаляра t:

$$R_x = R_x(t); \quad R_y = R_y(t); \quad R_z = R_z(t). \tag{7.2}$$

Обратно, если проекции вектора являются функциями, то функцией будет и сам вектор:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}R_x(t) + \boldsymbol{j}R_y(t) + \boldsymbol{k}R_z(t). \qquad (7.3)$$

Таким образом, *задание векторной функции* $\boldsymbol{R}(t)$ *равносильно заданию трех скалярных функций* $R_x(t)$, $R_y(t)$, $R_z(t)$.

3. **Годограф вектора.** *Годографом* вектора $\boldsymbol{R}$, являющегося функцией скаляра t, называется геометрическое место точек, которое описывает конец этого вектора $\boldsymbol{R}$ при изменении скаляра t, когда начало вектора $\boldsymbol{R}$ помещено в фиксированную точку O пространства (рис. 80).

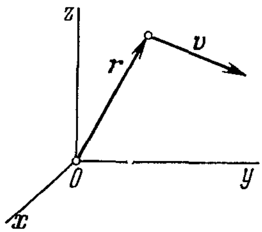

Рис. 79.

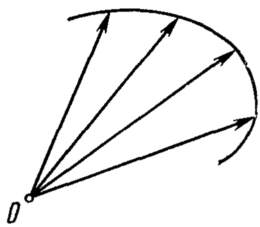

Рис. 80.

Годографом радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ движущейся точки будет сама траектория L этой точки. Годографом же скорости $\boldsymbol{v}$ будет некоторая новая линия L_1 (рис. 81).

Пример. Построим годограф вектора $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}t + \boldsymbol{j}\frac{1}{3}t^2 + \boldsymbol{k}\frac{1}{9}t^3$. Это построение можно вести по точкам, составляя таблицу

t	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{R}$	0	$\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{9}\boldsymbol{k}$	$2\boldsymbol{i} + \frac{4}{3}\boldsymbol{j} + \frac{8}{9}\boldsymbol{k}$	$3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$	$4\boldsymbol{i} + \frac{16}{3}\boldsymbol{j} + \frac{64}{9}\boldsymbol{k}$

Но можно поступить и так: обозначив проекции вектора $\boldsymbol{R}$ на координатные оси через x, y, z, мы получим

$$x = t; \quad y = \frac{1}{3}t^2, \quad z = \frac{1}{9}t^3.$$

Исключив из этих трех уравнений параметр t, мы получим уравнения двух параболических цилиндров:

$$y = \frac{1}{3} x^2, \quad 3z^2 = y^3.$$

Эти цилиндры и пересекаются по нашему годографу (рис. 82).

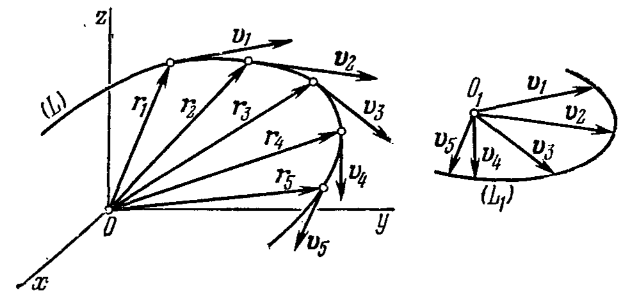

Рис. 81.

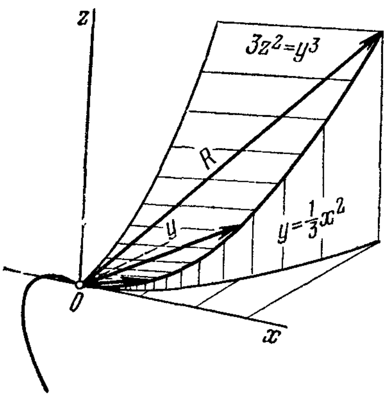

Рис. 82.

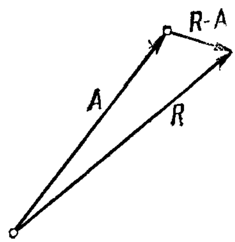

Рис. 83.

4. Предел вектора. Постоянный вектор A называется *пределом переменного вектора* R, если модуль разности между ними в процессе изменения вектора становится и в дальнейшем остается меньше произвольного наперед заданного положительного числа ε (рис. 83).

Таким образом, для заданного ε, начиная с некоторого момента, зависящего от величины ε, будет выполняться неравенство

$$|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}|<\varepsilon. \tag{7.4}$$

Как и в обычном анализе, пишут

$$\lim \boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}. \tag{7.5}$$

Вектор ξ называется бесконечно малым, если его предел равен нулю:

$$\lim \xi = 0. \tag{7.6}$$

З а м е ч а н и е 1. В векторном анализе сохраняются основные теоремы о бесконечно малых и о пределах. Это происходит потому, что: а) определения предела и бесконечно малого вектора вполне аналогичны обычным определениям анализа; б) на векторные операции распространяются законы, аналогичные законам обычной алгебры; в) с модулями векторов можно обращаться, как с абсолютными величинами чисел.

З а м е ч а н и е 2. *Переменный вектор* $\boldsymbol{R}$ *равен сумме своего предела* $\boldsymbol{A}$ *и некоторого бесконечно малого вектора* ξ, т. е. из $\lim \boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}$ следует $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}+\xi$, $\lim \xi = 0$.

З а м е ч а н и е 3. *Предел модуля вектора равен модулю его предела, если последний предел существует.*

Д е й с т в и т е л ь н о, пусть $\lim \boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}$. Зададим $\varepsilon>0$. Тогда, начиная с некоторого момента, будет выполняться неравенство

$$|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}|<\varepsilon.$$

Так как разность двух сторон треугольника меньше третьей стороны, то (см. рис. 83)

$$||\boldsymbol{R}|-|\boldsymbol{A}||<|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A}|.$$

Следовательно, начиная с указанного момента,

$$||\boldsymbol{R}|-|\boldsymbol{A}||<\varepsilon,$$

т. е.

$$\lim |\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{A}|$$

или

$$\lim |\boldsymbol{R}|=|\lim \boldsymbol{R}|. \tag{7.7}$$

5. Непрерывная вектор-функция. Векторная функция скаляра называется *непрерывной*, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} [\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - \boldsymbol{R}(t)] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to T} \boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(T), \tag{7.8}$$

т. е. предел непрерывной функции равен значению этой функции при предельном значении аргумента.

§ 2. Дифференцирование вектора по скаляру

1. Производная вектора по скаляру. *Производной* $\boldsymbol{R}$ *вектора* $\boldsymbol{R}$ (t) *по его скалярному аргументу* t называется предел отношения приращения вектора $\boldsymbol{R}$ к соответствующему приращению скалярного аргумента t, когда приращение этого аргумента стремится к нулю:

$$\boldsymbol{R}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t}. \tag{7.9}$$

Приращение $\Delta\boldsymbol{R}$ вектора $\boldsymbol{R}$ является разностью между измененным значением $\boldsymbol{R}(t+\Delta t)$ вектора и его первоначальным значением $\boldsymbol{R}$ (t):

$$\Delta\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t+\Delta t) - \boldsymbol{R}(t).$$

Если мы поместим начала измененного и начального значений вектора $\boldsymbol{R}$ в одну точку O (рис. 84), то приращение $\Delta\boldsymbol{R}$ вектора $\boldsymbol{R}$ будет вектором, соединяющим конец начального значения с концом измененного.

Совершенно ясно, что производная $\boldsymbol{R}'$ вектора $\boldsymbol{R}$ по скаляру t есть также вектор, являющийся функцией от того же скаляра t.

В дальнейшем будут рассматриваться лишь такие векторные функции скаляра, которые не только непрерывны, но и при рассматриваемых значениях обладают непрерывной производной.

2. Геометрический смысл производной вектора по скаляру. На годографе (рис. 85) вектора $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$ рассмотрим две точки M и M_1, соответствующие исходному

$\boldsymbol{R}(t)$ и измененному $\boldsymbol{R}(t+\Delta t)$ значениям вектора. Вектор $\Delta\boldsymbol{R}$, соединяющий эти точки, является приращением вектора $\boldsymbol{R}$:

$$\Delta\boldsymbol{R} = \overrightarrow{MM_1}.$$

Прямая, проходящая через две точки M и M_1 годографа, называется *секущей годографа*. Предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и бесконечно

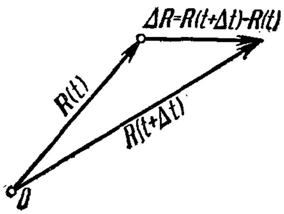

Рис. 84.

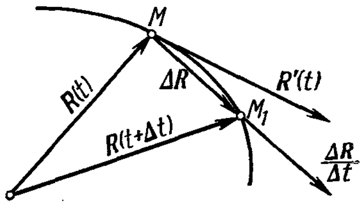

Рис. 85.

близкую точку M_1 годографа, называется *касательной к годографу в данной точке M*.

Отношение приращения $\Delta\boldsymbol{R}$ вектора $\boldsymbol{R}$ к приращению Δt скаляра t есть вектор $\Delta\boldsymbol{R}/\Delta t$, направленный по секущей MM_1 в ту сторону, куда перемещается конец вектора $\boldsymbol{R}$ при возрастании скаляра t.

При стремлении приращения аргумента Δt к нулю точка M_1 безгранично приближается к точке M, а секущая, проходящая через эти точки, безгранично приближается к касательной в точке M. Следовательно, вектор $\Delta\boldsymbol{R}/\Delta t$, расположенный на секущей, имеет своим пределом вектор

$$\boldsymbol{R}' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta t},$$

расположенный на касательной.

Итак, *производная вектора по его скалярному аргументу есть вектор, направленный по касательной к годографу исходного вектора в рассматриваемой точке.*

При этом важно подчеркнуть, что производная направлена по касательной в ту сторону, куда перемещается конец вектора по годографу, когда параметр растет.

3. **Механический смысл производной.** Пусть $\boldsymbol{r}$ есть радиус-вектор движущейся в пространстве точки. Он будет функцией времени t. Рассмотрим два положения этой точки, соответствующие начальному и бесконечно близкому моментам времени t и $t+\Delta t$. Обозначим эти положения M и M_1 (рис. 86). Перемещение точки из начального положения M в новое положение M_1 характеризуется приращением радиуса-вектора точки $\boldsymbol{r}$:

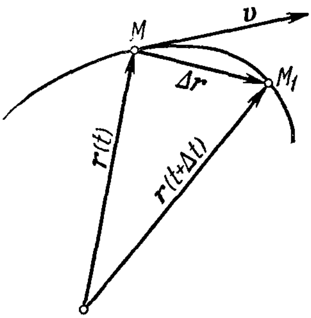

Рис. 86.

$$\overrightarrow{MM_1}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta \boldsymbol{r}.$$

Отношение $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ приращения $\Delta \boldsymbol{r}$ ко времени Δt, за которое это приращение произошло, называется *средней скоростью перемещения точки*. Ее предел при $\Delta t\to 0$ есть вектор $\boldsymbol{v}$, который и принимается за скорость точки в данный момент.

Итак, *производная радиуса-вектора движущейся точки по времени есть скорость этой точки в данный момент*:

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\boldsymbol{r}'. \tag{7.10}$$

З а м е ч а н и е. Производную $R'(t)$ вектора $\boldsymbol{R}$ по скалярному аргументу t всегда можно истолковать как скорость конца вектора $\boldsymbol{R}$ при условии, что его начало находится в фиксированной точке, а аргумент t рассматривается как время.

4. *Правила дифференцирования вектора по скаляру совпадают с правилами обычного дифференциального исчисления* по следующим причинам:

а) определение производной вектора по скаляру совпадает с обычным определением;

б) теоремы о пределах векторных выражений не отличаются от обычных теорем о пределах;

в) векторные алгебраические операции подчиняются обычным законам алгебры (кроме переместительности векторного произведения).

Таким образом, мы получаем следующие правила дифференцирования:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})'=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{w}', \tag{7.11}$$

$$(\varphi\boldsymbol{u})'=\varphi'\boldsymbol{u}+\varphi\boldsymbol{u}', \tag{7.12}$$

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}', \tag{7.13}$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}', \tag{7.14}$$

$$\{\boldsymbol{R}[t(s)]\}'_s=\boldsymbol{R}'_t t'_s. \tag{7.15}$$

Для примера мы проверим справедливость правила дифференцирования векторного произведения. Пусть

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.$$

Дадим скалярному аргументу t приращение Δt; тогда функции $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{R}$ также получат приращения Δu, Δv, ΔR. При этом

$$\boldsymbol{R}+\Delta\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})\times(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}).$$

Отсюда

$$\Delta\boldsymbol{R}=\boldsymbol{u}\times\Delta\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{u}\times\Delta\boldsymbol{v}.$$

Деление на Δt дает

$$\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta t}=\boldsymbol{u}\times\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}\times\boldsymbol{v}+\frac{\Delta\boldsymbol{u}}{\Delta t}\times\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\Delta t,$$

откуда, перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}'\times\boldsymbol{v}.$$

5. Дифференциал вектора. *Дифференциалом векторной функции* $\boldsymbol{R}$ *скалярного аргумента* t называется произведение производной от этой функции по ее скалярному аргументу на дифференциал этого аргумента, т. е.

$$d\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'_t\,dt. \tag{7.16}$$

Дифференциал векторной функции, как и ее производная, есть вектор, направленный по касательной к годографу.

Из формулы (7.16) для дифференциала мы получаем

$$\boldsymbol{R}'_t=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}, \tag{7.17}$$

т. е. *производная вектора по скалярному аргументу равна отношению дифференциала вектора к дифференциалу аргумента.*

6. Инвариантность дифференциала. *Дифференциал вектора инвариантен относительно любых преобразований скалярного аргумента.*

Действительно, пусть

$$t = t(s).$$

Тогда

$$dt = t'_s\,ds$$

и, следовательно,

$$d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'_t t'_s\,ds.$$

Но

$$\boldsymbol{R}'_t t'_s = \boldsymbol{R}'_s.$$

Следовательно,

$$d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'_s\,ds. \tag{7.18}$$

7. Связь дифференциала вектора с его приращением. Пусть t — независимый аргумент. По определению производной вектора

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t} = \boldsymbol{R}'_t.$$

Но так как переменная отличается от своего предела на бесконечно малую величину, то

$$\frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t} = \boldsymbol{R}'_t + \xi,$$

где ξ — бесконечно малый вектор. Следовательно,

$$\Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'_t \Delta t + \xi \Delta t.$$

Имея в виду, что t — независимая переменная и, следовательно, $\Delta t = dt$, мы получим

$$\Delta \boldsymbol{R} = d\boldsymbol{R} + \xi \Delta t, \tag{7.19}$$

причем

$$\lim \xi = \mathbf{0}.$$

Итак, *если приращение скалярного аргумента бесконечно мало, то дифференциал вектора отличается от приращения вектора на бесконечно малую величину высшего порядка малости по отношению к приращению аргумента.*

§ 3. Формула Тейлора

1. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная $\boldsymbol{R}'(t)$ векторной функции $\boldsymbol{R}(t)$ скалярного аргумента является векторной функцией того же аргумента, которую опять можно дифференцировать. Как и в обычном анализе, производная от производной $\boldsymbol{R}'$ называется *производной второго порядка* и обозначается $\boldsymbol{R}''$, производная от производной второго порядка называется *производной третьего порядка* и обозначается $\boldsymbol{R}'''$ и т. д.:

$$(\boldsymbol{R}')' = \boldsymbol{R}'', \quad (\boldsymbol{R}'')' = \boldsymbol{R}''', \ldots, (\boldsymbol{R}^{(n-1)})' = \boldsymbol{R}^{(n)}, \ldots$$

Аналогичным путем определяются дифференциалы второго порядка, третьего порядка и т. д.:

$$d(d\boldsymbol{R}) = d^2\boldsymbol{R}, \quad d(d^2\boldsymbol{R}) = d^3\boldsymbol{R}, \ldots, \quad d(d^{\,n-1}\boldsymbol{R}) = d^n\boldsymbol{R}, \ldots$$

2. Формула Тейлора. Векторную функцию $\boldsymbol{R}(t)$ скалярного аргумента t разложим по координатным ортам:

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{i}X(t) + \boldsymbol{j}Y(t) + \boldsymbol{k}Z(t).$$

Предположим, что при данном значении t аргумента скалярные функции $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ обладают производными до порядка n включительно. Тогда к ним можно применить формулу Тейлора:

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \frac{\Delta t}{1!}X'(t) + \ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}X^{(n)}(t) + (\Delta t)^n\alpha_n,$$

$$Y(t+\Delta t) = Y(t) + \frac{\Delta t}{1!}Y'(t) + \ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}Y^{(n)}(t) + (\Delta t)^n\beta_n,$$

$$Z(t+\Delta t) = Z(t) + \frac{\Delta t}{1!}Z'(t) + \ldots + \frac{(\Delta t)^n}{1!}Z^{(n)}(t) + (\Delta t)^n\gamma_n,$$

причем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha_n = 0, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\beta_n = 0, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\gamma_n = 0.$$

Умножив эти равенства соответственно на $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и сложив, получим

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t) = \boldsymbol{R}(t) + \frac{\Delta t}{1!}\boldsymbol{R}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{R}''(t) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{R}^{(n)}(t) + (\Delta t)^n(\boldsymbol{i}\alpha_n + \boldsymbol{j}\beta_n + \boldsymbol{k}\gamma_n).$$

Это и есть формула Тейлора для векторной функции. Положив

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t)-\boldsymbol{R}(t)=\Delta\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{i}\alpha_n+\boldsymbol{j}\beta_n+\boldsymbol{k}\gamma_n=\frac{1}{n!}\xi_n,$$

мы представим формулу Тейлора в виде

$$\Delta\boldsymbol{R}=\frac{\Delta t}{1!}\boldsymbol{R}'(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{R}''(t)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{R}^{(n)}(t)+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\xi_n, \tag{7.20}$$

причем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\xi_n=0.$$

Заметим, что формулу Тейлора можно записать и в дифференциальной форме:

$$\Delta\boldsymbol{R}=\frac{1}{1!}d\boldsymbol{R}+\frac{1}{2!}d^2\boldsymbol{R}+\frac{1}{3!}d^3\boldsymbol{R}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}d^n\boldsymbol{R}+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\xi_n. \tag{7.21}$$

Глава VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Основные дифференциально-геометрические понятия, связанные с линией

1. Параметризованная линия. Если задана линия, то можно представить себе, что по этой линии с течением времени движется текущая точка M (рис. 87). В каждый момент времени t эта точка M занимает определенное положение на линии, т. е. время t играет роль параметра, определяющего положение точки на линии. Это значит, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки M является функцией параметра t:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

Обратно, если радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки M задан как функция $\boldsymbol{r}(t)$ какого-либо скалярного параметра t

то его конец будет описывать линию. Иначе говоря, *линия будет определена как годограф векторной функции* $\boldsymbol{r}(t)$.

Определение. Линия называется *параметризованной*, если радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ ее текущей точки M определен как непрерывная функция скалярного параметра t, изменяющегося в некотором промежутке (a, b):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad a < t < b. \tag{8.1}$$

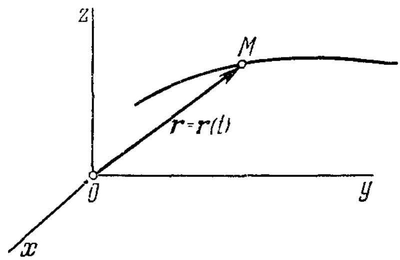

Рис. 87.

При этом предполагается, что эта функция $\boldsymbol{r}(t)$ обладает в промежутке (a, b) непрерывными производными первого, второго и третьего порядков, которые обозначаются одним из трех способов:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}' = \dot{\boldsymbol{r}}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{r}'' = \ddot{\boldsymbol{r}}, \quad \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} = \boldsymbol{r}''' = \dddot{\boldsymbol{r}}. \tag{8.2}$$

Уравнение (8.1), выражающее зависимость радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки M линии от параметра t, называется *векторным уравнением линий*. Заметим, что вместо «линия» часто говорят «кривая линия» или просто «кривая».

Если преобразовать параметр t, к которому отнесена линия

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$$

в новый параметр t_1, положив

$$t = \varphi(t_1),$$

то получится новое уравнение той же линии:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi(t_1)).$$

Таким образом, *одна и та же линия может определяться различными уравнениями.*

Например, уравнения

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\cos t + \boldsymbol{j}\sin t, \qquad 0 < t < \pi,$$

и

$$r = it_1 + j\sqrt{1-t_1^2}, \quad 0 < t_1 < 1,$$

определяют одну и ту же полуокружность (рис. 88). Параметры t и t_1 связаны в данном случае соотношением

$$t_1 = \cos t.$$

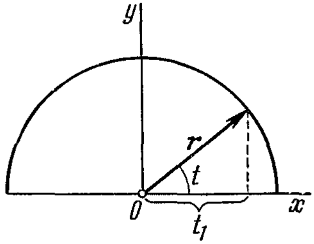

Рис. 88.

Заметим, что различные уравнения одной и той же линии можно истолковывать как различные законы движения точки по одной и той же траектории.

Спроектировав радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки линии на координатные оси, мы получим систему координатных уравнений линии

$$x = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{r}(t), \quad y = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{r}(t), \quad z = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}(t). \tag{8.3}$$

Эти уравнения определяют координаты текущей точки линии как функции параметра t.

Обратно, если такие функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ заданы, то определится векторное уравнение линии:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,x(t) + \boldsymbol{j}y(t) + \boldsymbol{k}z(t). \tag{8.4}$$

2. Касательная. Простейшим дифференциально-геометрическим понятием, связанным с линией, является уже встречавшееся нам (гл. VII, § 2, п. 2) понятие касательной.

Определение. *Касательной к линии в данной ее точке* называется предельное положение секущей, проходящей через данную точку M и бесконечно близкую к ней точку линии.

Как было показано (гл. VII, § 2, п. 2), справедлива следующая

Теорема. *Производная $\boldsymbol{r}'(t)$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ текущей точки линии по ее параметру есть вектор, направленный по соответствующей касательной в сторону роста параметра t.*

Таким образом, производная $\boldsymbol{r}'(t)$ определяет соответствующую касательную, если только эта производная существует и отлична от нуля:

$$\boldsymbol{r}'(t) \neq 0. \tag{8.5}$$

В дальнейшем это всегда будет предполагаться.

З а м е ч а н и е. Вектор $\Delta\boldsymbol{r}$, соединяющий исходную точку $M\,[\boldsymbol{r}(t)]$ с соседней точкой $M\,[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)]$, разложим по формуле Тейлора (7.20), положив в ней $n = 1$:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \frac{\Delta t}{1!}\,\boldsymbol{r}'(t) + \frac{\Delta t}{1!}\,\xi_1. \tag{8.6}$$

Мы видим, что вектор смещения $\Delta\boldsymbol{r}$ слагается из вектора $\Delta t\,\boldsymbol{r}'(t)$, расположенного на касательной, и добавочного вектора $\Delta t\,\xi_1$. Касательный вектор $\Delta t\,\boldsymbol{r}'(t)$ имеет одинаковый порядок малости с Δt, добавочный вектор $\Delta t\,\xi_1$ имеет более высокий порядок малости. Следовательно, можно считать, что *кривая в первом приближении сливается со своей касательной в достаточно малой окрестности точки касания* (рис. 89).

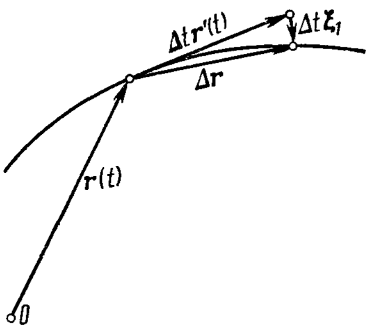

Рис. 89.

3. Соприкасающаяся плоскость. О п р е д е л е н и е. *Соприкасающейся плоскостью кривой в данной точке M* называется предельное положение плоскости, проходящей через касательную в данной точке M и через бесконечно близкую к M точку кривой.

Из определения соприкасающейся плоскости непосредственно вытекает, что *соприкасающаяся плоскость плоской кривой* (не прямой) *совпадает всегда с плоскостью, в которой эта линия расположена.*

Т е о р е м а. *Производные первого и второго порядков* $\boldsymbol{r}'(t)$ *и* $\boldsymbol{r}''(t)$ *радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}(t)$ *текущей точки кривой располагаются в соответствующей соприкасающейся плоскости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Проведем плоскость $\mathcal{P}$ через касательную в данной точке $M\,[\boldsymbol{r}(t)]$ и соседнюю к ней точку $M_1\,[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)]$ (рис. 90).

В этой плоскости $\mathscr{P}$ будут лежать векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\overrightarrow{MM_1} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$. Воспользовавшись формулой Тейлора (7.20) при $n = 2$, мы получим

$$\Delta\boldsymbol{r} = \frac{\Delta t}{1!}\boldsymbol{r}'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}[\boldsymbol{r}''(t) + \xi_2], \quad \lim_{\Delta t\to 0}\xi_2 = 0. \qquad (8.7)$$

Отсюда находим

$$\boldsymbol{r}''(t) + \xi_2 = \frac{2}{\Delta t^2}[\Delta\boldsymbol{r} - \Delta t\,\boldsymbol{r}'].$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{r}''(t) + \xi_2$ разлагается по векторам $\Delta\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'(t)$, лежащим в рассматриваемой плоскости $\mathscr{P}$, а следовательно, и сам он лежит в этой плоскости $\mathscr{P}$.

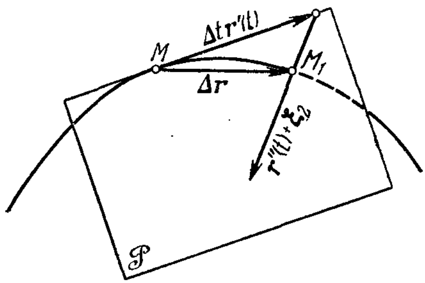

Рис. 90.

При стремлении Δt к нулю плоскость $\mathscr{P}$ будет стремиться к соприкасающейся плоскости. Следовательно, расположенные в $\mathscr{P}$ векторы $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t) + \xi_2$ будут иметь своими пределами векторы $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}'(t)$ и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{r}''(t) + \xi_2) = \boldsymbol{r}''(t)$, расположенные в соприкасающейся плоскости. Теорема доказана.

Таким образом, производные $\boldsymbol{r}'(t)$ и $\boldsymbol{r}''(t)$ первого и второго порядков от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ текущей точки определяют соответствующую соприкасающуюся плоскость, если только эти производные не коллинеарны, т. е.

$$\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \neq 0. \qquad (8.8)$$

В дальнейшем это всегда будет предполагаться

З а м е ч а н и е. Рассмотрим какую-либо точку $M\,[\boldsymbol{r}\,(t)]$ и соседнюю точку $M\,[\boldsymbol{r}\,(t+\Delta t)]$ на нашей линии $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(t)$ и разложим вектор смещения $\overrightarrow{MM_1}=\Delta\boldsymbol{r}$ по формуле Тейлора:

$$\Delta\boldsymbol{r}=\frac{\Delta t}{1!}\,\boldsymbol{r}'(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\,\boldsymbol{r}''(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\,\xi_2,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\xi_2=0. \qquad (8.9)$$

Мы видим, что вектор смещения $\Delta\boldsymbol{r}$ слагается из вектора $\Delta t\boldsymbol{r}'(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\boldsymbol{r}''(t)$, расположенного в соприкасающейся плоскости, и добавочного вектора $\frac{(\Delta t)^2}{2!}\xi_2$. Но этот добавочный вектор является бесконечно малым вектором

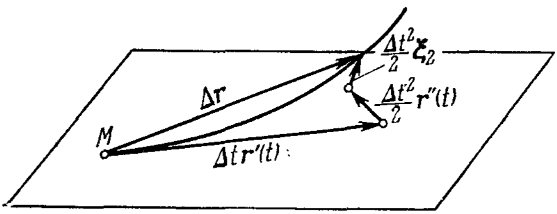

Рис. 91.

более высокого порядка малости, чем $(\Delta t)^2$. Следовательно, *пространственная кривая в ближайшей окрестности исходной точки M весьма мало отклоняется от соприкасающейся плоскости и «в главном» лежит в этой плоскости* (рис. 91).

4. Главная нормаль и бинормаль. Всякая прямая, проходящая через данную точку M пространственной кривой и перпендикулярная касательной в этой точке, называется *нормалью*. *Главной нормалью пространственной кривой в данной точке* называется та нормаль, которая лежит в соприкасающейся плоскости. *Бинормалью* называется та нормаль, которая перпендикулярна соприкасающейся плоскости (рис. 92).

З а м е ч а н и е. Из доказанных теорем следует, что в точке $M\,[\boldsymbol{r}\,(t)]$ линии

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\,(t) \qquad (8.10)$$

касательная определяется вектором

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}'(t), \tag{8.11}$$

бинормаль определяется вектором

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t), \tag{8.12}$$

Главная нормаль определяется вектором

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t)] \times \boldsymbol{r}'(t). \tag{8.13}$$

5. Кривизна. Рассмотрим на линии точку M и касательную в ней (рис. 93). При переходе в соседнюю точку M_1

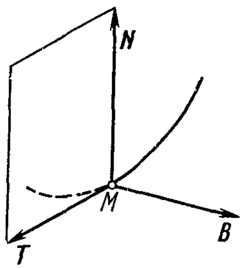

Рис. 92.

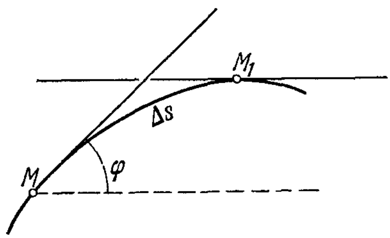

Рис. 93.

касательная повернется на некоторый угол φ. Отношение $\varphi / |\Delta s|$ этого угла φ к длине $|\Delta s|$ дуги MM_1 называется *средней кривизной дуги* MM_1. Оно характеризует в среднем степень изогнутости дуги MM_1. Ясно, что дуга MM_1 в различных своих точках может быть изогнута различно. Однако чем меньше дуга MM_1, тем точнее средняя кривизна определит степень изогнутости в каждой точке этой дуги.

Определение. *Кривизной K линии в данной точке M* называется предел отношения угла φ поворота касательной при переходе из данной точки M в бесконечно близкую точку M_1 к бесконечно малой длине $|\Delta s|$ дуги, заключенной между этими точками:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|}. \tag{8.14}$$

В качестве примера найдем кривизну окружности радиуса R (рис. 94). Для этого возьмем на ней две точки M

и M_1. Угол между касательными к окружности равен углу φ между радиусами OM и OM_1, проведенными в точки касания. С другой стороны, длина $|\Delta s|$ дуги окружности равна произведению радиуса R на радианную меру φ центрального угла, опирающегося на эту дугу:

$$|\Delta s| = R\varphi.$$

Поэтому

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{R\varphi} = \frac{1}{R}.$$

Итак, кривизна окружности в любой ее точке есть величина, обратная радиусу окружности:

$$K = \frac{1}{R}. \tag{8.15}$$

6. Кручение. Рассмотрим на линии точку M и соприкасающуюся плоскость в ней (рис. 95). При переходе

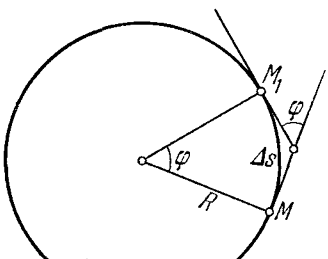

Рис. 94.

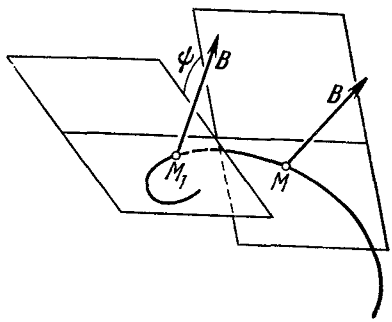

Рис. 95.

в соседнюю точку M_1 соприкасающаяся плоскость повернется на некоторый угол ψ. Отношение этого угла ψ к длине $|\Delta s|$ дуги MM_1 называется *средним кручением дуги* MM_1. Оно характеризует в среднем степень отклонения пространственной кривой от плоской. Уменьшая дугу MM_1, мы естественным образом придем к следующему понятию кручения кривой в данной точке.

О п р е д е л е н и е. *Кручением T кривой в данной ее точке M* называется взятый с надлежащим знаком предел отношения угла ψ поворота соприкасающейся плоскости при переходе из данной точки M в бесконечно близкую к ней точку кривой к бесконечно малой длине $|\Delta s|$ дуги, заключенной между этими точками.

При этом кручение считается *положительным*, если при движении вдоль кривой соприкасающаяся плоскость совершает правовинтовое движение, и *отрицательным* в противном случае.

Таким образом, абсолютная величина кручения определяется формулой

$$|T| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi}{|\Delta s|}. \tag{8.16}$$

Заметим, что вместо угла поворота ψ соприкасающейся плоскости можно брать равный ему угол поворота бинормали. Заметим также, что из определения следует равенство нулю кручения любой плоской кривой (но не прямой!).

7. Длина дуги. При определении кривизны и кручения кривой мы фактически уже пользовались понятием длины дуги кривой линии. Теперь мы это понятие строго определим и выведем формулу для вычисления длины дуги при помощи интеграла.

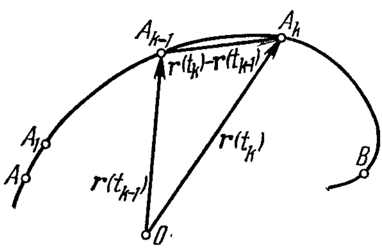

Рис. 96.

Пусть соответствие между точками дуги AB линии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

и значениями параметра из соответствующего отрезка $[\alpha, \beta]$ его изменения является взаимно однозначным (правильная параметризация). Кроме того, как всегда, будем предполагать, что производная $\boldsymbol{r}'(t)$ существует и непрерывна. Разобьем дугу AB произвольным способом на n частей точками $A_1\,[\boldsymbol{r}(t_1)], \ldots, A_{n-1}\,[\boldsymbol{r}(t_{n-1})]$. Соединив соседние точки хордами, получим вписанную ломаную (рис. 96).

Определение. *Длиной L дуги линии* называется предел длины вписанной в нее ломаной при условии, что число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а максимум их длин стремится к нулю:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{r}(t_k) - \boldsymbol{r}(t_{k-1})|, \tag{8.17}$$

причем считается, что $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$.

Разложив вектор $\boldsymbol{r}(t)$ по ортам координатных осей:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}x(t) + \boldsymbol{j}y(t) + \boldsymbol{k}z(t),$$

получим

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + \\ + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2\}^{1/2}.$$

Применив к каждой из получившихся разностей формулу конечного приращения Лагранжа

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \qquad (a < c < b),$$

найдем

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x'(\tilde{t}_k)]^2 + [y'(\tilde{\tilde{t}}_k)]^2 + [z'(\tilde{\tilde{\tilde{t}}}_k)]^2}\ (t_k - t_{k-1}).$$

Мы получили предел интегральной суммы (с тем несущественным обобщением, что на частичном отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ берется не одна, а три опорные точки $\tilde{t}_k$, $\tilde{\tilde{t}}_k$, $\tilde{\tilde{\tilde{t}}}_k$ (см. гл. XIII, § 6), который равен определенному интегралу:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt. \tag{8.18}$$

Возвращаясь к векторным обозначениям, мы получим следующую формулу для длины дуги линии:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt. \tag{8.19}$$

Теорема. *Предел отношения бесконечно малой дуги к стягивающей ее хорде равен единице.*

Доказательство. Применив теорему о среднем к определенному интегралу, выражающему длину L дуги AB, получим

$$L = (\beta - \alpha) \,|\, \boldsymbol{r}'(\gamma) \,|, \quad \alpha < \gamma < \beta.$$

Длина хорды, стягивающей эту дугу, равна

$$AB = |\, \boldsymbol{r}(\beta) - \boldsymbol{r}(\alpha) \,|.$$

Составив отношение $\frac{L}{AB}$ длины дуги к хорде и устремив β к α, мы получим

$$\lim_{\beta\to\alpha} \frac{L}{AB} = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{(\beta-\alpha)\,|\,\boldsymbol{r}'(\gamma)\,|}{|\,\boldsymbol{r}(\beta) - \boldsymbol{r}(\alpha)\,|} =$$

$$= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{|\,\boldsymbol{r}'(\gamma)\,|}{\dfrac{|\,\boldsymbol{r}(\beta) - \boldsymbol{r}(\alpha)\,|}{\beta - \alpha}} = \frac{|\,\boldsymbol{r}'(\alpha)\,|}{|\,\boldsymbol{r}'(\alpha)\,|} = 1.$$

§ 2. Основные формулы дифференциальной геометрии линий в пространстве

1. Дуга как параметр. Дифференциал дуги. На произвольно взятой линии (L) зафиксируем точку M_0 и определенное направление (рис. 97). Длину дуги линии (L) между фиксированной точкой M_0 и текущей точкой M, взятую с определенным знаком, обозначим s и условимся коротко называть *дугой* s. Дугу s будем считать *положительной*, если текущая точка M смещена в положительном направлении по отношению к начальной точке M_0, и *отрицательной* в противном случае.

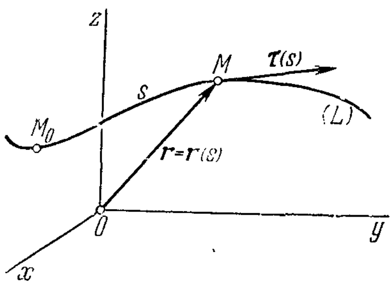

Рис. 97.

При этих условиях всякому положению точки M будет соответствовать определенное значение дуги s. Обратно, всякому значению дуги s будет соответствовать определенное положение точки M, а следовательно, и определенный ее радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$.

Таким образом, *радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки M линии (L) является векторной функцией от ее дуги s*:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s). \tag{8.20}$$

Следовательно, получилось векторное уравнение линии, в котором роль параметра играет дуга s.

Рассмотрим модуль производной радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки кривой по ее дуге:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}. \tag{8.21}$$

Мы будем основываться на том факте, что предел отношения длины Δs бесконечно малой дуги к длине $|\Delta\boldsymbol{r}|$ стягивающей ее хорды равен единице:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta s|}{|\Delta\boldsymbol{r}|} = 1. \tag{8.22}$$

Этот факт достаточно очевиден, если исходить из интуитивного понятия линии. Выше (гл. VIII, § 1, п. 7) он был строго доказан для правильно параметризованной линии, у которой радиус-вектор текущей точки и его производная являются непрерывными функциями.

На основании этого факта и равенства (8.22) мы заключаем, что *модуль производной радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки линии по ее дуге равен единице*:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1. \tag{8.23}$$

Отсюда следует:

$$|d\boldsymbol{r}| = |ds|. \tag{8.24}$$

Итак, абсолютная величина дифференциала дуги пространственной кривой равна модулю дифференциала радиуса-вектора текущей точки кривой.

Замечание 1. При перемещении по кривой в сторону возрастания дуги s дифференциал дуги ds будет положителен. Следовательно, при таком перемещении знак абсолютной величины в полученной формуле (8.24) можно опустить:

$$ds = |d\boldsymbol{r}|. \tag{8.25}$$

Замечание 2. Если линия отнесена к параметру t, то обычно полагают

$$ds = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt, \tag{8.26}$$

считая тем самым, что знаки ds и dt совпадают. Это значит, что положительное направление отсчета дуг выбирается в сторону возрастания параметра t.

Замечание 3. Разложение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки $M(x, y, z)$ линии имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z, \tag{8.27}$$

где x, y, z — координаты текущей точки.

Продифференцировав это равенство, мы получим

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz, \tag{8.28}$$

откуда найдем дифференциал дуги в координатной форме:

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{8.29}$$

2. Орт касательной. Первая основная формула. Мы знаем, что производная $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ есть вектор, направленный по касательной к линии в сторону роста s. В предыдущем пункте было установлено, что этот вектор единичный. Обозначив его $\boldsymbol{\tau}$, мы получим первое основное уравнение дифференциальной геометрии линии:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}. \tag{8.30}$$

Итак, *производная радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки кривой по ее дуге s равна орту касательной $\boldsymbol{\tau}$ в этой точке.* При этом орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ направлен в сторону положительного отсчета дуг на линии (рис. 97).

3. Инвариантность геометрических понятий. Все геометрические понятия, связанные с рассматриваемой фигурой, отличаются той особенностью, что они целиком определяются фигурой и не зависят от способа ее задания. Так, все геометрические понятия, связанные с пространственной кривой, не зависят от того, задана ли она как траектория движущейся точки, или как линия пересечения двух поверхностей, или как-нибудь еще.

Обратно, всякое связанное с фигурой «инвариантное понятие», т. е. понятие, определенное фигурой, но не зависящее от способа задания самой фигуры, есть понятие геометрическое.

Этот принцип инвариантности (неизменности) геометрических понятий находит широкое применение не только в геометрии, но и в теории относительности и в квантовой механике. Он дает возможность применять математические методы для отделения величин и понятий, имеющих геометрический (или физический) смысл, от величин и понятий, лишенных этого смысла и связанных со случайным выбором системы координат или условий эксперимента.

Он дает также широкие возможности строить для изучаемого объекта новые геометрические величины и понятия. Так, выясняя геометрический смысл некоторых заведомо инвариантных векторов, связанных с пространственной кривой, мы с необходимостью придем к понятиям кривизны, соприкасающейся плоскости, главной нормали, бинормали, кручения кривой, т. е. к тем самым понятиям, которые в предыдущей главе были введены на основании интуитивных представлений. Мало того, на этом пути мы получим и формулы для вычисления соответствующих геометрических величин.

4. Главная нормаль и кривизна. Вторая основная формула. Орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ в произвольной точке кривой и длина дуги между этой точкой и фиксированной точкой являются геометрическими понятими, не зависящими от способа их определения.

Следовательно, тем же свойством инвариантности обладает и производная орта касательной $\boldsymbol{\tau}$ по дуге s. Поэтому следует ожидать, что модуль и направление этой производной должны иметь определенный геометрический смысл.

а) Выясним сначала геометрический смысл модуля производной $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$. Для этого рассмотрим на нашей кривой (рис. 98) две точки $M(s)$ и $M(s+\Delta s)$, соответствующие исходному s и приращенному $s+\Delta s$ значениям дуги, и проведем в них орты касательных $\boldsymbol{\tau}(s)$ и $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$. Совместим начало соседнего орта $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)$ с началом $M(s)$ исходного орта $\boldsymbol{\tau}(s)$. Радианную меру угла между этими ортами обозначим φ. Приращение $\Delta\tau$ орта касательной является основанием равнобедренного треугольника с единичными боковыми сторонами $\tau(s)$ и $\tau(s+\Delta s)$

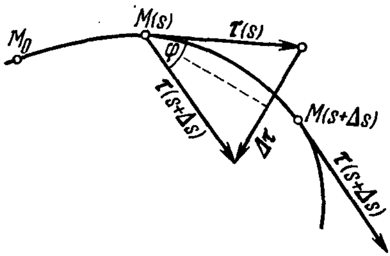

Рис. 98.

и углом φ при вершине (рис. 98). Следовательно, модуль этого приращения равен

$$|\Delta\tau| = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

В силу этого мы получим

$$\left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\tau|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{|\Delta s|} =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\varphi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|}.$$

Итак,

$$\left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|}. \tag{8.31}$$

Но предел отношения угла φ между направлениями касательных в данной точке и в бесконечно близкой точке к длине $|\Delta s|$ дуги, заключенной между этими точками, называется кривизной кривой в данной точке и обозначается K (§ 1, п. 5, (8.14)):

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi}{|\Delta s|}. \tag{8.32}$$

Итак,

$$\left|\frac{d\tau}{dt}\right| = K, \tag{8.33}$$

т. е. *модуль производной орта касательной по дуге равен кривизне K кривой.*

б) Исследуем теперь направление вектора $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$. Продифференцировав по дуге s тождество

$$\boldsymbol{\tau}^2 = 1,$$

мы получим

$$2\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0, \tag{8.34}$$

откуда следует, что *вектор* $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ *перпендикулярен к* $\boldsymbol{\tau}$, т. е. *направлен по одной из нормалей кривой в данной точке.*

С другой стороны, вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds = d^2\boldsymbol{r}/ds^2$ вместе с ортом касательной $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{r}/ds$ определяют некоторую плоскость, проходящую через рассматриваемую точку M. Эта плоскость, в которой располагаются производные $d\boldsymbol{r}/ds$, $d^2\boldsymbol{r}/ds^2$ первого и второго порядков, называется соприкасающейся плоскостью линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ (§ 1, п. 3).

Итак, *вектор* $d\boldsymbol{\tau}/ds$ *направлен по той нормали кривой, которая лежит в соприкасающейся плоскости.* Эта нормаль называется *главной нормалью* (§ 1, п. 4).

Орт вектора $d\boldsymbol{\tau}/ds$ обозначается $\boldsymbol{\nu}$ и называется *ортом главной нормали.*

в) Вектор $d\boldsymbol{\tau}/ds$ равен своему модулю K, умноженному на свой орт $\boldsymbol{\nu}$. Записав это, мы и получим вторую основную формулу дифференциальной геометрии линии

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\boldsymbol{\nu}. \tag{8.35}$$

Итак, *производная орта касательной по дуге равна произведению кривизны линии на орт главной нормали.*

г) Из (8.35) непосредственно вытекают формулы для вычисления кривизны и орта главной нормали:

$$K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{K}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \tag{8.36}$$

5. Бинормаль и кручение. Третья основная формула. Прямая, перпендикулярная к касательной и к главной нормали в данной точке, называется *бинормалью.*

Перемножив векторно орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ и орт главной нормали $\boldsymbol{\nu}$, мы получим орт бинормали, который обозначим $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}. \tag{8.37}$$

Орт бинормали $\boldsymbol{\beta}$ является инвариантным геометрическим понятием. Таким же понятием является и его производная по дуге $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$. Поэтому она должна иметь определенный геометрический смысл. Его выяснением мы и займемся.

а) Исследуем сначала направление производной $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$.

Продифференцировав тождество

$$\boldsymbol{\beta}^2 = 1,$$

мы получим

$$2\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = 0, \tag{8.38}$$

откуда следует, что вектор $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{\beta}$.

Продифференцировав тождество

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{8.39}$$

мы получим

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}.$$

Но $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\boldsymbol{\nu}$, и потому $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \times \boldsymbol{\nu} = 0$. Следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}. \tag{8.40}$$

А это значит, что вектор $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{\tau}$.

Итак, *вектор* $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ *перпендикулярен к векторам* $\boldsymbol{\tau}$ *и* $\boldsymbol{\beta}$. Следовательно, он коллинеарен орту главной нормали $\boldsymbol{\nu}$ и отличается от него лишь некоторым скалярным множителем, который мы обозначим λ:

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \lambda\boldsymbol{\nu}. \tag{8.41}$$

б) Выясним теперь геометрический смысл скалярного коэффициента λ. Из формулы (8.41) следует:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right| = |\lambda|. \tag{8.42}$$

Рассмотрим (рис. 99) орты бинормалей $\beta(s)$ и $\beta(s+\Delta s)$ соответственно в данной точке $M(s)$ и в бесконечно близкой точке $M(s+\Delta s)$. Обозначим угол между этими ортами через ψ. Приращение $\Delta\beta$ орта бинормали $\beta(s)$ является основанием равнобедренного треугольника с единичными боковыми сторонами $\beta(s)$, $\beta(s+\Delta s)$ и углом ψ при вершине. Поэтому

$$|\Delta\beta| = 2\sin\frac{\psi}{2}.$$

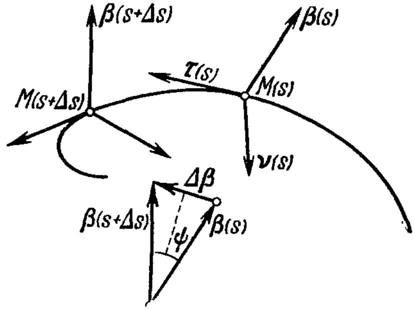

Рис. 99.

В силу этого и формулы (8.42) мы получаем

$$|\lambda| = \left|\frac{d\beta}{ds}\right| = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\beta}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\beta|}{|\Delta s|} =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\psi}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{\psi}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{|\Delta s|}.$$

Итак,

$$|\lambda| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\psi}{|\Delta s|}.$$

Но предел отношения угла ψ поворота бинормали (соприкасающейся плоскости) при переходе из данной точки M в бесконечно близкую точку к длине $|\Delta s|$ дуги, заключенной между этими точками, есть абсолютная величина кручения кривой. При этом кручение считается положительным, если при движении вдоль линии соприкасающаяся плоскость совершает правовинтовое движение, и отрицательным, если левовинтовое.

Итак, *абсолютная величина скаляра λ есть абсолютная величина кручения.*

Установим теперь геометрический смысл знака скаляра λ. Если скаляр λ отрицателен, то вектор $d\beta/ds = \lambda\nu$ направлен в сторону, противоположную ν (рис. 100, *а*). Отсюда следует, что при движении в направлении τ вектор

β будет совершать правовинтовое движение. Если скаляр λ положителен, то движение будет, очевидно, левовинтовое (рис. 100, *б*). А это значит, что знак

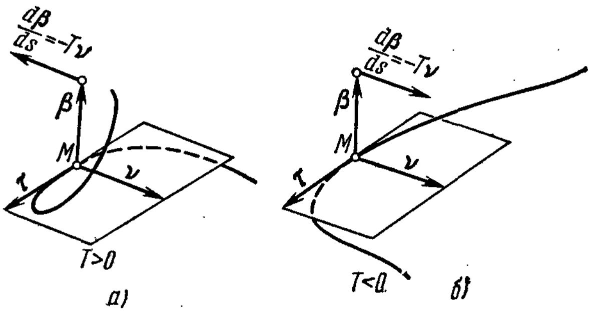

Рис. 100.

скаляра λ противоположен знаку кручения T. Следовательно, $\lambda = -T$. Поэтому (8.41) можно переписать так:

$$\frac{d\beta}{ds} = -T\nu. \tag{8.43}$$

Это и есть третья основная формула дифференциальной геометрии линии в пространстве.

Умножив скалярно на ν обе части третьей основной формулы (8.43), мы получим следующую формулу для вычисления кручения:

$$T = -\nu \cdot \frac{d\beta}{ds}. \tag{8.44}$$

6. Винтовая линия. В качестве примера рассмотрим винтовую линию. *Винтовой линией называется траектория какой-либо точки M твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси и скользит вдоль нее так, что перемещение пропорционально углу поворота.*

Расстояние точки M от оси обозначим через a. Перемещение тела вдоль оси при его повороте на один радиан обозначим через h.

Прямоугольную систему координат расположим так, чтобы ось Oz была направлена по оси винтовой линии, а ось Ox проходила через начальное положение M_0 точки M, описывающей линию (рис. 101).

Пусть тело повернулось на угол t и, следовательно, одновременно сместилось вдоль оси Oz на th. Выразив координаты x, y, z точки M, описывающей винтовую линию, через параметр (см. рис. 101), мы получим систему параметрических уравнений винтовой линии:

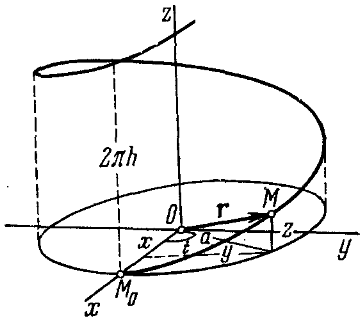

Рис. 101.

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = ht. \tag{8.45}$$

Умножив эти уравнения соответственно на $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и сложив, получим векторное уравнение винтовой линии:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}ht. \tag{8.46}$$

Для вычисления дифференциально-геометрических величин $\boldsymbol{\tau}$, K, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, T нам придется вычислять производные по дуге. При этом мы будем систематически пользоваться тем, что производная всякой функции по дуге равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу дуги.

Дифференциал дуги мы будем вычислять по формуле

$$ds = \sqrt{d\boldsymbol{r}^2} = \sqrt{\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]^2}\,dt.$$

Это означает, что направление на кривой выбирается в сторону возрастания параметра t.

Учитывая все эти замечания, из уравнений винтовой линии (8.46) последовательно находим:

I. $d\boldsymbol{r} = (-\boldsymbol{i}a\sin t + \boldsymbol{j}a\cos t + \boldsymbol{k}h)\,dt,$

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + h^2}\,dt = \sqrt{a^2 + h^2}\,dt,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{-\boldsymbol{i}a\sin t + \boldsymbol{j}a\cos t + \boldsymbol{k}h}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

II. $$d\boldsymbol{\tau} = \frac{-\boldsymbol{i}\, a\cos t - \boldsymbol{j}\, a\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}\, dt,$$

$$K\boldsymbol{\nu} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{-\boldsymbol{i}\, a\cos t - \boldsymbol{j}\, a\sin t}{a^2+h^2},$$

$$K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \frac{a}{a^2+h^2},$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{K}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\boldsymbol{i}\cos t - \boldsymbol{j}\sin t,$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & h \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{i}h\sin t - \boldsymbol{j}\, h\cos t + \boldsymbol{k}a}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

III. $$d\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{i}\, h\cos t + \boldsymbol{j}\, h\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}}\, dt,$$

$$-T\boldsymbol{\nu} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \frac{\boldsymbol{i}h\cos t + \boldsymbol{j}h\sin t}{a^2+h^2},$$

$$T = -\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{-h\cos^2 t - h\sin^2 t}{a^2+h^2} = \frac{h}{a^2+h^2}.$$

Опираясь на полученные формулы, отметим некоторые геометрические особенности винтовой линии.

а) Кривизна винтовой линии постоянна:

$$K = \frac{a}{a^2+h^2}. \tag{8.47}$$

Она обращается в нуль лишь при $a = 0$, т. е. когда точка движется по оси вращения тела и описывает, следовательно, прямую.

б) Кручение винтовой линии также постоянно:

$$T = \frac{h}{a^2+h^2}. \tag{8.48}$$

Оно равно нулю при $h = 0$, т. е. когда тело имеет лишь вращательное движение без скольжения вдоль оси. В этом случае точка M будет описывать просто окружность радиуса a.

в) Орт главной нормали направлен по перпендикуляру, опущенному из рассматриваемой точки винтовой линии на ее ось Oz. Действительно (рис. 101),

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{Oxy}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t = -a\boldsymbol{\nu}.$$

г) Касательная к винтовой линии образует постоянный угол с осью Oz:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

§ 3. Сопровождающий трехгранник

1. *Сопровождающим трехгранником*, связанным с текущей точкой M пространственной кривой, называется трехгранник, ребрами которого являются касательная, главная нормаль и бинормаль.

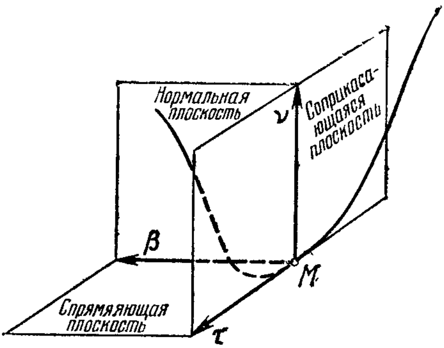

Рис. 102.

Грани этого трехгранника носят следующие названия (рис. 102).

Грань, проходящая через касательную и главную нормаль, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Грань, проходящая через главную нормаль и бинормаль, называется *нормальной плоскостью.*

Грань, проходящая через касательную и бинормаль, называется *спрямляющей плоскостью.*

З а м е ч а н и е. *Небольшой кусочек кривой в окрестности данной точки можно считать приближенно расположенным в соприкасающейся плоскости.* Эта плоскость перпендикулярна спрямляющей плоскости. Поэтому проекция указанного кусочка кривой на спрямляющую плоскость будет в первом приближении прямая линия.

2. Система дифференциальных уравнений движения сопровождающего трехгранника. Так называется *система уравнений, определяющих производные по дуге от радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}$ *текущей точки кривой и от ортов* $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ *осей сопровождающего трехгранника*. Производные от $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\beta}$ определяются тремя основными уравнениями (8.30), (8.35), (8.43). Продифференцировав по s тождество

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}, \tag{8.49}$$

мы получим

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

или (см. (8.35) и (8.43))

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -T\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \times K\boldsymbol{\nu}$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -K\boldsymbol{\tau} + T\boldsymbol{\beta}. \tag{8.50}$$

Итак, получается *следующая система дифференциальных уравнений движения сопровождающего трехгранника*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} &= \boldsymbol{\tau}, \\ \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} &= K\boldsymbol{\nu}, \\ \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} &= -K\boldsymbol{\tau} + T\boldsymbol{\beta}, \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} &= -T\boldsymbol{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{8.51}$$

3. Расположение линии относительно сопровождающего трехгранника. На линии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

будем рассматривать точку $M(s)$, в которой

$$K \neq 0, \quad T \neq 0. \tag{8.52}$$

Вектор $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s)$, соединяющий исходную точку $M(s)$ с соседней точкой $M(s + \Delta s)$ линии, разложим по формуле Тейлора:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \frac{\Delta s}{1!}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} + \frac{\Delta s^2}{2!}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} + \frac{\Delta s^3}{3!}\left(\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} + \xi_3\right), \quad \lim_{\Delta s \to 0} \xi_3 = 0. \quad (8.53)$$

Дифференциальные уравнения (8.51) движения сопровождающего трехгранника дают

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\boldsymbol{\nu},$$

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} = \frac{d(K\boldsymbol{\nu})}{ds} = -K^2\boldsymbol{\tau} + \frac{dK}{ds}\boldsymbol{\nu} + KT\boldsymbol{\beta}.$$

В силу этого

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{1!}\boldsymbol{\tau} + \frac{\Delta s^2}{2!}K\boldsymbol{\nu} + \frac{\Delta s^3}{3!}\left(-K^2\boldsymbol{\tau} + \frac{dK}{ds}\boldsymbol{\nu} + KT\boldsymbol{\beta} + \xi_3\right). \quad (8.54)$$

Рассмотрим проекции вектора $\Delta \boldsymbol{r}$ на орты $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$.

а) $$\text{Пр}_{\boldsymbol{\tau}}\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}\cdot\Delta \boldsymbol{r} = \frac{\Delta s}{1!} + \frac{\Delta s^3}{3!}(-K^2 + \xi_3\cdot\boldsymbol{\tau}). \quad (8.55)$$

Мы видим, что при достаточно малых Δs знак этой проекции будет определяться знаком главного члена, т. е. знаком $\frac{\Delta s}{1!}$. Это значит, что *линия вблизи рассматриваемой точки располагается по обе стороны от нормальной плоскости* (рис. 102).

б) $$\text{Пр}_{\boldsymbol{\nu}}\Delta \boldsymbol{r} = \frac{\Delta s^2}{2!}K + \frac{\Delta s^3}{3!}\left(\frac{dK}{ds} + \xi_3\cdot\boldsymbol{\nu}\right). \quad (8.56)$$

Мы видим, что при достаточно малых Δs эта проекция всегда будет положительна, так как главный член $\frac{\Delta s^2}{2}K$ положителен независимо от знака Δs. Это значит, что *вблизи рассматриваемой точки $M(s)$ линия отгибается от спрямляющей плоскости в направлении орта $\boldsymbol{\nu}$* (рис. 102).

в) $$\text{Пр}_{\boldsymbol{\beta}}\Delta \boldsymbol{r} = \frac{\Delta s^3}{3!}KT + \frac{\Delta s^3}{3!}\xi_3\cdot\boldsymbol{\beta}. \quad (8.57)$$

Мы видим, что при достаточно малых Δs эта проекция меняет знак одновременно с изменением знака Δs. Это значит, что *вблизи рассматриваемой точки линия располагается по разные стороны от соприкасающейся плоскости* (рис. 102).

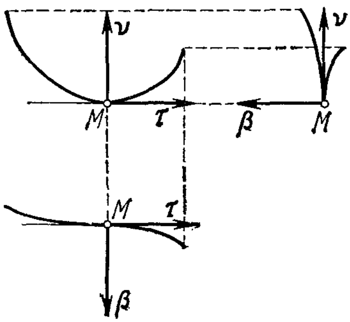

Рис. 103.

На рис. 103 изображены типичные проекции отрезка кривой на плоскости сопровождающего трехгранника.

4. Линии без кривизны. Кривизна прямой линии равна нулю, так как орт касательной к прямой направлен по этой прямой и угол между ортами касательных в двух точках равен нулю. Докажем обратное утверждение. Пусть кривизна линии тождественно равна нулю:

$$K = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| \equiv 0. \tag{8.58}$$

Тогда

$$\frac{d\tau}{ds} = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{C}_1$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{C}_1 s + \boldsymbol{C}_2, \tag{8.59}$$

т. е. конец $\boldsymbol{r}$ описывает прямую (рис. 104).

Итак, *линия с нулевой кривизной — прямая.*

5. Линии без кручения. Кручение плоской линии равно нулю, так как соприкасающаяся плоскость в любой точке линии совпадает с плоскостью, в которой лежит линия, и потому бинормаль не меняет своего направления в пространстве.

Пусть, обратно, кручение линии (не прямой) тождественно равно нулю:

$$T \equiv 0. \tag{8.60}$$

Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = T\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0},$$

откуда

$$\beta = C^0.$$

Умножив это равенство скалярно на

$$\tau = \frac{dr}{ds}$$

и приняв во внимание перпендикулярность τ и β, мы получим

$$\frac{d(C^0 \cdot r)}{ds} = 0,$$

откуда

$$C^0 \cdot r = D, \tag{8.61}$$

т. е. конец r описывает линию, лежащую в плоскости,

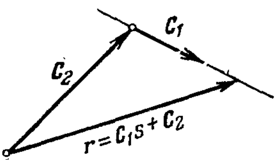

Рис. 104.

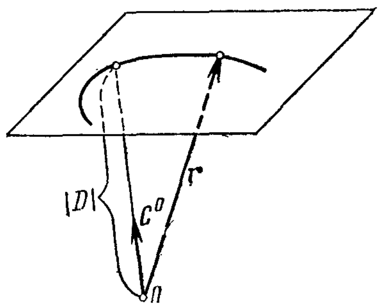

Рис. 105.

перпендикулярной к C и удаленной от начала O на расстояние $|D|$ (рис. 105).

Итак, *линия с нулевым кручением — плоская.*

§ 4. Инвариантные формулы

Величины τ, K, ν, β, T просто выражаются через производные от радиуса-вектора r текущей точки линии по ее дуге:

$$\tau = \frac{dr}{ds}, \quad K = \left|\frac{d\tau}{ds}\right|, \quad \nu = \frac{1}{K}\frac{d\tau}{ds},$$

$$\beta = \tau \times \nu, \quad T = -\nu \cdot \frac{d\beta}{ds}.$$

Однако применение этих формул, когда линия отнесена к произвольному параметру t, приводит к громоздким выкладкам. Поэтому желательно выразить эти величины через производные от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ по произвольному параметру t, к которому отнесена линия. Это можно сделать путем непосредственного преобразования формул. Однако мы применим новый метод, при помощи которого вновь автоматически придем к величинам $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\nu}$, K, T и при этом получим необходимые общие формулы для их вычисления.

Будем исходить из того, что величины $\boldsymbol{\tau}$, K, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, T имеют геометрический характер и не зависят от выбора параметра t, к которому отнесена линия. Поэтому их выражения через производные от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки линии по произвольному параметру t не должны изменяться при преобразованиях этого параметра.

Таким образом, если мы будем строить из производных выражения, не меняющиеся при преобразованиях параметра, то среди них обнаружатся и интересующие нас величины. Этими построениями мы и займемся.

1. Преобразование производных при преобразовании параметра t. Пусть линия отнесена к произвольному параметру t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{8.62}$$

Преобразуем параметр t в новый параметр t_1, положив

$$t = \varphi(t_1), \tag{8.63}$$

причем будем предполагать, что $\frac{dt}{dt_1} \neq 0$ и что при возрастании параметра t растет и параметр t_1, т. е.

$$\frac{dt}{dt_1} > 0. \tag{8.64}$$

Последовательным дифференцированием векторной функции по параметру t находим следующие формулы преобразования производных:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_1}, \tag{8.65}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt_1^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^2 + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dt_1^2}, \tag{8.66}$$

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt_1^3} = \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3 + 3\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dt_1} \cdot \frac{d^2t}{dt_1^2} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d^3t}{dt_1^3}. \tag{8.67}$$

Будем при помощи этих формул строить выражения, не меняющиеся при преобразованиях параметра.

2. Инвариантный вектор первого порядка. Из уравнения (8.65) следует

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| \cdot \frac{dt}{dt_1}. \tag{8.68}$$

Разделив уравнение (8.65) на полученное, будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1} : \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}\right| = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} : \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|. \tag{8.69}$$

Мы видим, что вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} : \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ инвариантен: он не меняется при преобразованиях параметра. Его можно назвать *инвариантным вектором первого порядка* потому, что он выражается лишь через производную первого порядка. Для выяснения его геометрического смысла примем за параметр дугу s. Тогда наш инвариантный вектор выразится так:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} : \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \boldsymbol{\tau}.$$

Следовательно, он является ортом касательной.

Итак, получена *инвариантная формула для орта касательной*:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} : \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|. \tag{8.70}$$

3. Инварианты второго порядка получатся из формул (8.65), (8.66) преобразования производных первого и второго порядков.

а) Перемножив векторно эти формулы, найдем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt_1^2} = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)\left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3. \tag{8.71}$$

Отсюда следует:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt_1^2}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right| \left(\frac{dt}{dt_1}\right)^3. \tag{8.72}$$

б) Разделив скаляр (8.72) на куб скаляра (8.68), получим

$$\frac{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt_1^2}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}\right|^3}=\frac{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3}. \tag{8.73}$$

Мы видим, что получился инвариантный скаляр. Для выяснения его смысла возьмем за новый параметр дугу s нашей линии. Тогда этот скаляр представится так:

$$\frac{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|^3}=\left|\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=|\boldsymbol{\tau}\times K\boldsymbol{\nu}|=K.$$

Следовательно, он является кривизной K. Таким образом, мы получаем следующую *инвариантную формулу для вычисления кривизны*:

$$K=\frac{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3}. \tag{8.74}$$

в) Разделив вектор (8.71) на скаляр (8.72), мы получим *инвариантный вектор:*

$$\frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt_1^2}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt_1^2}\right|}=\frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|}. \tag{8.75}$$

Для выяснения геометрического смысла этого инвариантного вектора опять воспользуемся дугой s в качестве параметра:

$$\frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|}=\frac{\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}{\left|\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|}=\frac{\boldsymbol{\tau}\times K\boldsymbol{\nu}}{|\boldsymbol{\tau}\times K\boldsymbol{\nu}|}=\boldsymbol{\beta},$$

т. е. *рассматриваемый инвариантный вектор является ортом бинормали,* и мы получаем для этого орта $\boldsymbol{\beta}$

инвариантную формулу:

$$\beta = \frac{\dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{d^2r}{dt^2}}{\left| \dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{d^2r}{dt^2} \right|}. \tag{8.76}$$

г) Перемножив векторно β и τ, мы получим инвариантную формулу для орта главной нормали:

$$\nu = \beta \times \tau = \frac{\left(\dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{d^2r}{dt^2} \right) \times \dfrac{dr}{dt}}{\left| \dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{d^2r}{dt^2} \right| \left| \dfrac{dr}{dt} \right|}. \tag{8.77}$$

4. Инвариант третьего порядка. Перемножив скалярно векторы (8.71) и (8.67) и приняв во внимание, что смешанное произведение с двумя одинаковыми множителями равно нулю, мы получим

$$\left(\frac{dr}{dt_1} \times \frac{d^2r}{dt_1^2} \right) \cdot \frac{d^3r}{dt_1^3} = \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{dt_1} \right)^6 \cdot \frac{d^3r}{dt^3}. \tag{8.78}$$

Разделив этот скаляр на скалярный квадрат вектора (8.71), найдем инвариантный скаляр третьего порядка:

$$\frac{\left(\dfrac{dr}{dt_1} \times \dfrac{d^2r}{dt_1^2} \right) \cdot \dfrac{d^3r}{dt_1^3}}{\left(\dfrac{dr}{dt_1} \times \dfrac{d^2r}{dt_1^2} \right)^2} = \frac{\left(\dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{d^2r}{dt^2} \right) \cdot \dfrac{d^3r}{dt^3}}{\left(\dfrac{dr}{dt} \times \dfrac{d^2r}{dt^2} \right)^2}. \tag{8.79}$$

Для выяснения его смысла за новый параметр примем дугу s. Тогда получим

$$\frac{\left(\dfrac{dr}{ds} \times \dfrac{d^2r}{ds^2} \right) \cdot \dfrac{d^3r}{ds^3}}{\left(\dfrac{dr}{ds} \times \dfrac{d^2r}{ds^2} \right)^2} = \frac{\left(\tau \times \dfrac{d\tau}{ds} \right) \cdot \dfrac{d^2\tau}{ds^2}}{\left(\tau \times \dfrac{d\tau}{ds} \right)^2} = \frac{(\tau \times K\nu) \cdot \dfrac{d(K\nu)}{ds}}{(\tau \times K\nu)^2} =$$

$$= \frac{1}{K} \beta \cdot \left(\frac{dK}{ds} \nu + K \frac{d\nu}{ds} \right) = \beta \cdot \frac{d\nu}{ds} = \beta \cdot (-K\tau + T\beta) = T.$$

Следовательно, рассматриваемый инвариант является кручением.

Таким образом, мы получаем следующую **инвариантную формулу для вычисления кручения:**

$$T = \frac{\left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right) \cdot \frac{d^3r}{dt^3}}{\left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right)^2}. \qquad (8.80)$$

Глава IX

ПЛОСКИЕ ЛИНИИ

§ 1. Дифференциальные уравнения плоской линии

Рассмотрим плоскую линию

$$r = r(t). \qquad (9.1)$$

Плоскость, в которой расположена линия, примем за координатную плоскость Oxy (рис. 106). Тогда радиус-вектор r текущей точки M линии разложится лишь по двум ортам i и j осей Ox и Oy:

$$r = ix + jy. \qquad (9.2)$$

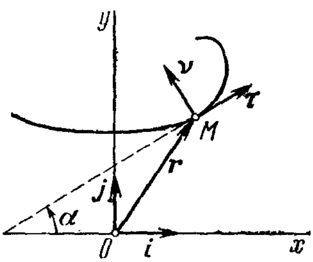

Рис. 106.

Третья проекция z будет тождественно равна нулю и это будет в дальнейшем подразумеваться.

У плоской линии соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью, в которой лежит линия, т. е. с нашей плоскостью Oxy. Главная нормаль лежит в этой плоскости, а бинормаль ей перпендикулярна. Орт бинормали β плоской линии постоянен, и кручение T равно нулю:

$$T \equiv 0. \qquad (9.3)$$

Таким образом, основные формулы (8.30), (8.35), (8.41) для плоской линии запишутся так:

$$\frac{dr}{ds} = \tau, \quad \frac{d\tau}{ds} = K\nu, \quad \frac{d\beta}{ds} = 0. \qquad (9.4)$$

Дифференцирование тождества $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$ с учетом постоянства $\boldsymbol{\beta}$ дает

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \boldsymbol{\beta} \times K\boldsymbol{\nu} = -K\boldsymbol{\tau}.$$

Итак, *получается следующая система дифференциальных уравнений*:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\boldsymbol{\nu}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -K\boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = 0. \qquad (9.5)$$

§ 2. Кривизна плоской линии

1. Угол орта касательной $\boldsymbol{\tau}$ с первым координатным ортом $\boldsymbol{i}$, отсчитанный от $\boldsymbol{i}$ против хода часовой стрелки, обозначим α (рис. 107). Тогда будем иметь

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i} \cos\alpha + \boldsymbol{j} \sin\alpha. \qquad (9.6)$$

Отсюда получим следующее выражение для кривизны:

$$K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|(-\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|. \qquad (9.7)$$

Обычно для плоской линии рассматривают кривизну со знаком $\tilde{K}$, полагая

$$\tilde{K} = \frac{d\alpha}{ds}. \qquad (9.8)$$

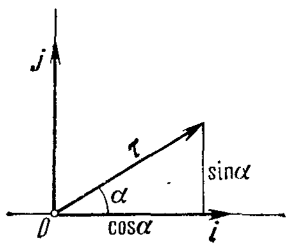

Рис. 107.

Таким образом, *кривизна со знаком плоской линии равна производной по дуге от угла касательной с осью Ox*. Она будет положительной, если α растет с ростом s, и отрицательной в противоположном случае.

2. Найдем координатную формулу для вычисления кривизны со знаком $\tilde{K}$ плоской линии, заданной параметрической системой уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t). \qquad (9.9)$$

Производная от радиуса-вектора

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y$$

текущей точки линии есть вектор

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i}\dot{x} + \boldsymbol{j}\dot{y},$$

направленный по касательной к линии. Тангенс угла α касательной с осью Ox равен отношению проекций этого вектора на координатные оси:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot y}{\dot x}.$$

Отсюда находим

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\dot y}{\dot x},$$

$$d\alpha = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2}\cdot\frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{\dot x^2}\,dt = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{\dot x^2+\dot y^2}\,dt.$$

С другой стороны, положив, что направления роста дуги s и параметра t совпадают, получим кривизну $\tilde K$:

$$ds = |d\boldsymbol r| = \sqrt{\dot{\boldsymbol r}^2}\,dt = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\,dt;$$

разделив $d\alpha$ на ds, найдем

$$\tilde K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}}. \tag{9.10}$$

§ 3. Круг кривизны

1. *Кругом кривизны* (или *соприкасающейся окружностью*) *в данной точке* M линии называют окружность, которая: 1) проходит через M, 2) имеет в M общую касательную с линией, 3) расположена с той стороны от касательной, куда направлен орт $\boldsymbol\nu$ главной нормали, 4) имеет кривизну, равную кривизне кривой в M (рис. 108).

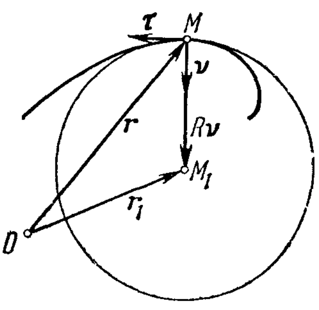

Рис. 108.

2. Радиус R круга кривизны называется также *радиусом кривизны кривой в рассматриваемой точке* M. Радиус окружности есть величина, обратная ее кривизне. С другой стороны, кривизна круга кривизны совпадает с кривизной K кривой в рассматриваемой точке. Поэтому *радиус кривизны R кривой в данной точке есть величина,*

обратная кривизне кривой в этой точке:

$$R = \frac{1}{K}. \qquad (9.11)$$

3. Центр M_1 круга кривизны называется *центром кривизны кривой в рассматриваемой точке.*

Вектор $\overrightarrow{MM_1}$, соединяющий рассматриваемую точку M кривой с соответствующим центром кривизны M_1, выражается, следовательно, так:

$$\overrightarrow{MM_1} = R\mathbf{v}. \qquad (9.12)$$

§ 4. Эволюта

1. Определение. *Эволютой кривой* называется геометрическое место центров кривизны этой кривой.

Чтобы получить уравнение эволюты, рассмотрим на исходной кривой текущую точку M и соответствующий ей центр кривизны M_1 (рис. 108). Имеем $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_1}$. Но $\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки кривой, $\overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{r}_1$ — радиус-вектор соответствующего центра кривизны, т. е. текущей точки эволюты, $\overrightarrow{MM_1} = R\mathbf{v}$ — вектор, соединяющий точку M с соответствующим центром кривизны M_1. Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + R\mathbf{v}. \qquad (9.13)$$

Это и есть формула, определяющая радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ текущей точки эволюты как функцию от параметра t, т. е. это и есть уравнение эволюты.

2. Свойства эволюты. В качестве параметра возьмем дугу s исходной кривой. Исходя из уравнения эволюты (9.13),

$$d\boldsymbol{r}_1 = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} + \frac{dR}{ds}\mathbf{v} + R\frac{d\mathbf{v}}{ds}\right)ds.$$

Отсюда, использовав дифференциальные уравнения (9.5), получим

$$d\boldsymbol{r}_1 = \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{dR}{ds}\mathbf{v} - RK\boldsymbol{\tau}\right)ds.$$

Но $RK = 1$, поэтому

$$d\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{\nu}\, dR. \tag{9.14}$$

Из полученной формулы вытекают два следующих заключения.

а) Вектор $d\boldsymbol{r}_1$, направленный по касательной к эволюте, коллинеарен вектору $\boldsymbol{\nu}$, т. е. *касательная к эволюте совпадает с нормалью к исходной кривой* (рис. 109).

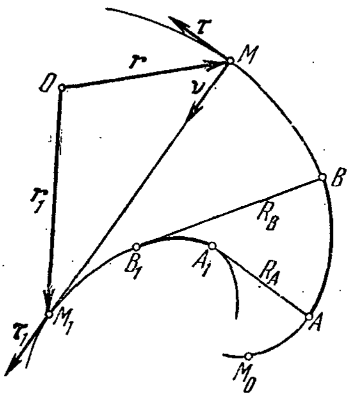

Рис. 109.

б) Сравнив модули обеих частей соотношения (9.14), мы получим

$$|d\boldsymbol{r}_1| = |dR|. \tag{9.15}$$

Но $|d\boldsymbol{r}_1|$ равен абсолютной величине дифференциала дуги ds_1 эволюты; следовательно, $|ds_1| = |dR|$.

Выберем направление отсчета дуг на исходной кривой так, чтобы с возрастанием дуги возрастал радиус кривизны R.

Мы ограничимся отрезком кривой, на котором R меняется монотонно и не имеет экстремумов. Тогда ds_1 и dR будут совпадать не только по абсолютной величине, но и по знаку:

$$ds_1 = dR. \tag{9.16}$$

Отсюда следует:

$$s_1 = R + C, \tag{9.17}$$

где C — константа.

Рассмотрим на исходной линии дугу AB. В концах A и B этой дуги будем иметь

$$s_{1A} = R_A + C, \quad s_{1B} = R_B + C.$$

Отсюда найдем

$$s_{1B} - s_{1A} = R_B - R_A. \tag{9.18}$$

Итак, *разность радиусов кривизны исходной кривой в двух ее точках равна длине дуги эволюты, заключенной между соответствующими точками.*

Найденные свойства эволюты приводят к следующему способу построения исходной кривой по ее эволюте. На эволюту наматывают нить, которую затем начинают сматывать в натянутом состоянии; тогда фиксированная точка этой нити и опишет исходную кривую.

3. Уравнения эволюты в координатной форме. Спроектировав векторное уравнение эволюты (9.13)

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\nu}$$

на координатные оси, получим систему уравнений эволюты в координатной форме

$$\begin{aligned} x_1 &= x + R\nu_x, \\ y_1 &= y + R\nu_y, \end{aligned} \tag{9.19}$$

где x_1, y_1 — координаты текущей точки эволюты, а x, y — координаты текущей точки исходной линии, являющиеся известными функциями параметра t. Таким образом, дело сводится к вычислению ν_x, ν_y и R.

Имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y, \\ d\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{i}\dot{x} + \boldsymbol{j}\dot{y})\,dt, \\ ds &= |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{i}\dot{x} + \boldsymbol{j}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Вычислив дифференциал этого выражения, выполнив необходимые преобразования и разделив на $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$, найдем

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{(-\boldsymbol{i}\dot{y} + \boldsymbol{j}\dot{x})(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}. \tag{9.20}$$

Отсюда получим

$$K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \frac{|\dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{9.21}$$

Учитывая, что $R = \frac{1}{K}$ и $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{K}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$, найдем

$$R\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{K^2}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{-\boldsymbol{i}\dot{y} + \boldsymbol{j}\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Следовательно,

$$R\nu_x = -\dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}, \quad R\nu_y = \dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}. \tag{9.22}$$

Таким образом, окончательно *систему уравнений эволюты* (9.19) *можно переписать так*:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}, \\ y_1 &= y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}. \end{aligned} \tag{9.23}$$

§ 5. Эвольвента

Эвольвентой данной кривой называется новая кривая, для которой данная кривая служит эволютой. Докажем, что *если с исходной кривой сматывать в натянутом состоянии нить, то любая фиксированная точка M_2 этой нити будет описывать эвольвенту исходной кривой* (*эволюты*). Таким образом, у данной кривой эвольвент бесконечно много.

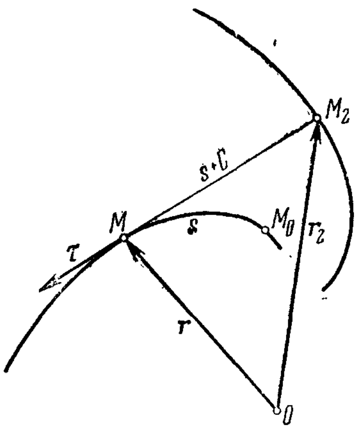

Рис. 110.

Доказательство. Обозначим через s дугу исходной кривой между начальной точкой M_0 и текущей точкой M. На касательной в точке M в направлении, противоположном $\boldsymbol{\tau}$, отложив отрезок $s+C$, где C — любая константа, получим точку M_2, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ которой определится так:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} - (s+C)\,\boldsymbol{\tau}. \tag{9.24}$$

Это уравнение и определяет радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ фиксированной точки M_2 нити, которая сматывается в натянутом состоянии с данной кривой (рис. 110).

Найдем эволюту для кривой, которую описывает точка M_2. Снабжая индексом 2 все величины, связанные с этой кривой, последовательно находим:

$$d\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} - \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s+C) - \boldsymbol{\tau}\right)ds = -\boldsymbol{\nu}K(s+C)\,ds,$$

$$ds_2 = |d\boldsymbol{r}_2| = K(s+C)\,ds,$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{d\boldsymbol{r}_2}{ds_2} = -\boldsymbol{\nu},$$

$$d\boldsymbol{\tau}_2 = -\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}ds = K\boldsymbol{\tau}\,ds,$$

$$K_2\boldsymbol{\nu}_2 = \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{ds_2} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{s+C}.$$

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\tau}, \quad K_2 = \frac{1}{s+C}, \quad R_2 = \frac{1}{K_2} = s+C. \tag{9.25}$$

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_3$ текущей точки эволюты для кривой, описываемой точкой M_2, будет равен

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_2 + R_2\boldsymbol{\nu}_2 = [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\tau}(s+c)] + (s+c)\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r},$$

т. е. эта эволюта совпадает с исходной кривой, что и требовалось доказать.

Глава X

ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ

§ 1. Скорость и ускорение точки

1. Скорость точки. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M, движущейся в пространстве, является функцией времени:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{10.1}$$

Его можно рассматривать также как функцию от дуги $s = M_0M$ траектории, которую описывает точка M (рис. 111):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s). \tag{10.2}$$

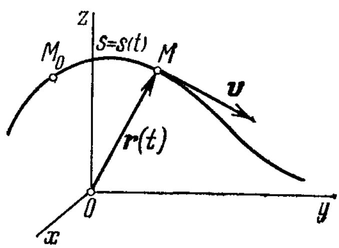

Рис. 111.

В этом случае длина дуги s играет роль промежуточного аргумента, который сам зависит от времени:

$$s = s(t). \tag{10.3}$$

Как уже отмечалось выше (см. (7.10)), скорость $\boldsymbol{v}$ точки M есть производная ее радиуса-вектора по времени, т. е.

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \tag{10.4}$$

или

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Но $d\boldsymbol{r}/ds=\boldsymbol{\tau}$; поэтому

$$\boldsymbol{v}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}. \tag{10.5}$$

Итак, *скорость изображается вектором, направленным по касательной к траектории, модуль которого равен абсолютной величине производной от длины дуги по времени*:

$$v=\left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{10.6}$$

2. Ускорение точки. Ускорение $\boldsymbol{w}$ точки определяется как предел отношения приращения скорости к приращению времени, когда приращение времени стремится к нулю:

$$\boldsymbol{w}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \tag{10.7}$$

Следовательно, ускорение есть производная от скорости по времени:

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}. \tag{10.8}$$

Воспользовавшись для скорости $\boldsymbol{v}$ найденным выше выражением (10.5), мы получим

$$\boldsymbol{w}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=K\boldsymbol{\nu}\frac{ds}{dt}.$$

В силу этого

$$\boldsymbol{w}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\boldsymbol{\nu}. \tag{10.9}$$

Мы видим, что *ускорение изображается вектором, компланарным векторам* $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, т. е. *вектором, расположенным* *в соприкасающейся плоскости.* Проекции w_T и w_N этого вектора на касательную и главную нормаль определяются формулами

$$w_T = \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{10.10}$$

$$w_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{10.11}$$

Итак, *проекция ускорения на касательную равна второй производной от дуги по времени; проекция ускорения на главную нормаль равна произведению кривизны траектории на квадрат скорости точки.*

§ 2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

1. Конечный поворот твердого тела. Рассмотрим твердое тело, имеющее неподвижную точку O, которую мы будем в дальнейшем принимать за начало координат. Пусть тело переместилось из одного положения в другое.

Всякое перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку O, можно получить поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через эту неподвижную точку.

Орт оси поворота, который соответствует рассматриваемому нами перемещению тела, мы обозначим Φ^0. Этот орт мы будем считать направленным по оси в ту сторону, откуда вращение тела наблюдается происходящим против хода часовой стрелки (рис. 112).

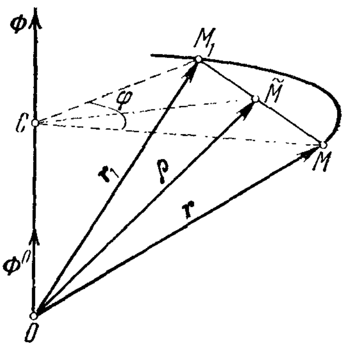

Рис. 112.

Рассмотрим произвольную точку M тела. При повороте она перейдет в новое положение M_1, описав дугу окружности с центром C на оси вращения. Угол MCM_1, являющийся углом поворота тела, обозначим φ.

Обозначим через Δr вектор конечного перемещения точки M в ее новое положение M_1, а через ρ — средний радиус-вектор точки M, т. е. радиус-вектор середины $\widetilde{M}$ отрезка MM_1:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}, \tag{10.12}$$

$$\rho = \overrightarrow{O\widetilde{M}} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}}{2}. \tag{10.13}$$

Треугольник OMM_1 равнобедренный и плоскость CMM_1 перпендикулярна вектору Φ^0; поэтому вектор $\Delta \boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM_1}$ перпендикулярен векторам ρ, Φ^0 и одинаково направлен с их векторным произведением, т. е.

$$\Delta \boldsymbol{r} = \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{|\Phi^0 \times \rho|} \Phi^0 \times \rho. \tag{10.14}$$

Отсюда получается окончательная формула конечного поворота:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Phi \times \rho, \tag{10.15}$$

где

$$|\Phi| = \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{|\Phi^0 \times \rho|}. \tag{10.16}$$

Из чертежа (рис. 112) следует:

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = MM_1 = 2M\widetilde{M} = 2C\widetilde{M}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2},$$

$$|\Phi^0 \times \rho| = \rho \sin(\widehat{\Phi^0, \rho}) = C\widetilde{M}.$$

Поэтому

$$\Phi = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}. \tag{10.17}$$

Следовательно,

$$\Phi = 2\Phi^0\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}. \tag{10.18}$$

Полученный вектор Φ направлен по оси поворота и имеет модуль $2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$, зависящий только от угла поворота. Этот вектор мы будем называть *вектором конечного поворота твердого тела*. Он вполне определяет поворот тела.

Согласно формуле конечного поворота (10.15) *конечное перемещение точки M твердого тела равно векторному про-*

изведению вектора Φ конечного поворота на средний радиус-вектор ρ этой точки M.

2. Формула Эйлера. Допустим, что рассматриваемое перемещение твердого тела произошло за бесконечно малый промежуток времени Δt (рис. 113). Разделим на Δt обе части формулы (10.15) конечного поворота:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Phi}{\Delta t} \times \rho.$$

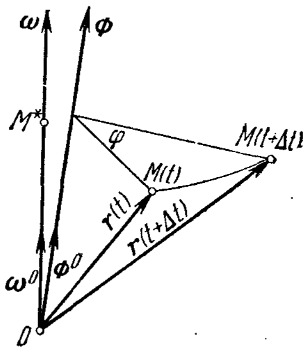

Рис. 113.

По определению предел полученного отношения $\Delta \boldsymbol{r}$ к Δt является скоростью $\boldsymbol{v}$ точки M:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Phi}{\Delta t} \times \rho\right).$$

Приняв во внимание, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \rho = \boldsymbol{r}$, мы получим отсюда формулу Эйлера

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{10.19}$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t} \tag{10.20}$$

есть вектор, не зависящий от выбора точки M тела. Он называется *угловой скоростью тела.*

Итак, *скорость $\boldsymbol{v}$ любой точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (начала O), равна векторному произведению угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M относительно неподвижного начала O.*

3. Угловая скорость. Выясним механический смысл возникшего в формуле Эйлера вектора $\boldsymbol{\omega}$, который мы назвали угловой скоростью тела.

а) Модуль угловой скорости ω определяется формулой

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t}. \tag{10.21}$$

На основании формулы (10.17) мы получим

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \varphi}{\frac{\varphi}{2} \cdot \Delta t} \right).$$

Но

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = 1;$$

поэтому

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi}{\Delta t}. \tag{10.22}$$

Итак, *модуль ω угловой скорости твердого тела есть предел отношения угла поворота φ тела к времени поворота Δt, когда последнее стремится к нулю.*

б) Чтобы охарактеризовать направление угловой скорости, мы рассмотрим коллинеарную с ней ось, проходящую через неподвижную точку O.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}^*$ любой точки M^* этой оси (рис. 113) отличается от $\boldsymbol{\omega}$ только скалярным множителем:

$$\boldsymbol{r}^* = \lambda \boldsymbol{\omega}.$$

Следовательно, на основании формулы Эйлера (10.19) скорость любой точки этой оси равна нулю:

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \lambda = 0.$$

Итак, *угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ изображается вектором, направленным по мгновенной оси вращения, все точки которой в данный момент времени имеют нулевые скорости.*

в) Определим орт мгновенной оси $\boldsymbol{\omega}^0$. Воспользовавшись формулами (10.20), (10.21), мы получим

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi \boldsymbol{\Phi}^0}{\Delta t} = \frac{1}{\omega} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\Phi}^0,$$

т. е.

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\Phi}^0. \tag{10.23}$$

Итак, *мгновенная ось вращения есть предельное положение оси поворота тела, соответствующего бесконечно малому изменению времени.*

4. Доказательство существования угловой скорости твердого тела. При переходе от формулы конечного поворота (10.15) к формуле Эйлера мы фактически постулировали существование предела

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t} = \omega,$$

т. е. постулировали существование вектора угловой скорости. Теперь мы строго докажем это существование, опираясь на тот факт, что в каждый момент времени все точки твердого тела обладают определенными скоростями.

а) Сначала докажем существование предела $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Phi^0$.

Рассмотрим две точки тела, скорости которых v_1 и v_2 в данный момент t не коллинеарны. За бесконечно малый промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$ радиусы-векторы r_1 и r_2 этих точек получат приращения Δr_1 и Δr_2, перпендикулярные вектору конечного поворота Φ^0. Следовательно,

$$\Phi^0 = \frac{\Delta r_1 \times \Delta r_2}{|\Delta r_1 \times \Delta r_2|} = \frac{\dfrac{\Delta r_1}{\Delta t} \times \dfrac{\Delta r_2}{\Delta t}}{\left|\dfrac{\Delta r_1}{\Delta t} \times \dfrac{\Delta r_2}{\Delta t}\right|}. \tag{10.24}$$

Предел полученного выражения существует и равен

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Phi^0 = \frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|}. \tag{10.25}$$

б) Возьмем теперь какую-нибудь точку твердого тела, радиус-вектор r которой в данный момент t не коллинеарен вектору ω^0, а скорость равна v.

Модуль вектора поворота, соответствующего бесконечно малому промежутку времени $(t,\ t + \Delta t)$, определяется формулой (10.16):

$$\Phi = \frac{|\Delta r|}{|\Phi^0 \times \rho|},$$

откуда

$$\frac{\Phi}{\Delta t} = \frac{\left|\dfrac{\Delta r}{\Delta t}\right|}{|\Phi^0 \times \rho|}.$$

Предел полученного выражения существует и равен

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t} = \frac{|v|}{|\omega^0 \times r|}. \tag{10.26}$$

в) Теперь легко доказывается существование угловой скорости:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi}{\Delta t} \Phi^0 = \frac{|v|}{|\omega^0 \times r|} \cdot \frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|}. \quad (10.27)$$

§ 3. Относительная производная вектора

1. Подвижная система отнесения. Очень часто приходится рассматривать векторы, определенные относительно движущегося твердого тела V. Обычно для такого определения вводят подвижную систему координат $M_0\xi\eta\zeta$, неизменно связанную с телом (рис. 114). Начало координат M_0 и все точки осей этой системы являются фиксированными точками тела и движутся вместе с ним. Поэтому орты осей подвижной системы ξ^0, η^0, ζ^0 являются функциями времени t.

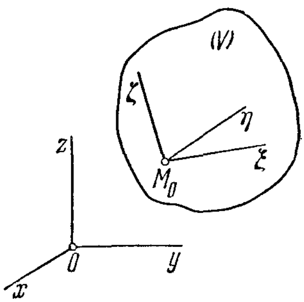

Рис. 114.

Всякий вектор $\boldsymbol{R}$ можно определить его разложением по ортам осей подвижной системы:

$$\boldsymbol{R} = \xi^0 R_\xi + \eta^0 R_\eta + \zeta^0 R_\zeta, \quad (10.28)$$

причем относительные проекции вектора R_ξ, R_η, R_ζ, т. е. его проекции на подвижные орты, определяются обычными формулами:

$$R_\xi = \xi^0 \cdot \boldsymbol{R}, \quad R_\eta = \eta^0 \cdot \boldsymbol{R}, \quad R_\zeta = \zeta^0 \cdot \boldsymbol{R}. \quad (10.29)$$

В общем случае относительные проекции R_ξ, R_η, R_ζ вектора $\boldsymbol{R}$ также являются функциями времени t. Они будут постоянными лишь в том случае, если вектор $\boldsymbol{R}$ неизменно связан с твердым телом.

2. Абсолютная и относительная производные вектора. Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени Δt от данного момента t до следующего момента $t + \Delta t$. За этот промежуток времени движущееся тело V перейдет из положения $V(t)$ в новое положение $V(t + \Delta t)$, а переменный вектор $\boldsymbol{R}$ изменит свое значение $\boldsymbol{R}(t)$ на новое значение $\boldsymbol{R}(t+\Delta t)$. Если бы за рассматриваемый промежуток времени Δt вектор $\boldsymbol{R}$ не изменял своего относительного положения по отношению к телу V и перемещался вместе с ним, то из положения $\boldsymbol{R}(t)$ он перешел бы в некоторое

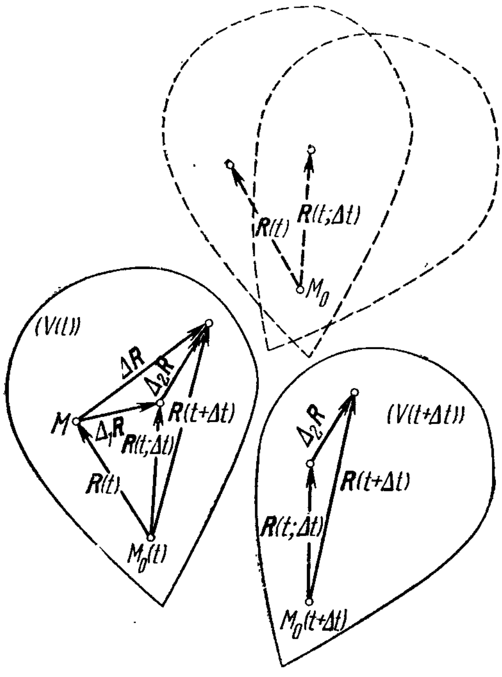

Рис. 115.

положение $\boldsymbol{R}(t;\ \Delta t)$ (рис. 115), отличное от настоящего нового положения $\boldsymbol{R}(t+\Delta t)$.

Разности между получившимися тремя векторами $\boldsymbol{R}(t)$, $\boldsymbol{R}(t;\ \Delta t)$, $\boldsymbol{R}(t+\Delta t)$ имеют определенный смысл.

Разность

$$\boldsymbol{R}(t;\ \Delta t)-\boldsymbol{R}(t)=\Delta_1\boldsymbol{R}, \tag{10.30}$$

называемая *увлечением вектора*, является приращением, которое получил бы вектор $\boldsymbol{R}(t)$, если бы перемещался с твердым телом, сохраняя фиксированное положение по отношению к нему.

Разность

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t)-\boldsymbol{R}(t;\Delta t)=\Delta_2\boldsymbol{R}, \tag{10.31}$$

называемая *относительным изменением вектора* $\boldsymbol{R}$, является приращением, которое получает вектор $\boldsymbol{R}$ с точки зрения наблюдателя, неизменно связанного с твердым телом.

Разность

$$\boldsymbol{R}(t+\Delta t)-\boldsymbol{R}(t)=\Delta\boldsymbol{R} \tag{10.32}$$

является *абсолютным приращением вектора* $\boldsymbol{R}$.

Из чертежа непосредственно ясно, что

$$\Delta\boldsymbol{R}=\Delta_1\boldsymbol{R}+\Delta_2\boldsymbol{R}. \tag{10.33}$$

Разделив на Δt и перейдя к пределу, мы получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1\boldsymbol{R}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_2\boldsymbol{R}}{\Delta t}. \tag{10.34}$$

Выясним смысл получившихся пределов.

а) Предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta t}$ является обычной производной вектора $\boldsymbol{R}$ по времени. Мы для отчетливости будем ее называть *абсолютной производной*:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}. \tag{10.35}$$

б) Предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_2\boldsymbol{R}}{\Delta t}$ является производной вектора $\boldsymbol{R}$ с точки зрения наблюдателя, неизменно связанного с твердым телом V и рассматривающего изменение вектора $\boldsymbol{R}$ только по отношению к телу V. Эту производную мы будем называть *относительной производной* и обозначать $\frac{\delta\boldsymbol{R}}{\delta t}$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_2\boldsymbol{R}}{\Delta t}=\frac{\delta\boldsymbol{R}}{\delta t}. \tag{10.36}$$

в) Предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1\boldsymbol{R}}{\Delta t}$ есть предел отношения приращения $\Delta_1\boldsymbol{R}$ вектора $\boldsymbol{R}$ при условии, что он неизменно связан с твердым телом, к бесконечно малому приращению времени.

Приращение $\Delta_1\boldsymbol{R}$ не изменится, если твердое тело из нового положения $V(t+\Delta t)$ мы параллельно перенесем так, чтобы новое положение начальной точки $M_0(t+\Delta t)$ совпало с исходным $M_0(t)$. Поэтому $\Delta_1 \boldsymbol{R}$ можно рассматривать как перемещение точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки M_0. Следовательно, *можно считать, что предел* $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1 \boldsymbol{R}}{\Delta t}$ *выражает скорость указанной точки M и определяется формулой Эйлера* (10.19):

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1 \boldsymbol{R}}{\Delta t}=\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{R}. \qquad (10.37)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ является здесь мгновенной угловой скоростью тела V. Ее можно истолковать как угловую скорость вспомогательного твердого тела V^*, геометрически равного данному телу V и вращающегося вокруг неподвижной точки M_0^*. При этом вращение происходит так, что в каждый момент времени вспомогательное тело параллельным перемещением может быть геометрически совмещено с соответствующим положением тела V.

Ясно, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора начальной точки M_0^*.

Итак, мы из формулы (10.34) получаем следующую окончательную формулу:

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{R}+\frac{\delta \boldsymbol{R}}{\delta t}. \qquad (10.38)$$

Здесь $\boldsymbol{R}$ — переменный вектор, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела, с которым связана подвижная система отсчета, $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$ — абсолютная производная вектора $\boldsymbol{R}$, $\frac{\delta \boldsymbol{R}}{\delta t}$ — относительная производная вектора $\boldsymbol{R}$.

3. Общий случай движения твердого тела. Выведенная формула (10.38), связывающая абсолютную и относительную производные любого вектора $\boldsymbol{R}$, имеет основное значение в кинематике. Она позволяет очень просто устанавливать основные соотношения кинематики твердого тела и относительного движения. В качестве примера мы разберем вывод формулы для скорости точки произвольно движущегося твердого тела.

Рассмотрим произвольно движущееся в пространстве твердое тело и определим скорости его точек.

Возьмем в этом теле произвольную начальную точку M_0 с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_0$ и произвольную точку M с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ (рис. 116).

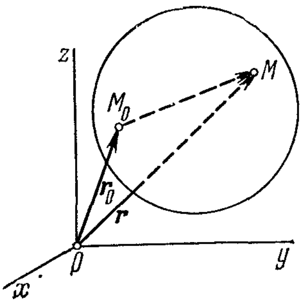

Рис. 116.

Продифференцировав очевидное соотношение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}, \tag{10.39}$$

мы получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} + \frac{d\overrightarrow{M_0M}}{dt}. \tag{10.40}$$

По формуле (10.38) для абсолютной производной находим

$$\frac{d\overrightarrow{M_0M}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{M_0M} + \frac{\delta\overrightarrow{M_0M}}{\delta t}. \tag{10.41}$$

Но вектор $\overrightarrow{M_0M}$ неизменно связан с телом и его относительная производная равна нулю:

$$\frac{\delta\overrightarrow{M_0M}}{\delta t} = 0;$$

поэтому

$$\frac{d\overrightarrow{M_0M}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0). \tag{10.42}$$

Следовательно (см. (10.40)),

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0). \tag{10.43}$$

Абсолютные производные $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt}$ являются соответственно скоростями $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_0$ точек M и M_0; поэтому полученную формулу можно переписать так:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0). \tag{10.44}$$

Таким образом, *скорость точки твердого тела слагается из поступательной скорости, равной скорости* $\boldsymbol{v}_0$ *выбранной начальной точки* M_0 *тела, и из скорости* $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$*, обусловленной вращением тела вокруг начальной точки* M_0.

Глава XI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Векторные функции нескольких скалярных аргументов

1. Определение векторной функции. Если каждой системе значений переменных скаляров u, v, w из некоторой области их изменения соответствует определенное значение переменного вектора $\boldsymbol{R}$, то скаляры u, v, w называются *аргументами*, а вектор $\boldsymbol{R}$ — *их функцией*:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(u, v, w). \tag{11.1}$$

Функция называется *непрерывной* при данной системе значений аргументов, если при их бесконечно малых изменениях функция меняется бесконечно мало:

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0 \\ \Delta w \to 0}} [\boldsymbol{R}(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - \boldsymbol{R}(u, v, w)] = 0. \tag{11.2}$$

2. Частные производные и частные дифференциалы векторной функции. Как и в обычном анализе, возникают понятия частных производных и дифференциалов.

Частной производной векторной функции $\boldsymbol{R}$ *по одному из аргументов* называется ее обычная производная по этому аргументу, вычисленная в предположении, что остальные аргументы рассматриваются как постоянные:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{R}_u = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(u + \Delta u, v, w) - \boldsymbol{R}(u, v, w)}{\Delta u}, \\
\boldsymbol{R}_v = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(u, v + \Delta v, w) - \boldsymbol{R}(u, v, w)}{\Delta v}, \\
\boldsymbol{R}_w = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(u, v, w + \Delta w) - \boldsymbol{R}(u, v, w)}{\Delta w}.
\end{gathered} \tag{11.3}$$

Частным дифференциалом функции $\boldsymbol{R}$ *по одному из независимых аргументов* называется произведение частной производной от нее по этому аргументу на его приращение:

$$\partial_u \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_u \Delta u, \quad \partial_v \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_v \Delta v, \quad \partial_w \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_w \Delta w. \tag{11,4}$$

В дальнейшем будет предполагаться, что частные производные существуют и непрерывны при рассматриваемых значениях аргументов.

3. Полный дифференциал векторной функции. *Полным дифференциалом $d\boldsymbol{R}$ функции $\boldsymbol{R}$ нескольких аргументов* называется сумма ее частных дифференциалов по всем ее независимым аргументам:

$$d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_u \Delta u + \boldsymbol{R}_v \Delta v + \boldsymbol{R}_w \Delta w. \tag{11.5}$$

Согласно этому определению полные дифференциалы независимых аргументов совпадают с их приращениями:

$$du = \Delta u, \ dv = \Delta v, \ dw = \Delta w. \tag{11.6}$$

Если аргументы u, v, w функции $\boldsymbol{R}$ сами являются функциями от других аргументов t и s, то применимо обычное правило дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} &= \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s} &= \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s}. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Из этих формул непосредственно следует *свойство инвариантности полного дифференциала относительно преобразований аргументов*:

$$d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_u du + \boldsymbol{R}_v dv + \boldsymbol{R}_w dw = \boldsymbol{R}_t dt + \boldsymbol{R}_s ds. \tag{11.8}$$

4. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Частные производные высших порядков от функции многих аргументов u, v, w, ... определяются обычным способом:

$$(\boldsymbol{R}_u)_u = \boldsymbol{R}_{uu} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u^2}, \quad (\boldsymbol{R}_u)_v = \boldsymbol{R}_{uv} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial u\, \partial v}, \ \ldots \tag{11.9}$$

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что все встречающиеся частные производные не только существуют, но и непрерывны при рассматриваемых значениях аргументов. Вследствие этого будет иметь силу теорема о независимости частной производной от последовательности дифференцирований:

$$\boldsymbol{R}_{uv} = \boldsymbol{R}_{vu}. \tag{11.10}$$

Точно так же обычным способом определяются и полные дифференциалы высших порядков:

$$d^2\boldsymbol{R} = d\,(d\boldsymbol{R}),\ d^3\boldsymbol{R} = d\,(d^2\boldsymbol{R}),\ \ldots \tag{11.11}$$

Если, например, $\boldsymbol{R}$ есть функция двух независимых аргументов u, v, то

$$du = \Delta u,\ dv = \Delta v,\ d^2u = 0,\ d^2v = 0,\ \ldots, \tag{11.12}$$

и мы получаем

$$\left.\begin{aligned} &d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_u du + \boldsymbol{R}_v dv,\\ &d^2\boldsymbol{R} = d\,(d\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}_{uu}du^2 + 2\boldsymbol{R}_{uv}du\,dv + \boldsymbol{R}_{vv}dv^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{11.13}$$

Если же аргументы u, v сами являются функциями, то

$$\left.\begin{aligned} &d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_u du + \boldsymbol{R}_v dv,\\ &d^2\boldsymbol{R} = d\,(d\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}_{uu}du^2 + 2\boldsymbol{R}_{uv}du\,dv + \boldsymbol{R}_{vv}dv^2 +\\ &\qquad\qquad\qquad + \boldsymbol{R}_u d^2u + \boldsymbol{R}_v d^2v,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{11.14}$$

Во всех случаях справедлива обычная формула Тейлора

$$\Delta\boldsymbol{R} = \frac{1}{1!}d\boldsymbol{R} + \frac{1}{2!}d^2\boldsymbol{R} + \cdots + \frac{1}{n!}d^n\boldsymbol{R} + \frac{1}{n!}\rho^n\xi_n,$$
$$\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}, \quad \lim_{\rho\to 0}\xi_n = 0. \tag{11.15}$$

§ 2. Параметризованная поверхность

1. Векторное параметрическое уравнение поверхности. Поверхность называется *параметризованной*, если радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ ее текущей точки M определен как непрерывная функция двух параметров u, v, изменяющихся в некоторой области (σ^*):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \quad (u, v) \in (\sigma^*). \tag{11.16}$$

Знак «$\in$» указывает на то, что точка (u, v) принадлежит области (σ^*). При этом предполагается, что в каждой точке области (σ^*) частные производные $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ непрерывны и неколлинеарны, т. е.

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0. \tag{11.17}$$

Уравнение (11.16), определяющее радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки поверхности как функцию от параметров u, v, называется *векторным параметрическим уравнением поверхности* (рис. 117). Ясно, что если такое уравнение (11.16) задано, то соответствующая ему поверхность определена и теоретически может быть построена по точкам.

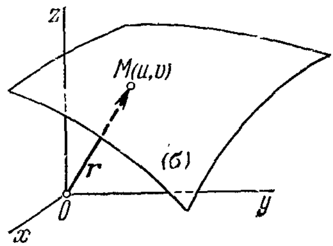

Рис. 117.

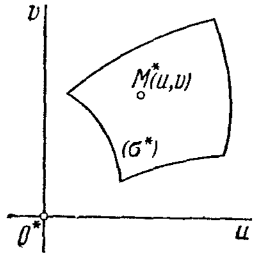

Рис. 118.

Каждую пару значений параметров u, v целесообразно рассматривать как пару декартовых координат на вспомогательной плоскости O^*uv, которая называется *плоскостью параметров* или *фазовой плоскостью*. Область (σ^*) изменения параметров составляет часть этой плоскости (рис. 118). Уравнение поверхности сопоставляет каждой точке $M^*(u, v)$ области (σ^*) определенную точку $M(u, v)$ поверхности (σ). В дальнейшем параметризация будет предполагаться п р а в и л ь н о й в том смысле, что соответствие между точками поверхности (σ) и области (σ^*) взаимно однозначное (рис. 117 и 118).

2. Поверхность в декартовых координатах. В пространстве, отнесенном к декартовой системе координат $Oxyz$, поверхность часто определяют уравнением, которое связывает координаты x, y, z ее текущей точки и разрешено относительно одной из них:

$$z = f(x, y). \qquad (11.18)$$

Таким образом, уравнением поверхности является такое уравнение (11.18), которому удовлетворяют координаты любой точки поверхности и только они.

Имея такое координатное уравнение поверхности (11.18) и пользуясь разложением радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$

текущей точки $M(x, y, z)$ по ортам координатных осей:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z,$$

мы можем сразу написать векторное параметрическое уравнение поверхности:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}f(x, y). \tag{11.19}$$

Роль параметров u, v в этом уравнении играют две декартовых координаты x, y.

Обратный переход от векторного параметрического уравнения поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{11.20}$$

к координатному уравнению (11.18) более сложен и связан с ограничительными предположениями. Спроектировав радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки параметризованной поверхности (11.20) на координатные оси, мы получим ее декартовы координаты x, y, z как функции от параметров u, v:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v). \tag{11.21}$$

Ясно, что эта система трех координатных параметрических уравнений равносильна исходному векторному уравнению (11.20). Определив из первых двух уравнений параметры u и v как функции от двух декартовых координат x, y и подставив эти функции в третье уравнение, мы получим координатное уравнение

$$z = f(x, y).$$

При этом ясно, что возникает вопрос о возможности и однозначности разрешения двух уравнений системы (11.21) относительно параметров u, v. Исследование этого вопроса является достаточно сложным, и мы его проводить не будем, поскольку основную роль у нас будет играть векторное параметрическое уравнение, а не координатное.

3. Параметрическая сеть. Через каждую точку $M(u, v)$ правильно параметризованной поверхности проходят две так называемые *параметрические линии*: линия u и линия v.

Линия u описывается текущей точкой поверхности, когда меняется только первый параметр u, второй же параметр v имеет фиксированное значение v_0. Следовательно, векторное уравнение линии u имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0). \tag{11.22}$$

Аналогично определяется линия v. Ее векторное уравнение имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v). \tag{11.23}$$

Таким образом, поверхность (σ) оказывается покрытой сетью линий, состоящей из семейства линий u и семейства линий v (рис. 119). Эта сеть линий называется *параметрической сетью*.

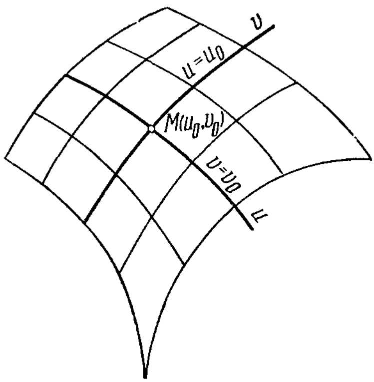

Рис. 119.

4. Линия на параметризованной поверхности. Если на правильно параметризованной поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{11.24}$$

задана линия (рис. 120)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \tag{11.25}$$

то каждой точке этой линии, т. е. каждому значению ее параметра t, будет соответствовать точка на поверхности, т. е. пара значений ее параметров u, v. Это

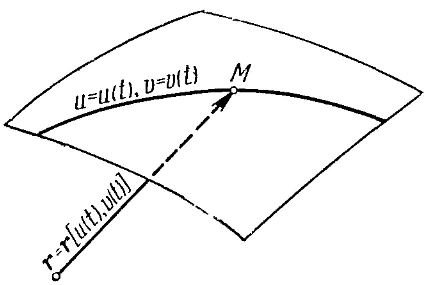

Рис. 120.

значит, что параметры u, v вдоль линии будут функциями параметра t:

$$u = u(t), \quad v = v(t). \tag{11.26}$$

Обратно, если такие функции $u(t)$, $v(t)$ заданы, то на поверхности определена линия. Векторное уравнение этой линии получится из векторного уравнения поверхности (11.24):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,[u(t),\ v(t)]. \tag{11.27}$$

Итак, линия на поверхности задается системой уравнений (11.26), определяющей параметры u, v, к которым отнесена поверхность, как функции от одного параметра t. Эту систему уравнений (11.26) мы будем называть *системой внутренних уравнений линии на поверхности.*

§ 3. Касательная плоскость и нормаль

1. Касательные к параметрическим линиям. Мы знаем, что если радиус-вектор есть функция от одного скалярного аргумента, то его производная по этому аргументу есть вектор, направленный по касательной к линии, которую описывает конец радиуса-вектора. Вследствие этого частные производные $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки параметризованной поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

по параметрам u, v являются векторами, направленными соответственно по касательным к параметрическим линиям u и v. Отличие от нуля векторного произведения

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$$

означает, что касательные к параметрическим линиям определены и не сливаются.

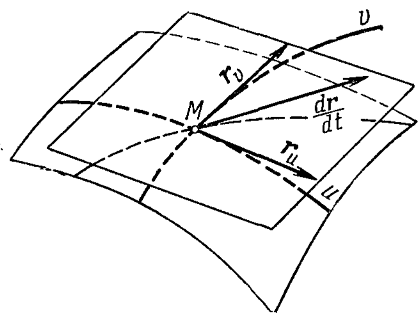

Рис. 121.

2. Касательная плоскость. Рассмотрим на поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

неособую точку M (рис. 121) и проходящую через нее произвольную линию

$$u = u(t),\quad v = v(t).$$

Касательная к этой линии определится производной $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, которую мы вычислим по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}. \tag{11.28}$$

Мы видим, что вектор $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ касательной в рассматриваемой точке M к нашей линии разлагается по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, которые касаются параметрических линий в точке M. Следовательно, касательные в неособой точке M поверхности к всевозможным линиям, проведенным на поверхности через эту точку, располагаются в одной плоскости.

Определение. *Касательной плоскостью к поверхности в ее неособой точке* называется плоскость, в которой располагаются касательные в этой точке M к всевозможным линиям, проведенным на поверхности через эту точку.

Таким образом, касательная плоскость определяется лежащими в ней точкой касания M и двумя векторами $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, касательными к параметрическим линиям в этой точке.

3. Нормальный вектор. *Нормальным вектором поверхности в данной точке M* называется вектор $\boldsymbol{N}$, перпендикулярный к касательной плоскости в этой точке M. Такой вектор определяет нормальную прямую (нормаль) и направлен по ней. Вблизи своего начала M он выделяет определенную сторону поверхности, которая видна из его конца (рис. 122).

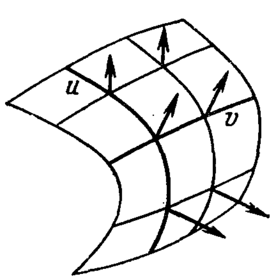

Рис. 122.

Нормальный вектор $\boldsymbol{N}$ в текущей точке M параметризованной поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{11.29}$$

автоматически определяется как векторное произведение частных производных $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, если только установлен определенный порядок их следования.

Мы будем считать, что параметр u первый, а параметр v второй. В соответствии с таким порядком следования параметров или, как говорят, в соответствии с такой ориентацией параметризованной поверхности определяется и нормальный вектор:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v. \tag{11.30}$$

В дальнейшем, записывая параметры u, v, к которым отнесена поверхность, мы всегда на первом месте будем писать тот, который считается первым.

4. Преобразование параметров. Рассмотрим произвольное взаимно однозначное преобразование параметров u, v поверхности в новые параметры α, β:

$$\begin{aligned} u &= u(\alpha, \beta), \\ v &= v(\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{11.31}$$

При этом будем предполагать, что в рассматриваемой области это преобразование (11.31) взаимно однозначно, функции u, v обладают непрерывными частными производными и определитель преобразования (якобиан)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \tag{11.32}$$

отличен от нуля.

Радиус-вектор текущей точки поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ будет сложной функцией от новых параметров:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)]. \tag{11.33}$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_\alpha &= \boldsymbol{r}_u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ \boldsymbol{r}_\beta &= \boldsymbol{r}_u \frac{\partial u}{\partial \beta} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v}{\partial \beta}. \end{aligned} \tag{11.34}$$

Перемножив векторно эти векторы, найдем

$$\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix}, \tag{11.35}$$

или

$$\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \frac{\partial (u, v)}{\partial (\alpha, \beta)}. \tag{11.36}$$

Вектор $\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta$ определяет направление нормали к поверхности при новой параметризации, а вектор $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ — при старой. Мы видим, что эти направления совпадают, если определитель преобразования $\partial (u, v)/\partial (\alpha, \beta)$ положителен, и противоположны, если он отрицателен. Таким образом, можно сказать, что *при преобразовании параметров с положительным определителем преобразования ориентация поверхности сохраняется, а с отрицательным — меняется на противоположную.*

§ 4. Площадь области на поверхности

1. Площадь плоской области. Площадь S плоской области декартовой плоскости Oxy (рис. 123) выражается двойным интегралом

$$S = \iint\limits_{(S)} dx\, dy. \tag{11.37}$$

Если перейти к новым переменным u, v при помощи преобразования

$$x = \varphi (u, v), \quad y = \psi (u, v),$$

отображающего взаимно однозначно область (S) на новую

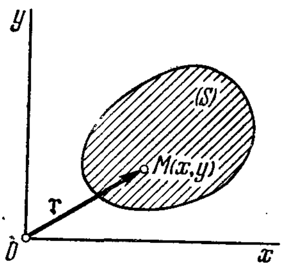

Рис. 123.

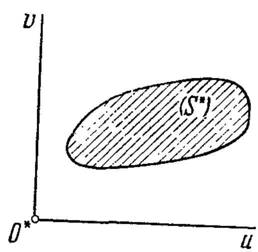

Рис. 124.

область (S^*) новой декартовой плоскости O^*uv (рис. 124), то площадь S исходной области выразится преобразованным двойным интегралом:

$$S = \iint\limits_{(S^*)} \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv. \tag{11.38}$$

Придадим этому интегралу другую форму. Разложим радиус-вектор $\mathfrak{r}$ текущей точки исходной плоскости по ортам осей $\mathfrak{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y$ и найдем его частные производные по новым переменным:

$$\mathfrak{r}_u = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \mathfrak{r}_v = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial v} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Векторное произведение этих частных производных имеет вид

$$\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}.$$

Вследствие этого формулу (11.38) для площади плоской области можно записать так:

$$S = \iint\limits_{(S^*)} |\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v|\, du\, dv. \tag{11.39}$$

2. Площадь области на поверхности. Рассмотрим на правильно параметризованной поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

некоторую область (σ) и соответствующую ей область (σ^*) на плоскости параметров u, v (рис. 125). Разобьем область (σ) произвольным способом на n частей $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_n)$. Одновременно разобьется на соответствующие части $(\overset{*}{\sigma}_1), \ldots$ $\ldots, (\overset{*}{\sigma}_n)$ и область (σ^*) на плоскости параметров. На каждой частичной области (σ_k) зафиксируем произвольно точку $M_k(u_k, v_k)$, которую назовем *опорной точкой*. Переместимся из нее в произвольную точку $M(u, v)$ рассматриваемой частичной области (σ_k):

$$u = u_k + \Delta u, \quad v = v_k + \Delta v,$$

и составим соответствующий этому перемещению дифференциал радиуса-вектора:

$$\mathfrak{r} = d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u(u_k, v_k)\,\Delta u + \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)\,\Delta v =$$
$$= \boldsymbol{r}_u(u_k, v_k)(u - u_k) + \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)(v - v_k). \qquad (11.40)$$

Если начало этого дифференциала $\mathfrak{r}$ поместить в опорную точку M_k, то он будет лежать в касательной плоскости

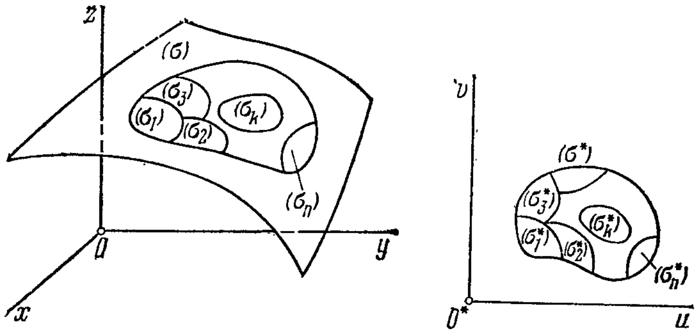

Рис. 125.

в этой точке, а его конец будет определять в касательной плоскости точку $\widetilde{M}(u, v)$, которую мы назовем изображением смещенной точки $M(u, v)$ (рис. 126). Таким образом, все точки частичной области (σ_k) поверхности взаимно однозначно отобразятся на некоторую плоскую область $(\tilde{\sigma}_k)$, расположенную в касательной плоскости. Мы назовем ее *чешуйкой*, покрывающей частичную область (σ_k).

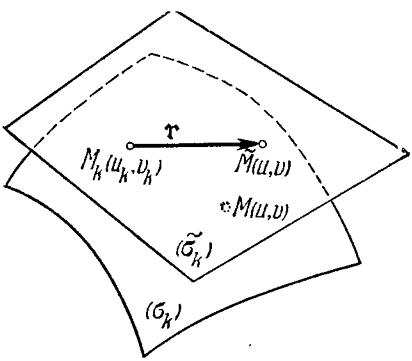

Рис. 126.

Определение. Площадью σ области (σ) на поверхности называется предел суммы площадей чешуек $(\tilde{\sigma}_k)$, покрывающих частичные области (σ_k), на которые разбита исходная область (σ) при условии, что число n частичных областей неограниченно растет, а максимум диаметров чешуек стремится к нулю:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\sigma}_k. \tag{11.41}$$

Покажем, что определенная таким образом величина площади σ не зависит ни от способа разбиения области (σ) на частичные области, ни от выбора опорных точек, ни от параметризации поверхности.

А. Сначала вычислим площадь $\tilde{\sigma}_k$ чешуйки $(\tilde{\sigma}_k)$. Если за начало принять опорную точку $M_k(u_k, v_k)$, то радиусом-вектором $\mathfrak{r}$ текущей точки $\tilde{M}(u, v)$ чешуйки $(\tilde{\sigma}_k)$ будет дифференциал (11.40):

$$\mathfrak{r} = d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u(u_k, v_k)(u - u_k) + \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)(v - v_k).$$

Его частное дифференцирование по текущим параметрам дает

$$\mathfrak{r}_u = \boldsymbol{r}_u(u_k, v_k), \quad \mathfrak{r}_v = \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k).$$

Вследствие этого по формуле (11.39) для площади плоской области находим

$$\tilde{\sigma}_k = \iint\limits_{(\sigma_k^*)} |\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v|\, du\, dv = \iint\limits_{(\sigma_k^*)} |\boldsymbol{r}_u(u_k, v_k) \times \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)|\, du\, dv =$$

$$= |\boldsymbol{r}_u(u_k, v_k) \times \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)| \iint\limits_{(\sigma_k^*)} du\, dv,$$

т. е.

$$\tilde{\sigma}_k = |\boldsymbol{r}_u(u_k, v_k) \times \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)|\, \sigma_k^*, \tag{11.42}$$

где σ_k^* — площадь плоской частичной области (σ_k^*), являющейся изображением на плоскости параметров (u, v) частичной области (σ_k) поверхности, а следовательно, и покрывающей ее чешуйки $(\tilde{\sigma}_k)$.

Б. Подставив найденное выражение для площади $\tilde{\sigma}_k$ в формулу (11.41), определяющую площадь поверхности, получим

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\boldsymbol{r}_u(u_k, v_k) \times \boldsymbol{r}_v(u_k, v_k)|\, \sigma_k^*. \tag{11.43}$$

Таким образом, площадь σ поверхности (σ) выражается пределом интегральной суммы. Этот предел не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора опорных точек на соответствующих частичных областях и равен двойному интегралу

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma^*)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv. \tag{11.44}$$

Здесь область интеграции (σ^*) есть область изменения переменных u, v на плоскости параметров u и v (см. рис. 125). Она является образом области (σ) при ее взаимно однозначном отображении на плоскость параметров u, v. Поэтому в качестве области интеграции можно указать эту исходную область (σ) вместо ее образа (σ^*):

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv. \tag{11.45}$$

Формула (11.44), или, что то же, (11.45) для вычисления площади области поверхности называется *формулой компланации*.

В. Покажем теперь, что определяемая формулой компланации площадь куска поверхности не зависит от параметризации поверхности. Действительно, положим

$$u = \varphi(\alpha, \beta), \quad v = \psi(\alpha, \beta).$$

Тогда (см. (11.36))

$$\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}.$$

Следовательно, воспользовавшись правилом преобразования интеграла к новым аргументам, мы получим

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{|\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta|}{\left|\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}\right|} \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)}\right| d\alpha\, d\beta = \iint\limits_{(\sigma)} |\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{r}_\beta|\, d\alpha\, d\beta,$$

т. е. для σ получилась в новых параметрах прежняя формула.

3. Формула для вычисления площади поверхности, заданной уравнением $z = z(x, y)$. В этом случае параметрами являются координаты x, y. Радиус-вектор текущей точки поверхности имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z.$$

Последовательно находим

$$\boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \boldsymbol{r}_y = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i}\frac{\partial z}{\partial x} - \boldsymbol{j}\frac{\partial z}{\partial y} + \boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Следовательно, формула компланации (11.45) принимает в рассматриваемом случае вид

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{11.46}$$

При этом область (S) изменения переменных x, y при перемещении точки по рассматриваемой области (σ) является проекцией этой области (σ) на плоскость Oxy (рис. 127).

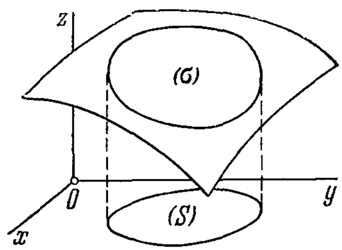

Рис. 127.

Имея в виду, что косинус угла γ, который нормаль в текущей точке поверхности $z = z(x, y)$ образует с осью Oz, выражается формулой

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

мы можем формулу компланации переписать иначе:

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \frac{dx\, dy}{|\cos\gamma|}. \tag{11.47}$$

4. Элемент площади поверхности. *Элементом площади* $d\sigma(u, v)$ параметризованной поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

называется площадь параллелограмма, построенного на частных дифференциалах $\partial_u \boldsymbol{r}$, $\partial_v \boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки поверхности по его параметрам. Площадь параллелограмма, построенного на двух векторах, равна модулю их векторного произведения. Поэтому для элемента площади поверхности мы получим формулу

$$d\sigma(u, v) = |\partial_u \boldsymbol{r} \times \partial_v \boldsymbol{r}| \tag{11.48}$$

или

$$d\sigma(u, v) = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv. \tag{11.49}$$

Замечание. Мы видим, что элемент площади поверхности (11.49) является подынтегральным выражением в формуле компланации (11.45).

Теорема. *Если дифференциалы du и dv бесконечно малы, то элемент площади поверхности $d\sigma$ отличается на*

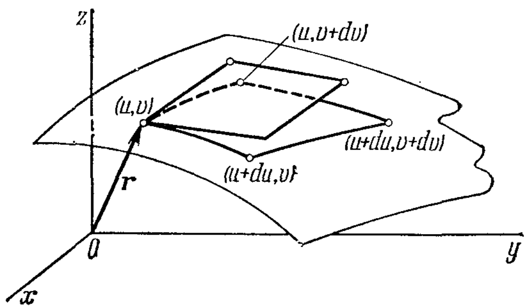

Рис. 128.

величину высшего порядка малости по отношению к произведению дифференциалов $du\, dv$ от площади $\Delta\sigma$ элементарного четырехугольника, расположенного на поверхности и ограниченного координатными линиями поверхности, проходящими через точки (u, v) и $(u + du, v + dv)$ (рис. 128), *т. е.*

$$\Delta\sigma = d\sigma + \xi\, du\, dv, \tag{11.50}$$

где

$$\lim_{du\to 0,\ dv\to 0} \xi = 0.$$

Доказательство. Формула комплапации дает

$$\Delta\sigma = \iint\limits_{(\Delta\sigma^*)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv,$$

причем область интеграции $(\Delta\sigma^*)$ изображается на плоскости параметров u, v прямоугольником со сторонами du и dv (рис. 129).

Применив к полученному интегралу теорему о среднем значении и приняв во внимание, что

$$\Delta\sigma^* = du\, dv,$$

мы найдем

$$\Delta\sigma = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{\substack{u=\tilde{u}\\ v=\tilde{v}}}\, du\, dv,$$

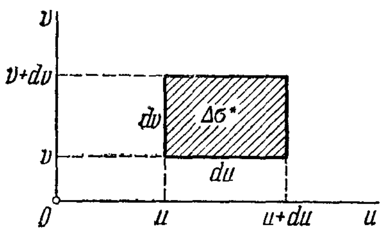

Рис. 129.

где $(\tilde{u}, \tilde{v})$ — некоторая точка на $(\Delta\sigma^*)$. Опираясь на непрерывность функции $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|$, мы получим

$$\Delta\sigma = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv + \xi\, du\, dv, \tag{11.51}$$

что и дает нашу теорему.

5. **Векторный элемент площади поверхности.** *Векторным элементом* $\boldsymbol{d\sigma}$ *площади параметризованной ориентированной поверхности*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

называется векторное произведение частных дифференциалов $\partial_u \boldsymbol{r}$, $\partial_v \boldsymbol{r}$ радиуса-вектора ее текущей точки по ее параметрам, т. е.

$$\boldsymbol{d\sigma} = \partial_u \boldsymbol{r} \times \partial_v \boldsymbol{r},$$

или

$$\boldsymbol{d\sigma} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\, du\, dv. \tag{11.52}$$

Мы видим, что модуль векторного элемента площади совпадает с элементом площади

$$|\boldsymbol{d\sigma}| = d\sigma. \tag{11.53}$$

§ 5. Первая квадратичная форма поверхности

1. Определение первой квадратичной формы. Рассмотрим параметризованную поверхность

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

Независимо от того, являются ли параметры u, v независимыми аргументами или же любыми функциями от других независимых аргументов, полный дифференциал $d\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки поверхности представляется в виде (векторной) инвариантной линейной дифференциальной формы *)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv.$$

Тем же свойством инвариантности обладает и скалярный квадрат этой формы, представляющий собой скалярную квадратичную дифференциальную форму

$$d\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2. \qquad (11.54)$$

Определение. Скалярный квадрат полного дифференциала $d\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора текущей точки поверхности называется *первой квадратичной формой* φ_1 *поверхности*:

$$\varphi_1 = d\boldsymbol{r}^2. \qquad (11.55)$$

В развернутом виде ее записывают так:

$$\varphi_1 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \qquad (11.56)$$

Коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы определяются из ранее полученного для нее выражения (11.54):

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \qquad F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \qquad G = \boldsymbol{r}_v^2. \qquad (11.57)$$

Замечание 1. В неособой точке поверхности

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0.$$

Следовательно,

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2 > 0, \qquad (11.58)$$

*) Дифференциальной формой называется всякий однородный многочлен относительно дифференциалов аргументов. В зависимости от степени этого многочлена форма может быть линейной, квадратичной и т. д.

т. е.

$$EG - F^2 > 0. \tag{11.59}$$

Отсюда, в частности, следует, что в неособой точке всегда

$$E > 0 \text{ и } G > 0.$$

Замечание 2. В неособой точке поверхности векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны. Следовательно, если дифференциалы du и dv параметров не равны одновременно нулю, то

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv \neq 0.$$

А это значит, что

$$\varphi_1 = d\boldsymbol{r}^2 > 0, \tag{11.60}$$

т. е. *первая квадратичная форма в неособой точке поверхности положительно определена.*

2. Внутренняя геометрия поверхности. Если поверхность рассматривать как нерастяжимую абсолютно гибкую пленку, то при ее изгибаниях, очевидно, будут сохраняться длины дуг расположенных на ней линий, углы между линиями, площади областей. Все такие величины называются *внутреннегеометрическими величинами поверхности.* Оказывается, что *все они выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и, обратно, все геометрические величины, которые определяются только при помощи коэффициентов первой квадратичной формы, не меняются при изгибаниях поверхности и являются внутреннегеометрическими.* Ниже мы найдем формулы, позволяющие вычислять длины, углы и площади на поверхности при помощи коэффициентов E, F, G.

3. Длина дуги линии на поверхности. На поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

рассмотрим линию

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Квадрат дифференциала ее дуги имеет вид

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2$$

или

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F du\, dv + G\, dv^2. \tag{11.61}$$

Таким образом, *дифференциал дуги линии на поверхности* *является квадратным корнем из первой квадратичной формы поверхности, вычисленной вдоль этой линии.* Вследствие этого длина дуги линии, заключенной между точками M_1 и M_2, которым соответствуют значения t_1 и t_2 параметров, определится формулой

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (11.62)$$

Мы видим, что для вычисления длины дуги линии на поверхности, заданной системой своих внутренних уравнений (11.26), надо знать лишь коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы как функции от параметров u, v.

4. Угол между линиями на поверхности. Пусть в точке M поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

пересекаются две линии:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} u = u_1(t), \\ v = v_1(t); \end{cases} \qquad \text{II.}\quad \begin{cases} u = u_2(t), \\ v = v_2(t). \end{cases} \qquad (11.63)$$

Будем обозначать через d и δ операторы дифференцирования вдоль этих линий:

$$du = \frac{du_1}{dt}dt, \quad dv = \frac{dv_1}{dt}dt, \quad \delta u = \frac{du_2}{dt}\delta t, \quad \delta v = \frac{dv_2}{dt}\delta t.$$

Тогда угол θ между этими линиями в точке их пересечения определится формулой

$$\cos\theta = \frac{d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|}, \qquad (11.64)$$

где дифференциалы

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv, \qquad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\delta u + \boldsymbol{r}_v\delta v$$

предполагаются вычисленными в рассматриваемой точке M. Подставив эти выражения для дифференциалов $d\boldsymbol{r}$ и $\delta\boldsymbol{r}$ в формулу (11.64) и воспользовавшись выражениями (11.57) для коэффициентов первой квадратичной формы, мы получим

$$\cos\theta = \frac{E du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \qquad (11.65)$$

Мы видим, что *для определения угла между двумя линиями на поверхности, заданными своими внутренними уравнениями* (11.63), *достаточно знать лишь коэффициенты* E, F, G.

5. Площадь области на поверхности. Рассмотрим на поверхности

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$$

некоторую область (σ) (рис. 130). Ее площадь σ определяется формулой (11.45):

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv.$$

Выразим модуль векторного произведения через скалярные произведения (см. (11.58)):

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2}.$$

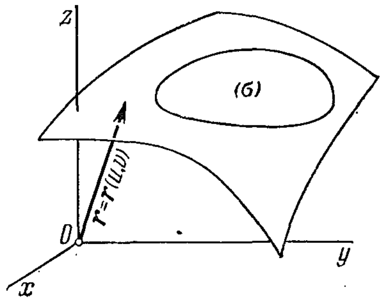

Рис. 130.

Имея в виду выражения (11.57) для коэффициентов E, F, G первой квадратичной формы, получим

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}. \tag{11.66}$$

Следовательно,

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{11.67}$$

Итак, *площадь любой области на поверхности может быть вычислена, если известны коэффициенты* E, F, G *первой квадратичной формы поверхности.*

§ 6. Вторая квадратичная форма поверхности

1. Определение второй квадратичной формы поверхности. Рассмотрим параметризованную поверхность:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

Найдем первый и второй полные дифференциалы радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ ее текущей точки:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv, \\ d^2\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_{uu} du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv} du\, dv + \boldsymbol{r}_{vv} dv^2 + \boldsymbol{r}_u d^2 u + \boldsymbol{r}_v d^2 v. \end{aligned} \tag{11.68}$$

Полученное выражение для второго дифференциала $d^2\boldsymbol{r}$ не является инвариантной квадратичной формой относительно первых дифференциалов du, dv параметров u, v вследствие наличия двух добавочных членов $\boldsymbol{r}_u d^2 u$, $\boldsymbol{r}_v d^2 v$. Эти члены обращаются в нуль, если параметры u, v являются независимыми аргументами, но они становятся, вообще говоря, добавочными квадратичными формами, если параметры u, v сами оказываются функциями от других аргументов. Добавочные члены $\boldsymbol{r}_u d^2 u$ и $\boldsymbol{r}_v d^2 v$ являются векторами, которые лежат в касательной плоскости к поверхности в рассматриваемой точке и, следовательно, перпендикулярны орту нормали $\boldsymbol{n}$. Умножив скалярно выражение (11.68) для второго дифференциала $d^2\boldsymbol{r}$ на орт $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности, и приняв во внимание равенство нулю скалярных произведений добавочных членов на перпендикулярный к ним орт нормали $\boldsymbol{n}$, мы получим следующую инвариантную квадратичную форму:

$$\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu} du^2 + 2\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv} du\, dv + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv} dv^2. \tag{11.69}$$

Определение. Скалярное произведение полного дифференциала второго порядка $d^2\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки поверхности на орт нормали $\boldsymbol{n}$ в этой точке называется *второй квадратичной формой* φ_2 *поверхности*:

$$\varphi_2 = \boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}. \tag{11.70}$$

В развернутом виде эта формула записывается так:

$$\varphi_2 = D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2.$$

Формулы для коэффициентов D, D', D'' второй квадратичной формы следуют из ранее полученного для нее выражения (11.69)

$$D = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}, \quad D' = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}, \quad D'' = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}, \tag{11.71}$$

где

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Замечание. Касательные к параметрическим линиям поверхности векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ ортогональны орту нормали $\boldsymbol{n}$, поэтому

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0.$$

Продифференцировав каждое из этих тождеств по параметрам u и v, мы получим

$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uu}=0,\quad \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0,$$
$$\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{uv}=0,\quad \boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{vv}=0.$$

На основании этих соотношений мы можем придать формулам (11.71) для коэффициентов второй квадратичной формы следующий вид:

$$D=-\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\quad D'=-\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_u=-\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\quad D''=-\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{r}_v. \tag{11.72}$$

2. Нормальная кривизна линии на поверхности. Мы будем рассматривать параметризованную поверхность

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$$

и линию, расположенную на ней:

$$u=u(t),\ v=v(t).$$

Вектором кривизны всякой линии в том числе и линии, расположенной на поверхности, называется произведение кривизны K этой линии на орт ее главной нормали $\boldsymbol{\nu}$. Как мы знаем (см. (8.35)), это произведение равно производной орта касательной $\boldsymbol{\tau}$ по дуге s, т. е. производной второго порядка от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки линии по дуге:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=K\boldsymbol{\nu}. \tag{11.73}$$

Определение. *Нормальной кривизной* K_n *линии на поверхности* называется проекция вектора кривизны этой линии на нормаль к поверхности в рассматриваемой точке.

Иначе говоря, нормальная кривизна K_n линии на поверхности есть скалярное произведение вектора кривизны $K\boldsymbol{\nu}$ этой линии на орт нормали $\boldsymbol{n}$ поверхности:

$$K_n=K\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{n} \tag{11.74}$$

или

$$K_n = \frac{\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}. \tag{11.75}$$

На основании определений квадратичных форм поверхности имеем

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \varphi_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$\boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r} = \varphi_2 = D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2.$$

Следовательно,

$$K_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{11.76}$$

Итак, нормальная кривизна линии на поверхности равна отношению второй квадратичной формы поверхности к первой, причем значения параметров u, v берутся в рассматриваемой точке, а их дифференциалы du, dv вычисляются в этой точке из уравнения линии.

Заменив знаменатель в выражении (11.76) для нормальной кривизны обратно через ds^2, мы получим

$$K_n = D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D'\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \tag{11.77}$$

Мы видим, что нормальная кривизна выражается через коэффициенты D, D', D'', которые в рассматриваемой точке однозначно определены, и через отношения $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, являющиеся коэффициентами разложения орта касательной $\boldsymbol{\tau}$ рассматриваемой линии по векторам $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}_u\frac{du}{ds} + \boldsymbol{r}_v\frac{dv}{ds}.$$

Если две линии имеют в рассматриваемой точке общую касательную, то для них отношения $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ будут соответственно совпадать или отличаться только знаком. В обоих случаях нормальная кривизна K_n для этих линий будет одна и та же. Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Все линии на поверхности, проходящие через данную точку и обладающие в ней общей касательной, имеют в этой точке одинаковые нормальные кривизны.*

3. Теорема Менье. Рассмотрим на поверхности совокупность линий (L), имеющих общую точку M и общую касательную в этой точке (рис. 131). Как только что отмечалось, главные кривизны K_n всех этих линий одинаковы.

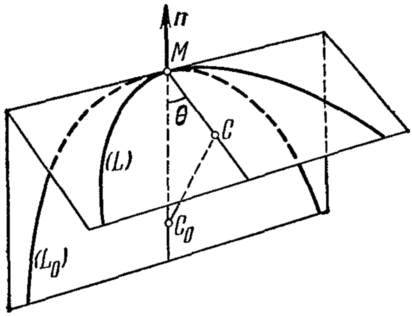

Рис. 131.

Найдем связь между их кривизнами K. С этой целью из указанных линий особо выделим одну, называемую *нормальным сечением поверхности в точке M*. Это — линия (L_0), получающаяся в результате сечения поверхности плоскостью, проходящей через нормаль поверхности в точке M. Нормальная кривизна у нее та же; ее кривизну и орт главной нормали обозначим K_0 и $\mathbf{v}_0$.

Так как нормальное сечение — плоская линия, то ее главная нормаль лежит в секущей плоскости и потому совпадает с нормалью поверхности. Это значит, что $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{n}$ либо равны, либо противоположны: $\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{n} = \pm 1$. Поэтому из (11.74) получаем

$$K_n = \pm K_0. \tag{11.78}$$

Пусть θ — угол между соприкасающейся плоскостью линии (L) и нормалью поверхности или, что то же, острый угол между главной нормалью линии (L) и нормалью поверхности. Очевидно,

$$\cos\theta = |\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{n}|. \tag{11.79}$$

Внеся (11.78) в (11.74), будем иметь

$$\pm K_0 = K \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{n}.$$

Так как кривизны K и K_0 по самому их определению неотрицательны, то отсюда, учитывая (11.79), получаем

$$K_0 = K \cos \theta,$$

или, что то же,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} \cos \theta. \tag{11.80}$$

Величину, обратную кривизне линии, принято называть радиусом кривизны. Обозначим радиусы кривизны произвольной линии (L) и нормального сечения (L_0) соответственно R и R_0:

$$R = \frac{1}{K}, \quad R_0 = \frac{1}{K_0}.$$

Теперь (11.80) можно переписать иначе:

$$R = R_0 \cos \theta. \tag{11.81}$$

Это и есть теорема Менье. Сформулируем ее так: *чтобы получить в данной точке радиус кривизны любой линии (L), лежащей на поверхности, надо умножить радиус кривизны нормального сечения, проходящего через ту же точку и имеющего в ней общую с линией (L) касательную, на косинус угла между соприкасающейся плоскостью линии (L) и нормалью поверхности в указанной точке.*

Из этой теоремы непосредственно следует: *у всех линий на поверхности, имеющих в общей точке общую касательную и общую соприкасающуюся плоскость, кривизна в этой точке одинакова.*

§ 7. Главные направления и главные кривизны поверхности

1. Направление на поверхности. Рассмотрим на поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ линию, проходящую через фиксированную точку M. Имея в виду (11.61), орт касательной к этой линии можно представить так:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}},$$

или, если числитель и знаменатель разделить на dv,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dv} + \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G}}. \tag{11.82}$$

Так как точка M фиксирована, то $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, E, F и G определены, и чтобы указать направление касательной, достаточно задать отношение дифференциалов du и dv. В этом смысле говорят, что *отношение этих дифференциалов определяет в данной точке поверхности направление.*

2. Главные направления на поверхности. Ранее отмечалось, что каждому направлению на поверхности соответствует определенная нормальная кривизна K_n. Будем искать в фиксированной точке M направления, которым соответствуют экстремальные значения нормальной кривизны. Обозначив

$$\frac{du}{dv} = \xi,$$

из (11.76) получим

$$K_n = \frac{D\xi^2 + 2D'\xi + D''}{E\xi^2 + 2F\xi + G}. \tag{11.83}$$

Так как в фиксированной точке коэффициенты квадратичных форм определены, то правая часть (11.83) зависит лишь от ξ. Найдем ее производную:

$$\frac{dK_n}{d\xi} = 2\frac{(E\xi^2 + 2F\xi + G)(D\xi + D') - (D\xi^2 + 2D'\xi + D'')(E\xi + F)}{(E\xi^2 + 2F\xi + G)^2}. \tag{11.84}$$

Ранее отмечалось, что в неособой точке первая квадратичная форма положительно определена. Поэтому знаменатель в правой части последнего равенства не равен нулю, и необходимое условие экстремума нормальной кривизны состоит в равенстве нулю числителя:

$$(E\xi^2 + 2F\xi + G)(D\xi + D') -$$
$$- (D\xi^2 + 2D'\xi + D'')(E\xi + F) = 0 \tag{11.85}$$

или, что то же,

$$(FD - ED')\xi^2 + (GD - ED'')\xi + (GD' - FD'') = 0. \tag{11.86}$$

В неособой точке поверхности дискриминант квадратного уравнения (11.86), вообще говоря, положителен. В этом легко убедиться, введя на поверхности *ортогональную параметрическую сеть*, т. е. такую, что в каждой точке линия u перпендикулярна линии v. В такой сети, как это видно из (11.57), $F = 0$. В силу этого уравнение (11.86) примет вид

$$-ED'\xi^2 + (GD - ED'')\xi + GD' = 0, \qquad (11.87)$$

а его дискриминант равен

$$(GD - ED'')^2 + 4EGD'^2.$$

Но (см. § 5, п. 1) в неособой точке коэффициенты E и G положительны. Поэтому дискриминант неотрицателен. Нулю же он равен лишь при условии, что $GD - ED'' = 0$ и $D' = 0$. Но при этом условии все коэффициенты уравнения (11.87) обращаются в нуль, т. е. это уравнение, а потому и уравнение (11.86), обращается в тождество.

Итак, *если уравнение* (11.86) *не является тождеством, то в неособой точке поверхности оно имеет два различных действительных корня* ξ_1 *и* ξ_2. Определяемые этими корнями направления на поверхности называются *главными направлениями*, а соответствующие им нормальные кривизны — *главными кривизнами поверхности*.

Главные кривизны K_1 и K_2 можно получить, внося последовательно ξ_1 и ξ_2 в (11.83). Далее будет показано, что они и являются экстремальными значениями нормальной кривизны.

Заметим, что главные кривизны можно получить и иначе. Разделив обе части (11.85) на $E\xi^2 + 2F\xi + G$ и приняв во внимание (11.83), будем иметь

$$D\xi + D' - K_n (E\xi + F) = 0. \qquad (11.88)$$

Уравнение (11.86) приводится к виду

$$(D\xi + D')(F\xi + G) - (D'\xi + D'')(E\xi + F) = 0.$$

Внося сюда (11.88) и сокращая результат на $E\xi + F$, получим

$$D'\xi + D'' - K_n (F\xi + G) = 0. \qquad (11.89)$$

Исключая ξ из уравнений (11.88) и (11.89), придем к квадратному уравнению

$$(F^2 - EG)K_n^2 + (ED'' + GD - 2FD')K_n + \\ + (D'^2 - DD'') = 0, \qquad (11.90)$$

корни которого и будут главными кривизнами.

3. Перпендикулярность главных направлений. Отнесем поверхность к *главным направлениям*, т. е. построим координатную сеть так, чтобы в каждой точке линии u и v касались главных направлений. Теперь нормальные кривизны линий u и v будут главными кривизнами. Пусть K_2 является нормальной кривизной линии v. Вдоль этой линии u не меняется, и потому $du = 0$, $\xi = du/dv = 0$. Подставив это в (11.88) и (11.89), получим

$$D' - K_2F = 0, \quad D'' - K_2G = 0. \tag{11.91}$$

Если в качестве ξ взять не отношение $\frac{du}{dv}$, а $\frac{dv}{du}$, то аналогично получатся соотношения

$$D - K_1E = 0, \quad D' - K_1F = 0. \tag{11.92}$$

Вычтем второе равенство (11.92) из первого равенства (11.91):

$$(K_1 - K_2)\,F = 0. \tag{11.93}$$

Но $K_2 \neq K_1$, так как в противном случае из (11.91) и (11.92) следовала бы пропорциональность

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G},$$

в силу которой уравнение (11.86) превратилось бы в тождество и главные направления не были бы определены. Поэтому из (11.93) заключаем: $F = 0$. А так как, по определению, коэффициент F равен скалярному произведению векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, направления которых в нашем случае совпадают с главными направлениями, то эти векторы, а потому и *главные направления, перпендикулярны.*

4. Формула Эйлера. Отнесем поверхность к главным направлениям. Так как эти направления перпендикулярны, то $F = 0$. Кроме того, из (11.91) и (11.92) получаем $D = K_1E$, $D' = 0$. $D'' = K_2G$. Внесем это в (11.83):

$$K_n = K_1 \frac{E\xi^2}{E\xi^2 + G} + K_2 \frac{G}{E\xi^2 + G}. \tag{11.94}$$

Пусть φ — угол между направлением, которое определяется отношением $du/dv = \xi$, и линией u. Поскольку направление задается отношением дифференциалов, то один из этих дифференциалов можно задать произвольно. Для первого направления положим $du = \xi$, $dv = 1$. Второе направление есть направление линии u, и потому $\delta v = 0$, а δu можно считать произвольным. Подставив это в (11.65) и учтя соотношение $F = 0$, будем иметь

$$\cos\varphi = \frac{\xi\sqrt{E}}{\sqrt{E\xi^2 + G}}.$$

Угол между тем же направлением $\frac{du}{dv} = \xi$ и линией v равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, поскольку линии u и v перпендикулярны. Для него аналогично найдем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \equiv \sin\varphi = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E\xi^2 + G}}.$$

С учетом этих равенств (11.94) можно переписать так:

$$K_n = K_1\cos^2\varphi + K_2\sin^2\varphi. \qquad (11.95)$$

Это соотношение между нормальной кривизной данной линии, главными кривизнами и углом, образуемым этой линией с главными направлениями, называется **формулой Эйлера**.

Из этой формулы следует:

$$K_n = K_1 + (K_2 - K_1)\sin^2\varphi,$$

$$K_n = K_2 + (K_1 - K_2)\cos^2\varphi.$$

Если $K_1 > K_2$, то отсюда заключаем: $K_2 < K_n < K_1$. Если же $K_1 < K_2$, то $K_1 < K_n < K_2$. В обоих случаях нормальная кривизна заключена между главными кривизнами. Этим доказано, что *главные кривизны являются экстремальными значениями нормальной кривизны.*

5. Полная и средняя кривизны поверхности. Главные кривизны являются инвариантами поверхности: в каждой неособой точке они имеют определенные значения, не зависящие от того, к какой координатной сети отнесена поверхность. Поэтому они играют существенную роль при изучении поверхности. Но эти инварианты неудобны тем, что они как корни квадратного уравнения (11.90) иррационально выражаются через коэффициенты квадратичных форм. Поэтому из них составляют два других инварианта — их произведение $K_1 \cdot K_2$ и их сумму $K_1 + K_2$. Первый из этих новых инвариантов называют *полной кривизной поверхности*, а второй — *средней кривизной поверхности*. По свойству корней квадратного уравнения для них получаются такие формулы:

$$K_{\text{полн.}} \equiv K_1 K_2 = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

$$K_{\text{средн.}} \equiv K_1 + K_2 = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{EG - F^2}.$$

Как видим, они выражаются через коэффициенты квадратичных форм рационально.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Глава XII

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Функция поля. Поверхности уровня

1. Скалярное поле. Если в каждой точке некоторой части пространства определено значение некоторого скаляра Ф, то говорят, что в этой части пространства определено *скалярное поле* (*поле скаляра* Ф).

Примерами конкретных скалярных полей могут служить поле температуры нагретого тела, поле давлений воздуха в атмосфере, поле плотности вещества в теле и т. д.

Замечание. Очень часто приходится иметь дело не с пространственными, а с плоскими полями, когда каждой точке плоскости приводится в соответствие значение скаляра. Такие поля рассматриваются, например, в метеорологии: поле температур в данный момент на поверхности земли, поле давлений и т. д.

2. Скаляр поля. В каждой точке поля скаляр поля Ф имеет определенное значение. Следовательно, скаляр Ф является функцией от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки поля:

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}). \tag{12.1}$$

Мы будем относить поле к прямоугольной системе координат x, y, z. Тогда текущая точка пространства будет определяться тройкой текущих прямоугольных координат x, y, z и скаляр поля будет функцией от них:

$$\Phi = \Phi(x, y, z). \tag{12.2}$$

Замечание 1. Для обеспечения возможности прилагать методы дифференциального и интегрального исчисления в теории поля мы будем ограничиваться рассмотрением лишь таких скалярных функций поля, которые непрерывны и обладают непрерывными частными производными до необходимого в исследовании порядка.

Замечание 2. Часто приходится рассматривать переменные поля, когда скаляр поля зависит не только от координат точки, но и от времени:

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t).$$

Мы ограничимся изучением лишь стационарных полей, не зависящих от времени. Если же поля будут переменными, то наша теория будет относиться лишь к каждому их мгновенному состоянию. Теория стационарного скалярного поля имеет большое самостоятельное значение. С другой стороны, она является основой для изучения переменных полей.

3. Поверхности уровня. Геометрическое место точек поля, в которых скаляр поля Φ имеет одно и то же значение, называется *поверхностью уровня поля.*

Таким образом, уравнение поверхности уровня поля имеет вид

$$\Phi(x, y, z) = C, \tag{12.3}$$

где C — произвольная постоянная, которой можно придавать любые значения, заключенные между наименьшим и наибольшим значениями скаляра поля.

Через каждую точку поля $M(x_0, y_0, z_0)$ проходит единственная поверхность уровня, определенная уравнением

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x_0, y_0, z_0). \tag{12.4}$$

Замечание. В случае двумерного поля понятие поверхности уровня заменяется понятием *линии уровня.* Примерами таких линий могут служить наносимые на картах изобары (линии равных давлений), изотермы (линии равных температур) и т. д.

§ 2. Градиент поля

1. Определение градиента. Полный дифференциал скаляра поля

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

мы можем представить как скалярное произведение двух векторов:

$$d\Phi = \left(\boldsymbol{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz). \quad (12.5)$$

Один множитель является дифференциалом радиуса-вектора текущей точки:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz. \quad (12.6)$$

Другой множитель зависит лишь от координат точки поля и не зависит от их дифференциалов. Этот множитель и называется *градиентом поля в данной точке*:

$$\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (12.7)$$

Таким образом,

$$d\Phi = \operatorname{grad}\Phi\cdot d\boldsymbol{r}. \quad (12.8)$$

Определение. Вектор, зависящий только от координат текущей точки, называется *градиентом поля*, grad Φ, если скалярное произведение этого вектора на дифференциал радиуса-вектора $d\boldsymbol{r}$ текущей точки является полным дифференциалом скаляра поля:

$$d\Phi = \operatorname{grad}\Phi\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Такой вектор выше был найден:

$$\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Однако возникает вопрос о его единственности: быть может, можно указать другие векторы, обладающие тем же свойством? Докажем, что это не так. Пусть имеется два градиента $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$, т. е.

$$d\Phi = \boldsymbol{g}_1\cdot d\boldsymbol{r} \quad \text{и} \quad d\Phi = \boldsymbol{g}_2\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Вычитая из первого равенства второе, мы получим

$$(\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2)\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Один множитель $d\boldsymbol{r}$ этого равного нулю скалярного произведения является произвольным перемещением текущей точки. Если бы второй множитель $\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2$ не равнялся нулю, то он был бы (в силу равенства нулю скалярного произведения) перпендикулярен к произвольному вектору $d\boldsymbol{r}$, а этого быть не может. Поэтому $\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2 = 0$, т. е.

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}_2.$$

Итак, *градиент поля в каждой точке является однозначно определенным вектором.*

2. Первая теорема о градиенте. *Градиент в данной точке поля направлен по нормали к поверхности уровня в этой точке* (рис. 132).

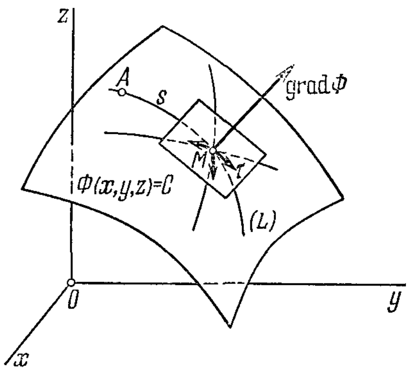

Рис. 132.

Доказательство. На поверхности уровня поля

$$\Phi(x, y, z) = C$$

мы возьмем какую-нибудь точку $M(x, y, z)$ и произвольно проведем через нее линию L, расположенную на поверхности. Эту линию отнесем к длине s ее дуги. Координаты текущей точки линии будут функциями от s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Так как линия лежит на нашей поверхности уровня, то координаты текущей точки ее удовлетворяют уравнению этой поверхности:

$$\Phi[x(s), y(s), z(s)] = C.$$

Продифференцировав это тождество по s, мы на основании правила дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = 0,$$

или

$$\operatorname{grad} \Phi \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

где вектор

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{i}\frac{dx}{ds} + \boldsymbol{j}\frac{dy}{ds} + \boldsymbol{k}\frac{dz}{ds}$$

является ортом касательной к линии L.

Это соотношение выполняется в любой точке линии L, но мы его будем рассматривать лишь в выбранной точке M. Мы видим, следовательно, что в точке M градиент перпендикулярен орту касательной $\boldsymbol{\tau}$ к произвольно проведенной на поверхности линии L. Таким образом, *касательные в точке M к всевозможным линиям поверхности уровня, проходящим через эту точку, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной к градиенту.*

Плоскость, в которой располагаются касательные в данной точке M поверхности к всевозможным линиям, проведенным на поверхности через данную точку M, называется (см. гл. XI, § 3, п. 2) *касательной плоскостью поверхности в точке M.* Перпендикуляр к касательной плоскости называется *нормалью поверхности* в точке касания. Следовательно, *градиент направлен по нормали поверхности уровня.*

§ 3. Производная по направлению

1. Определение производной по направлению. Выясним характер изменения скаляра поля в данном направлении. Пусть в данной точке $M(x,\ y,\ z)$ поля задан направляющий единичный вектор $\boldsymbol{s}^0$. Через точку M проведем произвольную линию (L_s), касающуюся орта $\boldsymbol{s}^0$ и отнесенную к длине своей дуги s (рис. 133):

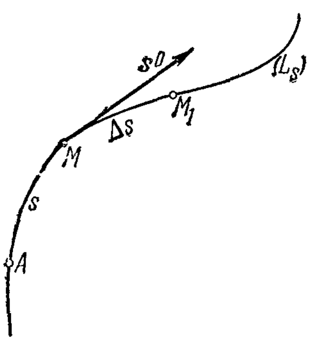

Рис. 133.

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s). \qquad (12.9)$$

Сместимся вдоль линии (L_s) из данной точки $M\,[x(s),\ y(s),\ z(s)]$ в соседнюю точку $M_1\,[x(s+\Delta s),\ y(s+\Delta s),\ z(s+\Delta s)]$. При таком смещении скаляр поля получит приращение

$$\Delta\Phi = \Phi\,[x(s+\Delta s),\ y(s+\Delta s),\ z(s+\Delta s)] - \Phi\,[x(s),\ y(s),\ z(s)].$$

Предел отношения этого приращения к приращению длины дуги Δs линии (L_s) и называется производной по направлению:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}=$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Phi\,[x\,(s+\Delta s),\,y\,(s+\Delta s),\,z\,(s+\Delta s)]-\Phi\,[x\,(s),\,y\,(s),\,z\,(s)]}{\Delta s}. \tag{12.10}$$

Итак, *производной скаляра поля в данной точке по данному направлению* называется предел отношения приращения скаляра при бесконечно малом смещении вдоль произвольно взятой линии, касающейся данного направления в данной точке, к приращению длины дуги линии при этом смещении.

Из определения вытекают два важных факта.

а) Непосредственно ясно, что выражающий производную по направлению предел (12.10) является полной производной скаляра поля по длине дуги s, когда аргументы x, y, z рассматриваются как функции от s, определенные линией (L_s):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\frac{d\Phi\,[x\,(s),\,y\,(s),\,z\,(s)]}{ds}. \tag{12.11}$$

Ниже будет показано, что эта производная не зависит от линии (L_s), а зависит лишь от точки и направления.

б) Для физического истолкования производной по направлению существенно, что по определению она дает в данной точке приращение скаляра в данном направлении, отнесенное к единице перемещения. Это значит, что при малом перемещении производная мало отличается от отношения приращения функции к величине перемещения.

2. Выражение производной по направлению через градиент. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds},$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\operatorname{grad}\Phi\cdot\boldsymbol{\tau}. \tag{12.12}$$

Приняв во внимание, что $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{s}^0$, мы получим формулу для вычисления производной по направлению $\boldsymbol{s}^0$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\operatorname{grad}\Phi\cdot\boldsymbol{s}^0,$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \text{Пр}_{s^0} \operatorname{grad} \Phi. \tag{12.13}$$

Итак, *производная по направлению равна проекции градиента на это направление.* Отсюда следует, что производная по направлению не зависит от выбора линии (L_s), которая проводится в данном направлении.

Замечание. Можно дать простой способ геометрического построения производной по направлению в данной точке M.

На градиенте как на диаметре строим сферу, проходящую через данную точку M (рис. 134). Через точку M проводим луч в заданном направлении до пересечения со сферой в точке P. Длина отрезка MP и даст величину производной.

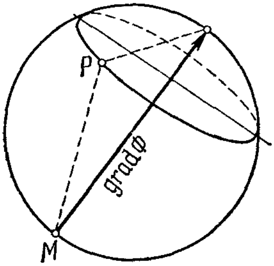

Рис. 134.

Если сферу пересечет не луч, а его продолжение, то производная по данному направлению будет отрицательной и будет отличаться от длины отрезка MP только знаком.

3. Вторая теорема о градиенте. *Производная скаляра поля в данной точке по направлению градиента имеет наибольшее значение и равна модулю градиента.*

Доказательство. Градиент поля направлен по нормали поверхности уровня; его орт мы будем обозначать $\boldsymbol{n}^0$. Тогда по формуле (12.12) мы получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \operatorname{grad} \Phi \cdot \boldsymbol{n}^0 = |\operatorname{grad} \Phi| \cdot 1 \cdot \cos 0^0,$$

т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = |\operatorname{grad} \Phi|. \tag{12.14}$$

По всякому другому направлению $\boldsymbol{s}^0$ производная будет меньше модуля градиента (как его проекция):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} < \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \tag{12.15}$$

4. Примеры. Пример А. Рассмотрим поле скаляра

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

а) Поверхности уровня определяются уравнением

$$\Phi = \text{const} \quad \text{или} \quad y/x = C,$$

т. е. поверхности являются плоскостями, проходящими через ось Oz (рис. 135).

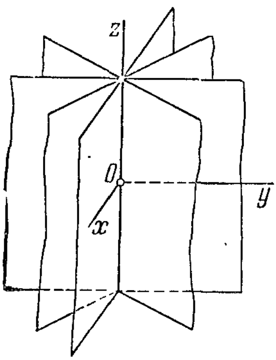

Рис. 135.

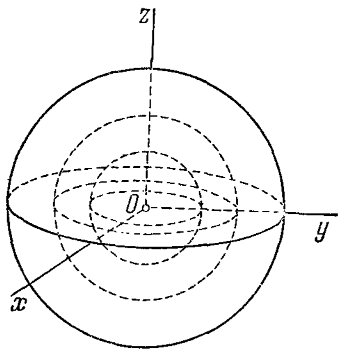

Рис. 136.

б) Находим градиент:

$$\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \boldsymbol{i}\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} + \boldsymbol{j}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= \frac{-\boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x}{x^2+y^2}.$$

в) Найдем производную по направлению $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ в точке M (1, 1, 1):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \operatorname{grad}\Phi\cdot\boldsymbol{s}^0 = \left[\frac{-\boldsymbol{i}y+\boldsymbol{j}x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}\right]_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}} =$$

$$= \frac{-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

Пример В. Рассмотрим скалярное поле $\Phi = \frac{1}{r}$, где r есть модуль радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ точки поля, т. е. $r = \sqrt{\boldsymbol{r}^2}$.

а) Поверхности уровня определяются уравнением

$$\Phi = \text{const} \quad \text{или} \quad r = C$$

и являются сферами с центром в начале координат (рис. 136).

б) Для определения градиента мы выразим скаляр поля через радиус-вектор:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{r}^2}}.$$

Найдем полный дифференциал этой функции:

$$d\Phi = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^2)^{-\frac{3}{2}}\, 2\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Но, с другой стороны,

$$d\Phi = \operatorname{grad}\Phi\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{grad}\Phi = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

в) Производная по направлению $\mathrm{s} = \boldsymbol{i}l + \boldsymbol{j}m + \boldsymbol{k}n$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ поля имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \operatorname{grad}\Phi\cdot\boldsymbol{s}^0 = -\frac{\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\cdot\frac{\boldsymbol{i}l + \boldsymbol{j}m + \boldsymbol{k}n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} =$$

$$= -\frac{xl + ym + zn}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3\,(l^2+m^2+n^2)}}.$$

§ 4. Направляющие косинусы нормали поверхности

1. Поверхность, определенную уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

можно рассматривать как поверхность уровня поля

$$\Phi = \Phi(x, y, z).$$

Градиент этого поля

$$\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \boldsymbol{n} \qquad (12.16)$$

в любой точке $M(x, y, z)$ нашей поверхности (§ 2 настоящей главы) направлен по нормали. Здесь $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ — значения частных производных левой части уравнения поверхности в рассматриваемой точке $M(x, y, z)$.

Следовательно, *направляющие косинусы нормали поверхности имеют вид*

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},\\
\cos\beta &= \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},\\
\cos\gamma &= \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.17)$$

2. Замечание. Направляющие косинусы нормали поверхности

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

будут определены лишь в тех точках поверхности, в которых функция $\Phi(x, y, z)$ дифференцируема и не все частные производные

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

равны нулю. Если все три частные производные равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,$$

то направляющие косинусы нормали, а следовательно, и сама нормаль не определяются.

Точки поверхности, в которых не выполняются указанные условия, называются *особыми*. Примером такой особой точки может служить вершина конической поверхности.

3. Случай, когда уравнение поверхности разрешено относительно третьей координаты z. Пусть это уравнение имеет вид

$$z = f(x, y). \qquad (12.18)$$

Перенеся все члены в левую часть, мы получим

$$z - f(x, y) = 0.$$

Сопоставив это уравнение с рассмотренным выше уравнением поверхности

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

мы можем считать, что в данном случае

$$\Phi(x, y, z) = z - f(x, y).$$

Поэтому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 1.$$

Обычно пользуются такими обозначениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = q. \tag{12.19}$$

В этих обозначениях

$$\boldsymbol{n} = \operatorname{grad}\Phi = -p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}. \tag{12.20}$$

Следовательно, для направляющих косинусов нормали поверхности мы получим формулы

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}},$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}. \tag{12.21}$$

Глава XIII

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Криволинейный интеграл как определенный интеграл от сложной функции

1. Простейший криволинейный интеграл. Нам придется иметь дело с определенными интегралами от сложных функций. В простейшем случае такой интеграл имеет вид

$$\int_a^b F(x, y, z)\,dx,$$

где подынтегральная функция зависит не только непосредственно от аргумента интеграции x, но и от промежуточных аргументов y, z, которые сами являются функциями аргумента x. Для вычисления такого интеграла необходимо, кроме подынтегральной функции $F(x, y, z)$ и пределов интеграции a, b, задать еще промежуточные аргументы y, z как функции от x:

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{13.1}$$

Это равносильно заданию направленного отрезка линии (L) (рис. 137) в прямоугольной системе координат $Oxyz$,

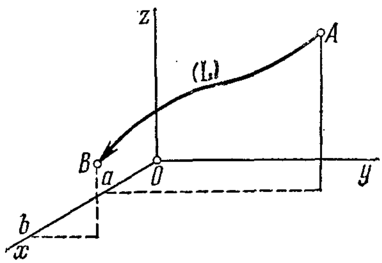

Рис. 137.

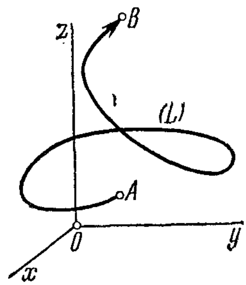

Рис. 138.

что дает повод называть наш интеграл **криволинейным** и употреблять для него особое обозначение, отражающее необходимость задания линии (L):

$$\int_{(L)} F(x, y, z)\, dx.$$

Итак, в простейшем случае *криволинейным интегралом* называется определенный интеграл от сложной функции

$$\int_{(L)} F(x, y, z)\, dx = \int_a^b F[x; f_1(x); f_2(x)]\, dx. \tag{13.2}$$

Мы обобщим это определение.

2. Криволинейный интеграл от линейной формы по произвольной кривой. Пусть в пространстве, отнесенном к прямоугольной системе координат $Oxyz$, дан направленный отрезок (L) некоторой линии (рис. 138), определенной системой параметрических уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{13.3}$$

причем параметр t монотонно меняется между своими значениями t_1 и t_2 в начале и в конце данного отрезка.

Пусть, кроме того, задана линейная дифференциальная форма с тремя аргументами x, y, z, т. е. выражение вида

$$\omega = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz, \tag{13.4}$$

где коэффициенты $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ являются произвольно заданными функциями от аргументов x, y, z.

О п р е д е л е н и е. *Криволинейным интегралом* $\int\limits_{(L)} \omega$ *от линейной дифференциальной формы* $\omega = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz$ *вдоль линии* (L) называется определенный интеграл, у которого:

1) подынтегральным выражением является форма ω при условии, что в ней аргументы x, y, z заменены функциями одного параметра t, определенными параметрическими уравнениями линии (L), а дифференциалы аргументов dx, dy, dz заменены дифференциалами этих функций;

2) нижним и верхним пределами интеграции являются значения параметра t соответственно в начальной и конечной точках рассматриваемого отрезка линии (L).

Итак

$$\int\limits_{(L)} \omega = \int\limits_{(L)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} [X(\varphi, \psi, \chi)\varphi' + Y(\varphi, \psi, \chi)\psi' + Z(\varphi, \psi, \chi)\chi']\,dt. \tag{13.5}$$

З а м е ч а н и е. Если за параметр, к которому отнесена линия интеграции (L) криволинейного интеграла от одночленной формы $f(x, y, z)\,dx$, примем аргумент интеграции x, то получим

$$\int\limits_{(L)} f(x, y, z)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), z(x)]\,dx. \tag{13.6}$$

Таким образом, мы вновь пришли к формуле (13.2), определяющей криволинейный интеграл как определенный интеграл от сложной функции, в которую, кроме аргумента интеграции, входят еще два аргумента, являющиеся функциями аргумента интеграции.

3. Основные свойства криволинейного интеграла. Из свойств определенного интеграла вытекают следующие основные свойства криволинейного интеграла.

Свойство 1. *Если изменить направление пути интеграции, то криволинейный интеграл изменит только свой знак:*

$$\int\limits_{(L)} \omega = -\int\limits_{(-L)} \omega. \qquad (13.7)$$

Действительно, при изменении направления пути интеграции меняются лишь местами пределы интеграции в определенном интеграле, которому равен криволинейный интеграл, а от этого меняется только знак.

Свойство 2. *Если путь интеграции (L) разбить на несколько участков, то криволинейный интеграл по всему пути (L) будет равен сумме интегралов по всем частичным участкам:*

$$\int\limits_{(L)} \omega = \int\limits_{(L_1)} \omega + \int\limits_{(L_2)} \omega + \ldots + \int\limits_{(L_n)} \omega. \qquad (13.8)$$

Это свойство непосредственно вытекает из теоремы о разбиении для определенного интеграла.

Свойство 3. *Криволинейный интеграл не зависит от выбора параметра, к которому относится линия интеграции.*

Действительно, пусть произведено преобразование параметра

$$t = f(s). \qquad (13.9)$$

Тогда система параметрических уравнений линии (L)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \qquad (13.10)$$

превратится в новую систему уравнений той же линии

$$x = \varphi_1(s), \quad y = \psi_1(s), \quad z = \chi_1(s) \qquad (s_1 \leqslant s \leqslant s_2). \qquad (13.11)$$

В соответствии с этими двумя способами параметризации линии (L) мы можем написать два различных выражения для криволинейного интеграла, который будем для простоты считать одночленным:

$$\int\limits_{(L(t))} \omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} X\,[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{13.12}$$

$$\int\limits_{(L(s))} \omega = \int\limits_{s_1}^{s_2} X\,[\varphi_1(s), \psi_1(s), \chi_1(s)]\,\varphi_1'(s)\,ds. \tag{13.13}$$

Выполнив в первом интеграле замену $t = f(s)$, мы получим

$$\int\limits_{(L(t))} \omega = \int\limits_{s_1}^{s_2} X\,[\varphi_1(s), \psi_1(s), \chi_1(s)]\,\varphi'\,[f(s)]\,f'(s)\,ds.$$

Но $\varphi'\,[f(s)]\,f'(s) = \varphi_1'(s)$, поэтому

$$\int\limits_{(L(t))} \omega = \int\limits_{s_1}^{s_2} X\,[\varphi_1(s), \psi_1(s), \chi_1(s)]\,\varphi_1'(s)\,ds,$$

или

$$\int\limits_{(L(t))} \omega = \int\limits_{(L(s))} \omega, \tag{13.14}$$

т. е., действительно, два выражения для криволинейного интеграла, соответствующие различным способам параметризации, оказываются равными между собой.

4. Обобщенный криволинейный интеграл. В общем случае под знак криволинейного интеграла могут входить не только координаты x, y, z текущей точки линии интеграции, но и другие величины, определенные в этой точке. Такими могут быть: а) производные одной текущей координаты по другой $\left(\text{например, } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$; б) различные дифференциально-геометрические величины кривой (кривизна, кручение, направляющие косинусы касательной и т. д.); в) производные от различных определенных на кривой величин по длине дуги кривой и т. д.

Вычисление такого рода обобщенных криволинейных интегралов не представляет никаких принципиальных затруднений и совершается по обычной схеме.

Пусть дан, например, криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L)} F\left[x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cos(\tau, \widehat{x})\right] ds,$$

распространенный по линии (L), заданной своими параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{13.15}$$

причем параметр t меняется монотонно от значения t_1 в начальной точке до значения t_2 в конечной точке ($t_1 < t_2$). Тогда, обозначая точками производные по параметру t, мы найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot\psi}{\dot\varphi}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\dot\chi}{\dot\varphi}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\dot\varphi\ddot\chi - \dot\chi\ddot\varphi}{\dot\varphi^3},$$

$$\cos(\tau, \widehat{x}) = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + \dot\chi^2}}, \quad ds = \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + \dot\chi^2}\, dt.$$

В силу этого наш криволинейный интеграл превращается в следующий определенный интеграл:

$$\int\limits_{(L)} F dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} F\left[\varphi, \psi, \chi, \frac{\dot\psi}{\dot\varphi}, \frac{\dot\varphi\ddot\chi - \dot\chi\ddot\varphi}{\dot\varphi^3}, \frac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + \dot\chi^2}}\right] \times$$
$$\times \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + \dot\chi^2}\, dt.$$

З а м е ч а н и е. Для обобщенного криволинейного интеграла не обязательно соблюдение правила изменения знака при изменении направления пути интеграции.

5. Примеры. П р и м е р А. Вычислим криволинейный интеграл $Q = \int\limits_{(L)} 3xy\, dx + (hz + ay)\, dy - zx\, dz$, где (L) — дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ с началом в точке $t = 0$ и концом в точке $t = \pi/2$ (рис. 139). Найдем dx, dy, dz:

$$dx = -a\sin t\, dt, \quad dy = a\cos t\, dt, \quad dz = h\, dt.$$

Подставив выражения для x, y, z, dx, dy, dz в криволинейный интеграл, мы получим

$$Q = \int\limits_{(L)} 3xy\,dx + (hz + ay)\,dy - xz\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -3a^3 \sin^2 t \cos t\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ah^2 t \cos t\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos t \sin t\,dt -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ah^2 t \cos t\,dt = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - 3\sin^2 t) \cos t\,dt =$$

$$= a^3 \left[\frac{\sin^2 t}{2} - \sin^3 t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{2}.$$

Пример Б. Вычислим криволинейный интеграл $Q = \int\limits_{(L)} x^2 y\,dx - z\,dy + x\,dz$, где (L) — дуга кривой $y = x^2$, $z = y^2$ с началом в точке O (0, 0, 0) и концом в точке P (1, 1, 1) (рис. 140).

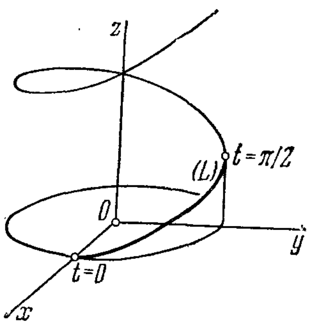

Рис. 139.

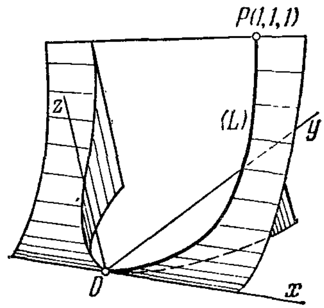

Рис. 140.

За параметр примем аргумент x и выразим через него все аргументы:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^4.$$

Отсюда найдем

$$dx = dx, \quad dy = 2x\,dx, \quad dz = 4x^3 dx.$$

Подставив в подынтегральное выражение и заметив, что x изменяется от 0 до 1, получим

$$Q = \int\limits_{(L)} x^2y\,dx - z\,dy + x\,dz = \int\limits_0^1 x^4dx - \int\limits_0^1 2x^5dx + \int\limits_0^1 4x^4dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (5x^4 - 2x^5)\,dx = \left(x^5 - \frac{1}{3}x^6\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Пример В. Вычислим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L)} \left[x^2 + \sqrt{z}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\frac{dz}{dx}\right]dx$$

вдоль дуги линии $y = x^2$, $z = y^2$ с началом в точке O (0, 0, 0) и концом в точке P (1, 1, 1) (рис. 140).

Из уравнений линии (L) находим $y = x^2$, $z = x^4$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, $\frac{dz}{dx} = 4x^3$. Подставив все эти выражения в подынтегральную функцию и заметив, что $0 \leqslant x \leqslant 1$, мы получим

$$\int\limits_{(L)} \left[x^2 + \sqrt{z}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\frac{dz}{dx}\right]dx = \int\limits_0^1 (x^2 + 4x^2 + x^2\cdot 4x^3)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (5x^2 + 4x^5)\,dx = \left[\frac{5x^3}{3} + \frac{4x^6}{6}\right]\Big|_0^1 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

§ 2. Криволинейный интеграл как предел криволинейной интегральной суммы

1. Криволинейная интегральная сумма. Пусть задан отрезок линии (l) и функция $\Phi(x, y, z)$, непрерывная вдоль него. Разобьем отрезок (l) произвольным способом на n частичных отрезков $(l_1), (l_2), \ldots, (l_n)$ и в каждом частичном отрезке (l_k) выберем какую-нибудь точку (ξ_k, η_k, ζ_k), которую назовем *опорной точкой* (рис. 141).

Сумма произведений длины l_k каждого частичного отрезка (l_k) на значение данной функции $\Phi(x, y, z)$

в опорной точке (ξ_k, η_k, ζ_k), т. е. сумма

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, l_k,$$

называется криволинейной интегральной суммой, составленной для функции $\Phi(x, y, z)$ и распространенной по линии (l).

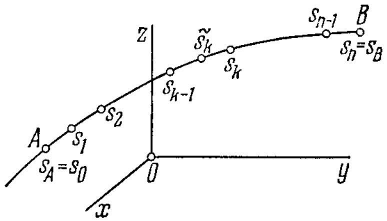

Рис. 141.

2. Основная теорема. *Предел криволинейной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа делений и неограниченном уменьшении длины наибольшего частичного отрезка кривой не зависит ни от способа такого дробления, ни от выбора опорных точек и равен криволинейному интегралу:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, l_k = \int_{(L)} \Phi(x, y, z)\, ds. \qquad (13.16)$$

Доказательство. Отнесем линию (L) к дуге s:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s).$$

Пусть на концах частичных участков дуга s имеет значения $s_A = s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n = s_B$, а в опорных точках — значения $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_{n-1}, \tilde{s}_n$ (рис. 141). Тогда мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, l_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi[\varphi(\tilde{s}_k), \psi(\tilde{s}_k), \chi(\tilde{s}_k)]\,(s_k - s_{k-1}).$$

Но последний предел представляет собой определенный интеграл вида

$$\int_{s_A}^{s_B} \Phi[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]\, ds,$$

т. е. криволинейный интеграл по линии (L):

$$\int_{(L)} \Phi(x, y, z)\, ds.$$

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве основной теоремы мы ограничились простейшим случаем, когда подынтегральная функция Φ зависит только от координат текущей точки x, y, z. Однако, теорема сохранится, если в подынтегральную функцию войдут и другие аргументы, принимающие определенные значения в каждой точке произвольно заданной линии. Такими дополнительными аргументами могут, например, быть dy/dx, d^2z/ds^2 и т. д.

§ 3. Поверхностный интеграл как двойной интеграл от сложной функции

1. Двусторонние поверхности. К понятию поверхностного интеграла мы приходим, рассматривая двойной интеграл от сложной функции, т. е. интеграл

$$\iint_{(S)} F(x, y, z)\, dx\, dy,$$

где подынтегральная функция зависит не только от аргументов интеграции x, y, но и от промежуточного аргумента z, который сам зависит от них. Необходимая для вычисления интеграла зависимость

$$z = f(x, y) \tag{13.17}$$

изображается в декартовых координатах некоторой поверхностью (σ), вследствие чего двойной интеграл от сложной функции называется поверхностным интегралом и обозначается $\iint_{(\sigma)} F(x, y, z)\, dx\, dy$. Для уточнения этого определения нам придется начать с понятия двусторонней поверхности.

В дальнейшем мы будем рассматривать только так называемые двусторонние поверхности. Двустороннюю поверхность можно представлять себе в виде непрозрачной ткани, которая имеет окрашенные в различные цвета лицевую сторону и изнанку, причем границами этих цветов являются только края ткани.

Заметим, что не все поверхности, как это может показаться на первый взгляд, являются двусторонними. Простейшая модель односторонней поверхности получится, если вырезать из бумаги прямоугольную ленту $ABCD$ (рис. 142), свернуть ее в кольцо и склеить короткие стороны AB и CD так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D. Если полученную кольцеобразную поверхность начать окрашивать с одной стороны, то, постепенно расширяя окраску, мы, не переходя через края, окрасим ее всю так, что неокрашенного места не останется и в каждой точке поверхность окажется окрашенной одним цветом (рис. 143) *).

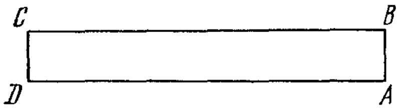

Рис. 142.

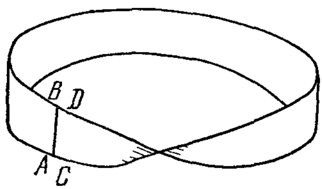

Рис. 143.

Всякая замкнутая поверхность, ограничивающая некоторое геометрическое тело, обязательно будет двусторонней: одна ее сторона будет внутренней, другая — наружной.

Каждой стороне двусторонней поверхности можно сопоставить и определенное направление нормали к поверхности в любой ее точке. Именно, соответствующую данной стороне поверхности нормаль мы будем считать направленной туда, откуда видна данная сторона поверхности (если ее рассматривать вблизи основания нормали).

2. Определение простейшего поверхностного интеграла. Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла, причем сформулируем это определение сначала для простейшего случая.

Пусть в пространстве, отнесенном к декартовой системе координат $Oxyz$, задана конечная область (σ) двусторон-

*) Эта поверхность носит название л и с т М ё б и у с а. (*Прим. ред.*)

ней поверхности (рис. 144), которая определена своим уравнением, однозначно разрешенным для данного участка (σ) относительно z:

$$z = z(x,\ y).$$

Пусть, кроме того, задана непрерывная на (σ) функция $f(x,\ y,\ z)$ трех аргументов.

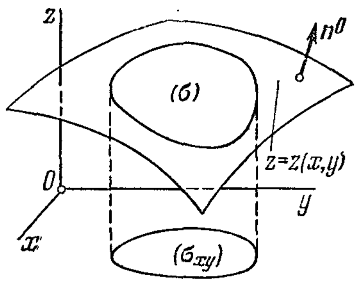

Рис. 144.

Определение. *Поверхностным интегралом*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\, dx\, dy$$

от формы $f(x,\ y,\ z)dx\, dy$, *распространенным по определенной стороне поверхности* (σ), называется взятый с определенным знаком двойной интеграл

$$(\pm) \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\,[x,\ y,\ z(x,\ y)]\,dx\, dy,$$

у которого

1) подынтегральным выражением является форма $f(x,\ y,\ z)dx\, dy$ при условии, что третий аргумент z заменен его выражением через аргументы интеграции x, y, определенным из уравнения поверхности (σ);

2) областью интеграции (σ_{xy}) является проекция рассматриваемого участка поверхности (σ) на плоскость Oxy;

3) берется знак плюс, если выбранная нормаль образует острый угол с осью Oz, и знак минус в противоположном случае.

Итак,

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\, dx\, dy = (\pm) \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\,[x, y, z(x, y)]\, dx\, dy. \qquad (13.18)$$

Таким образом, в простейшем случае *поверхностный интеграл является обыкновенным двойным интегралом от сложной функции, в которую помимо аргументов интеграции входит третий аргумент, являющийся их функцией.*

3. Поверхностный интеграл от билинейной формы по произвольной поверхности. В сформулированном определении требуются однозначность решения уравнения поверхности (σ) относительно z и одночленность подынтегрального выражения. Устраним эти ограничения.

а) Если для точек поверхности (σ) третья координата z не является однозначной функцией от аргументов интеграции x, y, но при этом поверхность (σ) разбивается на конечное число частей (σ_1), (σ_2), ..., (σ_n), для каждой из которых эта однозначность соблюдается (рис. 145), то за поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dy$, распространенный по всей поверхности (σ), принимается сумма поверхностных интегралов от той же подынтегральной формы, распространенных по отдельным частям, т. е.

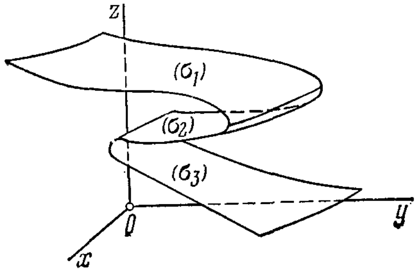

Рис. 145.

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{(\sigma_k)} f(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (13.19)$$

б) Поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dy$ считается равным нулю, если он распространен по цилиндрической поверхности (σ) с образующими, параллельными Oz, и если при этом подынтегральная функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена на (σ) (рис. 146).

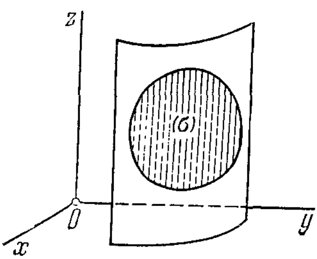

Рис. 146.

По этой причине из поверхности (σ), по которой распространен интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)dx\,dy$, могут выбрасываться те ее части, которые являются цилиндрами, параллельными оси Oz.

в) *За поверхностный интеграл от произвольной билинейной дифференциальной формы, т. е. выражения* *вида*

$$\omega = X(x, y, z)dy\,dz + Y(x, y, z)dz\,dx + Z(x, y, z)dx\,dy, \tag{13.20}$$

принимается сумма поверхностных интегралов от отдельных членов этой формы, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} \omega = \iint\limits_{(\sigma)} \{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy\} =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} X\,dy\,dz + \iint\limits_{(\sigma)} Y\,dz\,dx + \iint\limits_{(\sigma)} Z\,dx\,dy. \tag{13.21}$$

Замечание 2. Поверхностные интегралы с элементами интеграции $dy\,dz$ и $dz\,dx$ определяются аналогично разобранному выше поверхностному интегралу с элементом интеграции $dx\,dy$.

Таким образом, *в общем случае поверхностный интеграл является алгебраической суммой двойных интегралов от сложных функций.*

4. Основные свойства поверхностного интеграла вытекают из правила выбора знака перед двойным интегралом и из теоремы о разбиении для двойного интеграла.

Свойство 1. *Два поверхностных интеграла от одной и той же формы* ω, *распространенные по двум противоположным сторонам* $(+\sigma)$ *и* $(-\sigma)$ *одной и той же поверхности, отличаются только знаком:* $\iint\limits_{(-\sigma)} \omega = -\iint\limits_{(\sigma)} \omega.$

Свойство 2. *Если поверхность* (σ), *по которой распространен поверхностный интеграл, разбить на несколько частей* $(\sigma_1), (\sigma_2), \ldots, (\sigma_n)$, *то поверхностный интеграл по всей поверхности будет равен сумме поверхностных интегралов по отдельным частям:*

$$\iint\limits_{(\sigma)} \omega = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{(\sigma_k)} \omega. \tag{13.22}$$

Замечание. Кроме текущих координат x, y, z под знак поверхностного интеграла могут входить и другие аргументы, если только в каждой точке произвольно взятой поверхности они имеют определенные значения.

Например, под знак интеграла могут входить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \ldots,$ направляющие косинусы нормали к поверхности и т. д.

Надо иметь в виду, что при наличии дополнительных аргументов может отпасть свойство изменения знака интеграла при изменении стороны поверхности (σ).

§ 4. Поверхностный интеграл как предел поверхностной интегральной суммы

1. Поверхностная интегральная сумма. Пусть в пространстве, отнесенном к прямоугольной системе координат $Oxyz$, задана конечная область поверхности (σ) (рис. 147),

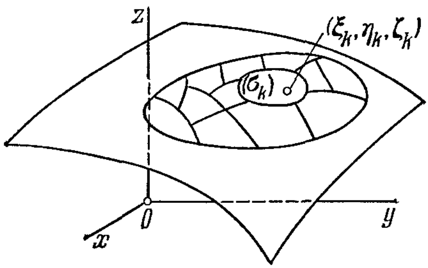

Рис. 147.

и пусть задана функция $f(x, y, z)$ от трех аргументов, определенная и непрерывная на области (σ). Разобьем область (σ) произвольным способом на n частичных областей $(\sigma_1), (\sigma_2), \ldots, (\sigma_n)$ и выберем произвольно в каждой частичной области точку (ξ_k, η_k, ζ_k), которую назовем опорной точкой для этой области. Сумма произведений площади σ_k каждой частичной области (σ_k) на значение данной функции $f(x, y, z)$ в опорной точке (ξ_k, η_k, ζ_k) этой области, т. е. сумма

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \sigma_k,$$

называется *поверхностной интегральной суммой*, составленной для данной функции $f(x, y, z)$ и распространенной по данной области поверхности (σ).

Будем теперь безгранично правильно дробить область на частичные области, т. е. дробить так, чтобы число n частичных областей $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_n)$ неограниченно росло, а длина наибольшего из контуров частичных областей стремилась к нулю. При таком дроблении справедлива следующая теорема.

2. Основная теорема. *Предел поверхностной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа частичных областей не зависит ни от способа дробления области, ни от выбора опорных точек внутри частичных областей и равен поверхностному интегралу:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\sigma_k = \iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}, \qquad (13.23)$$

где γ — угол нормали к поверхности с осью Oz, если только функция $\Phi(x, y, z)$ непрерывна на (σ), а способ дробления области (σ) правильный.

Доказательство. а) Предположим, что для рассматриваемой области (σ) уравнение поверхности однозначно разрешимо относительно z:

$$z = f(x, y). \qquad (13.24)$$

В силу этого

$$\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k).$$

б) По формуле компланации (см. (11.47)) площадь частичной области (σ_k) равна

$$\sigma_k = \iint\limits_{(s_k)}\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}, \qquad (13.25)$$

где (s_k) — проекция (σ_k) на Oxy; γ — угол нормали к (σ_k) в текущей точке. Этот угол является функцией от независимых координат x, y текущей точки:

$$\gamma = \gamma(x, y).$$

Применив к двойному интегралу теорему о среднем значении, мы получим

$$\sigma_k = \frac{1}{|\cos\gamma(\bar\xi_k, \bar\eta_k)|}S_k, \qquad (13.26)$$

где $(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k)$ — некоторая точка на (S_k), отличающаяся, вообще говоря, от проекции опорной точки (ξ_k, η_k, ζ_k) (рис. 148).

в) Подставив найденные выражения для ζ_k и σ_k в поверхностную интегральную сумму, мы приведем ее предел к такому виду:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\sigma_k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi[\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)] \frac{S_k}{|\cos\gamma(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k)|}.$$

Последний предел представляет собой двойной интеграл, распространенный по проекции (S) области (σ) на Oxy:

$$\iint\limits_{(S)} \Phi[x, y, f(x, y)] \frac{1}{|\cos\gamma(x, y)|}\,dx\,dy.$$

При этом приходится иметь в виду, что утверждение о равенстве предела двумерной интегральной суммы двойному интегралу сохраняется, когда в интегральной сумме участвуют не одна, а две системы опорных точек (ξ_k, η_k) и $(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k)$. Строгое доказательство такого обобщения проведено в следующем параграфе.

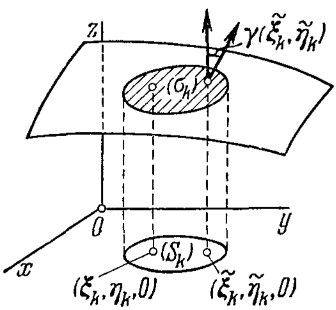

Рис. 148.

г) Удалим в подынтегральном выражении знак абсолютной величины у косинуса и поставим в качестве компенсации перед интегралом соответствующий знак плюс или минус. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\sigma_k = (\pm) \iint\limits_{(S)} \Phi[x, y, f(x, y)] \frac{dx\,dy}{\cos\gamma(x, y)}.$$

Но полученный двойной интеграл, согласно определению, является поверхностным интегралом по области (σ), т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\sigma_k = \iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}. \qquad (13.27)$$

Теорема доказана.

3. Правило преобразования поверхностного интеграла. Введем для предела поверхностной интегральной суммы особое обозначение:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Phi(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\sigma_k = \iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\,d\sigma \qquad (13.28)$$

и будем этот предел называть *поверхностным интегралом с поверхностным элементом интеграции* $d\sigma$.

Доказанную выше основную теорему мы можем теперь представить формулой

$$\iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}. \qquad (13.29)$$

При доказательстве основной теоремы мы проектировали нашу область (σ) на Oxy. Ничего не изменится в доказательстве, если за основную координатную плоскость принять Oyz или Ozx. В соответствии с этим мы получим еще две формулы:

$$\iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\frac{dy\,dz}{\cos\alpha},$$

$$\iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)}\Phi(x, y, z)\frac{dz\,dx}{\cos\beta}.$$

Все эти формулы можно заменить удобным правилом.

Правило. *Под знаком поверхностного интеграла можно пользоваться следующими условными формулами:*

$$d\sigma \overset{*}{=} \frac{dy\,dz}{\cos\alpha} \overset{*}{=} \frac{dz\,dx}{\cos\beta} \overset{*}{=} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}. \qquad (13.30)$$

При этом звездочка над знаком равенства напоминает о том, что указанные формулы применимы только под знаком поверхностного интеграла. Здесь дело обстоит так же, как с заменой $dx\,dy$ на $|J|\,du\,dv$ при преобразовании двойного интеграла к новым переменным.

Замечание 1. Площадь области поверхности (σ) выражается интегралом

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma. \qquad (13.31)$$

Заменив $d\sigma = dx\,dy/\cos\gamma$, мы получим обычную формулу компланации

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = (\pm)\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|}. \qquad (13.32)$$

Замечание 2. При доказательстве основной теоремы мы предполагали, что подынтегральная функция $\Phi(x, y, z)$ зависит только от координат текущей точки поверхности. Ничего не изменится, если туда войдут какие-либо другие аргументы, принимающие в каждой точке произвольно заданной поверхности (σ) определенные значения. Например, можно писать

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Phi\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \Phi\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

4. Примеры на вычисление поверхностных интегралов.

а) Вычислим

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{z\,dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

где (σ) — наружная сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (рис. 149).

Вычисляем интеграл по верхней полусфере (σ_1):

$$\iint\limits_{(\sigma_1)} \frac{z\,dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = +\iint\limits_{(S)} \frac{+\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} dx\,dy = S = \pi.$$

Вычисляем интеграл по нижней полусфере (σ_2):

$$\iint\limits_{(\sigma_2)} \frac{z\,dx\,dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = -\iint\limits_{(S)} \frac{-\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} dx\,dy = S = \pi.$$

Складываем полученные результаты:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{z\,dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi.$$

б) Вычислим поверхностный интеграл

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} \left\{xy\frac{d^2z}{dx^2} - (z+y-1)\frac{dz}{dy}\right\} d\sigma,$$

где (σ) — треугольная площадка с вершинами $(1, 0, 0)$,

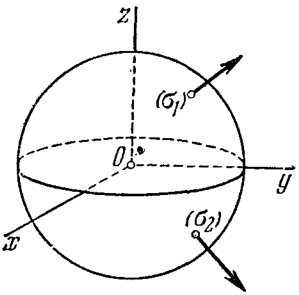

Рис. 149.

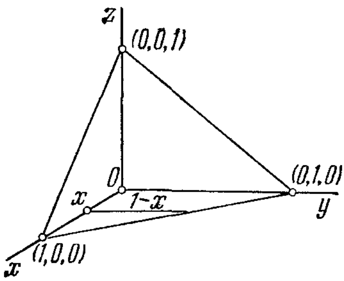

Рис. 150.

$(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, причем направление нормали взято то, которое образует острый угол с осью Oz (рис. 150).

Имеем

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} \left\{xy\frac{d^2z}{dx^2} - (z+y-1)\frac{dz}{dy}\right\} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left\{xy\frac{d^2z}{dx^2} - (z+y-1)\frac{dz}{dy}\right\} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Уравнение плоскости (σ) имеет вид $x+y+z=1$. Из него находим

$$z = 1-x-y, \quad \frac{dz}{dx} = -1, \quad \frac{dz}{dy} = -1, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

Подставив эти выражения в наш интеграл, получим

$$Q = +\iint\limits_{(S)} x(-1)\cdot\sqrt{3}\,dx\,dy = -\sqrt{3}\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x} dy = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

§ 5. Поверхностный интеграл в параметрической форме

Мы обобщим теперь понятие поверхностного интеграла на случай, когда поверхность, по которой распространен интеграл, определена параметрическим уравнением (см. (11.20))

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

При этом мы снова рассмотрим два типа поверхностных интегралов: интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)dx\,dy$ с элементом интеграции $dx\,dy$, который определяется как интеграл от сложной функции, и интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} F(x, y, z)d\sigma$ с элементом интеграции $d\sigma$, который определяется как предел интегральной суммы. Далее мы покажем, что оба эти интеграла сводятся к параметрическому поверхностному интегралу.

1. Координатный поверхностный интеграл как интеграл от сложной функции. Мы будем рассматривать правильно параметризованную ориентированную поверхность

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v). \tag{13.33}$$

На этой поверхности мы выберем определенную сторону, которую определим при помощи нормального вектора $\boldsymbol{n}$, исходящего из текущей точки поверхности.

Определение. *Координатным поверхностным интегралом* $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dy$ *от функции* $f(x, y, z)$ *с элементом интеграции* $dx\,dy$, *распространенным по области* (σ) *правильно параметризованной ориентированной поверхности* (см. 11.21))

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{13.34}$$

называется двойной интеграл

$$\pm\iint\limits_{(\sigma^*)} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv, \tag{13.35}$$

в котором:

1) областью интеграции является область (σ^*) изменения параметров (u, v) при перемещении текущей точки $M(u, v)$ в рассматриваемой области (σ);

2) подынтегральное выражение получается подстановкой в подынтегральную функцию выражений аргументов x, y, z через параметры u, v из уравнения поверхности и заменой элемента интеграции $dx\,dy$ преобразованным элементом интеграции

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv, \tag{13.36}$$

где $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ — якобиан (см. (11.32));

3) перед интегралом выбирается знак плюс, если направление нормали $\boldsymbol{n}$, определяющей выбранную сторону поверхности, совпадает с направлением векторного произведения (см. (11.30))

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v, \tag{13.37}$$

и знак минус в противном случае.

Замечание 1. Таким образом, элемент интеграции $dx\,dy$ под знаком поверхностного интеграла выражается так:

$$dx\,dy \stackrel{*}{=} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \tag{13.38}$$

Мы видим, что если изменить порядок следования параметров u, v, то элемент интеграции изменит свой знак. Однако при этом изменяется на противоположное направление векторного произведения $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, вследствие чего при переходе к двойному интегралу будет браться противоположный знак. Следовательно, поверхностный интеграл не изменится.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что поверхностный интеграл инвариантен относительно преобразований параметров u, v и, следовательно, не зависит от параметризации поверхности.

Замечание 3. Ранее мы определили поверхностный интеграл как двойной интеграл с элементом интеграции $dx\,dy$. В этом частном случае

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1,$$

а вектор $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y$ направлен вверх, и поэтому знак плюс соответствует верхней стороне поверхности, а знак минус — нижней. Следовательно, новое определение согласовано со старым.

2. Параметрический поверхностный интеграл. Определенный выше координатный поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)dx\,dy$ можно записать в иной форме, внеся в него заранее преобразованный элемент интеграции:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}du\,dv = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,dx\,dy. \quad (13.39)$$

Такая форма записи поверхностного интеграла дает основание обобщить его определение следующим образом.

Определение. *Параметрическим поверхностным интегралом* $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)du\,dv$, который имеет параметрический элемент интеграции $du\,dv$, вычисляется от функции $f(x, y, z)$, зависящей от аргументов x, y, z, распространен по определенной стороне области (σ) ориентированной правильно параметризованной поверхности

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (13.40)$$

называется двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\,du\,dv = \pm\iint\limits_{(\sigma^*)} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\,du\,dv, \quad (13.41)$$

в котором:

1) подынтегральная функция получается путем подстановки в подынтегральную функцию поверхностного интеграла выражений аргументов x, y, z из уравнений (13.40) поверхности (σ), отнесенной к параметрам u, v;

2) областью интеграции (σ^*) является область изменения параметров (u, v), соответствующая поверхностной области (σ);

3) перед интегралом выбирается знак плюс, если направление нормального вектора $\boldsymbol{n}$, определяющего выбранную сторону поверхности, совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, определяющего ориентацию, и знак минус в противном случае.

Определенный таким образом параметрический поверхностный интеграл, вообще говоря, будет зависеть не только от поверхности (σ), но и от ее параметризации. Это значит, что если ту же поверхность (σ) определить другими параметрическими уравнениями, то параметрический поверхностный интеграл, вообще говоря, изменится. Нас будут интересовать лишь такие поверхностные параметрические интегралы, которые вполне определяются поверхностной областью (σ) и не зависят от ее параметризации. Определенный выше координатный поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z)\, dx dy$ как раз дает такой параметрический поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y, z) \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv$, который инвариантен относительно преобразования параметров u, v.

Общий аналитический критерий независимости параметрического поверхностного интеграла от параметризации поверхностной области (σ) достаточно сложен. Мы не будем им заниматься, предлагается каждый раз проверять эту независимость непосредственно.

3. Поверхностный интеграл как предел суммы. Мы будем рассматривать область (σ) на правильно параметризованной поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ и функцию от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки пространства (иначе говоря, от трех координат x, y, z этой точки), непрерывную на области (σ). Разобьем область (σ) произвольным способом на n частей $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_n)$. На каждой частичной области (σ_k) возьмем произвольно опорную точку $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}(u_k, v_k)$ и составим поверхностную интегральную сумму, т. е. сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi[\boldsymbol{r}(u_k, v_k)]\, \sigma_k.$$

Определение. *Поверхностным интегралом* $\iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r})\, d\sigma$ *с элементом интеграции* $d\sigma$ *от функции* $\Phi(\boldsymbol{r})$ *по области* (σ) *правильно параметризованной поверхности* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ называется предел поверхностной интегральной суммы, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r})\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi[\boldsymbol{r}(u_k, v_k)]\, \sigma_k, \tag{13.42}$$

при условии, что число n частичных областей (σ_k) неограниченно растет, а максимум длин их хорд стремится к нулю.

Покажем, что *этот предел суммы существует независимо от способа разбиения области* (σ) *на частичные области и от выбора опорных точек на этих частичных областях и что он равен некоторому параметрическому поверхностному интегралу.*

Формула компланации (11.44) дает

$$\sigma_k = \iint\limits_{(\overset{*}{\sigma}_k)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv.$$

Применив теорему о среднем значении, получим

$$\sigma_k = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{\substack{u=\bar{u}_k \\ v=\bar{v}_k}} \overset{*}{\sigma}_k.$$

Вследствие этого формула (13.42) принимает вид

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r}) \, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi[\boldsymbol{r}(\bar{u}_k, \bar{v}_k)] \, |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|_{\substack{u=\bar{u}_k \\ v=\bar{v}_k}} \overset{*}{\sigma}_k.$$

Отсюда на основании обобщенной основной теоремы о двойном интеграле *) получим

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r}) \, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma^*)} \Phi[\boldsymbol{r}(u, v)] \, |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_u| \, du \, dv. \qquad (13.43)$$

Обращаясь к определению параметрического поверхностного интеграла (см. предыдущий пункт), мы можем представить последний двойной интеграл как параметрический поверхностный интеграл:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r}) \, d\sigma = \pm \iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r}) \, |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv. \qquad (13.44)$$

Здесь знак плюс соответствует случаю, когда нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, определяющий рассматриваемую сторону

*) Эта теорема будет доказана в следующем параграфе (п. 2).

поверхности (σ), направлен одинаково с вектором $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, знак минус соответствует противоположному случаю.

Между прочим, легко убедиться, что оба знака будут автоматически учтены, если поверхностный интеграл записать в такой форме:

$$\iint_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r})\,d\sigma = \iint_{(\sigma)} \Phi(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)\,du\,dv. \qquad (13.45)$$

Замечание 1. Получившийся здесь параметрический поверхностный интеграл (13.45) не зависит от параметризации поверхности, так как он равен пределу поверхностной интегральной суммы, которая никак не связана с параметризацией.

Замечание 2. В общем случае подынтегральная функция Φ может зависеть не только от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки, но и от других аргументов. Важно только, чтобы эти аргументы однозначно определялись в каждой точке поверхности интеграции (σ) и не зависели от ее параметризации. Это обеспечит независимость интеграла от параметризации поверхности.

Замечание 3. Мы видим, что переход от поверхностного интеграла с поверхностным элементом интеграции $d\sigma$ к параметрическому поверхностному интегралу (13.45) совершается заменой элемента интеграции $d\sigma$ элементом $(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)du\,dv$. Таким образом, под знаком поверхностного интеграла можно пользоваться следующим условным равенством:

$$d\sigma \overset{*}{=} (\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)\,du\,dv. \qquad (13.46)$$

Звездочка над знаком равенства указывает именно на то обстоятельство, что $d\sigma$ можно заменять на $(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)\,du\,dv$ лишь под знаком поверхностного интеграла.

Если направление нормального вектора $\boldsymbol{n}$, определяющего рассматриваемую сторону поверхности (σ), совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$, то формула (13.46), определяющая элемент интеграции, принимает вид

$$d\sigma \overset{*}{=} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,du\,dv. \qquad (13.47)$$

Следовательно, в этом случае поверхностный элемент интеграции $d\sigma$ совпадает с элементом площади поверхности (11.49).

§ 6. Кратный интеграл как предел обобщенной интегральной суммы

1. Введение единых обозначений для записи интегральной суммы. Теории двойных и тройных интегралов буквально повторяют друг друга и в конечном счете повторяют теорию определенного интеграла. Вследствие этого возникает естественная потребность ввести единые обозначения, которые бы без всякого изменения применялись в теории интегралов различных кратностей и которые бы, в частности, позволили единообразно формулировать основную теорему об интеграле. С введения этих обозначений мы и начнем.

Рассмотрим областъ (D), отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат. Эта область может быть одномерной (прямолинейный отрезок), двумерной (плоская площадка) и трехмерной (тело). Будем обозначать через D меру области (D), т. е. соответственно длину, площадь или объем.

Пусть в области (D) определена некоторая функция, имеющая в каждой точке M этой области определенное значение $f(M)$. В соответствии с числом измерений области (D) эта функция $f(M)$ будет зависеть от одного, двух или трех аргументов, являющихся координатами точки M области (D).

Интеграл от функции $f(M)$, распространенный по области (D), во всех трех случаях мы будем обозначать одинаково:

$$\int\limits_{(D)} f(M)\,dD.$$

Этот интеграл будет определенным, двойным или тройным в зависимости от числа измерений области (D).

Разобьем область (D) произвольным способом на n частичных областей (D_1), (D_2), . . ., (D_n). Зафиксируем в этих областях произвольные опорные точки M_1', M_2', ..., M_n' и составим интегральную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k')\,D_k.$$

Если функция $f(M)$ непрерывна на области (D), включая ее границу, и если число n частичных областей неограниченно увеличивается так, что максимальный диаметр частичных областей неограниченно убывает, то в силу основной теоремы предел интегральной суммы будет равен интегралу, распространенному по области (D):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(M'_k)\,D_k = \int\limits_{(D)} f(M)\,dD.$$

Полученная формула и выражает основную теорему для интеграла любой кратности в унифицированных обозначениях. Для дальнейших приложений этой основной теоремы нам придется ее несколько обобщить. К этому мы и перейдем.

2. Обобщение основной теоремы о кратном интеграле. Пусть функции $u = \varphi(M)$, $v = \psi(M)$ определены и непрерывны на некоторой области (D), включая ее границу.

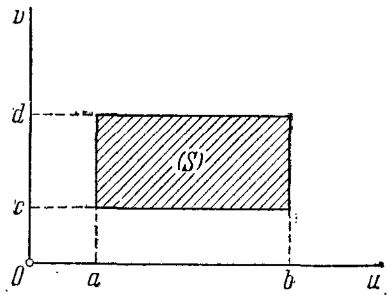

Рис. 151.

Тогда при изменении M на (D) областями изменения функций u и v будут некоторые замкнутые отрезки

$$a \leqslant u \leqslant b, \qquad c \leqslant v \leqslant d.$$

Мы будем рассматривать на декартовой плоскости Ouv прямоугольник (s), координаты u, v точек которого изменяются на указанных отрезках (рис. 151).

Пусть функция $f(u, v)$ определена и непрерывна на этом прямоугольнике (S) (включая его границу).

Разобьем область (D) произвольным способом на n частичных областей (D_1), . . ., (D_n). На каждой частичной области (D_k) выберем произвольно две опорные точки M'_k и M''_k.

Обобщенной интегральной суммой для сложной функции $f[\varphi(M), \psi(M)]$ по области (D) называется сумма

$$\sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k)]\, D_k.$$

Теорема. *Предел обобщенной интегральной суммы при неограниченном возрастании числа делений не зависит ни от способа дробления области, ни от выбора опорных точек на соответствующих частичных областях и равен соответствующему интегралу:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k)]\, D_k = \int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD,$$

если только при неограниченном увеличении числа n делений максимум диаметров всех частичных областей стремится к нулю и если функции $\varphi(M)$, $\psi(M)$, $f(u, v)$ непрерывны на соответствующих областях (D), (D) и (S), включая их границы.

Доказательство. Рассмотрим абсолютную величину разности между обобщенной интегральной суммой и интегралом:

$$\Delta = \left| \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k)]\, D_k - \int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD \right|.$$

Воспользовавшись теоремой о разбиении области интеграции, мы представим рассматриваемый интеграл в виде суммы интегралов по частичным областям:

$$\int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(D_k)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD.$$

Применив к каждому слагаемому интегралу теорему о среднем значении, получим

$$\int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD = \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M_k), \psi(M_k)]\, D_k.$$

Таким образом, мы представили интеграл в виде специальной интегральной суммы, которая соответствует произвольно взятому способу разбиения области D и определенному выбору опорных точек M_k на соответствующих частных областях (D_k). Воспользовавшись этим представлением, мы получим

$$\Delta = \left| \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M_k'), \psi(M_k'')] D_k - \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M_k), \psi(M_k)] D_k \right|$$

или

$$\Delta \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f[\varphi(M_k'), \psi(M_k'')] - f[\varphi(M_k), \psi(M_k)]| D_k.$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Так как функция $f[u, v]$ непрерывна на некотором прямоугольнике (S), включая его границу, то она равномерно непрерывна на нем. Это значит, что для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых двух точек (u_1, v_1) и (u_2, v_2) из (S), удовлетворяющих неравенствам

$$|u_1 - u_2| < \delta,$$
$$|v_1 - v_2| < \delta,$$

будет выполняться неравенство

$$|f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| < \frac{\varepsilon}{D}.$$

С другой стороны, функции $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ также равномерно непрерывны в области (D). Следовательно, для любого фиксированного $\delta > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что для любых трех точек M, M_1, M_2 области (D) будут выполняться неравенства

$$|\varphi(M_1) - \varphi(M)| < \delta,$$
$$|\varphi(M_2) - \varphi(M)| < \delta,$$

если только расстояния между точками M_1 и M и между точками M_2 и M не превосходят δ_1.

Так как при дроблении области (D) неограниченно уменьшается максимум диаметров частичных областей, то, начиная с некоторого момента (при $n \geqslant N$), этот максимум сделается меньше указанного положительного числа δ_1. С этого момента начнут выполняться следующие неравенства:

$$|\varphi(M'_k) - \varphi(M_k)| < \delta,$$
$$|\psi(M''_k) - \psi(M_k)| < \delta,$$

а следовательно, и неравенство

$$|f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k)] - f[\varphi(M_k), \psi(M_k)]| < \frac{\varepsilon}{D}.$$

В силу этого, начиная с указанного момента (при $n \geqslant N$), мы будем иметь

$$\Delta < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{D} D_k = \frac{\varepsilon}{D} \sum_{k=1}^{n} D_k = \frac{\varepsilon}{D} \cdot D = \varepsilon.$$

Итак, при $n \geqslant N$ получаем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k)] D_k - \int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD \right| < \varepsilon.$$

А отсюда по определению предела следует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k)] D_k = \int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M)]\, dD.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если полученную формулу, выражающую обобщенную основную теорему, записать в обычных обозначениях для случая, например, двойного интеграла, то она примет вид

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\xi'_k, \eta'_k), \psi(\xi''_k, \eta''_k)] S_k = \iint\limits_{(S)} f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]\, dx\, dy.$$

Замечание 2. Полученная обобщенная теорема очевидным образом распространяется и на тот случай, когда имеется функция от более чем двух функций, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(M'_k), \psi(M''_k), \chi(M'''_k), \ldots] D_k =$$
$$= \int\limits_{(D)} f[\varphi(M), \psi(M), \chi(M) \ldots]\, dD.$$

Глава XIV

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 1. Векторное поле

1. Если в каждой точке некоторой части пространства определен вектор $\boldsymbol{R}$, то говорят, что *в этой части пространства определено векторное поле* (*поле вектора* $\boldsymbol{R}$). Иначе говоря, векторное поле определяется заданием переменного вектора $\boldsymbol{R}$, который становится определенным вектором в каждой точке рассматриваемой части пространства. Этот переменный вектор $\boldsymbol{R}$ называется вектором поля.

В каждом конкретном случае вектор поля изображает какую-либо конкретную физическую величину.

Так, в пространстве, окружающем материальное тело, возникает поле тяготения. В каждой точке этого поля определена сила (напряженность поля), с которой поле действует на единичную массу, помещенную в данную точку.

Заряженное электричеством тело создает в окружающем его пространстве электростатическое поле, в каждой точке которого определена сила (напряженность поля), с которой поле действует на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку.

Поток жидкости в данный момент времени определяет в заполняемой им части пространства поле скоростей и т. д.

Математическая теория векторного поля занимается изучением его свойств, отвлекаясь от его конкретного физического смысла. Поэтому получаемые в этой теории понятия и закономерности относятся ко всем конкретным векторным полям.

2. Каждой точке поля соответствует определенное значение вектора поля (рис. 152). Следовательно, вектор поля является функцией от радиуса-вектора точки:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}). \qquad (14.1)$$

Мы будем относить поле к прямоугольной системе координат с ортами осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Тогда вектор поля $\boldsymbol{R}$ можно будет рассматривать как функцию от трех декартовых координат x, y, z текущей точки поля:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x, y, z). \tag{14.2}$$

Разложив вектор поля $\boldsymbol{R}$ по ортам осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, мы получим

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z, \tag{14.3}$$

причем проекции X, Y, Z являются функциями от координат x, y, z точки поля:

$$X = X(x, y, z),$$
$$Y = Y(x, y, z),$$
$$Z = Z(x, y, z). \tag{14.4}$$

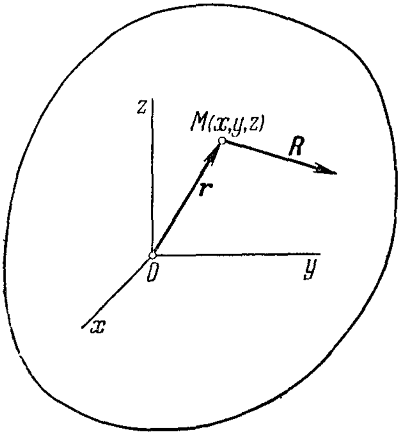

Рис. 152.

3. В многих конкретных случаях вектор поля является функцией не только от координат x, y, z точки поля, но и от времени t. Такие поля называются *переменными*, в отличие от полей стационарных, не зависящих от времени.

В дальнейшем мы будем отвлекаться от зависимости вектора поля от времени, т. е. либо будем рассматривать поля стационарные (не зависящие от времени), либо будем рассматривать переменные поля, но лишь в данный момент времени t. Получающаяся при этом теория мгновенного состояния векторного поля имеет очень важное значение и сама по себе и как общая основа для теории переменных полей.

4. Для построения математической теории векторного поля мы будем пользоваться методами дифференциального и интегрального исчисления. Это обстоятельство вынуждает ограничиться изучением лишь тех векторных полей, которые удовлетворяют некоторым дополнительным требованиям. А именно, мы будем в дальнейшем считать, что проекции X, Y, Z вектора поля на координатные оси являются непрерывными функциями, обладающими непрерывными частными производными первого порядка во

всех точках поля. Иногда мы будем предполагать существование и непрерывность частных производных второго порядка.

Если в окрестности данной точки пространства проекции вектора поля непрерывны и обладают непрерывными частными производными, а в самой точке эти условия нарушаются, то такую точку мы будем называть «особой точкой поля». Следовательно, особая точка поля по существу не принадлежит полю.

§ 2. Векторные линии

1. *Векторной линией* называется такая линия векторного поля, в каждой точке которой вектор поля касается этой линии.

Понятие о векторной линии возникает как обобщение линии тока в стационарном потоке жидкости, т. е. линии, по которой движется частица жидкости такого потока. Хорошо известными примерами векторных линий являются также силовые линии магнитного и электрического полей.

2. **Система дифференциальных уравнений векторных линий.** Пусть уравнение векторной линии имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{14.5}$$

По условию в каждой точке этой линии вектор поля $\boldsymbol{R}$ направлен по касательной к ней (рис. 153). Производная

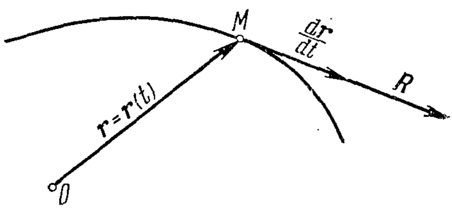

Рис. 153.

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ также направлена по касательной. Следовательно, векторы $\boldsymbol{R}$ и $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, как коллинеарные векторы, связаны линейной зависимостью

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lambda \boldsymbol{R}, \tag{14.6}$$

или

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\lambda\, dt. \tag{14.7}$$

Это и есть параметрическое дифференциальное уравнение векторных линий в векторной форме.

Спроектировав полученное уравнение на координатные оси, мы получим

$$dx = X\lambda\, dt, \quad dy = Y\lambda\, dt, \quad dz = Z\lambda\, dt. \tag{14.8}$$

Исключение из этой системы $\lambda\, dt$ приводит к следующей системе дифференциальных уравнений векторных линий:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{z}. \tag{14.9}$$

Если эту систему двух уравнение проинтегрировать, то получим систему двух конечных уравнений с двумя произвольными постоянными:

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2. \tag{14.10}$$

Следовательно, через каждую точку пространства $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пройдет, вообще говоря, единственная векторная линия

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_1(x_0, y_0, z_0), \quad \varphi_2(x, y, z) = \varphi_2(x_0, y_0, z_0). \tag{14.11}$$

3. Пример. Рассмотрим векторное поле

$$X = bz - cy,\ Y = cx - az,\ Z = ay - bx.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий принимает вид

$$\frac{dx}{bz - cy} = \frac{dy}{cx - az} = \frac{dz}{ay - bx} = 0.$$

Составляем производную пропорцию

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(bz - cy) + y(cx - az) + z(ay - bx)} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0} = 0.$$

Отсюда следует

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

Составляем теперь другую производную пропорцию

$$\frac{a\,dx + b\,dy + c\,dz}{a\,(bz - cy) + b\,(cx - az) + c\,(ay - bx)} = \frac{a\,dx + b\,dy + c\,dz}{0} = 0,$$

из которой

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0.$$

Таким образом, мы получаем систему следующих двух уравнений:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения, мы найдем

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2,$$
$$ax + by + cz = C_2.$$

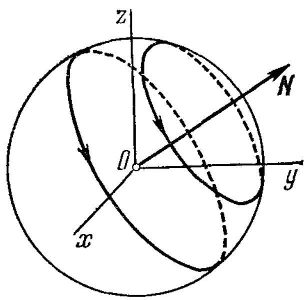

Рис. 154.

Следовательно, векторные линии получаются в результате пересечения всевозможных сфер, имеющих общий центр в начале координат, с всевозможными плоскостями, перпендикулярными вектору $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i}a + \boldsymbol{j}b + \boldsymbol{k}c$, т.е. векторные линии суть окружности. Центры этих окружностей находятся на прямой, проходящей через начало O в направлении вектора $\boldsymbol{N}$. Плоскости же окружностей перпендикулярны указанной прямой (рис. 154).

Замечание. Вектор рассматриваемого поля имеет вид

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}\,(bz - cy) + \boldsymbol{j}\,(cx - az) + \boldsymbol{k}\,(ay - bx),$$

или

$$\boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{r}.$$

Следовательно, рассматриваемое поле есть поле скорости точек твердого тела, вращающегося вокруг начала с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{N}$.

§ 3. Циркуляция поля вдоль линии

1. Элементарная циркуляция. Рассмотрим в векторном поле $\boldsymbol{R}$ какую-либо линию (не обязательно векторную!) (рис. 155) и возьмем на ней произвольную точку $\boldsymbol{r}(\tilde{t})$ $(t' < \tilde{t} < t'')$.

Составим произведение длины участка Δs на значение скалярного произведения вектора поля и орта касательной во взятой точке:

$$\Delta s \boldsymbol{R}[\boldsymbol{r}(\tilde{t})] \cdot \boldsymbol{\tau}(\tilde{t}). \qquad (14.12)$$

Это произведение и называется *элементарной циркуляцией поля на данном участке.*

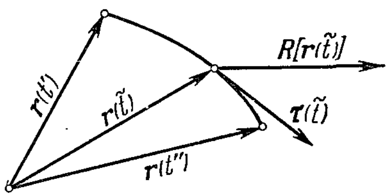

Рис. 155.

З а м е ч а н и е 1. Если поле силовое, то элементарная циркуляция будет приближенно давать работу силы на рассматриваемом участке. Таким образом, понятие элементарной циркуляции можно рассматривать как распространение понятия элементарной работы силового поля на поля другой природы.

З а м е ч а н и е 2. Элементарная циркуляция на данном участке не является однозначно определенной величиной, она будет зависеть от выбора промежуточной точки $\boldsymbol{r}(\tilde{t})$.

З а м е ч а н и е 3. При изменении направления орта касательной элементарная циркуляция изменит только свой знак.

2. Циркуляция вдоль линии. Рассмотрим в векторном поле отрезок линии (L), ограниченный двумя точками — начальной точкой A и конечной точкой B (рис. 156). Примем за параметр, определяющий положение точки на линии, длину дуги s:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), \quad s_A \leqslant s \leqslant s_B, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}(s).$$

Разобьем линию (L) на n участков точками

$$s_A = s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_{n-1},\ s_n = s_B$$

и введем следующее

Определение. *Циркуляцией поля* $\boldsymbol{R}$ *вдоль линии* (L) называется предел суммы элементарных циркуляций на всех частичных участках, на которые разбивается линия (L), когда число частичных участков

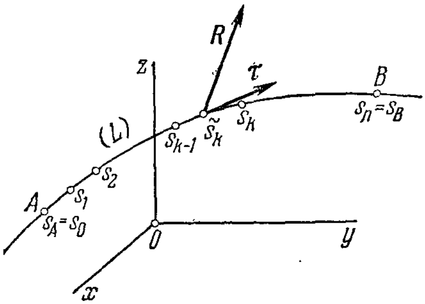

Рис. 156.

неограниченно растет, а длина наибольшего участка стремится к нулю:

$$\Gamma_L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, \boldsymbol{R}\,[\boldsymbol{r}(\tilde{s}_k)] \cdot \boldsymbol{\tau}(\tilde{s}_k). \qquad (14.13)$$

Мы знаем (см. гл. XIII, § 2), что этот предел не зависит ни от способа разбиения линии (L) на участки, ни от выбора опорных точек $\tilde{s}_k$ внутри этих участков; он равен криволинейному интегралу

$$\Gamma_L = \int_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\tau}\, ds.$$

Так как $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{r}/ds$, то этот интеграл можно переписать так:

$$\Gamma_L = \int_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad (14.14)$$

или, в координатной форме,

$$\Gamma_L = \int_{(L)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Величину $\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ мы будем называть *элементом циркуляции.*

Замечание. В случае силового поля $\boldsymbol{R}$ циркуляция поля вдоль линии (L) выражает работу силы поля вдоль этой линии.

Пример. Вычислим циркуляцию поля

$$\boldsymbol{R} = \frac{-\boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x}{x^2 + y^2} + \boldsymbol{k}z$$

вдоль витка винтовой линии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos\varphi + \boldsymbol{j}a\sin\varphi + \boldsymbol{k}h\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

В данном случае формула (14.14) для вычисления циркуляции принимает вид

$$\Gamma = \int\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(L)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} + z\,dz.$$

Но

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = a\sin\varphi, \qquad z = h\varphi,$$
$$dx = -a\sin\varphi\,d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi\,d\varphi, \quad dz = h\,d\varphi.$$

Следовательно,

$$\Gamma = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} + h\varphi h\right)d\varphi =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi}(1 + h^2\varphi)\,d\varphi = \left(\varphi + \frac{h^2\varphi^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 2\pi^2h^2.$$

§ 4. Поток поля через поверхность

1. Поток жидкости. К понятию потока поля мы естественным образом приходим при изучении поля скоростей $\boldsymbol{R}$ текущей жидкости. Рассмотрим простейший случай, когда скорости $\boldsymbol{R}$ всех частиц стационарно текущей жидкости одинаковы. Выделим в этом потоке плоскую площадку (σ) (рис. 157). Объем жидкости Q, которая в единицу времени протечет сквозь (σ), будет равен объему цилиндра с основанием (σ) и образующей $\boldsymbol{R}$, т. е.

$$D = \sigma H = \sigma\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0.$$

Полученный объем Q и называется *потоком жидкости через область* (σ).

Отправляясь от этого элементарного представления, мы обобщим его на случай произвольного векторного поля и произвольной поверхности (σ).

2. Элементарный поток поля. Рассмотрим в векторном поле небольшую область (σ) на кривой поверхности (рис. 158). Возьмем на ней произвольную точку M (ξ, η, ζ),

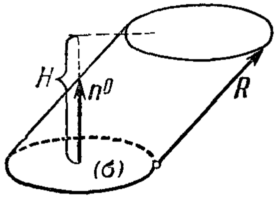

Рис. 157.

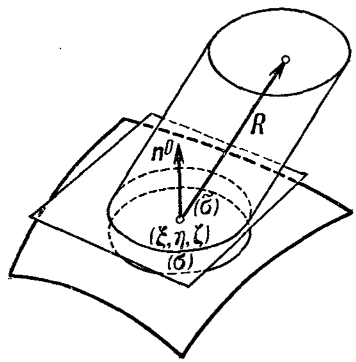

Рис. 158.

которую назовем *опорной точкой*. Через опорную точку проведем касательную плоскость к поверхности и построим на ней какую-нибудь плоскую площадку $(\tilde{\sigma})$ с той же площадью, что и площадь области (σ). Эту площадку примем за основание цилиндра, образующие которого равны по длине и параллельны по направлению вектору поля $\boldsymbol{R}$ (ξ, η, ζ) в опорной точке. Объем Q полученного цилиндра и называется элементарным потоком поля через область поверхности (σ).

Обозначив через $\boldsymbol{n}^0$ (ξ, η, ζ) орт нормали поверхности в опорной точке (ξ, η, ζ), мы получим для элементарного потока формулу

$$Q = \sigma \boldsymbol{n}^0 (\xi, \eta, \zeta) \cdot \boldsymbol{R} (\xi, \eta, \zeta). \qquad (14.15)$$

З а м е ч а н и е 1. Если размеры площадки (σ) достаточно малы, то элементарный поток поля скоростей текущей жидкости достаточно точно выражает объем жидкости, проходящей в единицу времени через (σ).

Замечание 2. Элементарный поток не является однозначно определенной величиной для данной области (σ). Он меняется при изменении опорной точки. Правда, если размеры области (σ) малы, то эти изменения элементарного потока будут незначительными.

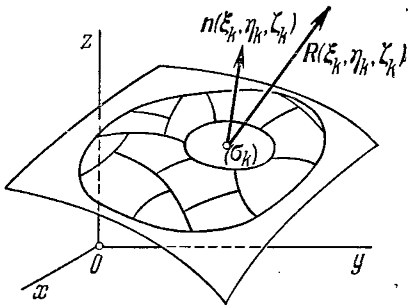

Рис. 159.

Замечание 3. При изменении направления орта нормали на противоположное элементарный поток меняет только свой знак.

3. Поток поля через поверхность. Разобьем область (σ) поверхности (рис. 159) произвольным способом на n частичных областей (σ_1), (σ_2), ..., (σ_n). Внутри каждой частичной области (σ_k) произвольно зафиксируем опорную точку (ξ_k, η_k, ζ_k) и определим элементарный поток через эту частичную область:

$$Q_k = \sigma_k \boldsymbol{n}^0 (\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \boldsymbol{R} (\xi_k, \eta_k, \zeta_k). \qquad (14.16)$$

Определение. *Потоком поля* $\boldsymbol{R}$ *через поверхность* (σ) называется предел суммы элементарных потоков через частичные области, на которые разбивается область (σ), когда число частичных областей неограниченно растет, а длина наибольшей из хорд неограниченно убывает:

$$Q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \boldsymbol{n}^0 (\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \boldsymbol{R} (\xi_k, \eta_k, \zeta_k). \qquad (14.17)$$

Мы знаем, что этот предел поверхностной интегральной суммы не зависит ни от способа дробления области на частичные области, ни от выбора опорных точек внутри частичных областей (см. гл. XIII, § 4) и равен поверхностному интегралу. Получается следующая основная формула потока поля через поверхность (σ):

$$Q = \iint_{(\sigma)} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}^0 d\sigma. \qquad (14.18)$$

4. Различные виды формулы для вычисления потока. а) Положив в (14.18)

$$R = iX + jY + kZ, n^0 = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma,$$

мы получим формулу для вычисления потока в координатной форме

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,d\sigma. \tag{14.19}$$

б) Под знаком интеграла мы можем пользоваться соотношениями (13.30)

$$\frac{dy\,dz}{\cos\alpha} = \frac{dz\,dx}{\cos\beta} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = d\sigma. \tag{14.20}$$

В силу этого формулу (14.19) можно переписать так:

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} X\,dy\,dz + Y\,dx\,dz + Z\,dx\,dy. \tag{14.21}$$

в) Если уравнение поверхности разрешено относительно третьей координаты,

$$z = f(x, y), \tag{14.22}$$

то (см. (12.21))

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{14.23}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{14.24}$$

Следовательно,

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \pm\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \tag{14.25}$$

Подставив все это в (14.19), мы получим формулу для вычисления потока еще в таком виде:

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} (-pX - qY + Z)\,dx\,dy. \tag{14.26}$$

Последняя формула часто бывает удобна при решении задач.

г) Предположим, наконец, что поверхность (σ) определена векторным параметрическим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v). \tag{14.27}$$

Тогда

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right|}, \tag{14.28}$$

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du\, dv, \tag{14.29}$$

и формула для вычисления потока принимает такой вид:

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) du\, dv. \tag{14.30}$$

Пример. Вычислим поток поля $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{i}\sqrt{x} + \boldsymbol{j}yz + \boldsymbol{k}$ через часть поверхности цилиндра $z^2 = 4x$, высеченную конусом $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (рис. 160). При этом

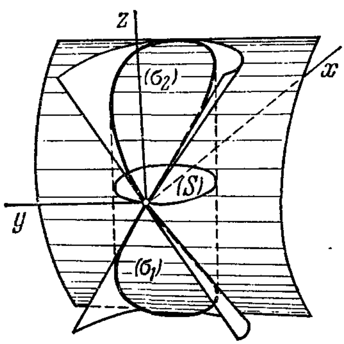

Рис. 160.

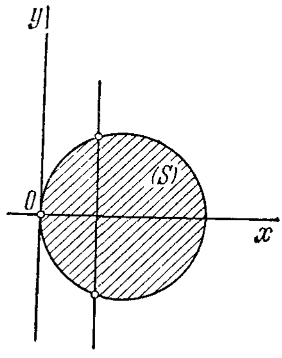

Рис. 161.

нормаль считается направленной в сторону выпуклости цилиндра.

Искомый поток выражается формулой (14.26)

$$Q = \iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}^0 d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} (-pX - qY + Z)\, dx\, dy.$$

Вычислим проекции вектора поля $\boldsymbol{R}$: $X = -\sqrt{x}$, $Y = yz$, $Z = 1$.

Из уравнения цилиндра $z^2 = 4x$ находим

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{z}; \; q = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \; Q = \iint\limits_{(\sigma)} \left(+\frac{2}{z}\sqrt{x} + 1\right) dx\,dy.$$

Исключив z из уравнения цилиндра $z^2 = 4x$ и из уравнения конуса $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, высекающего область (σ), мы получим уравнение цилиндра, проектирующего границу (σ) на плоскость Oxy: $x^2 + y^2 = x$. Следовательно, проекция (S) области (σ) на Oxy есть круг (рис. 161)

$$x^2 + y^2 = x, \; z = 0$$

с радиусом, равным $1/2$.

Область (σ) разделяется на две области (σ_1) и (σ_2), проектирующихся в одну и ту же площадку (S). Поэтому

$$Q = \iint\limits_{(\sigma_1)} \left(+\frac{2\sqrt{x}}{z} + 1\right) dx\,dy + \iint\limits_{(\sigma_2)} \left(+\frac{2\sqrt{x}}{z} + 1\right) dx\,dy.$$

Нижняя область (σ_1) имеет уравнение $z = -2\sqrt{x}$, а верхняя (σ_2) — уравнение $z = +2\sqrt{x}$. Поэтому

$$Q = \iint\limits_{(S)} 0\,dx\,dy + \iint\limits_{(S)} 2\,dx\,dy = 2\iint\limits_{(S)} dx\,dy = 2S = \frac{\pi}{2}.$$

Глава XV

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО. ДИВЕРГЕНЦИЯ ПОЛЯ

§ 1. Формула Остроградского

1. В основе теории векторного поля лежат две интегральные формулы. Первая из них принадлежит русскому математику и механику Михаилу Васильевичу Остроградскому *) (1801—1861). Эта формула была открыта Остроградским в 1826 г. и опубликована в 1838 г. в связи с его исследованиями в области вариационного исчисления,

*) Ранее эта формула связывалась с именем Гаусса. Но, как показывают исследования (см. Юшкевич А. П., История математики в России, «Наука», 1968, стр. 289—293), приоритет принадлежит Остроградскому.

относящимися к проблеме максимумов и минимумов кратных интегралов. При этом получил он ее в гораздо более общем виде, чем тот, в котором она применяется в теории векторного поля.

Вторая интегральная формула теории поля была найдена английским гидромехаником Стоксом (1819—1903) в 1854 г.

2. Преобразование Остроградского. Это преобразование решает задачу сведения интеграла любой кратности к интегралу меньшей кратности. Для целей теории поля мы разберем эту задачу лишь применительно к тройному интегралу.

Мы знаем, что для вычисления тройного интеграла следует сначала частным образом проинтегрировать подынтегральную функцию по одному из аргументов, а затем вычислить двойной интеграл от полученного результата.

Для сведения тройного интеграла, распространенного по произвольной области, к двойному интегралу нужно, чтобы первое интегрирование было выполнено в общем виде. А для этого нужно, чтобы подынтегральная функция была частной производной от некоторой функции по одному из аргументов.

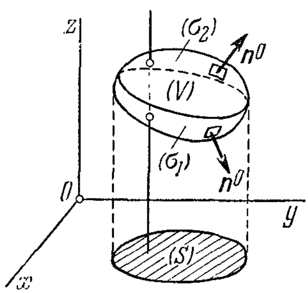

Рис. 162.

Итак, рассмотрим, например, интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z} dz,$$

причем пока будем предполагать, что область интеграции (V) нормальная, т. е. пересекающая область (V) вертикаль имеет с ней только один общий отрезок (рис. 162). Кроме того, будем предполагать, что $\partial F/\partial z$ непрерывна в области (V), включая ее границу.

По правилу вычисления тройного интеграла мы получим

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} dx\,dy\,F(x, y, z)\Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)}. \qquad (15.1)$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint\limits_{(S)} F[x, y, z_2(x, y)]\,dx\,dy - \iint\limits_{(S)} F[x, y, z_1(x, y)]\,dx\,dy.$$

Пусть (σ_1) и (σ_2) — соответственно нижняя и верхняя части поверхности (σ), ограничивающей область интеграции (V). Нормаль к поверхности (σ) мы направим наружу по отношению к области (V). Тогда, по определению поверхностного интеграла (гл. XIII, § 3), мы получим

$$\iint\limits_{(\sigma_1)\text{наружн}} F(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{(S)} F[x, y, z_1(x, y)]\,dx\,dy,$$
$$\iint\limits_{(\sigma_2)\text{наружн}} F(x, y, z)\,dx\,dy = +\iint\limits_{(S)} F[x, y, z_2(x, y)]\,dx\,dy.$$

В силу этого формула (15.1) для исходного тройного интеграла примет вид

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint\limits_{(\sigma_2)} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{(\sigma_1)} F(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{15.2}$$

Объединив поверхностные интегралы, мы получим формулу преобразования тройного интеграла в двойной, которую и называют *преобразованием Остроградского*:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{(\sigma)\text{наружн}} F(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{15.3}$$

«Колечко» на знаке поверхностного интеграла напоминает о замкнутости поверхности интеграции (σ).

З а м е ч а н и е 1. Если область (V) не является нормальной, то мы разобьем эту область на нормальные области (V_1), (V_2), ..., (V_n). Для каждой из частичных нормальных областей (V_k) выведенная формула справедлива:

$$\iiint\limits_{(V_k)} \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{(\sigma_k)\text{ наружн}} F\,dx\,dy.$$

Сложив эти равенства, мы получим

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{(\sigma_k)\text{ наружн}} F\,dx\,dy. \qquad (15.4)$$

В полученной сумме взаимно уничтожатся поверхностные интегралы по всем тем частям поверхностей (σ_k), по которым соприкасаются друг с другом частичные области (V_k), и останутся лишь поверхностные интегралы по тем частям (σ_k), которые располагаются на наружной границе (σ). Поэтому мы получим

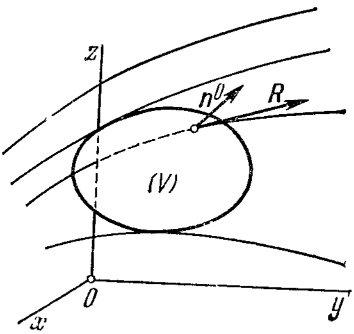

Рис. 163.

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{(\sigma)\text{наружн}} F\,dx\,dy. \qquad (15.5)$$

Итак, формула преобразования Остроградского верна для произвольной области (V).

Замечание 2. Аналогичные формулы мы получим, если под знаком тройного интеграла будет стоять частная производная по x или по y:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{(\sigma)} F\,dy\,dz, \qquad (15.6)$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{(\sigma)} F\,dz\,dx. \qquad (15.7)$$

3. Формула Остроградского. Рассмотрим поток поля $\boldsymbol{R}$ через замкнутую поверхность (σ), ограничивающую трехмерную область (V) (рис. 163). По формуле (14.18) этот поток равен

$$\oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma.$$

При этом будем предполагать, что вектор поля $\boldsymbol{R}$ и его частные производные определены и непрерывны во всей области (V), ограниченной поверхностью (σ).

В координатной форме формула потока имеет вид (см. (14.21))

$$\iint_{(\sigma)} X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy.$$

Применим к каждому слагаемому поверхностному интегралу соответствующее преобразование Остроградского:

$$\oiint_{(\sigma)} X\,dy\,dz = \iiint_{(V)} \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \tag{15.8}$$

$$\oiint_{(\sigma)} Y\,dz\,dx = \iiint_{(V)} \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz, \tag{15.9}$$

$$\oiint_{(\sigma)} Z\,dx\,dy = \iiint_{(V)} \frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz. \tag{15.10}$$

Сложив эти равенства, мы и получим формулу Остроградского в координатной форме

$$\oiint_{(\sigma)} (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy) =$$
$$= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \tag{15.11}$$

4. Формула Остроградского в векторной форме. Левая часть формулы Остроградского, как уже отмечалось, является потоком поля

$$\oiint_{(\sigma)} (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy) = \oiint_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma. \tag{15.12}$$

Подынтегральную функцию правой части формулы называют дивергенцией поля и обозначают $\operatorname{Div}\boldsymbol{R}$:

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{15.13}$$

Таким образом, формулу Остроградского можно записать так:

$$\iint\limits_{(\sigma)\text{наружи}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{Div}\boldsymbol{R}\,dV. \tag{15.14}$$

§ 2. Дивергенция поля

1. Инвариантность дивергенции. Дивергенция поля у нас возникла автоматически при выводе формулы Остроградского. При этом для ее вычисления получилась координатная формула (15.13)

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Непосредственно не видно, что дивергенция поля не зависит от системы координат и определена однозначно. Теперь мы докажем эту однозначность.

Для доказательства предположим, что данное поле имеет две дивергенции D_1 и D_2, являющиеся непрерывными функциями от координат текущей точки x, y, z. На основании формулы Остроградского (15.14) мы получим

$$\iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iiint\limits_{(V)} D_1\,dV, \quad \iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iiint\limits_{(V)} D_2\,dV.$$

Вычтя из первого равенства второе, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} (D_1 - D_2)\,dV = 0. \tag{15.15}$$

Допустим, что в некоторой точке поля M дивергенции D_1 и D_2 различны. Пусть, например,

$$D_1 - D_2 > 0.$$

Тогда в некоторой окрестности (V) взятой точки M это неравенство также будет сохраняться. Приняв эту окрестность за область интеграции, мы получим

$$\iiint\limits_{(V)} (D_1 - D_2)\,dV > 0,$$

что противоречит равенству (15.15). Следовательно, во всех точках поля обе дивергенции совпадают:

$$D_1 = D_2. \tag{15.16}$$

Итак, действительно *дивергенция поля однозначно определена и не зависит от выбора системы координат.* Для выяснения физического смысла дивергенции мы предварительно представим ее в виде предела отношения.

2. Дивергенция как предел отношения. Рассмотрим в поле произвольную точку M и возьмем какую-нибудь область (V), содержащую эту точку и ограниченную поверхностью (σ) (рис. 164). По формуле Остроградского (15.14) получим

$$\oint\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma = \iiint_{(V)} \operatorname{Div} \boldsymbol{R}\, dV.$$

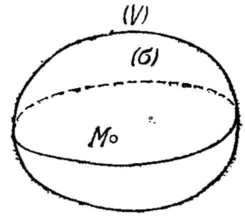

Рис. 164.

Применив к тройному интегралу теорему о среднем значении, мы перепишем эту формулу так:

$$\oint\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma = (\operatorname{Div} \boldsymbol{R})_{\widetilde{M}} V,$$

где $(\operatorname{Div} \boldsymbol{R})_{\widetilde{M}}$ есть значение дивергенции поля в некоторой определенной точке внутри области (V). Следовательно,

$$(\operatorname{Div} \boldsymbol{R})_{\widetilde{M}} = \frac{\oint\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma}{V}. \tag{15.17}$$

Стягивая область (V) к точке M, мы получим

$$(\operatorname{Div} \boldsymbol{R})_M = \lim_{(V)\to M} \frac{\oint\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma}{V}. \tag{15.18}$$

Итак, *дивергенция в данной точке является пределом отношения потока поля через замкнутую поверхность к объему области, ограниченной этой замкнутой поверхностью, при условии, что поверхность безгранично стягивается к данной точке.*

Иногда это положение принимается за определение дивергенции.

Важность полученной формулы состоит, между прочим, в том, что она дает определение дивергенции, не зависящее от выбора координатной системы.

3. Гидромеханический смысл дивергенции. Конкретный смысл дивергенции зависит от конкретного характера векторного поля. Мы пока ограничимся выяснением лишь гидромеханического смысла дивергенции. Рассмотрим стационарное течение жидкости и поле скоростей $\boldsymbol{R}$ его частиц. Пусть поток жидкости пронизывает некоторую область (V) (рис. 165). Поверхность (σ), ограничивающую эту область, разобьем на часть (σ_1), через которую жидкость втекает в область (V), и часть (σ_2), через которую жидкость вытекает. Тогда поток поля скоростей через замкнутую поверхность (σ) представится как сумма потоков через эти части:

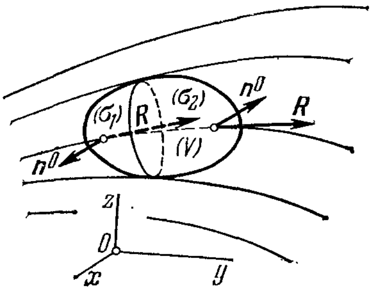

Рис. 165.

$$\mathop{\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc}_{(\sigma)\text{ наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma = \mathop{\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc}_{(\sigma_1)\text{ наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma + \mathop{\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc}_{(\sigma_2)\text{ наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma. \tag{15.19}$$

Первый частичный поток $\iint\limits_{(\sigma_1)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma$ будет заведомо отрицательным в силу отрицательности скалярного произведения $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0$ вектора поля на орт наружной нормали. По абсолютной величине он будет давать объемное количество жидкости, втекающей в единицу времени в область (V).

Второй частичный поток $\iint\limits_{(\sigma_2)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma$ будет, напротив, положительным и даст объемное количество жидкости, вытекающей в единицу времени из области (V).

Итак, *поток поля скоростей жидкости через замкнутую поверхность* (σ), *ограничивающую некоторую область* (V), *равен объемному расходу жидкости из области* (V), *т. е. объемному расширению в области* (V) *за единицу времени.*

Представив дивергенцию в виде предела отношения (15.18), т. е.

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \lim_{(V)\to M} \frac{\oint\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma}{V},$$

мы можем сказать, что *дивергенция поля скоростей жидкости есть расход жидкости в данной точке, отнесенный к единице объема.* Иначе можно сказать, что *дивергенция поля скоростей жидкости есть объемное расширение этой жидкости в данной точке, отнесенное к единице объема.*

З а м е ч а н и е. Если в каждой точке поля скоростей жидкости дивергенция равна нулю, то это означает, что жидкость не сжимается и не расширяется. Этим свойством, например, обладает текущая вода. Однако под жидкостью в широком смысле в механике подразумевают, в частности, и газ.

Академик С. А. Чаплыгин доказал теоретическим путем, что воздух при скоростях, не превосходящих примерно половины скорости звука, ведет себя приблизительно как несжимаемая жидкость. Следовательно, в аэромеханике малых скоростей можно считать, что дивергенция равна нулю. Опыты вполне подтверждают этот факт.

Наоборот, при дозвуковых скоростях, близких к скорости звука, и при сверхзвуковых скоростях воздушного потока давления не успевают перераспределяться, и воздух уже ведет себя, как сжимаемый газ. Дивергенция текущего с большой скоростью газа уже отлична от нуля.

Точно так же дивергенция оказывается отличной от нуля, когда в текущем газе возникают химические реакции (например, горение), изменяющие его плотность.

4. Теорема Остроградского. Мы перенесем гидромеханическую терминологию на случай произвольного поля и будем говорить, что *дивергенция произвольного поля является «расходом поля в данной точке, отнесенным к единице объема»*. Тогда очень выпукло можно сформулировать теорему Остроградского.

Первая часть формулы Остроградского является потоком поля через замкнутую поверхность (σ), ограничивающую область (V), т. е. пределом суммы элементарных потоков:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{R}_k\cdot\boldsymbol{n}_k^0\sigma_k, \tag{15.20}$$

причем элементарные потоки положительны там, где вектор поля направлен наружу области (V), и отрицательны там, где вектор поля направлен внутрь.

Вторая часть формулы Остроградского является тройным интегралом от дивергенции по области (V), ограниченной поверхностью (σ), т. е.

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{Div}\boldsymbol{R}dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Div}\boldsymbol{R})_{M_k}V_k. \tag{15.21}$$

Произведение объема V_k частичной области (V_k) и значения дивергенции в некоторой точке M_k этой области (V_k) приближенно является расходом поля из частичной области (V_k). Тройной интеграл, являющийся пределом суммы этих элементарных расходов, дает, следовательно, расход поля из всей области (V).

Итак, формулу Остроградского можно выразить следующей теоремой.

Теорема Остроградского. *Поток поля через замкнутую поверхность* (σ) *равен расходу поля из области* (V), *ограниченной этой поверхностью.*

Глава XVI

ТЕОРЕМА СТОКСА. РОТАЦИЯ ПОЛЯ

§ 1. Формула Стокса

1. Формула Грина. Пусть на плоскости Oxy контур (l) ограничивают плоскую область (S) (рис. 166). Пусть на этой области определены две функции

$$P = P(x, y),\ Q = Q(x, y),$$

непрерывные и обладающие непрерывными частными производными на всей области (S), включая ее границу (l).

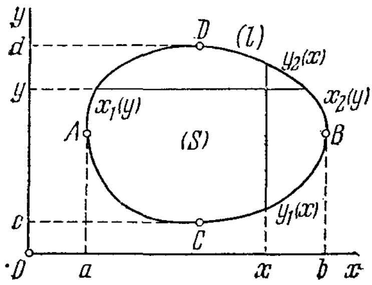

Рис. 166.

Докажем, что при этих условиях справедлива следующая формула Грина:

$$\oint_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (16.1)$$

По определению двойного интеграла

$$\iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx.$$

Следовательно,

$$\iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy\, Q(x, y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} =$$

$$= \int_c^d Q[x_2(y), y]\,dy - \int_c^d Q[x_1(y), y]\,dy. \qquad (16.2)$$

Получившиеся в правой части определенные интегралы являются криволинейными интегралами по двум участкам (CBD) и (DAC):

$$\int_c^d Q[x_2(y), y]\,dy = \int_{(CBD)} Q(x, y)\,dy,$$

$$-\int_c^d Q[x_1(y), y]\,dy = \int_{(DAC)} Q(x, y)\,dy.$$

Сложив почленно эти формулы, мы слева получим наш двойной интеграл (16.2), а справа — криволинейный интеграл по всему замкнутому контуру (l), обходимому против хода часовой стрелки:

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_{(l)} Q\,dy. \tag{16.3}$$

Аналогично найдем

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b dx\, P(x, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} =$$

$$= \int\limits_a^b P[x, y_2(x)]\,dx - \int\limits_a^b P[x, y_1(x)]\,dx. \tag{16.4}$$

Получившиеся в правой части определенные интегралы можно рассматривать как криволинейные интегралы по участкам (BDA) и (ACB) контура (l):

$$\int\limits_a^b P[x, y_2(x)]\,dx = -\int\limits_{(BDA)} P(x, y)\,dx,$$

$$-\int\limits_a^b P[x, y_1(x)]\,dx = -\int\limits_{(ACB)} P(x, y)\,dx.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_{(l)} P\,dx. \tag{16.5}$$

Вычитая почленно из формулы (16.3) формулу (16.5), мы придем к нужной нам формуле (16.1)

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy.$$

2. Формула Стокса. Выведенная формула Грина (16.1) *преобразует любой криволинейный интеграл, распространенный по плоскому замкнутому контуру* (l), *в двойной интеграл по плоской области* (S), *ограниченной этим контуром* (l). Задача заключается в обобщении этой формулы на случай произвольного пространственного контура (L), ограничивающего кривую область (σ).

Рассмотрим произвольное векторное поле

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z. \tag{16.6}$$

Проекции вектора поля

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z) \tag{16.7}$$

будем предполагать произвольными непрерывными функциями, обладающими непрерывными частными производными первого порядка.

В этом поле рассмотрим на поверхности область (σ), ограниченную контуром (L) (рис. 167). Уравнение поверхности будем полагать разрешенным относительно z: $z = f(x, y)$. Нормаль к поверхности направим так, чтобы ее угол с осью Oz был острым. После этого выберем направление обхода контура (L) так, чтобы оно было видно происходящим против хода часовой стрелки, если смотреть с той стороны, куда направлена нормаль.

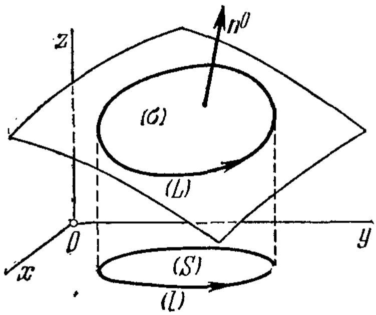

Рис. 167.

Циркуляция поля вдоль контура (L) имеет вид

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{(L)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{16.8}$$

Контур (L) лежит на поверхности (σ) и потому координаты его точек удовлетворяют уравнению поверхности

$$z = f(x, y),$$

из которого следует

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Подставив все это в формулу для циркуляции, получим

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{(L)} \check{X}\,dx + \check{Y}\,dy + \check{Z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right),$$

или

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{(L)} \left(\breve{X} + \breve{Z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\breve{Y} + \breve{Z}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy. \quad (16.9)$$

Знак «$\smile$» над проекциями X, Y, Z указывает на то, что входящая в их выражения третья координата z рассматривается как функция, определенная уравнением поверхности (σ), т. е.

$$\breve{X} = X\,[x,\, y,\, f(x,\, y)], \quad \breve{Y} = Y\,[x,\, y,\, f(x,\, y)],$$
$$\breve{Z} = Z\,[x,\, y,\, f(x,\, y)]. \quad (16.10)$$

Таким образом, в последнем криволинейном интеграле (16.9) содержатся фактически только две координаты: x и y. Но для всякой точки на контуре (L) значения этих двух координат совпадают с их значениями для проекции точки на плоскость Oxy. Поэтому интегрирование по пространственному контуру (L) можно заменить интегрированием по его проекции (l) на плоскость Oxy:

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{(l)} \left(\breve{X} + \breve{Z}\,\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\breve{Y} + \breve{Z}\,\frac{\partial z}{dy}\right) dy. \quad (16.11)$$

Следовательно,

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{(l)} P\,dx + Q\,dy, \quad (16.12)$$

где положено

$$P = \breve{X} + \breve{Z}\,\frac{\partial z}{\partial x}, \quad Q = \breve{Y} + \breve{Z}\,\frac{\partial z}{\partial y}. \quad (16.13)$$

Применив формулу Грина (16.1), мы получим

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \quad (16.14)$$

На основании правила дифференцирования сложных функций мы из (16.13) найдем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \breve{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{Y}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial \breve{Z}}{\partial x} + \frac{\partial \breve{Z}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \breve{Z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \breve{X}}{\partial y} + \frac{\partial \breve{X}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial \breve{Z}}{\partial y} + \frac{\partial \breve{Z}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \breve{Z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

При подстановке этих выражений в формулу (16.14) некоторые члены взаимно уничтожатся и эта формула примет вид

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(S)} \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial \check{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \check{Y}}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \check{X}}{\partial z} - \frac{\partial \check{Z}}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \check{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \check{X}}{\partial y} \right\} dx\,dy. \qquad (16.15)$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \qquad (16.16)$$

и обратим внимание на то, что полученный двойной интеграл (16.15) в полном соответствии с определением поверхностного интеграла (гл. XIII, § 3) является поверхностным интегралом по области (σ):

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(\sigma)} \left\{ -p\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial X}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \right\} dx\,dy. \qquad (16.17)$$

Но

$$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\beta,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\gamma. \qquad (16.18)$$

Кроме того, под знаком поверхностного интеграла можно пользоваться соотношениями

$$d\sigma \overset{*}{=} \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \qquad (16.19)$$

В силу этого

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(\sigma)} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} d\sigma.$$

Это и есть формула Стокса. В чисто координатной форме ее можно записать так:

$$\oint\limits_{(L)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz =$$
$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\} d\sigma. \quad (16.20)$$

3. Векторный вид формулы Стокса. Подынтегральную функцию поверхностного интеграла в формуле Стокса можно рассматривать как скалярное произведение орта нормали к поверхности

$$\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma \quad (16.21)$$

и вектора, называемого ротацией поля или вихрем поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right). \quad (16.22)$$

В силу этого формулу Стокса (16.20) можно переписать в векторной форме так:

$$\int\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma. \quad (16.23)$$

Левая часть этой формулы является циркуляцией поля по контуру (L); правая же часть является потоком ротации через (σ). Получается следующая теорема.

Теорема Стокса. *Циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротации этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром.*

§ 2. Ротация поля

1. Символическая формула для ротации. Постараемся придать весьма громоздкой формуле (16.22), определяющей ротацию поля, более компактный и удобный для запоминания вид. Для этого перепишем ее так:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}Z - \frac{\partial}{\partial z}Y\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}Z - \frac{\partial}{\partial z}X\right) +$$
$$+ \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}Y - \frac{\partial}{\partial y}X\right).$$

Непосредственно видно, что правую часть формулы можно записать в виде символического определителя третьего порядка:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (16.24)$$

В этом определителе среднюю строку занимают операторы частных производных. Чтобы получить развернутое выражение для ротации, достаточно символический определитель развернуть, согласно обычным правилам, по элементам первой строки. При этом только надлежит рассматривать «умножение» символического элемента второй строки на элемент третьей строки как соответствующее дифференцирование.

Символическим представлением ротации в форме определителя третьего порядка (16.24) мы и будем в дальнейшем пользоваться.

2. Инвариантность понятия ротации. Ротация поля возникла у нас при выводе формулы Стокса и была определена координатной формулой (16.22). Из этой формулы непосредственно не следует независимость понятия ротации от выбора координатной системы, т. е. не следует, что в каждой точке векторного поля вектор ротации однозначно определяется только самим векторным полем. Мы эту однозначность теперь докажем, т. е. докажем, что *понятие ротации есть понятие, определенное внутренними свойствами поля, инвариантное по отношению к выбору системы координат.*

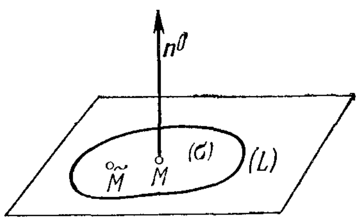

Рис. 168.

Возьмем в векторном поле $\boldsymbol{R}$ точку M и исходящий из нее единичный вектор $\boldsymbol{n}^0$. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n}^0$. На этой плоскости возьмем какую-либо область (σ), содержащую точку M и окруженную контуром (L) (рис. 168). На основании формулы

Стокса (16.23) мы можем написать

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{(\sigma)} \operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot \boldsymbol{n}^0 d\sigma. \tag{16.25}$$

Допустим, что в поле имеются две ротации $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$, являющиеся непрерывными векторными функциями от координат текущей точки поля. Тогда предыдущую формулу (16.25) можно записать двумя способами:

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{(\sigma)} \boldsymbol{P}_1\cdot \boldsymbol{n}^0\, d\sigma, \quad \oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{(\sigma)} \boldsymbol{P}_2\cdot \boldsymbol{n}^0\, d\sigma.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\iint_{(\sigma)} (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)\cdot \boldsymbol{n}^0\, d\sigma = 0.$$

Пусть в данной точке M скалярное произведение $(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)\cdot \boldsymbol{n}^0$ отлично от нуля, например положительно. Так как это скалярное произведение меняется непрерывно, то мы можем окружающую точку M область (σ) взять столь малых размеров, что внутри нее скалярное произведение будет оставаться положительным во всех точках, а тогда положительным будет и весь интеграл:

$$\iint_{(\sigma)} (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)\cdot \boldsymbol{n}^0 d\sigma > 0.$$

Но это противоречит доказанному равенству нулю этого интеграла. Итак

$$(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)\cdot \boldsymbol{n}^0 = 0$$

для любой точки M и для любого направления $\boldsymbol{n}^0$, а это значит, что

$$\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2 = 0,$$

т. е.

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_2.$$

Однозначность ротации доказана.

3. Ротация как предел отношения. Возьмем в векторном поле $\boldsymbol{R}$ точку M и исходящий из нее единичный вектор $\boldsymbol{n}^0$. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n}^0$. На этой плоскости построим контур (L), ограничивающий площадку (σ), внутри которой находится данная точка M (рис. 168). На основании формулы Стокса мы можем написать

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot \boldsymbol{n}^0\, d\sigma.$$

К поверхностному интегралу, распространенному по плоской площадке (σ), мы применим теорему о среднем значении. В результате получим

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \sigma (\operatorname{rot} \boldsymbol{R})_{\tilde{M}}\cdot \boldsymbol{n}^0, \tag{16.26}$$

где $(\operatorname{rot} \boldsymbol{R})_{\tilde{M}}$ есть значение ротации в некоторой точке $\tilde{M}$ области (σ).

Разделив обе части полученной формулы на σ и предпредположив, что контур (L) стягивается к выбранной точке M, мы получим

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{R})_M\cdot \boldsymbol{n}^0 = \lim_{(L)\to M} \frac{\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}}{\sigma}. \tag{16.27}$$

Эта формула определяет *проекцию ротации на любое направление* $\boldsymbol{n}^0$ *бескоординатным образом*. Следовательно, фактически она бескоординатным образом определяет и саму ротацию, так как для определения вектора достаточно знать его проекции на три взаимно перпендикулярных направления.

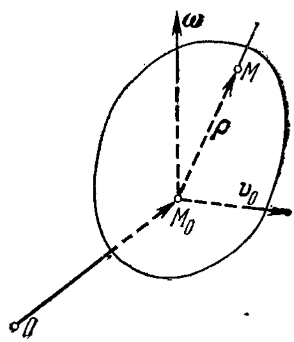

Рис. 169.

4. Ротация поля скоростей твердого тела. Скорость $\boldsymbol{v}$ произвольной точки M твердого тела (10.44) слагается из скорости $\boldsymbol{v}_0$ его фиксированной начальной точки M_0 и скорости $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$, обусловленной его вращением с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через M_0 (рис. 169):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}. \tag{16.28}$$

Вектор $\boldsymbol{\rho}$, соединяющий фиксированную точку тела $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с его текущей точкой $M(x, y, z)$, имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{i}(x - x_0) + \boldsymbol{j}(y - y_0) + \boldsymbol{k}(z - z_0).$$

Положив

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z, \\ \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{i}X_0 + \boldsymbol{j}Y_0 + \boldsymbol{k}Z_0, \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{i}\omega_x + \boldsymbol{j}\omega_y + \boldsymbol{k}\omega_z, \end{gathered}$$

мы получим из векторной формулы (16.28), определяющей скорость $\boldsymbol{v}$, три координатных формулы для проекций этой скорости:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0), \\ Y &= Y_0 + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0), \\ Z &= Z_0 + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0). \end{aligned}\right\} \tag{16.29}$$

Подчеркнем, что в фиксированный момент времени t переменными являются только x, y, z; все остальные величины x_0, y_0, z_0, ω_x, ω_y, ω_z, X_0, Y_0, Z_0 являются величинами постоянными. Опираясь на это, мы вычислим ротацию поля скоростей $\boldsymbol{v}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}(\omega_x + \omega_x) + \boldsymbol{j}(\omega_y + \omega_y) + \boldsymbol{k}(\omega_z + \omega_z) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Итак, *ротация поля скоростей твердого тела в любой его точке равна удвоенной угловой скорости*:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}. \tag{16.30}$$

З а м е ч а н и е. Найденный механический смысл ротации имеет гораздо более широкое значение. В гидромеханике показывается, что движение бесконечно малой жидкой частицы в текущей жидкости с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно расчленить на поступательное, вращательное и деформацию. Оказывается, что при таком расчленении ротация поля скоростей текущей жидкости и дает удвоенную угловую скорость частицы. В отличие от рассмотренного поля скоростей точек твердого тела, ротация поля скоростей текущей жидкости в каждой точке будет своя.

§ 3. Оператор Гамильтона

1. Символический вектор «набла». Дифференциальные операции теории поля можно в весьма значительной степени алгебраизировать путем введения особого векторно-дифференциального оператора, который обозначают знаком ∇ «набла». Этот оператор появился еще у Гамильтона. Он возникает из основных дифференциальных операций теории поля следующим образом.

а) Градиент скалярного поля, т. е.

$$\operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

условно можно записать так:

$$\operatorname{grad} \Phi = \left(\boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \Phi.$$

б) Дивергенцию векторного поля, т. е.

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

условно можно представить как «скалярное произведение», если формально применять правило скалярного умножения векторов в координатной форме:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\boldsymbol{i} X + \boldsymbol{j} Y + \boldsymbol{k} Z).$$

в) Ротацию векторного поля, т. е.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

также можно условно рассматривать как «векторное произведение»:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{i} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i} X + \boldsymbol{j} Y + \boldsymbol{k} Z).$$

Итак, сама собой напрашивается мысль ввести для сокращенной записи формул символический «вектор-оператор»

$$\nabla \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

При помощи этого вектора-оператора можно записать основные дифференциальные операции теории поля следующим образом:

$$\operatorname{grad} \Phi = \nabla\Phi, \quad \operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \nabla\cdot\boldsymbol{R}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \nabla \times \boldsymbol{R}. \tag{16.31}$$

Такая запись дифференциальных операций широко распространена. Как показывает опыт, пользование формальной аналогией вектора-оператора ∇ с обычным вектором весьма сильно сокращает выкладки.

Глава XVII

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Чрезвычайно большое значение в физике имеют векторные поля, для которых тождественно равна нулю либо дивергенция, либо ротация, либо и та и другая величины вместе. Изучением этих полей мы и займемся.

§ 1. Потенциальное поле

1. Потенциальное поле как безвихревое поле. Векторное поле $\boldsymbol{R}$ называется *потенциальным*, если в каждой его точке ротация равна нулю:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = 0. \tag{17.1}$$

Потенциальное поле называют также *безвихревым полем*.

Примером потенциального поля может служить электростатическое поле $\boldsymbol{E}$ (см. гл. XVIII, § 1).

2. Поле градиента. Рассмотрим произвольное скалярное поле

$$\Phi = \Phi(x, y, z). \tag{17.2}$$

В каждой точке этого поля единственным образом определяется градиент поля

$$\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{17.3}$$

Следовательно, *каждому скалярному полю соответствует определенное векторное поле — поле градиента.*

Найдем ротацию поля градиента какой-либо скалярной функции:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial y}\right) -$$

$$- \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial x}\right) = 0.$$

Получается следующая

Теорема. *Поле градиента любой скалярной функции есть поле потенциальное*:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = 0. \tag{17.4}$$

3. Циркуляция потенциального поля по замкнутому контуру.

а) Рассмотрим в потенциальном поле $\boldsymbol{R}$ замкнутый контур (L), ограничивающий некоторую область поверхности (σ), целиком принадлежащую полю (рис. 170). На основании теоремы Стокса можем написать

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma.$$

По условию поле потенциальное, т. е.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = 0.$$

В силу этого мы получим равенство нулю циркуляции:

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{17.5}$$

Заметим, что существенным было предположение о принадлежности (σ) полю. Только на этом основании мы и могли применить теорему Стокса.

Не всегда контур (L), целиком находящийся в поле, может ограничивать поверхностную область (σ), также целиком принадлежащую полю. Например, если поле занимает не все пространство, а лишь некоторую область, расположенную вокруг бесконечного круглого цилиндра (рис. 171), то контур (L), охватывающий этот цилиндр,

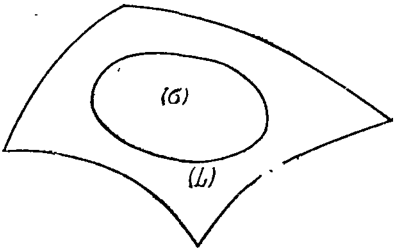

Рис. 170.

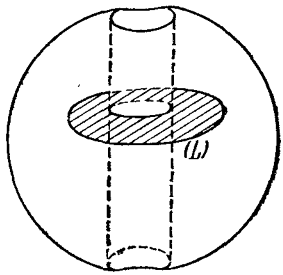

Рис. 171.

не может ограничивать никакую поверхностную область (σ), не пересекающую этого цилиндра и принадлежащую целиком полю.

Характерной особенностью контура, который способен ограничивать поверхностную область (σ), целиком принадлежащую полю, является возможность непрерывной деформацией стянуть его в точку поля, не пересекая границ поля. При таком стягивании контур и опишет поверхностную область (σ), целиком лежащую в поле.

Итак, доказанное выше равенство нулю циркуляции потенциального поля относится только к контурам, которые стягиваются к точке без пересечения границ поля.

б) Допустим, что, обратно, циркуляция некоторого поля по любому замкнутому контуру, который можно стянуть в точку, не пересекая границ поля, равна нулю:

$$\oint_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Представив проекцию ротации этого поля на произвольный вектор $\boldsymbol{n}^0$ в виде предела отношения (16.27), мы получим

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{R})_M \cdot \boldsymbol{n}^0 = \lim_{(L)\to M} \frac{\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}}{\sigma} = 0,$$

откуда в силу произвольности $\boldsymbol{n}^0$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = 0,$$

т. е. рассматриваемое поле потенциальное.

Итак, получается следующая

Теорема. *Векторное поле является потенциальным полем тогда и только тогда, когда равна нулю циркуляция по любому замкнутому контуру, который можно стянуть в точку поля, не пересекая его границ.*

4. Циркуляция потенциального поля между двумя точками. Если всякий замкнутый контур поля можно стянуть в точку, не пересекая границ, то поле называется *односвязным*. Если поле не односвязное, то его можно сделать односвязным при помощи введения дополнительных границ. Так, поле, занимающее область, расположенную вокруг цилиндра (рис. 171), превращается в односвязное, если в качестве дополнительной границы присоединить кусок плоскости, ограниченный одной из образующих

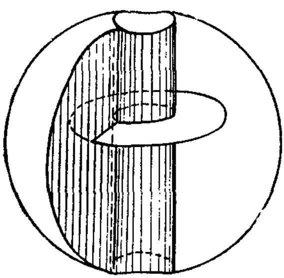

Рис. 172.

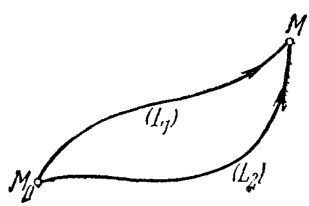

Рис. 173.

цилиндра и линией пересечения плоскости с границей области (рис. 172). Тогда уже нельзя будет провести контур, принадлежащий полю и охватывающий цилиндр. Всякий же другой контур непрерывной деформацией можно стянуть в точку.

Итак, введя в случае необходимости дополнительные границы, мы можем считать произвольное потенциальное поле односвязным.

Соединим точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ этого потенциального поля с точкой $M\,(x, y, z)$ двумя путями (L_1) и (L_2) (рис. 173), направленными от M_0 к M. Циркуляция поля по замкнутому контуру, образованному линией (L_1) и линией, противоположно направленной (L_2), равна нулю, т. е.

$$\int\limits_{(L_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} - \int\limits_{(L_2)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = 0,$$

или

$$\int\limits_{(L_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(L_2)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{17.6}$$

Итак, *циркуляция односвязного потенциального поля между точками M_0 и M не зависит от пути, соединяющего эти точки, и является функцией только от координат начальной и конечной точек.* Эту циркуляцию мы будем обозначать так:

$$\int\limits_{(M_0M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

5. Потенциал. Циркуляция односвязного потенциального поля между фиксированной точкой $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и текущей точкой $M\,(x, y, z)$ по доказанному не зависит от пути, соединяющего эти точки, и является функцией только от текущих координат x, y, z:

$$\int\limits_{(M_0M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(x, y, z). \tag{17.7}$$

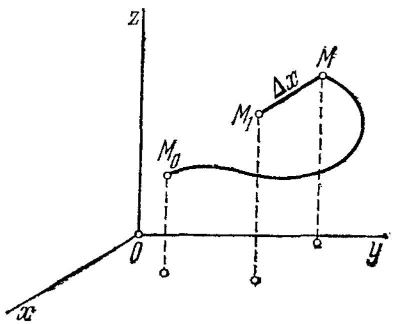

Рис. 174.

Найдем частные производные этой функции по x, y, z. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда точка $M\,(x, y, z)$ переместится в новое положение $M_1\,(x + \Delta x,\ y, z)$ (рис. 174), и мы получим

$$\Phi(x+\Delta x, y, z)=\int\limits_{(M_0M_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}=\int\limits_{(M_0M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}+\int\limits_{(MM_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{17.8}$$

Следовательно,

$$\Phi(x+\Delta x, y, z)-\Phi(x, y, z)=$$
$$=\int\limits_{(MM_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}=\int\limits_{(MM_1)} X\,d\tilde{x}+Y\,d\tilde{y}+Z\,d\tilde{z}.$$

Вдоль отрезка MM_1 мы имеем

$$x\leqslant\tilde{x}\leqslant x+\Delta x,\ \tilde{y}=y,\ \ \tilde{z}=z,\ d\tilde{y}=0,\ d\tilde{z}=0.$$

В силу этого

$$\Phi(x+\Delta x, y, z)-\Phi(x, y, z)=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} X(\tilde{x}, y, z)\,d\tilde{x}.$$

Применив к интегралу теорему о среднем значении, мы найдем

$$\Phi(x+\Delta x, y, z)-\Phi(x, y, z)=\Delta x X(x+\theta\Delta x, y, z).$$

Разделив на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, мы получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=X(x, y, z). \tag{17.9}$$

Совершенно таким же путем мы вычислим частные производные функции Φ по y и по z:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Y(x, y, z),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=Z(x, y, z). \tag{17.10}$$

На основании полученных формул мы можем вектор поля $\boldsymbol{R}$ представить так:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{17.11}$$

или

$$\boldsymbol{R}=\operatorname{grad}\Phi. \tag{17.12}$$

Получается следующая

Теорема. *Вектор потенциального поля является градиентом некоторой скалярной функции.*

Определение. Скалярная функция Φ, градиент которой равен вектору потенциального поля, называется *потенциалом поля.*

Потенциал поля $\boldsymbol{R}$ вычисляется, следовательно, по формуле

$$\Phi = \int\limits_{(M_0M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (17.13)$$

Замечание. Если к потенциалу Φ поля $\boldsymbol{R}$ прибавить константу, то получится потенциал того же поля:

$$\operatorname{grad}\,(\Phi + C) = \operatorname{grad}\,\Phi = \boldsymbol{R}.$$

Обратно, два потенциала векторного поля отличаются друг от друга на константу. Действительно, пусть

$$\operatorname{grad}\,\Phi = \boldsymbol{R} \text{ и } \operatorname{grad}\,\tilde{\Phi} = \boldsymbol{R}.$$

Тогда

$$\operatorname{grad}\,(\tilde{\Phi} - \Phi) = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial\,(\tilde{\Phi} - \Phi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\,(\tilde{\Phi} - \Phi)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\,(\tilde{\Phi} - \Phi)}{\partial z} = 0,$$

или

$$\tilde{\Phi} - \Phi = C.$$

Итак, *если Φ — некоторый потенциал данного потенциального поля, то всякий другой потенциал $\tilde{\Phi}$ этого же поля имеет вид*

$$\tilde{\Phi} = \Phi + C. \qquad (17.14)$$

6. Элемент циркуляции. Под *элементом циркуляции* понимается скалярное произведение вектора поля и дифференциала радиуса-вектора точки, т. е. произведение $\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}$.

Если поле потенциально, то $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\,\Phi$, и потому

$$\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \operatorname{grad}\,\Phi\cdot d\boldsymbol{r} = d\Phi.$$

Пусть, обратно,

$$\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = d\Phi,$$

т. е

$$\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \operatorname{grad} \Phi \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Отсюда следует

$$\boldsymbol{R} = \operatorname{grad} \Phi,$$

т. е. поле потенциально. Получается следующая

Т е о р е м а. *Элемент циркуляции поля является полным дифференциалом некоторой функции* Φ,

$$d\Phi = \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad (17.15)$$

тогда и только тогда, когда поле потенциально. При этом указанная функция Φ *и является потенциалом поля.*

7. Характеристические признаки потенциального поля. Итак, потенциальное поле $\boldsymbol{R}$ характеризуется наличием следующих признаков.

а) Ротация поля равна нулю:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} \equiv 0.$$

б) Вектор поля является градиентом скалярной функции (потенциала):

$$\boldsymbol{R} = \operatorname{grad} \Phi,$$

причем

$$\Phi = \int\limits_{(M_0 M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

в) Циркуляция поля по любому замкнутому контуру равна нулю, если только контур можно стянуть в точку поля, не пересекая его границ:

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

г) Элементарная циркуляция является полным дифференциалом скалярной функции (потенциала):

$$\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = d\Phi.$$

Основное утверждение, вытекающее из доказанных теорем, состоит в том, что *выполнение любого из перечисленных признаков является достаточным для того, чтобы поле было потенциальным и чтобы выполнялись остальные признаки.*

8. Вычисление потенциала. Для вычисления потенциала Φ односвязного потенциального поля

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}X(x, y, z) + \boldsymbol{j}Y(x, y, z) + \boldsymbol{k}Z(x, y, z) \qquad (17.16)$$

надлежит вычислить циркуляцию поля

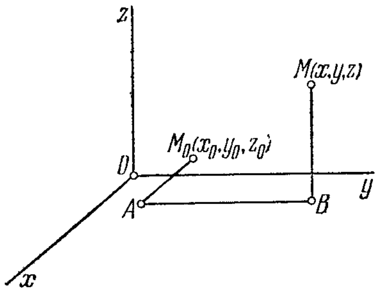

Рис. 175.

$$\Phi = \int\limits_{(M_0M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(M_0M)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \qquad (17.17)$$

вдоль любого пути (M_0M), соединяющего произвольно фиксированную точку M_0 с текущей точкой M. Проще всего в качестве такого пути взять координатную ломаную M_0ABM (рис. 175), звенья которой параллельны соответствующим координатным осям. Обозначим через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ координаты текущей точки на пути интеграции.

Вдоль первого звена (M_0A) мы получим

$$\tilde{y} = y_0,\ \tilde{z} = z_0,\ d\tilde{y} = 0,\ d\tilde{z} = 0,\ x_0 \leqslant \tilde{x} \leqslant x,$$

$$\int\limits_{(M_0A)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{x_0}^{x} X(\tilde{x}, y_0, z_0)\,d\tilde{x}. \qquad (17.18)$$

Вдоль второго звена (AB) получим

$$\tilde{x} = x,\ \tilde{z} = z_0,\ d\tilde{x} = 0,\ d\tilde{z} = 0,\ y_0 \leqslant \tilde{y} \leqslant y,$$

$$\int\limits_{(AB)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{y_0}^{y} Y(x, \tilde{y}, z_0)\,d\tilde{y}. \qquad (17.19)$$

Вдоль третьего звена (BM) получим

$$\tilde{x} = x,\ \tilde{y} = y,\ d\tilde{x} = 0,\ d\tilde{y} = 0,\ z_0 \leqslant \tilde{z} \leqslant z,$$

$$\int\limits_{(BM)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{z_0}^{z} Z(x, y, \tilde{z})\,d\tilde{z}. \qquad (17.20)$$

Сложив найденные интегралы, мы получим формулу для вычисления потенциала:

$$\Phi = \int_{x_0}^{x} X(\tilde{x}, y_0, z_0)\, d\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} Y(x, \tilde{y}, z_0)\, d\tilde{y} + \int_{z_0}^{z} Z(x, y, \tilde{z})\, d\tilde{z}. \tag{17.21}$$

Пример. Дано поле $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}\,(2xy + z) + \boldsymbol{j}\,(x^2 - 2y) + \boldsymbol{k}x$. Требуется показать, что оно потенциально, и найти его потенциал.

а) Вычисляем ротацию:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x^2 - 2y & x \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}0 - \boldsymbol{j}\,(1 - 1) + \boldsymbol{k}\,(2x - 2x) = 0.$$

Следовательно, поле потенциально.

б) Вычислим потенциал, приняв за начальную фиксированную точку начало координат:

$$\Phi = \int_{(OM)} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(OM)} (2\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{z})\, d\tilde{x} + (\tilde{x}^2 - 2\tilde{y})\, d\tilde{y} + \tilde{x}\, d\tilde{z}.$$

Применив формулу (17.21), мы найдем

$$\Phi = \int_0^x 0 \cdot d\tilde{x} + \int_0^y (x^2 - 2\tilde{y})\, d\tilde{y} + \int_0^z x\, d\tilde{z} = x^2 y - y^2 + xz.$$

В общем виде потенциал рассматриваемого поля может быть записан так:

$$\Phi_{\text{общ}} = x^2 y - y^2 + xz + \text{const}.$$

9. Центральное поле. Векторное поле называется *центральным*, если его вектор определяется формулой вида

$$\boldsymbol{R} = f(r)\, \boldsymbol{r}, \tag{17.22}$$

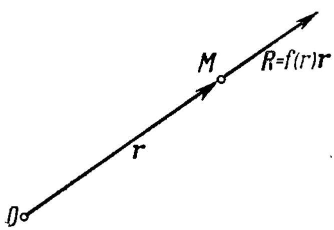

Рис. 176.

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий фиксированную точку O (центр поля) с текущей точкой M (рис. 176).

Подсчитаем ротацию центрального поля:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{17.23}$$

Поместив начало координат в центр поля O, получим

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z, \tag{17.24}$$

$$X = f(r)\,x, Y = f(r)\,y, \quad Z = f(r)\,z, \tag{17.25}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(r)\,x & f(r)\,y & f(r)\,z \end{vmatrix}. \tag{17.26}$$

Из формулы

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

следует

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}. \tag{17.27}$$

В силу этого

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}\left[f'(r)\frac{zy}{r} - f'(r)\frac{yz}{r}\right] - \boldsymbol{j}\left[f'(r)\frac{zx}{r} - f'(r)\frac{xz}{r}\right] + \\ + \boldsymbol{k}\left[f'(r)\frac{yx}{r} - f'(r)\frac{xy}{r}\right], \tag{17.28}$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = 0.$$

Итак, *центральное поле всегда потенциально.* Найдем его потенциал:

$$\Phi = \int\limits_{(M_0M)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(M_0M)} f(r)\,\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{17.29}$$

Дифференцирование тождества $\boldsymbol{r}^2 = r^2$ даст

$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = r\,dr. \tag{17.30}$$

Поэтому получается следующая простая формула для вычисления потенциала центрального поля:

$$\Phi = \int\limits_{r_0}^{r} f(r)\,r\,dr. \tag{17.31}$$

10. Вихревые шнуры. Границами векторного поля могут служить поверхности, а также отдельные точки и линии, не принадлежащие полю.

Вихревым шнуром называется отдельная граничная линия поля, не оканчивающаяся внутри поля.

Мы рассмотрим вихревой шнур в потенциальном поле. Заметим, что поле, в котором есть вихревой шнур, не является односвязным. Замкнутый контур, охватывающий вихревой шнур, нельзя стянуть к точке поля, не пересекая границ поля. Следовательно, циркуляция поля по такому контуру не обязательно равняется нулю.

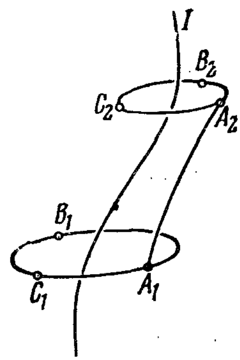

Рис. 177.

Рассмотрим два замкнутых контура $(A_1B_1C_1)$ и $(A_2B_2C_2)$, охватывающих по одному разу вихревой шнур I и не охватывающих других вихревых шнуров (рис. 177). Соединим точки A_1 и A_2 этих контуров линией (A_1A_2) и рассмотрим получившийся новый замкнутый контур $(A_1A_2C_2B_2A_2A_1B_1C_1A_1)$, в котором линия A_1A_2 повторяется два раза. Этот контур можно стянуть в одну точку поля, не пересекая его границ. Следовательно, циркуляция поля по этому контуру будет равна нулю, т. е.

$$\int\limits_{(A_1A_2)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{(A_2C_2B_2A_2)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{(A_2A_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{(A_1B_1C_1A_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Циркуляция по линиям (A_1A_2) и (A_2A_1) взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\int\limits_{(A_2C_2B_2A_2)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{(A_1B_1C_1A_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

или

$$\int\limits_{(A_2B_2C_2A_2)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(A_1B_1C_1A_1)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (17.32)$$

Итак, *циркуляция потенциального поля по замкнутому контуру, который охватывает один раз данный вихревой шнур и не охватывает других вихревых шнуров, есть величина постоянная, не зависящая ни от формы, ни от положения указанного контура.* Эта циркуляция J называется *интенсивностью* или *мощностью* вихревого шнура.

Замечание 1. Знак интенсивности J вихревого шнура зависит от направления обхода контура. Обычно

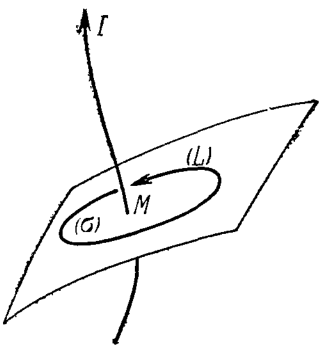

Рис. 178.

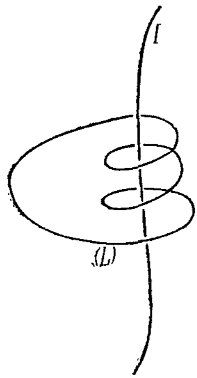

Рис. 179.

выбирают определенное направление самого вихревого шнура и обходят контур по правилу правого винта (рис. 178):

$$J = \oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}. \qquad (17.33)$$

Замечание 2. Отношение циркуляции поля по замкнутому контуру (L), который охватывает один вихревой шнур с ненулевой мощностью J, к площади поверхности (σ), ограниченной этим контуром, т. е.

$$\frac{\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r}}{\sigma} = \frac{J}{\sigma}, \qquad (17.34)$$

стремится к бесконечности, когда контур (L) и ограниченная им область (σ) стягиваются в точку M.

Следовательно, можно сказать, что *во всех точках вихревого шнура с ненулевой интенсивностью ротация поля обращается в бесконечность.*

Замечание 3. Если контур (L) обвивает вихревой шнур несколько раз (рис. 179), то циркуляция поля вдоль этого контура равна произведению мощности J шнура на число n обходов вокруг шнура:

$$\oint\limits_{(L)} \boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{r} = nJ. \tag{17.35}$$

Замечание 4. В гидромеханике вихревым шнуром является линия, вокруг которой происходит вращательное движение жидкости наподобие смерча. В теории электричества вихревым шнуром является провод, по которому течет ток (см. гл. XVIII, § 3), и т. д.

§ 2. Соленоидальное поле

1. Соленоидальное поле как поле несжимаемое. Поле $\boldsymbol{R}$ называется *соленоидальным* или *трубчатым*, если в каждой его точке дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{Div} R = 0. \tag{17.36}$$

Соленоидальное поле называют также *несжимаемым*. Происхождение последнего названия достаточно понятно в связи с гидромеханическим смыслом дивергенции. Простейшим примером несжимаемого поля является поле скоростей потока несжимаемой жидкости. Причина названия такого поля трубчатым (соленоидальным) выяснится дальше.

2. Поле ротации. Рассмотрим поле ротации произвольного векторного поля $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{R} = \operatorname{rot} \boldsymbol{P}, \tag{17.37}$$

т. е.

$$\boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y}\right).$$

Вычислим дивергенцию этого поля:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 P_z}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 P_y}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial^2 P_z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 P_x}{\partial y\, \partial z} = 0.$$

Получается следующая

Теорема. *Поле ротации произвольного векторного поля является соленоидальным, т. е.*

$$\operatorname{Div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{P}) = 0. \qquad (17.38)$$

Замечание. Чрезвычайно наглядно это утверждение выглядит в операторной форме:

$$\operatorname{Div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{P}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{P}). \qquad (17.39)$$

Но мы знаем, что векторно-скалярное произведение, содержащее два одинаковых множителя, равно нулю. Поэтому

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{P}) = 0. \qquad (17.40)$$

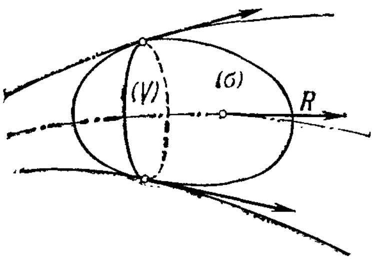

Рис. 180.

3. Поток соленоидального поля через замкнутую поверхность.

а) Рассмотрим в соленоидальном поле $\boldsymbol{R}$ замкнутую поверхность (σ), ограничивающую область (V), целиком принадлежащую полю (рис. 180). Теорема Остроградского дает

$$\underset{(\sigma)}{\oiint} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}^0\, d\sigma = \underset{(V)}{\iiint} \operatorname{Div} \boldsymbol{R}\, dV.$$

Так как поле соленоидально, то

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = 0,$$

и потому

$$\underset{(\sigma)}{\oiint} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}^0\, d\sigma = 0. \qquad (17.41)$$

б) Пусть, обратно, в некотором поле $\boldsymbol{R}$ поток через любую замкнутую поверхность, которую можно стянуть в точку, не пересекая границ поля, равен нулю. По формуле (15.18), выражающей дивергенцию в виде предела отношения,

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \lim_{(\sigma)\to 0} \frac{\oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma}{V} = 0,$$

т. е. рассматриваемое поле соленоидально. Итак, имеет место

Теорема. *Векторное поле является соленоидальным тогда и только тогда, когда равен нулю поток поля через всякую замкнутую поверхность, которую можно стянуть в точку, не пересекая границ поля:*

$$\oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0.$$

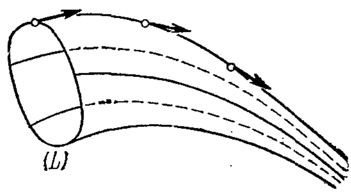

Рис. 181.

4. Трубчатое строение соленоидального поля. *Векторной трубкой поля* называется трубка, образованная векторными линиями поля, пересекающими заданный контур (L) (рис. 181).

Рассмотрим в соленоидальном поле отрезок векторной трубки, ограниченный двумя поперечными сечениями (σ_1) и (σ_2). Поток поля через полную поверхность этой трубки по доказанному равен нулю, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_1)\ \text{наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)\ \text{наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(\sigma_{\text{бок}})\ \text{наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0.$$

Но на боковой поверхности трубки $\boldsymbol{R} \perp \boldsymbol{n}^0$, т. е. $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 = 0$. Нормали к (σ_1) и (σ_2) условимся направлять в ту сторону, куда направлены векторы поля. Если, например, «течение поля» направлено от (σ_1) к (σ_2) (рис. 182), то на

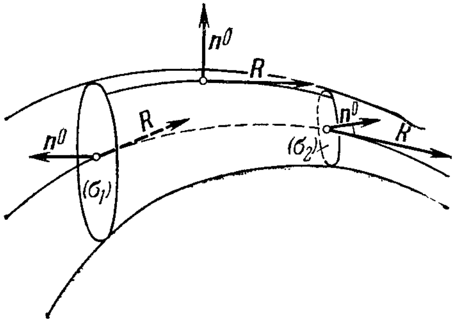

Рис. 182.

поверхности (σ_1) наружную нормаль придется заменить внутренней, и мы получим

$$-\iint\limits_{(\sigma_1)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0,$$

т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_1)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_2)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma. \qquad (17.42)$$

Итак, *поток поля через любое поперечное сечение данной векторной трубки один и тот же.* Он называется *мощностью этой трубки.*

Отсюда следует, что *векторная трубка не может окончиться внутри поля.*

Действительно, если бы векторная трубка сошлась в точку поля, то благодаря постоянству потока в этой точке вектор поля обратился бы в бесконечность, т. е. эта точка была бы особой.

Полученное свойство и называют *свойством трубчатости* или *соленоидальности поля.*

Замечание. Поле вихрей (поле ротации) всегда является полем соленоидальным. Поэтому оно всегда имеет трубчатое строение (вихревые трубки не могут оканчиваться внутри поля).

5. Векторный потенциал. Пусть имеется соленоидальное поле:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z, \tag{17.43}$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{17.44}$$

Попытаемся определить новое векторное поле

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{i}\xi + \boldsymbol{j}\eta + \boldsymbol{k}\zeta \tag{17.45}$$

так, чтобы его ротация равнялась вектору данного поля $\boldsymbol{R}$, т. е.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}, \tag{17.46}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} &= X, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= Y, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{17.47}$$

Итак, дело сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций ξ, η, ζ. Мы будем искать частное решение этой системы, налагая в процессе ее решения дополнительные ограничения на определяемые функции (для упрощения решения).

а) Прежде всего для упрощения положим $\zeta = 0$. Тогда система (17.47) примет вид

$$-\frac{\partial \eta}{\partial z} = X, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = Y, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = Z. \tag{17.48}$$

Из первого и второго уравнений мы находим

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -\int X\,dz + C_1(x, y), \\ \xi &= \int Y\,dz + C_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{17.49}$$

Эти выражения для η и ξ удовлетворяют первому и второму уравнениям при любых функциях $C_1(x, y)$, $C_2(x, y)$ от двух аргументов x и y. Теперь эти функции надлежит подобрать так, чтобы удовлетворилось и третье уравнение. С этой целью мы подставим в него найденные выражения для η и ξ. В результате будем иметь

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int X\,dz+\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\int Y\,dz-\frac{\partial C_2(x,y)}{\partial y}=Z. \tag{17.50}$$

Для дальнейшего упрощения решения положим $C_2(x, y)\equiv 0$. Тогда наше уравнение перепишется так:

$$\frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int X\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int Y\,dz+Z. \tag{17.51}$$

Мы видим, что отсюда можно определить функцию $C_1(x, y)$ от двух аргументов x, y, удовлетворяющую этому уравнению, тогда и только тогда, когда правая часть не зависит от аргумента z.

Убедимся, что этот факт в нашем случае имеет место. Для этого вычислим производную по z от правой части:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int X\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int Y\,dz+Z\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\int X\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\int Y\,dz+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=$$
$$=\operatorname{Div}\boldsymbol{R}\equiv 0.$$

Итак, правая часть не зависит от z, и мы простым интегрированием по x находим

$$C_1(x,y)=\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int X\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int Y\,dz+Z\right\}dx+C(y). \tag{17.52}$$

Положив $C(y)=0$, мы окончательно получим такое частное решение нашей системы (17.47):

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\int Y\,dz,\\ \eta&=-\int X\,dz+\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int X\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int Y\,dz+Z\right\}dx,\\ \zeta&=0.\end{aligned}\right\} \tag{17.53}$$

Получается следующая

Теорема. *Вектор соленоидального поля является ротацией некоторого вспомогательного поля*:

$$\boldsymbol{R}=\operatorname{rot}\boldsymbol{P}. \tag{17.54}$$

Определение. Вектор $\boldsymbol{P}$, ротация которого равна вектору данного соленоидального поля $\boldsymbol{R}$, называется *векторным потенциалом* этого поля.

Замечания. а) Если к векторному потенциалу $\boldsymbol{P}$ поля $\boldsymbol{R}$ прибавить градиент любой функции, то получится векторный потенциал того же поля. Действительно,

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{P} + \operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{rot}\boldsymbol{P} + \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = \operatorname{rot}\boldsymbol{P} + 0 = \operatorname{rot}\boldsymbol{P}.$$

б) Два векторных потенциала векторного поля отличаются друг от друга на градиент некоторой функции.

В самом деле, пусть $\boldsymbol{R} = \operatorname{rot}\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{R} = \operatorname{rot}\boldsymbol{P}_2$, тогда

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2) = 0.$$

Но если ротация поля равна нулю, то поле потенциально и вектор поля является градиентом потенциала, т. е.

$$\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2 = \operatorname{grad}\Phi.$$

Итак, *общий вид векторного потенциала векторного поля* $\boldsymbol{R}$ *таков*:

$$\boldsymbol{P} + \operatorname{grad}\Phi, \tag{17.55}$$

где

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}$$

и Φ — произвольная функция.

6. Характеристические признаки соленоидального поля. Итак, соленоидальное поле $\boldsymbol{R}$ характеризуется наличием следующих признаков.

а) *Дивергенция поля равна тождественно нулю*:

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{R} = 0.$$

б) *Вектор поля* $\boldsymbol{R}$ *является ротацией вспомогательного векторного поля* $\boldsymbol{P}$ (поле векторного потенциала):

$$\boldsymbol{R} = \operatorname{rot}\boldsymbol{P}.$$

в) *Поток поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, если только поверхность можно стянуть в точку поля, не пересекая границ поля*:

$$\oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0.$$

Основное утверждение, вытекающее из доказанных теорем, состоит в том, что *выполнение любого из перечисленных признаков является достаточным для того, чтобы* *поле было соленоидальным и чтобы выполнялись остальные признаки.*

7. Источники и стоки. Отдельную граничную точку Q поля, не примыкающую к другим граничным точкам, мы будем называть *точечным источником поля.*

Мы будем рассматривать источник (Q) соленоидального поля. Пусть поверхность (σ) ограничивает область (V) поля, внутри которой расположен данный источник (Q), и нет других граничных точек поля (рис. 183). Эту поверхность (σ) нельзя стянуть в точку поля, не пересекая граничной точки (Q). Поэтому поток поля через поверхность (σ) не обязательно равен нулю.

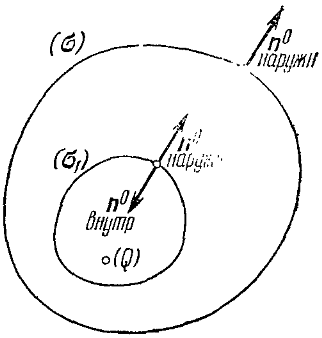

Рис. 183.

Рассмотрим внутри области (V) другую замкнутую поверхность (σ_1). В слое между поверхностями (σ) и (σ_1) содержатся только точки нашего соленоидального поля. Поэтому поток через границу этого слоя, состоящую из поверхностей (σ) и (σ_1), должен равняться нулю. Заметив, что наружная по отношению к слою нормаль поверхности (σ_1) является внутренней нормалью по отношению к области, ограниченной этой поверхностью (σ_1), мы получим

$$\iint\limits_{(\sigma)\ \text{наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_1)\ \text{внутр}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0,$$

или

$$\iint\limits_{(\sigma_1)\ \text{наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)\ \text{наружн}} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma. \qquad (17.56)$$

Итак, *поток поля через поверхность* (σ), *ограничивающую источник* (Q) *и не ограничивающую других источников, есть величина постоянная, не зависящая от формы поверхности.* Этот поток Q и называется *мощностью* или *обильностью* источника (Q):

$$Q = \underset{(\sigma)\text{ наружн}}{\oiint} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma. \tag{17.57}$$

Замечание 1. Источник соленоидального поля с отрицательной мощностью называют также *стоком* поля.

Замечание 2. Отношение потока поля через замкнутую поверхность (σ), которая ограничивает область (V) поля с источником (Q) ненулевой мощности, к объему области V, т. е.

$$\frac{\iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma}{V} = \frac{Q}{V}, \tag{17.58}$$

стремится к бесконечности, когда поверхность (σ) стягивается к данному источнику. Следовательно, можно считать, что в источнике с ненулевой мощностью дивергенция поля обращается в бесконечность.

Замечание 3. В поле скоростей потока жидкости понятия источника и стока имеют буквальный смысл. В теории электричества роль источников играют электрические заряды (см. гл. XVIII, §§ 1 и 2).

Замечание 4. Вообще говоря, источниками могут быть не только изолированные точки, но и отдельные области.

§ 3. Потенциальное несжимаемое поле

1. Уравнение Лапласа. *Потенциальным несжимаемым полем* называется такое поле, в каждой точке которого дивергенция и ротация равны нулю:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = 0, \tag{17.59}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = 0. \tag{17.60}$$

Из условия потенциальности (17.60) следует наличие скалярного потенциала U, градиентом которого является вектор поля:

$$\boldsymbol{R} = \operatorname{grad} U = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{17.61}$$

Подставив выражение вектора $\boldsymbol{R}$ через потенциал U

в уравнение несжимаемости (17.59), мы получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0. \qquad (17.62)$$

Это уравнение впервые возникло в теории тяготения у знаменитого французского механика Лапласа (1749—1827) и потому называется уравнением Лапласа. Впоследствии обнаружилось большое значение несжимаемых потенциальных векторных полей, а вместе с тем и уравнения Лапласа (17.62) в различных разделах физики. Поэтому часто такие поля также называют *полями Лапласа*.

Итак, *скалярный потенциал несжимаемого потенциального поля удовлетворяет уравнению Лапласа* (17.62).

Замечание. Всякая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа (17.62), называется гармонической функцией. Таким образом, потенциал несжимаемого потенциального поля является гармонической функцией.

2. Оператор Лапласа. Скалярный квадрат оператора Гамильтона ∇ называется *оператором Лапласа* Δ:

$$\Delta=\nabla^2. \qquad (17.63)$$

Следовательно,

$$\Delta=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2,$$

или

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (17.64)$$

Уравнение Лапласа (17.62) при помощи этого оператора можно записать так:

$$\Delta U=0. \qquad (17.65)$$

Глава XVIII

ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

§ 1. Электростатическое поле точечного заряда

1. Напряженность электростатического поля точечного заряда e. Электрический точечный заряд e создает в окружающем пространстве поле электрической напряженности $\boldsymbol{E}$. Вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ в данной точке является отнесенной к единице заряда силой, с которой поле воздействует на положительный электрический заряд, помещенный в данную точку.

По закону Кулона сила взаимодействия двух зарядов направлена по соединяющей их прямой, пропорциональна этим зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. При надлежащем выборе единиц измерения коэффициент пропорциональности можно считать равным единице.

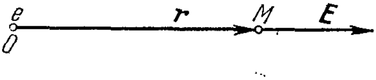

Рис. 184.

Обозначим через $\boldsymbol{r}$ вектор, соединяющий точечный заряд e с рассматриваемой точкой M поля, в которой мы поместим положительный заряд (рис. 184). Тогда вектор напряженности $\boldsymbol{E}$ определится формулой

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{r^2}\boldsymbol{r}^0, \tag{18.1}$$

или

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{18.2}$$

Единственной особой точкой рассматриваемого поля является точка, в которой сосредоточен заряд e. В этой точке вектор поля $\boldsymbol{E}$ обращается в бесконечность.

2. Дивергенция поля точечного заряда. Поместим начало координат O в точку, где расположен заряд. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z, \tag{18.3}$$

и проекции вектора поля $\boldsymbol{E}$ (18.2) на координатные оси примут вид

$$E_x = e\frac{x}{r^3}, \quad E_y = e\frac{y}{r^3}, \quad E_z = e\frac{z}{r^3}, \tag{18.4}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{18.5}$$

Вычислим дивергенцию поля $\boldsymbol{E}$ по обычной формуле:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{18.6}$$

Приняв во внимание, что из формулы (18.5) для r следует:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \tag{18.7}$$

мы получим

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = e\left\{\frac{r^3 - x\cdot 3r^2\frac{x}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - y\cdot 3r^2\frac{y}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - z\cdot 3r^2\frac{z}{r}}{r^6}\right\} =$$

$$= e\,\frac{3r^3 - 3r\,(x^2+y^2+z^2)}{r^6} = 0.$$

Итак, *дивергенция поля точечного заряда равна нулю везде, кроме точки, в которой сосредоточен заряд (в которой дивергенция теряет смысл)*:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{18.8}$$

3. Поток поля точечного заряда через замкнутую поверхность.

а) Пусть точечный заряд e расположен вне области (V), ограниченной поверхностью (σ). Тогда по теореме Остроградского

$$\underset{(\sigma)}{\oiint} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \underset{(V)}{\iiint} \operatorname{Div} \boldsymbol{E}\,dV.$$

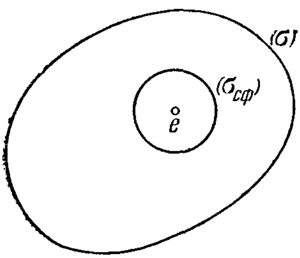

Рис. 185.

Но мы показали, что для поля

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}}{r^3},$$

порожденного точечным зарядом e, дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\underset{(\sigma)}{\oiint} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0. \tag{18.9}$$

б) Пусть теперь заряд e расположен в области (V), ограниченной замкнутой поверхностью (σ). В этом случае пользоваться формулой Остроградского уже нельзя, так как $\operatorname{Div} \boldsymbol{E}$ не всюду существует в области (V).

Окружим точку O, в которой сосредоточен заряд e, сферой $(\sigma_{сф})$, целиком лежащей в области (V) (рис. 185). Во всех точках поля, лежащих между исходной поверхностью (σ) и сферой $(\sigma_{сф})$, дивергенция поля равна нулю

Поэтому потоки поля $\boldsymbol{E}$ через эти поверхности одинаковы (гл. XVII, § 2, п. 7):

$$\iint\limits_{(\sigma)\ \text{наружн}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{\text{сф}})\ \text{наружн}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma. \qquad (18.10)$$

Для сферы орт нормали $\boldsymbol{n}^0$ совпадает с ортом радиуса-вектора точки:

$$\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{r}^0. \qquad (18.11)$$

Обозначив радиус сферы ($\sigma_{\text{сф}}$) через a, мы на сфере получим

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{r^2}\boldsymbol{r}^0 = \frac{e\boldsymbol{r}^0}{a^2}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0 = \frac{e}{a^2}.$$

Подставив это выражение в поверхностный интеграл, распространенный по сфере, мы получим

$$\iint\limits_{(\sigma)\ \text{наружн}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{\text{сф}})} \frac{e}{a^2}\,d\sigma = \frac{e}{a^2}\iint\limits_{(\sigma_{\text{сф}})} d\sigma. \qquad (18.12)$$

Но площадь поверхности сферы равна

$$\iint\limits_{(\sigma_{\text{сф}})} d\sigma = 4\pi a^2. \qquad (18.13)$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{(\sigma)\ \text{наружн}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 4\pi e. \qquad (18.14)$$

Итак, *поток электростатического поля точечного заряда через замкнутую поверхность равен нулю, если поверхность не охватывает заряд, и равен $4\pi e$, если поверхность охватывает заряд.*

Следовательно, в электростатическом поле $\boldsymbol{E}$ заряд e следует рассматривать как источник с обильностью $4\pi e$.

4. Ротация поля точечного заряда. Имея в виду формулы (18.4) для проекций поля $\boldsymbol{E}$ и формулы (18.7) производных радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, мы получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\left(\frac{-3ezy}{r^5}-\frac{-3eyz}{r^5}\right)-$$

$$-\boldsymbol{j}\left(\frac{-3ezx}{r^5}-\frac{-3exz}{r^5}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{-3eyx}{r^5}-\frac{-3exy}{r^5}\right)=0.$$

Итак, *ротация поля единичного точечного заряда равна нулю во всех точках пространства кроме, конечно, точки, в которой сосредоточен заряд и которая является особой точкой поля*:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0. \qquad (18.15)$$

5. Потенциал поля точечного заряда. Равенство нулю ротации означает потенциальность рассматриваемого поля $\boldsymbol{E}$ (18.2). Вычислим его потенциал Φ:

$$\Phi=\int\limits_{(M_0M)}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=e\int\limits_{(M_0M)}\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad (18.16)$$

Но из $\boldsymbol{r}^2=r^2$ следует $\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=r\,dr$. Поэтому

$$\Phi=e\int\limits_{M_0}^{M}\frac{dr}{r^2}=e\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{M_0}^{M}=e\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right),$$

т. е.

$$\Phi=\frac{-e}{r}+\text{const}. \qquad (18.17)$$

Итак, *поле точечного заряда* (18.2) *является полем градиента потенциала* Φ:

$$\boldsymbol{E}=\operatorname{grad}\left(-\frac{e}{r}\right). \qquad (18.18)$$

§ 2. Электростатическое поле системы точечных зарядов

1. Принцип наложения (суперпозиции). Опыт показывает, что напряженность электростатического поля $\boldsymbol{E}$ системы N точечных зарядов $e_1, e_2, \ldots, e_N$ получается сложением напряженностей $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots, \boldsymbol{E}_N$ полей отдельных зарядов:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\ldots+\boldsymbol{E}_N. \qquad (18.19)$$

Обозначим через $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ радиусы-векторы точек, в которых расположены наши заряды $e_1, e_2, \ldots, e_N$ (рис. 186). Тогда в точке поля с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ напряженности слагаемых полей определяются по закону Кулона (18.2):

$$\boldsymbol{E}_1 = e_1 \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}, \ldots, \boldsymbol{E}_N = e_N \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_N}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_N|^3}. \quad (18.20)$$

Следовательно, *напряженность* $\boldsymbol{E}$ *суммарного поля будет равна*

$$\boldsymbol{E} = \sum_{k=1}^{N} e_k \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|^3}. \quad (18.21)$$

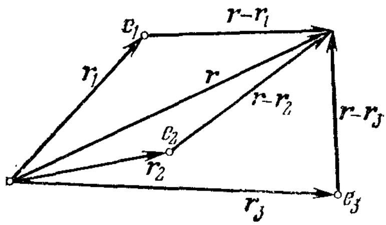

Рис. 186.

2. Дивергенция и ротация поля системы точечных зарядов. Дивергенция и ротация поля являются линейными комбинациями из частных производных от компонент поля:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (18.22)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right). \quad (18.23)$$

Отсюда непосредственно следует, что дивергенция и ротация суммы равна сумме дивергенций и соответственно ротаций слагаемых:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = \operatorname{Div} \boldsymbol{E}_1 + \operatorname{Div} \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \operatorname{Div} \boldsymbol{E}_N, \quad (18.24)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_N. \quad (18.25)$$

Как мы видели (§ 1), дивергенции и ротации слагаемых полей отдельных точечных зарядов равны нулю. Поэтому и для суммарного поля

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = 0, \quad (18.26)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \quad (18.27)$$

Итак, *дивергенция и ротация поля системы точечных зарядов равны нулю во всех точках пространства, где нет зарядов. Следовательно, это поле является полем Лапласа.*

3. Поток поля системы точечных зарядов через замкнутую поверхность. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность (σ), не проходящую ни через один из зарядов поля $\boldsymbol{E}$. Поток поля $\boldsymbol{E}$ через рассматриваемую поверхность (σ) будет равен

$$\oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = \oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma + \ldots + \oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}_N\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma. \qquad (18.28)$$

Пусть в области (V), ограниченной поверхностью (σ), находятся заряды $e_1, e_2, \ldots, e_k$, остальные же заряды $e_{k+1}, \ldots \ldots, e_N$ находятся вне этой области. Тогда по доказанному выше

$$\oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 4\pi e_1, \ldots, \oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}_k\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 4\pi e_k, \qquad (18.29)$$

$$\oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}_{k+1}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0, \ldots, \oint\!\!\!\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}_N\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 0. \qquad (18.30)$$

Следовательно, в силу (18.28) мы получим

$$\iint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 4\pi(e_1 + \ldots + e_k). \qquad (18.31)$$

Итак, *поток электростатического поля $\boldsymbol{E}$ системы точечных зарядов через замкнутую поверхность (σ) равен произведению 4π на сумму зарядов e_σ, расположенных внутри области, ограниченной данной поверхности* (σ):

$$\iint_{(\sigma)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0\,d\sigma = 4\pi e_\sigma. \qquad (18.32)$$

4. Потенциал поля системы точечных зарядов. Потенциал Φ_k одного точечного заряда e_k, как было показано (см. (18.17)), равен

$$\Phi_k = -\frac{e_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|}, \qquad (18.33)$$

где $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k$ — вектор, соединяющий точку расположения заряда e_k с рассматриваемой текущей точкой поля $\boldsymbol{r}$. Поэтому на основании (18.18)

$$\boldsymbol{E}_k = \operatorname{grad}\Phi_k = \operatorname{grad}\left(-\frac{e_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|}\right). \qquad (18.34)$$

Отсюда в силу (18.19)

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\left(-\frac{e_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-\frac{e_2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}-\ldots-\frac{e_N}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_N|}\right). \qquad (18.35)$$

Таким образом, *потенциал Φ поля $\boldsymbol{E}$ системы точечных зарядов с точностью до постоянного слагаемого определяется формулой*

$$\Phi = -\sum_{k=1}^{N}\frac{e_k}{\sqrt{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k)^2}}, \qquad (18.36)$$

где $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ — радиусы-векторы точек расположения зарядов $e_1, \ldots, e_N$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор текущей точки поля.

5. **Непрерывно распределенный заряд.** Пусть в области (V), ограниченной поверхностью (σ), распределены положительные и отрицательные точечные заряды, алгебраическая сумма которых равна e. Измельчая заряды и распределяя их между все бо́льшим и бо́льшим количеством точек области (V), мы будем приближаться к непрерывному распределению по области (V) суммарного заряда e. При непрерывном распределении электричества в пространстве заряд каждой отдельной точки будет равен нулю. Однако заряд e_1 каждой области (V_1) будет, вообще говоря, отличен от нуля.

а) В процессе измельчения зарядов формула для потока поля (18.32) будет сохраняться. Следовательно, и в предельном состоянии, когда заряды распределятся непрерывно, есть все основания полагать, что эта формула сохранится. Это подтверждается опытом. Таким образом, для каждой области (V) электростатического поля $\boldsymbol{E}$, порожденного непрерывно распределенными зарядами, сохраняется формула (18.32)

$$\oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma = 4\pi e_\sigma,$$

где e_σ — непрерывно распределенный суммарный заряд в области (V), ограниченной замкнутой поверхностью (σ).

б) На основании формулы (15.18), представляющей дивергенцию в виде предела отношения, мы получим

$$(\operatorname{Div} \boldsymbol{E})_M = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma}{V} = \lim_{(V)\to M} \frac{4\pi e_\sigma}{V} = 4\pi \lim_{(V)\to M} \frac{e_\sigma}{V}. \tag{18.37}$$

Предел отношения заряда e_σ к объему V занятой им области (V), когда последняя стягивается к точке M, называется плотностью ρ_M заряда в точке M:

$$\lim_{(V)\to M} \frac{e_\sigma}{V} = \rho_M. \tag{18.38}$$

Следовательно, полученную формулу (18.37) можно переписать так:

$$(\operatorname{Div} \boldsymbol{E})_M = 4\pi\rho_M. \tag{18.39}$$

Итак, *дивергенция электростатического поля, порожденного непрерывно распределенными зарядами, в каждой точке равна плотности заряда, умноженной на* 4π:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{18.40}$$

в) Опыт показывает, что при переходе к непрерывно распределенному заряду ротация остается равной нулю во всех точках поля как в области распределения заряда, так и вне ее:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{18.41}$$

г) Формула (18.36) для вычисления потенциала Φ при непрерывном распределении заряда переходит в интегральную формулу

$$\Phi = -\iiint\limits_{(V)} \frac{\rho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}, \tag{18.42}$$

причем интеграл распространен по всей области (V), в которой распределены имеющиеся в поле заряды.

§ 3. Магнитное поле тока

1. Напряженность магнитного поля тока. Пусть линия (L) является проводом, по которому течет постоянный ток силы I. Эта линия не может оканчиваться. Она либо замкнутая, либо уходит концами в бесконечность (рис. 187).

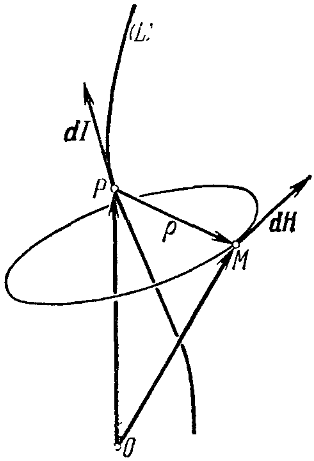

Рис. 187.

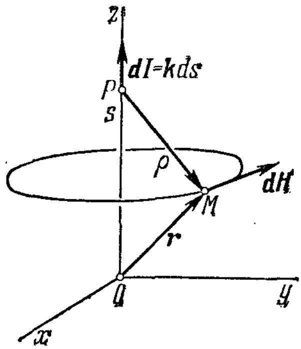

Рис. 188.

Элементом тока в данной точке P провода (L) называется вектор $\boldsymbol{dI}$, который является произведением силы тока I на орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ к проводу в данной точке P и на дифференциал ds дуги провода:

$$\boldsymbol{dI} = I\boldsymbol{\tau}\,ds.$$

Вокруг провода (L) образуется магнитное поле с определенной напряженностью $\boldsymbol{H}$ в каждой точке M. По закону Био — Савара элемент тока $\boldsymbol{dI}$, соответствующий точке P провода (L), создает в произвольно взятой точке M пространства элемент магнитной напряженности $\boldsymbol{dH}$, который определяется формулой

$$\boldsymbol{dH} = \frac{\boldsymbol{dI} \times \boldsymbol{\rho}^0}{\rho^2},$$

где

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{PM}.$$

Итоговая напряженность $\boldsymbol{H}$ *магнитного поля, создаваемого в точке* M *током, текущим по проводу* (L), *определяется криволинейным интегралом*

$$\boldsymbol{H} = \int\limits_{(L)} \frac{d\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\rho}^0}{\rho^2}.$$

По существу лишь в последней интегральной форме закон Био — Савара имеет физический смысл и может быть экспериментально проверен. Проверка же дифференциальной формы закона неосуществима, так как практически неосуществим отдельный элемент тока $d\boldsymbol{I}$.

2. Напряженность магнитного поля тока, текущего по бесконечному прямолинейному проводу. Примем этот провод (L) за ось Oz (рис. 188). Тогда координаты текущей точки P этого провода будут $(0, 0, s)$, в силу чего

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{PM} = \boldsymbol{r} - s\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}(z - s),$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - s)^2}, \quad d\boldsymbol{I} = I\boldsymbol{k}\,ds.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{H} = \int\limits_{(L)} \frac{d\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\rho}}{\rho^3} = I \int\limits_{(L)} \frac{\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}s)\, ds}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z - s)^2]^3}},$$

т. е.

$$\boldsymbol{H} = I\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{[x^2 + y^2 + (z - s)^2]^3}}.$$

Положив $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z - s = \delta \operatorname{tg} \varphi$, мы получим

$$\boldsymbol{H} = I\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\delta\, d\varphi}{\cos^2 \varphi \delta^3 \sec^3 \varphi} = \frac{I\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}}{\delta^2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi\, d\varphi,$$

т. е.

$$\boldsymbol{H} = 2I \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}}{\delta^2}.$$

Подставив $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$, мы найдем

$$\boldsymbol{H} = 2I \frac{-\boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$H_x = 2I\frac{-y}{x^2+y^2}, \quad H_y = 2I\frac{x}{x^2+y^2}, \quad H_z = 0.$$

Изучим подробно полученное векторное поле $\boldsymbol{H}$.

3. Векторные линии поля $\boldsymbol{H}$. Составим систему дифференциальных уравнений векторных линий поля:

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z},$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

или

$$x\,dx + y\,dy = 0, \qquad dz = 0.$$

Проинтегрировав эту систему, получим

$$x^2 + y^2 = C_1, \quad z = C_2,$$

т. е. *векторными линиями являются окружности с центрами на оси Oz, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости Oxy.*

4. Потенциал поля $\boldsymbol{H}$. Имеем

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 2I\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} + 2I\frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2I\dfrac{-y}{x^2+y^2} & 2I\dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, *поле $\boldsymbol{H}$ является и потенциальным и соленоидальным*, т. е. является *полем Лапласа*. Найдем потенциал этого поля:

$$\Phi = \int\limits_{(M_0M)} 2I\frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + 2I\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 2I\int\limits_{(M_0M)}\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} =$$

$$= 2I\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}\right) = 2I\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

Мы видим, что при переходе через плоскость $x = 0$ полученный потенциал претерпевает скачок от $-I\pi$ до

$+ I\pi$. Этого скачка можно избежать на полуплоскости $x = 0$, $y < 0$, положив

$$\Phi = 2I\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } x > 0,$$

$$\Phi = 2I\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } x < 0.$$

Полуплоскость $x = 0$, $y > 0$, на которой остается скачок (теперь уже от $-2I\pi$ до $+2I\pi$), можно считать той дополнительной границей поля, которая превращает его в односвязное. Без этой границы поле не является односвязным, так как нельзя стянуть в точку поля контур, охватывающий ось Oz, которая является особой линией поля.

5. **Провод как вихревой шнур.** Ось Oz, на которой расположен провод (L), является особой линией (вихревым шнуром) магнитного поля

$$\boldsymbol{H} = 2I\frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2},$$

так как при $x = y = 0$ вектор поля $\boldsymbol{H}$ теряет смысл.

Вычислим интенсивность J этого вихревого шнура, т. е. циркуляцию поля $\boldsymbol{H}$ по контуру, охватывающему ось Oz. Эта циркуляция не зависит от выбора контура. Мы выберем его в виде окружности (C), расположенной в плоскости Oxy, с центром в начале и радиусом a:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi, \\ y &= a\sin\varphi, \\ z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$J = \oint\limits_{(C)} 2I\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2I\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}{a^2}d\varphi = 2I\int\limits_0^{2\pi}d\varphi,$$

т. е.

$$J = 4\pi I.$$

Итак, *провод (L) является вихревым шнуром созданного им магнитного поля*, причем интенсивность этого шнура пропорциональна силе тока.

Глава XIX

ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. Криволинейные координаты

1. Система криволинейных координат. При помощи декартовой системы координатных осей $Oxyz$ каждой точке пространства сопоставляется тройка чисел — тройка ее декартовых координат. Обратно, каждой тройке координат соответствует определенная точка пространства. Такое соответствие между точками и тройками чисел может осуществляться не только при помощи декартовой системы координатных осей. Например, положение точки над поверхностью Земли очень удобно определять ее расстоянием от центра Земли и двумя географическими координатами — широтой и долготой. Общую идею введения координатной системы в пространстве или в некоторой его области (V) можно сформулировать следующим образом. Ввести систему координат в некоторой области (V) пространства — это значит каким-либо способом установить взаимно однозначное соответствие между точками этой области (V) и системами значений трех переменных величин u^1, u^2, u^3 из некоторой области (V^*) их изменения. Значения этих трех переменных величин u^1, u^2, u^3, соответствующие данной точке M пространства, называются криволинейными координатами этой точки M. Причина такого названия выяснится ниже.

Декартова система координат, которой мы до сих пор пользовались, может рассматриваться как простейшая и с многих точек зрения наиболее естественная система криволинейных координат. Однако для решения ряда специальных вопросов теории электромагнитного поля, гидромеханики и т. д. приходится пользоваться и другими координатными системами.

2. Отображение, устанавливаемое системой криволинейных координат. Предположим, что в рассматриваемой области (V) пространства каким-либо способом введена система криволинейных координат u^1, u^2, u^3 (рис. 189).

Вне связи с исходной областью (V) построим вспомогательную декартову систему координатных осей $O^*u^1u^2u^3$ и будем рассматривать криволинейные координаты u^1,

u^2, u^3 как декартовы координаты в этой вспомогательной системе (рис. 190).

Задав точку M в исходной области (V), мы определим ее криволинейные координаты u^1, u^2, u^3. По ним, как по декартовым координатам, построим точку M^* в системе $O^*u^1u^2u^3$. Эту точку M^* будем называть *изображением исходной точки* M. Если исходная точка M будет пробегать

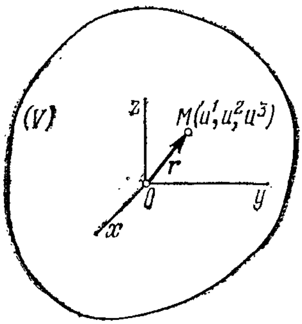

Рис. 189.

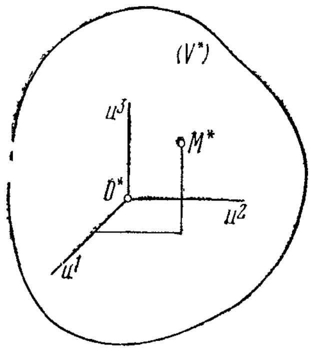

Рис. 190.

всю область (V), то ее изображение M^* будет пробегать некоторую область, которая и является наглядным изображением области (V^*) изменения криволинейных координат u^1, u^2, u^3. Обратно, задав точку в области (V^*), мы определим ее декартовы координаты во вспомогательной системе $O^*u^1u^2u^3$, т. е. определим криволинейные координаты точки, а значит, и саму точку в исходной области (V).

Таким образом, *задание системы криволинейных координат u^1, u^2, u^3 в области (V) пространства всегда можно истолковывать как задание взаимно однозначного отображения этой области (V) в некоторую область (V^*), отнесенную к декартовой системе координат $O^*u^1u^2u^3$.*

Чтобы оформить это отображение аналитически, мы исходную область (V) также отнесем к какой-либо декартовой системе координатных осей $Oxyz$ (рис. 189). Тогда тройке значений криволинейных координат u^1, u^2, u^3 будет соответствовать тройка значений x, y, z декартовых координат и обратно. Это значит, что в рассматриваемых областях (V) и (V^*) переменные x, y, z являются функциями от переменных u^1, u^2, u^3:

$$x = x(u^1, u^2, u^3), \quad y = y(u^1, u^2, u^3), \quad z = z(u^1, u^2, u^3). \tag{19.1}$$

Обратно, переменные u^1, u^2, u^3 являются функциями от переменных x, y, z:

$$u^1 = u^1(x, y, z), \quad u^2 = u^2(x, y, z), \quad u^3 = u^3(x, y, z). \tag{19.2}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что если в некоторой области (V) пространства введена декартова система координат $Oxyz$ и формально определено взаимно однозначное преобразование (19.1) декартовых координат x, y, z в новые переменные u^1, u^2, u^3 из некоторой области изменения, то эти новые переменные могут рассматриваться как криволинейные координаты в рассматриваемой области (V).

3. Координатные поверхности и линии. Если в некоторой области (V) пространства введена система криволинейных координат u^1, u^2, u^3, то каждой системе значений переменных u^1, u^2, u^3 из области (V^*) их изменения соответствует точка M области (V), а следовательно, и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ этой точки. Это значит, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки области (V) является функцией от криволинейных координат u^1, u^2, u^3 этой точки:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2, u^3).$$

Если зафиксировать одну криволинейную координату

$$u^3 = u_0^3,$$

то радиус-вектор текущей точки будет зависеть лишь от двух остальных координат u^1, u^2:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2, u_0^3).$$

Текущая точка будет описывать в этом случае поверхность (см. гл. XI, § 2, п. 1), которая называется координатной поверхностью (u^1, u^2). Аналогично определяются координатные поверхности (u^2, u^3) и (u^3, u^1).

Если зафиксировать две криволинейные координаты

$$u^2 = u_0^2, \quad u^3 = u_0^3,$$

то радиус-вектор текущей точки будет функцией лишь от одной оставшейся координаты u^1, т. е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u^1,\ u_0^2,\ u_0^3),$$

и текущая точка будет описывать линию, которая называется *координатной линией* u^1. Аналогично определяются *координатные линии* u^2 и u^3.

Таким образом, *через произвольно взятую точку* $M(u_0^1, u_0^2, u_0^3)$ ***проходят три координатные поверхности и три координатные линии, по которым попарно пересекаются***

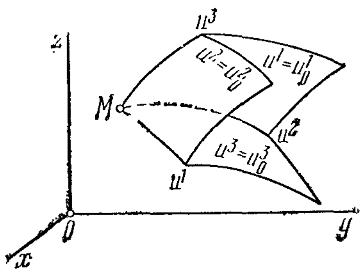

Рис. 191.

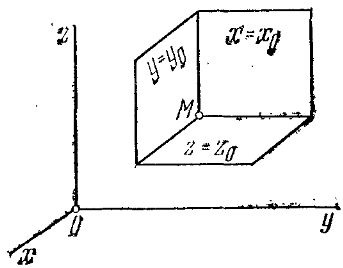

Рис. 192.

координатные поверхности (рис. 191). В общем случае координатные поверхности и линии будут кривыми. Этим и объясняется название «криволинейные координаты».

В декартовой системе координат $Oxyz$ координатными поверхностями, проходящими через данную точку M, являются плоскости, параллельные координатным плоскостям, а координатными линиями — прямые, параллельные координатным осям (рис. 192).

4. Линейный элемент. Квадратом линейного элемента ds^2 или фундаментальной квадратичной формой пространства называется скалярный квадрат $d\boldsymbol{r}^2$ полного дифференциала $d\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки:

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2. \tag{19.3}$$

Если пространство отнесено к декартовой системе координат $Oxyz$, то

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z,$$
$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx + \boldsymbol{j}\,dy + \boldsymbol{k}\,dz.$$

Следовательно, *квадрат линейного элемента в декартовых координатах выражается так*:

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Линейный элемент в криволинейных координатах. Пусть в рассматриваемой области (V) пространства введена система криволинейных координат u^1, u^2, u^3. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки $M(u^1, u^2, u^3)$ будет функцией от ее криволинейных координат

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2, u^3) \tag{19.4}$$

и его полный дифференциал будет иметь вид

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 du^1 + \boldsymbol{r}_2 du^2 + \boldsymbol{r}_3 du^3, \tag{19.5}$$

где $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ обозначают частные производные радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ по криволинейным координатам u^1, u^2, u^3. В силу этого мы получим

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 du^1 du^1 + \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 du^2 du^2 + \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3 du^3 du^3 + \\ + 2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2\, du^1 du^2 + 2\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 du^2 du^3 + 2\boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 du^3 du^1,$$

или в сокращенной записи

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \sum_{i,\, j=1,\, 2,\, 3} \boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j du^i du^j. \tag{19.6}$$

Таким образом, *квадрат линейного элемента пространства всегда является однородным квадратным многочленом относительно дифференциалов координат*. Поэтому его и называют *фундаментальной квадратичной формой пространства*. Эта форма имеет шесть коэффициентов g_{ij}, являющихся скалярными произведениями частных производных $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$:

$$g_{ij} = \boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j. \tag{19.7}$$

Геометрический смысл линейного элемента пространства состоит в том, что для произвольно взятой линии

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

линейный элемент

$$ds = \sqrt{d\boldsymbol{r}^2}$$

даст дифференциал дуги этой линии.

Важное значение линейного элемента определяется тем, что через его коэффициенты $g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j$ могут быть выражены все другие геометрические величины пространства (углы между линиями, площади поверхностей, объемы и т. д.).

5. Элемент объема. Элементом объема в криволинейных координатах u^1, u^2, u^3 называется объем $dV(u^1, u^2, u^3)$ параллелепипеда, построенного на частных дифференциалах $\partial_{u^1}\boldsymbol{r}$, $\partial_{u^2}\boldsymbol{r}$, $\partial_{u^3}\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки $M(u^1, u^2, u^3)$ по ее криволинейным координатам (рис. 193).

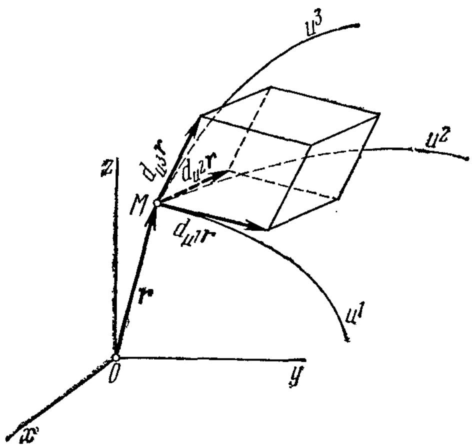

Рис. 193.

Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения. Поэтому для элемента объема $dV(u^1, u^2, u^3)$ получается формула

$$dV(u^1, u^2, u^3) = |(\partial_{u^1}\boldsymbol{r}, \partial_{u^2}\boldsymbol{r}, \partial_{u^3}\boldsymbol{r})| \tag{19.8}$$

или

$$dV(u^1, u^2, u^3) = |(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)|\, du^1 du^2 du^3. \tag{19.9}$$

З а м е ч а н и е 1. Введем в пространстве декартову систему координат $Oxyz$ и разложим радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки по ортам осей:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z.$$

Вычислим частные производные

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u^1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u^1} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial u^1},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u^2} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u^2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial u^2},$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^3} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial u^3} + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial u^3} + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial u^3}.$$

Пользуясь координатной формулой для смешанного произведения, представим элемент объема в криволинейных координатах в следующей форме:

$$dV(u^1, u^2, u^3) = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} du^1\, du^2\, du^3 \qquad (19.10)$$

или, в краткой записи (ср. (11.32)),

$$dV(u^1, u^2, u^3) = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}\right| du^1\, du^2\, du^3. \qquad (19.11)$$

Таким образом, *элемент объема в криволинейных координатах равен абсолютной величине определителя преобразования* (якобиана) *декартовых координат в криволинейные, умноженной на произведение дифференциалов криволинейных координат.*

Замечание 2. Из формулы (19.11) следует, что элемент объема в декартовых координатах записывается так:

$$dV(x, y, z) = dx\, dy\, dz. \qquad (19.12)$$

Замечание 3. Выразив смешанное произведение в (19.9) через скалярные произведения ((4.37)), мы получим выражение элемента объема через коэффициенты $\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j$ фундаментальной формы $d\boldsymbol{r}^2$ пространства:

$$dV(u^1, u^2, u^3) = \sqrt{\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3 \end{vmatrix}}\, du^1\, du^2\, du^3. \qquad (19.13)$$

З а м е ч а н и е 4. Формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V^*)} f[\varphi(u^1, u^2, u^3), \psi(u^1, u^2, u^3), \chi(u^1, u^2, u^3)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} \right| du^1\,du^2\,du^3$$

преобразования тройного интеграла к новым переменным может быть переписана так:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV(x, y, z) =$$
$$= \iiint\limits_{(V)} f[\varphi(u^1, u^2, u^3), \psi(u^1, u^2, u^3), \chi(u^1, u^2, u^3)]\,dV(u^1, u^2, u^3). \tag{19.14}$$

Как мы видим, *при преобразовании тройного интеграла к новым переменным декартов элемент объема заменяется элементом объема в криволинейных координатах.*

Т е о р е м а. *Если дифференциалы du^1, du^2, du^3 криволинейных координат u^1, u^2, u^3 бесконечно малы, то элемент объема $dV(u^1, u^2, u^3)$ отличается на величину высшего порядка по отношению к произведению дифференциалов $du^1du^2du^3$ от элементарного объема $\Delta V(u^1, u^2, u^3)$, т. е. объема шестигранника, ограниченного двумя тройками координатных поверхностей, проходящих через исходную точку (u^1, u^2, u^3) и бесконечно близкую точку $(u^1 + du^1, u^2 + du^2, u^3 + du^3)$* (рис. 194).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объем элементарного шестигранника $\Delta V(u^1, u^2, u^3)$ определяется в декартовых координатах тройным интегралом

$$\Delta V(u^1, u^2, u^3) = \iiint\limits_{(\Delta V(u^1, u^2, u^3))} dx\,dy\,dz.$$

Преобразовав этот интеграл к новым переменным u^1, u^2, u^3, получим

$$\Delta V(u^1, u^2, u^3) = \iiint\limits_{(\Delta V^*(u^1, u^2, u^3))} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} \right| du^1\,du^2\,du^3,$$

причем новая область интеграции $\Delta V^*(u^1, u^2, u^3)$ будет прямоугольным параллелепипедом с ребрами du^1, du^2, du^3

(рис. 195). Применив теорему о среднем значении, найдем

$$\Delta V(u^1, u^2, u^3) = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}\right|_{\text{ср}} du^1\, du^2\, du^3.$$

Но абсолютная величина определителя преобразования $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}$ является непрерывной функцией, поэтому ее среднее значение внутри элементарного параллелепипеда

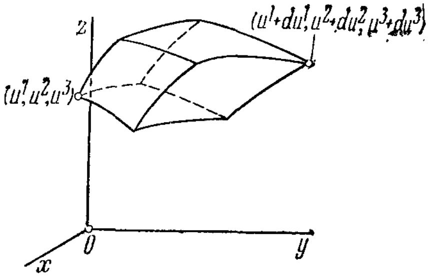

Рис. 194.

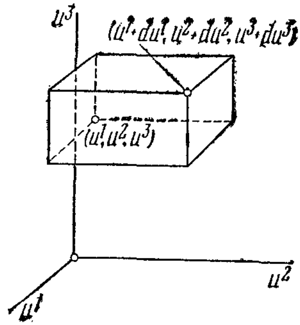

Рис. 195.

отличается от ее значения $\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}\right|$ в исходной точке u^1, u^2, u^3 на бесконечно малую величину ξ. Поэтому мы получим

$$\Delta V(u^1, u^2, u^3) = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}\right| du^1\, du^2\, du^3 + \xi\, du^1\, du^2\, du^3,$$

т. е.

$$\Delta V(u^1, u^2, u^3) = dV(u^1, u^2, u^3) + \xi\, du^1\, du^2\, du^3,$$
$$\lim_{du^1\to 0,\ du^2\to 0,\ du^3\to 0} \xi = 0. \tag{19.15}$$

Теорема доказана.

6. Подвижной репер. *Репером* называется фиксированная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, исходящих из фиксированной точки M пространства. В силу некомпланарности векторов репера их смешанное произведение отлично от нуля:

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) \neq 0. \tag{19.16}$$

Из некомпланарности векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ вытекает некомпланарность и их векторных произведений $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$. Действительно, рассмотрим линейную зависимость

$$\lambda \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 + \mu \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1 + \nu \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = 0.$$

Умножив это соотношение скалярно на $\boldsymbol{r}_1$, получим

$$\lambda (\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{r}_3) = 0,$$

откуда следует $\lambda = 0$. Аналогично получаем, что $\mu = 0$ и $\nu = 0$. Следовательно, между векторными произведениями не может быть линейной зависимости, в которой не все коэффициенты отличны от нуля. А это значит, что *векторы $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ некомпланарны.*

Заметим, что частным случаем репера является декартов прямоугольный репер, составленный из координатных ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

А. Разложение вектора по векторам репера и по их векторным произведениям.

1) Разложим произвольно взятый вектор $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ репера:

$$\boldsymbol{a} = a^1 \boldsymbol{r}_1 + a^2 \boldsymbol{r}_2 + a^3 \boldsymbol{r}_3. \tag{19.17}$$

Для определения коэффициентов a^1, a^2, a^3 этого разложения скалярно умножим обе части (19.17) поочередно на векторные произведения $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) = a^1 (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1) = a^2 (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3),$$
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = a^3 (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3).$$

Отсюда найдем

$$a^1 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}, \quad a^2 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1)}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}, \quad a^3 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}.$$

Следовательно, формула разложения (19.17) может быть переписана так:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \{\boldsymbol{r}_1 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) + \boldsymbol{r}_2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1) + \boldsymbol{r}_3 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\}. \tag{19.18}$$

2) Аналогично можно разложить вектор $\boldsymbol{a}$ по векторным произведениям $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ векторов репера.

Однако для большей симметричности формул мы будем разлагать вектор не по самим векторным произведениям, а по их отношениям к смешанному произведению $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$:

$$\boldsymbol{a} = a_1 \frac{\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} + a_2 \frac{\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} + a_3 \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}. \tag{19.19}$$

Умножая последовательно это равенство скалярно на $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, мы определим коэффициенты a_1, a_2, a_3 разложения (19.19):

$$a_1 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_1, \quad a_2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_2, \quad a_3 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_3,$$

Разложение (19.19) примет вид

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1) + \\ + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)\}. \tag{19.20}$$

Б. Подвижной репер, порожденный системой криволинейных координат.

Частные производные радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки M (u^1, u^2, u^3) пространства по ее криволинейным координатам u^1, u^2, u^3 мы будем обозначать так:

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^3}. \tag{19.21}$$

Каждая из этих частных производных $\boldsymbol{r}_i$ является производной, вычисленной в предположении, что только одна координата u^i меняется, а две другие координаты сохраняют неизменные значения. Вследствие этого частная производная $\boldsymbol{r}_i$ является вектором, касательным к координатной линии u^i, вдоль которой меняется лишь та координата u^i, по которой производится дифференцирование.

Таким образом, в текущей точке M пространства возникают три вектора $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ касательных к координатным линиям u^1, u^2, u^3. Мы будем рассматривать лишь такие криволинейные координаты, для которых эти частные производные $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ некомпланарны ни в одной точке рассматриваемой области V, т. е.

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) \neq 0.$$

Определение. Тройку некомпланарных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$. $\boldsymbol{r}_3$, исходящих из текущей точки M (u^1, u^2, u^3) и являющихся частными производными радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки по ее криволинейным координатам, мы будем называть *подвижным репером, связанным с этой текущей точкой M и порожденным рассматриваемой системой криволинейных координат.*

Таким образом, *с каждой точкой пространства, отнесенного к системе криволинейных координат, оказывается связанным свой репер.*

7. Векторное поле в криволинейных координатах. Пусть в области (V), отнесенной к криволинейным координатам u^1, u^2, u^3, определено векторное поле. Его вектор $\boldsymbol{R}$, соответствующий текущей точке M (u^1, u^2, u^3), будет функцией от ее криволинейных координат:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\,(u^1,\ u^2,\ u^3).$$

Положение вектора поля $\boldsymbol{R}$ в текущей точке M (u^1, u^2, u^3) по отношению к подвижному реперу, связанному с этой точкой, определяется разложением вектора $\boldsymbol{R}$ по векторам $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ (см. (19.18)):

$$\boldsymbol{R} = R^1\boldsymbol{r}_1 + R^2\boldsymbol{r}_2 + R^3\boldsymbol{r}_3, \tag{19.22}$$

где

$$R^1 = \frac{(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)},\quad R^2 = \frac{(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r}_1)}{(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)},\quad R^3 = \frac{(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)}{(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)}. \tag{19.23}$$

Иногда бывает удобно разложить вектор поля $\boldsymbol{R}$ не по векторам подвижного репера, а по их векторным произведениям (см. (19.20)):

$$\boldsymbol{R} = R_1\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3 + R_2\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1 + R_3\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2, \tag{19.24}$$

где

$$R_1 = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1}{(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)},\quad R_2 = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2}{(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)},\quad R_3 = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3}{(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)}. \tag{19.25}$$

§ 2. Дифференциальные операции в криволинейных координатах

1. Градиент в криволинейных координатах. Пусть в некоторой области (V) пространства, отнесенного к системе криволинейных координат u^1, u^2, u^3, определено поле скаляра Φ, причем этот скаляр Φ задан как функция криволинейных координат u^1, u^2, u^3:

$$\Phi = \Phi\,(u^1,\ u^2,\ u^3).$$

Его полный дифференциал

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u^3} du^3$$

можно представить как скалярное произведение двух векторов следующим образом:

$$d\Phi = \left[\frac{\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} + \frac{\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} + \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \frac{\partial \Phi}{\partial u^3}\right] \cdot$$
$$\cdot (\boldsymbol{r}_1 du^1 + \boldsymbol{r}_2 du^2 + \boldsymbol{r}_3 du^3).$$

Так как второй множитель в этом произведении есть дифференциал $d\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки, то, согласно формуле (12.8), первый множитель есть градиент поля:

$$d\Phi = \operatorname{grad} \Phi \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Итак, *градиент поля в криволинейных координатах определяется формулой*

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u^3} \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2\right]. \tag{19.26}$$

Эта формула представляет градиент поля в виде его разложения по векторным произведениям $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ векторов подвижного репера.

Замечание. Чтобы получить формулу, дающую разложение градиента поля по самим векторам $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ подвижного репера, мы воспользуемся формулой разложения (5.24) векторного произведения по трем некомпланарным векторам. Тогда получим

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} \left\{ \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_3 \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} + \right.$$
$$\left. + \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_1 \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_2 \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u^3} \right\} \tag{19.27}$$

или

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 & 0 \\ \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_3 & \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^1} \\ \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 & \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^2} \\ \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_3 & \dfrac{\partial\Phi}{\partial u^3} \end{vmatrix}. \tag{19.28}$$

2. Дивергенция в криволинейных координатах. Будем исходить из формулы Остроградского

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{Div}\boldsymbol{R}\,dV = \oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}^0 d\sigma.$$

Предположим, что область (V) пространства и векторное поле $\boldsymbol{R}$ отнесены к системе криволинейных координат u^1, u^2, u^3, а замкнутая поверхность (σ), ограничивающая область (V), состоит из кусков, на каждом из которых введена (см. гл. XI, § 2) система параметров u, v, причем вектор $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ направлен по наружной нормали. Тогда (см. (13.47))

$$dV = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)\,du^1du^2du^3,\ \ \boldsymbol{n}^0 = \frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|},$$

$$d\sigma \overset{*}{=} |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|\,du\,dv,$$

и формула Остроградского может быть переписана так:

$$\iiint\limits_{(V^*)} \operatorname{Div}\boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)\,du^1du^2du^3 = \oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv, \tag{19.29}$$

где область интеграции (V^*) является изображением области V (рис. 196) при переходе к вспомогательной декартовой системе $O^*u^1u^2u^3$ (рис. 197).

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_1\frac{\partial u^1}{\partial u} + \boldsymbol{r}_2\frac{\partial u^2}{\partial u} + \boldsymbol{r}_3\frac{\partial u^3}{\partial u},$$

$$\boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}_1\frac{\partial u^1}{\partial v} + \boldsymbol{r}_2\frac{\partial u^2}{\partial v} + \boldsymbol{r}_3\frac{\partial u^3}{\partial v}.$$

Перемножим векторно эти два вектора:

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \\ = (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)\frac{\partial (u^2, u^3)}{\partial (u, v)} + (\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1)\frac{\partial (u^3, u^1)}{\partial (u, v)} + (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)\frac{\partial (u^1, u^2)}{\partial (u, v)}.$$

Подставив это выражение в правую часть формулы Остроградского (19.29) и воспользовавшись правилом (13.39)

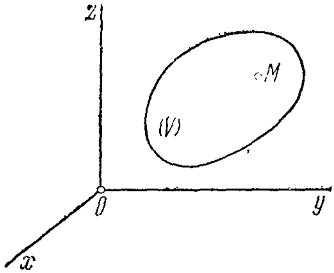

Рис. 196.

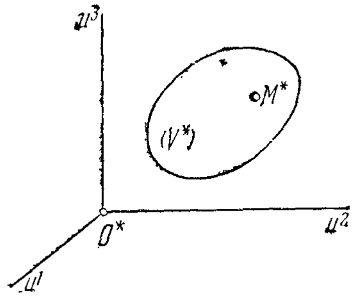

Рис. 197.

преобразования поверхностного интеграла к новым переменным, мы получим

$$\iiint\limits_{(V^*)} \operatorname{Div} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)\, du^1 du^2 du^3 = \\ = \oiint\limits_{(\sigma)} (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)\, du^2 du^3 + (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1)\, du^3 du^1 + \\ + (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\, du^1 du^2. \qquad (19.30)$$

Поверхностный интеграл в правой части этого тождества мы можем рассматривать во вспомогательной декартовой системе координатных осей $O^*u^1u^2u^3$, считая его распространенным по замкнутой поверхности (σ^*), ограничивающей образ (V^*) области (V). Применив к нему координатную формулу Остроградского (15.11), мы приведем наше тождество к виду

$$\iiint\limits_{(V^*)} \operatorname{Div} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)\, du^1 du^2 du^3 = \\ = \iiint\limits_{(V^*)} \left[\frac{\partial (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}{\partial u^1} + \frac{\partial (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{\partial u^3}\right] du^1 du^2 du^3.$$

Это тождество справедливо при любой области интеграции (V^*), что возможно лишь при совпадении подынтегральных функций правой и левой частей. Сравнив их и разделив на $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$, мы получим *выражение дивергенции в криволинейных координатах*:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{R} = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}\left[\frac{\partial(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}{\partial u^1} + \frac{\partial(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)}{\partial u^3}\right]. \tag{19.31}$$

3. Ротация в криволинейных координатах. Будем исходить из формулы Стокса

$$\iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}^0 d\sigma = \int\limits_{(L)} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Предположим, что пространство отнесено к криволинейным координатам u^1, u^2, u^3. В качестве поверхностной

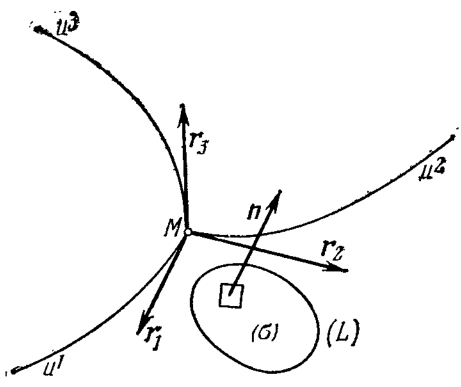

Рис. 198.

области (σ) возьмем произвольную область на координатной поверхности $u^3 = \text{const}$, причем нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ направим одинаково с вектором $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ (рис. 198). Тогда

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}, \quad d\sigma \overset{*}{=} |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|\, du^1 du^2, \; d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 du^1 + \boldsymbol{r}_2 du^2,$$

и формула Стокса примет вид

$$\iint\limits_{(\sigma^*)} \operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)\, du^1 du^2 = \int\limits_{(L^*)} (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1)\, du^1 + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2)\, du^2, \tag{19.32}$$

где (σ^*) — образ поверхностной области (σ) на вспомогательной декартовой плоскости $O^*u^1u^2$, а (L^*) — ограничивающий его контур (рис. 199). Так как область (σ^*) и контур (L^*) являются плоскими, к криволинейному интегралу в правой части (19.32) можно применить формулу Грина (16.1), после чего мы получим

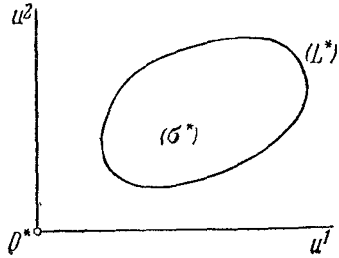

Рис. 199.

$$\iint\limits_{(\sigma^*)} \operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)\, du^1 du^2 = \iint\limits_{(\sigma^*)} \left[\frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2)}{\partial u^1} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2}\right] du^1 du^2. \tag{19.33}$$

Тождество (19.33) справедливо при любой области интеграции (σ^*), а это может быть лишь в случае совпадения подынтегральных функций. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2)}{\partial u^1} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2}.$$

Аналогично найдем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3) = \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3)}{\partial u^2} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2)}{\partial u^3},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1) = \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^3} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3)}{\partial u^1}.$$

Разложение вектора ротации по векторам $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ подвижного репера имеет вид (см. (19.22)):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} + \boldsymbol{r}_2 \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1)}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)} + \boldsymbol{r}_3 \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}. \tag{19.34}$$

Подставив сюда найденные выражения для скалярных произведений ротации на векторные произведения, получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \left\{\boldsymbol{r}_1\left[\frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3)}{\partial u^2} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2)}{\partial u^3}\right] + \boldsymbol{r}_2\left[\frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^3} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3)}{\partial u^1}\right] + \right.$$
$$\left. + \boldsymbol{r}_3\left[\frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2)}{\partial u^1} - \frac{\partial(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\partial u^2}\right]\right\}\frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}.$$

Непосредственно видно, что полученное выражение для ротации можно записать в виде следующего символического определителя:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3 \end{vmatrix}. \qquad (19.35)$$

Это и есть формула, выражающая ротацию в криволинейной системе координат. Она дает разложение ротации по векторам подвижного репера $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$.

§ 3. Ортогональные координаты

1. Ортонормированный подвижной репер. Мы будем теперь рассматривать такие системы криволинейных координат u^1, u^2, u^3, которые характеризуются взаимной ортогональностью векторов порожденных ими подвижных реперов:

$$\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 = 0, \quad \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3 = 0, \quad \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1 = 0. \qquad (19.36)$$

В каждой точке пространства координатные линии такой системы пересекаются взаимно перпендикулярно. Поэтому такие координатные системы называются ортогональными. К ним относятся, в частности, декартова система и рассматриваемые ниже цилиндрическая и сферическая системы.

Вместо подвижного репера M, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, который рассматривался в общем случае, мы теперь будем рассматривать подвижной репер M, $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_1$, $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_2$, $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_3$, векторами которого служат исходящие из текущей точки M взаимно ортогональные единичные векторы $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_1$, $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_2$, $\overset{0}{\boldsymbol{r}}_3$, являющиеся ортами частных производных $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки M по ее криволинейным координатам u^1, u^2, u^3. Такой репер называется *ортонормированным*. Для него выполняются следующие соотношения:

$$\boldsymbol{r}_1^0\cdot\boldsymbol{r}_1^0=1,\quad \boldsymbol{r}_2^0\cdot\boldsymbol{r}_2^0=1,\quad \boldsymbol{r}_3^0\cdot\boldsymbol{r}_3^0=1,\quad \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2=0,\quad \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_3=0,\quad \boldsymbol{r}_3\cdot\boldsymbol{r}_1=0. \tag{19.37}$$

Мы будем предполагать, что векторы $\boldsymbol{r}_1^0$, $\boldsymbol{r}_2^0$, $\boldsymbol{r}_3^0$ образуют правую систему. Тогда будут иметь место следующие соотношения:

$$\boldsymbol{r}_2^0\times\boldsymbol{r}_3^0=\boldsymbol{r}_1^0,\quad \boldsymbol{r}_3^0\times\boldsymbol{r}_1^0=\boldsymbol{r}_2^0,\quad \boldsymbol{r}_1^0\times\boldsymbol{r}_2^0=\boldsymbol{r}_3^0, \tag{19.38}$$

$$(\boldsymbol{r}_1^0,\boldsymbol{r}_2^0,\boldsymbol{r}_3^0)=1. \tag{19.39}$$

Рассматривая векторное поле в ортогональной системе координат, мы будем вектор поля $\boldsymbol{R}$ в текущей точке M разлагать по векторам ортонормированного репера, связанного с этой точкой:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1^0R_1+\boldsymbol{r}_2^0R_2+\boldsymbol{r}_3^0R_3. \tag{19.40}$$

Коэффициенты R_1, R_2, R_3 в этом разложении являются проекциями вектора $\boldsymbol{R}$ на орты $\boldsymbol{r}_1^0$, $\boldsymbol{r}_2^0$, $\boldsymbol{r}_3^0$ и определяются формулами

$$R_1=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1^0,\quad R_2=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2^0,\quad R_3=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3^0. \tag{19.41}$$

2. Коэффициенты Ламе. *Коэффициентами Ламе* h_1, h_2, h_3, *соответствующими данной ортогональной криволинейной системе координат*, называются модули частных производных $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ текущей точки M по ее криволинейным координатам u^1, u^2, u^3:

$$h_1=|\boldsymbol{r}_1|,\quad h_2=|\boldsymbol{r}_2|,\quad h_3=|\boldsymbol{r}_3|. \tag{19.42}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{r}_1=h_1\boldsymbol{r}_1^0,\quad \boldsymbol{r}_2=h_2\boldsymbol{r}_2^0,\quad \boldsymbol{r}_3=h_3\boldsymbol{r}_3^0. \tag{19.43}$$

3. Линейный элемент и элемент объема в ортогональных координатах. Имеем

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1du^1+\boldsymbol{r}_2du^2+\boldsymbol{r}_3du^3$$

или

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1^0h_1du^1+\boldsymbol{r}_2^0h_2du^2+\boldsymbol{r}_3^0h_3du^3. \tag{19.44}$$

Отсюда, учитывая единичность и взаимную ортогональность векторов $\boldsymbol{r}_1^0$, $\boldsymbol{r}_2^0$, $\boldsymbol{r}_3^0$, получаем для квадрата линейного элемента выражение

$$dr^2 = h_1^2\,(du^1)^2 + h_2^2\,(du^2)^2 + h_3^2\,(du^3)^2. \qquad (19.45)$$

Элемент объема (см. (19.9))

$$dV = |\,(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3)\,|\,du^1du^2du^3$$

в силу соотношений (19.39) и (19.43) приобретает вид

$$dV = h_1h_2h_3du^1du^2du^3. \qquad (19.46)$$

4. Дифференциальные операции в ортогональной системе координат. Исходя из общих формул для градиента (19.26), дивергенции (19.31) и ротации (19.35), на основании соотношений (19.37) — (19.39), (19.43) получаем следующие выражения для основных дифференциальных операций в ортогональной системе координат:

$$\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{r}_1^0\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u^1} + \boldsymbol{r}_2^0\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u^2} + \boldsymbol{r}_3^0\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u^3}, \qquad (19.47)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R} = \operatorname{Div}\boldsymbol{R} =$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2h_3R_1) + \frac{\partial}{\partial u^2}(h_3h_1R_2) + \frac{\partial}{\partial u^3}(h_1h_2R_3)\right\}, \qquad (19.48)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{R} = \operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{r}_1^0 & h_2\boldsymbol{r}_2^0 & h_3\boldsymbol{r}_3^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ h_1R_1 & h_2R_2 & h_3R_3 \end{vmatrix}, \qquad (19.49)$$

где

$$R_1 = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_1^0, \quad R_2 = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_2^0, \quad R_3 = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_3^0. \qquad (19.50)$$

5. Оператор Лапласа в ортогональных координатах. Лапласиан $\Delta\Phi$ функции Φ определяется формулой (см. (17.63) и (16.31))

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = \operatorname{Div}(\operatorname{grad}\Phi).$$

Пользуясь формулами (19.47), (19.48) для градиента и дивергенции, находим

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u^3}\right)\right\}. \qquad (19.51)$$

§ 4. Цилиндрические координаты

1. Введение цилиндрических координат. Зафиксируем в пространстве декартову систему координатных осей $Oxyz$ (рис. 200). Положение точки M в пространстве будет определено, если будут заданы следующие числа.

а) Расстояние ρ точки M от оси Oz. Это расстояние есть число неотрицательное ($\rho \geqslant 0$).

б) Радианная мера φ угла, образованного векторной проекцией на координатную плоскость Oxy радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки с осью Ox. Этот угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz. Для того чтобы каждой точке пространства соответствовало только одно значение угла φ, будем считать его изменяющимся лишь от 0 до 2π. При этом должны иметь место неравенства $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, где второе неравенство является строгим, так как иначе не будет выполняться условие взаимной однозначности для точек пространства $y = 0$, $x > 0$.

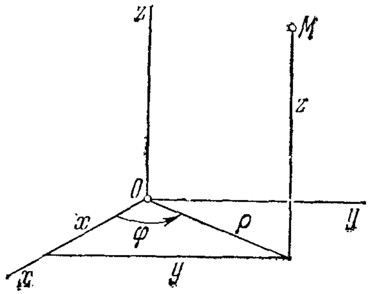

Рис. 200.

в) Проекция z радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M на ось Oz.

Эти три числа ρ, φ, z называются цилиндрическими координатами точки M.

Заметим, что ρ и φ являются, согласно определению, полярными координатами проекции точки M на плоскость Oxy. Из а), б), в) следует, что область изменения цилиндрических координат ρ, φ, z характеризуется следующими неравенствами:

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty. \tag{19.52}$$

При указанных ограничениях между точками пространства и тройками значений цилиндрических координат ρ, φ, z будет осуществляться взаимно однозначное соответствие, которое будет нарушаться лишь вдоль оси Oz, для точек которой угол φ остается неопределенным. Из чертежа (см. рис. 200) непосредственно видно, что декартовы координаты x, y, z точки M относительно фиксированной декартовой системы координатных осей связаны с цилиндрическими координатами ρ, φ, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{19.53}$$

и радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ текущей точки M может быть записан так:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\rho\cos\varphi + \boldsymbol{j}\rho\sin\varphi + \boldsymbol{k}z, \tag{19.54}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей декартовой системы. Координатные поверхности (рис. 201) в цилиндрической системе координат будут следующие:

1) поверхности $\rho = \mathrm{const}$ — круговые цилиндры с общей осью Oz (это и дало повод называть рассматриваемые криволинейные координаты цилиндрическими);

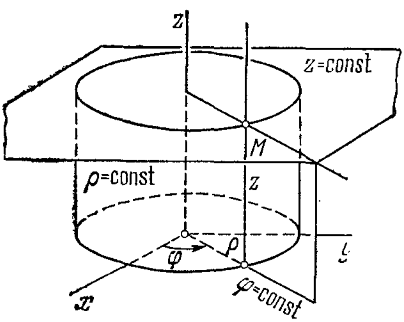

Рис. 201.

2) поверхности $\varphi = \mathrm{const}$ — полуплоскости, проходящие через ось Oz;

3) поверхности $z = \mathrm{const}$ — плоскости, параллельные плоскости Oxy.

Отметим, что в каждой точке пространства, исключая полюс O, три координатные поверхности, а следовательно, и три координатные линии пересекаются ортогонально. Следовательно, *цилиндрическая система координат является ортогональной.*

2. Линейный элемент и элемент объема в цилиндрических координатах. Продифференцировав радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (19.54) текущей точки по ее цилиндрическим координатам ρ, φ, z, мы получим векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ненормированного подвижного репера

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_\rho = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi,$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_\varphi = -\boldsymbol{i}\rho\sin\varphi + \boldsymbol{j}\rho\cos\varphi, \quad \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_z = \boldsymbol{k}.$$

При помощи этих формул легко проверяется взаимная ортогональность векторов репера, а следовательно, и ортогональность цилиндрической системы координат:

$$\boldsymbol{r}_\rho \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = 0, \quad \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_z = 0, \; \boldsymbol{r}_z \cdot \boldsymbol{r}_\rho = 0.$$

Точно так же легко находятся коэффициенты Ламе:

$$h_1 = |\boldsymbol{r}_\rho| = 1, \quad h_2 = |\boldsymbol{r}_\varphi| = \rho, \quad h_3 = |\boldsymbol{r}_z| = 1. \qquad (19.55)$$

В связи с этим квадрат линейного элемента (19.45) в цилиндрических координатах принимает вид

$$d\boldsymbol{r}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \qquad (19.56)$$

Элемент объема (19.46) выражается так:

$$dV(\rho, \varphi, z) = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz. \qquad (19.57)$$

Этот элемент объема является главной частью элементарного объема, т. е. объема шестигранника, образованного

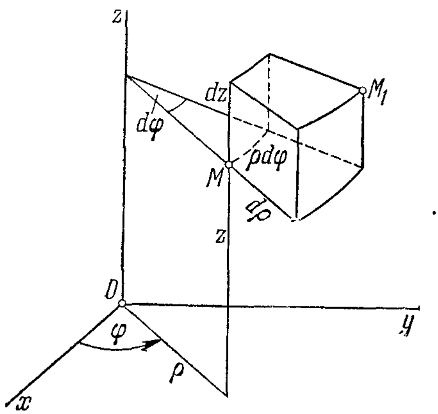

Рис. 202.

двумя тройками координатных поверхностей, проходящих через точки (ρ, φ, z) и $(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi, z + dz)$ (рис. 202).

3. Дифференциальные операции в цилиндрических координатах. Имея в виду выражения для коэффициентов Ламе (19.55), общие формулы для дифференциальных операций в ортогональных координатах (19.47) — (19.49), (19.51), а также учитывая, что векторы ортонормированного репера $\boldsymbol{r}_\rho^0$, $\boldsymbol{r}_\varphi^0$, $\boldsymbol{r}_z^0$ образуют правую систему, мы получаем следующие формулы:

$$\operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{r}_\rho^0\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \boldsymbol{r}_\varphi^0\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \boldsymbol{r}_z^0\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{19.58}$$

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{R} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial(\rho R_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial R_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho R_z)}{\partial z}\right\}, \tag{19.59}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_\rho^0 & \rho\boldsymbol{r}_\varphi^0 & \boldsymbol{r}_z^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ R_\rho & \rho R_\varphi & R_z \end{vmatrix}, \tag{19.60}$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right\}, \tag{19.61}$$

или

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \tag{19.62}$$

где

$$R_\rho = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_\rho^0, \quad R_\varphi = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_\varphi^0, \quad R_z = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_z^0. \tag{19.63}$$

§ 5. Сферические координаты

1. Введение сферических координат. Зафиксируем в пространстве декартову систему координатных осей $Oxyz$. Положение точки M в пространстве будет определено, если будут заданы следующие числа (рис. 203).

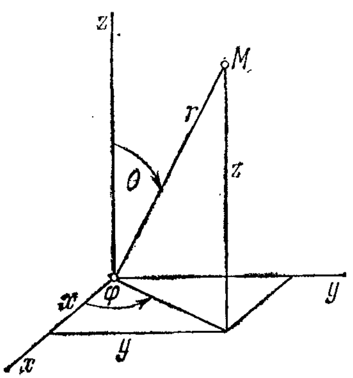

Рис. 203.

а) Модуль r радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M ($r \geqslant 0$).

б) Радианная мера θ угла между радиусом-вектором $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M и положительным направлением оси Oz, причем предполагается, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

в) Радианная мера φ угла между векторной проекцией радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M на плоскость Oxy и осью Ox. Этот угол отсчитывается от положительного направления оси

Ox против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz. При этом считается, что $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (см. (19.52)).

Числа r, θ и φ называются сферическими координатами точки M.

Из а), б), в) следует, что области изменения сферических координат характеризуются следующими неравенствами:

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \qquad (19.64)$$

При этих ограничениях между точками пространства и тройками значений сферических координат r, θ, φ осуществляется взаимно однозначное соответствие, которое будет нарушаться лишь вдоль оси Oz, для точек которой угол φ остается неопределенным.

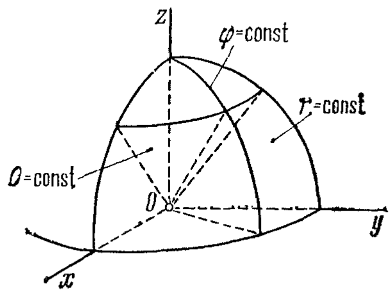

Рис. 204.

Из чертежа (см. рис. 203) непосредственно видно, что декартовы координаты x, y, z точки M относительно зафиксированной системы декартовых осей $Oxyz$ связаны со сферическими координатами r, θ, φ этой точки M формулами

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta.$$

Следовательно, радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ текущей точки M (r, θ, φ) выражается через сферические координаты так:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} r \sin\theta \cos\varphi + \boldsymbol{j} r \sin\theta \sin\varphi + \boldsymbol{k} r \cos\theta. \qquad (19.65)$$

Координатными поверхностями в сферических координатах являются следующие поверхности (рис. 204):

1) поверхности $r = \text{const}$ — сферы с общим центром в начале координат O;

2) поверхности $\theta = \text{const}$ — круглые конусы с общей осью Oz;

3) поверхности $\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, проходящие через ось Oz.

Нетрудно усмотреть, что координатные линии, по которым пересекаются координатные поверхности, взаимно ортогональны в каждой точке пространства, не считая точек оси Oz. *Следовательно, сферическая система координат является ортогональной.*

2. Линейный элемент и элемент объема в сферических координатах. Продифференцировав радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (см. (19.65)) текущей точки M (r, θ, φ) по ее сферическим координатам r, θ, φ, получим векторы $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ненормированного подвижного репера, порожденного сферической системой координат

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_r = \boldsymbol{i} \sin \theta \cos \varphi + \boldsymbol{j} \sin \theta \sin \varphi + \boldsymbol{k} \cos \theta,$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_\theta = \boldsymbol{i} r \cos \theta \cos \varphi + \boldsymbol{j} r \cos \theta \sin \varphi - \boldsymbol{k} r \sin \theta,$$
$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_\varphi = -\boldsymbol{i} r \sin \theta \sin \varphi + \boldsymbol{j} r \sin \theta \cos \varphi.$$

При помощи этих формул легко проверить, что *векторы репера* $\boldsymbol{r}_r$, $\boldsymbol{r}_\theta$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ *взаимно ортогональны*:

$$\boldsymbol{r}_r \cdot \boldsymbol{r}_\theta = 0, \quad \boldsymbol{r}_\theta \cdot \boldsymbol{r}_\varphi = 0, \quad \boldsymbol{r}_\varphi \cdot \boldsymbol{r}_r = 0. \qquad (19.66)$$

Точно так же легко вычисляются коэффициенты Ламе:

$$h_1 = |\boldsymbol{r}_r| = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1,$$
$$h_2 = |\boldsymbol{r}_\theta| = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta} = r,$$
$$h_3 = |\boldsymbol{r}_\varphi| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = r \sin \theta. \qquad (19.67)$$

Учитывая эти выражения для коэффициентов Ламе, находим квадрат линейного элемента (19.45) в сферических координатах

$$d\boldsymbol{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2 \qquad (19.68)$$

и элемент объема

$$dV = r^2 \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \qquad (19.69)$$

Этот элемент объема dV является главной частью элементарного объема ΔV, т. е. объема шестигранника, образованного двумя тройками координатных поверхностей, проходящих через исходную точку (r, θ, φ) и соседнюю точку $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ (рис. 205).

3. Дифференциальные операции в сферических координатах. Имея в виду выражения для коэффициентов Ламе (19.67) и общие формулы для дифференциальных операций в ортогональных координатах (19.47) — (19.49), (19 51), а также учитывая, что векторы $\boldsymbol{r}_r$, $\boldsymbol{r}_\theta$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ подвижного репера образуют правую систему, мы получим

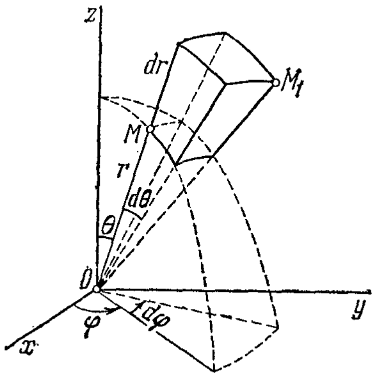

Рис. 205.

следующие выражения для дифференциальных операций в сферических координатах:

$$\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{r}_r^0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \boldsymbol{r}_\theta^0 \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \boldsymbol{r}_\varphi^0 \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \tag{19.70}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R} = \operatorname{Div}\boldsymbol{R} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 R_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(R_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial R_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{19.71}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{R} = \operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_r^0 & r\boldsymbol{r}_\theta^0 & r\sin\theta\boldsymbol{r}_\varphi^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ R_r & rR_\theta & r\sin\theta R_\varphi \end{vmatrix}, \tag{19.72}$$

$$\Delta\Phi = \operatorname{Div}\operatorname{grad}\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \tag{19.73}$$

4. Видоизмененная система сферических координат. Вместо второй сферической координаты θ часто употребляется радианная мера ψ угла между радиусом-вектором

$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ точки M и плоскостью Oxy. Этот угол считается положительным, если точка M отклонена от плоскости Oxy в сторону положительного направления оси Oz, и отрицательным в противном случае:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant +\frac{\pi}{2}. \tag{19.74}$$

Таким образом, получается, видоизмененная система сферических координат r, φ, ψ. При этом подвижной репер M, $\boldsymbol{r}_r$, $\boldsymbol{r}_\varphi$, $\boldsymbol{r}_\psi$ получается правым, если считать r первой координатой, φ — второй и ψ — третьей.

Связь между координатами θ и ψ очень простая:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta. \tag{19.75}$$

Формулы (19.47) — (19.49), (19.51) для дифференциальных операций в видоизмененной системе сферических координат приобретают следующий вид:

$$\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \boldsymbol{r}_r^0\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \boldsymbol{r}_\varphi^0\frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \boldsymbol{r}_\psi^0\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}, \tag{19.76}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{R} = \operatorname{Div}\boldsymbol{R} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2R_r) + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial R_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial(\cos\psi R_\psi)}{\partial\psi}, \tag{19.77}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{R} = \operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \frac{1}{r^2\cos\psi}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_r^0 & r\cos\psi\,\boldsymbol{r}_\varphi^0 & r\boldsymbol{r}_\psi^0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} \\ R_r & r\cos\psi R_\varphi & rR_\psi \end{vmatrix}, \tag{19.78}$$

$$\Delta\Phi = \operatorname{Div}\operatorname{grad}\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right). \tag{19.79}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ