Г. ЛЕФОР

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ

Перевод с французского
Е. И. СТЕЧКИНОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

517.2
Л 53
УДК 512.8+517

COLLECTION UNIVERSITAIRE DE MATHEMATIQUES

G. LEFORT
MAÎTRE ASSISTANT À LA FACULTE
DES SCIENCES DE PARIS

ALGÈBRE ET ANALYSE
EXERCICES

Illustration du Cours de
Mathématiques Générales
Deuxième Édition

Dunod Paris 1964

Л $\frac{0223\text{-}1793}{042\,(02)\text{-}73}$ 15-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Усвоение курса общей математики для многих студентов представляет значительную трудность; насыщенность логическими рассуждениями, а также аксиоматическое построение теорий создают впечатление совершенной новизны и полного отрыва от школьных знаний; привычные обороты мысли мало приспособлены к рассматриваемым задачам, а геометрическая интуиция, помогавшая прежде, совершенно бесполезна. Определения часто кажутся совсем произвольными и воспринимаются студентом как правила изобретательной игры, которым надо следовать, не думая о том, что в их установлении мог быть некоторый смысл.

Как же следует организовать свою работу, чтобы по возможности скорее освободиться от этих неизбежных трудностей, наладить контакт новых понятий с прежними знаниями, полученными в школе, и воссоздать интуитивное мышление, т. е. достаточное понимание теории для того, чтобы решение задачи вырисовывалось прежде, чем закончится логическая цепь рассуждений?

При изучении курса студент должен, встречаясь с новыми понятиями, стараться подбирать точные примеры математических объектов, удовлетворяющих заданным аксиомам, что позволит ему лучше понять смысл этих аксиом, равно как и следствий, которые из них вытекают, и что поможет наладить связь между ранее полученными знаниями и изучаемым курсом.

Но в то же время необходимо различать, что́ в рассматриваемых примерах находится на уровне изучаемого вопроса, а что́ относится к специальным свойствам объекта, взятого в качестве примера. Так, векторные пространства обычной геометрии дают пример векторного пространства над R размерности 3; однако это пространство является также евклидовым пространством, в котором определено расстояние при помощи внутреннего произведения, и тем самым здесь появляются свойства, не присущие векторным пространствам из других примеров.

Но особенно необходимо сопровождать изучение курса решением несложных задач из приложения к нему, чтобы освоиться с определениями и основными свойствами; только таким путем мертвый язык формулировок может превратиться в действенное орудие для изучения дальнейших проблем.

Эти задачи предназначены к тому, чтобы:

приучить к тщательной проверке выполнимости аксиом определения и условий теоремы, а также показать, как эта работа по проверке может быть проведена наиболее экономно;

дать простые примеры, относящиеся к изучаемым вопросам, а также показать, как могут быть применены результаты курса;

предложить новые теоретические задачи, которые постепенно научили бы преодолевать трудности абстрактного рассуждения.

Наконец, нельзя, чтобы студент в преодолении трудностей при решении задач пренебрегал техникой вычисления (исследование элементарных функций, вычисление производных и примитивных, интегрирование дифференциальных уравнений, вычисление матриц и практическое решение линейных уравнений, нахождение собственных значений и т. д.).

При этом само собой разумеется, что решение теоретической задачи предполагает хотя бы некоторое частичное владение техникой: в противном случае детали доказательства окажутся столь затруднительными, что не позволят увидеть задачи в целом.

Именно эти первоочередные соображения и определили подбор задач, сгруппированных в этой книге так, чтобы студенты с самого начала могли находить задачи, соответствующие тем частям курса, которые они изучают: ведь единственными знаниями, необходимыми для того, чтобы приступить к решению задач какого-либо раздела, являются знания, полученные при изучении теоретического курса.

Остается, без сомнения, некоторая трудность, заключающаяся в том, что различные разделы курса изучаются в порядке, не установленном раз и навсегда. В этом задачнике принят порядок расположения задач, соответствующий книге Ш. Пизо и М. Заманского [см. русский перевод: Пизо Ш., Заманский М., Курс математики, М., 1971].

Итак, этот сборник задач есть прежде всего инструмент для непрерывной работы, предназначенный служить в течение всего года; но он может быть также использован при подготовке к экзамену. В этом случае вначале интереснее решать задачи, относящиеся к тем вопросам курса, которые покажутся студенту наиболее тонкими. Затем среди множества задач будет отдаваться предпочтение задачам теоретического характера (а именно такого рода задачи и предлагаются чаще всего на экзамене); подобные задачи расположены, как правило, в конце разделов задачника.

Практические указания

1. При индивидуальных занятиях без преподавателя студент должен контролировать себя сам; он должен с максимальной тщательностью проследить, не опущена ли часть доказательства, и быть весьма требовательным к себе. При несоблюдении такого строгого контроля он получит гораздо меньше пользы от решения задач. Именно из этих соображений приводится подробное решение всех задач; при этом вычисления излагаются часто более бегло, чем рассуждения.

2. Предлагаемые задачи имеют относительно узкие границы (особенно в начале каждой главы) с тем, чтобы решение не было излишне трудоемким. Но зато в некоторых задачах используются результаты предыдущих, и тогда это указывается в начале формулировки.

3. В изложении решений различные вопросы достаточно четко разделены; таким образом, можно обращаться сразу к решению отдельного вопроса (пункта) в случае затруднения с его решением или с целью узнать ответ прежде, чем задача решена.

4. Алгебра помещена целиком перед анализом, так что с алгебраическими свойствами можно ознакомиться раньше, чем приступать к решению задач по анализу, и можно при их решении пользоваться этими свойствами. Но в большинстве задач анализа нужны лишь самые основные алгебраические понятия. Стало быть, алгебра и анализ могут быть и переставлены местами.

5. Задачник разбит на восемь разделов; некоторые из них в свою очередь разделены на главы; это помогает находить задачи, относящиеся к той или иной части курса. Для тех, кто занимается по курсу Пизо и Заманского, эта задача дополнительно облегчается тем, что имеются уточнения, каким главам книги соответствует каждый раздел задачника.

6. В начале каждого раздела напоминаются формулировки теорем, часто используемые при решениях, и приводятся указания о способе их применения; речь идет отнюдь не о резюме курса, а скорее о его дополнении, ориентирующем на приложение, ни в коей мере не освобождающее студента от обращения к курсу.

7. Формулировки теорем (или их названия, когда это не вызывает путаницы) часто приводятся также в процессе доказательства. Кроме того, в помощь обладателям книги Пизо и Заманского указывается место этой теоремы в курсе, чтобы дать возможность, рассматривая ее в общей теории, восстановить доказательство для этого случая.

8. Многие классические теоремы, не вошедшие в курс общей математики, приводятся в качестве задач. Это дает возможность самостоятельно доказывать важные результаты,

которые отныне уже не будут для студентов совсем новыми, когда встретятся им в дальнейшем; однако не следует пытаться искусственно удерживать их в памяти.

9. Все отношения порядка в R являются широкими отношениями; стало быть, подразумевается, что

«x отрицательно» означает, что $x \leqslant 0$;

«x больше a» означает, что $x \geqslant a$.

В противном случае уточняется, что x строго отрицательно ($x < 0$) или x строго больше a ($x > a$).

РАЗДЕЛ I

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1. Дополнительные сведения о функциях. Определения. Отображение (или функция) f множества E во множество F называется:

инъективным, если $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, или если $\forall y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения;

сюръективным (отображение *на*), если $f(E) = F$, или если $\forall y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет по крайней мере одно решение;

биективным, если оно инъективно и сюръективно, или если $\forall y \in F$ уравнение $f(x) = y$ имеет одно и только одно решение. (Говорят также, что отображение f взаимно однозначно или что f есть биекция.) В этом случае существует обратная функция, определенная на F.

Замечания. 1) Инъективное отображение множества E в F является биективным отображением E на $f(E)$.

2) Для того чтобы функция имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была инъективной. Тогда обратное отображение будет биективным отображением $f(E)$ на E.

3) Композиция двух инъективных функций инъективна; композиция двух сюръективных функций сюръективна; композиция двух биективных функций биективна.

2. Некоторые алгебраические задачи и способы их решения.

1. Показать, что некая часть Γ *группы* G *есть подгруппа.*

Закон группы записывается мультипликативно, а элемент, симметричный к x, обозначается x^{-1}.

Первый способ. Достаточно убедиться в том, что:

$$\text{нейтральный элемент } e \text{ принадлежит } \Gamma,$$

$$x \in \Gamma \Rightarrow x^{-1} \in \Gamma,$$
$$x \in \Gamma \text{ и } y \in \Gamma \Rightarrow xy\Gamma.$$

Поскольку при этом закон композиции (в силу 3-го условия — внутренний для Γ), будучи ассоциативным в G, ассоциативен и в Γ, то Γ есть группа, а значит, и подгруппа группы G.

Второй способ. Предыдущие три условия могут быть заменены единственным условием:

$$u \in \Gamma \quad \text{и} \quad v \in \Gamma \Rightarrow uv^{-1} \in \Gamma.$$

В самом деле,

$$v = u \Rightarrow uu^{-1} = e \in \Gamma,$$
$$u = e \Rightarrow v^{-1} \in \Gamma, \text{ если } v \in \Gamma,$$
$$u = x \text{ и } v = y^{-1} \Rightarrow xy \in \Gamma, \text{ если } x \in \Gamma \text{ и } y \in \Gamma.$$

II. *Показать, что некоторая часть B кольца A есть подкольцо.*

При помощи одного из способов, указанных в I, следует убедиться в том, что B есть аддитивная подгруппа кольца A, а затем — что произведение двух элементов из B является снова элементом из B.

Эти условия достаточны, ибо свойства умножения (ассоциативность, дистрибутивность относительно сложения) выполняются в A, а значит, и в B.

Таким образом, достаточно, например, проверить, что

$$x \in B \quad \text{и} \quad y \in B \Rightarrow x - y \in B \quad \text{и} \quad xy \in B.$$

III. *Показать, что некоторая часть F векторного пространства E есть векторное подпространство.*

Необходимо, при помощи одного из методов задачи I, убедиться в том, что F есть аддитивная подгруппа пространства E, и затем, что если x принадлежит F, а λ — основному телу K, то λx принадлежит F.

Как и в задаче II, эти условия достаточны, так как свойства внешнего умножения удовлетворяются в E, а значит, и в F.

В итоге достаточно проверить, что

$$x \in F \quad \text{и} \quad y \in F \Rightarrow x - y \in F,$$
$$x \in F \quad \text{и} \quad \lambda \in K \Rightarrow \lambda x \in F.$$

IV. *Показать, что некоторое множество E, наделенное законом композиции, имеет структуру группы, кольца или векторного пространства.*

Первый способ состоит в том, чтобы проверить выполнение аксиом, определяющих соответствующую структуру; но иногда этот путь является слишком длинным.

Если известно, что множество E есть часть некоторого множества $\mathscr{E}$, имеющего структуру группы (кольца или векторного пространства), то достаточно убедиться в том, что E есть подгруппа (подкольцо или векторное подпространство) относительно $\mathscr{E}$; в этом случае более эффективны методы задач I, II и III.

Наконец, иногда можно показать, что E изоморфно некоторому множеству E', относительно которого уже известно, что оно имеет рассматриваемую структуру; это сразу позволит получить нужный результат (определение изоморфизма см. Пизо и Заманский, книга I, гл. III, 3-й раздел, § 2).

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1.01. Если подмножества E и F множества A удовлетворяют соотношениям

$$E \cup F = A, \qquad E \cap F = \varnothing,$$

то множества E и F являются дополнениями одно другого до A.

1.02. Пусть E и F — подмножества A. Показать, что

1. $$\underset{A}{\complement}(E \cap F) = (\underset{A}{\complement} E) \cup (\underset{A}{\complement} F),$$

2. $$\underset{A}{\complement}(E \cup F) = (\underset{A}{\complement} E) \cap (\underset{A}{\complement} F),$$

3. подмножества $E \cap F$, $\underset{E}{\complement}(E \cap F)$, $\underset{F}{\complement}(E \cap F)$ и $\underset{A}{\complement}(E \cup F)$ образуют разбиение множества A.

1.03. Характеристической функцией подмножества E множества A называется следующее отображение e множества A во множество чисел 0 и 1:

$$e(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin E,$$

$$e(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \in E.$$

1. Если e и f — характеристические функции подмножеств E и F множества A, то каковы будут множества, имеющие характеристические функции $1 - e$, ef, $e + f - ef$?

2. Применив результаты п. 1, доказать, что

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G),$$

$$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G),$$

$$\complement(E \cap F) = (\complement E) \cup (\complement F).$$

1.04. Доказать, что если E и F — множества соответственно из m и n элементов, то число всевозможных отображений E в F равно n^m.

Вычислить, в частности, число подмножеств множества E, используя понятие характеристической функции, определенной в задаче 1.03.

1.05. Рассмотрим инъективные отображения f множества E в F, где E и F состоят, соответственно, из m и n элементов.

1. Показать, что для существования инъективных отображений f необходимо и достаточно, чтобы $m \leqslant n$.

2. Показать индукцией по m, что число инъективных отображений E в F равно

$$n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

3. Показать, что если при двух отображениях f и f' множества E образы $f(E)$ и $f'(E)$ совпадают, то отображение $f^{-1}\circ f'$ есть перестановка множества E.

4. Чему равно число C_n^m подмножеств множества F, состоящих из m элементов?

5. Показать, что C_n^m есть коэффициент при x^m в разложении многочлена $(x+1)^n$.

1.06. Пусть $\mathscr{F}$ есть множество функций, определенных и принимающих значения в одном и том же множестве E. Двум функциям f и g из $\mathscr{F}$ ставится в соответствие их композиция $f\circ g$.

1. Показать, что эта операция ассоциативна.

2. Определить регулярные элементы для этой операции.

1.07. *Пример неполного упорядочения.*

1. Условимся во множестве N натуральных чисел записывать $a \prec b$, если b делится на a. Показать, что тем самым определено отношение порядка Ω и что множество N не будет линейно упорядочено посредством Ω.

2. Обозначим через E некоторое конечное подмножество из N. Показать, что множество его мажорант имеет минимальный элемент, а множество минорант — максимальный элемент. Здесь понятие мажоранты, миноранты, максимального или минимального элемента понимаются относительно порядка Ω.

1.08. Говорят, что отношение $\mathscr{R}$ во множестве E есть отношение квазипорядка, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(a\mathscr{R}b \text{ и } b\mathscr{R}c) \Rightarrow a\mathscr{R}c, \qquad a\mathscr{R}a.$$

1. Показать, что условие ($a\mathscr{R}b$ и $b\mathscr{R}a$) определяет отношение $\mathscr{R}'$, являющееся отношением эквивалентности; соответствующие классы эквивалентности будут обозначаться буквами $A, B, \ldots$

2. В фактормножестве $\mathscr{E} = E/\mathscr{R}'$ (множестве классов эквивалентности) условимся писать $A \prec B$, если существуют такие элементы $a \in A$ и $b \in B$, что $a\mathscr{R}b$.

Показать, что это определение не зависит от конкретно выбранных элементов a и b и вводит в $\mathscr{E}$ отношение порядка.

3. Во множестве E конечных подмножеств a множества N натуральных чисел вводится отношение $\mathscr{R}$ следующим обра-

зом: $a\mathscr{R}b$ — выполняется, если сумма элементов множества a меньше суммы элементов множества b.

Показать, что $\mathscr{R}$ есть квазипорядок; указать соответствующую эквивалентность $\mathscr{R}'$ и классы эквивалентности; показать, что классы эквивалентности являются конечными множествами. Применить этот результат для доказательства того, что множество конечных подмножеств множества N счетно.

1.09. Рассмотрим множество E из четырех элементов e, i, j, k и внутренний закон композиции, имеющий таблицу

	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	j	k	e
j	j	k	e	i
k	k	e	i	j

(Произведение двух элементов находится на пересечении строки, определяемой первым элементом, и столбца, определяемого вторым элементом.)

Показать, что тем самым в E определена структура абелевой группы. Указать ее подгруппы.

1.10. E — заданное множество, а G — группа биективных отображений множества E на себя, причем операцией служит композиция отображений. Будем говорить, что подмножество F' из E равно подмножеству F из E, если существует такая функция $f \in G$, что $f(F) = F'$ (если E — трехмерное пространство элементарной геометрии, а G — группа движений, то получаем равенство фигур в обычном смысле).

1. Показать, что равенство подмножеств в E есть отношение эквивалентности, которое будет обозначаться символом $\sim$.

2. Предположим, что E — конечное множество, а G — множество перестановок E. Показать, что G есть группа и сформулировать непосредственное условие равенства двух подмножеств из E.

1.11. Говорят, что эквивалентность во множестве E согласуется с внутренним законом композиции $\top$, если

$$a \sim a' \quad \text{и} \quad b \sim b' \Rightarrow a \top b \sim a' \top b'.$$

1. Показать, что в этом случае на множестве F классов эквивалентности можно определить закон композиции, принимая в качестве композиции двух классов A и B класс элемента

$a \top b$, где a и b — произвольные представители классов A и B.

2. Показать, что если E — группа, то F — тоже группа.

1.12. *Отношение эквивалентности, согласующееся со структурой абелевой группы G или коммутативного кольца A.* (Определение эквивалентности, согласующейся с внутренним законом композиции, дано в задаче 1.11.) Закон композиции в группе G будет записываться аддитивно.

1. Класс Ω нейтрального элемента 0 есть подгруппа.

2. Обратно, любая подгруппа Γ определяет эквивалентность, согласующуюся со структурой группы G, если считать, что $x \sim y$ при условии $x - y \in \Gamma$.

3. Если G — аддитивная группа Z целых относительных чисел, то единственными подгруппами будут множества Γ_p кратных целого p.

4. Эквивалентность, согласующаяся со структурой коммутативного кольца A, определяется следующим образом:

$$x \sim y \quad \text{если} \quad x - y \in I,$$

где I — идеал кольца A. Если A — кольцо целых относительных чисел, то его идеалами являются только множества Γ_p, определенные в п. 3.

1.13. Во множестве E пар (a, b) действительных чисел, у которых a отлично от нуля, определяется произведение двух элементов посредством равенства

$$(a, b)(a', b') = (aa', ab' + b).$$

1. Показать, что E — некоммутативная группа.

2. Показать, что элементы $(a, 0)$ образуют подгруппу F группы E, изоморфную мультипликативной группе отличных от нуля действительных чисел.

3. Определим отображение φ группы E во множество R действительных чисел, положив

$$\varphi[(a, b)] = a.$$

Проверить, что

$$\varphi[(a, b)(a', b')] = \varphi[(a, b)]\,\varphi[(a', b')].$$

Показать, что $\varphi^{-1}(1)$, т. е. множество элементов из E, которым отображение φ ставит в соответствие 1, образует подгруппу в E, изоморфную аддитивной группе действительных чисел.

1.14. *Понятие гомоморфизма группы.* Обозначим через G и Γ две группы, и пусть e и ε — их нейтральные элементы; операции в G и Γ будем записывать мультипликативно.

Отображение f группы G в Γ есть гомоморфизм, если для любых элементов a и b из G

$$f(ab) = f(a)\,f(b).$$

Например, в задаче 1.13 функция φ из п. 3 осуществляет гомоморфизм E в R; отображение $x \to x^2$ является гомоморфизмом мультипликативной группы нулевых рациональных чисел в себя.

1. Показать, что $f(e) = \varepsilon$ и $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

2. Показать, что $f^{-1}(\varepsilon)$ есть подгруппа группы G, а $f(G)$ есть подгруппа группы Γ.

3. Проверить результаты п. 2 на втором примере.

4. Изоморфизм между G и Γ есть биективный гомоморфизм.

1.15. А) Обозначим через $E(x)$ наибольшее целое число, меньшее действительного числа x. Зафиксировав иррациональное число a, определим отображение f множества Z целых отрицательных чисел в интервал $[0, 1]$, положив

$$f(q) = aq - E(aq).$$

Показать, что f инъективно и что если $f(Z)$ содержит числа y_1 и y_2, то $f(Z)$ содержит также число $|y_2 - y_1|$.

Доказать, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, интервал $[0, \varepsilon]$ содержит по крайней мере один элемент из $f(Z)$, а значит, и бесконечное множество. Показать с помощью предыдущего результата, что найдется бесконечно много рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенствам

$$q > 0, \qquad \left| a - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{q}.$$

Б) В этом пункте используются результаты задач 1.11, 1.12 и 1.14.

Показать, что отношение

$$x \sim y, \text{ если } x - y \text{ есть целое число,}$$

определяет во множестве R действительных чисел отношение эквивалентности, согласующееся со структурой абелевой группы в R. Множество классов эквивалентности составляет аддитивную группу T, называемую группой действительных чисел по модулю 1.

Обозначим через F отображение Z в T, ставящее в соответствие каждому целому q класс $F(q)$ элемента $f(q)$, определенного в А).

Показать, что $F(Z)$ есть подгруппа в T, изоморфная Z.

1.16. $\mathscr{L}$ есть множество аффинных функций f с действительными коэффициентами, определенных для всех действительных x равенством $f(x) = ax + b$ (a и b — действительные постоянные). Определим в $\mathscr{L}$ сложение и умножение, положив

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

1. Показать, что $\mathscr{L}$ есть абелева группа по сложению.

2. Показать, что умножение ассоциативно и не коммутативно.

3. Будет ли $\mathscr{L}$ кольцом?

1.17. Рассмотрим множество E действительных чисел вида $m+n\sqrt{3}$ (m и n — произвольные целые относительные числа).

1. Показать, что E — подкольцо кольца действительных чисел.

2. Определим в E эквивалентность, считая $m+n\sqrt{3}\sim m'+ +n'\sqrt{3}$, если $m'-m$ и $n'-n$ кратны 2. Найти число элементов фактормножества A и показать, что в A будет определена структура кольца, если сумму и произведение двух классов определить как класс суммы или произведения двух элементов из этих классов (можно воспользоваться результатами задач 1.11 и 1.12 или провести непосредственные рассуждения). Привести таблицу умножения элементов множества A. Будет ли кольцо A телом?

3. Показать, что A содержит идеал I, состоящий из двух элементов.

1.18. Обозначим через ω иррациональный корень квадратного уравнения

$$\omega^2=a\omega+b$$

с рациональными коэффициентами a и b.

1. Множество K действительных чисел $A(\omega)$, где A — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами, есть кольцо. Множество K совпадает с множеством значений $A(\omega)$ многочленов A только первой или нулевой ступени.

2. Всякое число из K рационально или является корнем уравнения второй степени с рациональными коэффициентами.

3. K есть поле.

1.19. Пусть A — конечное кольцо без делителей нуля (т. е. обладает тем свойством, что если $xy=0$, то x или y равно нулю).

1. Показать, что всякий ненулевой элемент из A регулярен справа и слева и что уравнения

$$ax=b, \qquad x'a=b$$

при a, отличном от нуля, имеют единственные решения x и x' (более того, отображения $x\to ax$ и $x\to xa$ биективны).

2. Пусть a — некоторый фиксированный элемент из A, а u_0 — решение уравнения $au_0=a$.

Показать, что u_0 — правый нейтральный элемент относительно умножения. Доказать, точно так же, существование левого нейтрального элемента v_0, и затем, взяв произведение v_0u_0, показать, что $u_0=v_0$.

3. Показать, что A — тело.

4. Построить пример кольца без делителей нуля, которое не было бы телом.

1.20. Примеры векторных пространств. 1. Множество R действительных чисел есть векторное пространство над полем Q рациональных чисел (произведение действительного числа на рациональное есть обычное произведение действительных чисел).

2. Отображения интервала $[0, 1]$ во множество R, принимающие лишь конечное число значений, образуют векторное пространство Φ над R. (Можно использовать следующий результат: всевозможные отображения множества A в R составляют векторное пространство над R. См. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. III, 3-й раздел, § 1).

3. Отображения интервала $[0, 1]$ в R, непрерывные на дополнении некоторого счетного множества, образуют векторное пространство над R. (Считается известным, что если две функции f и g непрерывны в точке x_0, то функция $\lambda f + \mu g$ также непрерывна в x_0.)

4. Множество рациональных решений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы уравнений с рациональными коэффициентами:

$$\sum_j a_{ij}x_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{S}$$

образует векторное пространство Σ над полем Q рациональных чисел.

Сумма двух решений и произведение решения системы на рациональное число λ определяются равенствами

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

1.21. 1. Множество $\mathcal{F}$ отображений интервала $[-1, 1]$ в поле R действительных чисел имеет структуру коммутативного кольца, если определить сумму и произведение двух отображений f и g следующим образом:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Указать, какие из приведенных ниже множеств суть подкольца и идеалы кольца $\mathcal{F}$:

1) Множество $\mathcal{P}$ полиномиальных функций.

2) Множество $\mathcal{P}_n$ полиномиальных функций степени, не превосходящей n.

3) Множество $\mathcal{Q}_n$ полиномиальных функций степени, равной точно n.

4) Множество $\mathcal{N}$ отображений, принимающих в 0 значение 0.

5) Множество $\mathcal{U}$ отображений, принимающих в 0 значение 1.

2. Множество $\mathcal{F}$ имеет также структуру векторного пространства над R, если определить произведение функции на

действительное λ, положив

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Указать среди подмножеств $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{N}$ и $\mathcal{U}$ векторные подпространства пространства $\mathcal{F}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.01. Из соотношения $E \cup F = A$ следует, что всякий элемент x из A, не принадлежащий E, т. е. элемент множества $\complement E$, принадлежит F; значит, $\complement E$ содержится в F.

Из второго соотношения следует, что если x принадлежит F, то x не принадлежит E, и стало быть, принадлежит $\complement E$; F содержится в $\complement E$. Тогда

$$\complement E \subset F \quad \text{и} \quad F \subset \complement E \Rightarrow F = \complement E.$$

(Точно так же получаем, что $E = \complement F$.)

1.02. 1. Имеем $x \in E \cap F \Leftrightarrow x \in E$ и $x \in F$; отсюда

$$x \in \complement_A (E \cap F) \Leftrightarrow x \notin E \quad \text{или} \quad x \notin F$$

(союз *или* означает, что x удовлетворяет хотя бы одному из двух соотношений, в частности, может удовлетворять одновременно обоим). Иначе:

$$x \in \complement_A (E \cap F) \Leftrightarrow (x \in \complement_A E \quad \text{или} \quad x \in \complement_A F) \Leftrightarrow x \in (\complement_A E) \cup (\complement_A F).$$

2. Можно рассуждать, как в п. 1, или использовать результат, полученный там. Если $E' = \complement_A E$ и $F' = \complement_A F$, то, как известно, $\complement_A E' = E$ и $\complement_A F' = F$. Применяем результат п. 1 к E' и к F':

$$\complement_A (E' \cap F') = (\complement_A E') \cup (\complement_A F') = E \cup F.$$

Отсюда, взяв дополнения множеств, получаем

$$E' \cap F' = (\complement_A E) \cap (\complement_A F) = \complement_A (E \cup F).$$

3. Используя п. 2, можно определить четыре рассматриваемых множества следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x \in E \cap F && \Leftrightarrow x \in E && \text{и} && x \in F,\\
&x \in \complement_E (E \cap F) && \Leftrightarrow x \in E && \text{и} && x \notin F,\\
&x \in \complement_F (E \cap F) && \Leftrightarrow x \notin E && \text{и} && x \in F,\\
&x \in \complement_A (E \cup F) && \Leftrightarrow x \notin E && \text{и} && x \notin F.
\end{aligned}$$

Если заменить отрицаниями условия, стоящие в правой части любого из этих соотношений, то сразу будет видно, что полученные множества попарно не пересекаются; их объединение составляет множество A, так как элемент из A всегда удовлетворяет одной из четырех пар условий. На рис. 1 изображены

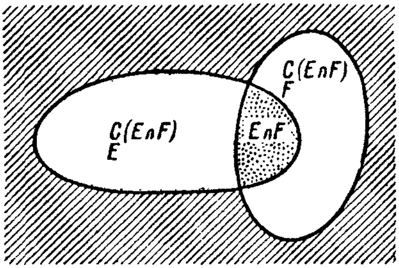

Рис. 1.

предыдущие множества, причем за A принимается вся плоскость R^2, $\underset{A}{\complement}(E \cup F)$ заштриховано, а $E \cap F$ покрыто точками.

1.03. 1. Поскольку

$$1 - e(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \notin E, & \text{то есть} \quad x \in \complement E, \\ 0, \text{ если } x \in E, & \text{то есть} \quad x \in \complement E, \end{cases}$$

то $1 - e$ является характеристической функцией дополнения $\complement E$. Далее имеем

$$(ef)(x) = e(x) f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \in E \cap F, \\ 0, \text{ если } & x \notin E \cap F, \end{cases}$$

так как во втором случае хотя бы один из сомножителей равен нулю; ef есть характеристическая функция пересечения $E \cap F$.

Наконец,

$$\varphi(x) = e(x) + f(x) - e(x) f(x) = e(x) + f(x)[1 - e(x)] = \\ = f(x) + e(x)[1 - f(x)].$$

Когда e принимает значение 1, φ тоже принимает значение 1; то же самое будет, если f принимает значение 1. При $e(x)$ и $f(x)$, равных нулю, $\varphi(x)$ тоже обращается в нуль. Итак,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin E \quad \text{и} \quad x \notin F, \\ 1, & \text{если} \quad x \in E \quad \text{или} \quad x \in F. \end{cases}$$

Следовательно, φ есть характеристическая функция объединения $E \cup F$.

2. Чтобы убедиться в том, что два множества тождественно совпадают, достаточно доказать, что их характеристические функции равны, т. е. имеют при любом x одинаковые значения.

Обозначив через e, f, g характеристические функции множеств E, F, G и используя п. 1, получаем:

$$[e(x) f(x)] g(x) = e(x) [f(x) g(x)]$$

(в силу ассоциативности произведения в R);

$$g(x) + e(x) f(x) - e(x) f(x) g(x) = \\ = [e(x) + g(x) - e(x) g(x)] [f(x) + g(x) - f(x) g(x)]$$

(так как $g^2(x) = g(x)$, поскольку $g(x)$ равно 0 или 1);

$$1 - e(x) f(x) = [1 - e(x)] + [1 - f(x)] - [1 - e(x)] [1 - f(x)].$$

1.04. Проведем индукцию по числу m элементов множества E. Если $m = 1$, то единственный элемент из E может перейти в любой из n элементов множества F; в этом случае имеется n отображений. Допустим, что результат установлен для множества из $(m-1)$ элементов. Будем считать множество E объединением множества E_1 из $(m-1)$ элементов и множества E_2 из одного элемента. Отображение f множества E во множество F определяется своими сужениями f_1 и f_2 на E_1 и E_2; при этом двум различным парам (f_1, f_2) и (f'_1, f'_2) соответствуют различные функции f и f'; следовательно, число различных отображений f совпадает с числом различных пар (f_1, f_2), равным произведению числа различных отображений f_1 на число различных отображений f_2. Число отображений f_1 множества E_1 в F равно, по предположению, n^{m-1}, а число отображений f_2 множества E_2 в F равно n; стало быть, число всевозможных функций f равно $n^{m-1} \times n = n^m$.

Подмножество множества E однозначно определяется своей характеристической функцией, т. е. отображением множества E во множество $\{0, 1\}$ из двух элементов; поэтому число всех подмножеств множества E (включая пустое множество и само E) равно числу отображений множества E во множество из двух элементов, т. е. 2^m.

1.05. 1. Если отображение f инъективно, то число элементов множества $f(E)$ равно числу элементов множества E, т. е. m, а так как $f(E)$ содержится в F, то необходимо, чтобы $m \leqslant n$. Это условие и достаточно, ибо если Φ есть множество из m элементов, содержащееся в F, то существует биекция E в Φ, т. е. инъективное отображение E в F.

2. Для $m = 1$ утверждение очевидно; допустим, что оно верно для случая, когда множество E состоит из $m - 1$ элементов. Множество E из m элементов есть объединение множества E_1 из $(m-1)$ элементов и множества E_2, состоящего из единственного элемента x_0. Сужение f_1 отображения f на E_1 инъективно, и число этих отображений, по предположению, равно $n(n-1) \ldots (n-m+2)$. Но для каждой функции f_1 образ $f(x_0)$ последнего элемента из E может выбираться произвольно во

множестве $\underset{F}{\complement} f_1(E_1)$, т. е. во множестве из $n-(m-1)$ элементов. Значит, каждой функции f_1 соответствует $n-(m-1)$ различных функций f, а различным функциям f_1 соответствуют различные функции f. Следовательно, число инъективных отображений множества E во множество F равно

$$n(n-1)\ldots(n-m+2)(n-m+1).$$

3. В силу инъективности отображения f обратное к f отображение f^{-1} определено на $f(E)$ и тоже инъективно. Стало быть, композиция $f^{-1}\circ f'$ отображает E в E и будет инъективным отображением; множество $(f^{-1}\circ f')(E)$ содержит m элементов, и значит, совпадает с E. Отображение $f^{-1}\circ f'$ есть биекция E на себя, т. е. перестановка p множества E.

Этот результат можно записать в следующей эквивалентной форме: $f'=f\circ p$.

4. Всякое подмножество Φ из F, состоящее из m элементов, есть образ множества E при некотором инъективном отображении; если f есть одно из отображений, для которых $f(E)=\Phi$, то другие отображения f' имеют вид $f\circ p$, где p — перестановка множества E. Стало быть, имеется $m!$ функций f, для которых образ множества E совпадает с Φ ($m!$ есть число перестановок множества E). Число инъективных отображений E в F равно $C_n^m\times(m!)$, и в силу п. 2,

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

5. Перенумеруем сомножители в произведении $(x+1)^n=$ $=(x+1)(x+1)\ldots(x+1)$. Проведя все перемножения, убеждаемся, что слагаемое x^m получается в том случае, если из m сомножителей берется член x, а из остальных 1, и следовательно, каждому слагаемому x^m соответствует подмножество Φ из m чисел (элементов) множества первых n натуральных чисел — номера тех скобок, из которых выбирается x. Число всех таких слагаемых, т. е. коэффициент при x^m многочлена $(x+1)^n$, есть число всех таких подмножеств Φ, т. е. C_n^m.

1.06. 1. Чтобы доказать равенство

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h),$$

достаточно установить, что образы любого элемента из E при этих двух отображениях совпадают. Пусть x — элемент из E, $u=h(x)$, $v=g(u)$. Тогда

$$[(f\circ g)\circ h](x)=[f\circ g](h(x))=(f\circ g)(u)=f[g(u)]=f(v),$$
$$(g\circ h)(x)=g[h(x)]=g(u)=v,$$

и, следовательно,

$$[f\circ(g\circ h)](x)=f[(g\circ h)(x)]=f(v).$$

2. Для того чтобы отображение f было регулярно слева, необходимо и достаточно, чтобы оно было инъективно. В самом

деле, если f инъективно и если $f \circ g = f \circ g'$, то для любого x

$$f[g(x)] = f[g'(x)] \Rightarrow g(x) = g'(x) \Rightarrow g = g'.$$

Если же f не инъективно, то найдутся два различных элемента a и b, образы $f(a)$ и $f(b)$ которых совпадают. Пусть отображения g и g' таковы, что $g(x) = a$, $g'(x) = b$ для некоторого элемента $x \in E$; тогда $f \circ g = f \circ g'$, и отображение f не будет регулярным слева.

Точно так же, для того, чтобы f было регулярно справа, необходимо и достаточно, чтобы оно было сюръективно.

Если f сюръективно, то каждому $x \in E$ соответствует такое u, что $f(u) = x$. Тогда равенство $g \circ f = g' \circ f$ влечет $g(x) = g'(x)$ для любого x.

Если же f не сюръективно, то $g \circ f = g' \circ f$ для тех отображений g и g', сужения которых на $f(E)$ совпадают; но сами g и g' могут быть различны, ибо могут принимать различные значения вне $f(E)$.

Наконец, для того, чтобы f было регулярно (т. е. регулярно и слева и справа), необходимо и достаточно, чтобы оно было биективно.

1.07. 1. Рефлексивность: $a \prec a$, так как a делится на a.

Транзитивность: $a \prec b$ и $b \prec c \Rightarrow a \prec c$.

Действительно, $b = aq$ и $c = bq' \Rightarrow c = a(qq')$.

Антисимметричность: $a \prec b$ и $b \prec a \Rightarrow b = a$.

Действительно, если b делится на a, то $a \leqslant b$, а если a делится на b, то $b \leqslant a$, откуда следует $a = b$.

Ω не дает полного (линейного) упорядочения, ибо ни одно из соотношений $6 \prec 10$ и $10 \prec 6$ не выполняется.

2. Мажоранты множества E служат общими кратными элементов этого множества; они все кратны одному из них, а именно, наименьшему общему кратному (н. о. к.), который и будет минимальным элементом мажорант множества E в смысле отношения порядка Ω.

Точно так же, миноранты множества E служат общими делителями элементов из E; все они являются делителями наибольшего общего делителя (н. о. д.), который и будет максимальным элементом минорант в смысле отношения порядка Ω.

1.08. 1. Рефлексивность $a\mathcal{R}'a$ следует из 2-го свойства отношения $\mathcal{R}$.

Симметричность $a\mathcal{R}'b \Rightarrow b\mathcal{R}'a$ вытекает из того, что a и b в определении $\mathcal{R}'$ присутствуют симметрично.

Транзитивность $(a\mathcal{R}'b$ и $b\mathcal{R}'c) \Rightarrow a\mathcal{R}'c$ также имеет место. В самом деле,

$$a\mathcal{R}'b \Rightarrow a\mathcal{R}b \quad \text{и} \quad b\mathcal{R}a,$$
$$b\mathcal{R}'c \Rightarrow b\mathcal{R}c \quad \text{и} \quad c\mathcal{R}b,$$
$$\left.\begin{array}{l} a\mathcal{R}b \quad \text{и} \quad b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c \\ c\mathcal{R}b \quad \text{и} \quad b\mathcal{R}a \Rightarrow c\mathcal{R}a \end{array}\right\} \Rightarrow a\mathcal{R}'c.$$

2. Если a' и b' — два других элемента соответственно множеств A и B, то

$$a'\mathfrak{R}'a \Rightarrow a'\mathfrak{R}a, \qquad b'\mathfrak{R}'b \Rightarrow b\mathfrak{R}b',$$

и, по условию, $a\mathfrak{R}b$.

Транзитивность $\mathfrak{R}$ влечет теперь соотношение $a'\mathfrak{R}b'$: отношению $\mathfrak{R}$ удовлетворяют все пары (a', b'), если ему удовлетворяет одна выбранная пара (a, b).

Определенное так на классах эквивалентности отношение рефлексивно и транзитивно вместе с $\mathfrak{R}$. В самом деле, $A \prec A$, ибо для $a \in A$ имеем $a\mathfrak{R}a$; далее, $A \prec B$ и $B \prec C \Rightarrow A \prec C$, так как, если a, b и c — три элемента из A, B и C, то $a\mathfrak{R}b$ и $b\mathfrak{R}c$, откуда имеем $a\mathfrak{R}c$.

Покажем, что это отношение обладает также свойством антисимметричности. Допустим, что $A \prec B$ и $B \prec A$; если a и b — элементы из A и B, то имеем $a\mathfrak{R}b$ и $b\mathfrak{R}a$, или, по определению, $a\mathfrak{R}'b$, и значит, a, b принадлежат одному классу эквивалентности, т. е. A и B совпадают.

3. Непосредственно убеждаемся, что $\mathfrak{R}$ есть квазипорядок.

Если $K(a)$ — сумма элементов множества a, то отношение $a\mathfrak{R}'b$ определяется условиями $K(a) \leqslant K(b)$ и $K(b) \leqslant K(a)$, т. е. $K(a) = K(b)$. Класс эквивалентности A_h есть множество подмножеств a, для которых $K(a)$ имеет одно и то же значение h; найдется не более чем конечное число таких подмножеств a, ибо число элементов в a не больше чем h, а элементами множества a являются числа 1, 2, ..., не превосходящие h. Следовательно, число подмножеств в классе эквивалентности A_h не превосходит числа 2^h, равного числу всех подмножеств из h элементов (см. задачу 1.04). Таким образом, все классы эквивалентности суть конечные множества.

Для доказательства счетности множества конечных подмножеств множества натуральных чисел заметим, что каждое подмножество принадлежит какому-либо классу, и эти классы не пересекаются. Следовательно, если перенумеровать подмножества последовательно в классах A_1, A_2, A_3, ..., то каждому конечному множеству натуральных чисел будет отнесено натуральное число, но это и означает, что число всех таких множеств счетно.

1.09. Произведение элемента справа или слева на e равно этому элементу, и значит, e — нейтральный элемент.

Таблица симметрична относительно главной диагонали, и поэтому перемена порядка множителей не меняет результата; следовательно, закон к о м м у т а т и в е н.

А с с о ц и а т и в н о с т ь. Мы должны проверить равенство $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ для всевозможных значений α, β, γ. Пусть вначале α, β, γ принимают различные и отличные от e значения. Тогда для произведения $(\alpha\beta)\gamma$ имеем

$$(ij)\,k = j, \qquad (jk)\,i = j, \qquad (ki)\,j = j,$$

т. е. оно не зависит от выбора перестановки элементов i, j, k. Поскольку, в силу коммутативности, $\alpha(\beta\gamma) = (\beta\gamma)\alpha$, то исходное равенство для этого случая проверено. В предположении, что произведение $(\alpha\beta)\gamma$ содержит два равных числа, имеем

$$(ii)\,j = e = i\,(ij), \quad (ii)\,k = i = i\,(ik), \quad (jj)\,i = i = j\,(ji),$$
$$(jj)\,k = k = j\,(jk), \quad (kk)\,i = k = k\,(ki), \quad (kk)\,j = e = k\,(kj).$$

Наконец, если все члены α, β и γ между собой равны или если хотя бы один из членов равен e, результат очевиден.

Симметричные элементы. Соотношения $ik = e$ и $jj = e$ показывают, что всякий элемент обладает симметричным: симметричным к i будет k, и наоборот, а j симметричен j.

Подгруппа G непременно содержит нейтральный элемент e; если она содержит некоторый элемент, то она содержит и его симметричный, а также произведение двух элементов множества G. Если G содержит i, то она содержит k, симметричный к i, и $j = ii$, т. е. совпадает с E. Если G содержит k, то она содержит i, и снова совпадает с E. Наконец, множество $\{e, j\}$ есть подгруппа группы E, так как элемент j симметричен самому себе, и

$$ee = e, \quad ej = j, \quad jj = e.$$

1.10. 1. Нейтральный элемент группы G есть тождественное отображение e множества E в себя:

$$e(F) = F \Rightarrow F \sim F;$$

по определению, $F' \sim F$ означает, что в G найдется функция f, для которой $f(F) = F'$. Элемент f^{-1}, симметричный к f в G, есть функция, обратная к f; она также осуществляет биекцию E на E. Имеем

$$F = f^{-1}(F') \Rightarrow F \sim F'.$$

Если $F'' \sim F'$ и $F' \sim F$, то существуют такие функции f и g, что $F'' = g(F')$ и $F' = f(F)$. Функция $g \circ f$ снова является элементом из G, и

$$(g \circ f)(F) = F'' \Rightarrow F'' \sim F.$$

Следовательно, все три свойства отношения эквивалентности выполнены.

2. Перестановка p есть биекция E на себя. Тождественное отображение есть перестановка; отображение, обратное перестановке, есть перестановка; наконец, композиция двух биекций есть биекция, и значит, композиция двух перестановок множества E есть перестановка E. А так как известно (задача 1.06), что композиция функций — ассоциативная операция, то доказано, что множество G перестановок составляет группу.

Если $F' = p(F)$, то F и F' имеют одинаковое число элементов, поскольку p инъективно (два различных элемента из F имеют различные образы).

Обратно, если F и F' имеют одинаковое число элементов, то найдется такая перестановка p множества E, что $p(F) = F'$. Определим эту перестановку, записав в одной строке элементы из F, затем элементы из $\complement F$, а в другой, расположенной под ней, — элементы из F', затем элементы из $\complement F'$. Поскольку F и F', а следовательно, $\complement F$ и $\complement F'$, имеют одно и то же число элементов, то отнеся каждому элементу верхней строки расположенный под ним элемент нижней строки, получим перестановку p множества E; при этом $p(F) = F'$. Имеем:

$$\begin{matrix} \overbrace{a_{i_1} \ldots a_{i_k}}^{F} & \overbrace{a_{i_{k+1}} \ldots a_{i_n}}^{\complement F} \\ \underbrace{a_{i'_1} \ldots a_{i'_k}}_{F'} & \underbrace{a_{i'_{k+1}} \ldots a_{i'_n}}_{\complement F'} \end{matrix}$$

Стало быть, два подмножества из E равны в том и только том случае, если они имеют одинаковое число элементов.

1.11. 1. Следует проверить, что закон композиции определен, т. е. класс элемента $a \top b$ зависит только от классов A и B и не зависит от выбора элементов a и b в этих классах. Это условие выполнено, ибо если a' и b' — другие два элемента из A и B, т. е. $a' \sim a$ и $b' \sim b$, то в силу предположения, $a' \top b' \sim \sim a \top b$. Класс элемента $a' \top b'$ является классом элемента $a \top b$.

2. Определенный на F закон композиции обладает свойствами исходного закона. В самом деле, если первый ассоциативен, то второй тоже. Возьмем три класса A, B, C, и в этих классах — элементы a, b, c; тогда

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c) \Rightarrow (A \top B) \top C = A \top (B \top C).$$

Если ω — нейтральный элемент в E, то класс Ω элемента ω есть нейтральный элемент в F:

$$\omega \top a = a \top \omega \Rightarrow \Omega \top A = A \top \Omega.$$

Наконец, если a^{-1} симметрично к a, то класс A' элемента a^{-1} симметричен классу A элемента a *):

$$a \top a^{-1} = a^{-1} \top a = \omega \Rightarrow A \top A' = A' \top A = \Omega.$$

Стало быть, закон композиции определяет в E структуру группы.

1.12. 1. По определению, $x \in \Omega$, если $x \sim 0$. Если $x \in \Omega$ и $y \in \Omega$, то $x - y \sim 0 - 0 = 0$, поскольку эквивалентность

*) Следует еще отметить, что если $a \sim b$, то $a^{-1} \sim b^{-1}$, ибо из соотношений $a^{-1} \sim a^{-1}$, $b^{-1} \sim b^{-1}$, $a \sim b$ получаем $a^{-1} \top a \top b^{-1} \sim a^{-1} \top b \top b^{-1}$, но в силу ассоциативности, $a^{-1} \top a \top b^{-1} = b^{-1}$, $a^{-1} \top b \top b^{-1} = a^{-1}$. Отсюда, в частности, вытекает, что если $a \sim \bar{a}$, $b \sim \bar{b}$, то $\bar{a} + a^{-1} \sim \bar{b} + b^{-1}$ и $a^{-1} + \bar{a} \sim b^{-1} + \bar{b}$.

согласуется со сложением; значит, $x-y\in\Omega$. Таким образом, Ω есть подгруппа группы G.

2. Все три свойства эквивалентности выполнены, ибо Γ есть подгруппа, и поэтому

$$x-x=0\in\Gamma\Rightarrow x\sim x;$$
$$x-y\in\Gamma\Rightarrow y-x=-(x-y)\in\Gamma.$$

Значит,

$$x\sim y\Rightarrow y\sim x;$$
$$x-y\in\Gamma \text{ и } y-z\in\Gamma\Rightarrow x-z=(x-y)+(y-z)\in\Gamma;$$

следовательно,

$$x\sim y \text{ и } y\sim z\Rightarrow x\sim z.$$

Определенная таким способом эквивалентность согласуется с операцией. Действительно,

$$x'\sim x \text{ и } y'\sim y\Rightarrow x'-x\in\Gamma \text{ и } y'-y\in\Gamma\Rightarrow x'+y'-(x+y)=$$
$$=(x'-x)+(y'-y)\in\Gamma\Rightarrow x'+y'\sim x+y.$$

3. Пусть Γ^+ — строго положительные элементы группы Γ, а Γ^- — множество элементов, противоположных к элементам из Γ^+. (Очевидно, Γ есть объединение Γ^+, Γ^- и 0.) Γ^+ имеет наименьший элемент p.

Произведение p на любое натуральное число принадлежит Γ, а значит, и Γ^+. Действительно, mp есть сумма m членов, равных p, и стало быть, является элементом группы.

Элементу x из Γ^+ отнесем остаток r от деления x на p. Число $r=a-mp\geqslant 0$ как разность двух элементов из Γ принадлежит Γ; оно не может принадлежать Γ^+, поскольку $r<p$, и значит, r равно нулю. Следовательно, элементы Γ^+ кратны p. Этим свойством обладают и элементы Γ^-.

Итак, подгруппы Γ суть множества Γ_p чисел, кратных p.

4. Эквивалентность должна согласовываться со структурой аддитивной абелевой группы A; значит, она определяется некоторой подгруппой I: $x\sim y$, если $x-y\subset I$.

Эквивалентность должна согласовываться с умножением, т. е. $x\sim x'$ и $y\sim y'\Rightarrow xy\sim x'y'$. В частности, если $y\in I$, т. е. $y\sim 0$, то при любом $x\in A$ $xy\sim x0=0$, т. е. $xy\in I$. Иными словами, xI должно содержаться в I, но это означает, что I — идеал кольца A.

Обратно, если в кольце A отношение эквивалентности введено с помощью идеала I, то оно согласуется с умножением. В самом деле, если $x'\sim x$ и $y'\sim y$, то $x'-x\in I$ и $y'-y\in I$, а поскольку I — идеал, то произведения $y(x'-x)$ и $x'(y'-y)$ принадлежат I; стало быть, и разность $x'y'-xy=x'(y'-y)+$ $+y(x'-x)$ принадлежит I. Следовательно,

$$x'\sim x \quad\text{и}\quad y'\sim y\Rightarrow x'y'\sim xy.$$

Если A есть кольцо целых относительных чисел, то его аддитивными подгруппами будут лишь множества Γ_p чисел, кратных целому p. Эти множества являются, очевидно, идеалами, и следовательно, будут единственными идеалами в Z. Стало быть, Z имеет лишь факторкольца, изучавшиеся в курсе Пизо и Заманского, Алгебра, гл. III, 1-й раздел, § 3, когда речь шла о телах характеристики p.

1.13. 1. Операция ассоциативна, поскольку

$$[(a, b)(a', b')](a'', b'') = (aa'a'', aa'b'' + ab' + b),$$

$$(a, b)[(a', b)(a'', b'')] = (a, b)(a'a'', a'b'' + b) =$$
$$= (aa'a'', aa'b'' + ab' + b).$$

Она не коммутативна, ибо, например, $(2, 0)(1, 1) = (2, 2)$, $(1, 1)(2, 0) = (2, 1)$.

Элемент $(1, 0)$ — нейтральный. Симметричным к (a, b) является элемент $(a, b)^{-1} = (1/a, -b/a)$, так как $(a, b)(1/a, -b/a) = (1/a, -b/a)(a, b) = (1, 0)$.

2. Отображение $a \to (a, 0)$ есть биекция множества отличных от нуля действительных чисел на F, и произведению двух действительных чисел соответствует произведение элементов из F: $aa' \to (aa', 0) = (a, 0)(a', 0)$; (образ $(1, 0)$ элемента 1 есть нейтральный элемент; образ $1/a$ есть элемент $(1/a, 0) = (a, 0)^{-1}$, симметричный элементу $(1, 0)$). Значит, F есть подгруппа группы E, изоморфная мультипликативной группе отличных от нуля действительных чисел.

3. Справедливы равенства

$$\varphi[(a, b)(a', b')] = \varphi[(aa', ab' + b)] = aa',$$
$$\varphi[a, b]\varphi[a', b'] = aa',$$

так что

$$\varphi[(a, b)(a', b')] = \varphi[(a, b)]\varphi[(a', b')].$$

$\varphi^{-1}(1)$ есть множество элементов вида $(1, b)$. Чтобы показать, что это есть подгруппа группы E, достаточно убедиться, что $(1, b)(1, b')^{-1}$ есть элемент из $\varphi^{-1}(1)$; это на самом деле так, ибо $(1, b)(1, b')^{-1} = (1, b)(1, -b') = (1, b - b')$.

Отображение ψ, которое паре $(1, b)$ ставит в соответствие число b, есть биекция множества $\varphi^{-1}(1)$ на R; кроме того, $\psi[(1, b)(1, b')] = b + b' = \psi[(1, b)] + \psi[(1, b')]$. Следовательно, ψ есть изоморфизм множества $\varphi^{-1}(1)$ и аддитивной группы действительных чисел (определение изоморфизма см. Пизо и Заманский, книга I, гл. III, 3-й раздел, § 2).

1.14. 1. Для любого элемента $a \in G$ имеем

$$ae = a \Rightarrow f(ae) = f(a)f(e) = f(a).$$

Умножив последнее равенство слева на элемент $[f(a)]^{-1}$, обратный к $f(a)$ в Г, получим $f(e)=\varepsilon$. Точно так же из $a^{-1}a = aa^{-1} = e$ выводим

$$\varepsilon = f(e) = f(a^{-1}a) = f(a^{-1})f(a) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}),$$

чем доказано, что $f(a^{-1})$ есть обратный элемент $[f(a)]^{-1}$ к $f(a)$ в Г.

2. Для любых двух элементов a и b из $f^{-1}(\varepsilon)$ имеем

$$f(ab) = f(a)f(b) = \varepsilon\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow ab \in f^{-1}(\varepsilon),$$
$$f(b^{-1}) = [f(b)]^{-1} = \varepsilon^{-1} = \varepsilon \Rightarrow b^{-1} \in f^{-1}(\varepsilon),$$

и кроме того, $f(e)=\varepsilon \Rightarrow e \in f^{-1}(\varepsilon)$.

Тем самым доказано, что $f^{-1}(\varepsilon)$ есть подгруппа группы G.

Если α и β — элементы из $f(G)$, то, по определению, в G найдутся такие элементы a и b, что $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$; отсюда

$$\alpha\beta^{-1} = f(a)[f(b)]^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}).$$

Элемент $\alpha\beta^{-1}$, будучи образом элемента ab^{-1}, также принадлежит $f(G)$. Таким образом, $f(G)$ является подгруппой группы Г.

3. В этом случае множество $f^{-1}(1)$ состоит из чисел -1 и 1; это есть подгруппа мультипликативной группы рациональных чисел.

Образ группы есть множество квадратов рациональных чисел; это множество тоже является подгруппой.

4. В сравнении с гомоморфизмом, в определение изоморфизма вводится единственное дополнительное условие, что функция является взаимно однозначным отображением (т. е. биекцией) G на Г (см. Пизо и Заманский, книга I, гл. III, 3-й раздел, § 2).

1.15. А) Предположим, что $f(q) = f(q')$. Тогда

$$aq - E(aq) = aq' - E(aq'),$$
$$a(q'-q) = E(aq') - E(aq);$$

$q'-q$ не может быть отлично от 0, так как тогда a было бы рациональным ($E(aq')$ и $E(aq)$ — целые). Таким образом, условие $f(q)=f(q')$ влечет $q=q'$, т. е. f инъективно.

Предположим, что y_1, y_2 — элементы множества $f(Z)$ и $y_1 < y_2$; имеем

$$y_1 = aq_1 - E(aq_1), \qquad y_2 = aq_2 - E(aq_2),$$
$$y_2 - y_1 = a(q_2 - q_1) - (E(aq_2) - E(aq_1)).$$

Разность $y_2 - y_1$ заключена между 0 и 1; значит, целое число $E(aq_2) - E(aq_1)$ есть наибольшее целое, меньшее $a(q_2 - q_1)$, т. е.

$$E[a(q_2 - q_1)] = E(aq_2) - E(aq_1),$$

и следовательно,

$$y_2 - y_1 = a(q_2 - q_1) - E[a(q_2 - q_1)] = f(q_2 - q_1);$$

таким образом, $y_2 - y_1 \in f(Z)$.

Если отрезок $[0, \varepsilon]$ не содержит элемента из $f(Z)$, то согласно предыдущему результату разность двух элементов множества $f(Z)$ будет больше ε; но тогда множество $f(Z)$, содержащееся в $[0, 1]$, будет иметь лишь конечное число элементов, чего не может быть, поскольку Z бесконечно, а f инъективно.

Заметим, что поскольку a иррационально, то $f(q)$ отлично от нуля; бесконечную последовательность элементов $f(q)$ из $[0, \varepsilon]$ с помощью этого можно построить следующим образом. Мы уже установили, что $[0, \varepsilon]$ содержит по крайней мере один элемент y из $f(Z)$; допустим, что мы нашли уже n таких элементов $y_1, \ldots, y_n$; возьмем число ε_n, строго меньшее, чем $y_1, \ldots, y_n$ (это возможно, поскольку ни одно из y_n не равно нулю). Мы знаем, что интервал $[0, \varepsilon_n]$ содержит хотя бы один элемент y из $f(Z)$, который, по построению, отличен от предыдущих. Обозначим через q такое целое число, что $f(q) \in [0, \varepsilon_n]$, а через p — целое число $E(aq)$. Тогда имеем

$$0 < aq - p \leqslant \varepsilon \Rightarrow \left| a - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|q|}.$$

Заменяя в случае надобности p и q на $-p$ и $-q$, получаем требуемый результат.

Б) Целые относительные числа образуют подгруппу Z аддитивной абелевой группы R. Но тогда (задача 1.12) отношение, определяемое условием $x - y \in Z$, есть отношение эквивалентности, согласующееся с операцией сложения в R; фактормножество по этому отношению имеет структуру группы (задача 1.11).

Отображение F инъективно. Действительно, если $q \neq q'$, то $f(q) - f(q') \neq 0$, так как f инъективно; $|f(q) - f(q')| < 1$, поскольку $0 < f(q) < 1$ и $0 < f(q') < 1$. Следовательно, $f(q)$ и $f(q')$ не эквивалентны, и классы $F(q)$ и $F(q')$ различны; стало быть, F инъективно.

F есть гомоморфизм Z в T (определение и свойства см. в задаче 1.14). Действительно, по определению операции в T имеем

$$F(q) + F(q') = cl\,f(q) + cl\,f(q') = cl\,[f(q) + f(q')];$$

значит, класс суммы $f(q) + f(q')$ совпадает с классом элемента $f(q + q')$, т. е.

$$F(q) + F(q') = F(q + q').$$

Согласно результатам 1.14, $F(Z)$ есть подгруппа группы T; кроме того, функция F инъективна; значит, F есть биекция Z на $F(Z)$. Таким образом, F есть биективный гомоморфизм Z на $F(Z)$, т. е. изоморфизм.

1.16. 1. Сложение есть внутренняя операция:

$$f(x)=ax+b \quad \text{и} \quad g(x)=a'x+b' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f+q)(x)=(a+a')x+(b+b').$$

Для доказательства того, что $\mathscr{L}$ — аддитивная абелева группа, возможны два пути.

Первый заключается в том, чтобы использовать представление f посредством пары (a, b) действительных чисел; проверка свойств группы осуществляется тривиально.

Второй путь — провести для частного случая $\mathscr{L}$ доказательство из курса Пизо и Заманского, книга II, гл. III, 3-й раздел, § 1.

2. Легко видеть, что внутренней операцией является также и умножение. В самом деле,

$$f(y)=ay+b \quad \text{и} \quad g(x)=a'x+b' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (fg)(x)=aa'x+ab'+b.$$

Для изучения свойств умножения можно снова использовать представление f парой (a, b) действительных чисел, определенное в задаче 1.13, к которой следует обратиться и за доказательством соответствующих свойств. Можно также показать, что композиция функций ассоциативна, тем же путем, как это сделано в задаче 1.06. Пример $f(x)=x-2$, $g(x)=2x+1$, показывает, что она не коммутативна.

3. $\mathscr{L}$ есть аддитивная абелева группа; умножение ассоциативно; следовательно, для того чтобы $\mathscr{L}$ была кольцом, необходимо и достаточно, чтобы умножение было дистрибутивно относительно сложения.

Дистрибутивность справа не выполняется. В самом деле,

$$[f(g+g')](x)=f[(g+g')(x)]=f[g(x)+g'(x)].$$

$$[fg+fg'](x)=f[g(x)]+f[g'(x)].$$

Эти два выражения равны только при $b=0$. В этом легко убедиться, взяв, например, $g(x)=g'(x)=x$ и $f(x)=ax+b$; тогда

$$f[g(x)+g'(x)]=2ax+b, \quad f[g(x)]+f[g'(x)]=2ax+2b.$$

Стало быть, $\mathscr{L}$ не является кольцом.

Напротив, легко видеть, что умножение дистрибутивно слева, т. е.

$$(f+f')g=fg+f'g.$$

Этот пример показывает, что для некоммутативной операции существеннно в доказательствах рассматривать как правые, так и левые свойства операции.

1.17. 1. Нужно показать, что E есть аддитивная подгруппа группы R (достаточно убедиться, что разность двух чисел из E есть число из E) и что умножение есть внутренняя операция для E. Имеем

$$m+n\sqrt{3}-(m'+n'\sqrt{3})=(m-m')+(n-n')\sqrt{3},$$
$$(m+n\sqrt{3})(m'-n'\sqrt{3})=mm'+3nn'+(mn'+nm')\sqrt{3},$$

где $(m-m')$, $(n-n')$, $(mm'+3nn')$, $(mn'+nm')$ — целые относительные числа.

2. Для изучения свойств множества A можно воспользоваться результатом задач 1.11 и 1.12 п. 4. Вначале заметим, что эквивалентность определена условием

$$(m+n\sqrt{3})-(m'+n'\sqrt{3})\in I,$$

где I — множество чисел из E, коэффициенты m и n которых кратны 2. В силу результата задачи 1.12 п. 4, для того чтобы A было кольцом, необходимо и достаточно, чтобы I было идеалом, т. е. чтобы множество I было аддитивной подгруппой и чтобы произведение элемента из I на произвольный элемент кольца E снова было элементом из I. Все эти условия здесь легко проверяются.

Можно также применить прямой способ, убедившись в том, что:

отношение есть отношение эквивалентности;

сумма и произведение двух классов определены, т. е. класс суммы или произведения двух элементов зависит только от классов этих элементов;

определенные так операции превращают фактормножество A в кольцо (результат очевиден в силу определения операций на классах: свойства операций в E одинаково справедливы и в A).

Чтобы показать, например, что класс произведения двух элементов u и v из E зависит только от классов этих элементов, надо показать, что

$$u'\sim u \quad \text{и} \quad v'\sim v \Rightarrow u'v'\sim uv.$$

Для этого, в силу коммутативности умножения, достаточно проверить утверждение

$$u'\sim u \Rightarrow u'v\sim uv.$$

Действительно, если оно имеет место, то также

$$v'\sim v \Rightarrow v'u'\sim vu' \quad \text{или} \quad u'v'\sim u'v,$$

и, наконец, оба эти утверждения дают

$$u'\sim u \quad \text{и} \quad v'\sim v \Rightarrow uv\sim u'v\sim u'v'.$$

Чтобы проверить это свойство, запишем $u'v-uv=(u'-u)v$; коэффициенты разности $u'-u$, по условию, кратны 2, а значит, и коэффициенты произведения $(u'-u)v$ тоже кратны 2 (достаточно применить формулы из п. 1). Элементы множества A суть классы эквивалентности; каждый класс содержит, и притом единственное, число $m+n\sqrt{3}$, для которого m и n равны либо 1, либо 0, и однозначно определен этим числом; значит, A содержит 4 элемента, определяемые числами

$$0, \ 1, \ \sqrt{3}, \ 1+\sqrt{3},$$

Таблица умножения этих классов имеет вид

	0	1	$\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$
0	0	0	0	0
1	0	1	$\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$
$1+\sqrt{3}$	0	$1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	0

A не будет телом, так как произведение $1+\sqrt{3}$ на себя равно нулю, и значит, класс $1+\sqrt{3}$ не может иметь обратного.

3. Подмножество B множества A есть идеал, если B есть аддитивная подгруппа и если произведение элемента из B на элемент из A принадлежит B. Если B содержит 1 или $\sqrt{3}$, то оно содержит все элементы из A, так как эти элементы могут быть получены как произведения 1 или $\sqrt{3}$ на элементы из A; этот случай не представляет интереса. Но множество B, содержащее 0 и $1+\sqrt{3}$, очевидно, есть идеал: это аддитивная подгруппа, ибо $(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=0$. Из таблицы видно, что произведение $1+\sqrt{3}$ на элемент из A равно 0 или $1+\sqrt{3}$, и значит, снова является элементом из B.

1.18. 1. Разность и произведение двух многочленов с рациональными коэффициентами — снова многочлены с рациональными коэффициентами; значит, разность и произведение двух чисел из K будет числом из K, т. е. K есть подкольцо коммутативного кольца действительных чисел.

Теперь покажем, что для любого многочлена A найдется такой многочлен A_1 первой степени, что $A(\omega)=A_1(\omega)$. Так как коэффициенты многочлена A рациональны, то достаточно доказать, что любая целая степень ω^n числа ω есть значение некоторого многочлена первой степени от ω с рациональными коэффициентами.

Доказываем индукцией по n. Для $n=1$ утверждение очевидно. Допустим, что

$$\omega^n = a_n\omega + b_n,$$

где a_n и b_n рациональны; тогда

$$\omega^{n+1} = \omega^n \cdot \omega = a_n\omega^2 + b_n\omega = (a_n a + b_n)\,\omega + a_n b.$$

2. Уже доказано, что

$$x \in K \Rightarrow x = p\omega + q \qquad (p \text{ и } q \text{ рациональны}).$$

Если $p=0$, то x рационально.

Если $p \neq 0$, то $\omega = (x-q)/p$, и x является корнем уравнения

$$\left(\frac{x-q}{p}\right)^2 = a\,\frac{x-q}{p} + b$$

или уравнения

$$x^2 = (ap+2q)\,x + bp^2 - apq - q^2$$

с рациональными коэффициентами (поскольку a, b, p, q рациональны) и отличным от нуля свободным членом (иначе x и ω были бы рациональными).

3. Мы показали, что K есть кольцо; число 1 ему принадлежит и служит единицей в K; унитарное кольцо K будет полем, если обратный к любому ненулевому элементу $x \in K$ является элементом K. Если x рационально, то x^{-1} рационально и принадлежит K. Если же x не рационально, то оно будет корнем уравнения второй степени с рациональными коэффициентами: $x^2 = \alpha x + \beta$, где $\beta \neq 0$, а поскольку $x = p\omega + q$, то

$$\frac{1}{x} = \frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{p\omega + q - \alpha}{\beta},$$

и, следовательно, $1/x$ есть значение многочлена с рациональными коэффициентами в точке a; $1/x$ — элемент из K.

1.19. 1. Если a — некоторый отличный от 0 элемент из A, то

$$ax' = ax \Leftrightarrow a(x'-x) = 0 \Leftrightarrow x' - x = 0,$$

поскольку произведение $a(x'-x)$ может равняться нулю только в том случае, если равен нулю один из сомножителей. Стало быть, a — регулярный слева элемент. Точно так же показываем, что элемент a регулярен справа:

$$x'a = xa \Leftrightarrow (x'-x)\,a = 0 \Leftrightarrow x' - x = 0.$$

Отображение $x \to ax$ множества A в A, на основании предыдущего, инъективно; а в силу конечности A оно биективно (образ множества имеет столько же элементов, сколько и само множество A, и значит, совпадает с A). Иными словами, уравнение $ax = b$ при любом $b \in A$ имеет единственное решение.

Аналогично проводится доказательство для уравнения $xa' = b$ (отображение $x \to xa'$ инъективно).

2. Согласно п. 1 уравнение $au_0 = a$ имеет одно решение; для произвольного элемента b из A уравнение $b = x'a$ имеет также одно решение. Поэтому имеем

$$bu_0 = (x'a) u_0 = x' (au_0) = x'a = b,$$

и u_0 есть правый нейтральный элемент.

Точно так же определим v_0 как решение уравнения $v_0 a = v_0$; воспользовавшись тем, что b может быть записано в виде ax, получаем $v_0 b = v_0(ax) = (v_0 a)x = ax = b$, т. е. v_0 — левый нейтральный элемент. Наконец, $v_0 u_0 = v_0$, ибо u_0 — правый нейтральный элемент; но с другой стороны, $v_0 u_0 = u_0$, поскольку v_0 — левый нейтральный элемент; таким образом, элемент $u_0 = v_0$ есть нейтральный элемент (т. е. одновременно и левый, и правый).

3. Мы установили, что A — унитарное кольцо; для доказательства того, что это — тело, достаточно показать, что всякий ненулевой элемент обладает обратным.

Уравнения $ax = u_0$ и $x'a = u_0$ имеют единственные решения α и α', и

$$\alpha' = \alpha' u_0 = \alpha' (a\alpha) = (\alpha' a) \alpha = u_0 \alpha = \alpha.$$

Элемент α', являющийся одновременно левым и правым обратным элементом, будет обратным к a.

4. Разумеется, речь идет о бесконечном кольце, ибо, в силу предыдущего, всякое конечное кольцо без делителей нуля является телом. Кольцо целых чисел не есть тело.

1.20. 1. R — аддитивная абелева группа. С другой стороны, умножение действительного числа x на рациональное число λ удовлетворяет аксиомам векторного пространства:

$$\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y, \qquad (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x,$$

ибо в R умножение дистрибутивно относительно сложения;

$$\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x,$$

ибо в R умножение ассоциативно;

$$1x = x,$$

ибо рациональное число 1 служит единицей поля R.

2. Множество Φ есть подмножество векторного пространства $\mathcal{F}$ над R отображений интервала $[0, 1]$ в R. Чтобы показать, что Φ есть векторное пространство над R, мы покажем, что оно является векторным подпространством пространства $\mathcal{F}$, т. е. аддитивной подгруппой, устойчивой относительно внешнего умножения (проверять аксиомы внешнего умножения в Φ не нужно, поскольку уже известно, что они выполняются в $\mathcal{F}$).

Если f и g — две функции из Φ, т. е. если f и g принимают конечное число значений, то, очевидно, и разность $f-g$ принимает конечное число значений, и значит, принадлежит Φ. Следовательно, Φ является подгруппой аддитивной группы $\mathcal{F}$.

Точно так же, если f принимает только конечное число значений, то λf тоже принимает конечное число значений, т. е. принадлежит Φ; Φ устойчиво относительно внешнего умножения.

3. Доказательство проводится так же, как и доказательство п. 2, поскольку E снова является частью векторного пространства $\mathcal{F}$. Если f и g — функции из E, то f непрерывна на $\complement D_1$, а g — на $\complement D_2$, где множества D_1 и D_2 счетны. Функции f и g непрерывны одновременно на множестве $(\complement D_1) \cap (\complement D_2) = \complement (D_1 \cup D_2)$; но тогда и разность $f-g$ непрерывна на этом множестве. Множество $D_1 \cup D_2$, как объединение двух счетных множеств, счетно (элементам из D_1 поставим в соответствие четные натуральные числа, а элементам из D_2, не принадлежащим D_1, — нечетные). Функция $f-g$, непрерывная на дополнении счетного множества, принадлежит E, чем доказано, что E есть подгруппа аддитивной группы $\mathcal{F}$. Наконец, функции f и λf непрерывны для одних и тех же значений, поэтому функция λf принадлежит множеству E вместе с функцией f. Таким образом, множество E устойчиво относительно внешнего умножения.

Множество E, будучи аддитивной подгруппой пространства $\mathcal{F}$, устойчивой относительно внешнего умножения, является векторным подпространством пространства $\mathcal{F}$, а значит, и векторным пространством над R.

4. Обозначим через $\{x_j\}$ решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (S), а через $\{0\}$ — множество $(0, 0, \ldots, 0)$.

Сумма двух решений $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ и произведение решения на число будут элементами из Σ, т. е. будут решениями системы (S), поскольку

$$\sum_j a_{ij}(x_j + x'_j) = \sum_j a_{ij}x + \sum_j a_{ij}x'_j = 0$$

$$\sum_j a_{ij}(\lambda x_j) = \lambda \sum_j a_{ij}x_j = 0.$$

Сложение является законом абелевой группы, поскольку для этого закона выполняются следующие свойства.

1) Ассоциативность: $[\{x_j\} + \{x'_j\}] + \{x''_j\} = \{x_j + x'_j + x''_j\} = \{x_j\} + [\{x'_j\} + \{x''_j\}]$.

2) Существует нейтральный элемент: множество $\{0\}$ является решением системы (S) и нейтральным элементом относительно сложения.

3) Существует симметричный элемент: если $\{x_j\}$ — решение системы (S), то $\{-x_j\}$ — тоже решение, и $\{x_j\} + \{-x_j\} = \{0\}$.

4) Коммутативность: $\{x_j\}+\{x'_j\}=\{x_j+x'_j\}=\{x'_j\}+\{x_j\}$.

Наконец, остается проверить аксиомы, относящиеся к умножению на рациональное число. Легко установить, что выполняются свойства:

1) дистрибутивность относительно сложения в Σ, поскольку $\lambda[\{x_j\}+\{x'_j\}]=\lambda\{x_j+x'_j\}=\{\lambda x_j+\lambda x'_j\}=\lambda\{x_j\}+\lambda\{x'_j\}$;

2) дистрибутивность относительно сложения в Q, поскольку $(\lambda+\mu)\{x_j\}=\{(\lambda+\mu)x_j\}=\{\lambda x_j+\mu x_j\}=\{\lambda x_j\}+\{\mu x_j\}=$ $=\lambda\{x_j\}+\mu\{x_j\}$;

3) ассоциативность, так как $\lambda[\mu\{x_j\}]=\lambda\{\mu x_j\}=\{\lambda\mu x_j\}=$ $=(\lambda\mu)\{x_j\}$;

4) $1\{x_j\}=\{1x_j\}=\{x_j\}$.

1.21. 1. Множество $\mathscr{E}$ является подкольцом, если оно удовлетворяет условиям:

$$f\in\mathscr{E} \quad \text{и} \quad g\in\mathscr{E}\Rightarrow f-g\in\mathscr{E} \quad \text{и} \quad fg\in\mathscr{E}$$

(см. введение п. 2, III).

Эти условия выполняются для множеств $\mathscr{P}$ и $\mathscr{N}$, но не выполняются для $\mathscr{P}_n$ или $\mathscr{Q}_n$, ибо произведение двух многочленов степени n есть многочлен степени $2n$; они не выполняются также и для множества $\mathscr{U}$, ибо

$$f(0)=1 \quad \text{и} \quad g(0)=1\Rightarrow(f-g)(0)=0.$$

Подкольцо $\mathscr{B}$ коммутативного кольца $\mathscr{A}$ есть идеал, если оно удовлетворяет условию:

$$f\in\mathscr{B}\Rightarrow\varphi f\in\mathscr{B}, \quad \forall\varphi\in\mathscr{A}.$$

Множество $\mathscr{N}$ есть идеал, поскольку

$$f(0)=0\Rightarrow(\varphi f)(0)=\varphi(0)f(0)=0, \quad \forall\varphi\in\mathscr{F}.$$

$\mathscr{P}$ не будет идеалом, поскольку полиномиальная функция имеет конечное число нулей, а при умножении ее на функцию φ, имеющую бесконечное число нулей, получаем функцию также с бесконечным числом нулей, т. е. не полиномиальную (можно например, взять $\varphi(0)=0$ и $\varphi(t)=t\sin(1/t)$ при $t\neq0$).

2. Множество $\mathscr{E}$ есть векторное подпространство, если оно составляет аддитивную подгруппу и устойчиво относительно внешнего умножения (введение, п. 2, III).

Множества $\mathscr{P}$ и $\mathscr{N}$ удовлетворяют этим условиям, потому что они, являясь подкольцами, представляют собой аддитивные подгруппы и устойчивы относительно внешнего умножения.

Согласно п. 1 $\mathscr{U}$ не является аддитивной подгруппой и, значит, не является векторным подпространством.

$\mathscr{P}_n$ образует векторное подпространство, поскольку линейная комбинация многочленов степени не выше n, есть многочлен степени не выше n.

$\mathscr{Q}_n$ не будет векторным подпространством, ибо оно не содержит нулевую функцию — нейтральный элемент пространства $\mathscr{F}$.

РАЗДЕЛ 2

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Задачи опираются на определения и результаты глав IV, V и VI книги II Курса математики Ш. Пизо и М. Заманского. Считаются также известными результаты второго раздела главы IV книги IV.

Идеалы кольца многочленов. Всякий идеал многочленов является главным, т. е. состоит из кратных одного многочлена.

Приложения. 1) Многочлены, составленные в виде суммы произвольных кратных заданных многочленов $A_1, \ldots, A_n$, образуют идеал; все многочлены идеала кратны н. о. д., скажем, D, многочленов $A_1, \ldots, A_n$.

2) Многочлен D принадлежит предыдущему идеалу, и стало быть, существуют такие многочлены $U_1, U_2, \ldots, U_n$, что

$$D = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_nU_n.$$

В частности, если $n = 2$, то найдется единственная пара U_1, U_2, удовлетворяющая двум условиям:

$$\deg U_1 < \deg A_2 - \deg D, \qquad \deg U_2 < \deg A_1 - \deg D.$$

3) Общие кратные многочленов $A_1, \ldots, A_n$ образуют идеал; все они кратны н. о. к. многочленов $A_1, \ldots, A_n$.

Многочлены Лагранжа. Для заданных чисел x_i и y_i существует единственный многочлен A степени не выше $n-1$, обладающий тем свойством, что $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$A(x_i) = y_i.$$

Он определяется равенством

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\prod\limits_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Комплексные числа. 1) Множество C комплексных чисел является полем.

2) Отображение $z \to \bar{z}$, которое каждому комплексному числу ставит в соответствие его сопряженное, есть изоморфизм C на себя, т. е.

$$\overline{(x+y)} = \bar{x} + \bar{y}, \qquad \overline{(-x)} = -\bar{x}, \qquad \overline{(xy)} = \bar{x}\bar{y}, \qquad \overline{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

3) Комплексные числа с модулем 1 составляют мультипликативную группу, изоморфную аддитивной группе действительных чисел по модулю 2π. Этот результат доказывается в анализе с использованием свойств комплексной показательной функции. Мы будем считать известным следующее. Аргу-

мент комплексного числа с модулем 1 есть действительное число θ, определенное с точностью до 2π; при этом

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \quad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{(e^{i\theta})},$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta.$$

4) Любое комплексное число может быть записано в виде

$$z = re^{i\theta} \qquad (r \geqslant 0 \text{ — действительное}).$$

Применение комплексных чисел в геометрии. Векторное пространство C над полем действительных чисел изоморфно R^2; точки плоскости могут быть определены комплексными числами; точка, соответствующая некоторому комплексному числу, называется его изображением.

В частности, всякой функции $z \to z' = f(z)$ соответствует геометрическое преобразование изображений M и M' этих чисел; так,

$z' = z + a$ — перенос (сдвиг),

$z' = az$ — подобие с центром O,

$z' = \bar{z}$ — симметрия относительно действительной оси,

$z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ — инверсия с полюсом O и симметрия относительно действительной оси.

Свойства многочленов с комплексными коэффициентами. 1) Многочлен имеет по крайней мере один нуль (теорема Даламбера). Отсюда вытекает, что любой многочлен может быть единственным образом представлен в виде произведения множителей первого порядка (простые множители).

2) Элементарные симметрические функции нулей x_i многочлена $\sum\limits_{p=0}^{n} a_p x^p$ являются простыми функциями коэффициентов этого многочлена, а именно,

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Разложение рациональной дроби на простейшие. 1) Разложение единственно. Этот результат часто используется для получения свойств разложения; так, например, из единственности разложения следует, что если коэффициенты дроби действительны, то для каждого члена разложения имеется сопряженный; если дробь — четная, то для каждого члена существует член, полученный из него заменой на $-x$; аналогичный результат имеет место и для нечетной дроби.

2) Если x_0 — простой полюс рациональной дроби A/B, то коэффициент λ элемента разложения $\lambda/(x - x_0)$ есть

$$\lambda = \left[\frac{(x - x_0)A(x)}{B(x)}\right]_{x=x_0} = \frac{A(x_0)}{B'(x_0)}.$$

3) Разложение относительно кратного полюса x_0 порядка α дроби $A/(x - x_0)^{\alpha}B_1$ можно получить, если вначале сделать замену $z = x - x_0$, а затем найти частное порядка $\alpha - 1$ от деления по возрастающим степеням многочлена $A(x_0 + z)$ на многочлен $B_1(x_0 + z)$.

4) Иногда бывает проще, найдя некоторое количество коэффициентов, закончить вычисления, задавая переменному хорошо подобранные частные значения; тогда неизвестные коэффициенты будут решением системы линейных уравнений (метод неопределенных коэффициентов).

2.01. Остатки от деления многочлена A на $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$ равны r_1, r_2 и r_3. Выразить через r_1, r_2, r_3 остаток R от деления A на произведение $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

2.02. Рассматриваемые многочлены принадлежат кольцу $R[x]$ многочленов над полем R действительных чисел.

Найти многочлен A наименьшей степени и такой, что A делится на x^2+1, а $A-1$ — на x^3+1.

Обобщение: может ли существовать такой многочлен A, кратный B, чтобы $A-1$ было кратно C, где B и C — заданные многочлены?

2.03. Показать, что если a и b — два взаимно простых многочлена, то н. о. д. многочленов a и c совпадает с н. о. д. многочленов a и bc.

В частности, как будет выглядеть результат, когда

1) a делит произведение bc,

2) a взаимно просто с c?

2.04. Показать, что для заданных не равных между собой действительных чисел a и b и натурального n найдутся единственные многочлены P и Q, такие, что

$$\deg P < 2n, \qquad \deg Q < 2n,$$
$$(x-a)^{2n} P(x) + (x-b)^{2n} Q(x) = 1;$$

вывести отсюда равенства

$$Q(x) = P(a+b-x), \qquad P(x) = Q(a+b-x).$$

Будут ли выполняться последние равенства, если не накладывать условий на степени P и Q?

2.05. Предположим, что многочлен A от двух переменных x и y, имеющий комплексные коэффициенты, удовлетворяет условию

$$A(x, y) = A(y, x).$$

Показать, что если A делится на $x-y$, то есть если существует такой многочлен Q, что

$$A(x, y) = (x-y)\,Q(x, y),$$

то A делится на $(x-y)^2$.

2.06. Рассмотрим в кольце $R[u]$ многочленов с действительными коэффициентами следующее отношение эквивалентности:

$$p \sim q \Leftrightarrow p-q \quad \text{кратно} \quad u^2-1.$$

1. Показать, что эта эквивалентность согласуется с операциями в $R[u]$, и следовательно, определяет на фактормножестве E структуру кольца. (Можно воспользоваться упражнением 1.12 или же воспроизвести рассуждения курса: Пизо и Заманский, Алгебра, гл. V, 1-й раздел.)

2. Каждый класс эквивалентности представляется содержащимся в нем многочленом первой или нулевой степени; с помощью этих многочленов выразить сумму и произведение двух элементов из E, т. е. двух классов, и показать, что E имеет делители нуля.

3. Указать в E обратимые элементы. Найти условие, при котором уравнение $AX + B = 0$ с заданными A и B и неизвестным элементом X из E имеет единственное решение.

4. Показать, что если $D_1 D_2 = 0$, то уравнение

$$(X - D_1)(X - D_2) = 0$$

второй степени имеет по крайней мере четыре решения.

2.07. Найти корни уравнения

$$x^8 + x^4 + 1 = 0:$$

1. Решая систему

$$x^4 = u, \qquad u^2 + u + 1 = 0.$$

2. Разлагая многочлен $x^8 + x^4 + 1$ в произведение множителей 2-й степени с действительными коэффициентами.

2.08. Вычислить $\cos \pi/5$:

1. Используя уравнение $z^5 + 1 = 0$.

2. Выразив по формуле Муавара $\cos 5\alpha$ через $\cos \alpha$ и убедившись, что полученное уравнение имеет кратные корни. Можно ли предвидеть эту особенность?

2.09. *Биномиальные уравнения.* Пусть a, b и u — заданные комплексные числа. Рассмотрим уравнение

$$(z - a)^n = u(z - b)^n. \qquad \text{(E)}$$

1. Показать, что оно эквивалентно системе

$$\frac{z-a}{z-b} = x, \qquad x^n = u.$$

Вычислить в явном виде корни для частного случая $a = j$, $b = j^2$, $u = 1$ и $n = 6$ (число j, $j^3 = 1$, определено в решении задачи 2.07); проверить полученный результат, разлагая обе части уравнения и решая его непосредственно.

2. Показать, что точки M, изображающие на комплексной плоскости корни z уравнения (E), в зависимости от значений $|u|$ лежат на окружности или на прямой.

Как при $n \geqslant 3$ следует выбрать числа a, b и u, чтобы все корни уравнения были действительными?

2.10. Напомним, что корни n-й степени из единицы суть числа

$$z_k = e^{2k\pi i/n} = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

1. Показать, что корни n-й степени из единицы образуют группу Γ, изоморфную аддитивной группе Z_n целых чисел по

модулю n (т. е. факторгруппе группы Z по отношению: $x \sim y$, если $x-y$ кратно n).

2. Степени элемента $z_k \in \Gamma$ образуют подгруппу Γ_k. Как надо выбрать k, чтобы Γ_k совпадала с Γ?

2.11. *Прямое исследование множества корней n-й степени из единицы.* Исследуем свойства множества решений уравнения

$$z^n - 1 = 0,$$

не пользуясь явным выражением корней, а предполагая лишь известным, что уравнение имеет n различных корней.

1. Показать, что множество G_n корней n-й степени из единицы есть мультипликативная группа.

2. Показать, что если z — корень n-й степени из единицы, то множество целых относительных чисел r, для которых $z^r = 1$, состоит из кратных делителя r_0 числа n (z^{-r} считаем обратным к z^r). Вывести отсюда, что мультипликативная группа степеней z изоморфна аддитивной группе Z_{r_0} целых чисел по модулю r_0.

3. Показать, что если n — простое, то G_n порождается последовательными степенями произвольного элемента, отличного от 1.

4. Показать, что если $n = p^\alpha$, где p — простое, то число элементов z из G_n, не порождающих группу G_n, равно $p^{\alpha-1}$.

5. Показать, что если n_1 и n_2 взаимно просты, то группы G_{n_1} и G_{n_2} не имеют иных общих элементов, кроме единицы; вывести отсюда, что если степени элементов u и v порождают соответственно G_{n_1} и G_{n_2}, то степени произведения uv порождают группу $G_{n_1 n_2}$.

6. Показать, что группа G_n порождается последовательными степенями некоторых ее элементов (можно воспользоваться разложением n на простые сомножители) и изоморфна аддитивной группе Z_n целых чисел по модулю n.

2.12. Пусть заданы $2n$ комплексных чисел a_p, где индекс p меняется от $-n$ до $n-1$. Рассмотрим $2n$ комплексных чисел

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{p=-n}^{n-1} a_p e^{ipq\pi/n},$$

где индекс q также меняется от $-n$ до $n-1$.

1. Показать, что тогда

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{q=-n}^{n-1} b_q e^{-ipq\pi/n}.$$

2. Вычислить b_q в случае $a_p = e^{i\alpha p}$, где α — заданное действительное число.

3. Вычислить b_q, когда

$$a_p = \cos \alpha p = \frac{1}{2} (e^{i\alpha p} + e^{-i\alpha p}).$$

Записать a_{-n} как функцию от b_q и показать, что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2n} \sin \frac{x}{n} \sum_{q=-n}^{n-1} \frac{1}{\cos q\pi/n - \cos x/n}.$$

2.13. Дробно-линейная функция f определяется на множестве C' — объединении множества C комплексных чисел и элемента ∞ — следующим образом:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

если z — комплексное число, отличное от $-\frac{d}{c}$,

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \qquad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

(a, b, c, d — комплексные числа, удовлетворяющие условиям $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$), и наконец,

$$f(z) = \frac{az+b}{d} \quad \text{для} \quad z \in C,$$

$$f(\infty) = \infty,$$

если a, b, d — комплексные числа, удовлетворяющие условию $ad \neq 0$.

Напомним, что композиция функций определяет во множестве G дробно-линейных функций закон группы.

1. Функции из G суть биекции множества C' на себя.

2. Единственная функция из G, переводящая более чем два элемента множества C' в себя, есть тождественная функция.

3. Если z_1, z_2, z_3 — заданные различные комплексные числа, то существует, и притом только одна, такая функция $\varphi \in G$, что

$$\varphi(z_1) = 0, \qquad \varphi(z_2) = \infty, \qquad \varphi(z_3) = 1.$$

4. Показать, используя функции, определенные в п. 3, что если z_1, z_2, z_3, z_4 преобразованы посредством функции $f \in G$ в Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, то

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z_2} : \frac{Z_4 - Z_1}{Z_4 - Z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

5. Всякая функция g, для которой предыдущее свойство выполняется при любых z_1, z_2, z_3, z_4, есть функция из G.

Существует, и притом единственная, функция $h \in G$, переводящая тройку различных комплексных чисел z_1, z_2, z_3 в тройку различных комплексных чисел Z_1, Z_2, Z_3.

2.14. Для того чтобы точки A, B, C, изображающие на комплексной плоскости числа a, b, c, образовывали равносторонний треугольник, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0.$$

2.15. 1. Если точки m и M комплексной плоскости соответствуют друг другу при инверсии с полюсом O и степенью k, то их аффиксы z и Z удовлетворяют соотношению

$$z\bar{Z}=k \qquad (\bar{Z} \text{ — сопряженное к } Z).$$

2. Пусть медианы треугольника $M_1M_2M_3$ пересекают описанную окружность в точках P_1, P_2, P_3; аффиксы точек M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3 и центры тяжести G треугольника обозначим через z_1, z_2, z_3, u_1, u_2, u_3, z. Показать, что тогда

$$3z-(z_1+z_2+z_3)=0,$$

$$\frac{1}{z-u_1}+\frac{1}{z-u_2}+\frac{1}{z-u_3}=0.$$

3. Показать, что существует, быть может, два треугольника, медианы которых пересекают описанную окружность в трех заданных точках.

2.16. Точкам A, B, C на плоскости соотносятся аффиксы a, b, c относительно прямоугольной системы xOy и числа

$$u=a+bj+cj^2, \qquad v=a+bj^2+cj,$$

где j означает число $e^{2\pi i/3}$ — кубичный корень из единицы.

1. Как преобразуются числа u и v, когда точки A, B, C подвергаются переносу, вращению вокруг точки O или гомотетии с центром O? (В курсе: Пизо и Заманский, Книга IV, гл. IV, 2-й раздел, можно видеть, как преобразуются аффиксы в этих различных случаях.)

Показать, что если числа u/v и u'/v', соответствующие точкам A, B, C и A', B', C', равны, то треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

2. Охарактеризовать треугольники ABC, для которых одно из двух чисел u или v равно нулю.

3. Показать, что для того, чтобы $AB=AC$, необходимо и достаточно, чтобы v было равно нулю или чтобы отношение u/v было действительным числом.

Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы треугольник ABC был равнобедренным.

2.17. Рассматриваются преобразования T плоскости, определенные следующим образом: точке m с аффиксом z соответствует точка M, аффикс Z которой имеет значение

$$Z=\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — фиксированные комплексные числа, удовлетворяющие условию $ad-bc\neq 0$.

Преобразования T плоскости составляют группу Γ, в которой операцией является композиция преобразований; группа Γ изоморфна группе G дробно-линейных преобразований во множестве комплексных чисел. Операция в Γ будет обозначаться мультипликативно.

1. Найти образ действительной оси при преобразовании T_0 вида

$$Z = \frac{z-i}{z+i}.$$

2. Преобразования T, сохраняющие действительную ось (обозначим такое преобразование буквой R), могут быть определены посредством дробно-линейных функций с действительными коэффициентами. Преобразования R образуют подгруппу Γ_1 группы Γ.

3. Преобразования T, сохраняющие круг C с центром в O и радиусом 1, могут быть представлены в виде

$$T = T_0 R T_0^{-1},$$

где R — произвольное преобразование из Γ_1. Эти преобразования образуют подгруппу Γ_2 группы Γ.

4. Найти выражение дробно-линейной функции t, определяющей преобразование T из Γ_2, при помощи коэффициентов a, b, c, d функции r, определяющей преобразование типа R.

Показать, что в общем случае функция t может быть представлена в форме

$$t(z) = \alpha \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

где α — число с модулем 1, $\bar{z}_0$ — сопряженное к z_0; и обратно, всякая функция такого типа определяет преобразование из Γ_2.

2.18. Вычислить произведения

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{2ik\pi/n} - 1\right), \qquad S = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.$$

2.19. 1. A — многочлен 3-й степени с комплексными коэффициентами; предположим, что существуют такие числа λ и μ, что

$$A(\lambda z + \mu) = A(z).$$

Показать, что λ равно j или j^2 и что

$$A(z) = a(z - z_0)^3 + d,$$

где a, z_0, d — комплексные числа.

2. Предположим теперь, что A — многочлен n-й степени с комплексными коэффициентами и что существуют такие комплексные числа λ и μ, что

$$A(\lambda z + \mu) = A(z).$$

Показать, что если A не имеет делителей, инвариантных при замене $\lambda z+\mu$ на z, то

$$A(z)=a(z-z_0)^n+d.$$

Чему равны в этом случае значения λ и μ?

3. Найти все многочлены 6-й степени, инвариантные при замене $\lambda z+\mu$ на z.

2.20. Предположим, что уравнение

$$x^3+px+q=0, \qquad (E)$$

где p и q — действительные числа, удовлетворяет последовательно одному из следующих условий:

1. (E) имеет двойной корень;

2. (E) имеет комплексный корень с заданной действительной частью a;

3. (E) имеет комплексный корень с заданным модулем r.

В каждом из этих случаев найти условия, которым должны удовлетворять числа p и q, и указать метод, позволяющий получить корни в явном виде. (Можно воспользоваться соотношениями между коэффициентами многочлена и нулями этого многочлена.)

2.21. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 корни уравнения

$$x^3+px+q=0. \qquad (E)$$

1. Найти многочлен A, нули которого являются квадратами корней уравнения (E).

2. Используя выражение симметрических функций корней уравнения (E) в виде функций от p и q, показать, что квадрат разности двух корней уравнения (E) может быть выражен в виде функции от p и q и от третьего корня.

3. Найти многочлен B, нули которого являются квадратами разностей корней уравнения (E).

2.22. Найти λ, при котором многочлен A, определенный формулой

$$A(x)=x^4-x^3+\lambda x^2+6x-4,$$

имеет нули x_1 и x_2, произведение которых равно 2. (Можно выразить симметрические функции нулей многочлена A через сумму и произведение x_1 и x_2 с одной стороны, и двух других нулей с другой.)

2.23. Разложить на простейшие рациональную дробь R, определенную формулой

$$R(x)=\frac{x^4+3x^2+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}.$$

2.24. 1. Обозначим через A многочлен степени n с комплексными коэффициентами, а через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его нули (не обязательно различные), и пусть A' — производный многочлен.

Показать, что все полюсы дроби A'/A — простые и что разложение A'/A на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i};$$

при этом считается, что нуль порядка α многочлена A фигурирует в сумме α раз.

Вычислить суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - a}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - a)^2},$$

где a — заданное комплексное число, а числа x_i, как и выше, не обязательно различны.

2. Используя предыдущие результаты, вычислить сумму

$$S = \sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2},$$

где числа x_i — нули многочлена $x^4 - x + 1$.

2.25. Разложить на простейшие рациональную дробь R, определенную формулой

$$R(x) = \frac{1}{x^{2q} + 1}.$$

Получить разложение на дроби с действительными коэффициентами, сложив члены, отвечающие сопряженным полюсам.

2.26. Все рассматриваемые многочлены принадлежат кольцу $R[x]$.

1. Предположим, что целая часть рациональной дроби A/B равна нулю и что ее полюсы x_i действительны и различны.

Показать, что для того, чтобы нули многочлена A были действительны и различны и разделяли полюсы дроби, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты λ_i элементов $1/(x - x_i)$ в разложении A/B имели одинаковые знаки.

2. Если все нули многочленов P и Q действительны (но не обязательно различны) и если k — положительное число, то все нули многочлена $P'Q + kPQ'$ действительны (P' и Q' — производные многочлены для P и Q).

Для проведения этого исследования можно применить результаты задачи 2.24.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.01. Остаток r_i от деления A на $x - x_i$ есть постоянная, равная $A(x_i)$, поскольку $A(x) = (x - x_i)Q_i(x) + r_i$. Многочлен R имеет не более чем вторую степень и удовлетворяет равенству

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)Q(x) + R(x),$$

откуда

$$R(x_i)=A(x_i)=r_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Тогда на основании свойств многочленов Лагранжа (Пизо и Замапский, Алгебра, гл. IV, 5-й раздел) можем записать

$$(x)=r_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+r_2\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+r_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

2.02. Многочлен A должен удовлетворять условию

$$A=(x^2+1)U=(x^3+1)V+1,$$

откуда

$$(x^2+1)U-(x^3+1)V=1.$$

Многочлены x^2+1 и x^3+1 взаимно просты; предыдущее равенство выражает теорему Безу, согласно которой существует пара (U, V) многочленов минимальной степени; эту пару можно получить, отыскивая н. о. д. последовательным делением:

$$x^3+1=x(x^2+1)-(x-1), \qquad x^2+1=(x+1)(x-1)+2;$$

откуда

$$2=x^2+1-(x+1)[x(x^2+1)-(x^3+1)],$$

$$U=-\frac{1}{2}(x^2+x-1), \qquad V=-\frac{1}{2}(x+1),$$

$$A=-\frac{1}{2}(x^2+1)(x^2+x-1).$$

В общем случае получаем

$$A=BU=CV+1.$$

Равенство $BU-CV=1$, в силу теоремы Безу, возможно тогда и только тогда, когда многочлены B и C взаимно просты.

2.03. Рассмотрим идеалы $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, образованные соответственно многочленами $ua+vc$ и $xa+ybc$, где u, v, x, y — произвольные многочлены. Равенство $xa+ybc=xa+(yb)c$ влечет включение $\mathcal{J}_2\subset\mathcal{J}_1$. А так как a и b взаимно просты, то найдутся такие многочлены α и β, что $a\alpha+b\beta=1$. Отсюда

$$ua+vc=ua+v(a\alpha+b\beta)c=(u+v\alpha c)a+(v\beta)bc.$$

Таким образом, всякий многочлен из $\mathcal{J}_1$ принадлежит $\mathcal{J}_2$, т. е. $\mathcal{J}_1\subset\mathcal{J}_2$.

Два идеала $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ совпадают; но эти идеалы образованы многочленами, кратными н. о. д.: первый — н. о. д. многочленов a и c, а второй — н. о. д. многочленов a и bc; поэтому эти два н. о. д. совпадают.

Если a делит bc, то н. о. д. a и bc равен a; но тогда н. о. д. a и c тоже равен a, и значит, a делит c.

Если же a взаимно просто с c, то оба н. о. д. равны 1. Если многочлен взаимно прост с двумя множителями, то он взаимно прост и с их произведением.

2.04. Многочлены $(x-a)^{2n}$ и $(x-b)^{2n}$ взаимно просты. Тогда, как известно (теорема Безу), существует единственная пара (P, Q), удовлетворяющая заданным условиям.

Положив $x = a + b - u$, получим уравнение

$$(b-u)^{2n} P(a+b-u) + (a-u)^{2n} Q(a+b-u) = 1.$$

Многочлены P_1 и Q_1, определенные равенствами

$$P_1(u) = Q(a+b-u), \qquad Q_1(u) = P(a+b-u),$$

имеют степень, строго меньшую $2n$, и образуют другую пару, удовлетворяющую заданным условиям, а поскольку такая пара может быть только одна, то

$$P_1(u) = Q(a+b-u) = P(u), \qquad Q_1(u) = P(a+b-u) = Q(u).$$

Если R и S — два многочлена, удовлетворяющие уравнению

$$(x-a)^{2n} R(x) + (x-b)^{2n} S(x) = 1,$$

то они удовлетворяют и уравнению

$$(x-a)^{2n} [R(x) - P(x)] + (x-b)^{2n} [S(x) - Q(x)] = 0.$$

$(x-a)^{2n}$ делит произведение $(x-b)^{2n}[S(x)-Q(x)]$ и взаимно просто с $(x-b)^{2n}$; значит, $(x-a)^{2n}$ делит второй сомножитель, и следовательно,

$$S(x) = Q(x) + (x-a)^{2n} q(x), \quad R(x) = P(x) - (x-b)^{2n} q(x),$$

где q — произвольный многочлен. Заменив x на $a+b-u$, получаем

$$S(a+b-u) = Q(a+b-u) + (b-u)^{2n} q(a+b-u) = \\ = P(u) + (u-b)^{2n} q(a+b-u).$$

Для того чтобы $S(a+b-u) = R(u)$, необходимо и достаточно, чтобы $q(a+b-u) = -q(u)$; это соотношение выполняется не всегда, поскольку q — произвольный многочлен.

2.05. По условию,

$$A(x, y) = A(y, x), \qquad A(x, y) = (x-y)\, Q(x, y),$$

откуда $(x-y)\,Q(x, y) = (y-x)\,Q(y, x)$, и значит, если $x - y \neq 0$, то $Q(x, y) + Q(y, x) = 0$.

Это равенство, справедливое при $x \neq y$, имеет место и при $x = y$. Действительно, задав переменному y некоторые числовые значения y_i, видим, что многочлены $Q(x, y_i) + Q(y_i, x)$ тождественно равны нулю; с помощью интерполяционной формулы Лагранжа убеждаемся, что коэффициенты при различных степенях y многочлена $Q(x, y) + Q(y, x)$ являются линейными комбинациями этих многочленов; поэтому они тождественно равны нулю; следовательно, и многочлен $Q(x, y)+Q(y, x)$ равен нулю. Таким образом, $Q(y, y)+Q(y, y)=0$ и $Q(y, y)=0$.

Теперь будем рассматривать Q как многочлен $\bar{Q}$ от x, коэффициентами которого будут многочлены от y; когда x принимает значение y, $\bar{Q}$ обращается в 0, и значит, делится на $x-y$. Коэффициентами частного при делении $\bar{Q}$ на $x-y$ являются полиномиальные функции от коэффициентов многочлена $\bar{Q}$ и от $-y$ (потому что в $x-y$ коэффициент при x равен 1); следовательно, коэффициенты частного являются многочленами от y, и частное есть многочлен от двух переменных x и y, скажем, $R(x, y)$:

$$Q(x, y)=(x-y) R(x, y);$$

отсюда

$$A(x, y)=(x-y)^2 R(x, y).$$

2.06. 1. Множество кратных многочлена u^2-1 есть идеал кольца $R[u]$, а тогда, как известно, фактор-множество имеет структуру кольца (раздел 1, задача 1.12, п. 4).

Вопрос может быть изучен и непосредственно, как это делается в курсе; дополнительное предположение о том, что многочлен неприводим в $K[x]$, не играет никакой роли при доказательстве требуемых здесь свойств.

2. Если a — многочлен рассматриваемого класса A, то он эквивалентен остатку r от деления a на u^2-1 по убывающим степеням, потому что $a-r$ кратно u^2-1; таким образом, класс A содержит многочлен r степени нуль или единица. Любой другой многочлен из A получается прибавлением к r многочлена, кратного u^2-1, и имеет степень по меньшей мере равную двум. Отождествим класс A и многочлен r.

Возьмем теперь произвольные классы $A=a_1+a_2u$ и $B=$ $=b_1+b_2u$, где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа; тогда

$$A+B=a_1+b_1+(a_2+b_2) u,$$
$$AB=a_1b_1+a_2b_2+(a_1b_2+a_2b_1) u$$

($a_2b_2u^2$ заменяется эквивалентным многочленом a_2b_2). В частности,

$$(1-u)(1+u)=0,$$

и при этом ни один из элементов $1-u$ и $1+u$ не равен нулю; это делители нуля.

3. Очевидно, класс $A=1$ является единицей в E. Далее, имеем $(a_1+a_2u)(a_1-a_2u)=a_1^2-a_2^2$; если $a_1^2-a_2^2\neq 0$, то элемент

$$\frac{a_1}{a_1^2-a_2^2}-\frac{a_2}{a_1^2-a_2^2} u$$

и является обратным к a_1+a_2u.

Если $a_1^2 - a_2^2 = 0$, то $a_1 + a_2 u$ есть делитель нуля и не имеет обратного.

Если A — обратимый элемент, то уравнение $AX + B = 0$ имеет единственное решение, ибо

$$AX + B = 0 \Leftrightarrow A^{-1}(AX + B) = 0 \Leftrightarrow X = -A^{-1}B.$$

Пусть A — делитель нуля; тогда существует такой элемент A', что $AA' = 0$. Если при этом уравнение имеет решение X_0, то оно имеет их бесконечно много, поскольку для произвольного элемента P имеем

$$A(X_0 + PA') = AX_0 + PAA' = AX_0,$$

значит, $X_0 + PA'$ — решение вместе с X_0. (Достаточно взять в качестве P действительное r; в самом деле, любой элемент P из E может быть записан в виде $r + sA$, где r и s — два действительных числа, и тогда $PA' = rA'$.)

4. Уравнение, о котором идет речь, имеет корнями элементы D_1 и D_2. Перемножив сомножители левой части, получим $X^2 - X(D_1 + D_2) = 0$; значит, уравнение имеет также корни $X = 0$ и $X = D_1 + D_2$.

2.07. 1. Второе уравнение системы имеет следующие решения:

$$u_1 = j, \quad u_2 = j^2, \quad \text{где} \quad j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

при этом $j^3 = 1$. Система заменяется двумя уравнениями:

$$x^4 = j, \quad x^4 = j^2.$$

j есть корень 4-й степени из j, так как $j^4 = j^3 j = j$; следовательно, j — решение первого уравнения; другие решения этого уравнения получаются умножением на корни 4-й степени из 1:

$$x_1 = j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = ij = \frac{-\sqrt{3} - i}{2},$$

$$x_3 = -x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = -ij = \frac{\sqrt{3} + i}{2}.$$

Тем же способом можно убедиться, что корнями уравнения $x^4 = j^2$ являются числа j^2, ij^2, $-j^2$, $-ij^2$. Заметим еще, что если x — корень уравнения $x^4 = j$, то сопряженное число $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению $(\bar{x})^4 = \bar{j} = j^2$; стало быть, эти корни имеют вид $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$.

2. Очевидно, имеем

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1),$$

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1),$$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Окончательно,

$$(x^8+x^4+1)=$$
$$=\left(x^2-x\sqrt{3}+1\right)\left(x^2+x\sqrt{3}+1\right)(x^2-x+1)\,(x^2+x+1).$$

Решение уравнения сводится к решению четырех уравнений 2-го порядка; применяя классические методы, получаем последовательно корни x_4 и $\bar{x}_4$, x_2 и $\bar{x}_2$, x_3 и $\bar{x}_3$, x_1 и $\bar{x}_1$.

2.08. 1. Корни уравнения $z^5=-1=e^{i\pi}$ равны числам

$$z_k=e^{i\,(2k+1)\,\pi/5} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

За исключением $z_2=-1$, эти числа являются корнями уравнения

$$\frac{z^5+1}{z+1}=z^4-z^3+z^2-z+1=z^2\left[z^2+\frac{1}{z^2}-\left(z+\frac{1}{z}\right)+1\right]=0.$$

Классический метод решения возвратных уравнений приводит к замене этого уравнения системой

$$u=z+\frac{1}{z},$$
$$u^2-u-1=0.$$

Значению $z=e^{i\alpha}$ соответствует значение $u=e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=$ $=2\cos\alpha$; стало быть, корни последнего уравнения равны $2\cos\pi/5$ и $2\cos 3\pi/5$; но, с другой стороны, корнями этого уравнения являются числа $1+\sqrt{5}>0$ и $1-\sqrt{5}<0$; а так как $0<\pi/5<\pi/2<3\pi/5<\pi$, то

$$2\cos\frac{\pi}{5}=1+\sqrt{5}, \qquad 2\cos\frac{3\pi}{5}=1-\sqrt{5}.$$

2. По формуле Муавра,

$$\cos 5\alpha=\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\sin^2\alpha+5\cos\alpha\sin^4\alpha=$$
$$=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha.$$

Если $\alpha=\pi/5$, то $\cos 5\alpha=\cos\pi=-1$, и поэтому $x=\cos\pi/5$ является корнем уравнения

$$16x^5-20x^3+5x+1=0.$$

Аналогично убеждаемся, что это уравнение имеет также корни $\cos 3\pi/5$ и $\cos\pi=-1$; значит, левая часть уравнения делится на $x+1$:

$$16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)\,(16x^4-16x^3-4x^2+4x+1)=$$
$$=(x+1)\,(4x^2-2x-1)^2.$$

Числа $\cos\pi/5$ и $\cos 3\pi/5$ являются нулями многочлена $4x^2-$ $-2x-1$ и, в частности, $\cos\pi/5$ — положительный нуль, равный $(1+\sqrt{5})/2$.

Уравнение $\cos 5\alpha = \cos 5\alpha_0$ относительно $\cos\alpha$ имеет 5 корней: $\cos(\alpha_0 + 2k\pi/5)$, соответствующих значениям $k = 0, 1, 2, 3, 4$. В частном случае $\alpha_0 = \pi/5$ эти корни равны

$$\cos\pi/5,\ \cos 3\pi/5,\ \cos 5\pi/5 = -1,\ \cos 7\pi/5 = \\ = \cos 3\pi/5,\ \cos 9\pi/5 = \cos\pi/5,$$

и, следовательно, корни $\cos\pi/5$ и $\cos 3\pi/5$ уравнения $z^5+1=0$ — двойные.

2.09. 1. b не может быть корнем уравнения; значит, можно в качестве нового неизвестного взять

$$\frac{z-a}{z-b} = x;$$

x есть решение уравнения $x^n = u$. Тогда решение уравнения сводится к нахождению корней x_k степени n из числа u; каждому корню x_k соответствует значение z, и притом единственное, за исключением случая $x_k = 1$, т. е. $u = 1$. В последнем случае находим только $n-1$ значений z; но при $u = 1$ исходное уравнение имеет степень $n-1$, и, следовательно, других корней не имеет. Наконец, заметим, что все полученные значения z различны, потому что z есть дробно-линейная и потому инъективная функция от x.

Уравнение $x^6 = 1$ имеет 6 корней, один из которых равен 1; остальные 5 корней и соответствующие им значения z равны:

$$x_1 = -j^2,\quad x_2 = j,\quad x_3 = -1,\quad x_4 = j^2,\quad x^5 = -j,$$

$$z_1 = -2,\quad z_2 = -1,\quad z_3 = -\frac{1}{2},\quad z_4 = 0,\quad z^5 = 1.$$

Разложив обе части уравнения и приведя подобные члены, получим

$$2z^5 + 5z^4 - 5z^2 - 2z = z(z^2-1)(2z^2+5z+2) = 0,$$

откуда вновь находим полученные выше корни.

2. Обозначим через A, B и M изображения чисел a, b, z; тогда

$$\frac{MA}{MB} = \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = |x| = \sqrt[n]{|u|}.$$

Если $|u| \neq 1$, точки M лежат на окружности C — геометрическом месте точек, отношение расстояний которых до точек A и B равно $\sqrt[n]{|u|}$. Если $|u| = 1$, точки M лежат на перпендикуляре к середине отрезка AB. Если все корни действительны, то это означает, что их изображения M лежат на оси Ox; а так как все корни различны, то при $n \geqslant 3$ их изображения не могут лежать на прямой и на окружности одновременно. Таким образом, для того чтобы все корни были действительны, необходимо и достаточно, чтобы ось Ox была перпендикуляром к середине отрезка AB, т. е.

$$|u|=1, \quad a \text{ и } b \text{ — сопряженные.}$$

2.10. 1. Комплексные числа с модулем 1 образуют мультипликативную группу. В том, что Γ — подгруппа, можно убедиться следующим образом:

а) Γ содержит единицу, поскольку $z_0=1$;

б) Γ содержит симметричные всех элементов $z_k z_{n-k}=1$;

в) Γ содержит произведение двух элементов, ибо

$$z_h z_k = \begin{cases} z_{h+k}, & \text{если} \quad h+k<n, \\ z_{h+k-n}, & \text{если} \quad h+k \geqslant n. \end{cases}$$

Отображение $k \to z_k$ есть биекция Z_n на Γ (элемент из Z_n, т. е. класс эквивалентности, отождествляем с содержащимся в нем целым k, заключенным между 0 и n), эта биекция (в силу в)) будет изоморфизмом группы; действительно, в Z_n сумма $(h)+(k)$ есть класс элемента $h+k$, т. е. $(h+k)$, если $h+k<n$, и $(h+k-n)$, если $h+k \geqslant n$.

2. Убеждаемся, как и в п. 1, что

а) Γ_k содержит $z_k^n=1$,

б) симметричный к z_k^p элемент равен z_k^{n-p} (можно предположить $p<n$),

в) $z_k^p z_k^{p'} = z_k^{p+p'}$, т. е. Γ_k — подгруппа.

Для того чтобы Γ_k было группой Γ, необходимо и достаточно, чтобы n элементов из Γ_k были различны; а поскольку $z_k^n=1$, то должны быть различны элементы $1, z_k, \ldots, z_k^{n-1}$. Если два из них равны между собой, то их частное, являющееся некоторой степенью z_k, равно 1. Значит, для того чтобы Γ_k совпадало с Γ, необходимо и достаточно, чтобы числа z_k^p при $1 \leqslant p \leqslant n-1$ не были равны 1. Но

$$z_k^p = e^{2pk\pi i/n} = 1 \Leftrightarrow kp/n \text{ — целое.}$$

Если бы n было взаимно просто с k и делило kp, то оно делило бы p; но это невозможно, поскольку $p \leqslant n-1$. Если n и k имеют общий делитель $d>1$, то числа n/d и k/d — целые; тогда уравнение $z_k^p=1$ имеет, например, решения $p=n/d$, поскольку в этом случае $\frac{pk}{n}=\frac{k}{d}$ есть целое число. Таким образом, для того чтобы Γ_k совпадала с Γ, необходимо и достаточно, чтобы k было взаимно просто с n. (В частности, если n — простое, то k — произвольное.)

2.11. 1. Достаточно убедиться в том, что частное z'/z двух элементов из G_n есть элемент из G_n; но, как легко видеть, имеем

$$\left(\frac{z'}{z}\right)^n = \frac{z'^n}{z^n} = 1.$$

2. Множество E целых r, удовлетворяющих равенству $z^r = 1$, составляет подгруппу аддитивной группы Z целых чисел; действительно, $r \in E$ и $r' \in E \Rightarrow r' - r \in E$, так как $z^{r'-r} = z^{r'}/z^r = 1$.

Подгруппы группы Z состоят из кратных некоторого натурального числа r_0 *) (см. 1-й раздел, задача 1.12, п. 3). По определению, n принадлежит E; поэтому r_0 является делителем n.

Известно, что соотношение $r' - r \in E$ определяет эквивалентность в Z и что фактормножество Z_{r_0} (по этому отношению) имеет структуру группы (задача 1.12 из 1-го раздела). Отображение, которое всякому классу эквивалентности, определяемому содержащимся в нем неотрицательным целым числом $p < r_0$, ставит в соответствие число z^p, есть изоморфизм Z_r и мультипликативной группы степеней z, поскольку:

а) это отображение биективно;

б) оно сохраняет операцию:

$$z^p z^q = \begin{cases} z^{p+q}, & \text{если} \quad p+q < r_0, \\ z^{p+q-r_0}, & \text{если} \quad p+q \geqslant r_0. \end{cases}$$

3. Если z — элемент из G_n, отличный от 1, то соответствующее число r_0 равно n, ибо оно должно быть делителем n. Группа степеней z имеет n различных элементов, и потому совпадает с G_n.

4. Число r_0, соответствующее элементу $z \in G_n$, есть делитель p^α; стало быть, оно должно быть степенью p, скажем, $r_0 = p^\beta$. Если степени z не порождают G_n, то r_0 строго меньше p^α, и значит, делит $p^{\alpha-1}$; в этом случае z является элементом $G_{p^{\alpha-1}}$. Обратно, никакой элемент из $G_{p^{\alpha-1}}$, очевидно, не порождает группу G_{p^α}. Осталось отметить, что группа $G_{p^{\alpha-1}}$ состоит из $p^{\alpha-1}$ элементов.

5. Если z принадлежит G_{n_1} и G_{n_2}, то число r_0, соответствующее z, служит делителем n_2 и n_1; значит, $r_0 = 1$, и $z = 1$. Пусть элементы u, v порождают соответственно группы G_{n_1} и G_{n_2}. Из равенства $(uv)^r = 1$ вытекает, что $u^r = v^{-r}$. Число $u^r = v^{-r}$ принадлежит как G_{n_1}, так и G_{n_2}. Следовательно, оно равно 1, а r кратно n_1 (ибо n_1 есть наименьшее целое число, при котором $u^r = 1$) и n_2 (n_2 — наименьшее целое число, при котором $v^r = 1$); значит, r кратно произведению $n_1 n_2$. Из этого вытекает, что все степени произведения uv, показатели которых неотрицательны и строго меньше чем $n_1 n_2$, различны между собой. Они очевидно, являются элементами группы $G_{n_1 n_2}$ и следовательно, порождают эту группу.

---

*) r_0 — наименьшее натуральное число подгруппы.

6. Доказательство проведем индукцией по числу h простых множителей числа n. При $h=1$ утверждение верно, ибо в п. 4 мы видели, что $p^{\alpha}-p^{\alpha-1}$ элементов из $G_{p^{\alpha}}$ порождают группу. Допустим, что утверждение доказано для n, имеющего $h-1$ простых сомножителей, и рассмотрим $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_h^{\alpha_h}=n_1n_2$, где $n_1=p_1^{\alpha_1}$ и $n_2=p_2^{\alpha_2}\ldots p_h^{\alpha_h}$.

Числа n_1 и n_2 взаимно просты; по предположению, G_{n_1} и G_{n_2} порождаются степенями некоторых своих элементов; следовательно, в силу п. 5, результат справедлив и для $G_{n_1n_2}=G_n$. Если степени z порождают G_n, то наименьшее целое r, удовлетворяющее равенству $z^r=1$, равно n, и при этих условиях группа степеней z, т. е. G_n, согласно п. 2, изоморфна группе Z_n целых чисел по модулю n.

2.12. 1. В выражении

$$s_p=\sqrt{2n}\sum_{q=-n}^{n-1}b_qe^{-ipq\pi/n}$$

заменим b_q его представлением в виде функции от a_r; получим

$$s_p=\sum_{q=-n}^{n-1}\left(\sum_{r=-n}^{n-1}a_re^{irq\pi/n}\right)e^{-ipq\pi/n}.$$

s_p есть сумма $4n^2$ членов; коммутативность и ассоциативность суммы в C позволяют изменить порядок суммирования:

$$s_p=\sum_{r=-n}^{n-1}a_r\left(\sum_{q=-n}^{n-1}e^{i(r-p)q\pi/n}\right).$$

Коэффициент A_r при a_r является суммой $2n$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $z=e^{i(r-p)\pi/n}$, первым членов z^{-n} и последним членом z^{n-1}. Если знаменатель z не равен 1, т. е. если $r\neq p$, то

$$A_r=\frac{z\cdot z^{n-1}-z^{-n}}{z-1}=\frac{z^n-z^{-n}}{z-1}=0,$$

ибо $z^{2n}=1$.

Наконец, в A_p все члены равны 1, а их сумма A_p имеет значение $2n$; следовательно,

$$s_p=2na_p=\sqrt{2n}\sum_{q=-n}^{n-1}b_qe^{-ipq\pi/n}.$$

И после деления на $2n$ получаем требуемую формулу.

2. В данном случае

$$a_p=e^{i\alpha p}\Rightarrow b_q=\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{p=-n}^{n-1}e^{ip(\alpha+q\pi/n)}.$$

Величина $\sqrt{2n}b_q$ снова является суммой членов геометрической прогрессии, знаменатель u которой равен $e^{i(\alpha+q\pi/n)}$, первый член равен u^{-n}, а последний u^{n-1}, и следовательно,

$$\sqrt{2n}\, b_q = \frac{u^n - u^{-n}}{u-1}.$$

Так как

$$u^n = e^{i(n\alpha+\pi q)} = e^{iq\pi}e^{in\alpha},$$

$$u^{-n} = e^{-iq\pi}e^{-in\alpha} = e^{iq\pi}e^{-in\alpha},$$

$$u^n - u^{-n} = e^{iq\pi}(e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}) = (-1)^{|q|}2i\sin n\alpha,$$

$$u - 1 = e^{i(\alpha+q\pi/n)} - 1 = e^{{}^1\!/_2 i(\alpha+q\pi/n)}\left[e^{{}^1\!/_2 i(\alpha+q\pi/n)} - e^{-{}^1\!/_2 i(\alpha+q\pi/n)}\right] = $$
$$= e^{{}^1\!/_2 i(\alpha+q\pi/n)}\, 2i\sin({}^1\!/_2\alpha + q\pi/(2n)),$$

то

$$\sqrt{2n}\, b_q = (-1)^{|q|}e^{-i({}^1\!/_2\alpha+q\pi/2n)}\frac{\sin n\alpha}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + q\pi/2n\right)} =$$
$$= (-1)^{|q|}\sin n\alpha\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha + q\pi/2n\right) - i\right\}.$$

3. Величина b_q линейно зависит от чисел a_p; поэтому значение b_q для $a_p = \cos\alpha p$ равно полусумме значений b_q для $a_p = e^{i\alpha p}$ и $a_p = e^{-i\alpha p}$; эти два последних значения b_q обозначим через b'_q и b''_q.

Значение b'_q было найдено в п. 2, а b''_q получается из b'_q заменой α на $-\alpha$ (а не i на $-i$, ибо коэффициенты сумм, комплексные числа, заменились бы в этом случае на сопряженные):

$$\sqrt{2n}\, b'_q = (-1)^{|q|}\sin n\alpha\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha + q\pi/2n\right) - i\right],$$

$$\sqrt{2n}\, b''_q = (-1)^{|q|}\sin n\alpha\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha - q\pi/2n\right) + i\right],$$

$$\sqrt{2n}\, b_q = \frac{1}{2}(-1)^{|q|}\sin n\alpha\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha + q\pi/2n\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha - q\pi/2n\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(-1)^{|q|}\frac{\sin n\alpha\sin\alpha}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + q\pi/2n\right)\sin\left(\frac{1}{2}\alpha - q\pi/2n\right)} =$$
$$= (-1)^{|q|}\frac{\sin n\alpha\sin\alpha}{\cos q\pi/n - \cos\alpha}.$$

Обратно, $a_{-n} = \cos n\alpha$ выражается в виде функции от b_q:

$$\cos n\alpha = \frac{\sin n\alpha\sin\alpha}{2n}\sum_{q=-n}^{n-1}\frac{(-1)^{|q|}e^{iq\pi}}{\cos q\pi/n - \cos\alpha} =$$
$$= \frac{\sin n\alpha\sin\alpha}{2n}\sum_{q=-n}^{n-1}\frac{1}{\cos q\pi/n - \cos\alpha}.$$

Тогда замена переменных $x = n\alpha$ дает

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2n} \sin \frac{x}{n} \sum_{q=-n}^{n-1} \frac{1}{\cos q\pi/n - \cos x/n}.$$

2.13. 1. Убедимся в том, что уравнение $Z = f(z)$ имеет, и притом единственное, решение z, каково бы ни было $Z \in C'$.

Если $c \neq 0$ то, очевидно, получаем

$$z = \frac{dZ - b}{a - cZ} \quad \text{для} \quad Z \in C, \quad Z \neq \frac{a}{c};$$

$$z = \infty \quad \text{для} \quad Z = \frac{a}{c};$$

$$z = -\frac{d}{c} \quad \text{для} \quad Z = \infty.$$

Если же $c = 0$, то

$$z = \frac{dZ - b}{a} \quad \text{для} \quad Z \in C;$$

$$z = \infty \quad \text{при} \quad Z = \infty.$$

2. Исследуем уравнение $z = f(z)$.

Если $c \neq 0$, то элемент ∞ не может быть его решением; решениями будут комплексные z, которые удовлетворяют также уравнению

$$cz^2 + (d - a) z - b = 0,$$

и значит, имеется не более двух решений.

Если $c = 0$, то ∞ будет решением; относительно комплексных решений имеем

$$z = \frac{az + b}{d} \Leftrightarrow z (a - d) + b = 0,$$

и значит, существует не более одного комплексного решения, а всего не более двух решений, кроме случая $a - d = b = 0$, когда функция f будет тождественным отображением.

3. Функция φ определяется однозначно; действительно,

$$\varphi(z_1) = 0 \Leftrightarrow az + b = a(z - z_1),$$

$$\varphi(z_2) = \infty \Leftrightarrow cz + d = c(z - z_2),$$

$$\varphi(z_3) = \frac{a}{c} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

и окончательно имеем

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

4. Если φ и ψ — функции из G, переводящие соответственно z_1, z_2, z_3 и Z_1, Z_2, Z_3 в 0, ∞, 1, то функция $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ переводит 0,

∞, 1 в себя; это функция из G, поскольку G — группа; она имеет более 2 инвариантных элементов, значит, является тождественной, и поэтому

$$\psi \circ f = \varphi.$$

Записав, что образы числа z_4 посредством этих функций совпадают, получаем

$$\frac{Z_4 - Z_1}{Z_4 - Z_2} : \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2};$$

это равенство равносильно искомому.

5. Пусть z_1, z_2, z_3 — фиксированные числа, а z — произвольное; положим

$$Z_1 = g(z_1), \qquad Z_2 = g(z_2), \qquad Z_3 = g(z_3), \qquad Z = g(z).$$

По условию,

$$\frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} : \frac{Z_3 - Z_1}{Z_3 - Z_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

или, в обозначениях п. 4, $\psi(Z) = (\psi \circ g)(z) = \varphi(z)$. Отсюда, в силу биективности ψ, получаем $g = \psi^{-1} \circ \varphi$. Функция g, будучи суперпозицией функций из G, является функцией из G.

Только что полученный результат справедлив, в частности, для функций из G; поэтому искомая функция h удовлетворяет равенству $(\psi \circ h)(z) = \varphi(z)$; следовательно, это есть функция $\psi^{-1} \circ \varphi$.

2.14. Для того чтобы треугольник ABC был равносторонним, необходимо и достаточно, чтобы

$$AB = AC \quad \text{и} \quad (AB,\ AC) = (Ox,\ AC) - (Ox,\ AB) = \pm \frac{\pi}{3};$$

выражая эти величины через числа a, b и c, получаем

$$|b - a| = |c - a| \qquad \text{и} \qquad \arg(c - a) - \arg(b - a) = \pm \frac{\pi}{3};$$

откуда

$$c - a = (b - a)\, e^{i\pi/3} \qquad \text{или} \qquad c - a = (b - a)\, e^{-i\pi/3}.$$

Итак, искомое необходимое и достаточное условие имеет вид:

$$[c - a - (b - a)\, e^{i\pi/3}]\,[c - a - (b - a)\, e^{-i\pi/3}] = 0,$$

или, после раскрытия скобок,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

2.15. 1. Если $k > 0$, то соотношение $z\bar{Z} = k$ эквивалентно

$$Om \cdot OM = k \qquad \text{и} \qquad (Ox,\ Om) = (Ox,\ OM) \qquad (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Точки m и M гомологичны в инверсии с центром O и степенью k.

Утверждение справедливо и при $k < 0$ (инверсия может быть разложена на инверсию со степенью $|k| = -k$ и симметрию относительно O).

2. Центр тяжести G треугольника $M_1M_2M_3$ (рис. 2) может быть определен из соотношения

$$\overrightarrow{M_1G} = \frac{2}{3}\overrightarrow{M_1I} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_1M_3}),$$

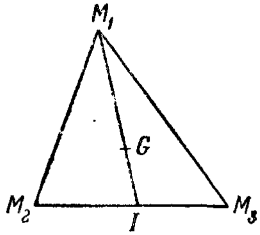

Рис. 2.

которое, если пользоваться только векторами с началом в O, имеет вид

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$

(это равенство может быть получено быстрее с использованием понятия и свойств барицентра). Полученное векторное равенство эквивалентно соотношению

$$3z = z_1 + z_2 + z_3. \qquad (1)$$

А мы знаем, что длины векторов $\overrightarrow{GP_1}$ и $\overrightarrow{GM_1}$, $\overrightarrow{GP_2}$ и $\overrightarrow{GM_2}$, $\overrightarrow{GP_3}$ и $\overrightarrow{GM_3}$ удовлетворяют соотношениям

$$GP_1 \cdot GM_1 = GP_2 \cdot GM_2 = GP_3 \cdot GM_3.$$

Точки P_1, P_2, P_3 и M_1, M_2, M_3 гомологичны в инверсии с полюсом G и степенью k, являющейся степенью G относительно описанной окружности. Если поместить начало в G, то аффиксы этих точек равны $u_1 - z$, $u_2 - z$, $u_3 - z$, $z_1 - z$, $z_2 - z$, $z_3 - z$ и, как известно,

$$(u_\alpha - z)(\overline{z_\alpha - z}) = k \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Равенство (1) может быть записано в виде

$$(z - z_1) + (z - z_2) + (z - z_3) = 0$$

или

$$(\overline{z - z_1}) + (\overline{z - z_2}) + (\overline{z - z_3}) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{z - u_1} + \frac{1}{z - u_2} + \frac{1}{z - u_3} = 0. \qquad (2)$$

3. Обратно, если аффиксы u_1, u_2, u_3, z четырех точек P_1, P_2, P_3, G удовлетворяют соотношению (2), то существует треугольник, медианы которого пересекаются в G и пересекают описанную окружность в P_1, P_2, P_3.

Прямые несущие векторы $\overrightarrow{GP_1}$, $\overrightarrow{GP_2}$, $\overrightarrow{GP_3}$, пересекают окружность $P_1P_2P_3$ в трех точках M_1, M_2, M_3 с аффиксами z_1, z_2, z_3. А тогда, как известно,

$$(z - u_i)(\overline{z - z_i}) = k \quad (k \text{ — действительное}) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Следовательно,

$$\sum_i \overline{(z - z_i)} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_i (z - z_i) = 0.$$

Точка G есть центр тяжести треугольника $M_1M_2M_3$.

Если через u_1, u_2, u_3 обозначены аффиксы заданных точек, то центры тяжести искомых треугольников имеют аффиксами корни уравнения (2); это уравнение имеет вторую степень относительно z и имеет два различных или совпадающих решения.

Имеется особый случай, когда три заданные точки лежат на одной прямой, и тогда задача не имеет решения.

2.16. 1. Если подвергнуть точки A, B, C переносу, то аффиксы a, b, c заменятся на

$$a_1 = a + t, \qquad b_1 = b + t, \qquad c_1 = c + t,$$

а для u и v имеем

$$u_1 = a + bj + cj^2 + t(1 + j + j^2) = u,$$
$$v_1 = a + bj^2 + cj + t(1 + j^2 + j) = v$$

(ибо, как легко видеть, $1 + j + j^2 = 0$).

Если подвергнуть точки A, B, C вращению на угол α с центром в O, то новые аффиксы будут равны

$$a_2 = ae^{i\alpha}, \qquad b_2 = be^{i\alpha}, \qquad c_2 = ce^{i\alpha},$$

откуда

$$u_2 = ue^{i\alpha}, \qquad v_2 = ve^{i\alpha}.$$

Если произвести гомотетию с центром в O и коэффициентом k, то

$$a_3 = ka, \quad b_3 = kb, \quad c_3 = kc, \quad u_3 = ku, \quad v_3 = kv.$$

Таким образом, относительно произвольного преобразования подобия на плоскости, полученного в результате проведения предыдущих преобразований, отношение u/v является инвариантом. При произвольном же движении инвариантами служат, кроме того, $|u|$ и $|v|$.

В отношении обратного заметим, что осуществляя последовательно перенос, вращение и гомотетию с центром в O, можно преобразовать треугольник ABC в треугольник DEO, где O — начало координат, а E — произвольно выбранная точка оси Ox; при этом отношение u/v, соответствующее треугольнику DEO, будет равно отношению u/v, соответствующему треугольнику ABC.

Сравним теперь треугольники DEO и $D'EO$, преобразованные из ABC и $A'B'C'$. Для треугольников DEO и $D'EO$ отношения u/v и u'/v' равны, но если d, d', e — аффиксы точек D, D', E, то

$$\frac{d + ej}{d + ej^2} = \frac{d' + ej}{d' + ej^2} \Rightarrow d = d'.$$

Таким образом, треугольники DEO и $D'EO$ совпадают, а треугольники ABC и $A'B'C'$, подобные треугольнику DEO, подобны.

2. Рассмотрим условие $u=0$ и $v=0$ для треугольника $OB'C'$, полученного из ABC переносом (это не меняет значений u и v), при котором точка A переходит в точку O. Очевидно,

$$u=0 \Rightarrow b'+c'j=0, \qquad v=0 \Rightarrow b'+c'j^2=0.$$

Точка B' получена из точки C' вращением на угол $\pm\pi/3$ с центром O, и следовательно, треугольник ABC — равносторонний.

3. Переносом и вращением с центром O треугольник ABC может быть преобразован в такой треугольник $A'B'C'$ (рис. 3), что ось Oy является перпендикуляром к середине стороны $B'C'$; тогда аффиксы точек B' и C' будут действительными числами b' и $-b'$, и

$$u'=a'+b'(j-j^2)=a'+ib'\sqrt{3},$$

$$v'=a'+b'(j^2-j)=a'-ib'\sqrt{3}.$$

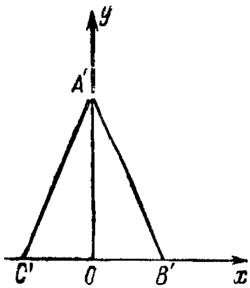

Рис. 3.

В этом случае для того, чтобы $A'B'=A'C'$, необходимо и достаточно, чтобы аффикс a' точки A' был чисто мнимым числом.

Если v' равно нулю, то $a'=ib'\sqrt{3}$ — чисто мнимое; в противном случае отношение u'/v' определено и действительно; это и является необходимым и достаточным условием того, чтобы a' было чисто мнимым.

Если $v'=0$, то $v=0$; если же $v'\neq 0$, то и $v\neq 0$, и кроме того, $u'/v'=u/v$. Стало быть, для того чтобы $AB=AC$, необходимо и достаточно, чтобы v было равно нулю или чтобы отношение u/v было действительным.

Только что полученный результат показывает, что $BA=BC$ в том и только в том случае, если либо $b+cj^2+aj=jv=0$, либо $\dfrac{b+cj+aj^2}{b+cj^2+aj}=\dfrac{j^2u}{jv}$ есть действительное число.

Аналогичный результат имеем для случая $CA=CB$.

Таким образом, для того чтобы треугольник ABC был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы либо v было равно нулю, либо чтобы одно из отношений u/v, ju/v, j^2u/v было действительным, т. е. чтобы u^3/v^3 было действительным числом.

2.17. 1. Если z действительно, то $z-i$ и $z+i$ — сопряженные, и

$$|Z|=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1.$$

Обратно, пусть $|Z| = 1$, т. е. $Z = e^{i\varphi}$; тогда

$$\frac{z-i}{z+i} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow z = i\frac{e^{i\varphi}+1}{1-e^{i\varphi}} = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \quad \text{если} \quad e^{i\varphi} \neq 1.$$

Итак, образ действительной оси есть окружность с центром O и радиусом 1 (исключая точку с аффиксом 1).

2. В данном случае дробно-линейная функция, определяющая преобразование, относит действительному z действительное Z. Обозначим через z_1 некоторое действительное число, а через Z_1 — соответствующее ему значение функции; $Z - Z_1$ есть дробно-линейная функция от z, обращающаяся в нуль для значения z_1; следовательно,

$$Z - Z_1 = k(z - z_1) \qquad \text{или} \qquad Z - Z_1 = k\frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

В первом случае число $k = (Z - Z_1)/(z - z_1)$ при действительном z будет частным двух действительных чисел, и значит, будет действительным числом. Во втором случае отношение

$$\frac{z - z_1}{Z - Z_1} = \frac{z}{k} - \frac{z_2}{k}$$

действительно при действительных значениях z; задавая z значение 0, видим, что z_2/k есть действительное число, а задавая z значение 1, видим, что $1/k$ — действительное число. В обоих случаях получаем дробно-линейную функцию, все коэффициенты которой действительны.

Поскольку дробно-линейные преобразования с действительными коэффициентами образуют подгруппу G_1 группы G, и группы G и Γ изоморфны, то, очевидно, множество Γ_1 — образ G_1 — является подгруппой группы Γ.

3. Если преобразование T сохраняет окружность с центром O и радиусом 1, то преобразование $T_0^{-1}TT_0$ сохраняет действительную ось Ox. В самом деле,

$$Ox \xrightarrow{T_0} C \xrightarrow{T} C \xrightarrow{T_0^{-1}} Ox,$$

где $A \xrightarrow{S} B$ означает, что преобразование S переводит A в B. Преобразование $T_0^{-1}TT_0$ есть преобразование R, и значит, $T = T_0RT_0^{-1}$. Обратно, преобразование этого типа сохраняет окружность C, так как $C \xrightarrow{T_0^{-1}} Ox \xrightarrow{R} Ox \xrightarrow{T_0} C$. Чтобы показать, что эти преобразования образуют подгруппу Γ_2 группы Γ, достаточно убедиться в том, что $T'T^{-1}$ принадлежит Γ_2, если T' и T принадлежит Γ_2. Имеем

$$T = T_0RT_0^{-1} \Rightarrow T^{-1} = T_0R^{-1}T_0^{-1},$$

$$T' = T_0R'T_0^{-1},$$

$$T'T^{-1} = (T_0R'T_0^{-1})(T_0R^{-1}T_0^{-1}) = T_0R'(T_0^{-1}T_0)R^{-1}T_0^{-1} = T_0(R'R^{-1})T_0^{-1},$$

а так как Γ_1 есть группа, то $R'R^{-1}$ есть преобразование группы Γ_1, и следовательно, $T'T^{-1}$ есть преобразование группы Γ_2. Можно было бы провести рассуждения и непосредственно, показав, что T^{-1}, а затем $T'T^{-1}$ сохраняют окружность C.

4. Если R определяется функцией r:

$$Z = \frac{az+b}{cz+d},$$

где числа a, b, c, d действительны, то T определяется функцией t:

$$Z = \frac{[c-b+i(a+d)]z+b+c+i(a-d)}{[-(b+c)+i(a-d)]z+b-c+i(a+d)},$$

где a, b, c, d — произвольные действительные числа. Таким образом,

$$Z = \frac{\lambda z+\mu}{-\bar{\mu}z-\bar{\lambda}} = -\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\,\frac{z+\mu/\lambda}{(\bar{\mu}/\bar{\lambda})z+1} = \alpha\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

где

$$\lambda = c-b+i(a+d), \qquad \mu = b+c+i(a-d),$$

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}, \qquad z_0 = -\frac{\mu}{\lambda};$$

при этом α, как частное $-\lambda/\bar{\lambda}$ двух сопряженных чисел, имеет модуль 1.

Так как a, b, c, d — произвольные действительные числа, то λ и μ — произвольные комплексные числа, а следовательно, α — произвольное комплексное число с модулем 1, и z_0 также произвольно. Стало быть, если α и z_0 заданы, то можно определить действительные числа a, b, c, d так, чтобы соответствующая функция t имела вид

$$t(z) = \alpha\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

а это означает, что t определяет преобразование из Γ_2; значит, записанная форма характеризует эти преобразования.

2.18. Числа $e^{2ik\pi/n}$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, являются корнями n-й степени из единицы, исключая 1; значит, они служат нулями многочлена A, определенного формулой

$$A(x) = \frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+\ldots+x^{n-1}.$$

Разложение A на простые множители имеет вид

$$A(x) = \prod_{1}^{n-1}(x-e^{2ik\pi/n}).$$

Отсюда получаем

$$n = A(1) = (-1)^{n-1}\prod_{1}^{n-1}(e^{2ik\pi/n}-1) = (-1)^{n-1}P.$$

Имеем, далее,

$$e^{2ik\pi/n} - 1 = e^{ik\pi/n}\left(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}\right) = e^{ik\pi/n}\, 2i \sin k\pi/n,$$

$$P = \prod_{1}^{n-1}\left(2ie^{ik\pi/n} \sin k\pi/n\right) = 2^{n-1} i^{n-1} S \prod_{1}^{n-1} e^{ik\pi/n}.$$

Аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей; стало быть, аргумент произведения

$$\prod_{1}^{n-1} e^{ik\pi/n}$$

равен

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{n} \sum_{1}^{n-1} k = \frac{\pi}{n} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)\pi}{2},$$

и, следовательно,

$$\prod_{1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{i(n-1)\pi/2} = i^{n-1},$$

$$P = 2^{n-1} i^{n-1} S i^{n-1} = 2^{n-1} S (-1)^{n-1},$$

$$S = (-1)^{n-1} \frac{P}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2.19. 1. λ не может быть равно 1, потому что если $\mu \neq 0$, то $A(z+\mu) \neq A(z)$ (ибо если бы $A(z+\mu) = A(z)$, то μ было бы периодом, и многочлен A принимал бы любое значение бесконечное число раз). Тогда соотношение $Z = \lambda z + \mu$ может быть записано в виде $Z - z_0 = \lambda(z - z_0)$, где через z_0 обозначено число $\mu/(1-\lambda)$.

Если B — многочлен, определенный равенством $B(u) = A(z_0 + u)$, то он инвариантен относительно замены u на λu. Допустим, что $B(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$; тогда

$$B(\lambda u) = \lambda^3 au^3 + \lambda^2 bu^2 + \lambda cu + d.$$

Многочлены, определенные этими формулами, тождественно совпадают лишь в том случае, если $a(\lambda^3 - 1) = 0$, $b(\lambda^2 - 1) = 0$, $c(\lambda - 1) = 0$. Поскольку B имеет степень 3, то $a \neq 0$; следовательно, $\lambda^3 - 1 = 0$; λ не может быть равно 1; стало быть, оно равно j или j^2; тогда из двух других уравнений получаем $b = c = 0$. Таким образом,

$$B(u) = au^3 + d,$$

$$A(z) = B(z - z_0) = a(z - z_0)^3 + d.$$

2. Точно такое же рассуждение, что и в п. 1, показывает, что многочлен B, определенный, как и выше, равенством $B(u) = A(z_0 + u)$, инвариантен относительно замены u на λu. Если

$B(u)=\sum_{0}^{n} b_k x^k$, то, отождествляя $B(u)$ и $B(\lambda u)$, получаем условия

$$(\lambda^k-1)\,b_k=0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

А так как b_n отлично от нуля, то λ является корнем n-й степени из единицы.

Первый случай: $\lambda^k-1\neq 0$ для $0<k<n$. Тогда все коэффициенты b_k, кроме b_0 и b_n, равны нулю, и значит,

$$A(z)=B(z-z_0)=b_n(z-z_0)^n+b_0.$$

В этом случае $\lambda=e^{2ik\pi/n}$, где целое k взаимно просто с n (см. задачу 2.10), и $\mu=z_0(1-\lambda)$.

Второй случай: $\lambda^k=1$ для некоторого натурального $k<n$. Пусть p — наименьшее натуральное число с этим свойством; тогда, как мы знаем, целые k, удовлетворяющие равенству $\lambda^k=1$, кратны p (в частности, это верно для n). Коэффициенты b_k обращаются в нуль при k, не кратных p, и произвольны, если k кратно p. Следовательно, B есть многочлен от u^p; разлагая его на простые множители, получаем

$$B(u)=b_n\prod_{1}^{m}(u^p-u_i),$$

где u_i — произвольные комплексные числа; отсюда

$$A(z)=b_n\prod_{1}^{m}[(z-z_0)^p-u_i].$$

Каждый из сомножителей (u^p-u_i) инвариантен при замене u на λu, и стало быть, каждый из сомножителей в A инвариантен при замене z на $\lambda z+z_0(1-\lambda)$.

3. Если $n=6$, то корни из единицы (исключая 1) равны -1, j, j^2, $-j$, $-j^2$. Мы применим результаты из п. 2; будем пользоваться также принятыми там обозначениями. Если $\lambda=-1$, то $p=2$, и A является произведением 3-х многочленов от $(z-z_0)^2$:

$$A(z)=a\,[(z-z_0)^2-u_1]\,[(z-z_0)^2-u_2]\,[(z-z_0)^2-u_3].$$

Если λ равно j или j^2, то $p=3$, и A является произведением 2-х многочленов определенного в п. 1 вида:

$$A(z)=a\,[(z-z_0)^3-u_1]\,[(z-z_0)^3-u_2].$$

Наконец, для $-j$ и $-j^2$ значение p равно 6 и

$$A(z)=a\,(z-z_0)^6+d.$$

2.20. 1. Уравнение (E) имеет двойной корень, если многочлен x^3+px+q и производный многочлен $3x^2+p$ имеют общий нуль. Запишем результат деления первого на второй:

$$x^3+px+q=\frac{1}{3}x(3x^2+p)+\frac{2}{3}px+q;$$

общий нуль обращает остаток в нуль, и значит, равен $-3q/2p$. Остается записать, что он является нулем одного из многочленов, скажем, $3x^2+p$;

$$3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2+p=0\Rightarrow 4p^3+27q^2=0.$$

Проделанные вычисления не имеют силы при $p=0$, но результат остается верным.

Уравнение имеет двойной корень $-3q/2p$; третий корень может быть найден исходя из того, что сумма трех корней равна нулю (ибо коэффициент при x^2 равен нулю):

$$2\left(-\frac{3q}{2p}\right)+x_3=0\Rightarrow x_3=\frac{3q}{p}.$$

2. Коэффициенты многочлена x^3+px+q действительны; если комплексное число x_1 служит корнем уравнения (E), то сопряженное число $\bar{x}_1$ тоже будет корнем. Пусть x_3 — третий корень; тогда

$$x_1+\bar{x}_1+x_3=0\Rightarrow x_3=-(x_1+\bar{x}_1)=-2\operatorname{Re}x_1.$$

Для того чтобы (E) имело комплексный корень с действительной частью, равной a, необходимо и достаточно, чтобы $-2a$ было корнем этого уравнения и чтобы два других корня были комплексными. Стало быть необходимо, чтобы

$$(-2a)^3+p(-2a)+q=-8a^3-2ap+q=0.$$

Если это условие выполнено, то

$$x^3+px+q=(x+2a)(x^2-2ax+p+4a^2).$$

Два других корня (E) служат корнями уравнения второй степени

$$x^2-2ax+p+4a^2=0.$$

Они комплексны, если $a^2-(p+4a^2)<0$.

Искомые условия имеют вид

$$q=2ap+8a^3,\qquad p>-3a^2.$$

3. Если $q=0$, то ненулевые корни уравнения (E) служат корнями уравнения

$$x^2+p=0;$$

это комплексные числа с модулем r, где $r^2=p$.

Предположим теперь, что q отлично от нуля; тогда для произведения корней уравнения (E) имеем

$$x_1\bar{x}_1x_3 = |x_1|^2 x_3 = -q.$$

Для того чтобы (E) имело комплексный корень с модулем r, необходимо и достаточно, чтобы $-q/r^2$ было корнем и чтобы два других корня были комплексными. Стало быть, необходимо, чтобы

$$\left(-\frac{q}{r^2}\right)^3 + p\left(-\frac{q}{r^2}\right) + q = 0,$$

или

$$q^2 + pr^4 - r^6 = 0.$$

Если это условие выполнено, то

$$x^3 + px + q = \left(x + \frac{q}{r^2}\right)\left(x^2 - \frac{q}{r^2}x + r^2\right).$$

Следовательно, два других корня (E) являются корнями следующего уравнения второй степени:

$$x^2 - \frac{q}{r^2}x + r^2 = 0;$$

они комплексны, если

$$\frac{q^2}{r^4} - 4r^2 < 0.$$

Таким образом, искомые условия имеют вид

$$q^2 + pr^4 - r^6 = 0, \qquad q^2 < 4r^6$$

(условие, полученное при $q = 0$, является частным случаем).

2.21. 1. Уравнение, корни которого являются квадратами корней (E), получается в результате исключения x из двух уравнений системы

$$u = x^2,$$
$$x^3 + px + q = 0.$$

Эта система эквивалентна системе

$$u = x^2,$$
$$x(u + p) + q = 0,$$

откуда и получаем искомое уравнение

$$q^2 = u(u + p)^2.$$

Таким образом, можно взять

$$A(u) = u(u + p)^2 - q^2.$$

Можно было бы также вычислить коэффициенты многочлена A с помощью симметрических функций корней x_1^2, x_2^2 и x_3^2, используя для этого симметрические функции от x_1, x_2, x_3.

например, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=$ $=-2p$, и точно так же для двух других функций.

2. Представим квадрат разности корней в виде

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2.$$

Далее имеем

$$x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_1+x_2=-x_3,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p \Rightarrow x_1x_2=p-x_3(x_1+x_2)=p+x_3^2.$$

Окончательно получаем

$$(x_1-x_2)^2=x_3^2-4(p+x_3^2)=-(4p+3x_3^2).$$

3. Последняя формула из п. 2 показывает, что нулями многочлена B служат числа $-(4p+3x_i^2)$; значит, многочлен B получается из многочлена A, имеющего нули x_i^2, путем замены переменных:

$$v=-(4p+3u) \Leftrightarrow u=-\frac{v+4p}{3}.$$

Следовательно,

$$B(v)=A\left(-\frac{v+4p}{3}\right)=-\frac{v+4p}{3}\left(\frac{v+p}{3}\right)^2-q^2,$$
$$B(v)=-\frac{1}{27}(v^3+6pv^2+9p^2v+4p^3+27q^2).$$

Многочлен B, как и многочлен A, определен лишь с точностью до постоянного множителя, и поэтому множитель $-1/27$ можно опустить.

2.22. Положим

$$x_1+x_2=s, \qquad x_1x_2=p=2, \qquad x_3+x_4=u, \qquad x_3x_4=v.$$

Выразим симметрические функции корней многочлена x_1, x_2, x_3 и x_4 через s, p, u, v, с одной стороны, и через коэффициенты многочлена — с другой; получим

$$\sum x_i=s+u=1,$$
$$\sum x_ix_j=su+v+p=su+v+2=\lambda,$$
$$\sum x_ix_jx_k=pu+sv=2u+sv=-6,$$
$$x_1x_2x_3x_4=pv=2v=-4.$$

Первое, третье и четвертое уравнения позволяют вычислить u и v, а второе — найти λ; получаем

$$v=-2, \qquad s=2, \qquad u=-1, \qquad \lambda=-2.$$

Стало быть, x_1 и x_2 служат корнями уравнения

$$x^2-sx+p=x^2-2x+2=0;$$

точно так же, x_3 и x_4 являются корнями уравнения

$$x^2 - ux + v = x^2 + x - 2 = 0;$$

следовательно,

$$x_1 = 1 + i, \quad x_2 = 1 - i, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -2.$$

Замечание. Этот результат можно также получить, если, исходя из того, что уравнения $A(x) = 0$ и $x^4 A(2/x) = 0$ имеют два общих корня x_1 и x_2, записать, что н. о. д. многочленов в левых частях имеет степень 2, а нули н. о. д. суть x_1 и x_2.

2.23. Очевидно, целая часть дроби равна 1. Числа j и j^2 являются простыми полюсами, а -1 — двойной полюс; поэтому разложение имеет вид

$$R(x) = 1 + \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-j} + \frac{\bar{C}}{x-j^2}.$$

(Коэффициенты C и $\bar{C}$ относительно полюсов j и j^2 сопряжены, так как коэффициенты дроби R действительны; j — кубичный корень из 1.)

Для нахождения чисел A и B можно поступить следующим образом: вначале сделать замену переменного $x + 1 = t$, а затем найти частное от деления по возрастающим степеням до 1-го порядка числителя на знаменатель $t^2 R(-1 + t)$ (мы будем пренебрегать членами степени, большей или равной 2, так как деление производится до 1-го порядка); имеем

$$t^2 R(-1 + t) = \frac{(t-1)^4 + 3(t-1)^2 + 1}{(t-1)^2 + (t-1) + 1} = \frac{5 - 10t + \ldots}{1 - t + \ldots},$$

$$5 - 10t = (1 - t)(5 - 5t) + \ldots$$

Значит, разложение относительно двойного полюса -1 имеет вид

$$\frac{5}{(x+1)^2} - \frac{5}{x+1}.$$

Коэффициент C относительно простого полюса $x - j$ имеет значение

$$C = [(x - j) R(x)]_{x=j} = \left[\frac{x^4 + 3x^2 + 1}{(x+1)^2 (x - j)^2}\right]_{x=j} = \frac{j^4 + 3j^2 + 1}{(1+j)^2 (j - j^2)}.$$

Соотношения $j^3 = 1$ и $1 + j + j^2 = 0$ позволяют упростить выражение, прежде чем заменять j его числовым значением:

$$j^4 + 3j^2 + 1 = j + 3j^2 + 1 = 2j^2,$$

$$(1 + j)^2 = (-j^2)^2 = j^4 = j,$$

$$C = \frac{2j^2}{j(j - j^2)} = \frac{2j}{j - j^2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом,

$$R(x) = 1 + \frac{5}{(x+1)^2} - \frac{5}{x+1} + \frac{1 + i\sqrt{3}/3}{x - j} + \frac{1 - i\sqrt{3}/3}{x - j^2}.$$

Для проверки вычислений проще всего задать x частное значение; если здесь, например, взять $x=0$, то

$$R(0)=1=1+5-5+\frac{1+i\sqrt{3}/3}{-j}+\frac{1-i\sqrt{3}/3}{-j^2}=$$

$$=1-j^2\left(1+\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)-j\left(1-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-2\,\mathrm{Re}\left[j^2\left(1+\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\right].$$

Замечание. В некоторых задачах (в частности, при нахождении примитивной дроби R) используется разложение на простейшие вещественные дроби; для того чтобы получить такое разложение в данном случае, достаточно сложить два последних члена, которые будут сопряженными, если x — действительное число.

Можно также сразу искать разложение в форме

$$R(x)=1+\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{5}{x+1}+\frac{\lambda x+\mu}{x^2+x+1}$$

и получить λ и μ, задавая x конкретные числовые значения; так,

$$x=0\Rightarrow 1=1+\mu\Rightarrow\mu=0,$$

$$x=1\Rightarrow\frac{5}{12}=1+\frac{5}{4}-\frac{5}{2}+\frac{\lambda}{3}\Rightarrow\lambda=2.$$

2.24. 1. Если u есть нуль порядка α многочлена A, то он будет нулем порядка $(\alpha-1)$ многочлена A', и значит, полюсом порядка 1 дроби A'/A; коэффициент U при $1/(x-u)$ в разложении дроби A'/A определяется следующим образом:

$$U=\left[\frac{(x-u)\,A'(x)}{A(x)}\right]_{x=u}=\left\{\frac{(x-u)\left[\frac{(x-u)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}A^{(\alpha)}(u)+\ldots\right]}{\frac{(x-u)^{\alpha}}{\alpha!}A^{(\alpha)}(u)+\ldots}\right\}_{x=u},$$

что получается в результате разложения A' и A по формуле Тейлора. После этого можно разделить числитель и знаменатель на $(x-u)^{\alpha}$ и затем, задав x значение u, получить

$$U=\frac{\frac{1}{(\alpha-1)!}A^{(\alpha)}(u)}{\frac{1}{\alpha!}A^{(\alpha)}(u)}=\alpha.$$

Стало быть, если u есть нуль порядка α многочлена A, то элемент разложения относительно этого полюса равен $\alpha/(x-u)$ и может рассматриваться как сумма α элементов $1/(x-u)$.

Если мы в разложении A'/A зададим x значение a, то получим

$$\frac{A'(a)}{A(a)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a-x_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-a}=-\frac{A'(a)}{A(a)}.$$

Продифференцировав разложение дроби A'/A, получаем разложение для ее производной:

$$\frac{A''(x)A(x)-A'^2(x)}{A^2(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{(x-x_i)^2},$$

и, задав x значение a, находим

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{(x_i-a)^2}=\frac{A'^2(a)-A(a)A''(a)}{A^2(a)}.$$

Разложим $\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}$ на простые элементы; имеем

$$\frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2}=\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}.$$

2. Задавая x значения x_i и складывая, получаем

$$S=\sum_{i=1}^{4}\frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2}=$$

$$=\frac{3}{4}\sum_i\frac{1}{(x_i-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_i\frac{1}{x_i-1}+\frac{3}{4}\sum_i\frac{1}{(x_i+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_i\frac{1}{x_i+1}.$$

Вычисление S сводится к вычислению сумм, рассмотренных в п. 1 (для $a=1$ и $a=-1$); в данном случае

$$\frac{A'(x)}{A(x)}=\frac{4x^3-1}{x^4-x+1} \quad \text{и} \quad \frac{A'^2(x)-A(x)A''(x)}{A^2(x)}=$$

$$=\frac{4x^6+4x^3-12x^2+1}{(x^4-x+1)^2};$$

поэтому $\sum_i\frac{1}{(x_i-1)^2}=-3$, $\sum_i\frac{1}{x_i-1}=-3$, $\sum_i\frac{1}{(x_i+1)^2}=-\frac{11}{9}$, $\sum_i\frac{1}{x_i+1}=\frac{5}{3}$, и, следовательно, $S=-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}-\frac{11}{12}-\frac{5}{12}=$ $=-\frac{13}{3}$.

2.25. Полюсы служат корнями уравнения

$$x^{2q}=-1=e^{i\pi};$$

это числа

$$x_k=e^{i(2k+1)\pi/2q}.$$

Все корни — простые, поэтому разложение дроби R может быть записано в виде

$$R(x)=\sum_{k=0}^{2q-1}\frac{A_k}{x-x_k}.$$

Значение A_k можно найти, взяв для x значение x_k в частном от деления числителя дроби R на производную знаменателя; это дает:

$$A_k = \frac{1}{2qx_k^{2q-1}} = \frac{x_k}{2qx_k^{2q}} = -\frac{x_k}{2q}.$$

Ни один полюс не будет действительным, и значит, полюсы попарно сопряжены, или, более точно, $\bar{x}_k = x_{2q-k-1}$. Легко видеть, что если дробь R имеет действительные коэффициенты, то сопряженным полюсам соответствуют сопряженные коэффициенты; поэтому

$$R(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} + \frac{\bar{A}_k}{x - \bar{x}_k} \right) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k (x - \bar{x}_k) + \bar{A}_k (x - x_k)}{(x - x_k)(x - \bar{x}_k)}.$$

Вычислим в явном виде каждый из членов суммы; имеем

$$A_k (x - \bar{x}_k) + \bar{A}_k (x - x_k) = -\frac{1}{2q} [(x_k - \bar{x}_k) x - 2x_k\bar{x}_k] =$$

$$= -\frac{1}{q} [x \cos [(2k+1)\pi/2q] - 1],$$

$$(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - x(x_k + \bar{x}_k) + x_k\bar{x}_k =$$

$$= x^2 - 2x \cos [(2k+1)\pi/2q] + 1,$$

$$R(x) = -\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{x \cos [(2k+1)\pi/2q] - 1}{x^2 - 2x \cos [(2k+1)\pi/2q] + 1}.$$

Замечания. 1) Последняя формула позволяет без труда вычислить примитивную дроби R.

2) Заменяя x на $-x$, мы переставляем члены разложения с индексом k и $h = q - k - 1$ (действительно, разложение R на простые элементы единственно, и значит, инвариантно, равно как и R, относительно замены $-x$ на x).

2.26. 1. Мы знаем, что

$$\lambda_i = \frac{A(x_i)}{B'(x_i)}.$$

Кроме того, мы знаем, что если n есть степень B, то

$$B(x) = b \prod_{j=1}^{n} (x - x_j), \qquad B'(x_i) = b \prod_{j \neq i} (x_i - x_j).$$

Числа $B'(x_i)$ имеют попарно различные знаки, ибо если заменить x_i на x_{i+1}, то сомножитель $x_i - x_{i+1}$ заменится на противоположный, а другие сомножители сохранят тот же знак (предполагается, что корни x_i пронумерованы в порядке их возрастания). Для того чтобы все λ_i имели одинаковый знак, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $A(x_i)$

была знакопеременной; тогда каждый интервал $]x_i, x_{i+1}[$ содержит по крайней мере один нуль многочлена A (это видно из непосредственного исследования знаков простых сомножителей A); A имеет по крайней мере $(n-1)$ действительных нулей. Но степень A не превосходит $n-1$, ибо, по условию, целая часть дроби A/B равна нулю. Значит, и число нулей многочлена A не может превосходить $(n-1)$. Все нули A действительны, в каждом интервале $]x_i, x_{i+1}[$ имеется один, и только один, и следовательно, они разделяют полюсы.

Обратное получается сразу, а именно, если нули многочлена A действительны и разделяют полюсы x_i, то последовательность $A(x_i)$ будет знакопеременной, и все λ_i будут иметь один и тот же знак.

2. Воспользуемся разложением многочленов P и Q на простые множители:

$$P(x)=\prod_{i=1}^{n_1}(x-x_i)^{\alpha_i}\times\prod_{j=1}^{n_2}(x-u_j)^{\beta_j},$$

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{n_1}(x-x_i)^{\alpha'_i}\times\prod_{h=1}^{n_3}(x-v_h)^{\gamma_h},$$

где n_1 — число общих нулей x_i многочленов P и Q, n_2 — число остальных нулей u_j многочлена P, v_h — остальные n_3 нуля Q.

Исследование, проведенное в задаче 2.24, позволяет записать

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_i\frac{\alpha_i}{x-x_i}+\sum_j\frac{\beta_j}{x-u_j},$$

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\sum_i\frac{\alpha'_i}{x-x_i}+\sum_h\frac{\gamma_h}{x-v_h},$$

$$R(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}+k\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\sum_i\frac{\alpha_i+k\alpha'_i}{x-x_i}+\sum_j\frac{\beta_j}{x-u_j}+\sum_h\frac{k\gamma_h}{x-v_h}.$$

R есть рациональная дробь с нулевой целой частью; все ее полюсы — простые и действительные, а все коэффициенты разложения положительны. Тогда, как мы уже доказали в п. 1, все нули числителя действительны и разделяют полюсы; всего имеется $n_1+n_2+n_3$ полюсов, и значит, $n_1+n_2+n_3-1$ простых нулей числителя. Эти нули служат также нулями многочлена $P'Q+kPQ'$.

Но, очевидно, для многочлена $P'Q+kPQ$

x_i — нуль порядка $\alpha_i+\alpha'_i-1$,

u_j — нуль порядка β_j-1,

v_h — нуль порядка γ_h-1.

Сумма порядков этих различных нулей относительно всех x_i есть

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n_1} (\alpha_i + \alpha_i' - 1) = \sum_{i=1}^{n_1} (\alpha_i + \alpha_i') - n_1;$$

относительно всех u_j есть

$$\beta = \sum_{j=1}^{n_2} (\beta_j - 1) = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j - n_2,$$

относительно всех v_h есть

$$\gamma = \sum_{h=1}^{n_3} (\gamma_h - 1) = \sum_{h=1}^{n_3} \gamma_h - n_3.$$

В общей сложности сумма порядков рассмотренных нулей многочлена $P'Q + kPQ'$ есть

$$\alpha + \beta + \gamma + (n_1 + n_2 + n_3 - 1) = \sum_{i=1}^{n_1} (\alpha_i + \alpha_i') + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_j + \sum_{h=1}^{n_3} \gamma_h - 1 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i' + \sum_{i=1}^{n_3} \gamma_h\right) - 1 = \deg P + \deg Q - 1 =$$

$$= \deg (P'Q + kPQ').$$

Итак, многочлен $P'Q + kPQ'$ не имеет других нулей, кроме уже найденных, и значит, все его нули действительны.

РАЗДЕЛ 3

ЛИНЕЙНАЯ И ПОЛИЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задачи опираются на определения и результаты глав VII—XI «Курса математики» Ш. Пизо и М. Заманского.

Важность этого раздела диктует разделение его на четыре главы.

В гл. I помещены задачи, опирающиеся на основные понятия (векторные пространства, базисы, линейные отображения); важно, чтобы студенты хорошо усвоили эти понятия, прежде чем приступить к изучению матриц, где техническая сторона дела может несколько заслонить идейную сторону и выводы. В гл. II помещены задачи, относящиеся к вычислению матриц и определителей и решению систем линейных уравнений. Гл. III посвящена задачам на собственные значения и приведение матриц, гл. IV — евклидовым пространствам, а также билинейным и квадратичным формам. Все предлагаемые задачи требуют знания лишь элементарных понятий анализа (кроме двух или трех исключений, которые отмечены особо). Таким образом, читатель сможет привыкнуть к основным алгебраическим понятиям, прежде чем приступить к изучению анализа, что должно позволить ему с успехом применять там алгебраические методы. Впрочем, вторая часть этого задачника содержит задачи, в которых алгебра играет существенную роль.

Здесь невозможно даже просто перечислить важные понятия и теоремы, которые будут использоваться; для этого студент должен обращаться к курсу математики. Однако следует выделить некоторые из них, подчас очень простые, но постоянно используемые при решении задач или, иногда, на наш взгляд, мало изученные студентами. На первое место среди таких вопросов следует поставить важное понятие *сопряженного пространства*, не всегда легко понимаемое и требующее усиленного размышления.

Некоторые задачи становятся очевидными, если отнести пространство к надлежащим образом выбранному *базису*; для облегчения этого выбора следует помнить, что: независимые векторы в числе, равном размерности пространства, образуют базис; к независимым векторам можно добавить еще векторы, с тем чтобы полученная совокупность всех этих векторов составляла базис (теорема о неполном базисе); в евклидовом пространстве процесс ортогонализации Шмидта позволяет заменить базис e_i ортонормированным базисом u_i так, чтобы подпространство E_i, порожденное векторами $e_1, e_2, \ldots, e_i$, совпадало с подпространством, порожденным векторами $u_1, u_2, \ldots, u_i$ (используется метод, указанный в книге: Пизо и Заманский, Алгебра, гл. X, 2-й раздел, § 1, в применении к подпространству $F = E_i$ и к подпространству E_{i-1} пространства E_i, имеющему ортонормированный базис $u_1, \ldots, u_{i-1}$). Тогда матрица перехода будет треугольной.

Для определения *размерности векторного пространства* находится его базис или показывается, что оно изоморфно уже изученному векторному пространству. Если два пространства над одним и тем же телом имеют одинаковую размерность, то они изоморфны. Векторное пространство не может иметь собственного подпространства одной с ним размерности; поэтому для доказательства совпадения двух векторных пространств E и F часто бывает удобно показать, что F содержится в E и имеет ту же размерность, что и E.

Чтобы определить *линейное отображение*, достаточно задать образы векторов базиса (т. е. n независимых векторов, если пространство, на котором определяется отображение, имеет размерность n); эти образы могут выбираться произвольно. Чтобы показать, что линейное отображение удовлетворяет некоторым линейным условиям, достаточно убедиться в том, что эти условия выполняются для образов векторов базиса. *Ранг линейного отображения* f пространства E в пространство F есть фундаментальное понятие, которое можно определить тремя различными способами:

а) как размерность $f(E)$ $(\dim f(E))$;

б) как число $\dim E - \dim f^{-1}(0)$;

в) если $f(x)$ определяется своими координатами, линейными формами $f_i(x)$, то ранг f равен размерности (в сопряженном пространстве E^*) векторного подпространства, порожденного формами f_i. Мы будем пользоваться всеми этими определениями, выбирая каждый раз то, которое проще всего применимо к данной задаче, в том числе и для того, чтобы получать соотношения между размерностями различных векторных пространств, например, $f(E)$ и $f^{-1}(0)$.

Использование *определителей* позволяет решить систему линейных уравнений, но это решение подчас скорее теоретическое. В большинстве случаев, и в частности, всякий раз, как коэффициенты являются числами проще всего применять *способ последовательных исключений*. Если однородная система (H), соответствующая системе (S) из n уравнений с n неизвестными, имеет лишь нулевое решение, то (S) имеет единственное решение; в противном случае система (S) либо несовместна, либо неопределенна (теорема об альтернативе).

Часто для нахождения *обратной матрицы*, вместо того, чтобы вычислять определитель и миноры матрицы A, бывает проще выписать уравнения, представимые равенством $AX = Y$, где X и Y — матрицы с единственным столбцом (X — один из столбцов обратной матрицы, а Y — соответствующий столбец единичной матрицы), и решить их последовательным исключением (в частности, когда элементы матрицы A есть числа).

Для изучения свойств *матрицы* A часто удобно бывает рассматривать отображение $\tilde{A}$, соответствующее матрице A; это отображение представляется матрицей A относительно заданного базиса, и значит, координаты вектора $\tilde{A}(e_i)$ равны элементам i-го столбца матрицы A (e_i есть i-й вектор базиса). В частности, иногда для нахождения матрицы, преобразованной из A при замене координат, вместо того, чтобы пользоваться матрицами перехода, проще бывает найти векторы, преобразованные посредством $\tilde{A}$ из векторов нового базиса. Однако необходимо четко различать A и $\tilde{A}$, ибо A является матрицей отображения $\tilde{A}$ лишь относительно данного базиса. Иногда, по отношению к заданному базису, удобно бывает приписывать каждому вектору x матрицу X с единственным столбцом, элементами которого являются координаты вектора x (но опять же четко различать x и X); отсюда происходят обозначения

$$Y = AX \Leftrightarrow y = \tilde{A}(x)$$

и ${}^tXAY$ для билинейной формы с матрицей A.

Если все собственные значения матрицы различны, то существует базис, состоящий из *собственных векторов*. Всегда существует базис, состоящий из собственных векторов симметричной матрицы.

Задание *билинейной симметрической формы* равносильно заданию порождаемой ею *квадратичной формы*, поскольку каждая из них полностью определяет другую; значит, в зависимости от обстоятельств, можно вести рассуждение либо для билинейной, либо для квадратичной формы.

I. Векторные пространства и подпространства; базисы, отображения и линейные формы

3.01. В пространстве R^4 заданы векторы

$$x_1=(1, 1, 2, 1), \qquad x_2=(1, -1, 0, 1)$$
$$x_3=(0, 0, -1, 1), \qquad x_4=(1, 2, 2, 0), \qquad x=(1, 1, 1, 1).$$

1. Показать, что 4 вектора x_1, x_2, x_3, x_4 составляют базис пространства R^4.

2. Найти координаты вектора x относительно базиса x_1, x_2, x_3, x_4.

3.02. В векторном пространстве E над полем комплексных чисел заданы три элемента a, b, c; полагаем

$$u=b+c, \qquad v=c+a, \qquad w=a+b.$$

1. Показать, что подпространства, порожденные векторами a, b, c, с одной стороны, и векторами u, v, w — с другой, совпадают.

2. Показать, что векторы u, v, w независимы в том и только том случае, когда векторы a, b, c независимы.

3.03. Напомним, что множество непрерывных отображений R в R имеет структуру векторного пространства над R, если сумма двух отображений и произведение отображения на действительное число определяется обычным способом.

Будут ли функции $f_n(t)=\sin^n t$ независимы в этом пространстве?

3.04. Обозначим через A и B два конечномерных векторных подпространства векторного пространства E над телом K.

1. Показать, что множество $A+B$ элементов из E, представляющих собой сумму элемента из A с элементом из B, есть векторное подпространство в E.

2. Показать, что $A+B$ имеет конечную размерность, и более того,

$$\dim(A+B)+\dim A\cap B=\dim A+\dim B$$

(можно сначала рассмотреть простой случай, когда $A\cap B$ сводится к нулевому элементу).

3.05. Зададим натуральное n и рассмотрим множество E функций x, определенных на R равенством

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

(a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n — любые действительные числа).

1. Показать, что E есть векторное подпространство векторного пространства над R отображений R в R.

2. Обозначим через m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ целое число, а через E_m — множество функций x вида

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Показать индукцией по m, что если элемент x из E_m является нулевой функцией, то коэффициенты a_k и b_k равны нулю (можно воспользоваться функцией $x'' + m^2 x$, где x'' означает вторую производную функции x).

3. Найти базис векторного подпространства E.

4. Обозначим через u линейное отображение E в E, относящее каждому элементу x из E элемент $y = u(x)$ вида $y(t) = x(t + \pi/4)$.

Показать, что u — линейное отображение и что u^8 есть тождественное отображение (через u^8 обозначена композиция восьми отображений, равных u).

Найти ядро отображения u и образ $u(E)$ множества E.

3.06. Пусть два алгебраических числа ω и θ являются корнями уравнений с рациональными коэффициентами:

$$\omega^n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \omega^k, \qquad \theta^m = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k \theta^k.$$

1. Показать, что поле R действительных чисел имеет структуру векторного пространства над полем Q рациональных чисел (сумма двух действительных чисел и произведение действительного числа на рациональное, как частный случай произведения двух действительных чисел, определяются в R обычным способом); это векторное пространство мы обозначим через R_Q.

2. Показать, что множество E действительных чисел x, равных многочленам от ω и θ с рациональными коэффициентами, есть векторное подпространство пространства R_Q.

3. Показать, что любое число из E равно многочлену от ω и θ с рациональными коэффициентами степени $n-1$ и $m-1$ соответственно относительно ω и θ. Вывести отсюда, что E — конечномерное подпространство.

4. Показать, что число $\omega + \theta$ служит корнем алгебраического уравнения степени, не превосходящей nm, с рациональными коэффициентами.

3.07. Рассмотрим множество $\mathscr{S}$ последовательностей $\{u_n\}$ с комплексными членами, удовлетворяющими рекуррентному соотношению

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k} \quad \text{для} \quad n \geqslant k,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — заданные комплексные числа.

1. Показать, что $\mathscr{S}$ есть векторное подпространство векторного пространства над полем C последовательностей с комплексными членами.

Напомним (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. III, 3-й раздел, § 2) определение операций:

$$\{u_n\} + \{v_n\} = \{u_n + v_n\}, \qquad \lambda\{u_n\} = \{\lambda u_n\}.$$

2. Найти базис пространства $\mathcal{S}$ и показать, что $\mathcal{S}$ имеет размерность k.

3.08. 1. Показать, что если a, b и c — произвольные рациональные числа, то многочлены $u^3 - 2$ и $a + bu + cu^2$ взаимно просты.

2. Показать, что множество E действительных чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ (a, b, c — рациональные) есть кольцо. Применив, например, результат из п. 1, показать, что это кольцо является телом.

3. Показать, что E — трехмерное векторное пространство над полем рациональных чисел, если определить произведение числа из E на рациональное число как обычное произведение двух действительных чисел.

3.09. 1. Показать, что множество многочленов степени, меньшей или равной n, с комплексными коэффициентами есть $n+1$-мерное векторное пространство E_{n+1} над полем комплексных чисел.

2. Если многочлены A_p пространства E_{n+1}, где индекс p принимает значения $0, 1, \ldots, n$, таковы, что степень A_p равна p, то многочлены A_p образуют базис пространства E_{n+1}.

3. Показать, что в пространстве E_{n+1} кратные многочлена B степени $k \leqslant n$ образуют векторное пространство F_B размерности $n - k + 1$ и что многочлены степени, меньшей или равной $k - 1$, образуют векторное подпространство G_k, дополнительное к предыдущему.

Найти бесконечное множество пространств, дополнительных к векторному подпространству G_k.

Показать на примере, что объединение двух векторных подпространств может не быть векторным подпространством.

3.10. E_{n+1} есть векторное пространство многочленов степени, меньшей или равной n, с комплексными коэффициентами, рассмотренное в задаче 3.09. Многочлены U_k определяются для $0 \leqslant k \leqslant n$ соотношениями

$$U_0 = 1, \quad U_k(x) = x(x-1)\ldots(x-k+1), \quad \text{если} \quad k > 0.$$

1. Показать, что многочлены U_k образуют базис пространства E_{n+1}.

2. Показать, что существует, и притом единственное, линейное отображение E_{n+1} в себя, удовлетворяющее $n+1$ условиям

$$\varphi(x^k) = U_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

и что φ биективно.

3. Определим отображение δ пространства E_{n+1} в себя посредством соотношения

$$[\delta(P)](x) = P(x+1) - P(x).$$

Показать, что δ линейно; найти многочлены $\delta(U_k)$; определить ядро отображения δ и векторное подпространство $\delta(E_{n+1})$.

4. Если R — многочлен с комплексными коэффициентами, то уравнение

$$P(x+1) - P(x) = R(x)$$

имеет решением многочлен P, обращающийся в нуль при $x=0$; такой многочлен — единственный.

5. Определить, что представляет собой отображение d пространства E_{n+1} в себя, имеющее вид

$$d = \varphi^{-1} \circ \delta \circ \varphi.$$

3.11. Пусть E — векторное пространство многочленов с комплексными коэффициентами; A — данный многочлен степени α; E_{n+1} — подпространство пространства E, образованное многочленами степени, меньшей или равной n. Определим линейное отображение f пространства E в себя равенством

$$f(P) = AP' - A'P,$$

где A' и P' — производные многочлены многочленов A и P.

1. Показать, что если степень k многочлена P отлична от α, то степень многочлена $f(P)$ равна точно $\alpha + k - 1$. Убедиться в том, что $f(A)$ равно нулю, и показать, что множество $f(E_{\alpha+1})$ совпадает с множеством $f(E_\alpha)$. Найти ядро отображения f.

2. Чему равен ранг сужения f на E_{n+1}?

3. Множество многочленов Q, принадлежащих E_{p+1} и $f(E)$, есть векторное подпространство F_{p+1}. Показать, что $F_{p+1} = f(E_{p-\alpha+2})$, и найти размерность пространства F_{p+1} (следует рассматривать отдельно несколько случаев, в зависимости от значений p).

Найти подпространство F_3, когда $A = x^2$.

4. Если нули многочлена A различны, то для того, чтобы дробь Q/A^2 была производной некоторой рациональной дроби, необходимо и достаточно, чтобы многочлен Q принадлежал $f(E)$.

Это не имеет места, если A имеет кратные нули (можно исследовать частный случай дробей со знаменателем x^4).

3.12. E — конечномерное векторное пространство над полем действительных чисел, u и v — линейные отображения E в себя, и пусть ядро $u^{-1}(0)$ отображения u содержит ядро $v^{-1}(0)$ отображения v.

1. Показать, что в E можно выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы k первых его векторов составляли базис ядра $v^{-1}(0)$, а $k+h$ первых векторов составляли базис ядра $u^{-1}(0)$.

Доказать, что векторы $v(e_i)$ с индексом i, большим, чем k, независимы и образуют базис подпространства $v(E)$.

2. Показать, что существуют такие линейные отображения w пространства E в E, что

$$u = w \circ v.$$

3. Предположим, что E — пространство, рассматриваемое в элементарной геометрии, которое будет отождествлено с пространством R^3. По определению, отображения u и v каждому вектору сопоставляют проекцию этого вектора соответственно на плоскость P, проходящую через O, и на прямую D, проходящую через O и лежащую в P. Дать определение сужения w на плоскость P, указать, к какой теореме элементарной геометрии мы при этом приходим.

3.13. Обозначим через E и F два векторных пространства размерности m и n над одним и тем же телом K, а через e_i — векторы базиса пространства E $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

1. Показать, что линейные отображения f пространства E в F образуют векторное пространство $\mathscr{L}$, если положить

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

2. Показать, что f полностью определено заданием векторов $f(e_i)$ и что эти векторы могут быть любыми. Найти размерность пространства $\mathscr{L}$.

3. Допустим теперь, что пространство F есть само пространство E. По определению, произведение двух отображений из $\mathscr{L}$ есть их композиция; показать, что тогда $\mathscr{L}$ имеет структуру кольца.

4. Используя предыдущий результат, показать, что любому линейному отображению f пространства E в E можно отнести такой многочлен A с коэффициентами из K, что

$$A(f) = \sum_{i=0}^{m^2} a_i f^i = 0,$$

где f^0 — тождественное отображение, а 0 представляет собой нулевое отображение, переводящее каждый вектор в нулевой.

3.14. E — n-мерное векторное пространство над телом K. Напомним, что линейные отображения E в себя образуют кольцо $\mathscr{L}$ (см. задачу 3.13).

Обозначим через f некоторый фиксированный элемент из $\mathscr{L}$, обладающий следующим свойством: образы $f^p(x_0)$ некоторого вектора x_0 из E составляют базис пространства E, если взять $p = 1, 2, \ldots, n$.

1. Показать, что отображение f биективно.

2. Показать, что в K можно найти такие числа a_p, что

$$(f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_0e)(x_0) = 0,$$

где e означает тождественное отображение.

Вывести из этого, что отображение $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_0e$ является нулевым отображением (показываем, что это отображение переводит векторы базиса в нулевой вектор).

3. Предположим, что отображение g перестановочно с f, т. е. что $gf = fg$.

Показать, что в K можно найти такие числа b_i, что

$$g(x_0) = (b_{n-1}f^{n-1} + b_{n-2}f^{n-2} + \dots + b_0e)(x_0),$$

и вывести отсюда, что

$$g = b_{n-1}f^{n-1} + b_{n-2}f^{n-2} + \dots + b_0e.$$

3.15. Обозначим через E_{n+1} векторное пространство многочленов степени, меньшей или равной n, с комплексными коэффициентами (пространство, изучавшееся в задаче 3.09).

1. Значение $A(x_0)$, принимаемое многочленом A в точке x_0, есть линейная форма на E_{n+1}.

2. Если числа $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ различны, то линейные формы $A(x_1), \dots, A(x_{n+1})$ независимы и образуют базис $\mathscr{B}^*$ сопряженного к E_{n+1} пространства E^*_{n+1}.

3. Показать, что многочлены Лагранжа относительно значений $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ образуют базис $\mathscr{B}$ пространства E_{n+1}, сопряженный базису $\mathscr{B}^*$ из п. 2.

(Два базиса e_i и φ_j пространства E и его сопряженного E^* называются сопряженными, если $\varphi_j(e_i) = 0$ при $j \neq i$ и $\varphi_i(e_i) = 1$.)

4. Найти базис пространства E^*_{n+1}, сопряженный базису $1, x, \dots, x^n$ пространства E_{n+1}.

5. Показать, что если $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ заданы, то существуют такие постоянные $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, что для любого многочлена A степени, меньшей или равной n,

$$A'(x_0) = \lambda_1A(x_1) + \lambda_2A(x_2) + \dots + \lambda_{n+1}A(x_{n+1}),$$

где A' — производный многочлен от A.

Выписать в явном виде коэффициенты λ_i.

3.16. Определим линейное отображение f пространства R^3 в себя, задав координаты (X, Y, Z) вектора $f(u)$ как функции координат (x, y, z) вектора u следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= (m-2)x + 2y - z, \\ Y &= 2x + my + 2z, \\ Z &= 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z. \end{aligned}$$

Показать, что ранг отображения f равен 3, кроме некоторых частных значений параметра m, которые требуется указать. Для этих значений уточнить ранг и определить подпространство $f(R^3)$.

3.17. Пусть E есть n-мерное векторное пространство над телом K, а E^* — сопряженное пространство; Φ — множество векторов из E, а F — векторное подпространство в E, порожденное элементами из Φ.

1. Показать, что линейные формы, принимающие значение 0 для всех элементов из Φ, образуют векторное подпространство F^* пространства E^*.

2. Показать, что общие нули линейных форм из F^* суть векторы из F.

3. Показать, что $\dim F + \dim F^* = n$.

4. В векторном пространстве E_{n+1} многочленов степени, меньшей или равной n, с комплексными коэффициентами возьмем в качестве F подпространство многочленов, кратных $(x-1)^2(x-2)^3(x-3)$. Показать, что F^* есть множество линейных форм l вида

$$l(A) = \lambda_1 A(1) + \mu_1 A'(1) + \lambda_2 A(2) + \mu_2 A'(2) + \nu_2 A''(2) + \lambda_3 A(3).$$

3.18. I. Предположим, что в аддитивной абелевой группе Γ определена структура n-мерного векторного пространства над полем комплексных чисел; обозначим это пространство через E.

1. В той же группе Γ умножение на действительное число определим как сужение на произведение $\Gamma \times R$ умножения, определенного в условиии задачи для произведения $\Gamma \times C$.

Иными словами, если, во избежание путаницы, один и тот же элемент из Γ обозначать через x, если он рассматривается как вектор из E, и через x', если внешнее умножение ограничивается действительными числами, то операции будут иметь вид

$$x' + y' = (x+y)', \quad rx' = (rx)', \quad \text{если } r \text{ действительно.}$$

Показать, что тем самым в Γ определена структура векторного пространства E' над R.

Показать, что элементы x' и $(ix)'$ независимы и что E' имеет размерность $2n$.

(Для конкретного примера можно взять в качестве E векторное пространство над C многочленов степени, меньшей или равной 2, с комплексными коэффициентами.

2. Рассмотрим отображение φ пространства E' в E':

$$\varphi(x') = (ix)'.$$

Показать, что φ есть изоморфизм пространства E' на E' (т. е. φ линейно и биективно) и что $\varphi \circ \varphi = -e$, где e — тождественное отображение.

II. F есть векторное пространство над R размерности $2n$.

1. Показать, что существуют такие изоморфизмы f пространства F на F, что $f \circ f = -e$. (Можно вначале рассмотреть случай, когда F есть множество комплексных чисел, что дает нам результат для $n = 1$, а затем перейти к общему случаю.)

2. В аддитивной абелевой группе элементов из F определяем умножение на комплексное число $\lambda + i\mu$, полагая

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu f(x),$$

где f — произвольно выбранный изоморфизм из п. 1. Показать, что тем самым получено векторное пространство E над полем C комплексных чисел.

Наконец, убедиться в том, что пространство E', получающееся из E, как и в первой части задачи, изоморфно F, и показать, что E имеет размерность n.

3.19. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{E}$$

где p и q — действительные числа.

Определенная на R действительная функция f является решением уравнения (E), если она дважды дифференцируема на R и ее производные удовлетворяют уравнению (E); функция, определенная на R и принимающая комплексные значения, является решением уравнения (E), если ее действительная и мнимая части являются решениями уравнения (E).

1. Показать, что решения (E) образуют векторное пространство S над полем C. Будем предполагать известным в дальнейшем, что это векторное пространство имеет размерность 2.

2. Показать, что если f — функция из S, то ее производная f' тоже является функцией из S, и доказать, что отображение l пространства S в S, относящее каждой функции f ее производную f', линейно.

3. Показать, что если бы l было пропорционально тождественному отображению, то размерность S была бы равна 1. Найти значения p и q, для которых l не будет изоморфизмом S на S.

4. Проверить, что если e — тождественное отображение, то

$$l \circ l + pl + qe = 0,$$

и доказать существование чисел r_1 и r_2, для которых

$$(l - r_1e) \circ (l - r_2e) = 0.$$

Наконец, показать, что ни одно из двух отображений $l - r_1e$ и $l - r_2e$ не обратимо.

3.20. Определим линейное отображение f пространства R^4 в себя, задав координаты X, Y, Z, T вектора $f(u)$, как функции координат x, y, z, t вектора u, следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= x + y + z - t, \\ Y &= -x + y - z - t, \\ Z &= x - y - z - t, \\ T &= -x - y + z + 3t. \end{aligned}$$

1. Найти ранг отображения f и определить пространство $f(R^4)$. Показать, что $f(R^4)$ не имеет общих точек с областью D вида

$$X > 0, \quad Y > 0, \quad Z > 0, \quad T > 0.$$

(или что не существует значений x, y, z, t, для которых эти четыре неравенства выполняются).

2. Определим точно так же линейное отображение f пространства R^n в R^p, задав координаты вектора $f(u)$, являющегося образом вектора u, следующим образом:

$$X_i = f_i(u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

и предположим, что f имеет ранг, не меньший чем $p - 1$.

Показать, что для того, чтобы система неравенств

$$f_i(u) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{S}$$

не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие, не все равные нулю, положительные числа λ_i, что

$$\sum_i \lambda_i f_i = 0.$$

II. Матрицы, определители, линейные уравнения

3.21. Все рассматриваемые числа принадлежат заданному полю K. Матрицы $M(s)$, $N(t)$ и $P(u)$ определяются следующим образом:

$$M(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}, \quad N(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad P(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где число s, по условию, отлично от 0.

Показать, что для того, чтобы матрица

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

могла быть представлена в виде $M(s)N(t)P(u)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a \neq 0, \quad ad - bc = 1.$$

Доказать единственность такого представления.

3.22. Пусть a, b, c, d — числа из поля K; рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Вычислить A^2 и показать, что существуют числа α и β, выражаемые в виде функций от a, b, c и d и такие, что

$$A^2 - \alpha A - \beta I = 0.$$

Указать, в каких случаях коэффициенты α и β не единственны.

2. Показать, что множество $\mathscr{A}$ матриц B, которые могут быть представлены в виде

$$B = uI + vA$$

(u, v — любые числа из K, I — единичная матрица), есть унитарное коммутативное кольцо.

3. В этом и в следующем вопросе вместо K берется поле R действительных чисел.

Показать, что если B обратима, то ее обратная матрица B^{-1} принадлежит $\mathscr{A}$. При каком условии кольцо $\mathscr{A}$ будет телом?

4. Пусть $a = d = 0$, $b = 1$, $c = -1$. Показать, что $\mathscr{A}$ есть поле, изоморфное полю комплексных чисел.

3.23. В этой задаче предполагаются известными результаты второго вопроса задачи 3.22. Все рассматриваемые матрицы принадлежат кольцу квадратных матриц 2-го порядка с комплексными членами.

1. Задана матрица

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

и предполагается, что член β отличен от нуля.

Показать, что для того, чтобы матрица

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

была перестановочна с матрицей M, т. е. чтобы $BM = MB$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, что

$$y = k\beta, \qquad z = k\gamma, \qquad x - t = k(\alpha - \delta).$$

Показать, что множество перестановочных с M матриц B есть 2-мерное векторное пространство над полем C комплексных чисел и является одним из колец, рассматриваемых в задаче 3.22 (где в качестве K, разумеется, берется поле C комплексных чисел).

2. Допустим, что член β матрицы M равен нулю. Найти множество матриц B, перестановочных с M, и показать, что это снова будет одно из колец, изучавшихся в задаче 3.22.

3. Показать, что всякое коммутативное подкольцо кольца квадратных матриц 2-го порядка есть подкольцо одного из колец $\mathscr{A}$ задачи 3.22.

3.24. 1. В кольце $\mathcal{M}$ квадратных матриц 2-го порядка с комплексными членами рассмотрим множество K матриц M вида

$$M = \begin{pmatrix} m & n \\ -\bar{n} & \bar{m} \end{pmatrix},$$

где m и n — любые комплексные числа.

Показать, что K — некоммутативное тело.

2. Показать, что K не является подпространством векторного пространства над C квадратных матриц 2-го порядка с комплексными членами.

3. Показать, что в K можно определить структуру векторного пространства над R размерности 4. Найти базис E_1, E_2, E_3, E_4 этого пространства и показать, что умножение в теле K может быть определено заданием произведений E_iE_j.

3.25. 1. Во множестве E, где определена ассоциативная операция с нейтральным элементом e, множество E_1 обратимых элементов составляет группу.

Приложение: обратимые квадратные матрицы второго порядка с комплексными членами образуют группу G.

2. Пусть A — матрица из G и α — отображение C^2 в себя, определенное следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что отношение x'/y' есть дробно-линейная функция h_A отношения x/y. При этих условиях показать, что если во множестве H невырожденных дробно-линейных функций произведение функций определяется как их композиция, то H является группой, а отображение φ, определенное равенством $\varphi(A) = h_A$, есть гомоморфизм группы G в группу H, т. е. (задача 1.14 первого раздела)

$$\varphi(A)\,\varphi(B) = \varphi(AB).$$

Найти ядро отображения φ, т. е. множество $\varphi^{-1}(e)$, где e означает нейтральный элемент из H, и вообще, найти множество $\varphi^{-1}(h)$ для произвольной дробно-линейной функции h.

3.26. Рассмотрим кольцо $\mathcal{A}$ квадратных матриц n-го порядка, элементы которых принадлежат полю K. Две матрицы A и B из этого кольца называются перестановочными, если $AB = BA$.

1. Показать, что множество E матриц, перестановочных с заданной матрицей A, есть подкольцо кольца $\mathcal{A}$.

2. Если A и B перестановочны и если P и Q — два многочлена с коэффициентами из K, то матрицы $P(A)$ и $Q(B)$ перестановочны.

3. Если A обратима и перестановочна с B, то матрицы A^{-1} и B перестановочны.

3.27. Если матрица $A=(a_{i,j})$ имеет m строк и n столбцов и ее ранг равен 1, то найдутся такие числа u_i и v_j, не все равные нулю, что

$$a_{i,j}=u_iv_j$$

($a_{i,j}$ означает элемент i-й строки и j-го столбца; все эти элементы принадлежат полю K).

3.28. В этой задаче все рассматриваемые числа принадлежат одному и тому же полю K.

Квадратная матрица $T=(t_{ij})$ порядка n называется треугольной, если $t_{i,j}=0$ при $i>j$, т. е. когда члены, расположенные под главной диагональю, равны нулю:

$$T=\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots\dots\dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots\dots\dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \dots 0 & t_{ii} \dots & t_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & t_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Показать, что треугольные матрицы n-го порядка образуют кольцо $\mathscr{A}$. Будет ли это кольцо коммутативным?

2. Обозначим через θ линейное отображение K^n в K^n, соответствующее матрице T, т. е. отображение, представленное матрицей T относительно канонического базиса e_i ($i=1, 2, \dots$ $\dots, n$) пространства K^n.

Показать, что для того, чтобы матрица T была треугольной, необходимо и достаточно, чтобы векторные подпространства E_p, порожденные векторами $e_1, e_2, \dots, e_p$, были устойчивы относительно отображения θ, т. е. чтобы $\theta(E_p)\subset E_p$.

Показать, что этот факт позволяет без вычислений установить, что треугольные матрицы образуют кольцо.

3. Обозначим через X матрицу из n строк и одного столбца элементов x_i, а через T — треугольную матрицу.

Исследовать матричное уравнение $TX=0$.

Найти ранг отображения θ, соответствующего матрице T.

3.29. Рассматриваемые в задаче матрицы имеют в качестве элементов числа из поля K.

Дана квадратная матрица n-го порядка, определенная при помощи четырех матриц M_{ij}:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}; \end{array}$$

при этом матрица $M_{1,1}$ имеет p строк и p столбцов, $M_{1,2}$ — p строк и q столбцов, $M_{2,1}$ — q строк и p столбцов, и $M_{2,2}$ — q строк и q столбцов (p и q — два натуральных числа, в сумме равные n).

Показать, что произведение двух матриц M и N, представленных в этой форме, выражается точно так же, как если бы матрицы $M_{i,j}$ и $N_{i,j}$ были числами (элементами матриц M и N).

3.30. Предполагаем известными результаты задачи 3.29 и тот факт, что множество действительных матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

есть поле $\mathscr{C}$, изоморфное полю комплексных чисел (задача 3.22, п. 4).

Рассмотрим в кольце $\mathscr{N}$ квадратных матриц 4-го порядка с действительными коэффициентами множество $\mathscr{M}$ матриц M вида

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ c' & d' & a' & b' \\ -d' & c' & -b' & a' \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d, a', b', c', d'$ — любые действительные числа.

1. Показать, что $\mathscr{M}$ есть векторное пространство над R; имеющее размерность 8, и что $\mathscr{M}$ есть кольцо.

2. Показать, что $\mathscr{M}$, со структурой кольца, изоморфно кольцу $\mathscr{A}$ квадратных матриц 2-го порядка с комплексными коэффициентами.

3. Можно ли определить в $\mathscr{A}$ структуру векторного пространства, изоморфную структуре векторного пространства $\mathscr{M}$?

4. Пусть X — матрица из 4 строк и 1 столбца; найти условия, при которых уравнение $MX = 0$ имеет ненулевое решение.

3.31. Коэффициенты и неизвестные — комплексные числа.

1. Решить и исследовать систему

$$\begin{aligned} &\lambda x_i + a_i x_{n+1} = b_i, \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda x_{n+1} = b_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{S}$$

2. Вычислить определитель D_n системы (S) и найти таким путем, при каких значениях λ система (S) имеет единственное решение.

3.32. *Обобщенная система Вандермонда.* Решить и исследовать систему уравнений

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2\lambda_i + x_3\lambda_i^2 + x_4\lambda_i^4 + x_5\lambda_i^6 = 0, \\ &x_1 + x_2\mu + x_3\mu^2 + x_4\mu^4 + x_5\mu^6 = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Для этого исследования можно воспользоваться многочленом A вида $A(u) = x_1 + x_2 u + \ldots + x_5 u^6$ и применить метод, аналогичный методу из курса Ш. Пизо и М. Заманского (Алгебра, гл. IX, 3-й раздел, § 1).

3.33. На пространстве R^4 заданы четыре линейных формы

$$\begin{aligned} X &= \quad\;\; ay + bz + ct, \\ Y &= ax \qquad\; + cz + bt, \\ Z &= bx + cy \qquad + at, \\ T &= cx + by + az. \end{aligned}$$

1. Найти ранг системы форм X, Y, Z, T (т. е. ранг определяемого ими отображения R^4 в R^4).

2. Найти, посредством вычисления определителя системы, условия, при которых эти формы независимы.

3. Исследовать существование решений системы

$$X = a + b + c, \quad Y = a, \quad Z = b, \quad T = c.$$

3.34. Показать, что определитель антисимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю. (Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется *антисимметрической* (кососимметрической), если $a_{ij} + a_{ji} = 0$, каковы бы ни были i и j.)

3.35. *Циклический определитель.* Рассмотрим определитель D с комплексными членами, все строки которого получаются из первой путем циклической перестановки членов:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & & a_1 \end{vmatrix}.$$

1. Показать, что определитель D, рассматриваемый как многочлен одного переменного, скажем, a_1, делится на

$$a_1 + a_2u + \dots + a_nu^{n-1},$$

где u есть n-й корень из единицы; представить определитель D в виде произведения n таких сомножителей.

2. Вычислить определитель D, если $a_k = k$.

3. Вычислить определитель D, если для заданного $p \leqslant n$

$$a_k = 1 \quad \text{при} \quad k \leqslant p \quad \text{и} \quad a_k = 0 \quad \text{при} \quad k > p.$$

Можно использовать следующий результат: если p взаимно просто с n, то все числа u_h^p различны между собой и с точностью до порядка равны числам u_h (через u_h для $h = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ обозначены n корней из единицы).

3.36. *Определителем Вандермонда* называется определитель $D = |d_{ij}|$, где $d_{ij} = \lambda_i^{j-1}$; напомним (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. IX, 3-й раздел, § 2), что

$$D = \prod_{i > j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ множество из $n+1$ многочленов, степени меньше или равной n, с комплексными коэффициентами, определенных формулой

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x^{j-1}.$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные между собой комплексные числа; рассмотрим матрицы A, X, Y, следующим образом определенные заданием элементов i-й строки и j-го столбца:

$$A = (a_{ij}), \qquad X = (x_j^{i-1}), \qquad Y = (P_i(x_j)).$$

Доказать равенство $Y = AX$.

Используя многочлены P_i вида $P_i(x) = (x+i)^n$, найти наиболее простое выражение для значения определителя

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1^n & 2^n & \ldots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & \ldots & (n+2)^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & \ldots & (2n+1)^n \end{vmatrix}.$$

3.37. $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица n-го порядка с комплексными членами, A_{ji} — коэффициенты при a_{ij} в разложении определителя матрицы A по элементам j-го столбца. Напомним, что если B — матрица (A_{ij}), то $BA = AB = (\det A) I$ (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. IX, 2-й раздел, § 2).

Показать, что если A имеет ранг $n-1$, то B имеет ранг 1, а если ранг A не превосходит $(n-2)$, то B равна нулю.

3.38. Решить и исследовать систему (S):

$$\frac{x}{a+\lambda_i} + \frac{y}{b+\lambda_i} + \frac{z}{c+\lambda_i} + \frac{t}{d+\lambda_i} - 1 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Можно дать интерпретацию этой системы при помощи функции f вида

$$f(u) = \frac{x}{a+u} + \frac{y}{b+u} + \frac{z}{c+u} + \frac{t}{d+u} - 1.$$

3.39. Вычислить (например, индукцией по n) определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \ldots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & b_n & \ldots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

III. Собственные значения, приведение матриц

3.40. Дана квадратная матрица A порядка n с элементами из поля K; характеристический многочлен матрицы A обозначается через P, и предполагается, что $P(0)$ отличен от нуля.

Показать, что A имеет обратную матрицу A^{-1} и что характеристический многочлен R матрицы A^{-1} имеет вид

$$R(\lambda)=\frac{(-1)^n\lambda^n}{P(0)}P\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Можно, например, исследовать определитель матрицы $A(A^{-1}-\lambda I)$ или, если K — подгруппа группы C, воспользоваться треугольной матрицей B, подобной A.

3.41. В кольце $\mathscr{A}$ квадратных матриц n-го порядка с элементами из поля K комплексных чисел рассматривается множество E таких матриц $A=(a_{ij})$, что сумма $\sum\limits_i a_{ij}$ членов одного столбца равна некоторому числу $s(A)$, не зависящему от j.

1. Показать, что для того, чтобы A принадлежала E, необходимо и достаточно, чтобы

$$VA=\lambda V,$$

где через V обозначена матрица из одной строки $(1, 1, \ldots, 1)$.

2. Показать, что E есть подкольцо кольца $\mathscr{A}$ и что если матрица A из E обратима, то матрица A^{-1} принадлежит E.

3. Показать, что $s(A)$ есть собственное значение матрицы A.

4. Показать, что если A состоит из действительных положительных чисел, то собственные значения матрицы A имеют модуль, меньший или равный $s(A)$.

3.42. 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Найти такую обратимую матрицу T, чтобы матрица $T^{-1}AT$ была диагональной.

Вычислить матрицу T^{-1} и проверить вычисления, сосчитав произведение $T^{-1}AT$.

3.43. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти такую матрицу T и обратную ей T^{-1}, чтобы $T^{-1}AT$ была диагональной матрицей D, и выписать матрицу D.

3.44. Рассматриваемые матрицы принадлежат кольцу $\mathscr{A}$ квадратных матриц n-го порядка с комплексными членами.

Известно, что если отнести любой матрице M линейное отображение $\tilde{M}$ пространства C^n в C^n, имеющее матрицу M относительно канонического базиса пространства C^n, то тем самым будет определен изоморфизм φ кольца $\mathcal{A}$ на кольцо линейных отображений C^n в себя.

Обозначим через A заданную матрицу, у которой все нули характеристического многочлена f различны.

1. Показать, что если V — собственный вектор матрицы A, то V принадлежит ядру отображения $f(\bar{A})$, и показать, что $f(A)=0$.

2. Показать, что для того, чтобы A и B были перестановочны, т. е. чтобы $AB=BA$, необходимо и достаточно, чтобы собственные векторы матрицы A были собственными векторами матрицы B.

3. Показать, что если матрица B перестановочна с матрицей A, то найдется такой многочлен g степени, строго меньшей n, с комплексными коэффициентами, что $B=g(A)$.

4. Показать, что для того, чтобы матрица B была обратима, необходимо и достаточно, чтобы многочлены f и g были взаимно просты.

3.45. Предположим, что квадратная матрица A 2-го порядка с комплексными членами имеет двойное собственное значение λ. Показать, что найдется матрица B, подобная матрице A (т. е. $B=T^{-1}AT$), равная одной из двух матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Вычислить B^n.

3.46. 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти такой базис, чтобы матрица B, преобразованная из A, была треугольной, и выписать матрицу B.

3. Показать, что среди всех базисов, удовлетворяющих условиям п. 2, найдется хотя бы один, для которого матрица B, преобразованная из A, имеет вне главной диагонали только один ненулевой член, и притом равный 1. Вычислить соответствующую матрицу B_0.

4. Вычислить B_0^n; указать способ, которым можно, не производя вычислений, получить A^n.

3.47. Определим квадратную матрицу A порядка n, задав ее элементы α_{ij} (i — номер строки, а j — номер столбца) следующим образом:

$$\alpha_{p,\,p-1}=1, \quad \alpha_{p,\,n}=a_{p-1}, \quad \alpha_{ij}=0, \quad \text{если} \quad i-j\neq 1 \quad \text{и} \quad j\neq n.$$

(a_{p-1} — заданные комплексные числа); таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Через $\tilde{A}$ обозначим линейное отображение C^n в себя, соответствующее A, а через f — многочлен, заданный формулой

$$f(t) = t^n - a_{n-1}t^{n-1} - a_{n-2}t^{n-2} - \dots - a_0.$$

1. Найти векторы $\tilde{A}(e_i)$ и векторы $\tilde{A}^i(e_1)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Показать, что $f(\tilde{A})$ переводит в 0 все векторы e_i, и доказать, что $f(A)$ равно нулю. (Векторы e_i составляют канонический базис пространства C^n.)

2. Показать, что множество $\mathscr{M}$ матриц M, представимых в виде $M = p(A)$, где p — многочлен с комплексными коэффициентами, является кольцом.

Доказать, что множество $\mathscr{I}$ многочленов p, имеющих нулевую матрицу $p(A)$, есть идеал кольца многочленов и что этот идеал содержит многочлен степени n.

3. Показать, что характеристический многочлен матрицы A есть $(-1)^n f$.

4. Показать, что для того, чтобы матрица $p(A)$ была обратима, необходимо и достаточно, чтобы многочлены p и f были взаимно просты.

IV. Евклидовы пространства; квадратичные формы

3.48. В n-мерном векторном пространстве *определителем* из n векторов относительно заданного базиса называется определитель из координат этих векторов.

1. Показать, что при изменении базиса определитель из n векторов умножается на множитель, не зависящий от рассматриваемых векторов.

2. Показать, что в евклидовом пространстве абсолютное значение определителя из n векторов относительно ортонормированного базиса не зависит от рассматриваемого базиса.

Показать, выбрав конкретный ортонормированный базис, что абсолютное значение определителя из n векторов меньше или равно произведению длин этих векторов.

3.49. В n-мерном евклидовом пространстве рассмотрим p векторов $V_1, \dots, V_p$, где $p \leqslant n$. Каждому элементу $X = (x_1, \dots, x_p)$ из R^p поставим в соответствие число

$$\omega(X) = \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i V_i \right\|^2.$$

Показать, что для того, чтобы форма $\omega(X)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы векторы V_i были линейно независимы.

С помощью этого результата доказать, что для независимости векторов V_i необходимо и достаточно, чтобы определитель D матрицы $A=(V_i\cdot V_j)$ был отличен от нуля. (Элемент i-й строки и j-го столбца матрицы A равен внутреннему произведению $V_i\cdot V_j$.)

Показать, что если D не равен нулю, то он строго положителен.

3.50. Обозначим через g симметрическую билинейную форму, определенную на $R^n\times R^n$, и предположим, что $g(x,x)\geqslant 0$ для любого вектора x, включая нулевой (эта квадратичная форма не будет определенной).

1. Показать, что

$$[g(x,\ y)]^2\leqslant g(x,\ x)\,g(y,\ y).$$

2. Для того чтобы g была невырожденной (т. е. чтобы линейная форма на R^n вида $y\to g(x,y)$, где x фиксировано, обращалась в нуль только для нулевого x), необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $g(x,x)$ была определенной.

3. Если g вырождена, то элементы x, обращающие $g(x,x)$ в нуль, образуют векторное подпространство пространства R^n.

4. Если g — невырожденная форма, то линейные отображения α пространства R^n в R^n, оставляющие инвариантной $g(x,y)$ (т. е. такие, что $g(\alpha x,\alpha y)=g(x,y)$), образуют группу G, операцией в которой служит композиция отображений.

3.51. Во второй части этой задачи предполагается известной теория определенного интеграла.

Первая часть. Рассмотрим евклидово пространство E и его векторное подпространство F, причем оба эти пространства не обязательно конечномерны.

1. Дан вектор $x\in E$. Исследуя расстояние от x до вектора $x_0+\lambda y$, показать, что для того, чтобы вектор $x_0\in F$ был одним из векторов подпространства F, расстояние которых до вектора x минимально, необходимо и достаточно, чтобы вектор $x-x_0$ был ортогонален всем векторам из F.

Показать, что в F не могут существовать два вектора, расстояние которых до x было бы минимальным.

2. Показать, что если F конечномерно, то в F действительно существует вектор x_0, расстояние которого до x минимально.

Вторая часть. 1. Показать, что в векторном пространстве над R непрерывных (функций) отображений интервала $[0,2\pi]$ в R *внутреннее произведение* может быть определено формулой

$$x\cdot y=\int_0^{2\pi} x(t)\,y(t)\,dt.$$

Найти норму, соответствующую этому внутреннему произведению.

Полученное таким путем бесконечномерное евклидово пространство обозначим через E.

2. Показать, что в E функции 1, $\cos kt$, $\sin ht$ (k и h — любые натуральные числа) попарно ортогональны.

3. Возьмем в качестве F векторное пространство тригонометрических полиномов n-го порядка (т. е. множество линейных комбинаций функций 1, $\cos kt$, $\sin ht$, где $k \leqslant n$ и $h \leqslant n$). Найти полином x_0, расстояние которого до заданной функции x было бы минимально.

3.52. Эта задача предполагает известной теорию определенного интеграла.

E — векторное пространство над R многочленов степени, меньшей или равной n, с действительными коэффициентами; внутреннее произведение двух многочленов P и Q определяется формулой

$$P \cdot Q = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt.$$

1. Убедиться в том, что E — $n+1$-мерное евклидово пространство.

Показать, что существуют элементы U_p, составляющие ортонормированный базис, причем такие, что степень многочлена U_p равна точно p (можно применить процесс ортогонализации Шмидта). Показать, что все такие базисы получаются из одного из них заменой U_p на $\varepsilon_p U_p$, где $\varepsilon_p = \mp 1$.

2. Вычислить U_0, U_1, U_2.

3. Показать, что многочлены U_p, с точностью до знака, характеризуются тремя свойствами:

$$\deg U_p = p, \qquad \| U_p \| = 1,$$

U_p ортогонален любому многочлену степени $< p$.

Доказать формулу

$$U_p = u_p \frac{d^p}{dt^p} (t^2 - 1)^p,$$

где u_p — постоянная, и вычислить $|u_p|$ (можно применить p раз формулу интегрирования по частям, см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 3-й раздел, § 4).

4. Показать, что нули многочлена U_p действительны, различны между собой и принадлежат интервалу $]-1, 1[$.

3.53. Обозначим через φ и ψ две симметрические билинейные формы, определенные на $R^n \times R^n$, а через ω и Ω — соответствующие квадратичные формы; предположим, что квадратичная форма ω — положительно определенная.

1. Показать, что

$$\varphi(x, y) = \frac{\omega(x+y) - \omega(x-y)}{4}, \quad \psi(x, y) = \frac{\Omega(x+y) - \Omega(x-y)}{4}.$$

2. Показать, что в R^n найдется базис, относительно которого обе квадратичные формы ω и Ω приводятся к сумме квадратов. Можно использовать тот факт, что ω — положительно определенная форма, чтобы свести задачу к приведению только одной квадратичной формы в ортонормированных базисах.

3. Воспользоваться полученными в п. 2 приведенными формами для нахождения значений λ, при которых билинейная форма $\psi - \lambda\varphi$ является вырожденной (т. е. чтобы существовали такие ненулевые векторы y, что $\psi(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = 0$ при любом x), и показать, что эти числа являются корнями уравнения

$$\det(B - \lambda A) = 0,$$

где A и B — матрицы форм φ и ψ относительно произвольного базиса пространства R^n.

Наконец, доказать, что если все корни этого уравнения различны, то базис, определенный в п. 2, может быть найден и непосредственно.

4. Показать, что результат п. 2 не выполняется, если никакая из двух форм ω и Ω не является определенной. Например, рассмотреть в R^2

$$\omega(x) = x_1^2 - x_2^2, \qquad \Omega(x) = 2x_1x_2,$$

где x_1 и x_2 — координаты вектора x.

3.54. Рассмотрим линейное отображение $\tilde{A}$ евклидова n-мерного пространства E в себя и обозначим через A его матрицу относительно заданного базиса пространства E.

Показать, что для того, чтобы образы n независимых векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ при отображении $\tilde{A}$ были попарно ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы относительно базиса $u_1, \ldots, u_n$ квадратичная форма

$$x \to \|\tilde{A}(x)\|^2$$

имела канонический вид (суммы квадратов).

Вывести отсюда, что существует по крайней мере одна система n единичных попарно ортогональных векторов $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$, образы которых при отображении $\tilde{A}$ попарно ортогональны.

3.55. Рассмотрим векторное пространство C^n и симметрическую билинейную форму φ, определенную на $C^n \times C^n$; напомним, что для определения φ достотачно задать соответствующую φ квадратичную форму ω.

1. Показать, что множество E векторов y, удовлетворяющих равенству $\varphi(x, y) = 0$ при любом x, образует векторное подпространство пространства C^n.

2. Предположим, что форма ω выражается в виде

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{p} l_i^2(x), \tag{α}$$

где l_i — независимые линейные формы.

Найти соответствующее выражение для $\varphi(x, y)$ и показать, что число p форм l_i равно $n - \dim E$. Вывести отсюда, что число p не зависит от рассматриваемого представления.

3. Показать индукцией по n, что квадратичная форма ω всегда может быть представлена в виде суммы квадратов независимых форм, т. е. в виде (α).

3.56. Рассмотрим квадратичную форму ω на R^n. Исследование, аналогичное проведенному в задаче 3.55, позволяет доказать следующие два результата, которые мы здесь принимаем:

а) существуют такие независимые формы f_i, что

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i f_i^2(x), \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_i = \mp 1;$$

б) число p форм f_i — одно и то же для всех представлений ω предыдущего вида.

Доказать, что для двух представлений этого типа число коэффициентов ε_i, равных 1, совпадает (а значит, совпадает и число коэффициентов ε_i, равных -1). Для этого можно записать равенство двух сумм квадратов форм и исследовать размерность векторного пространства нулей этих двух сумм.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.01. 1. R^4 есть 4-мерное векторное пространство. Для того чтобы векторы в числе, равном размерности пространства (здесь 4 вектора), составляли базис пространства, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух предложений:

векторы независимы,

векторы порождают пространство.

Мы докажем второе свойство, для чего покажем, что векторы e_1, e_2, e_3, e_4 канонического базиса пространства R^4 являются линейными комбинациями векторов x_1, x_2, x_3, x_4.

Определение векторов e_1, e_2, e_3, e_4 и правила вычисления для элементов векторного пространства позволяют записать

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4, \\ x_2 &= e_1 - e_2 + e_4, \\ x_3 &= -e_3 + e_4, \\ x_4 &= e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{aligned} \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$
\begin{aligned}
2e_1 &= x_1 + x_2 - 2(e_3 + e_4), \\
2e_2 &= x_1 - x_2 - 2e_3, \\
x_3 &= -e_3 + e_4, \\
x_4 &= e_1 + 2e_2 + 2e_3.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Заменяя e_1 и e_2 их выражениями, получаемыми из двух первых уравнений системы (2), находим

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -e_3 + e_4, \\
x_4 &= -e_3 - e_4 + \frac{3x_1 - x_2}{2},
\end{aligned}
$$

чем доказано, что векторы e_3 и e_4 являются линейными комбинациями векторов x_1, x_2, x_3 и x_4, а значит, векторы e_1 и e_2 — тоже, как показывают два первых уравнения системы (2).

2. Легко видеть, что

$$
x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = x_1 - e_3 = x_1 + \frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{3x_1 - x_2}{4} = \frac{x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4}{4}.
$$

Отсюда получаем координаты: 1/4, 1/4, 1/2, 1/2.

Замечания. 1) Проверка производится путем определения координат вектора x в каноническом базисе, исходя из его выражения относительно базиса x_1, x_2, x_3, x_4.

2) Независимость векторов x_1, x_2, x_3, x_4 можно установить, доказав, что уравнение

$$
\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0
$$

не имеет других решений, кроме $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Но этот способ не упрощает вычисления координат вектора x относительно нового базиса по сравнению с тем способом, который мы применили.

3.02. 1. Векторы u, v, w, как линейные комбинации векторов a, b, c, принадлежат векторному подпространству F, порожденному векторами a, b, c, и стало быть, векторное подпространство G, порожденное векторами u, v, w, вложено в F (любая линейная комбинация векторов u, v, w является линейной комбинацией векторов a, b, c).

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
u + v + w &= 2(a + b + c), \\
a &= \frac{u + v + w}{2} - u = \frac{v + w - u}{2}, \\
b &= \frac{u + v + w}{2} - v = \frac{u + w - v}{2}, \\
c &= \frac{u + v + w}{2} - w = \frac{u + v - w}{2}.
\end{aligned}
$$

Векторы a, b, c являются линейными комбинациями векторов u, v, w, т. е. подпространство F вложено в G; но

$$F \subset G \quad \text{и} \quad G \subset F \Rightarrow F = G.$$

2. Векторы a, b, c независимы в том и только в том случае, если $\dim F = 3$, и, точно так же, векторы u, v, w независимы в том и только в том случае, если $\dim G = 3$. Но мы видели, что F и G совпадают, и значит,

$$a,\ b,\ c \text{ независимы} \Leftrightarrow \dim F = \dim G = 3 \Leftrightarrow u,\ v,\ w \text{ независимы.}$$

Замечание. Предыдущий результат справедлив для произвольного векторного пространства E над полем R или Q. Однако он верен не всегда, а именно, он не имеет места, если тело K коэффициентов таково, что $1 + 1 = 0$ (например, если K есть поле целых чисел по $\bmod 2$); ясно, что тогда векторы u, v, w линейно зависимы, поскольку $u + v + w = 0$.

3.03. Функции f_n независимы, если коэффициенты любой линейной комбинации функций f_n, равной нейтральному элементу векторного пространства, равны нулю.

Важно отметить, что линейная комбинация элементов векторного пространства есть линейная комбинация конечного числа из них. Стало быть, если мы обозначим через N максимальный индекс тех функций f_n, которые фигурируют в рассматриваемой линейной комбинации, то можем записать эту комбинацию в такой форме:

$$\sum_1^N \lambda_n f_n.$$

Приравняем линейную комбинацию функций f_n нейтральному элементу v пространства, т. е. нулевой функции:

$$\sum_1^N \lambda_n f_n = v \quad \text{или} \quad \sum_1^N \lambda_n \sin^n t = 0, \quad \forall t.$$

Чтобы показать, что это условие влечет равенство нулю всех λ_n, можно рассуждать несколькими способами.

1) Многочлен $\sum_1^N \lambda_n u^n$ обращается в нуль для всех чисел u, заключенных между -1 и 1; он имеет бесконечно много нулей; значит, это нулевой многочлен, и все λ_n равны нулю.

2) Предположим, что не все λ_n равны нулю, и обозначим через λ_h ненулевой коэффициент с наименьшим индексом, что позволяет записать исходное условие в виде

$$\sin^h t\,(\lambda_h + \lambda_{h+1} \sin t + \ldots + \lambda_N \sin^{N-h} t) = 0.$$

Но $|\sin t| \geqslant |\sin^K t|$ при любом целом $K > 0$, и значит,

$$|\lambda_{h+1} \sin t + \ldots + \lambda_N \sin^{N-h} t| \leqslant |\sin t|(|\lambda_{h+1}| + \ldots + |\lambda_{N-h}|).$$

$$|\lambda_h + \ldots + \lambda_N \sin^{N-h} t| \geqslant |\lambda_h| - |\sin t|(|\lambda_{h+1}| + \ldots + |\lambda_{N-h}|).$$

Стало быть, если значение $|\sin t|$ достаточно мало, сомножитель

$$\lambda_h + \ldots + \lambda_N \sin^{N-h} t$$

отличен от нуля, равно как и сомножитель $\sin^h t$, и следовательно, исходное равенство не выполняется.

3.04. 1. Подмножество пространства E является векторным подпространством, если линейная комбинация двух элементов этого множества будет снова элементом того же множества. Возьмем элементы z и z' из $A+B$; они имеют вид

$$z = x + y \quad (x \in A,\ y \in B),$$
$$z' = x' + y' \quad (x' \in A,\ y' \in B).$$

Если λ и λ' — два числа из K, то

$$\lambda z + \lambda' z' = (\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y').$$

Элемент $\lambda x + \lambda' x'$ принадлежит подпространству A, а $\lambda y + \lambda' y'$ есть элемент подпространства B; следовательно, $\lambda z + \lambda' z'$ есть элемент множества $A+B$.

2. Допустим, что $A \cap B$ сводится к 0, и пусть для элемента z имеем $z = x + y = x' + y'$, где $x \in A$, $x' \in A$, $y \in B$, $y' \in B$. Отсюда $x - x' = y' - y$, где $x - x' \in A$, $y' - y \in B$; вектор $x - x' = y' - y$ принадлежит $A \cap B$, и стало быть, равен нулю. Таким образом, представление $z = x + y$ единственно; в этом случае говорят, что $A+B$ есть прямая сумма подпространств A и B.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ — базисы в A и B. Тогда, если z — элемент из $A+B$, то

$$z = x + y = \sum_1^n \alpha_i a_i + \sum_1^m \beta_i b_i.$$

Коэффициенты α_i и β_i единственны, ибо в противном случае имелось бы два представления $z = x + y = x' + y'$. Но это означает, что векторы $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ составляют базис пространства $A+B$ (векторы e_i образуют базис векторного пространства, если любой элемент пространства может быть записан, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов e_i).

Пусть $A \cap B$ не сводится к 0; рассмотрим подпространство A', дополнительное к $A \cap B$ до A (A есть прямая сумма $A \cap B$ и A'). Имеем

$$x \in A \Rightarrow x = u + x', \text{ где } u \in A \cap B,\ x' \in A',$$
$$y \in B \Rightarrow x + y = x' + (u + y),$$

где $x' \in A'$, $u + y \in B$.

Следовательно, подпространство $A+B$ содержится в $A'+B$; а так как оно, очевидно, содержит $A'+B$, то оба пространства совпадают.

Сумма $A'+B$, является прямой суммой, ибо

$$y \in A' \cap B \Rightarrow y \in A \cap B \Rightarrow y \in A' \cap (A \cap B) \Rightarrow y = 0.$$

А тогда, как мы видели,

$$\dim A+B = \dim A' + \dim B = (\dim A - \dim A \cap B) + \dim B$$

(размерность A' получаем, исходя из того, что A есть прямая сумма подпространств A' и $A \cap B$).

3.05. 1. Убедимся в том, что

$$x \in E \quad \text{и} \quad y \in E \Rightarrow \lambda x + \mu y \in E.$$

Коэффициенты функции x обозначим через a_k, b_k, а функции y — через α_k, β_k. Имеем

$$(\lambda x + \mu y)(t) = \lambda x(t) + \mu y(t) =$$
$$= \lambda \left[a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] +$$
$$+ \mu \left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right] =$$
$$= (\lambda a_0 + \mu \alpha_0) + \sum_{k=1}^{n} \{(\lambda a_k + \mu \alpha_k) \cos kt + (\lambda b_k + \mu \beta_k) \sin kt\},$$

и функция $\lambda x + \mu y$ принадлежит E.

2. При $m=0$ утверждение очевидно, так как в этом случае $x(t) = a_0$. Допустим, что оно верно для E_{m-1}; обозначим через a_k и b_k коэффициенты элемента x из E_m, являющегося нулевой функцией. Функция x бесконечно дифференцируема и ее производные равны нулю; следовательно, $x'' + m^2 x$ будет тоже нулевой функцией; но

$$(x'' + m^2 x)(t) = m^2 a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (m^2 - k^2)(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(выбранная линейная комбинация обращает в нуль коэффициенты при $\cos mt$ и $\sin mt$). Функция $x'' + m^2 x$ является нулевой функцией, кроме того, это элемент из E_{m-1}, поэтому, в силу предположения, все ее коэффициенты — нули.

Следовательно,

$$x(t) = a_m \cos mt + b_m \sin mt.$$

Задавая t значения 0 и $\pi/2m$, получаем $a_m = b_m = 0$.

3. Полученный сейчас результат показывает, что в E функции $t \to 1$, $t \to \cos kt$, $t \to \sin kt$ независимы (если линейная комбинация этих функций есть нулевая функция, то коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю). Эти функции,

по определению пространства E, его порождают; стало быть, они составляют базис этого пространства, и размерность E равна $2n+1$.

4. Пусть x_1 и x_2 — два элемента из E, а λ_1 и λ_2 — два действительных числа; для любого значения t

$$[u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)](t) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t + \pi/4) =$$
$$= \lambda_1 x_1 (t + \pi/4) + \lambda_2 x_2 (t + \pi/4) = \lambda_1 [u(x_1)](t) + \lambda_2 [u(x_2)](t) =$$
$$= [\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2)](t),$$

т. е.

$$u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2).$$

Отображение u линейно.

Индукцией по целым p легко показать, что

$$[u^p(x)](t) = x(t + p\pi/4),$$

откуда

$$[u^8(x)](t) = x(t + 2\pi) = x(t),$$

т. е. отображение u^8 тождественно.

Если x — элемент ядра отображения u, то

$$u(x) = 0 \Rightarrow u^7[u(x)] = u^8 x = x = 0,$$

т. е. ядро отображения u сводится к элементу 0.

Очевидно, u — отображение пространства E в себя. Покажем, что $u(E) = E$; для этого достаточно установить, что u — биективное отображение.

Для любого линейного отображения f конечномерного пространства X в конечномерное пространство Y сумма размерности ядра и размерности образа $f(X)$ совпадает с размерностью пространства X. В нашем случае размерность ядра равна нулю, поэтому $\dim u(E) = \dim E$, т. е. отображение u биективно.

Можно было бы также заметить, что отображение u имеет обратное отображение v, определенное формулой

$$[v(x)](t) = x(t - \pi/4),$$

что влечет биективность u.

3.06. 1. Известно, что R есть абелева группа по сложению и что произведение действительного числа x на рациональное число (и вообще, произведение двух действительных чисел) удовлетворяет соотношениям

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$
$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \qquad 1x = x.$$

2. Пусть λ и μ — рациональные числа, а x и y принадлежат E, т. е.

$$x = A(\omega, \theta), \qquad y = B(\omega, \theta),$$

где A и B — многочлены с рациональными коэффициентами. Тогда

$$\lambda x+\mu y=\lambda A(\omega,\ \theta)+\mu B(\omega,\ \theta)=(\lambda A+\mu B)(\omega,\ \theta);$$

$\lambda x+\mu y$ есть многочлен от ω и θ с рациональными коэффициентами и, следовательно, это есть число из E.

3. Индукцией по целым p убеждаемся, что любая степень ω^p числа ω с показателем $p\geqslant n$ является линейной комбинацией с рациональными коэффициентами чисел $1,\ \omega,\ \ldots,\ \omega^{n-1}$; точно так же, если $q\geqslant m$, то любая степень θ^q есть линейная рациональная комбинация чисел $1,\ \theta,\ \ldots,\ \theta^{m-1}$. Стало быть, всякое произведение $\omega^p\theta^q$ есть линейная комбинация с рациональными коэффициентами произведений $\omega^h\theta^k$, где $0\leqslant h\leqslant \leqslant n-1$, $0\leqslant k\leqslant m-1$; этот результат, очевидно, верен для любого многочлена от ω и θ с рациональными коэффициентами.

Предыдущий результат можно истолковать так, что элементы $\omega^h\theta^k$ (с $0\leqslant h\leqslant n-1$ и $0\leqslant k\leqslant m-1$) порождают подпространство E, которое, таким образом, имеет конечную размерность, и число порождающих элементов не превышает nm.

4. Степени $(\omega+\theta)^l$ числа $\omega+\theta$ являются элементами из E; среди них найдется не более nm независимых. Следовательно, между $nm+1$ элементами $(\omega+\theta)^0=1,\ \omega+\theta,\ (\omega+\theta)^2,\ \ldots$ $\ldots,\ (\omega+\theta)^{nm}$ существует линейная зависимость, т. е. равна нулю некоторая линейная комбинация этих элементов с рациональными коэффициентами, из которых не все равны нулю; или, то же самое, $\omega+\theta$ служит корнем алгебраического уравнения степени, не превышающей nm, с рациональными коэффициентами.

3.07. 1. Пусть $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — две последовательности из $\mathscr{S}$, а λ — комплексное число. Тогда

$$u_n=a_1u_{n-1}+\ \ldots\ +a_ku_{n-k},$$
$$v_n=a_1v_{n-1}+\ \ldots\ +a_kv_{n-k},$$

откуда

$$u_n-v_n=a_1(u_{n-1}-v_{n-1})+\ \ldots\ +a_k(u_{n-k}-v_{n-k}),$$
$$\lambda u_n=a_1(\lambda u_{n-1})+\ \ldots\ +a_k(\lambda u_{n-k}).$$

Следовательно, последовательности $\{u_n-v_n\}$ и $\{\lambda u_n\}$ принадлежат $\mathscr{S}$. Но, по определению,

$$\{u_n-v_n\}=\{u_n\}-\{v_n\}\qquad\text{и}\qquad\{\lambda u_n\}=\lambda\{u_n\};$$

таким образом, если $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности из $\mathscr{S}$, то $\{u_n\}-\{v_n\}$ и $\lambda\{u_n\}$ тоже принадлежат $\mathscr{S}$; значит, $\mathscr{S}$ есть векторное подпространство векторного пространства над C последовательностей с комплексными коэффициентами (см. п. 2 из введения к первому разделу).

2. Если заданы числа $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$, то рекуррентное соотношение позволяет единственным образом найти все члены последовательности. Значит, существует последовательность, у которой члены с номером $n < k$ имеют любые заданные значения, и такая последовательность единственна; две последовательности, у которых члены с номерами $n < k$ попарно равны, совпадают.

Определим k последовательностей $\{e_n^{(h)}\}$, где индекс h принимает значения $0, 1, \ldots, k-1$, задав первые k членов следующим образом:

$$e_n^{(h)} = 0, \quad \text{если } n < k \quad \text{и} \quad n \neq h,$$
$$e_h^{(h)} = 1.$$

Эти k последовательностей независимы; действительно, образуем последовательность

$$\sum_{h=0}^{k-1} \lambda_h \{e_n^{(h)}\} = \left\{ \sum_{h=0}^{k-1} \lambda_h e_n^{(h)} \right\}.$$

Если $h < k$, то h-й член этой последовательности равен λ_h; согласно определению, если эта последовательность нулевая, то все ее члены равны нулю, т. е. все λ_h равны нулю; а это и есть определение независимых элементов в векторном пространстве.

Пусть теперь $\{u_n\}$ — произвольная последовательность из $\mathscr{S}$; отнесем ей последовательность $\{v_n\}$ вида

$$\{v_n\} = \sum_{h=0}^{k-1} u_h \{e_n^{(h)}\} = \left\{ \sum_{h=0}^{k-1} u_h e_n^{(h)} \right\}.$$

Очевидно, что если $n < k$, то член v_n равен u_n; стало быть, последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ совпадают.

Любая последовательность из $\mathscr{S}$ является линейной комбинацией независимых последовательностей $\{e_n^{(h)}\}$; следовательно, последовательности образуют базис пространства $\mathscr{S}$, и его размерность равна числу k этих последовательностей.

3.08. 1. Если многочлен $u^3 - 2$ делится на $a + bu + cu^2$, то частное есть многочлен первой степени с рациональными коэффициентами. Нуль этого многочлена рационален и является также нулем многочлена $u^3 - 2$; но это невозможно, поскольку единственный действительный нуль многочлена $u^3 - 2$ равен $\sqrt[3]{2}$, и значит, не является рациональным.

Если н. о. д. многочленов $u^3 - 2$ и $a + bu + cu^2$ имеет степень 1, то нуль x_0 этого многочлена будет нулем и многочлена $u^3 - 2$. Но мы знаем, что коэффициенты н. о. д. двух многочленов принадлежат телу коэффициентов этих многочленов, в данном случае — полю рациональных чисел; тогда x_0 рационально, а

u^3-2, как мы видели, не может иметь рациональных нулей. Следовательно, многочлены u^3-2 и $a+bu+cu^2$ не могут иметь общего делителя.

2. Разность двух чисел из E, очевидно, будет числом из E. Произведение двух чисел из E, в силу дистрибутивности умножения относительно сложения, является линейной комбинацией с рациональными коэффициентами чисел $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ и их произведений

$$\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4},\quad \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}=2,\qquad \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{2}.$$

И следовательно, произведение двух чисел из E снова будет числом из E. Но это означает, что E — подкольцо кольца действительных чисел (см. п. 2 введения к первому разделу).

Многочлены u^3-2 и $a+bu+cu^2$ взаимно просты; следовательно (теорема Безу), существуют единственные многочлены U и V, удовлетворяющие условиям

$$U(u)(u^3-2)+V(u)(a+bu+cu^2)=1,$$
$$\deg U<2,\qquad \deg V<3.$$

Коэффициенты этих многочленов, как и многочленов u^3-2 и $a+bu+cu^2$, рациональны. Задавая u значение $\sqrt[3]{2}$, получаем

$$V(\sqrt[3]{2})(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=1.$$

Обратный элемент для $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ есть

$$V(\sqrt[3]{2})=a'+b'\sqrt[3]{2}+c'\sqrt[3]{4}$$

(многочлен V имеет степень, не превосходящую 2, а его коэффициенты a', b', c' рациональны). Таким образом, обратный ненулевого элемента из E принадлежит E, и стало быть, кольцо E является телом.

3. Мы уже знаем, что E — абелева группа по сложению; в силу свойств умножения действительных чисел произведение числа из E на рациональное число удовлетворяет аксиомам внешнего умножения в векторных пространствах; следовательно, E — векторное пространство над Q.

Пространство E порождается элементами $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ (любой элемент из E является линейной комбинацией с рациональными коэффициентами этих трех элементов); чтобы показать, что они составляют базис пространства E, необходимо показать, что они независимы. Допустим, что найдутся такие ненулевые рациональные числа p, q, r, что

$$p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{4}=0.$$

Тогда многочлены u^3-2 и $p+qu+ru^2$ имеют общий нуль $\sqrt[3]{2}$ и не будут взаимно простыми, а это, согласно п. 1, невозможно.

3.09. 1. Известно, что многочлены с комплексными коэффициентами образуют векторное пространство E над C.

Разность двух многочленов степени меньше или равной n есть многочлен степени меньше или равной n, произведение многочлена степени $\leqslant n$ на комплексное число снова дает многочлен степени $\leqslant n$. Следовательно, E_{n+1} — векторное подпространство пространства E.

Многочлены $1, x, \ldots, x^n$ независимы и порождают подпространство E_{n+1}; они составляют базис пространства E_{n+1}, размерность которого, таким образом, равна $n+1$.

2. Покажем индукцией по k, что x^k есть линейная комбинация многочленов $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Для $k=0$ это очевидно, поскольку A_0 — не равная нулю постоянная (многочлен 0 не есть многочлен нулевой степени). Допустим, что утверждение доказано для $k \leqslant p-1$. По условию,

$$A_p = a_p x^p + A'_p,$$

где $a_p \neq 0$ и $\deg A'_p \leqslant p-1$. Многочлен A'_p, как линейная комбинация многочленов x^k с показателем $k \leqslant p-1$, является линейной комбинацией многочленов A_k с индексом $k \leqslant p-1$, ибо, в силу предположения, это имеет место для x^k;

$$A'_p = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A_k \Rightarrow x^p = \frac{1}{a_p} A_p - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{a_p} A_k,$$

т. е. x^p есть линейная комбинация многочленов A_k $(k \leqslant p)$, и свойство доказано.

Многочлены $A_0, A_1, \ldots, A_n$ порождают E_{n+1}, ибо любой многочлен P из E_{n+1}, будучи линейной комбинацией многочленов $1, x, \ldots, x^n$, является и линейной комбинацией многочленов $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Размерность порождаемого пространства равна максимальному числу линейно независимых элементов во множестве $A_0, \ldots, A_n$, а поскольку размерность пространства E_{n+1} равна $n+1$, то многочлены A_p независимы и образуют базис этого пространства.

3. F_B есть векторное подпространство пространства E_{n+1}; в самом деле,

$$P = BQ \quad \text{и} \quad P' = BQ' \Rightarrow P - P' = B(Q - Q'),$$
$$Q = BQ \Rightarrow \lambda P = B(\lambda Q).$$

Многочлены $B, Bx, \ldots, Bx^{n-k}$, очевидно, независимы, и любое кратное BQ многочлена B степени меньше или равной n будет линейной комбинацией этих многочленов, ибо Q есть линейная комбинация многочленов 1, x, ..., x^{n-k}. Стало быть, они образуют базис пространства F_B; размерность F_B равна $n-k+1$.

Разделив многочлен $P \in E_{n+1}$ на B, получаем

$$P = BQ + R, \quad \text{где} \quad \deg R < \deg B,$$

причем многочлены Q и R единственны. Иначе говоря, любой многочлен из E_{n+1} представим в виде суммы многочлена из F_B и многочлена степени меньше или равной $k-1$, и это представление единственно. В этом случае говорят (Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VII, 2-й раздел, § 3), что векторные подпространства F_B и G_k взаимно дополнительны.

Согласно предыдущему исследованию, если B есть произвольный многочлен степени точно k, то множество F_B многочленов, кратных многочлену B, есть векторное подпространство, дополнительное к G_k; а поскольку два подпространства F_B и $F_{B'}$ совпадают лишь в случае пропорциональности B и B', то тем самым определяется бесконечное множество пространств, дополнительных к G_k.

Возьмем в качестве F_1 векторное подпространство многочленов, кратных многочлену $x+1$, а в качестве F_2 — подпространство многочленов, кратных многочлену x. Многочлен $(x+1)-x$, т. е. многочлен 1, составляет разность двух элементов из $F_1 \cup F_2$; но он не принадлежит ни F_1, ни F_2, а значит, не принадлежит и $F_1 \cup F_2$. Множество $F_1 \cup F_2$ не будет векторным подпространством.

3.10. 1. Многочлены U_k удовлетворяют условиям, наложенным на многочлены A_p в п. 2 задачи 3.09, и следовательно, они образуют базис пространства E_{n+1}.

2. Многочлены x^k образуют базис пространства E_{n+1}; если P — произвольный многочлен из E_{n+1}, то существует единственная система таких коэффициентов a_k, что

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Требуется, чтобы φ было линейным отображением, поэтому

$$\varphi(P) = \varphi\left(\sum_0^n a_k x^k\right) = \sum_0^n a_k \varphi(x^k) = \sum_0^n a_k U_k,$$

чем доказана единственность функции φ.

Обратно, отображение φ, ставящее многочлену P в соответствие многочлен

$$\sum_0^n a_k U_k,$$

очевидно, линейно:

$$\varphi(P+P')=\sum_0^n (a_k+a'_k)\,U_k=\sum_0^n a_kU_k+\sum_0^n a'_kU_k=\varphi(P)+\varphi(P'),$$

$$\varphi(\lambda P)=\sum_0^n (\lambda a_k)\,U_k=\lambda\sum_0^n a_kU_k=\lambda\varphi(P),$$

чем доказано существование функции φ.

Заметим, что в доказательстве использовалось лишь единственное свойство пространства E_{n+1}, что x^k образуют базис этого пространства.

Установим биективность φ, используя тот факт, что многочлены U_k составляют базис пространства E_{n+1}. Если Q — многочлен из E_{n+1}, то он может быть единственным образом представлен в виде

$$\sum_0^n a_kU_k,$$

и следовательно, он преобразован функцией φ из многочлена

$$P=\sum_0^n a_kx^k;$$

такой многочлен P — единственный.

Иными словами, уравнение $\varphi(P)=Q$ при любом Q имеет, и притом единственное, решение, т. е. отображение φ биективно.

3. Очевидно, что

$$\delta(P+Q)=\delta(P)+\delta(Q),\qquad \delta(\lambda P)=\lambda\delta(P).$$

Значит, δ линейно. Имеем

$$\begin{aligned}\delta(U_k)&=(x+1)\,x\ldots(x-k+2)-\\&\quad-x(x-1)\ldots(x-k+2)(x-k+1)=\\&=x(x-1)\ldots(x-k+2)\,[x+1-(x-k+1)]=kU_{k-1},\end{aligned}$$

кроме случая $k=0$, когда $\delta(U_0)=0$.

Если P — произвольный многочлен из E_{n+1}, то

$$P=\sum_0^n p_kU_k\Rightarrow\delta(P)=\sum_0^n p_k\delta(U_k)=\sum_1^n kp_kU_{k-1}.$$

Многочлены U_k независимы; стало быть, $\delta(P)$ равно нулю в том и только в том случае, если $kp_k=0$, т. е. $p_k=0$ для $k=1, 2, \ldots, n$. Ядро есть подпространство постоянных многочленов.

Образ $\delta(E_{n+1})$ есть подпространство, порожденное многочленами U_{k-1}, т. е. подпространство E_n многочленов степени меньше или равной $n-1$.

Отметим наконец, что если F — подпространство, порожденное многочленами U_k с индексом $k\geqslant 1$, т. е. подпространство многочленов, обращающихся в нуль при $x=0$, то сужение $\bar\delta$ отображения δ на F есть биективное отображение пространства F на $\delta(E_{n+1})$, т. е. на E_n:

$$P=\sum_1^n p_k U_k \Rightarrow \bar\delta(P)=\sum_1^n k p_k U_{k-1},$$

$$Q=\sum_0^{n-1} q_k U_k \Rightarrow \bar\delta^{-1}(Q)=\sum_0^{n-1} \frac{q_k}{k} U_{k+1}.$$

4. Если P имеет степень m, то многочлен Q вида $Q(x)=$ $=P(x+1)-P(x)$ имеет степень точно $m-1$. Если степень R равна $n-1$, то решения P уравнения принадлежат, следовательно, векторному пространству E_{n+1}. В п. 3 данной задачи было доказано, что сужение $\bar\delta$ отображения δ на F есть биективное отображение F на E_n; стало быть, существует, и притом только один, многочлен P в F (т. е. обращающийся в нуль при $x=0$), являющийся решением уравнения.

Чтобы в рассматриваемом частном случае получить P в явном виде, выразим R в E_4 при помощи базиса U_0, U_1, U_2, U_3 и воспользуемся выражением, полученным в п. 3 для $\bar\delta^{-1}$; имеем $R=x^3-5x^2+x+1=x(x-1)(x-2)-2x^2-x+1=$ $=x(x-1)(x-2)-2x(x-1)-3x+1 = U_3-2U_2-3U_1+U_0$; отсюда

$$\bar\delta^{-1}(R)=\frac{U_4}{4}-\frac{2U_3}{3}-\frac{3U_2}{2}+U_1=\frac{x}{12}(3x^3-26x^2+39x-4).$$

5. Отображение d, как композиция трех линейных отображений, линейно. Исследуем образы элементов базиса пространства E_{n+1}, для чего возьмем базис, составленный из многочленов x^k; имеем

$$x^k \xrightarrow{\varphi} U_k \xrightarrow{\delta} kU_{k-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} kx^{k-1}.$$

Отображение d переводит каждый многочлен x^k в производный многочлен kx^{k-1}; а так как дифференцирование есть линейное отображение, то результат распространяется на произвольный многочлен из E_{n+1}; отображение d каждому многочлену $P\in E_{n+1}$ сопоставляет производный многочлен.

3.11. 1. Если старшие члены (т. е. члены наибольшей степени) многочленов A и P равны ax^α и hx^k, то старший член многочлена $f(P)$ равен $ah(k-\alpha)x^{\alpha+k-1}$; он отличен от нуля при $k-\alpha\neq 0$. Очевидно,

$$f(A)=AA'-A'A=0.$$

Если P — многочлен из $E_{\alpha+1}$, то он представим в виде $\lambda A+P_1$, где λ — некоторое число, а P_1 — многочлен из E_α (это можно получить делением); следовательно,

$$f(P)=\lambda f(A)+f(P_1)=f(P_1),$$

и $f(E_{\alpha+1})$ содержится в $f(E_\alpha)$. Но $E_{\alpha+1}$ содержит E_α, и следовательно, $f(E_{\alpha+1})$ содержит $f(E_\alpha)$; таким образом, эти множества совпадают.

Если степень k многочлена P не равна α, то $f(P)$ отлично от нуля (член степени $\alpha+k-1$ не равен нулю). Если $k=\alpha$, то, как мы знаем, $f(P)=f(P_1)$, и $f(P_1)$ не равно нулю, если P_1 не равно нулю (степень P_1 отлична от α). Таким образом, для того чтобы многочлен P принадлежал ядру отображения f, необходимо и достаточно, чтобы P было пропорционально многочлену A.

2. Ранг r_{n+1} сужения $\bar f$ отображения f на E_{n+1} равен размерности пространства $\bar f(E_{n+1})$; известно также (Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VII, 3-й раздел, § 3), что

$$r_{n+1}=(n+1)-\dim \bar f^{-1}(0).$$

Ядро $\bar f^{-1}(0)$ сводится к элементу 0, если $n<\alpha$, и содержит многочлены вида λA, если $n\geqslant\alpha$; в последнем случае оно имеет размерность 1. Следовательно,

$$r_{n+1}=n+1,\quad \text{если}\quad n\leqslant\alpha-1,$$
$$r_{n+1}=n,\quad \text{если}\quad n\geqslant\alpha.$$

3. F_{p+1}, как пересечение двух векторных подпространств E_{p+1} и $f(E)$, является векторным подпространством пространства E_{p+1}. Многочлен Q из F_{p+1} есть образ при отображении f по крайней мере одного многочлена P, и мы всегда можем в качестве P взять многочлен степени, отличной от α, ибо если Q принадлежит $f(E_{\alpha+1})$, то он принадлежит также $f(E_\alpha)$. При этих условиях

$$\deg Q=\deg f(P)=\deg P+\alpha-1,$$
$$\deg Q=p \Leftrightarrow \deg P\leqslant p-\alpha+1.$$

Следовательно, F_{p+1} есть образ $f(E_{p-\alpha+2})$ подпространства $E_{p-\alpha+2}$ многочленов степени меньше или равной $p-\alpha+1$.

Если $p-\alpha+1<0$, т. е. $p<\alpha-1$, то не существует ни одного многочлена P, степень которого удовлетворяла бы полученному условию; тогда F_{p+1} сводится к нулевому элементу и имеет нулевую размерность.

Если $p-\alpha+1\geqslant 0$, то размерность пространства F_{p+1}, т. е. пространства $f(E_{p-\alpha+2})$, равна рангу $r_{p-\alpha+2}$ сужения $\bar f$ отображения f на $E_{p-\alpha+2}$; этот ранг был определен в п. 2; в силу этого результата имеем:

если $0\leqslant p-\alpha+1\leqslant\alpha-1$, т. е. $\alpha-1\leqslant p\leqslant 2(\alpha-1)$, то F_{p+1} имеет размерность $p-\alpha+2$;

если $p-\alpha+1\geqslant\alpha$, т. е. $p\geqslant 2\alpha-1$, то подпространство F_{p+1} имеет размерность $p-\alpha+1$.

Если $A=x^2$, то $\alpha=2$; стало быть, F_3 есть образ пространства E_2; многочлен Q из F_3 имеет вид $x^2P'-2xP$, где P —

произвольный многочлен степени 1 или 0; следовательно, многочлены Q являются многочленами степени меньше или равной 2 и обращаются в нуль при $x = 0$.

4. Предположим, что нули многочлена A — простые. Обозначим через N/D неприводимую дробь, производная которой равна Q/A^2. Нули порядка α многочлена D служат для производной полюсами порядка, не меньшего $\alpha+1$; а так как полюсы дроби Q/A^2 имеют порядок 2, то все нули многочлена D будут простыми, и производная

$$\frac{N'D - ND'}{D^2}$$

будет неприводимой дробью. Таким образом, многочлен D будет служить делителем для A, а Q/A^2 будет производной дроби вида P/A, откуда получаем $Q = f(P)$. Обратно, если $Q = f(P) = AP' - A'P$, то дробь Q/A^2 есть производная дроби P/A. Следовательно, это условие необходимо и достаточно.

Дроби вида Q/x^4 будут производными рациональных дробей, если Q есть произвольный многочлен степени меньше или равной 2,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x^4} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{a}{x} - \frac{b}{2x^2} - \frac{c}{3x^3}\right).$$

Но, как мы видели в п. 3, множество F_3 многочленов, принадлежащих E_3 и $f(E)$ (где функция f определена посредством многочлена x^2), не совпадает с пространством E_3.

Так же и в общем случае, если A имеет кратные корни, то очевидно, что для Q, принадлежащего $f(E)$, дробь Q/A^2 будет производной рациональной функции; обратное же неверно.

3.12. 1. Возьмем базис $e_1, \ldots, e_k$ ядра $v^{-1}(0)$; эти векторы, по определению, независимы и содержатся в $u^{-1}(0)$, поскольку $u^{-1}(0)$ содержит $v^{-1}(0)$; теорема о неполном базисе (Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VII, 2-й раздел, § 3) позволяет утверждать, что найдется h независимых векторов, образующих с k первыми базис ядра $u^{-1}(0)$.

Полученные таким путем $k+h$ векторов независимы; значит, можно выбрать $n-(k+h)$ векторов, образующих вместе с ними базис пространства E. Исследуем независимость векторов $v(e_i)$. Так как функция v линейна, то

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v(e_i) = 0 \Rightarrow v\left(\sum_{k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0,$$

и следовательно, вектор

$$\sum_{k+1}^{n} \lambda_i e_i$$

принадлежит ядру отображения v, а значит, является линейной комбинацией векторов базиса ядра,

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i.$$

Векторы e_i независимы, поэтому коэффициенты этого соотношения, и в частности, λ_i, равны нулю. Векторы $v(e_i)$ независимы, а так как они порождают пространство $v(E)$, то они образуют базис пространства $v(E)$.

2. Отображения u и $w \circ v$ линейны; они будут совпадать в том случае, когда они переводят векторы базиса в одни и те же векторы. Значит, отображение w должно удовлетворять условиям

$$u(e_i) = (w \circ v)(e_i) = w[v(e_i)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а поскольку

$$i \leqslant k \Rightarrow e_i \in v^{-1}(0) \subset u^{-1}(0),$$

то для $i \leqslant k$

$$u(e_i) = v(e_i) = w[v(e_i)] = 0.$$

Векторы $v(e_i)$ с индексом $i > k$ образуют базис пространства $v(E)$. Любой вектор из $v(E)$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде

$$\sum_{k+1}^{n} \lambda_i v(e_i).$$

Отображение w_1 пространства $v(E)$ в E, определенное формулой

$$w_1\left[\sum_{k+1}^{n} \lambda_i v(e_i)\right] = \sum_{k+1}^{n} \lambda_i u(e_i),$$

линейно и переводит $v(e_i)$ в $u(e_i)$ (для $i > k$ это верно по определению w_1, а для $i \leqslant k$ — потому, что эти векторы равны нулю).

Линейное отображение w пространства E в E определяется заданием его сужений w_1 и w_2 на два взаимно дополнительных подпространства. Сужение w_2 отображения w на дополнительное к $v(E)$ подпространство может быть выбрано произвольно; действительно, каково бы ни было w_2, отображение w удовлетворяет условиям

$$w[v(e_i)] = w_1[v(e_i)] = u(e_i).$$

3. Ядро $v^{-1}(0)$ есть прямая Δ (рис. 4), перпендикулярная P в точке O, а ядро $u^{-1}(0)$ — плоскость Π, перпендикулярная D

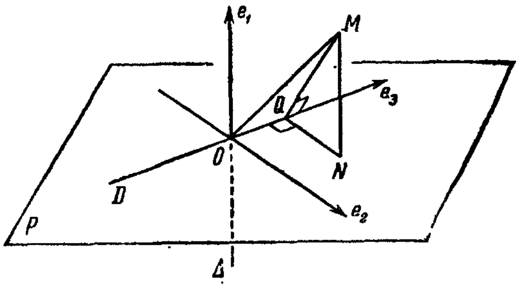

Рис. 4.

в O, которая содержит и прямую Δ. Для определения w возьмем базис в R^3, состоящий

из единичного вектора e_1 прямой Δ;

из единичного вектора e_2 пересечения плоскостей P и Π;

из единичного вектора e_3 прямой D.

Имеем

$$u(e_1) = v(e_1) = 0,$$
$$u(e_2) = 0 \quad \text{и} \quad v(e_2) = e_2 \Rightarrow w(e_2) = 0,$$
$$u(e_3) = e_3 \quad \text{и} \quad v(e_3) = e_3 \Rightarrow w(e_3) = e_3.$$

В плоскости P отображение w есть проекция на прямую D (в дополнительном к P пространстве, состоящем из векторов, пропорциональных e_1, w произвольно).

Отсюда получаем такой результат: проекция вектора OM на прямую D, проходящую через O, будет также проекцией проекции вектора OM на плоскость P, содержащую D (теорема о трех перпендикулярах).

3.13. 1. Известно, что множество $\mathcal{F}$ отображений множества E в векторное пространство F над телом K есть векторное пространство над K (Пизо и Заманский, Алгебра, гл. III, 3-й раздел, § 1). Мы покажем, что $\mathcal{L}$ есть векторное подпространство пространства $\mathcal{F}$, доказав, что $f-g$ и λf — функции из $\mathcal{L}$, если f и g — функции из $\mathcal{L}$. Имеем

$$(f-g)(x+x') = f(x+x') - g(x+x') =$$
$$= f(x) + f(x') - [g(x) + g(x')] = [f(x) - g(x)] +$$
$$+ [f(x') - g(x')] = (f-g)(x) + (f-g)(x'),$$
$$(f-g)(\lambda x) = f(\lambda x) - g(\lambda x) = \lambda f(x) - \lambda g(x) =$$
$$= \lambda [f(x) - g(x)] = \lambda [(f-g)(x)].$$

Итак, функция $f-g$ линейна и принадлежит $\mathcal{L}$.

Точно так же убеждаемся в том, что функция λf линейна; тем самым доказано, что $\mathscr{L}$ есть векторное подпространство пространства $\mathscr{F}$.

2. Задание векторов $f(e_i)$ определяет f формулой

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(e_i).$$

Векторы $f(e_i)$ могут выбираться произвольно; действительно, если ε_i $(i = 1, \ldots, m)$ — векторы из F, то отображение g пространства E в F вида

$$g\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varepsilon_i$$

линейно, и по определению, $g(e_i) = \varepsilon$.

Множества $\{\varepsilon_i\}$ из m векторов пространства F могут рассматриваться как элементы векторного пространства F^m — произведения m пространств, равных F. Отображение φ пространства $\mathscr{L}$ в F^m, которое каждому элементу f из $\mathscr{L}$ ставит в соответствие множество из m векторов $f(e_i)$, линейно и биективно,

$$\varphi(f+g) = \{(f+g)(e_i)\} = \{f(e_i)\} + \{g(e_i)\},$$
$$\varphi(\lambda f) = \{(\lambda f)(e_i)\} = \lambda \{f(e_i)\},$$
$$\varphi(f) = 0 \Rightarrow f(e_i) = 0 \ \forall i \Rightarrow f = 0.$$

Два векторных пространства $\mathscr{L}$ и F^m изоморфны, и значит, имеют одинаковую размерность, т. е. mn (пространство F^m изоморфно пространству K^{mn}).

3. $\mathscr{L}$ есть аддитивная абелева группа; композиция отображений есть внутренняя операция в $\mathscr{L}$ (композиция двух линейных отображений линейна), ассоциативная в силу того, что, вообще, композиция функций ассоциативна. Стало быть, достаточно убедиться в том, что композиция отображений дистрибутивна относительно сложения (справа и слева, поскольку оно не коммутативно).

Определение операций над функциями и линейность функции f позволяют записать

$$[f(g+g')](x) = f[(g+g')(x)] = f[g(x) + g'(x)] =$$
$$= f[g(x)] + f[g'(x)] = (fg)(x) + (fg')(x) = (fg + fg')(x),$$
$$[(f+f')g](x) = (f+f')[g(x)] = f[g(x)] + f'[g(x)] =$$
$$= (fg)(x) + (f'g)(x) = (fg + f'g)(x).$$

А так как предыдущие равенства установлены для любого вектора x, то

$$f(g+g') = fg + fg', \qquad (f+f')g = fg + f'g.$$

4. Векторное пространство $\mathscr{L}$ линейных отображений пространства E в E имеет размерность m^2; следовательно, m^2+1 элементов из $\mathscr{L}$ зависимы.

Применим это к отображениям f^i для $0 \leqslant i \leqslant m^2$; тогда найдутся такие, не все равные нулю, коэффициенты a_i из тела K, что

$$\sum_{i=0}^{m^2} a_i f^i = 0.$$

Замечания. 1) Этот многочлен A всегда может быть взят и меньшей степени, чем m^2.

2) Множество многочленов A, удовлетворяющих равенству $A(f)=0$, есть идеал $\mathscr{J}$ кольца многочленов с коэффициентами в K ($\mathscr{J}$ содержит $A_1 - A_2$ и BA_1, если он содержит A_1 и A_2, при произвольном многочлене B).

3.14. 1. Образ $f(E)$ содержит векторы $f^p(x_0)$, каждый из которых является образом предыдущего; а поскольку эти векторы образуют базис пространства E, то $f(E)$ есть само пространство E. Следовательно, ранг r отображения f, по определению, равен n; но мы знаем, что

$$r = \dim E - \dim f^{-1}(0).$$

Таким образом, $f^{-1}(0)$ имеет нулевую размерность, и f есть биекция E на E.

2. Векторы $x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)$ независимы; действительно,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)\right) = \sum_{0}^{n-1} \lambda_i f^{i+1}(x_0) = 0;$$

векторы $f^{i+1}(x_0)$ независимы по определению, и значит, все λ_i равны нулю.

Вектор $f^n(x_0)$ может быть разложен по векторам базиса $x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)$; стало быть, найдутся такие числа a_p, что

$$f^n(x_0) + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \ldots + a_0 x_0 = 0.$$

Подвергнув эти векторы отображению f^p, получаем

$$f^p[f^n(x_0)] + a_{n-1} f^p[f^{n-1}(x_0)] + \ldots + a_0 f^p(x_0) = 0,$$

что может быть записано также, с учетом равенства $f^p f^q = f^q f^p$, в виде

$$f^n[f^p(x_0)] + a_{n-1} f^{n-1}[f^p(x_0)] + \ldots + a_0 f^p(x_0) = 0.$$

Отображение $f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 e$ переводит в 0 все векторы $f^p(x_0)$ базиса, и значит, это нулевое отображение.

3. Коэффициенты b_i можно получить, разложив вектор $g(x_0)$ по базису $x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)$:

$$g(x_0) = b_{n-1} f^{n-1}(x_0) + b_{n-2} f^{n-2}(x_0) + \ldots + b_0 x_0.$$

Обозначим теперь через h отображение $b_{n-1}f^{n-1}+\ldots+b_0e$; отображение h перестановочно с f как сумма отображений, перестановочных с f, и стало быть, $g-h$ тоже перестановочно с f.

Поскольку $(g-h)(x_0)=0$, то

$$[f(g-h)](x_0)=[(g-h)f](x_0)=(g-h)[f(x_0)]=0;$$

отсюда индукцией по целому p получаем

$$(g-h)[f^p(x_0)]=0.$$

Отображение $g-h$, переводящее в 0 векторы базиса, есть нулевое отображение.

3.15. 1. Если многочлену A поставить в соответствие число $A(x_0)$, то тем самым будет определено отображение l пространства E_{n+1} в поле C комплексных чисел; при этом

$$l(A+B)=(A+B)(x_0)=A(x_0)+B(x_0)=l(A)+l(B),$$
$$l(\lambda A)=(\lambda A)(x_0)=\lambda A(x_0)=\lambda l(A).$$

Отображение l линейно, т. е. l — линейная форма на E_{n+1}.

2. Предположим, что линейные формы l_i, определяемые равенством $l_i(A)=A(x_i)$, связаны соотношением

$$\sum_i \lambda_i l_i=0.$$

По определению нулевой формы, для любого многочлена A из E_{n+1} имеем

$$\left(\sum_i \lambda_i l_i\right)(A)=\sum_i \lambda_i l_i(A)=\sum_i \lambda_i A(x_i)=0.$$

Возьмем в качестве A многочлен

$$A_j=\prod_{i\neq j}(x-x_i);$$

этот многочлен имеет степень n и обращается в нуль для всех значений x_i, за исключением x_j, так что

$$\sum_i \lambda_i A_j(x_i)=\lambda_j A_j(x_j)=0 \Rightarrow \lambda_j=0.$$

А так как j — любой из индексов $1, 2, \ldots, n+1$, то тем самым доказано, что $\lambda_j=0$ при любом j.

Формы l_i независимы; их число $n+1$ равно размерности пространства E_{n+1}, а значит, и E^*_{n+1}; стало быть, они образуют базис $\mathscr{B}^*$ пространства E^*_{n+1}.

3. Исследование, проведенное в п. 2, показывает, что многочлены

$$L_j=\frac{A_j}{A_j(x_j)}$$

образуют базис, сопряженный к базису $\mathscr{B}^*$, образованному линейными формами l_i. Имеем

$$l_i(L_j) = \frac{l_j(A_j)}{A_j(x_j)}.$$

Но по условию, $l_i(A_j) = 0$, если $i \neq j$, а $l_j(A_j) = A_j(x_j)$; следовательно, $l_i(L_j) = 0$ или 1 в зависимости от того, будет ли $i \neq j$ или $i = j$.

Легко убеждаемся в том, что многочлены L_j являются многочленами Лагранжа, ибо

$$L_j(x) = \frac{\prod\limits_{i \neq j} (x - x_i)}{\prod\limits_{i \neq j} (x_j - x_i)}.$$

4. Определение базиса $\{\varphi_j\}$, сопряженного к базису $\{e_i\}$, показывает, что $\varphi_j(e_i)$ есть j-я координата вектора e_i относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$; отображение, которое вектору x ставит в соответствие его j-ю координату относительно заданного базиса, есть линейная форма, принимающая для всех векторов базиса те же значения, что и φ_j, а значит, совпадающая с φ_j. Значение $\varphi_j(x)$ формы φ_j для вектора x будет, таким образом, j-й координатой вектора x относительно базиса $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n$.

Формула Тейлора для многочленов:

$$A(x) = \sum_{0}^{n} \frac{A^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

показывает, что координаты многочлена A относительно базиса $1, x, \ldots, x^n$ равны линейным формам φ_k вида

$$\varphi_k(A) = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}.$$

Следовательно, эти формы φ_k являются элементами базиса, сопряженного к базису $1, x, \ldots, x^n$.

5. Отображение ψ пространства E_{n+1} в C, определяемое равенством $\psi(A) = A'(x_0)$, есть линейная форма на E_{n+1}, поскольку

$$\psi(A + B) = (A + B)'(x_0) = A'(x_0) + B'(x_0) = \psi(A) + \psi(B),$$
$$\psi(\lambda A) = (\lambda A)'(x_0) = \lambda A'(x_0) = \lambda\psi(A).$$

Значит, форма ψ есть линейная комбинация элементов базиса пространства E^*_{n+1}, и в частности, базиса $\mathscr{B}^*$, определенного п. 2; найдутся такие комплексные числа λ_i, что

$$\psi = \sum_{1}^{n+1} \lambda_i l_i \quad \text{или} \quad A'(x_0) = \psi(A) = \sum_{1}^{n+1} \lambda_i l_i(A) = \sum_{1}^{n+1} \lambda_i A(x_i).$$

Значения постоянных λ_i можно получить, выбирая в качестве A последовательно многочлены L_j базиса $\mathcal{B}$, сопряженного к базису $\mathcal{B}^*$,

$$L'_j(x_0)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i l_i(L_j)=\lambda_j,$$

$$\lambda_j=L'_j(x_0)=L_j(x_0)\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_0-x_i}=\frac{\prod\limits_{i\neq j}(x_0-x_i)}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_0-x_i}.$$

3.16. Ранг отображения f равен размерности порожденного линейными формами X, Y, Z векторного подпространства пространства E, сопряженного к R^3 (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VII, 4-й раздел, § 2). Для того чтобы это подпространство имело размерность 3, необходимо и достаточно, чтобы формы X, Y, Z были независимы.

Выберем в качестве базиса пространства E формы X, x, y; они образуют базис в силу того, что форма z может быть выражена в виде линейной комбинации от X, x, y:

$$z=(m-2)x+2y-X.$$

Относительно нового базиса формы X, Y, Z имеют вид

$$X=X,$$
$$Y=2(m-1)x+(m+4)y-2X,$$
$$Z=(m-1)(m+2)x+4(m+1)y-(m+1)X.$$

Эти формы будут линейно зависимы в том и только том случае, если формы $Y+2X$ и $Z+(m+1)X$ линейно зависимы, т. е. пропорциональны, но это может быть, если

$$(m+1)(Y+2X)=2[Z+(m+1)X].$$

Таким образом, для того, чтобы ранг отображения f был строго меньше 3, необходимо и достаточно, чтобы

$$8(m-1)(m+1)-(m-1)(m+2)(m+4)=0,$$

или

$$(m-1)(-m^2+2m)=0.$$

Ранг отображения f равен 3, кроме случаев, когда $m=0$, 1 или 2; в этих случаях ранг равен 2, ибо формы X и Y всегда независимы (они не могут быть пропорциональными).

Замечание. Этот результат можно было бы также получить на основании того, что если X, Y, Z независимы, то они образуют базис пространства E; значит, x, y и z могут быть представлены в виде линейных комбинаций от X, Y, Z. Стало быть, надо исследовать вопрос о том, могут ли x, y, z быть выражены через X, Y, Z, исходя из соотношений, определяющих формы X, Y, Z.

Исследование $f(R^3)$ для частных значений m. Подпространство $f(R^3)$ имеет в данных случаях размерность 2; следовательно, между координатами вектора из $f(R^3)$ имеется единственное линейное соотношение.

1) $m=0$,

$$\left.\begin{aligned} Y+2X&=-2x+4y \\ Z+X&=-2x+4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y+X-Z=0.$$

2) $m=1$,

$$\left.\begin{aligned} Y+2X&=5y \\ Z+2X&=8y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6X+8Y-5Z=0.$$

3) $m=2$,

$$\left.\begin{aligned} Y+2X&=2x+6y \\ Z+3X&=4x+12y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2Y+X-Z=0.$$

3.17. 1. Если f^* и g^* — две формы из F^*, а λ — элемент из K, то для любого элемента $x \in \Phi$

$$f^*(x)=g^*(x)=0 \Rightarrow (f^*-g^*)(x)=0,$$
$$f^*(x)=0 \Rightarrow (\lambda f^*)(x)=0,$$

и значит, F^* есть векторное подпространство пространства E^*.

2. Форма f^* из F^* обращается в нуль для любого вектора из Φ, а значит, и для любого вектора из F, являющегося линейной комбинацией векторов из Φ.

Если вектор e_1 не принадлежит F, то он образует с базисом $e_2, \ldots, e_{p+1}$ пространства F систему независимых векторов, которая может быть дополнена до базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E. Тогда каждому вектору $x \in E$ соответствует единственное разложение

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Линейная форма e^* вида $e^*(x)=x_1$ обращается в нуль для векторов $e_2, \ldots, e_{p+1}$, и значит, для любого вектора из F; стало быть, это форма из F^*. На элементе же e_1 она принимает значение 1. Таким образом, если вектор e_1 не принадлежит F, то найдется хотя бы одна форма из F^* не равная нулю на элементе e_1; следовательно, общие нули форм из F^* являются векторами из F.

3. Выберем базис $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_q^*$ пространства F^* (q — размерность F^*) и определим линейное отображение l пространства E в K^q, положив

$$\xi_i=f_i^*(x), \qquad i=1, 2, \ldots, q,$$
$$l(x)=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q).$$

Ранг отображения l равен размерности векторного подпространства, порожденного формами f_i^*, и значит, равен q. Но ранг отображения l равен также $\dim E - \dim l^{-1}(0)$; ядро $l^{-1}(0)$ есть множество общих нулей форм из F^*; это есть пространство F, размерность которого мы обозначили через p. Итак, выражая ранг отображения l двумя различными способами, получаем

$$q = n - p \quad \text{или} \quad \dim F^* + \dim F = n.$$

4. Кратные многочлена B образуют векторное подпространство F пространства E_{n+1}; дополнительное подпространство F' состоит из многочленов степени, строго меньшей степени многочлена B (см. задачу 3.09), и размерность подпространства F' равна степени многочлена B. Здесь размерность F' равна 6, а размерность F равна $n + 1 - 6 = n - 5$; следовательно, размерность F^* равна 6.

Линейные формы l указанного вида, очевидно, обращаются в нуль на многочленах из F, и значит, принадлежат F^*. А так как формы, определенные как $A(1)$, $A'(1)$, ..., $A(3)$, независимы, то размерность векторного пространства L^*, порожденного формами l, равна 6. Векторное пространство L^* содержится в F^* и имеет ту же размерность, что и F^*, а стало быть, это и есть F^*.

3.18. I. 1. Выполняются аксиомы векторных пространств. Действительно, Γ — аддитивная абелева группа; умножение на действительное число обладает требуемыми свойствами, ибо эти свойства удовлетворяются в $\Gamma \times C$, а значит, и в подмножестве $\Gamma \times R$.

Пусть x' — элемент из E', не являющийся нейтральным элементом группы Γ, а λ и μ — действительные числа. Имеем

$$\lambda x' + \mu (ix)' = (\lambda x') + (\mu ix)' = (\lambda x + \mu ix)' = [(\lambda + i\mu) x]';$$

отсюда

$$\lambda x' + \mu (ix)' = 0 \Rightarrow [(\lambda + i\mu) x]' = 0 \Rightarrow \lambda + i\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Таким образом, элементы x' и $(ix)'$ независимы.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — векторы базиса пространства E, а $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ — соответствующие векторы в E'.

Вычисления, тождественные предыдущим, показывают, что

$$x' = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p e_p' + \sum_{p=1}^{n} \mu_p (ie_p)' \Leftrightarrow x = \sum_p (\lambda_p + i\mu_p) e_p.$$

Стало быть, вектор x' из E может быть, и притом единственным образом, разложен по векторам e_p' и $(ie_p)'$; эти векторы образуют базис пространства E', имеющего, таким образом, размерность $2n$.

2. Отображение φ биективно; действительно уравнение $y' = \varphi(x')$ имеет одно, и только одно, решение x', каково бы ни было y':

$$y' = \varphi(x') \Leftrightarrow y' = (ix)' \Leftrightarrow y = ix.$$

Отображение φ линейно:

$$\varphi(x_1' + x_2') = [i(x_1 + x_2)]' = [ix_1 + ix_2]' = (ix_1)' + (ix_2)' = \varphi(x_1') + \varphi(x_2').$$

Наконец, заметим, что равенство $y' = \varphi(x')$ означает $y = ix$; поэтому получаем

$$(\varphi \circ \varphi)(x') = \varphi[\varphi(x')] = \varphi(y') = (iy)' = (-x)' = -x'.$$

II. 1. Если F есть множество C комплексных чисел, то можно определить f, положив $f(x) = ix$ для любого комплексного числа x; в самом деле, f есть изоморфизм пространства C на себя, и $(f \circ f)(x) = i(ix) = -x$.

Этот изоморфизм может быть определен заданием образов $f(1) = i$ и $f(i) = -1$ элементов базиса пространства C. В такой форме можно сформулировать это утверждение для пространства R^2 (или любого пространства размерности 2); а именно, если e_1 и e_2 — векторы базиса из R^2, то линейное отображение f, такое, что

$$f(e_1) = e_2, \qquad f(e_2) = -e_1,$$

является изоморфизмом и удовлетворяет условию $f \circ f = -e$.

Наконец, пространство F размерности $2n$, изоморфное R^{2n}, может рассматриваться как произведение n пространств R^2. Если $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ — элементы базиса пространства E, то мы определим линейное отображение f, положив

$$\begin{matrix} f(e_1) = e_2 & & f(e_{2p-1}) = e_{2p} & \\ f(e_2) = -e_1 & \cdots & f(e_{2p}) = -e_{2p-1}. & \cdots \end{matrix}$$

Образ $f(F)$ содержит все векторы базиса, поэтому он совпадает с F; значит, ранг отображения f равен $2n$, и ядро сводится к элементу 0 (напомним, что ранг отображения $f = \dim F - \dim f^{-1}(0)$). Линейное отображение f биективно, а именно, это есть изоморфизм пространства F на F.

Очевидно, что $(f \circ f)(e_i) = -e_i$, и стало быть, $f \circ f = -e$, где e — тождественное отображение.

2. Известно, что E — абелева группа; стало быть, достаточно убедиться в том, что выполняются свойства внешней операции.

а) Дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$(\lambda + i\mu)(x + x') = \lambda(x + x') + \mu f(x + x') =$$
$$= \lambda x + \lambda x' + \mu f(x) + \mu f(x') = (\lambda + i\mu)x + (\lambda + i\mu)x'.$$

б) Дистрибутивность относительно сложения комплексных чисел:

$$[(\lambda + i\mu) + (\lambda' + i\mu')]\,x = [\lambda + \lambda' + i(\mu + \mu')]\,x =$$
$$= (\lambda + \lambda')\,x + (\mu + \mu')\,f(x) = \lambda x + \mu f(x) + \lambda' x + \mu' f(x) =$$
$$= (\lambda + i\mu)\,x + (\lambda' + i\mu')\,x.$$

в) Ассоциативность:

$$[(\lambda' + i\mu')(\lambda + i\mu)]\,x = [\lambda\lambda' - \mu\mu' + i(\mu'\lambda + \mu\lambda')]\,x =$$
$$= (\lambda\lambda' - \mu\mu')\,x + (\lambda\mu' + \mu\lambda')\,f(x),$$

$$(\lambda' + i\mu')[(\lambda + i\mu)\,x] = (\lambda' + i\mu')[\lambda x + \mu f(x)] =$$
$$= (\lambda' + i\mu')[\lambda x] + (\lambda' + i\mu')[\mu f(x)] =$$
$$= \lambda'(\lambda x) + \mu' f(\lambda x) + \lambda'[\mu f(x)] + \mu' f[\mu f(x)] =$$
$$= (\lambda\lambda' - \mu'\mu)\,x + (\mu'\lambda + \lambda'\mu)\,f(x);$$

при этом использовались два свойства — что f линейно и что $f \circ f = -e$; отсюда, в частности,

$$f[\mu f(x)] = \mu f[f(x)] = \mu(-x) = -\mu x;$$

г) $1x = x$ (свойство верно в F).

Чтобы получить E', достаточно произвести сужение внешнего умножения на действительные числа и положить $rx' = (rx)'$. Если вектор x' отождествить с вектором $x \in E$, то rx' совпадает с rx, и поэтому E' может быть отождествлено с F. А мы знаем, что если E имеет размерность N, то E', а значит, и F, имеет размерность $2N$, чем доказано, что E имеет размерность n.

3.19. 1. S есть подмножество векторного пространства отображений R в C; чтобы показать, что это есть векторное подпространство, убедимся в том, что если f и g принадлежат S, то $f - g$ и λf принадлежат S. $f - g$ и λf дважды дифференцируемы, если этим свойством обладают f и g, и

$$(f - g)'' + p(f - g)' + q(f - g) =$$
$$= f'' + pf' + qf - (g'' + pg' + qg) = 0,$$
$$(\lambda f)'' + p(\lambda f)' + q(\lambda f) = \lambda f'' + \lambda pf' + \lambda qf = 0.$$

2. По условию, функция f дважды дифференцируема; вторая производная f'' равна $-pf' - qf$ и, значит, тоже дифференцируема. Тогда, записав, что производная функции $f'' + pf' + qf$ равна нулю, получаем

$$f''' + pf'' + qf' = (f')'' + p(f')' + qf' = 0.$$

Функция f' является также решением уравнения (E).

Отображение l линейно, поскольку

$$l(f + g) = (f + g)' = f' + g' = l(f) + l(g),$$
$$l(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda l(f).$$

3. Предположим, что линейное отображение l равно ke (e — тождественное отображение), и рассмотрим две произвольные функции из S; пусть это будут f и g. По условию,

$$l(f)=f'=kf, \qquad l(g)=g'=kg,$$

$$f'g-fg'=0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'=0 \Rightarrow f=\lambda g.$$

Функции f и g пропорциональны, и поэтому S имеет размерность не более 1.

Отображение l будет изоморфизмом S на S, если оно биективно, т. е. если его ядро сводится к 0; ядро отображения l состоит из постоянных функций; для того чтобы l было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы постоянная функция не была решением уравнения (E), т. е. чтобы q не было равно нулю.

4. По определению, $l(f)=f'$ и $(l\circ l)(f)=l(f')=f''$.

Следовательно, для любой функции $f\in S$

$$(l\circ l+pl+qe)(f)=f''+pf'+qf=0.$$

Отображение $l\circ l+pl+qe$ есть нулевое отображение.

Если r_1 и r_2 — нули многочлена u^2+pu+q, то

$$(l-r_1e)\circ(l-r_2e)=l\circ l-(r_1e)\circ l-l\circ(r_2e)+r_1r_2e$$

(дистрибутивность композиции линейных отображений относительно сложения; см. задачу 3.07, п. 3), и поэтому $el=le=l$, и значит,

$$(l-r_1e)\circ(l-r_2e)=l\circ l-(r_1+r_2)\,l+r_1r_2e=l\circ l+pl+qe.$$

(Вообще, в коммутативном кольце справедливы классические алгебраические тождества; если же кольцо отображений S в S не коммутативно, то используемое здесь подкольцо отображений, которые могут быть определены при помощи многочлена от l, коммутативно.)

Если одно из отображений обратимо, то другое будет нулевым, что невозможно, ибо, как мы видели в п. 3, l не пропорционально e. Действительно, если f — функция из S, то

$$[(l-r_1e)\circ(l-r_2e)](f)=(l-r_1e)\,[(l-r_2e)(f)]=0,$$

и значит, $(l-r_2e)(f)$ есть элемент ядра отображения $l-r_1e$.

Если $l-r_1e$ обратимо, то его ядро сводится к нулю, и $(l-r_2e)(f)=0$ при любом f.

Если $l-r_2e$ обратимо, то любой элемент $g\in S$ является образом посредством f, и значит, ядро отображения $l-r_1e$ содержит все элементы из S. Таким образом, отображение $l-r_1e$ будет нулевым.

3.20. 1. Легко видеть, что

$$X+Y+Z+T=0.$$

Стало быть, f имеет ранг, не превосходящий 3.

Но, выбирая в качестве новых координат в R^4

$$x,\ y,\ z,\qquad s = x + y + z + t,$$

получаем следующие выражения для X, Y, Z:

$$X = s - 2t,\qquad Y = -s + 2y,\qquad Z = -s + 2x.$$

Эти три формы независимы, поэтому размерность сопряженного векторного пространства, порожденного X, Y, Z, T, т. е. ранг отображения f, больше или равен 3, и значит, f имеет ранг, равный точно 3.

$f(R^4)$ есть подпространство, определяемое соотношением

$$X + Y + Z + T = 0.$$

Оно не имеет общих точек с D, потому что сумма четырех строго положительных чисел не может равняться нулю.

2. Если f имеет ранг p, то $f(R^n)$ есть пространство R^p и, в частности, содержит точки области Δ, определенной условиями $X_i > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, p$. Система (S) имеет решения.

Если f имеет ранг $p-1$, то существует $p-1$ независимых форм f_i, скажем, $p-1$ первых форм, а p-я форма есть линейная комбинация остальных, т. е. найдутся такие коэффициенты λ_i, что

$$f_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f_i = 0,$$

и стало быть,

$$f_p(u) + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f_i(u) = 0.$$

а) Если все λ_i положительны, то система (S) не имеет решения. Действительно, члены $\lambda_i f_i(u)$ положительны, и $f_p(u)$ строго положительно, поэтому сумма не может равняться нулю.

б) Если одно из чисел λ_i строго отрицательно (допустим, $\lambda_{p-1} < 0$), то система (S) имеет решения. $p-1$ независимых форм f_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ могут принимать произвольные числовые значения (они определяют сюръективное отображение R^n в R^{p-1}), и мы приходим к следующему соотношению между значениями форм f_i:

$$f_p(u) = |\lambda_{p-1}| f_{p-1}(u) - \sum_{i=1}^{p-2} \lambda_i f_i(u).$$

Зададим $f_i(u)$ значение 1, для $i \leqslant p-2$; тогда можно выбрать такое достаточно большое значение $f_{p-1}(u)$, чтобы правая часть была строго положительна; тем самым мы получим строго положительное значение $f_p(u)$.

Таким образом, для того чтобы система (S) не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы f имело ранг $p-1$ и чтобы было выполнено условие а), т. е. найдутся такие, не все равные нулю, положительные коэффициенты λ_i $(1 \leqslant i < p)$, $\lambda_p = 1$, что $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$.

3.21. Имеем

$$M(s)\,N(t) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ \frac{t}{s} & \frac{1}{s} \end{pmatrix},$$

$$M(s)\,N(t)\,P(u) = \begin{pmatrix} s & su \\ \frac{t}{s} & \frac{ut+1}{s} \end{pmatrix}.$$

Необходимость условий очевидна, ибо $s \neq 0$ по предположению, и кроме того, как легко видеть, определитель произведения $M(s)N(t)P(u)$ равен единице:

$$s\,\frac{ut+1}{s} - \frac{t}{s}\,su = 1.$$

Чтобы доказать достаточность, нужно показать, что, зная a, b, c и d, можно найти s, t, u, т. е. решить систему

$$a = s, \qquad b = su, \qquad c = \frac{t}{s}, \qquad d = \frac{ut+1}{s}.$$

Первые три уравнения дают значения,

$$s = a \neq 0, \quad u = \frac{b}{a}, \qquad t = ac;$$

тем самым будет удовлетворено и последнее уравнение, ибо получаем

$$\frac{ut+1}{s} = \frac{bc+1}{a} = d.$$

Полученное решение единственно; значит, представление возможно, и притом единственным способом.

3.22. 1. Очевидно, имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\,A + (bc - ad)\,I.$$

Таким образом, получаем решение $\alpha = a + d$, $\beta = bc - ad$. Если имеется другое, отличное от (α, β), решение (α', β'), то

$$A^2 = \alpha A + \beta I = \alpha' A + \beta' I \Rightarrow (\alpha' - \alpha)\,A = (\beta - \beta')\,I.$$

В этом случае матрица A пропорциональна I, а для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$a = d, \qquad b = c = 0.$$

2. Чтобы показать, что $\mathcal{A}$ — кольцо, т. е. подкольцо кольца квадратных матриц 2-го порядка, мы покажем, руководствуясь указаниями во введении к первому разделу, что

$$B \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad B' \in \mathcal{A} \Rightarrow B' - B \in \mathcal{A} \quad \text{и} \quad BB' \in \mathcal{A}.$$

Положим $B = uI + vA$, $B' = u'I + v'A$; тогда

$$B' - B = (u' - u) I + (v' - v) A \Rightarrow B' - B \in \mathscr{A},$$

$$\begin{aligned} B'B = uu'I + (uv' + u'v) A + vv'A^2 = \\ = uu'I + (uv' + u'v) A + vv'(\alpha A + \beta I) = \\ = (uu' + \beta vv') I + (uv' + u'v + \alpha vv') A, \end{aligned}$$

матрица $B'B$ принадлежит $\mathscr{A}$, и кроме того, $B'B = BB'$; кольцо $\mathscr{A}$ коммутативно и, наконец, содержит единичную матрицу I, полученную при $u = 1$, $v = 0$.

3. Прежде всего исключим случай, когда матрица A пропорциональна I, ибо если $A = kI$, то кольцо $\mathscr{A}$ содержит лишь матрицы $(u + vk) I$, т. е. все матрицы, пропорциональны I, и тогда $\mathscr{A}$ будет полем, изоморфным полю действительных чисел.

В остальных случаях B будет обратима, если ее определитель отличен от нуля, т. е. если

$$(u + va)(u + vd) - v^2bc = u^2 + \alpha uv - \beta v^2 \neq 0.$$

Покажем, что тогда в $\mathscr{A}$ найдется матрица $X = xI + yA$, обратная к B, а так как обратная матрица единственна, то тем самым будет доказано, что она принадлежит $\mathscr{A}$. Имеем

$$BX = XB = (ux + vy\beta) I + (uy + vx + vy\alpha) A.$$

В рассматриваемом случае A и I не пропорциональны, поэтому необходимым и достаточным условием существования матрицы X является выполнение равенств

$$\begin{aligned} ux + v\beta y = 1, \\ vx + (u + v\alpha) y = 0; \end{aligned}$$

эта система допускает, и притом единственное, решение лишь при условии

$$u (u + v\alpha) - v^2\beta = u^2 + \alpha uv - \beta v^2 \neq 0,$$

то есть если B обратима.

Кольцо $\mathscr{A}$ будет телом, если любой элемент, отличный от нулевой матрицы, обратим; нулевая матрица получается при единственных значениях $u = 0$, $v = 0$ (A не пропорциональна I). Следовательно, для того чтобы $\mathscr{A}$ было телом, необходимо и достаточно, чтобы $u^2 + \alpha uv - \beta v^2$ обращалось в нуль лишь при $u = v = 0$.

Если многочлен $z^2 + \alpha z - \beta$ имеет действительный нуль z_1, то числа $u = z_1$, $v = 1$ обращают выражение $u^2 + \alpha uv - \beta v^2$ в нуль. Если многочлен $z^2 + \alpha z - \beta$ не имеет действительных нулей, то выражение $u^2 + \alpha uv - \beta v^2$ обращается в нуль лишь при $u = v = 0$.

Итак, для того чтобы $\mathscr{A}$ было телом (а значит, и полем, ибо умножение в $\mathscr{A}$ коммутативно) необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha^2 + 4\beta < 0, \quad \text{или} \quad (a-d)^2 + 4bc < 0.$$

4. Кольцо $\mathscr{A}$ является полем, поскольку

$$(a-d)^2 + 4bc = -4 < 0.$$

Числа α и β равны 0 и -1. Если матрицы B определяются парой (u, v) действительных чисел, так что $B = uI + vA$, то в силу п. 2, сложение и умножение пар мы должны определить следующим образом:

$$(u,\ v) + (u',\ v') = (u + u',\ v + v'),$$
$$(u,\ v)(u',\ v') = (uu' - vv',\ uv' + u'v).$$

Эти формулы идентичны тем, которые определяют сумму и произведение комплексных чисел $u + iv$ и $u' + iv'$. Отображение кольца $\mathscr{A}$ в C, ставящее в соответствие матрице B число $u + iv$, есть биекция, сохраняющая обе операции, т. е. изоморфизм полей $\mathscr{A}$ и C.

3.23. 1. Запишем равенство соответствующих членов матриц BM и MB:

$$\begin{aligned} \alpha x + \gamma y &= \alpha x + \beta z, \\ \beta x + \delta y &= \alpha y + \beta t, \\ \alpha z + \gamma t &= \gamma x + \delta z, \\ \beta z + \delta t &= \gamma y + \delta t; \end{aligned}$$

очевидно, эта система эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \gamma y &= \beta z, \\ (\alpha - \delta) y &= (x - t)\beta, \\ (\alpha - \delta) z &= (x - t)\gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

По условию, β отлично от нуля; значит, уравнение $y = k\beta$ определяет k, и разделив в случае надобности на β, получаем $z = k\gamma$, $x - t = k(\alpha - \delta)$. Члены x, y, z, t могут быть выражены при помощи параметров k и t; после этого матрицы B примут вид

$$B = \begin{pmatrix} t + k(\alpha - \delta) & k\beta \\ k\gamma & t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \alpha - \delta & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha - \delta & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

независимы (член β, по предположению, отличен от нуля); множество матриц B, которое является векторным подпространством, порожденным матрицами I и A, имеет размерность 2.

Множество матриц B является также одним из колец $\mathscr{A}$, изучавшихся в задаче 3.22; параметры t и k играют роль параметров u и v.

2. Если β равно нулю, а γ отлично от нуля, то можно провести исследование, идентичное тому, которое проводилось в п. 1, с той лишь разницей, что число k определить равенством $z = k\gamma$; результаты будут те же самые.

Если $\beta = \gamma = 0$, то уравнения (1) сводятся к уравнениям

$$(\alpha - \delta)\, y = (\alpha - \delta)\, z = 0.$$

Возможны два случая.

1) $\alpha = \delta$; тогда M пропорциональна единичной матрице I и перестановочна со всеми матрицами; матрица B произвольна.

2) $\alpha \neq \delta$; тогда M — диагональная матрица, не пропорциональная единичной; B перестановочна с M, если $y = z = 0$, т. е. если B — диагональная матрица. Множество D диагональных матриц снова составляет кольцо $\mathscr{A}$ из задачи 3.22; чтобы $\mathscr{A}$ было кольцом диагональных матриц, достаточно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Обозначим через $\mathscr{M}$ коммутативное подкольцо кольца квадратных матриц 2-го порядка.

Если $\mathscr{M}$ содержит лишь матрицы, пропорциональные I, то $\mathscr{M}$ есть подкольцо кольца диагональных матриц.

Если $\mathscr{M}$ содержит матрицу M, не пропорциональную I, то матрицы из $\mathscr{M}$ перестановочны с M, и $\mathscr{M}$ есть подмножество множества $\mathscr{A}$ матриц, перестановочных с M; множество $\mathscr{A}$ есть одно из колец задачи 3.22, а $\mathscr{M}$ есть подкольцо одного из этих колец $\mathscr{A}$.

В итоге единственными коммутативными подкольцами кольца квадратных матриц 2-го порядка являются кольца $\mathscr{A}$, состоящие из матриц $uI + vA$, где A — произвольная заданная матрица, и подкольца этих колец $\mathscr{A}$.

3.24. 1. Покажем, что K — подкольцо из $\mathscr{M}$, для чего, следуя указаниям введения к первому разделу, покажем, что

$$M \in K \quad \text{и} \quad M' \in K \Rightarrow M - M' \in K \text{ и } MM' \subset K.$$

Имеем

$$M - M' = \begin{pmatrix} m & n \\ -\bar{n} & \bar{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m' & n' \\ -\bar{n}' & \bar{m}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - m' & n - n' \\ -\overline{(n - n')} & \overline{(m - m')} \end{pmatrix},$$

$$MM' = \begin{pmatrix} mm' - n\bar{n}' & mn' + n\bar{m}' \\ -(\bar{n}m' + \bar{m}\bar{n}') & -\bar{n}n' + \bar{m}\bar{m}' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} mm' - n\bar{n}' & mn' + n\bar{m}' \\ -\overline{(mn' + n\bar{m}')} & \overline{(mm' - n\bar{n}')} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы $M - M'$ и MM' принадлежат множеству K, которое, таким образом, обладает структурой кольца.

Это кольцо унитарно, так как взяв $m = 1$ и $n = 0$, получаем единичную матрицу, которая, следовательно, принадлежит K.

Оно не коммутативно, в чем убеждаемся непосредственно на следующем примере:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Недостаточно сказать только, что кольцо $\mathscr{M}$ не коммутативно, ибо это кольцо содержит коммутативные подкольца, которые были определены в задаче 3.23.)

Наконец, чтобы показать, что K есть тело, нужно показать, что любой элемент M из K (кроме нулевого) обратим, и обратный элемент M^{-1} принадлежит K.

Матрица M обратима потому, что ее определитель, равный $m\bar{m} + n\bar{n} = |m|^2 + |n|^2$, мог бы обращаться в нуль лишь при $m = n = 0$; матрица M^{-1} принадлежит K, ибо

$$M^{-1} = \frac{1}{m\bar{m} + n\bar{n}}\begin{pmatrix} \bar{m} & -n \\ \bar{n} & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\bar{\nu} & \bar{\mu} \end{pmatrix},$$

где

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m\bar{m} + n\bar{n}}, \qquad \nu = \frac{-n}{m\bar{m} + n\bar{n}}.$$

2. Мы видели, что K — аддитивная абелева группа; но произведение (определенное в $\mathscr{M}$) элемента M из K на комплексное z не будет элементом из K, если z не будет действительно. В самом деле,

$$zM = z\begin{pmatrix} m & n \\ -\bar{n} & \bar{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zm & zn \\ -z\bar{n} & z\bar{m} \end{pmatrix};$$

но

$$\overline{zm} = \bar{z}\bar{m} \neq z\bar{m}, \qquad \overline{zn} = \bar{z}\bar{n} \neq z\bar{n},$$

кроме случая, когда z — действительное число.

3. K — аддитивная абелева группа. Как мы видели в п. 2, умножение на действительное число z переводит любой элемент из K в некоторый элемент из K; это умножение удовлетворяет аксиомам векторного пространства, потому что является сужением на $K \times R$ внешнего умножения в векторном пространстве $\mathscr{M}$, определенного в $\mathscr{M} \times C$.

Полагая $m = u + iv$ и $n = r + is$ (u, v, r, s — действительные), получаем

$$M = \begin{pmatrix} m & n \\ -\bar{n} & \bar{m} \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Четыре элемента правой части

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad E_4=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

порождают пространство; они, очевидно, независимы и, следовательно, составляют базис.

Тогда элементы из K могут быть определены своими четырьмя координатами x_1, x_2, x_3, x_4 относительно базиса E_1, E_2, E_3, E_4, и дистрибутивность умножения относительно сложения позволяет записать, что

$$\left(\sum_1^4 x_iE_i\right)\left(\sum_1^4 y_iE_i\right)=\sum_{i,\,j} x_iy_j\,(E_iE_j).$$

Стало быть, достаточно знать попарные произведения матриц E_i:

$$E_1^2=-E_2^2=-E_3^2=-E_4^2=E_1,\qquad E_1E_i=E_iE_1=E_i,$$

$$E_2E_3=-E_3E_2=E_4,\quad E_3E_1=-E_1E_3=E_2,\quad E_1E_2=-E_2E_1=E_3.$$

(Единичный элемент E_1 отождествляется с единицей в R и записывается 1.) Следовательно, структура тела K определяется непосредственно, без привлечения матриц.

3.25. 1. Нейтральный элемент обратим.

Элемент a^{-1}, обратный обратимому элементу a, имеет в качестве обратного элемент a, и следовательно, принадлежит E_1.

Произведение двух элементов из E_1 есть элемент из E_1, ибо

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right)=a\left(bb^{-1}\right)a^{-1}=e,$$

$$\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab)=b^{-1}\left(a^{-1}a\right)b=e.$$

Наконец, операция ассоциативна в E_1 как подмножестве из E, в котором она, по условию, ассоциативна.

Умножение матриц ассоциативно, матрица

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

служит нейтральным элементом; множество обратимых матриц, согласно предыдущему результату, составляет группу.

2. Если отношения x'/y' и x/y определены, т. е. если

$$y\neq 0,\qquad cx+dy\neq 0\qquad\text{или}\qquad \frac{x}{y}\neq-\frac{d}{c},$$

то

$$\frac{x'}{y'}=\frac{ax+by}{cx+dy}=\frac{a\,(x/y)+b}{c\,(x/y)+d}=h_A\left(\frac{x}{y}\right).$$

По условию, A обратима, и значит, $ad-bc\neq 0$; стало быть, функция h_A невырождена.

Произведение BA матриц B и A соответствует композиции соответствующих отображений α и β:

$$(x,\ y) \xrightarrow{\alpha} (x',\ y') \xrightarrow{\beta} (x'',\ y''),$$

или, для отношений,

$$\frac{x}{y} \xrightarrow{h_A} \frac{x'}{y'} \xrightarrow{h_B} \frac{x''}{y''}.$$

По определению,

$$\frac{x''}{y''} = h_{BA}\left(\frac{x}{y}\right) = (h_B \circ h_A)\left(\frac{x}{y}\right);$$

и значит,

$$h_{BA} = h_B \circ h_A.$$

Отображение φ сохраняет операцию, а так как оно сюръективно, то H является группой: операция ассоциативна, потому что

$$(h_C h_B)\, h_A = h_{(CB)\,A} = h_{C\,(BA)} = h_C\,(h_B h_A);$$

функция h_I есть нейтральный элемент; всякая функция h имеет в H обратную:

$$h_{A^{-1}} h_A = h_A h_{A^{-1}} = h_I.$$

(Результаты доказаны для функций h_A, являющихся образами элемента из G, а значит, для любой функции из H, поскольку φ сюръективно.)

φ есть гомоморфизм G в H, потому что

$$\varphi(A)\,\varphi(B) = \varphi(AB).$$

e — тождественное отображение, т. е.

$$e\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}.$$

Стало быть, матрицы A ядра $\varphi^{-1}(e)$ удовлетворяют условиям

$$a = d, \qquad b = c = 0;$$

это матрицы, пропорциональные I.

Точно так же множество $\varphi^{-1}(h)$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

пропорциональных некоторой матрице A_0 множества G.

Можно сказать, что невырожденные дробно-линейные функции образуют группу, изоморфную группе Γ обратимых матриц, определенных с точностью до коэффициента пропорциональности (для корректности следует показать, что тем самым определено отношение эквивалентности, согласующееся с операцией, в соответствии с определением задачи 1.11 первого раздела, и что тогда факторmножество Γ имеет структуру группы).

3.26. 1. Пусть B и C — две матрицы, перестановочные с A. Дистрибутивность умножения относительно сложения влечет

$$A(B-C)=AB-AC=BA-CA=(B-C)A.$$

Точно так же, ассоциативность умножения влечет

$$A(BC)=(AB)C=(BA)C=B(AC)=B(CA)=(BC)A.$$

Если B и C принадлежит E, то $B-C$ и BC принадлежат E, и значит, E — подкольцо в $\mathcal{A}$.

2. Кольцо E матриц, перестановочных с A, по условию, содержит B; стало быть, оно содержит также $Q(B)$, и A перестановочно с $Q(B)$. Кольцо матриц, перестановочных с $Q(B)$, содержит A, а значит, и $P(A)$; итак, $P(A)$ и $Q(B)$ перестановочны.

3. Умножая произведение $A^{-1}B$ слева на A, получаем

$$A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=B=B(AA^{-1})=(BA)A^{-1}=$$
$$=(AB)A^{-1}=A(BA^{-1}),$$

откуда

$$A(A^{-1}B)=A(BA^{-1}).$$

А так как A — регулярный элемент (или умножая слева на A^{-1}), получаем

$$A^{-1}B=BA^{-1}.$$

3.27. Если A имеет ранг 1, то, по определению, вектор-столбцы A_j порождают одномерное векторное подпространство E пространства K^m. (Вектор-столбец A_j есть вектор, координаты которого относительно канонического базиса пространства K^m равны элементам a_{ij} столбца матрицы A с номером j.)

Если X есть ненулевой вектор из E, то остальные векторы из E, и в частности, A_j, пропорциональны X; следовательно, каждому вектору A_j соответствует такое число v_j, что $A_j=v_jX$. По крайней мере один из векторов A_j отличен от нуля, поскольку матрица A имеет ранг 1, и стало быть, по крайней мере одно число из v_j не равно нулю. Обозначим координаты вектора X через u_i; тогда векторное равенство $A_j=v_jX$ равносильно равенствам

$$a_{i,j}=v_ju_i.$$

(Заметим, что хотя бы один из элементов u_i не равен нулю, потому что вектор X отличен от нуля.)

3.28. 1. Пусть $T=(t_{i,j})$ и $T'=(t'_{i,j})$ — две треугольные матрицы; разность $T-T'$ и произведение TT' имеют в качестве элементов

$$q_{i,j}=t_{i,j}-t'_{i,j},\qquad p_{i,j}=\sum_h t_{i,h}t'_{h,j}.$$

Исследуем элементы $q_{i,j}$ и $p_{i,j}$, для которых $i > j$;

$$t_{i,j} = t'_{i,j} = 0 \Rightarrow q_{i,j} = 0,$$
$$h < i \Rightarrow t_{i,h} = 0;$$
$$h \geqslant i > j \Rightarrow h > j \Rightarrow t'_{h,j} = 0,$$

произведение $t_{i,h}t'_{h,j}$ равно нулю при любом h; значит, элементы $p_{i,j}$ также равны нулю.

Мы показали, что если матрицы T и T' — треугольные, то $T - T'$ и TT' — треугольные; таким образом, множество треугольных матриц есть подкольцо $\mathscr{A}$ кольца матриц n-го порядка. Кольцо $\mathscr{A}$ не коммутативно; действительно, если $n = 2$, то

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

этот же пример можно использовать и при $n > 2$, следует лишь дополнить матрицы нулями.

2. Элементы p-го столбца матрицы T являются координатами вектора $\theta(e_p)$. Для того чтобы T была треугольной, необходимо и достаточно, чтобы координаты $t_{q,p}$ вектора $\theta(e_p)$ с индексом $q > p$ были равны нулю, или чтобы $\theta(e_p)$ был линейной комбинацией векторов с индексами $i \leqslant p$, т. е. принадлежал E_p.

Предположим, что матрица T — треугольная; тогда

$$i \leqslant p \Rightarrow \theta(e_i) \in E_i \subset E_p \Rightarrow \theta(e_i) \in E_p.$$

А так как e_i образуют базис пространства E_p, то $\theta(E_p)$ порождается векторами $\theta(e_i)$, и стало быть, $\theta(E_p) \subset E_p$.

Обратно, если $\theta(E_p) \subset E_p$, то образ любого вектора из E_p, и в частности, e_p, принадлежит E_p; стало быть, матрица T — треугольная.

Покажем, что операторы θ образуют подкольцо кольца линейных отображений K^n в K^n, что повлечет аналогичное свойство для матриц T.

Пространство $(\theta - \theta')(E_p)$ содержится в подпространстве, порожденном пространствами $\theta(E_p)$ и $\theta'(E_p)$, а значит, и в E_p.

Точно так же, поскольку пространство $\theta'(E_p)$ содержится в E_p, то $(\theta\theta')(E_p) = \theta[\theta'(E_p)] \subset \theta(E_p) \subset E_p$. Отображения $\theta - \theta'$ и $\theta\theta'$ удовлетворяют характеристическому свойству, и их матрицы $T - T'$ и TT' треугольны.

3. Заменим матричное уравнение системой скалярных уравнений, которая в свою очередь равносильна системе

$$\begin{aligned}
t_{11}x_1 + \ldots + t_{1n}x_n &= 0,\\
t_{22}x_2 + \ldots + t_{2n}x_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_{ii}x_i + \ldots + t_{in}x_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_{nn}x_n \qquad\qquad &= 0.
\end{aligned}$$

Если ни один член t_{ii} не равен нулю, то индукцией по $n-i$ показывается, что все x_i равны нулю. Для $i=n$ это очевидно. Допустим, уже доказано, что $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{i+1} = 0$. Тогда $t_{ii}x_i$, будучи линейной комбинацией элементов x_j с индексом $j > i$, равно нулю, а так как t_{ii} отлично от нуля, то x_i равно нулю.

Если $t_{ii}=0$ для индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, то рассуждение по индукции, аналогичное предыдущему, показывает, что неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ могут выбираться произвольно; после этого другие элементы x_i определяются однозначно. Матрицы X решений образуют, следовательно, векторное пространство размерности p.

Решения X уравнения $TX=0$ являются векторами из K^n, принадлежащими ядру отображения θ. Стало быть, θ обратимо, если ни одно из t_{ii} не равно нулю. Вообще,

$$\text{ранг } \theta = \dim K^n - \dim \theta^{-1}(0) = n - p,$$

где p — число членов t_{ii}, равных нулю.

3.29. Разобьем матрицу X с одим столбцом на матрицу X_1 из p первых строк и на матрицу X_2 из q последних строк:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение $Y = MX$ может быть заменено системой

$$\begin{aligned} Y_1 &= M_{1,1}X_1 + M_{1,2}X_2, \\ Y_2 &= M_{2,1}X_1 + M_{2,2}X_2, \end{aligned} \tag{1}$$

которая получится, если в каждом поэлементном уравнении отделить члены, содержащие p первых переменных x_i, от остальных.

Точно так же, если $X = NU$, то указанное разбиение дает

$$\begin{aligned} X_1 &= N_{1,1}U_1 + N_{1,2}U_2, \\ X_2 &= N_{2,1}U_1 + N_{2,2}U_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Теперь можно заменить X_1 и X_2 их выражением в системе (1), и правила вычисления матриц (ассоциативность произведения, когда оно определено, дистрибутивность произведения относительно сложения) позволяют записать

$$\begin{aligned} Y_1 &= (M_{1,1}N_{1,1} + M_{1,2}N_{2,1})\,U_1 + (M_{1,1}N_{1,2} + M_{1,2}N_{2,2})\,U_2, \\ Y_2 &= (M_{2,1}N_{1,1} + M_{2,2}N_{2,1})\,U_1 + (M_{2,1}N_{1,2} + M_{2,2}N_{2,2})\,U_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Эта система равносильна уравнению $Y = MNU$; матрица MN тоже определяется своим разбиением, и

$$MN = \begin{pmatrix} M_{1,1}N_{1,1} + M_{1,2}N_{2,1} & M_{1,1}N_{1,2} + M_{1,2}N_{2,2} \\ M_{2,1}N_{1,1} + M_{2,2}N_{2,1} & M_{2,1}N_{1,2} + M_{2,2}N_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Замечания. 1) Можно было бы не вычислять в явном виде Y_1 и Y_2 как функции от U_1 и U_2; достаточно заметить, что результаты вычисления будут верны, если $p = q = 1$; следовательно, полученные формулы в этом случае должны привести к известным формулам произведения двух квадратных матриц 2-го порядка.

2) Отметим, однако, разницу: произведения $M_{1,1}N_{1,1}$, $M_{1,2}N_{2,1}$, ... зависят от порядка членов, если $M_{i,j}$ и $N_{i,j}$ — матрицы.

3) Наконец, можно было бы рассматривать более сложные разложения матрицы на группы матриц из $p_1, p_2, \ldots, p_h$ строк и столбцов, но так чтобы сумма $p_1 + p_2 + \ldots + p_h$ была равна n; произведение двух матриц может быть выражено в том же виде, как если бы матрицы разбиения были числами.

3.30. 1. *Изучение структуры векторного пространства в $\mathcal{M}$.* Заметим, что каждая матрица $M \subset \mathcal{M}$ очевидным образом определяется вектором $(a, b, \ldots, d')$. Разность двух матриц M_1 и M_2, определенных векторами $(a_1, b_1, \ldots, d_1')$ и $(a_2, b_2, \ldots, d_2')$, есть матрица M с вектором $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, \ldots, d_1' - d_2')$; $\mathcal{M}$ содержит вместе с M_1 и M_2 разность $M_1 - M_2$; значит, $\mathcal{M}$ есть аддитивная подгруппа группы $\mathcal{N}$.

Точно так же матрица rM_1 есть матрица M с вектором $(ra_1, rb_1, \ldots, rd_1')$; она принадлежит $\mathcal{M}$, которое является, таким образом, векторным подпространством пространства квадратных матриц 4-го порядка.

Обозначим через $E_a, E_b, \ldots, E_{d'}$ матрицы M, полученные заданием семи параметрам из $a, b, \ldots, d'$ нулевых значений, а восьмому параметру — значения 1 (в индексе стоит параметр, которому дается значение 1). Очевидно, что матрица M может быть единственным образом представлена в виде

$$M = aE_a + bE_b + \ldots + d'E_{d'}.$$

Таким образом, матрицы $E_a, E_b, \ldots, E_{d'}$ составляют базис пространства $\mathcal{M}$, размерность которого равна 8.

Чтобы доказать, что $\mathcal{M}$ есть подкольцо кольца $\mathcal{N}$, необходимо убедиться в том, что если M и N — матрицы из $\mathcal{M}$, то произведение MN тоже принадлежит $\mathcal{M}$. Используем для этого результаты упражнения 3.23, положив $p = q = 2$; матрицы M и N представимы в виде

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} M_{12} \\ M_{21} M_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} N_{12} \\ N_{21} N_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица M принадлежит множеству $\mathcal{M}$ в том и только том случае, когда четыре матрицы $M_{i,j}$ принадлежат полю $\mathscr{C}$ матриц вида $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$. Имеем

$$MN = \begin{pmatrix} M_{11}N_{11} + M_{12}N_{21} & M_{11}N_{12} + M_{12}N_{22} \\ M_{21}N_{11} + M_{22}N_{21} & M_{21}N_{12} + M_{22}N_{22} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mathscr{C}$ — кольцо, то произведение двух матриц из $\mathscr{C}$ есть матрица из $\mathscr{C}$, и то же самое для суммы. Каждая из матриц разбиения MN является, таким образом, матрицей из $\mathscr{C}$, и MN принадлежит множеству $\mathscr{M}$.

2. Мы знаем, что поле $\mathscr{C}$ матриц

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

изоморфно полю комплексных чисел, т. е. существует биекция φ поля $\mathscr{C}$ на поле комплексных чисел, сохраняющая операцию. Отнесем матрице $M = (M_{i,j})$ матрицу

$$m = (m_{ij}) = (\varphi[M_{ij}]) = \begin{pmatrix} \varphi(M_{11}) & \varphi(M_{12}) \\ \varphi(M_{21}) & \varphi(M_{22}) \end{pmatrix}$$

из $\mathscr{A}$, которую мы обозначим через $\psi(M)$. Отображение ψ биективно, поскольку биективно φ.

Если M и N — две матрицы из $\mathscr{M}$, то их сумма и произведение могут быть определены, исходя из матриц M_{ij} и N_{ij}, по тем же формулам, как если бы M_{ij} и N_{ij} были числами; для суммы и произведения матриц m и n имеем те же формулы, лишь вместо M_{ij} и N_{ij} следует поставить m_{ij} и n_{ij}, т. е.

$$\psi(M+N) = m+n = \psi(M) + \psi(N),$$
$$\psi(MN) = mn = \psi(M)\,\psi(N).$$

Итак, ψ есть изоморфизм колец $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}$.

3. Отображение ψ есть изоморфизм колец $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}$, а значит, в частности, и аддитивных групп; для того чтобы это был изоморфизм векторных пространств, необходимо определить в $\mathscr{A}$ умножение на действительное число и убедиться в том, что $\psi(rM) = r\psi(M)$; это будет так, если положить

$$r\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rm_{11} & rm_{12} \\ rm_{21} & rm_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в $\mathscr{A}$ определена структура векторного пространства; но это не та структура, которая обычно определяется. Множество $\mathscr{A}$ квадратных матриц 2-го порядка с комплексными коэффициентами имеет структуру векторного пространства E над C (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VIII, 2-й раздел, § 1); здесь же рассматривается векторное пространство E', полученное из E сужением внешнего умножения на действительные числа (см. по этому поводу задачу 3.18). При этом E имеет размерность 4, а E', изоморфное $\mathscr{M}$, имеет как и $\mathscr{M}$, размерность 8.

4. Разбивая матрицы на группы матриц из двух строк и столбцов, мы заменим матричное уравнение $MX = 0$ системой

$$M_{11}X_1 + M_{12}X_2 = 0,$$
$$M_{21}X_1 + M_{22}X_2 = 0.$$

Воспользуемся тем, что матрицы M_{ij} принадлежат полю, а именно, полю $\mathscr{C}$.

Если все четыре матрицы M_{ij} — нулевые, т. е. если M — нулевая матрица, то X, очевидно, произвольно.

Итак, предположим, что одна из этих матриц — ненулевая, скажем, к примеру, матрица M_{11}; тогда получаем

$$X_1 = -M_{11}^{-1}M_{12}X_2, \qquad (-M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} + M_{22})X_2 = 0.$$

Во всяком теле, и в частности, в поле $\mathscr{C}$, ненулевой элемент обратим, а значит, регулярен. Если коэффициент при X_2 во втором уравнении не равен нулю, то X_2 равно нулю и X_1 тоже; и единственным решением служит нулевой вектор. Если коэффициент при X_2 равен нулю, то X_2 произвольно, и решения X системы образуют двумерное векторное подпространство пространства R^4.

Для того чтобы уравнение $MX = 0$ имело ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при X_2 был равен нулю. Используя коммутативность умножения в $\mathscr{C}$ и умножая на M_{11}, получаем условие

$$-M_{21}M_{12} + M_{11}M_{22} = 0,$$

или, записывая, что члены этой матрицы суть нули, получаем два условия

$$aa' + dd' = bb' + cc',$$
$$ab' + ba' = cd' + dc'.$$

Замечание. Исследование, проведенное в п. 4, может быть осуществлено иным образом. Запишем систему четырех поэлементных уравнений, равносильных уравнению $MX = 0$, в следующем виде:

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = 0, \qquad y_4 = 0.$$

Эти уравнения могут быть заменены равносильной системой

$$y_1 + iy_2 = 0, \qquad y_3 + iy_4 = 0,$$

где неизвестными служат комплексные числа $x + iy$ и $z + it$. Исследование этой системы идентично исследованию, проведенному выше по поводу изоморфизма между телом матриц

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

и полем комплексных чисел

3.31. 1. Применяем метод исключений.

Сначала предположим, что $\lambda \neq 0$. Из первых уравнений имеем

$$x_i = \frac{b_i - a_i x_{n+1}}{\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

заменяя x_i их выражением в последнем уравнении, получаем

$$x_{n+1}\left(\lambda^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = \lambda b_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \qquad (1)$$

Если

$$\lambda^2 - \sum_{1}^{n} a_i^2 \neq 0,$$

то система (S) имеет единственное решение; x_{n+1} определяется из уравнения (1), а затем находятся x_i как функции x_{n+1}.

$$\text{Если } \lambda^2 - \sum_{1}^{n} a_i^2 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda b_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq 0,$$

то система (S) не имеет решения.

$$\text{Если } \lambda^2 - \sum_{1}^{n} a_i^2 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda b_{n+1} - \sum_{1}^{n} a_i b_i = 0,$$

то равенство (1) справедливо при любом x_{n+1}; выбор x_{n+1} определяет все x_i с индексом $i \leqslant n$; стало быть, решения зависят от одной произвольной постоянной.

Предположим, что $\lambda = 0$. Первые n уравнений совместны в том и только том случае, если

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}$$

(если одно из a_i равно нулю, то соответствующее b_i должно быть равно нулю); x_{n+1} равно общему значению этих отношений, последнее уравнение системы дает соотношение между x_i с индексом $i \leqslant n$. Решение зависит от $n-1$ произвольных постоянных.

2. Определитель D_n имеет вид

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \lambda \end{vmatrix},$$

и мы без особых трудностей находим

$$D_1 = \lambda^2 - a_1^2 \quad \text{и} \quad D_2 = \lambda(\lambda^2 - a_1^2 - a_2^2).$$

Определим D_n по индукции, допустив, что

$$D_{n-1} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_{n-1}^2);$$

для первых двух значений n эта формула верна. Разложим D_n по первой строке; получим

$$D_n = \lambda\Delta_1 + (-1)^{n+2}a_1\Delta_{n+1},$$

где Δ_1 и Δ_{n+1} — миноры элементов λ и a_1 в D_n,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda & \dots & 0 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \lambda & a_n \\ a_2 & \dots & a_n & \lambda \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Δ_1 есть определитель того же вида, что и D_{n-1}, и определяется параметрами $a_2, \dots, a_n$; следовательно,

$$\Delta_1 = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - a_2^2 - a_3^2 - \dots - a_n^2\right).$$

Каждая из $n-1$ первых строк минора Δ_{n+1} содержит лишь один член, отличный от нуля, поэтому в разложении определителя Δ_{n+1} имеется только один ненулевой член, определенный перестановкой $(1, 2, \dots, n)$ строк и перестановкой $(2, 3, \dots, n, 1)$ столбцов; эти перестановки имеют соответственно 0 и $(n-1)$ инверсий. Таким образом,

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}a_1,$$

$$D_n = \lambda^{n-1}\left(\lambda^2 - a_2^2 - a_3^2 - \dots - a_n^2\right) + (-1)^{2n-3}\lambda^{n-1}a_1^2 =$$
$$= \lambda^{n-1}\left(\lambda^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2\right).$$

Формула, имеющая место для D_{n-1}, справедлива и для D_n.

Для того чтобы система (S) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы D_n не был равен нулю, т. е.

$$\lambda \neq 0 \quad \text{и} \quad \lambda^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 \neq 0.$$

3.32. Заданная система может быть записана в виде

$$A(\lambda_1) = A(\lambda_2) = A(\lambda_3) = A(\lambda_4) = 0, \qquad A(\mu) = 1.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — нули многочлена A; мы будем предполагать, что все они различны. Многочлен A имеет степень 6, поэтому он имеет шесть нулей; остальные два нуля будут обозначены λ' и λ''. Чтобы выразить λ' и λ'' через λ_i, воспользуемся соотношениями между нулями многочлена и его коэффициентами; коэффициенты при u^5 и u^3 равны нулю; отсюда

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda' + \lambda'',$$

$$0 = \sum_{i,j,k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k + (\lambda' + \lambda'')\sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j + \lambda'\lambda''\sum_i \lambda_i.$$

Положим

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \qquad s_2 = \sum \lambda_i\lambda_j,$$
$$s_3 = \sum \lambda_i\lambda_j\lambda_k, \qquad s_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.$$

Допустим, что $s_1 \neq 0$; тогда

$$\lambda' + \lambda'' = -s_1, \qquad \lambda'\lambda'' = \frac{s_1 s_2 - s_3}{s_1},$$

откуда

$$A = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)\left(\lambda^2 + s_1\lambda + \frac{s_1s_2 - s_3}{s_1}\right).$$

Коэффициент a получается, наконец, из соотношения $A(\mu) = 1$, в предположении, что ни один из сомножителей знаменателя не равен нулю

$$a = \frac{1}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)(\mu - \lambda_3)(\mu - \lambda_4)\left(\mu^2 + s_1\mu + \frac{s_1s_2 - s_3}{s_1}\right)}.$$

Значения неизвестных равны коэффициентам многочлена A, который мы запишем в виде

$$A = a(\lambda^4 - s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 - s_3\lambda + s_4)\left(\lambda^2 + s_1\lambda + \frac{s_1s_2 - s_3}{s_1}\right).$$

Тогда для неизвестных x_i получаем значения

$$x_1 = a\frac{s_4(s_1s_2 - s_3)}{s_1}, \qquad x_2 = a\frac{s_1^2s_4 + s_3^2 - s_1s_2s_3}{s_1},$$

$$x_3 = a\frac{s_1s_4 - s_1^2s_3 + s_1s_2^2 - s_2s_3}{s_1}, \qquad x_4 = a\frac{2s_1s_2 - s_1^3 - s_3}{s_1}, \qquad x_5 = a.$$

Исследование. Мы предполагаем, что λ_i различны, что $s_1 = \sum_i \lambda_i$ отлично от нуля и, наконец, что μ не обращает в нуль ни один из множителей многочлена A.

Если два из чисел λ_i равны между собой, то известны только три нуля многочлена A, один может быть выбран произвольно; решение зависит от произвольной постоянной (это очевидно, так как два уравнения будут тождественны).

Если $s_1 = 0$, то приравнивая к нулю коэффициент при u^3, получаем соотношение $s_3 = 0$; система несовместна, если $s_3 \neq 0$. Если $s_3 = 0$, то произведение $\lambda'\lambda''$ неопределенно, и решения системы зависят от одной произвольной постоянной.

Наконец, если $\mu = \lambda_i$ или если $\mu^2 + s_1\mu + \frac{s_1s_2 - s_3}{s_1} = 0$, то система, очевидно, несовместна.

3.33. 1. Ранг системы линейных форм имеет размерность сопряженного векторного пространства, порождаемого этими формами; мы будем находить его методом подстановок, т. е. заменой базиса x, y, z, t другим базисом сопряженного пространства.

Предположим, что $a \neq 0$. Тогда первые два уравнения можно решить относительно x и y,

$$x = \frac{Y - cz - bt}{a}, \qquad y = \frac{X - bz - ct}{a}.$$

Поэтому формы X, Y, z, t образуют базис сопряженного к R^4 пространства, две другие формы являются следующей комбинацией этих форм:

$$Z = \frac{1}{a}[cX + bY - 2bcz + (a^2 - b^2 - c^2)t],$$

$$T = \frac{1}{a}[bX + cY + (a^2 - b^2 - c^2)z - 2bct]$$

(добавив сюда формы $X = X$, $Y = Y$, получим выражение четырех исходных форм относительно базиса X, Y, z, t сопряженного пространства).

Формы X, Y, Z, T независимы, если формы $aZ - cX - bY$ и $aT - bX - cY$ непропорциональны, т. е. если $D = 4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 \neq 0$; очевидно,

$$D = (a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a).$$

Если $D = 0$, а $bc \neq 0$, то формы X, Y, Z независимы, и система имеет ранг 3.

Если $D = 0$ и $bc = 0$, а значит, и $a^2 - (b^2 + c^2) = 0$, то Z и T линейно выражаются через X и Y, и система имеет ранг 2 (в этом случае $b = 0$ и $a = \pm c$ или $c = 0$ и $a = \pm b$).

Предположим, что $a = 0$.

Если $b^2 - c^2 \neq 0$, то X и Y — две независимые формы от x и y, а Z и T — две независимые формы от z и t, и система имеет ранг 4.

Если $b^2 - c^2 = 0$, но числа b и c отличны от нуля, то система имеет ранг 2, ибо в этом случае имеем

$$cX - bY = 0, \qquad cZ - bT = 0.$$

Наконец, если $b = c = 0$, то все формы будут нулевыми.

В итоге система имеет ранг 4, если $D \neq 0$, ранг 3, если один из сомножителей в D равен нулю, и ранг 2, если два сомножителя из D обращаются в нуль.

Замечание. Если осуществить одну и ту же перестановку среди x, y, z, t и среди X, Y, Z, T, то получится система того же вида, что и заданная, но с переставленными параметрами a, b, c. Стало быть, исследование можно было бы провести в предположении, что параметр $a \neq 0$, и отсюда, без других вычислений, получить результат для $a = 0$.

2. Для вычисления определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & c & b & 0 \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

системы форм прибавим к элементам первой строки элементы остальных строк, умноженных на числа u, v, w; получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} ua+vb+wc & a+vc+wb & b+uc+wa & c+ub+va \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Члены первой строки равны

$$\begin{aligned} &a+b+c, &&\text{если} && u=v=w=1,\\ &\pm(a-b-c), &&\text{если} && u=-v=-w=1,\\ &\pm(a+c-b), &&\text{если} && -u=v=-w=1,\\ &\pm(a+b-c), &&\text{если} && -u=-v=w=1. \end{aligned}$$

Определитель Δ может рассматриваться как многочлен от одного переменного a над R; этот многочлен делится на каждый из множителей $a+b+c$, $a-b-c$, $a+c-b$, $a+b-c$, а значит, и на их произведение, если эти множители различны (т. е. если $bc(b+c)(b-c)\neq 0$). Но Δ — многочлен 4-й степени, поэтому он пропорционален произведению 4-х сомножителей,

$$\Delta = k(a+b+c)(a-b-c)(a+c-b)(a+b-c); \qquad (1)$$

коэффициент k может быть найден приравниванием членов с a^4, что дает $k=1$.

Доказательство проведено лишь в случае $bc(b+c)(b-c)\neq 0$; однако результат верен при любых a, b и c, поскольку правая и левая части (1) являются полиномами переменных a, b, c.

Итак, вновь получаем, что формы независимы, если

$$\Delta = -D = (a+b+c)(a-b-c)(a+c-b)(a+b-c) \neq 0.$$

3. *Первый случай*: $D\neq 0$. Тогда ранг системы равен 4 и она имеет единственное решение.

Второй случай: $D=0$ и $abc\neq 0$. Система имеет ранг 3. Четыре исходные формы зависимы; более того, заметим, что сомножители в D могут быть записаны в виде $ua+vb+wc$, где каждое из чисел u, v, w равно ± 1 и один из сомножителей равен нулю, но

$$ua+vb+wc=0 \Rightarrow uvwX+uY+vZ+wT=0.$$

Для того чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы правые части удовлетворяли тому же соотношению, т. е.

$$uvw(a+b+c)+ua+vb+wc=0;$$

отсюда

$$a+b+c=0.$$

Может случиться, что все три числа u, v, w равны; например, $u = v = w = 1$; тогда числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c = 0$, соотношение между членами правой части выполняется, и система имеет решения, зависящие от одной произвольной постоянной.

Наконец, если только два из чисел u, v, w равны, скажем, u и v равны 1, а $w = -1$, то условия $a + b + c = 0$ и $a + b - c = 0$ влекут $c = 0$, что противоречит сделанному предположению ($abc \neq 0$). Стало быть, система не имеет решений.

Третий случай: один из параметров равен нулю. Пусть это будет a; система имеет ранг 4, и при любой правой части имеет единственное решение, если $b^2 - c^2 \neq 0$, и ранг 2, если $b = uc$, где $u = \pm 1$. В последнем случае формы X, Y, Z, T удовлетворяют двум соотношениям

$$X - uY = 0, \qquad Z - uT = 0.$$

Для того чтобы система имела решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$b + c = 0, \qquad b - uc = 0.$$

Таким образом, система имеет решения, зависящие от двух произвольных постоянных, если $b + c = 0$, и не имеет решений, если $b - c = 0$.

3.34. Транспонированная к A матрица ${}^tA = (a_{ji})$ при данных условиях равна $-A$, и, как мы знаем,

$$\det {}^tA = \det A = \det(-A) = (-1)^n \det A;$$

отсюда, если n нечетно, то

$$\det A = -\det A = 0.$$

3.35. 1. Значение определителя D не изменится, если к первому столбцу прибавить остальные столбцы, умноженные на $u, \ldots, u^{n-1}$. Тогда члены первого столбца примут вид

$$\begin{gathered} a_1 + a_2u + \ldots + a_nu^{n-1}, \\ a_n + a_1u + \ldots + a_{n-1}u^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2 + a_3u + \ldots + a_1u^{n-1}. \end{gathered}$$

Все они пропорциональны, ибо $u^n = 1$ и каждое из этих чисел получается из предыдущего умножением на u. Поэтому многочлен D переменного a_1 делится на n множителей вида $\sigma_u = a_1 + a_2u + \ldots + a_nu^{n-1}$, где в качестве u следует последовательно взять корни n-й степени из единицы, т. е. числа $u_h = e^{2\pi ih/n}$. Многочлен D, за исключением частных значений

$a_2, \ldots, a_n$ (когда некоторые из множителей σ_u равны), делится на произведение этих множителей; следовательно,

$$D = d\prod_{h=0}^{n-1}(a_1 + a_2 u_h + \ldots + a_n u_h^{n-1}); \tag{1}$$

произведение, стоящее в правой части, и D являются многочленами степени n переменного a_1, причем коэффициенты при a_1 у этих многочленов равны единице, поэтому d не зависит от a_1, и более того, $d = 1$.

Равенство (1) доказано, за исключением частных значений $a_2, \ldots, a_n$, но поскольку его правая и левая часть являются многочленами переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то оно справедливо при любых значениях этих переменных, т. е. является тождеством.

2. В этом случае

$$D = \prod_{h=0}^{n-1}(1 + 2u_h + \ldots + nu_h^{n-1}).$$

Замечаем, что

$$1 + 2u + \ldots + nu^{n-1} = \frac{d}{du}(1 + u + \ldots + u^n) = \frac{d}{du}\left(\frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}\right) = \frac{nu^{n+1} - (n+1)u^n + 1}{(u-1)^2}.$$

Если u — корень u_h из единицы, не равный 1, то

$$\frac{nu_h^{n+1} - (n+1)u_h^n + 1}{(u_h - 1)^2} = \frac{nu_h - (n+1) + 1}{(u_h - 1)^2} = \frac{n}{u_h - 1};$$

поэтому

$$D = (1 + 2 + \ldots + n)\prod_{h=1}^{n-1}\frac{n}{u_h - 1}.$$

Так как числа u_h служат нулями многочлена $u^n - 1$, то числа $v_h = u_h - 1$ будут нулями многочлена $(v+1)^n - 1 = v[v^{n-1} + \ldots + n]$; значит, произведение отличных от нуля чисел v_h равно $(-1)^{n-1}n$.

Таким образом,

$$D = \frac{n(n+1)}{2}n^{n-1}\frac{1}{(1)^{n-1}n} = (-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

3. В этом случае

$$D = \prod_{h=0}^{n-1}(1 + u_h + \ldots + u_h^{p-1}).$$

Если $u_h \neq 1$, то

$$1 + u_h + \ldots + u_h^{p-1} = \frac{u_h^p - 1}{u_h - 1};$$

отсюда

$$D = p\prod_{h=1}^{n-1} \frac{u_h^p - 1}{u_h - 1}.$$

Если p не взаимно просто с n, а q — их н. о. д. и $p = qp_1$, $n = qn_1$, то

$$(e^{2n_1\pi i/n})^p = e^{2pn_1\pi i/n} = e^{2ip_1\pi} = 1.$$

Множитель $u_{n_1}^p - 1$ равен нулю, и

$$D = 0.$$

Если p взаимно просто с n, то все числа $u_h^p (h = 0, 1, \ldots \ldots, n-1)$ различны между собой, ибо

$$u_h^p = u_l^p \Leftrightarrow \frac{2hp\pi}{n} = \frac{2lp\pi}{n} \pmod{2\pi},$$

и n должно делить произведение $(h-l)p$; но n взаимно просто с p, и значит, должно делить $h-l$, что невозможно, если $h \neq l$, поскольку $|h-l| < n$. А так как $u_0^p = 1^p = 1$, то все числа $u_h^p (h = 1, \ldots, n-1)$ различны между собой и отличны от 1; это корни из единицы, и стало быть, совпадают с числами u_h (с точностью до порядка). Поэтому

$$\prod_{h=1}^{n-1} (u_h^p - 1) = \prod_{h=1}^{n-1} (u_h - 1), \qquad D = p.$$

3.36. Элементы y_{ij} произведения AX имеют значения

$$y_{i,j} = \sum_h a_{ih} x_j^{h-1} = P_i(x_j).$$

Члены $\delta_{i,j}$ определителя Δ_n равны $(i+j-1)^n$ (где i и j принимают значения $1, 2, \ldots, n+1$); стало быть, мы можем положить $\delta_{ij} = P_i(x_j)$, где $x_j = j-1$, что в принятых выше обозначениях дает

$$\Delta_n = \det Y = (\det A)(\det X).$$

Определитель матрицы X есть определитель Вандермонда со значениями $\lambda_j = j-1$, и следовательно,

$$\det X = \prod_{i>j} (i-j) = (n!)\,[(n-1)!]\ \ldots\ (2!)$$

(последовательно берутся члены с $i = n$, $i = n-1, \ldots$).

Матрица A коэффициентов многочленов $(x+i)^n$ имеет определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-1} & 1 \\ 2^n & C_n^1 2^{n-1} & \dots & C_n^{n-1} 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)^n & C_n^1 (n+1)^{n-1} & \dots & C_n^{n-1}(n+1) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & 1 & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n+1)^n & (n+1)^{n-1} \dots & n+1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обозначим последний определитель через α. Если в этом определителе сменить порядок столбцов на обратный, то получится определитель Вандермонда. Но для того чтобы получить обратный порядок столбцов, необходимо сделать

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

перестановок столбцов. Поэтому

$$\alpha = (-1)^{n(n+1)/2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix} = (-1)^{n(n+1)/2} \prod_{i>j} (i-j).$$

Разности $i-j$ — те же, что для определителя матрицы X; значит,

$$\alpha = (-1)^{n(n+1)/2} (n!) [(n-1)!] \dots (2!).$$

Предыдущие результаты позволяют записать

$$\Delta_n = (-1)^{n(n+1)/2} \{(n!) [(n-1)!] \dots (2!)\}^2 C_n^1 \dots C_n^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n(n+1)/2} \{n! [(n-1)!] \dots (2!)\}^2 \frac{n!}{(n-1)!\,1!} \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \dots \frac{n!}{1!\,(n-1)!},$$

и, после упрощения,

$$\Delta_n = (-1)^{n(n+1)/2} (n!)^{n+1}.$$

3.37. Ранг матрицы A равен $n-1$, поэтому $\det A = 0$, и $AB = 0$.

Если a и b — линейные отображения, соответствующие матрицам A и B, то образ $(ab)(x)$ произвольного вектора x равен нулю, и значит, образ $b(x)$ любого элемента x принадлежит ядру отображения a, т. е. векторное пространство b (C^n) содержится в ядре отображения a.

Известно, что отображения a и b имеют тот же ранг, что и матрицы A, B. А так как a имеет ранг $n-1$, то его ядро имеет размерность 1. Размерность $b(C^n)$, т. е. ранг отображения b, меньше или равна 1. На самом деле он равен в точности 1, ибо по крайней мере один член A_{ij} отличен от нуля (A имеет ранг $n-1$).

Если A имеет ранг не более $n-2$, то все коэффициенты A_{ij} — нули и B — нулевая матрица.

3.38. Уравнения системы (S) выражают тот факт, что числа λ_i — нули рациональной дроби f, т. е. нули многочлена в числителе.

Предположим, что числа a, b, c, d, равно как и λ_i, различны; тогда

$$f(u)=\frac{F(u)}{(a+u)(b+u)(c+u)(d+u)}.$$

F есть многочлен 4-й степени, в котором член с наивысшей степенью равен $-u^4$; поэтому

$$F(u)=-(u-\lambda_1)(u-\lambda_2)(u-\lambda_3)(u-\lambda_4).$$

Числа x, y, z, t являются коэффициентами разложения дроби f на простейшие; находим

$$x=\frac{F(-a)}{(b-a)(c-a)(d-a)}=-\frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)(a+\lambda_3)(a+\lambda_4)}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

и аналогичные формулы для y, z, t.

Исследование. Если все числа a, b, c, d различны и если $\lambda_1=\lambda_2$, то мы можем определить только три нуля многочлена F, а четвертый выбрать произвольно. Система (S) имеет решения, зависящие от одной произвольной постоянной. (Результат очевиден, поскольку 4 уравнения сводятся к 3.)

Если $a=b$, то числитель дроби f имеет степень только 3, и не может иметь четырех нулей; если λ_i различны, то система несовместна.

Вообще, если p из четырех чисел a, b, c, d совпадают, то несократимая дробь, равная f, имеет числитель и знаменатель степени $4-p$. Если число q различных значений λ_i превышает $4-p$, то задача не имеет решения, поскольку числитель не может иметь более $4-p$ нулей. Если же $q\leqslant 4-p$, то система имеет решения, зависящие от $4-p-q$ произвольных постоянных. (Эти результаты можно также легко получить путем непосредственного исследования системы (S).)

3.39. Легко получаем

$$D_2=a_1a_2+a_1b_2+a_2b_1,$$
$$D_3=a_1a_2a_3+a_1a_2b_3+a_2a_3b_1+a_3a_1b_2.$$

Допускаем, что

$$D_{n-1}=\prod_{i=1}^{n-1} a_i+\sum_{i=1}^{n-1}\Big(b_i \prod_{\substack{j\neq i\\ j\leqslant n-1}} a_j\Big)$$

(формула установлена для $n-1=2$ и $n-1=3$).

Для вычисления D_n воспользуемся следующим свойством: определитель есть линейная функция столбца (здесь n-го); в силу этого свойства

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1\\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_n & b_n & \dots & b_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 & 0\\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n\end{vmatrix}=$$

$$=D'_n+D''_n.$$

Для вычисления первого определителя D'_n вычтем элементы последнего столбца из элементов остальных столбцов; получим

$$D'_n=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & b_1\\ 0 & a_2 & \dots & b_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & b_n\end{vmatrix}=a_1a_2\dots a_{n-1}b_n=b_n\prod_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Разлагая второй определитель D''_n по элементам последнего столбца, получаем $D''_n=a_nD_{n-1}$. Стало быть,

$$D_n=b_n\prod_1^{n-1} a_i+a_n\Big[\prod_1^{n-1} a_i+\sum_{i=1}^{n-1}\Big(b_i\prod_{\substack{j\neq i\\ j\leqslant n-1}} a_j\Big)\Big]=$$

$$=\prod_1^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n}\Big(b_i\prod_{\substack{j\neq i\\ j\leqslant n}} a_j\Big).$$

D_n имеет то же выражение, что и D_{n-1} (с точностью до замены $n-1$ на n), и значит, индукция по n доказывает формулу.

3.40. Определитель матрицы A равен $P(0)$, и, по условию отличен от нуля; значит, A обратима. Получим формулу.

Первый способ. Очевидно, имеем

$$A(A^{-1}-\lambda I)=I-\lambda A=-\lambda\Big(A-\frac{1}{\lambda}I\Big).$$

Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det[A(A^{-1}-\lambda I)]=(\det A)[\det(A^{-1}-\lambda I)]=P(0)R(\lambda).$$

При умножении матрицы на μ ее определитель умножается на μ^n; поэтому

$$\det\Big[(-\lambda)\Big(A-\frac{1}{\lambda}I\Big)\Big]=(-\lambda)^n\det\Big(A-\frac{1}{\lambda}I\Big)=(-1)^n\lambda^nP\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

Отсюда

$$P(0)\,R(\lambda)=(-1)^n\lambda^n P\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Второй способ. Известно, что если K — подполе поля C, то найдется такая обратимая матрица T, что матрица $B=T^{-1}AT$ будет треугольной. Элементы b_{ii} диагонали матрицы B являются собственными значениями λ_i матриц A и B, причем каждое повторяется столько раз, какова его кратность. По условию, ни одно из λ_i не равно нулю (мы предположили, что $P(0)\neq 0$).

Легко видеть, что $B^{-1}=T^{-1}A^{-1}T$; стало быть, характеристические многочлены матриц B^{-1} и A^{-1} совпадают. Простые вычисления показывают, что диагональные элементы матрицы B^{-1} равны $1/b_{ii}=1/\lambda_i$; отсюда сразу выводим соотношения для характеристического многочлена R матрицы B:

$$R(\lambda)=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda_i}\right)=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda_i}\left(\lambda_i-\frac{1}{\lambda}\right);$$

а поскольку

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i-\frac{1}{\lambda}\right)=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}-\lambda_i\right)=P\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=P(0),$$

то получаем окончательно

$$R(\lambda)=\frac{(-1)^n\lambda^n P(1/\lambda)}{P(0)}.$$

3.41. 1. По определению произведения двух матриц,

$$VA=\left(\sum_i a_{i1},\ \sum_i a_{i2},\ \ldots,\ \sum_i a_{in}\right).$$

Если A принадлежит E, то $VA=s(A)V$. Обратно, если $VA=\lambda V$, то сумма $\sum\limits_i a_{ij}$ элементов столбца при любом j равна λ; A принадлежит E, и $s(A)=\lambda$.

2. Покажем, что если A и B принадлежат E, то $A-B$ и AB принадлежат E; для этого воспользуемся результатом п. 1. Имеем

$$V(A-B)=VA-VB=s(A)V-s(B)V=[s(A)-s(B)]V,$$
$$V(AB)=(VA)B=s(A)VB=s(A)s(B)V.$$

Тем самым мы установили, что E — подкольцо кольца $\mathscr{A}$ и, кроме того, что отображение $A\to s(A)$ пространства E в K сохраняет операции; это отображение есть гомоморфизм кольца. Умножим слева на V обе части равенства $AA^{-1}=I$:

$$V(AA^{-1})=(VA)A^{-1}=s(A)VA^{-1}=V.$$

A^{-1} принадлежит E, и

$$s(A^{-1}) = \frac{1}{s(A)}.$$

3. Система уравнений, определяющая собственные векторы, имеет вид

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \lambda x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Почленное сложение дает

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i =$$
$$= s(A)\sum_{j=1}^{n} x_j - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i = (s(A) - \lambda)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(используется коммутативность и ассоциативность сложения в K). Если $\lambda = s(A)$, то левые части уравнений удовлетворяют линейному соотношению

$$\sum_i X_i = 0;$$

поэтому система имеет ранг не более $(n-1)$ и, следовательно, обладает ненулевыми решениями; $s(A)$ есть собственное значение.

4. Уравнения для собственных векторов, записанные в п. 3, позволяют заключить, что

$$|\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$|\lambda|\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant s(A)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right),$$
$$|\lambda| \leqslant s(A).$$

3.42. 1. Уравнения для собственных векторов имеют вид

$$(1-\lambda)x + 3y = 0,$$
$$3x - (2+\lambda)y - z = 0,$$
$$-y + (1-\lambda)z = 0.$$

Первый случай: $\lambda = 1$. Система сводится к уравнениям $y = 0$, $z = 3x$. Число 1 есть собственное значение, а $(1, 0, 3)$ — собственный вектор.

Второй случай: $\lambda \neq 1$. Исходная система равносильна следующей системе:

$$y = (1 - \lambda) z,$$
$$x = -\frac{3y}{1-\lambda} = -3z,$$
$$z[-9 - (2+\lambda)(1-\lambda) - 1] = 0.$$

Коэффициент при z должен равняться нулю, но

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \quad \text{или} \quad \lambda = -4.$$

Тогда для получения соответствующих собственных векторов одному из переменных, скажем, z, следует задать произвольное значение; положим, к примеру, $z = -1$.

Итак, собственные значения равны 1, 3 и -4, а собственные векторы, соответствующие этим значениям, есть

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Каждый из этих векторов, очевидно, может быть заменен пропорциональным вектором.)

Легко видеть, что эти три вектора независимы и составляют базис пространства R^3, что, впрочем, известно априори, ибо все собственные значения различны.

2. Если сопоставить векторам x пространства R^3 матрицы X с одним столбцом их координат относительно канонического базиса пространства, то отвечающее матрице A отображение R^3 в R^3, т. е. отображение, матрица которого относительно канонического базиса пространства R^3 равна A, может быть определено посредством соотношения

$$Y = AX.$$

Преобразование координат будет определяться при помощи обратимой матрицы T, и если

$$X = TX', \qquad Y = TY',$$

то

$$Y' = T^{-1}ATX'.$$

Для того чтобы матрица $T^{-1}AT$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы новые векторы базиса были собственными векторами, например, V_1, V_2, V_3. В частности,

$$X_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = TX_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};$$

но матрица TX_1' представляет собой первый столбец матрицы T; значит, члены этого столбца служат координатами вектора V_1. Точно так же, члены второго столбца будут координатами вектора V_2, а третьего — вектора V_3, и стало быть,

$$T=(V_1 | V_2 | V_3)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения T^{-1} можно вычислить миноры и определитель матрицы T, или, лучше, решить систему

$$\begin{aligned} x &= x' + 3y' + 3z', \\ y &= 2y' - 5z', \\ z &= 3x' - y' - z'. \end{aligned}$$

И в том и в другом случае получаем

$$T^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{3}{35} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{35} \end{Vmatrix}=\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 15 & 10 & -5 \\ 6 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Совершенно очевидно, что T не единственна. Векторы V_1, V_2, V_3, как мы указывали, были определены лишь с точностью до пропорционального множителя и с точностью до их порядка. Во всех случаях следует убедиться, что получена требуемая матрица T, т. е. проверить, будут ли ее столбцы состоять из координат собственных векторов матрицы A, а именно, будут ли они пропорциональны исходным векторам V_1, V_2, V_3.

Проверка. Имеем

$$AT=\begin{pmatrix} 1 & 9 & -12 \\ 0 & 6 & 20 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}AT=\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & -280 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем диагональную матрицу, каждый член которой является собственным значением относительно собственного вектора, имеющего координатами элементы соответствующего столбца матрицы T.

3.43. Задача подобна задаче 3.42, поэтому мы приведем ответы без объяснений.

1) Для определения собственных векторов имеем

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x+y&=0, & x&=(\lambda-1)z,\\ -x+(2-\lambda)y+z&=0 \Leftrightarrow & y&=(\lambda-1)x=(\lambda-1)^2z,\\ x+(1-\lambda)z&=0, & z(2-\lambda)&[1+(\lambda-1)^2]=0. \end{aligned}$$

Отсюда собственные значения равны: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1+i$, $\lambda_3=1-i$, а соответствующие собственные векторы равны

$$V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad V_2=\begin{pmatrix}i\\-1\\1\end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix}-i\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

2) Возьмем в качестве T матрицу с вектор-столбцами V_1, V_2, V_3; тогда

$$T=\begin{pmatrix}1 & i & -i\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -2i & -1+i & 1+i\\ 2i & -(1+i) & 1-i\end{pmatrix}.$$

3) Матрица

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1+i & 0\\ 0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

диагональна и каждый ее элемент является собственным значением, соответствующим собственному вектору, координаты которого образуют соответствующий столбец матрицы T.

Как и в задаче 3.42, заметим, что V_1, V_2, V_3 могут быть заменены пропорциональными векторами и что столбцы матрицы T могут быть переставлены.

3.44. 1. Если V — собственный вектор, т. е. $\tilde{A}(V)=\lambda V$, то

$$\tilde{A}^2(V)=\tilde{A}[\tilde{A}(V)]=\tilde{A}(\lambda V)=\lambda\tilde{A}(V)=\lambda^2V,$$

и индукцией по p получаем $\tilde{A}^p(V)=\lambda^pV$.

Составив линейную комбинацию этих уравнений, видим, что для любого многочлена p (и в частности, для f) $[p(\tilde{A})](V)=$ $=p(\lambda)V$; отсюда

$$f(\lambda)=0\Rightarrow[f(\tilde{A})](V)=0.$$

Собственные векторы V_i матрицы A образуют базис пространства, поскольку все собственные значения различны. Ядро отображения $f(\tilde{A})$, содержащее все векторы V_i, содержит и порождаемое ими векторное пространство, т. е. все пространство, и стало быть, $f(\tilde{A})$ — нулевое отображение.

Если p — многочлен, то соответствующим матрице $p(A)$ отображением будет $p(\tilde{A})$, так как φ есть изоморфизм. В частности, это верно и для многочлена f, поэтому матрица $f(A)$ отображения $f(\tilde{A})$ равна нулю.

2. Для того чтобы $AB = BA$ или $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого собственного вектора V_i матрицы A

$$(\tilde{A}\tilde{B})(V_i) = (\tilde{B}\tilde{A})(V_i).$$

В самом деле, векторы V_i образуют базис пространства C^n; два отображения $\tilde{A}\tilde{B}$ и $\tilde{B}\tilde{A}$, преобразующие одинаковым образом векторы базиса, идентичны. По определению векторов V_i,

$$(\tilde{B}\tilde{A})(V_i) = \tilde{B}[\tilde{A}(V_i)] = \tilde{B}(\lambda_i V_i) = \lambda_i \tilde{B}(V_i),$$
$$(\tilde{A}\tilde{B})(V_i) = \tilde{A}[\tilde{B}(V_i)],$$

откуда

$$\tilde{A}[\tilde{B}(V_i)] = \lambda_i \tilde{B}(V_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если вектор $\tilde{B}(V_i)$ отличен от нуля, то он является собственным вектором отображения $\tilde{A}$, а соответствующее собственное значение равно λ_i; но поскольку собственные значения различны, то каждому из них соответствует одномерное многообразие собственных векторов, и $\tilde{B}(V_i)$ пропорционален V_i. Этот результат справедлив и для $\tilde{B}(V_i)$, равного нулю, если взять коэффициент пропорциональности равным 0. Следовательно, независимо от того, равен или не равен нулю вектор $\tilde{B}(V_i)$,

$$\tilde{B}(V_i) = \mu_i V_i.$$

Это условие, очевидно, и достаточно.

3. Для того чтобы $B = g(A)$ или $\tilde{B} = g(\tilde{A})$, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора V_i базиса выполнялось равенство $\tilde{B}(V_i) = [g(\tilde{A})]V_i$, а поскольку $\tilde{B}(V_i) = \mu_i V_i$, $[g(\tilde{A})](V_i) = g(\lambda_i) V_i$, то

$$\mu_i = g(\lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Известно, что существует, и притом единственный, многочлен g степени $\leqslant n - 1$, который при заданных значениях λ_i принимает n заданных значений μ_i; таковым является интерполяционный многочлен Лагранжа (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. IV, 5-й раздел). Итак, поставленная задача имеет, и притом единственное, решение.

Можно было бы также заметить, что:

а) отображения $\tilde{B}$, перестановочные с $\tilde{A}$, образуют n-мерное векторное пространство E над C ($\tilde{B}$ определяется числами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$);

б) если g — многочлены степени $\leqslant n - 1$, то отображения $g(\tilde{A})$ образуют векторное подпространство E' пространства E;

в) отображение $g(\tilde{A})$ может быть нулевым лишь при нулевом g; достаточно исследовать векторы $[g(\tilde{A})](V_i)$. Следовательно, E' имеет размерность n и совпадает с E.

4. Для обратимости матрицы B, или для существования обратного отображения $\tilde{B}$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из собственных значений $g(\lambda_i)$ не обращалось в нуль. Это очевидно, если рассматривать матрицу отображения $\tilde{B}$ относительно базиса V_i; эта матрица диагональна, и ее элементами являются числа $g(\lambda_i)$.

Стало быть, чтобы B была обратима, необходимо и достаточно, чтобы никакой нуль многочлена f не был нулем g, т. е. чтобы f и g были взаимно просты.

3.45. Собственному значению λ соответствует по крайней мере один собственный вектор V. Если взять базис, составленный из вектора V и некоторого другого вектора W, то матрица A преобразуется в матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Действительно, элементы первого столбца матрицы A_1 являются координатами вектора $\lambda V = \tilde{A}(V)$, если $\tilde{A}$ означает отображение с матрицей A; отсюда следует, что матрица A_1 имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

но поскольку λ — двойное собственное значение, то $d = \lambda$.

Наряду с базисом $\tau_1 = \{V, W\}$ рассмотрим базис $\tau_k = \{V, kW\}$. Если относительно базиса τ_1 некоторый вектор имеет координаты x_1 и x_2, то относительно базиса τ_k он будет иметь координаты x_1 и $(1/k)x_2$. Поэтому относительно базиса τ_k отображение $\tilde{A}$ представимо матрицей

$$B = T^{-1}A_1T, \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

т. е. матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & ck \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

При $c \neq 0$, взяв $k = 1/c$, получим

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Утверждается, что

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Первое тривиально. Доказательство второго легко осуществить индукцией по n (при $n = 1$ это верно):

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

3.46. 1. Для характеристического многочлена f матрицы A имеем

$$-f(\lambda) = -\det(A - \lambda I) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 32\lambda - 32 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2.$$

Каждому из двух собственных значений соответствует одномерное многообразие собственных векторов, которое можно определить при помощи одного из этих векторов: собственному значению $\lambda = 2$ соответствует собственный вектор $V_1 = (1, 1, 1)$, а $\lambda = 4$ — собственный вектор $V_2 = (1, -1, 1)$.

2. Одно из собственных значений матрицы A — двойное; собственные векторы не образуют базиса в R^3. Возьмем в качестве векторов базиса векторы V_1, V_2, а в качестве третьего вектора возьмем, например, третий вектор e_3 канонического базиса пространства R^3.

Первые два столбца преобразованной матрицы B дают координаты (в новом базисе) векторов $2V_1$ и $4V_2$, преобразованных из V_1 и V_2 отображением $\tilde{A}$ с матрицей A; диагональные члены этих столбцов равны 2 и 4, а остальные равны нулю.

Чтобы получить члены третьего столбца матрицы B, нужно найти координаты X, Y, Z вектора $\tilde{A}(e_3)$ относительно нового базиса. Для вектора $\tilde{A}(e_3)$ имеем

$$\tilde{A}(e_3) = -5e_1 + e_2 - e_3 = XV_1 + YV_2 + Ze_3.$$

Выражая векторы нового базиса с помощью векторов e_1, e_2, e_3, получаем

$$\begin{aligned} -5 &= X + Y, \\ 1 &= X - Y, \\ -1 &= X + Y + Z, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} X &= -2 \\ Y &= -3, \\ Z &= 4, \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Возьмем в качестве третьего вектора базиса новый вектор $\varepsilon_3 = aV_1 + bV_2 + ce_3$; коэффициент c не может равняться нулю, ибо векторы V_1, V_2 и ε_3 независимы.

Матрица B', преобразованная из B, получается, как и в п. 2. Элементы α, β, γ третьего столбца матрицы B' определяются из соотношения

$$\tilde{A}(\varepsilon_3) = 2(a-c)V_1 + (4b-3c)V_2 + 4ce_3 = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma\varepsilon_3.$$

Отсюда приходим к системе

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma a &= 2(a-c), & \qquad & & \alpha &= -2(a+c), \\ \beta + \gamma b &= 4b - 3c, & & \text{или} & \beta &= -3c, \\ \gamma c &= 4c, & & & \gamma &= 4, \end{aligned}$$

ибо $c \neq 0$.

Мы хотим, чтобы одно из чисел α, β было равно нулю, а второе 1. Поскольку $c \neq 0$, то $\beta \neq 0$; на основании этого положим $\beta = 1$; отсюда $c = -1/3$, и если теперь положить $\alpha = 0$, то $a + c = 0$, а значит, $a = 1/3$. Число b произвольно; возьмем $b = 0$.

Относительно канонического базиса e_1, e_2, e_3 пространства R^3 векторы нового базиса имеют координаты

$$V_1 = (1,\ 1,\ 1), \qquad V_2 = (1,\ -1,\ 1), \qquad \varepsilon_3 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right),$$

и матрица B_0 имеет вид

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисление B_0^n идентично вычислению B^n в задаче 3.45; легко получаем

$$B_0^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Если T — матрица, вектор-столбцами которой являются векторы V_1, V_2 и ε_3, то, как мы знаем, T обратима, и

$$B_0 = T^{-1}AT;$$

индукцией по n получаем

$$B_0^n = T^{-1}A^nT$$

(этот результат, впрочем, уже известен, потому что функция, ставящая в соответствие матрице M матрицу $T^{-1}MT$, есть изоморфизм кольца (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VIII, 3-й раздел, § 3)). Итак, имеем

$$A^n = TB_0^nT^{-1},$$

где матрица T известна, а матрица T^{-1} получается из нее элементарным вычислением; матрица A^n есть произведение трех известных матриц.

3.47. 1. Координаты вектора $\tilde{A}(e_i)$ являются элементами i-го столбца матрицы A,

$$\tilde{A}(e_i) = e_{i+1}, \quad \text{если } i < n,$$
$$\tilde{A}(e_n) = a_0e_1 + a_1e_2 + \ldots + a_{n-1}e_n.$$

Индукцией по целым i легко показывается, что

$$\tilde{A}^i(e_1) = e_{i+1}, \quad \text{если} \quad i < n,$$
$$\tilde{A}^n(e_1) = \tilde{A}(e_n).$$

Очевидно,

$$[f(\tilde{A})][e_1] = \tilde{A}^n(e_1) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\tilde{A}^i(e_1) = \tilde{A}(e_n) - \sum_{i=0}^{n-1} a_ie_{i+1} = 0,$$
$$[f(\tilde{A})][e_i] = [f(\tilde{A})\tilde{A}^{i-1}][e_1] = [\tilde{A}^{i-1}f(\tilde{A})][e_1] = 0.$$

Отображение $f(\tilde{A})$ переводит в 0 все векторы базиса, т. е. является нулевым. Стало быть, его матрица $f(A)$ — нулевая.

2. $\mathcal{M}$ — подкольцо кольца квадратных матриц порядка n, поскольку оно содержит разность и произведение любых двух своих элементов:

$$p(A) - q(A) = (p - q)(A),$$
$$p(A)q(A) = pq(A).$$

При этом отображение $p \to p(A)$ кольца многочленов во множество $\mathcal{M}$ сохраняет операции; это гомоморфизм кольца, и кольцо $\mathcal{M}$ коммутативно.

Обозначим через p и q два многочлена из $\mathcal{I}$, а через r — произвольный многочлен; имеем

$$(p - q)(A) = p(A) - q(A) = 0 \Rightarrow p - q \in \mathcal{I},$$
$$(rp)(A) = r(A)p(A) = 0 \Rightarrow rp \in \mathcal{I}.$$

$\mathcal{I}$ есть аддитивная подгруппа, устойчивая относительно любого элемента из $\mathcal{M}$; значит, это идеал. Идеал $\mathcal{I}$, согласно п. 1, содержит многочлен f степени n.

3. Характеристический многочлен матрицы A есть многочлен φ вида

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda \ldots & 0 & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & 1 & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителя прибавим к первой строке элементы остальных строк, умноженные на λ, λ^2, ..., λ^{n-1}, что даст

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n \\ 1 & -\lambda & \ldots & 0 & a_1 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 \ldots 1 & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}.$$

В первой строке только последний член отличен от нуля; его минор (в определителе $\varphi(\lambda)$ он отмечен) есть определитель треугольной матрицы; значит, он равен произведению диагональных элементов, т. е. 1, имеем

$$\varphi(\lambda) = (-1)^{n+1}(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n) = (-1)^n f(\lambda).$$

4. Сначала допустим, что многочлены p и f взаимно просты. Тогда (теорема Безу) найдутся такие многочлены q и g, что $pq + fg = 1$. Отображение $p \to p(A)$ есть гомоморфизм кольца, т. е. сохраняет операции. Стало быть, можем написать

$$p(A)q(A) + f(A)g(A) = I \qquad (I \text{ — единичная матрица}),$$

но $f(A)$ — нулевая матрица, и предыдущее равенство сводится к $p(A)q(A) = I$; матрица $p(A)$ обратима.

Если многочлены p и f не являются взаимно простыми, то они имеют по крайней мере один общий нуль λ_0; как нуль многочлена f число λ_0 является собственным значением матрицы A, ему соответствует хотя бы один собственный вектор V_0. Тогда

$$\tilde{A}(V_0) = \lambda_0 V_0 \Rightarrow [p(\tilde{A})](V_0) = p(\lambda_0)V_0 = 0.$$

Ядро отображения $p(\tilde{A})$ отлично от нуля; $p(\tilde{A})$ не обратимо. Матрица $p(A)$ не обратима; V_0 — собственный вектор этой матрицы, а 0 — соответствующее собственное значение.

3.48. 1. Изменению базиса отвечает такая обратимая матрица T, что матрицы X и X' с единственным столбцом координат вектора V относительно двух базисов связаны соотношением $X = TX'$ (см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VIII, 3-й раздел, § 3).

Матрицу координат n векторов V_i запишем в виде $(X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n)$; это обозначение выражает, что элементы i-го столбца суть элементы матрицы X_i. Тогда правила вычисления матриц позволяют заключить, что матрицы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$ из координат векторов V_i относительно двух рассматриваемых базисов удовлетворяют соотношению

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = T(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n),$$

и значит,

$$\det(X_1, X_2, \ldots, X_n) = [\det T][\det(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)].$$

Определитель из n векторов V_i при замене базиса умножается на множитель $[\det T]^{-1}$.

2. При замене одного ортонормированного базиса другим матрица T ортогональна, и $\det T = \pm 1$, а следовательно,

$$\det(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \pm \det(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n).$$

Абсолютное значение определителя из n векторов инвариантно относительно такой замены базиса.

Если векторы V_i линейно зависимы, то определитель из этих векторов равен нулю и $0 \leqslant \prod l_i$, где l_i — длины векторов V_i.

Если векторы V_i независимы, то процесс ортогонализации Шмидта (Пизо и Заманский, Алгебра, гл. X, 2-й раздел, § 1) позволяет определить такой ортонормированный базис e_i, что для любого i векторные пространства, порожденные векторами $e_1, e_2, \ldots, e_i$ и $V_1, V_2, \ldots, V_i$, совпадают; относительно нового базиса координаты вектора V_i с индексом, превосходящим $i+1$, равны нулю, и матрица $(X_1, \ldots, X_n)$ из координат вектора V_i — треугольная. Определитель матрицы $(X_1, \ldots, X_n)$ равен в этом случае произведению диагональных членов, и

$$|\det(X_1, X_2, \ldots, X_n)| = |x_{11}|\,|x_{22}| \ldots |x_{nn}|.$$

По определению длины вектора,

$$l_i = \sqrt{\sum_j x_{ji}^2} \geqslant |x_{ii}|,$$

$$|\det(X_1, X_2, \ldots, X_n)| = \prod_{i=1}^{n} |x_{ii}| \leqslant \prod_{i=1}^{n} l_i.$$

3.49. Квадратичная форма $\omega(X)$ равна нулю в том и только том случае, если вектор

$$\sum_1^p x_i V_i$$

является нулевым; для того чтобы $\omega(X)$ обращалась в нуль, необходимо и достаточно, чтобы векторы V_i были линейно зависимы. А так как $\omega(X) \geqslant 0$, то первое утверждение п. 1 задачи получается отсюда логическим отрицанием.

Раскрывая форму ω, получаем

$$\omega(X) = \left(\sum_1^p x_i V_i\right) \cdot \left(\sum_1^p x_i V_i\right) = \sum_{i \leqslant p,\ j \leqslant p} x_i x_j (V_i \cdot V_j).$$

Матрица $A = (V_i \cdot V_j)$ есть матрица квадратичной формы ω; стало быть, коэффициенты формы равны собственным значениям матрицы A, которые будут положительны, поскольку форма ω положительна.

Для того чтобы ω была определенной, необходимо и достаточно, чтобы 0 не был собственным значением, тогда все собственные значения матрицы A будут строго положительны.

Характеристический многочлен $\det(A-\lambda I)$ матрицы A имеет свободный член $\det A$; это число равно произведению нулей многочлена, так как коэффициент при члене λ^p наивысшей степени равен $(-1)^p$.

Следовательно, для того чтобы ω была определенной, т. е. чтобы векторы V_i были независимы, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$. Тогда собственные значения строго положительны, равно как и их произведение, т. е.

$$\det A > 0.$$

Замечание. Можно было бы также взять ортонормированный базис в векторном подпространстве, порожденном векторами V_i; если координаты вектора V_i относительно этого базиса равны v_{ij}, то легко показать, что $\det A$ равен квадрату определителя из векторов V_i:

$$\det A = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pp} \end{vmatrix}^2;$$

отсюда сразу же получаем искомые результаты.

3.50. 1. Доказательство идентично доказательству неравенства Шварца; имеем

$$0 \leqslant g(x+\lambda y,\ x+\lambda y) = g(x,\ x) + 2\lambda g(x,\ y) + \lambda^2 g(x,\ y),$$

откуда

$$[g(x,\ y)]^2 - g(x,\ x)\,g(y,\ y) \leqslant 0.$$

2. Если g — определенная форма, то она невырождена. В самом деле, допустим, что линейная форма $y \to g(x, y)$ равна нулю:

$$g(x,\ y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow g(x,\ x) = 0 \qquad (\text{если } y = x) \Rightarrow x = 0.$$

Если g невырождена, то форма $x \to g(x, x)$ будет определенной. Действительно, пусть $g(x, x) = 0$. На основании неравенства из п. 1, при любом y

$$[g(x,\ y)]^2 \leqslant g(x,\ x)\,g(y,\ y) = 0 \Rightarrow g(x,\ y) = 0.$$

Но тогда, по условию, $x = 0$.

3. Существует эквивалентность между соотношениями $g(x, x) = 0$ и $g(x, y) = 0\,\forall y$; но элементы x, удовлетворяющие второму условию, образуют векторное подпространство N. В самом деле, пусть x и x' — два элемента из N и λ — действительное число; тогда

$$g(x - x',\ y) = g(x,\ y) - g(x',\ y) = 0, \quad \forall y,$$
$$g(\lambda x,\ y) = \lambda g(x,\ y) = 0, \quad \forall y,$$

и значит, $x - x'$ и λx являются элементами из N.

4. Проверяем выполнение аксиом группы.

а) Композиция отображений есть ассоциативная операция.

б) Нейтральный элемент (тождественное отображение) принадлежит G.

в) Произведение двух отображений из G есть отображение из G:

$$g[\alpha\beta x,\ \alpha\beta y] = g(\alpha(\beta x),\ \alpha(\beta y)] = g[\beta x,\ \beta y] = g(x,\ y).$$

2) Всякое отображение α обратимо, и α^{-1} является элементом из G. Для проверки этой аксиомы покажем, что ядро отображения α равно нулю. Если x — элемент ядра отображения α, то

$$\alpha x = 0 \Rightarrow g(\alpha x,\ \alpha y) = g(x,\ y) = 0\ \forall y \Rightarrow x = 0.$$

Следовательно, α^{-1} существует, и в силу того, что α — элемент из G,

$$g(\alpha^{-1}x,\ \alpha^{-1}y) = g[\alpha(\alpha^{-1}x),\ \alpha(\alpha^{-1}y)] = g(x,\ y),$$

а это означает, что $\alpha^{-1} \in G$.

3.51. *Первая часть.* 1. По правилам вычисления внутреннего произведения,

$$\|x - (x_0 + \lambda y)\|^2 = \|(x - x_0) + \lambda y\|^2 = \\ = \|x - x_0\|^2 + 2\lambda y\cdot(x - x_0) + \lambda^2\|y\|^2$$

Пусть x_0 — ближайший к x элемент из F. Если y — вектор из F, то это расстояние должно достигать своего минимума при $\lambda = 0$, и тогда член первой степени в трехчлене равен нулю, но

$$y\cdot(x - x_0) = 0 \Rightarrow y \text{ ортогонально } (x - x_0).$$

Предположим, что $x - x_0$ ортогонально любому вектору из F. Если x_1 — вектор из F, то $x_0 - x_1$ — тоже вектор из F, и

$$\|x - x_1\|^2 = \|(x - x_0) + (x_0 - x_1)\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2,$$

откуда $\|x - x_1\| > \|x - x_0\|$.

Последнее неравенство, кроме того, показывает, что если $\|x - x_0\|$ — минимальное расстояние между вектором x и векторами из F, а значит, вектор $x - x_0$ ортогонален любому вектору из F, то не существует другого вектора x_1, для которого расстояние $\|x - x_1\|$ было бы равно $\|x - x_0\|$.

2. Возьмем в F ортонормированный базис $e_1,\ \ldots,\ e_n$ и положим

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

Для того чтобы вектор $x - x_0$ был ортогонален всем векторам из F, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален векторам базиса F, именно, $e_1,\ \ldots,\ e_n$. Итак, получаем уравнения

$$(x - x_0)\cdot e_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или

$$x \cdot e_k = x_0 \cdot e_k = \xi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом,

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} (x \cdot e_k)\, e_k.$$

Вторая часть. 1. Отображение $(x, y) \to x \cdot y$ множества $E \times E$ в R, очевидно, билинейно и симметрично (свойства интеграла, коммутативность произведения функций); оно будет внутренним произведением, если к тому же окажется, что квадратичная форма $x \cdot x$ — положительно определенная.

Предположим, что

$$x \cdot x = \int_0^{2\pi} [x(t)]^2\, dt = 0.$$

Функция x^2 непрерывна и положительна; если ее интеграл равен нулю, то она равна нулю. (Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 3-й раздел, § 4). Итак, если $x \cdot x = 0$, то x есть нулевой элемент из E, а следовательно, $x \cdot x$ — определенная квадратичная форма.

E — евклидово пространство с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\int_0^{2\pi} [x(t)]^2\, dt}.$$

Это пространство имеет бесконечную размерность, поскольку элементы 1, $\cos kt$, $\sin ht$ независимы. Доказательство этому будет получено в п. 2; оно будет основано на том факте, что попарно ортогональные ненулевые элементы независимы.

2. Функции 1, $\cos kt$, $\sin ht$ $(k \in N,\ h \in N)$ ортогональны:

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos kt\, dt = \left[\frac{\sin kt}{k}\right]_0^{2\pi} = 0, \qquad \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin ht\, dt = \left[-\frac{\cos ht}{h}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos ht\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k+h)t + \cos(k-h)t}{2}\, dt = 0, \quad \text{если} \quad k \neq h,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin ht\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k-h)t - \cos(k+h)t}{2}\, dt = 0, \quad \text{если} \quad k \neq h,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin ht\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(h+k)t - \sin(h-k)t}{2}\, dt = 0.$$

Вычислим нормы этих функций:

$$\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2\pi},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kt\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2kt}{2}\,dt = \pi \Rightarrow \|\cos kt\| = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 ht\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2ht}{2}\,dt = \pi \Rightarrow \|\sin ht\| = \sqrt{\pi}.$$

3. Достаточно применить результат из п. 2 первой части, заметив, что ортонормированный базис пространства F состоит из $2n+1$ функций e_k вида

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2k}(t) = \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

$$e_{2h-1}(t) = \frac{\sin ht}{\sqrt{\pi}} \qquad (1 \leqslant h \leqslant n).$$

Положим

$$x_0(t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + \sum_{h=1}^{n} \eta_h \frac{\sin ht}{\sqrt{\pi}}.$$

Коэффициенты ξ_k и η_h определяются по формулам:

$$\xi_0 = x \cdot e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x(u)\,du,$$

$$\xi_k = x \cdot e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} x(u) \cos ku\,du,$$

$$\eta_h = x \cdot e_{2h-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} x(u) \sin hu\,du,$$

и значит,

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u)\,du + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kt}{\pi} \int_0^{2\pi} x(u) \cos ku\,du +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} \frac{\sin kt}{\pi} \int_0^{2\pi} x(u) \sin hu\,du.$$

Определенный таким образом тригонометрический полином x_0 из всех полиномов n-го порядка доставляет минимум расстоянию

$\|x - x_0\|$; это расстояние называется среднеквадратическим уклонением (полинома x_0 от функции x). Легко видеть, что

$$\|x\|^2 = \|x_0 + (x - x_0)\|^2 = \|x_0\|^2 + \|x - x_0\|^2,$$

$$\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \|x_0\|^2 = \int_0^{2\pi} x^2(t)\,dt - \xi_0^2 - \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \sum_{h=1}^{n} \eta_h^2.$$

3.52. 1. Вопрос о размерности пространства E выясняется тем же путем, что и в задаче 3.51 (вторая часть, п. 1), к которой мы и отсылаем.

Применим процесс ортогонализации Шмидта (Пизо и Заманский, Алгебра, гл. X, 2-й раздел, § 2), используя для определения последовательности элементов U_p последовательность векторных подпространств E_p многочленов степени $< p$.

E_1 имеет базис, состоящий из одного элемента 1, норма которого есть единица:

$$\frac{1}{\|1\|} = 1 = U_0.$$

Допустим, что пространство E_p $(p \geqslant 1)$ обладает ортонормированным базисом U_k $(0 \leqslant k \leqslant p - 1)$, где многочлен U_k имеет степень k. Тогда можно найти такие постоянные λ_i, чтобы многочлен

$$A = t^p + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k U_k$$

был ортогонален элементам U_k; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$A \cdot U_k = (t^p) \cdot U_k + \lambda_k = 0 \qquad (0 \leqslant k \leqslant p - 1).$$

Полученный таким путем многочлен A не равен нулю, поскольку t^p не принадлежит пространству E_p, порожденному элементами U_k $(0 \leqslant k \leqslant p - 1)$. Многочлен $A/\|A\|$ составляет вместе с U_k базис пространства E_{p+1}, ибо любой многочлен из E_{p+1} является линейной комбинацией функций t^p и U_k, а значит, функций $A/\|A\|$ и U_k с индексом $k < p$.

Можно положить $U_p = A/\|A\|$, и индукция проведена полностью.

Точно так же индукцией убеждаемся, что U_p — единственный многочлен с точностью до знака. Действительно, U_0, будучи единичным базисом в E_1, может равняться только ± 1. Допустим, что результат установлен для всех $k \leqslant p - 1$, и пусть B — многочлен из E_{p+1}, составляющий вместе с многочленами U_k, где $k \leqslant p - 1$ (или с им противоположными многочленами, что не меняет дела), ортонормированный базис в E_{p+1}. B как элемент пространства E_{p+1} может быть выражен при помощи базиса U_k:

$$B = \sum_0^p b_k U_k;$$

при этом

$$B \cdot U_k = 0 \Rightarrow b_k = 0, \qquad \text{если} \quad 0 \leqslant k \leqslant p-1,$$

$$\| B \| = \| U_p \| = 1 \Rightarrow | b_p | = 1 \qquad \text{или} \quad b_p = \pm 1,$$

что и следовало установить.

2. Построим векторы U_i с помощью процесса, используемого при доказательстве их существования. Уже известно, что $U_0 = 1$. Рассмотрим многочлен $A_1 = t + \lambda U_0 = t + \lambda$. Имеем

$$A_1 \cdot U_0 = t \cdot U_0 + \lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t\, dt + \lambda = \lambda = 0,$$

$$\| A_1 \|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{1}{3},$$

$$U_1 = \frac{A_1}{\| A_1 \|} = t\sqrt{3}.$$

Точно так же,

$$A_2 = t^2 + \lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1,$$

$$A_2 \cdot U_0 = t^2 \cdot U_0 + \lambda_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^2\, dt + \lambda_0 = \frac{1}{3} + \lambda_0 = 0,$$

$$A_2 \cdot U_1 = t^2 \cdot U_1 + \lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^3 \sqrt{3}\, dt + \lambda_1 = \lambda_1 = 0,$$

$$A_2 = t^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \| A_2 \|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{4}{45},$$

$$U_2 = \frac{A_2}{\| A_2 \|} = \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right).$$

3. Доказательство проведем индукцией по p. Для того чтобы U_p был ортогонален любому многочлену степени $< p$, необходимо и достаточно, чтобы U_p был ортогонален $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$, и тогда, как мы видели (конец п. 2), существует единственный с точностью до знака многочлен из E_{p+1}, удовлетворяющий этим условиям и имеющий норму, равную 1. Применяя p раз формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} x(t)\, y^{(p)}(t)\, dt =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k x^{(k)}(t)\, y^{(p-k-1)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^p \int_{-1}^{1} x^{(p)}(t)\, y(t)\, dt.$$

Если взять в качестве y многочлен $(x^2-1)^p$, то производные от y порядка меньше или равного $p-1$ обратятся в нуль в точках -1 и 1; все слагаемые в квадратных скобках имеют множителем одну из этих производных, и значит, равны нулю; поэтому

$$\int_{-1}^{1} x(t)\left[\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p\right]dt=(-1)^p\int_{-1}^{1} x^{(p)}(t)(t^2-1)^p\,dt. \qquad (R)$$

Если x — многочлен степени $<p$, то производная $x^{(p)}$ равна нулю, и

$$x\cdot\left[\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p\right]=0.$$

Если выбрать константу u_p, так, чтобы многочлен

$$u_p\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p$$

имел норму, равную 1, то этот многочлен будет удовлетворять характеристическим свойствам многочлена U_p; и следовательно, он равен $\pm U_p$. Итак,

$$U_p=u_p\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p, \qquad \text{если} \qquad |u_p|\left\|\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p\right\|=1.$$

Возьмем в соотношеиии (R) в качестве x многонлен $d^p(t^2-1)^p/dt^p$; для него

$$x^{(p)}=\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}(t^2-1)^p=2p!,$$

откуда

$$2\left\|\frac{d^p}{dt^p}(t^2-1)^p\right\|^2=(-1)^p\int_{-1}^{1}(2p!)(t^2-1)^p\,dt=(-1)^p(2p!)\,I_p.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_k=\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k\,dt=[t(t^2-1)^k]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2kt^2(t^2-1)^{k-1}\,dt=$$
$$=-2k(I_k+I_{k-1}),$$

что дает следующее соотношение между I_k и I_{k-1}:

$$(2k+1)I_k=-2kI_{k-1}.$$

Перемножая почленно эти соотношения для $1\leqslant k\leqslant p$, находим

$$I_p=(-1)^p\frac{2\cdot 4\ldots 2p}{1\cdot 3\ldots(2p+1)}I_0=2(-1)^p\frac{(2\cdot 4\ldots 2p)^2}{(2p+1)!}.$$

Таким образом,

$$\left\| \frac{d^p}{dt^p} (t^2-1)^p \right\| = \frac{2\cdot 4 \ldots 2p}{\sqrt{2p+1}} = \frac{2^p (p!)}{\sqrt{2p+1}} = \frac{1}{|u_p|},$$

отсюда, в частности, при $p = 1$ и $p = 2$, получаем U_1 и U_2.

4. Индукцией по k покажем, что при $k \leqslant p$ производная k-го порядка от $C(t) = (t^2-1)^p$ имеет по крайней мере k различных нулей в интервале $]-1, 1[$. Для $k = 0$ утверждение справедливо. Допустим, что оно доказано для $(k-1)$-й производной $C^{(k-1)}$. По предположению, эта производная имеет в интервале $]-1, 1[$ по крайней мере $k-1$ нулей; -1 и 1 тоже являются нулями производной $C^{(k-1)}$. Эти $k+1$ нулей создают k интервалов, внутри каждого из которых лежит хотя бы один нуль производной от $C^{(k-1)}$, т. е. $C^{(k)}$, и эти нули различны; $C^{(k)}$ имеет в $]-1, 1[$ по крайней мере k различных нулей.

Задавая k значение p, видим, что U_p имеет в $]-1, 1[$ по крайней мере p различных нулей, а так как U_p имеет степень p, то все нули многочлена U_p действительны и заключены между -1 и 1.

3.53. 1. Если $\omega(x) = \varphi(x, x)$, то

$$\omega(x+y) = \varphi(x+y,\ x+y) = \\ = \varphi(x,\ x) + \varphi(x,\ y) + \varphi(y,\ x) + \varphi(y,\ y),$$

$$\omega(x-y) = \varphi(x-y,\ x-y) = \\ = \varphi(x,\ x) - \varphi(x,\ y) - \varphi(y,\ x) + \varphi(y,\ y),$$

$$\omega(x+y) - \omega(x-y) = 2[\varphi(x,\ y) + \varphi(y,\ x)] = 4\varphi(x,\ y).$$

Итак, для определения билинейной симметрической формы φ достаточно задать форму ω.

2. Положительно определенная квадратичная форма ω позволяет определить в R^n структуру евклидова пространства E, внутренним произведением двух векторов x и y которого служит $\varphi(x, y)$. Необходимо заметить, что это не та структура, которая обычно рассматривается; в частности, здесь канонический базис пространства R^n уже не обязан быть ортонормированным (в смысле φ).

Если выбрать в E ортонормированный базис u_i и обозначить через ξ_i и η_i координаты векторов x и y относительно базиса u_i, то

$$\varphi(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

$$\psi(x,\ y) = \sum_{i,\ j} a_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где матрица (a_{ij}) снова симметрична.

Теперь может быть применена теория приведения квадратичных форм. Согласно этой теории найдется новый базис v_i, ортонормированный в смысле внутреннего произведения φ и такой, что ψ приводится к сумме квадратов. Обозначим через ζ_i и χ_i координаты векторов x и y относительно базиса v_i; формы φ и ψ принимают вид

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \chi_i,$$

$$\Omega(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i^2 \Leftrightarrow \psi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i \chi_i.$$

3. Из полученных выражений следует, что

$$\psi(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda) \zeta_i \chi_i.$$

Стало быть, для того чтобы форма $\psi - \lambda\varphi$ была вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы λ было равно одному из чисел λ_i; при этом

$$\psi(x, v_i) - \lambda_i \varphi(x, v_i) = 0, \quad \forall x;$$

если все числа λ_i различны, то это свойство характеризует v_i.

Если A и B — матрицы форм φ и ψ относительно некоторого базиса пространства R^n, скажем, канонического, и если X и Y — матрицы с единственным столбцом координат векторов x и y относительно этого базиса, то можно написать

$$\psi(x, y) - \lambda\varphi(x, y) = {}^t X (B - \lambda A) Y.$$

Для того чтобы форма $\psi - \lambda\varphi$ была вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы ядро отображения $\tilde{B} - \lambda\tilde{A}$, соответствующего матрице $B - \lambda A$, имело размерность по крайней мере 1, и значит,

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Числа λ_i являются корнями этого уравнения; если все они различны, то ядро отображения $\tilde{B} - \lambda\tilde{A}$ есть пространство размерности 1, и вектор v_i есть один из векторов этого пространства; тем самым он полностью определен (с точностью до коэффициента пропорциональности).

4. Результаты п. 2 получены без каких-либо предположений об ω; значит, эти рассуждения будут справедливы и в том случае, когда квадратичная форма ω не будет определенной. Допустим, что относительно базиса v_i

$$\varphi(x, y) = \sum \mu_i \zeta_i \chi_i, \qquad \psi(x, y) = \sum \rho_i \zeta_i \chi_i.$$

Форма $\psi - \lambda\varphi$ будет вырождена при значениях $\lambda_i = \rho_i/\mu_i$, и эти значения обращают в нуль $\det(B - \lambda A)$.

Если $\omega(x)=x_2^1-x_2^2$ и $\Omega(x)=2x_1x_2$, то

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\det(B-\lambda A)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}=-(1+\lambda^2).$$

Значение λ не существует, и задача не имеет решения.

3.54. Условие необходимо, ибо если векторы $\tilde{A}(u_i)$ попарно ортогональны и если

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i u_i,$$

то

$$\|\tilde{A}(x)\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\tilde{A}(u_i)\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\|\tilde{A}(u_i)\|^2.$$

Обратно, предположим, что

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i u_i\Rightarrow\|\tilde{A}(x)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2.$$

Внутреннее произведение $\tilde{A}(x)\cdot\tilde{A}(y)$ определяет симметрическую билинейную форму, которая порождает квадратичную форму $\|\tilde{A}(x)\|^2$; следовательно, это билинейная симметрическая форма, соответствующая $\|\tilde{A}(x)\|^2$, так как известно, что эта форма единственна.

Таким образом, если $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i u_i$ и $y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i u_i$, то

$$\tilde{A}(x)\cdot\tilde{A}(y)=\sum_{1}^{n}\lambda_i\xi_i\eta_i.$$

В частности,

$$\tilde{A}(u_i)\cdot\tilde{A}(u_j)=0,\quad \text{если}\quad i\neq j.$$

Искомые векторы u_i составляют ортонормированный базис пространства, относительно которого квадратичная форма $x\to\|\tilde{A}(x)\|^2$ приводится к сумме квадратов. Но мы знаем, что всегда найдется хотя бы один такой базис и что векторы этого базиса являются собственными векторами симметрической матрицы квадратичной формы.

Если X — матрица со столбцом координат вектора x относительно заданного базиса, то квадратичная форма $x\to\|\tilde{A}(x)\|^2$ может быть определена как

$$\|\tilde{A}(x)\|^2=\tilde{A}(x)\cdot\tilde{A}(x)={}^t(AX)\,AX={}^tX\,{}^tAAX.$$

Матрица ${}^tAA$ является симметрической:

$${}^t({}^tAA)={}^tA\,{}^t({}^tA)={}^tAA.$$

Таким образом, векторы u_i суть собственные векторы симметрической матрицы ${}^tAA$.

3.55. 1. Свойство очевидно; достаточно заметить, что

$$y \in E \quad \text{и} \quad y' \in E \Rightarrow \varphi(x, y - y') = \varphi(x, y) - \varphi(x, y') = 0,$$

$$y \in E \quad \text{и} \quad \lambda \in C \Rightarrow \varphi(x, \lambda y) = \lambda\varphi(x, y) = 0.$$

2. Известно, что

$$2\varphi(x, y) = \omega(x + y) - \omega(x) - \omega(y);$$

отсюда

$$2\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \{[l_i(x + y)]^2 - l_i^2(x) - l_i^2(y)\} = \sum_{i=1}^{p} \{[l_i(x) + l_i(y)]^2 - l_i^2(x) - l_i^2(y)\},$$

и стало быть,

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} l_i(x)\, l_i(y).$$

Формы l_i, по условию, независимы; для того чтобы $\varphi(x, y) = 0$ при любом x, необходимо и достаточно, чтобы

$$l_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Векторы y, являющиеся решением этой системы, образуют векторное пространство размерности $n - p$; по определению, это есть пространство E. Итак,

$$n - p = \dim E, \quad \text{или} \quad p = n - \dim E.$$

Число p форм l_i определяется свойствами формы φ; следовательно, оно одно и то же для всех представлений формы φ.

3. Следуя условию задачи, проведем индукцию по n.

Для C^1 результат очевиден:

$$\omega(z) = az^2 = (\alpha z)^2,$$

если α — одно из двух чисел, удовлетворяющих условию $\alpha^2 = a$.

Допустим, что он доказан для C^{n-1}.

Выразим квадратичную форму ω при помощи координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора x и сначала предположим, что ω содержит член с x_n^2. Имеем

$$\omega(x) = a_{n,n}x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n}x_ix_n + \sum_{\substack{i<n\\ j<n}} a_{i,j}x_ix_j = a_{n,n}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i,n}}{a_{n,n}} x_i\right)^2 + \sum_{\substack{i<n\\ j<n}}{}' a_{i,j}x_ix_j.$$

В квадратичной форме

$$\sum_{\substack{i<n\\ j<n}}{}' a_{i,j}x_ix_j$$

уже содержатся лишь координаты с индексом, меньшим или равным $n-1$; стало быть, ее можно рассматривать как форму Ω на C_{n-1} и применить к ней результат, установленный для C_{n-1}; существуют такие p независимых линейных форм l_i, что

$$\Omega = \sum_{i=1}^{p} l_i^2(x).$$

Если α — один из квадратных корней из числа $a_{n,n}$, то первый член в разложении $\omega(x)$ будет квадратом формы l вида

$$l(x) = \alpha\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{i,n}}{a_{n,n}}x_i\right);$$

форма l независима от форм l_i, участвующих в разложении Ω, ибо только l содержит переменное x_n.

Если ω не содержит члена с x_n^2, но содержит член с x_m^2 $(m \neq n)$, то предыдущее рассуждение применимо с заменой x_n на x_m.

Наконец, если ω не содержит квадратов, то она содержит хотя бы один отличный от нуля член $a_{ij}x_ix_j$, и замена переменных

$$x_i' = \frac{x_i+x_j}{2}, \qquad x_j' = \frac{x_i-x_j}{2}$$

преобразует этот член в $a_{ij}\left(x_i'^2 - x_j'^2\right)$; остальные члены из ω не содержат $x_i'^2$. Следовательно, после замены переменного в ω имеется квадратичный член, и все сводится к предыдущему.

3.56. Предположим, что

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{h} f_i^2(x) - \sum_{i=h+1}^{p} f_i^2(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i^2(x) - \sum_{i=k+1}^{p} g_i^2(x); \qquad (1)$$

p есть общее число форм f_i или g_i (одно и то же для двух разбиений, что следует из б), h и k — числа коэффициентов ε, равных 1 в обоих разбиениях; предположим $h \leqslant k$ (в случае необходимости следует изменить порядок разложений).

Из уравнения (1) следует

$$\sum_{i=1}^{h} f_i^2(x) + \sum_{i=k+1}^{p} g_i^2(x) = \sum_{i=h+1}^{p} f_i^2(x) + \sum_{i=1}^{k} g_i^2(x). \qquad (2)$$

Левая часть (2) содержит $p-k+h = p-(k-h)$ линейных форм; стало быть, общие нули этих форм составляют векторное пространство размерности, большей или равной

$n-[p-(k-h)]=n-p+(k-h)$ (равенство достигается или нет в зависимости от того, будут ли формы независимыми).

Векторы из E обращают в нуль левую часть (2), а значит, и правую часть, и следовательно, все формы правой части, поскольку правая часть представляет собой сумму квадратов. Таким образом, векторы из E обращают в нуль все формы f_i, а так как эти формы независимы, то размерность пространства E не превышает $n-p$.

Окончательно,

$$n-p+(k-h)\leqslant \dim E\leqslant n-p,$$

и следовательно, $k-h\leqslant 0$, что при сделанном предположении влечет $h=k$.

В разложении квадратичной формы ω на R^n на сумму квадратов независимых форм число положительных квадратов и число отрицательных квадратов являются инвариантами.

РАЗДЕЛ 4

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО; НЕПРЕРЫВНОСТЬ; ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Задачи данного раздела опираются на главы I—III книги III, а также на главу I и первый раздел главы IV книги IV Курса математики Ш. Пизо и М. Заманского.

Для изучения функций помимо общей теории требуется еще и некоторый запас сведений технического характера; поэтому помещенные здесь задачи предполагают знание определений и правил вычисления символов o и O, а также асимптотического разложения функций. Для большего разнообразия задач тригонометрические функции и их обратные используются задолго до определения, следующего только после определения комплексной показательной функции; свойства этих функций всем хорошо известны и, кроме того, будут в дальнейшем изложены.

Этот раздел разбит на две главы. Первая существенным образом опирается на понятия верхней и нижней грани, предела и свойств непрерывных функций и содержит простые примеры равномерно сходящихся функциональных последовательностей. Во второй главе изучаются свойства производных и применение этих свойств к исследованию функций (поведение, отыскание асимптотических разложений и пределов, и т. д.).

Прежде всего следует подчеркнуть, что при решении задач необходима аккуратность и строгость, т. е. рассуждения должны быть полными, должно быть тщательно проверено выполнение условий применяемых теорем и каждый этап решения должен быть обоснован. Только при выполнении этих требований можно понять определения и усвоить теоремы в их точной формулировке, что в значительной мере облегчит дальнейшее изучение анализа. Наконец, напомним некоторые результаты из курса, относящиеся к этому разделу.

Критерий Коши: для сходимости последовательности x_n необходимо и достаточно, чтобы двойная последовательность $x_p - x_q$ имела предел 0. Мажорированная (ограниченная сверху) возрастающая последовательность сходится, и ее предел равен верхней грани множества членов последовательности.

Возможны три эквивалентных определения *предела функции* (Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 1-й раздел, § 3), и в зависимости от задачи нужно использовать то или другое из них. В частности, во многих случаях оказывается удобным определение при помощи сходящихся счетных последовательностей: для того чтобы в точке x_0 функция f имела предел l, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0

($x_n \neq x_0$), последовательность $f(x_n)$ сходилась к l. То же самое можно заметить и по поводу определения непрерывности функции при некотором значении x_0, поскольку тогда функция f должна иметь в x_0 предел $f(x_0)$.

Напомним свойства *непрерывных функций* на замкнутом интервале $[a, b]$. Образ ограниченного замкнутого множества ограничен и замкнут; следовательно, он содержит его грани или, иными словами, непрерывная функция достигает своей верхней и нижней грани (теорема максимума). Образ интервала есть интервал; в частности, если y_1 и y_2 — два значения функции, то любое значение, заключенное между y_1 и y_2, также является значением функции (теорема о промежуточных значениях).

Монотонные функции при любом значении x имеют предел справа и предел слева; если f возрастает, то

$$f(x+0) = \inf_{t>x} f(t), \qquad f(x-0) = \sup_{t<x} f(t).$$

Понятие равномерной сходимости на интервале I часто используется как в курсе, так и в задачах; поэтому оно заслуживает серьезного изучения. Определить его можно двумя эквивалентными способами:

$\forall \varepsilon$ $\exists N$, независящее от $x \in I$, такое, что $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

$\forall \varepsilon$ $\exists N$, такое, что

$$n > N \Rightarrow \|f_n - f\| = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Второе определение, вообще говоря, удобнее, ибо $\|f_n - f\|$ есть число, и стало быть, его изучение является изучением числовой последовательности; в первом же определении, напротив, каждому значению x соответствует бесконечно много возможных чисел N, и надо показать, что среди всех этих чисел найдутся такие, которые годятся для всех $x \in I$. Часто будет использоваться также *критерий Коши*: последовательность f_n равномерно сходится в том и только том случае, если двойная последовательность $\|f_p - f_q\|$ сходится к 0. Необходимо заметить, что норма $\|f\|$ зависит от рассматриваемого интервала I.

Дифференциальное обозначение (*дифференциалом* дифференцируемой функции f называется величина $df = f'(x)dx$) делает вычисление дифференциала сложных функций особенно простым:

$$d(g \circ f) = g'[f(x)] f'(x)\, dx = g'[f(x)]\, df.$$

Таким образом, дифференциал записывается одинаково, будет ли f переменным или функцией. Так,

$$d\left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{d(\operatorname{tg} x/2)}{\operatorname{tg} x/2} = \frac{1}{\operatorname{tg} x/2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x/2}\, d\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} x/2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x/2} \frac{dx}{2} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Имеются две *формулы Тейлора*, формально похожие, но по существу совершенно различные, ибо области их применения не имеют ничего общего, а именно:

формула, обобщающая теорему о конечных приращениях, справедливая в том случае, когда функция n раз дифференцируема на $[a, x]$,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

(см. задачи 4.42 и 4.47), и

формула, имеющая целью нахождение пределов или вычисление асимптотических разложений,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o[(x-a)^n],$$

с единственным уточнением, что остаток есть $o[(x-a)^n]$, т. е. частное от деления этого остатка на $(x-a)^n$ стремится к 0, когда x стремится к a (задачи 4.40, 4.44, 4.45, 4.46 и 4.49).

Часто бывает удобно выражать все *логарифмические функции* при помощи натурального (неперова) логарифма, а *показательные функции* — при помощи показательной функции с основанием e:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad a^x = e^{x \ln a}.$$

Для отыскания пределов необходимо знать, что при $\alpha > 0$ $\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$, а $\frac{e^x}{x^\alpha} \to +\infty$, когда $x \to +\infty$; $x^\alpha \ln x \to 0$, когда $x \to 0$.

Символы Ландау o и O: говорят, что при x, стремящемся к x_0 справа,

а) функция h есть $o(f)$, или $h = o(f)$, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $x_1 > x_0$, что

$$x_0 < x < x_1 \Rightarrow |h(x)| \leqslant \varepsilon |f(x)|;$$

б) функция h есть $O(f)$, или $h = O(f)$, если существует такое число $x_1 > x_0$ и такая постоянная M, что

$$x_0 < x < x_1 \Rightarrow |h(x)| \leqslant M |f(x)|.$$

Аналогичные определения могут быть сформулированы для x, стремящегося к x_0 слева, просто стремящегося к x_0 или стремящегося к $\pm\infty$.

Наиболее употребительными являются следующие свойства:

$$h = o(f) \Rightarrow h = O(f),$$

$$o(f) + o(f) = o(f), \qquad O(f) + O(f) = O(f),$$

$$o(f)\,O(g) = o(fg), \qquad O(f)\,O(g) = O(fg),$$

$$o(f)\,o(g) = o(fg),$$

$$o[O(f)] = O[o(f)] = o(f), \qquad O[O(f) = O(f).$$

Форма записи свойств — символическая, и мы поясним два из них.

Соотношение $o(f) + o(f) = o(f)$ означает: когда x стремится к x_0 справа (к примеру), то

$$h_1 = o(f) \quad \text{и} \quad h_2 = o(f) \Rightarrow h_1 + h_2 = o(f).$$

Соотношение $O[o(f)] = o(f)$ означает: когда x стремится к $+\infty$ (к примеру), то

$$h = O(g) \quad \text{и} \quad g = o(f) \Rightarrow h = o(f).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Ограниченные множества. Последовательности, пределы, непрерывные функции. Равномерная сходимость

4.01. 1. Даны два действительных числа a и b. Допустим, что для любого числа $x > b$ выполняется неравенство $a \leqslant x$. Показать, что $a \leqslant b$.

2. Если последовательность u_n имеет предел l и если для любого $x > b$, начиная с некоторого n, имеет место неравенство $u_n \leqslant x$, то предел l меньше или равен b.

4.02. Пусть A и B — иепустые множества действительных чисел, причем A мажорировано, а B содержится в A.

Показать, что B также мажорироваио, и $\sup B \leqslant \sup A$.

4.03. Пусть A и B — непустые ограниченные множества действительных чисел.

Показать, что $A \cup B$ ограничено и

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B),$$
$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

Приложения. 1) Последовательность x_n действительных чисел, имеющая предел l, ограничена.

2) Непрерывное отображение f интервала $[0, +\infty[$ в R, имеющее в $+\infty$ предел l, ограничено.

4.04. Пусть A и B — непустые ограниченные множества действительных чисел.

Показать, что $A \cap B$ ограничено и

$$\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \quad \sup B)$$

Привести пример, когда неравенства будут строгими (можно в качестве A и B взять конечные множества).

4.05. 1. Пусть A и B — непустые мажорированные множества действительных чисел и пусть множество C определено следующим образом:

$$z \in C \Leftrightarrow \exists x \in A \quad \text{и} \quad \exists y \in B\colon\ z = x + y.$$

Показать, что C мажорировано и что

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

2. Можно ли получить аналогичный результат для множества $D = AB$ — всевозможных произведений элементов множества A на элементы множества B?

3. Если f и g — мажорированные отображения множества X в R, то отображение $f + g$ мажорировано, и

$$\sup(f + g) \leqslant \sup f + \sup g.$$

Привести пример, чтобы неравенство было строгим.

4.06. Рассмотрим функцию f, определенную на R следующим образом:

$$f(0) = 0,$$
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{если} \quad x \text{ рационально и } \neq 0,$$
$$f(x) = x, \quad \text{если} \quad x \text{ иррационально.}$$

1. Показать, что функция f есть биекция R на себя.

2. Показать, что функция f непрерывна только для двух значений аргумента.

4.07. Рассмотрим отображение f замкнутого интервала $[a, b]$ в R, непрерывное в каждой точке интервала, и число y, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.

1. Определим два множества A и B условиями

$$x \in A \Leftrightarrow a < x < b \quad \text{и} \quad f(x) < y,$$
$$x \in B \Leftrightarrow a < x < b \quad \text{и} \quad f(x) > y.$$

Показать, что A и B — открытые множества (множество E открыто, если любой элемент из E служит центром некоторого открытого интервала, содержащегося в E).

2. Показать, что множество $f^{-1}(y)$, т. е. множество чисел $x \in [a, b]$, являющихся решениями уравнения $f(x) = y$, непусто и имеет наибольший и наименьший элемент.

4.08. 1. Упростить выражение

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

и показать, что последовательность u_n сходится.

Используя критерий Коши, показать, что последовательность

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \sin k\alpha$$

сходится (α — заданный параметр).

2. Рассмотрим функцию f, определенную на интервале $]0, 1]$ следующими условиями:

а) $f(1) = 1$,

б) f непрерывна в каждой точке из $]0, 1]$,

в) сужение f на интервал $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ (k — произвольное целое число) есть линейная функция вида

$$f(x) = x \sin k\alpha + c_k$$

(где c_k означает постоянную).

1) Построить график сужения f на интервал $[1/5, 1]$, если $\alpha = \pi/4$.

2) Показать, что последовательность $f(1/n)$ сходится.

3) Показать, что функция f имеет в точке 0 предел.

3. Пусть функция g определена на $]0, 1]$ и пусть существует такая постоянная M, что для любой пары x, x' чисел из $]0, 1]$

$$g(x') - g(x) \leqslant M \, | x' - x |.$$

1) Показать, что функция f из п. 2 удовлетворяет этому условию.

2) Будут ли верны результаты вопросов 2) и 3) из п. 2 для функции g?

4.09. 1. Рассмотрим возрастающую последовательность u_n и убывающую последовательность v_n и предположим, что $u_n \leqslant v_n$, каково бы ни было n.

Показать, что последовательность u_n и v_n сходятся и что $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

Если при этом последовательности $v_n - u_n$ имеют пределом 0, то обе последовательности u_n и v_n имеют один и тот же предел.

2. Применить предыдущие результаты к последовательностям u_n и v_n, определенным заданием членов u_0 и v_0 $(0 < u_0 < < v_0)$ и формулами

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

4.10. *Изучение рекуррентных последовательностей.* Пусть функция f определена и непрерывна на интервале $[a, b]$. Определим последовательность, задавая член u_0 и рекуррентное соотношение

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

Последовательность будет определена только в предположении, что все числа u_n принадлежат интервалу $[a, b]$. Решение каждой конкретной задачи необходимо начать с проверки именно этого условия, что осуществляется, как правило, по индукции.

1. Если функция f возрастает, то последовательность u_n монотонна и имеет предел u, который служит корнем уравнения $u = f(u)$.

2. Если функция f убывает, то подпоследовательности u_{2n} членов с четными индексами и u_{2n+1} — с нечетными — будут сходящимися монотонными последовательностями.

3. Применить предыдущие результаты к изучению конкретных последовательностей u_n, v_n и w_n вида

$$u_0 = 0, \qquad u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2},$$

$$v_0 = 0, \qquad v_n = \cos v_{n-1},$$

$$w_0 = \frac{1}{2}, \qquad w_n = (1 - w_{n-1})^2.$$

4.11. Эта задача тоже содержит исследование рекуррентной последовательности, но в предположениях, отличных от предположений задачи 4.10, и имеет скорее теоретический, чем практический интерес.

Обозначим через f такое отображение замкнутого интервала $[a, b]$ в себя, что, каковы бы ни были u и v из $[a, b]$, $|f(u) - f(v)| < |u - v|$.

1. Показать, что f — непрерывное отображение и что уравнение

$$f(t) = t$$

имеет, и притом единственное, решение θ (исследовать поведение функции $t \to f(t) - t$).

2. Определим рекуррентную последовательность x_n заданием члена x_0 и соотношением

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

а) Показать, что последовательность $|x_n - \theta|$ убывает и имеет предел l.

б) Показать, что из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\theta + \varepsilon l$, где ε, в зависимости от случая, равно $+1$ или -1.

в) Доказать равенство

$$|f(\theta + \varepsilon l) - \theta| = l$$

и вывести отсюда, что $l = 0$, и значит, последовательность x_n имеет предел θ.

4.12. Пример не элементарной функции, удовлетворяющей условиям задачи 4.11. Напомним, что последовательность

$$u_n = \sum_1^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_1^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

имеет пределом 1.

1. Применяя критерий Коши, показать, что последовательность функций S_n вида

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k^2(k+1)}$$

имеет предел S.

2. Показать, что если $u \neq v$, то

$$|S(v) - S(u)| < |v - u|.$$

Вывести отсюда, что функция $t \to S(t)$ на $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условиям задачи 4.11.

4.13. 1. Если последовательность x_n с действительными членами имеет предел l, то последовательность

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

тоже имеет предел l.

2. Если последовательность $x_{n+1} - x_n$ имеет предел l, то последовательность x_n/n тоже имеет предел l.

3. В этом пункте предполагаются известными свойства логарифмических и показательных функций.

Если последовательность x_n с положительными членами имеет предел $l > 0$, то последовательность $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ тоже имеет предел l.

Если x_n — последовательность с положительными членами, а последовательность x_{n+1}/x_n имеет предел l, то последовательность $\sqrt[n]{x_n}$ тоже имеет предел l.

4. Исследовать на сходимость и найти предел (если таковой существует) последовательностей

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{pn},$$

$$v_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 - 1}.$$

4.14. Определим функцию f, отображающую интервал $[0, 1]$ в R следующим образом:

$f(x) = 0$, если x иррационально,

$f(x) = 1/q$, если x рационально, отлично

от нуля и равно несократимой дроби p/q;

$$f(0) = 1.$$

Показать, что функция f разрывна в x_0, если x_0 рационально, и непрерывна, если значение x_0 иррационально (можно показать, что найдется лишь конечное число значений x, для которых $f(x) \geqslant \varepsilon > 0$).

Показать, что если x_0 рационально, то функция $f(x)$ имеет в x_0 предел справа и предел слева.

4.15. Показать непосредственным вычислением, не используя общие теоремы, что функция f, определенная на интервале $[0, 1]$ как $f(x) = \sqrt{x}$, равномерно непрерывна.

4.16. Если функция f, определенная и возрастающая на интервале $[a, b]$, принимает хотя бы один раз все значения, заключенные между $f(a)$ и $f(b)$, то она непрерывна для всех значений из $[a, b]$.

Построить пример, показывающий, что предыдущий результат неверен для функций, не являющихся монотонными.

4.17. 1. Поставим в соответствие каждому числу θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ число $x = 2\cos\theta$. Показать индукцией по n, что относя x число $y = 2\cos n\theta$, мы определяем на $[-2, 2]$ функцию A_n, являющуюся многочленом (таким образом, $y = A_n(x)$); показать, что в A_n член наивысшей степени равен x^n.

2. Показать, что нули многочленов $A_n - 2$ и $A_n + 2$ действительны и принадлежат интервалу $[-2, 2]$.

3. Показать, что если f есть функция, определенная и непрерывная на интервале $[-2, 2]$, и если $|f(x)| < 2$ для любого $x \in [-2, 2]$, то функция $f - A_n$ обращается в нуль по крайней мере n раз на этом интервале.

4. Показать, что если F — многочлен, старший член которого имеет коэффициент 1, то в интервале $[-2, 2]$ найдется хотя бы одно такое число c, что $|F(c)| \geqslant 2$.

5. Показать, что если G — многочлен со старшим членом x^n, то на любом интервале $[a, b]$ функция $|G|$ принимает по крайней мере одно значение, большее или равное $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$. Вывести отсюда, что на любом интервале $[a, b]$ колебание функции G по меньшей мере равно $4\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$.

Колебание функции G есть число $\omega = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} G(x) - \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} G(x)$.

4.18. Задачи на символы o и O и эквивалентность решаются без привлечения теории производных. (Об эквивалентности и символах o и O см. Пизо и Заманский, книга IV, гл. I, § 1.)

1. Предположим, что u — действительная функция числового переменного x, определенная в некоторой окрестности точки 0, и что $u(x)$ стремится к нулю, когда x стремится к нулю.

Применяя формулу бинома, показать, что

$$(1+u)^n = 1 + nu + O(u^2).$$

Вывести из этого, что

$$\sqrt[n]{1+u} = 1 + \frac{u}{n} + O(u^2).$$

2. Найти при x, стремящемся к нулю, простые эквивалентные функции для функций f и g, определенных формулами

$$f(x) = \sqrt[2]{1+2x+3x^2} - \sqrt[3]{1+x+x^2},$$
$$g(x) = \sqrt[4]{1+x+x^2} - \sqrt[4]{1+x}.$$

4.19. 1. Показать, что при x, стремящемся к нулю,

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + o(1)$$

(предполагается, что известно неравенство $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$).

2. Найти условие, при котором функция f, определенная равенством

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{ctg} kx,$$

имеет конечный предел, когда x стремится к нулю, и вычислить этот предел (a_k — заданные действительные числа).

4.20. 1. Доказать индукцией по n, что при $x > 1$

$$x^n \geqslant 1 + n(x-1).$$

Найти предел последовательности x^n, если x — заданное положительное число.

2. Показать, что последовательность функций f_n:

$$f_n(x) = x^n, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

равномерно сходится на любом интервале $[0, h]$ $(0 < h < 1)$.

3. Показать, что не существует такого числа N, что для любого $x \in [0, 1[$

$$n > N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon.$$

Будет ли последовательность функций f_n равномерно сходиться на интервале $[0, 1]$? Можно ли установить этот результат без вычислений?

4. Показать, что последовательность функций g_n:

$$g_n(x) = x^n(1 - x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

равномерно сходится на интервале $[0, 1]$ к нулевой функции.

4.21. Определим на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$ последовательность функций u_n следующим образом:

$$u_0(x) = x, \qquad u_n(x) = \sin[u_{n-1}(x)].$$

Показать, что последовательность функций u_n равномерно сходится на $[-\pi/2, \pi/2]$ к нулю.

4.22. Определим последовательность функций f_n на R со значениями в R равенством

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}.$$

1. Показать, что функция f_n непрерывна и нечетна. Исследовать ее поведение (можно воспользоваться представлением f_n в виде суперпозиции более простых функций).

2. Показать, что найдутся такие постоянные a и b, что $f_n(x) - (ax + b)$ стремится к нулю, когда x стремится к $\pm\infty$, и построить график функции f_n.

3. Показать, что для любого x последовательность $f_n(x)$ имеет предел $f(x)$, и доказать, что сходимость последовательности функций f_n к f равномерна на любом интервале $[a, b]$, концы a, b которого имеют (строго) одинаковые знаки.

Будет ли сходимость равномерной на интервале $[-a, a]$?

4.23. 1. Обозначим через f действительную функцию, определенную и непрерывную на интервале $[a, b]$, а через u и v — два числа из интервала $[a, b]$.

Найти формулу многочлена l первой степени, принимающего в точках u и v значения $f(u)$ и $f(v)$. Показать, что каждому значению $x \in [u, v]$ соответствует по крайней мере одно такое значение $\xi \in [u, v]$, что

$$l(x) = f(\xi).$$

Наконец, показать, что если ω — колебание функции f на интервале $[u, v]$, то

$$\sup_{u \leqslant x \leqslant v} |l(x) - f(x)| \leqslant \omega.$$

2. Обозначим через Λ множество непрерывных функций λ, обладающих следующим свойством:

каждой функции λ соответствует такое конечное разбиение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

интервала $[a, b]$, что сужение функции λ на каждый из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ этого разбиения есть многочлен первой степени или постоянная.

Доказать, что Λ есть векторное пространство над R. Охарактеризовать график функции λ.

3. Показать, что всякая непрерывная функция на $[a, b]$ есть равномерный предел последовательности функций из Λ.

4.24. Отнесем каждому действительному числу x целую часть $E(x)$,

$$E(x) \leqslant x < 1 + E(x),$$

и положим

$$x - E(x) = D(x).$$

1. Показать, что функция D — периодическая, указать значения, при которых она непрерывна, и доказать, что на любом конечном интервале функция D — ярусная.

2. Рассмотрим последовательность функций u_n вида

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{D(kx)}{2^k}.$$

Показать, что эта последовательность равномерно сходится на множестве R действительных чисел (можно применить критерий Коши); предельная функция будет обозначаться через u.

3. Показать, что функция u непрерывна в любой иррациональной точке.

4. Показать, что функция u имеет левый предел $u(x_0 - 0)$ и правый предел $u(x_0 + 0)$ для любого рационального значения x_0 и что

$$u(x_0 - 0) = \lim u_n(x_0 - 0), \qquad u(x_0 + 0) = \lim u_n(x_0 + 0).$$

Наконец, доказать, что функция u непрерывна справа и разрывна слева в каждой рациональной точке.

4.25. Рассмотрим действительную функцию f, определенную и непрерывную на множестве R действительных чисел и такую, что

$$|f(x)| < |x| \quad \text{для всех} \quad x \neq 0.$$

1. Показать, что $f(0) = 0$.

2. Зададим числа ε и M, $0 < \varepsilon < M$. Показать, что существует такое число $k < 1$, что

$$|f(x)| \leqslant k|x| \quad \text{для} \quad \varepsilon \leqslant |x| \leqslant M.$$

Построить пример, показывающий, что на всем интервале $[-M, M]$ такое свойство не выполняется.

3. Рассмотрим последовательность функций f_n:

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = f[f_0(x)], \ \ldots, \ f_{n+1}(x) = f[f_n(x)].$$

Пусть числа ε и M удовлетворяют неравенствам $0 < \varepsilon < M$, а k — число, определенное в п. 2. Показать, что

$$|x| \leqslant M \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant \max\left(\varepsilon, k^{n+1}M\right).$$

(Рассуждать по индукции относительно n, различая два случая: $|f_n(x)| < \varepsilon$ и $|f_n(x)| \geqslant \varepsilon$.)

Отсюда заключить, что последовательность функций f_n равномерно сходится к нулю на интервале $|x| \leqslant M$.

4.26. Рассмотрим функцию f, определенную на $[0, 1/\pi]$ следующим образом:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad \text{если} \quad x \neq 0;$$

$$f(0) = y_0 \ (y_0 \text{ — заданное действительное число}).$$

1. Исследовать функцию f на непрерывность.

2. Показать, что не существует такой ступенчатой функции φ, что

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in [0, 1/\pi].$$

Вывести отсюда, что f не является ярусной функцией на $[0, 1/\pi]$. Можно ли получить этот результат независимо?

II. Показательная функция и ее производные. Логарифм и другие простейшие элементарные функции

4.27. Предположим, что функция f определена и непрерывна на интервале $[a, b]$ $(a < b)$, дифференцируема на интервале $]a, b]$ и производная f' имеет предел l, когда x стремится к a справа. Показать, что f имеет в a правую производную, равную l. Пример: $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sqrt{x}\sin x$.

4.28. Показать, что функция f, определенная на $[0, 1/\pi]$ как

$$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}, \ \text{если} \ x \neq 0, \ f(0) = 0, \ \text{дифференцируема.}$$

Вывести отсюда, что производная ярусной функции не всегда будет ярусной функцией (можно применить результат задачи 4.26).

4.29. 1. Исследовать поведение функций f и g:

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{2}}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}, \qquad g(x) = \arcsin f(x).$$

2. Показать, что g дифференцируема всюду, кроме, быть может, значений $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, и вычислить ее производную g'.

Показать, что g имеет в точках $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ правую и левую производную, применив для этого либо непосредственное вычисление, либо результат задачи 4.27.

Построить график функции g.

4.30. Рассмотрим функцию f вида

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}+2\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x},$$

определенную для тех значений x, для которых это выражение имеет смысл.

1. Указать, для каких x функция f определена, непрерывна и дифференцируема, и вычислить производную f' функции f в этих точках.

Исследовать поведение и построить график функции f.

2. Показать, что $(n-1)$-я производная функция f есть рациональная дробь:

$$f^{(n-1)}(x)=\frac{A_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

и что числитель A_n есть многочлен степени n.

Показать, что все нули многочлена A_n действительны и различны, исследуя для этого, скажем, поведение последовательных производных.

4.31. Пусть заданы два числа a и α и пусть

$$a>1.$$

1. Исследовать вопрос о числе положительных корней уравнения

$$a^x=x^a.$$

2. Показать, что уравнение

$$a^{a^x}=x$$

имеет те же корни, что и уравнение $a^x=x$, и отсюда получить число решений этого уравнения.

4.32. Исследовать поведение и построить график функции f, определенной для $x>0$ равенством

$$f(x)=x^x.$$

4.33. Пусть m и n — два заданных действительных числа; исследуются положительные решения (x, y) системы

$$\begin{aligned} x^{x+y}&=y^n,\\ y^{x+y}&=x^m, \end{aligned} \qquad (S)$$

не считая очевидного решения $(1, 1)$.

1. Показать, что если m и n имеют противоположные знаки, то система (S) не имеет решений.

2. Показать, что для положительных m и n, кроме нескольких частных значений, система (S) имеет решение, отличное от (1, 1).

3. Показать, что если m и n отрицательны, то, в зависимости от значений m и n, система не имеет решения или как исключение имеет одно или два решения, отличные от решения (1, 1).

4.34. 1. Обозначим через f функцию, определенную на интервале $[a, b]$ и выпуклую, а через p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — строго положительные числа, сумма $\sum_{i=1}^{n} p_i$ которых равна 1.

Показать, что

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

2. Показать, что если $\alpha > 1$, то функция f, определенная для $x \geqslant 0$ равенством $f(x) = x^\alpha$, выпуклая, и доказать, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — строго положительные числа, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^\alpha \leqslant n^{\alpha-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right).$$

Может ли здесь достигаться равенство?

3. Показать, что если $\alpha > 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha < \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^\alpha,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ снова строго положительны.

4.35. Обозначим через x, y, α, β строго положительные числа и допустим, что $\alpha + \beta = 1$.

1. Показать, что

$$x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y.$$

При каких условиях достигается равенство?

2. Применить предыдущий результат к парам значений

$$x_i = \frac{a_i^{1/\alpha}}{a}, \qquad y_i = \frac{b_i^{1/\beta}}{b} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и полученные неравенства почленно сложить.

Показать, что при надлежащем выборе чисел a и b получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/\alpha}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{1/\beta}\right)^\beta.$$

4.36. 1. Рассмотрим функцию f, определенную, непрерывную и дифференцируемую на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и отнесем ей две функции φ и ψ:

φ определена на $]x_1, x_2]$ равенством

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1};$$

ψ определена на $[x_1, x_2[$ равенством

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

Показать, что можно выбрать значения $\varphi(x_1)$ и $\psi(x_2)$ так, чтобы функции φ и ψ были определены и непрерывны на $[x_1, x_2]$.

Показать, что если m — число, заключенное строго между $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, то хотя бы одно из двух уравнений

$$\varphi(x)=m, \qquad \psi(x)=m$$

имеет решение.

2. Пусть функция f определена, непрерывна и дифференцируема на замкнутом интервале $[a, b]$. Показать, что если производная функция f' принимает значения α, β, то она принимает и все значения, заключенные между ними.

3. Пусть функция f удовлетворяет условиям п. 2 и, кроме того, выпуклая; показать, что ее производная f' — непрерывная функция.

4.37. Если функция f определена на интервале, содержащем внутри точку x_0, и если отношение

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

имеет предел, когда h стремится к нулю, то этот предел называется симметрической производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_s(x_0)$.

1. Показать, что если функция f имеет в x_0 отдельно правую и левую производные, то она имеет в этой точке и симметрическую производную.

2. Показать, что функция f со значениями $f(0)=0$ и $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, если $x\neq 0$, не имеет в нуле ни правой, ни левой производной, но имеет симметрическую производную.

3. Показать, что если функция f возрастает и имеет симметрическую производную, то эта производная положительна.

4. Показать, что если функции f и g непрерывны для значения x_0 и имеют при этом значении симметрические производные, то сумма $f+g$ и произведение fg также имеют при x_0 симметрические производные; вычислить эти симметрические производные.

4.38. В этой задаче предполагается известным определение симметрической производной функции, данное в задаче 4.37, и свойства симметрической производной, доказываемые в пп. 1 и 4 той же задачи.

1. Обозначим через φ функцию, определенную и непрерывную на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и обладающую симметрической производной в любой точке из $]x_1, x_2[$. Кроме того, предполагаем, что

$$x_1 < x_2 \quad \text{и} \quad \varphi(x_1) > \varphi(x_2).$$

Числу λ, удовлетворяющему двойному неравенству $\varphi(x_1) > \lambda > \varphi(x_2)$, ставим в соответствие множество E_λ таких чисел $x \in [x_1, x_2]$, что $\varphi(x) > \lambda$.

Показать, что верхняя грань множества E_λ удовлетворяет двойному неравенству $x_1 < \xi < x_2$ и что в любом содержащем ξ открытом интервале найдутся такие числа u и v, что $\varphi(u) > \lambda$, $\varphi(v) \leqslant \lambda$.

Вывести отсюда, что

$$\varphi(\xi) = \lambda, \qquad \varphi'_s(\xi) \leqslant 0.$$

2. Предположим, что функция f определена и непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$ и в любой точке из $]a, b[$ обладает строго положительной симметрической производной. Показать, скажем, рассуждением от противного, что функция f возрастает.

3. Предположим, что функция f, определенная и непрерывная на интервале $[a, b]$, имеет для каждого значения $x \in]a, b[$ симметрическую производную $f'_s(x)$. Обозначим через x_1 и x_2 такие два числа, что $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$.

Показать, что если существует такое число k, что для любого $x \in]a, b[$ имеем $f'_s(x) < k$, то

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant k(x_2 - x_1).$$

Более того, если симметрическая производная функции ограничена на $]a, b[$ и имеет верхнюю грань M и нижнюю грань m, то

$$m(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1).$$

В частности, вывести отсюда, что если $f'_s(x) \geqslant 0$, то функция f строго возрастает, кроме того случая, когда найдется интервал, в каждой точке которого $f'_s = 0$.

4.39. 1. Показать, что функция f со значениями $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, если $0 < x \leqslant \pi/2$, и $f(0) = 1$, непрерывна и дифференцируема на замкнутом интервале $[0, \pi/2]$; вычислить ее производную.

2. Показать, что если $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то

$$\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

(Эти неравенства часто применяются при оценке сверху или снизу тригонометрических функций.)

4.40. Простые примеры использования асимптотических разложений для отыскания эквивалентных функций и пределов.

1. Найти предел при x, стремящемся к нулю, выражения

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}.$$

2. Найти при x, стремящемся к нулю, предел l функции f вида

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$$

и предел выражения

$$\frac{f(x) - l}{x}.$$

(Предел функции f при x, стремящемся к ∞, будет найден в следующей задаче при помощи метода, не требующего привлечения асимптотических разложений.)

3. Найти коэффициенты a и b, при которых функция g со значениями

$$g(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

при x, стремящемся к нулю, была бы бесконечно малой наиболее высокого порядка, и найти в этом случае главную часть функции g.

4. Найти предел при x, стремящемся к ∞, функции h вида

$$h(x) = x\left[\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right].$$

4.41. 1. Показать, что если функции f и g при x, стремящемся к x_0 (или при x, стремящемся к $\pm\infty$), обе стремятся к $+\infty$ или обе стремятся к нулю и при этом эквивалентны, то функции $\ln f$ и $\ln g$ тоже эквивалентны.

2. Показать, что если x стремится к $+\infty$, то функции $\ln(e^x - 1)$ и $\ln e^x$ эквивалентны, и найти предел функции f вида

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}.$$

4.42. Показать, что для любого $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{16} < (1 + x)^{3/2} < 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2.$$

4.43. Найти предел последовательности с общим членом

$$u_n = \prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{p}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{p}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

4.44. 1. Пусть

$$g(x) = \cos\sqrt{x}, \quad \text{если} \quad x > 0,$$
$$h(x) = \operatorname{ch}\sqrt{-x}, \quad \text{если} \quad x < 0.$$

Показать, что функции g и h непрерывны и имеют производные 1-го и 2-го порядка; вычислить эти производные.

2. Пусть функция f определена следующим образом: $f(x) = g(x)$, если $x > 0$; $f(0) = 1$; $f(x) = h(x)$, если $x < 0$.

Показать, что функция f непрерывна и дважды дифференцируема для всех значений x, и показать, что ее производные связаны соотношением

$$4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0.$$

4.45. Рассмотрим функцию f, определенную на интервалах $]0, 1[$ и $]1, +\infty[$ формулой

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}.$$

1. Показать, что если $f(0)$ и $f(1)$ выбраны надлежащим образом, то функция f непрерывна и дифференцируема для любого значения $x \geqslant 0$.

2. Исследовать поведение и построить график функции f.

4.46. Функция f определяется как $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$, если $x \neq 0$, и $f(0) = 0$.

1. Показать, что функция f непрерывна и имеет правую и левую производные для всех действительных значений x.

2. Исследовать поведение функции f.

3. Найти при x, стремящемся к $\pm\infty$, асимптотическое разложение порядка 2 функции f по степеням $1/x$. Построить график функции f.

4.47. 1. Обозначим через f непрерывную функцию, бесконечно дифференцируемую на замкнутом интервале $[a, b]$, содержащем 0, и предположим, что для любого целого n

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n)}(x)| \leqslant n!\, k^n,$$

где k — заданное число.

Показать, что f обращается в нуль на $[-1/k, 1/k]$, и вывести отсюда, что f обращается в нуль на $[a, b]$ (использовать формулу Маклорена).

2. Пример ненулевой бесконечно дифференцируемой функции, у которой все производные в нуле обращаются в нуль. Определяем функцию g как $g(x) = e^{-1/x^2}$, если $x \neq 0$, и $g(0) = 0$.

Показать, что g бесконечно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точки 0, и что

$$g^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

где G_n — многочлен; вывести отсюда, что функция $g^{(n)}$ имеет в нуле предел 0.

Наконец, доказать, что g имеет в нуле производные всех порядков, равные нулю.

4.48. *Решение уравнений методом возвратных последовательностей.* В этой задаче будут использоваться результаты задачи 4.10. Предположим, что функция f непрерывна и дифференцируема на замкнутом интервале $[a, b]$ и что уравнение

$$x = f(x)$$

имеет единственный корень x_0.

Построим последовательность u_n, исходя из заданного u_0 $(a \leqslant u_0 \leqslant b)$ и рекуррентного соотношения

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

1. Показать, что если для любого $x \in [a, b]$

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant 1,$$

то u_n при любом n принадлежит $[a, b]$, а затем — что последовательность u_n монотонна и имеет предел x_0.

2. Показать, что если для любого $x \in [a, b]$

$$-1 \leqslant f'(x) \leqslant 0$$

и если $u_1 \in [a, b]$, то u_n при любом n принадлежит $[a, b]$, две последовательности с общим членом u_{2n} и u_{2n+1} монотонны и сходятся к корням уравнения

$$x = (f \circ f)(x).$$

Наконец, показать, что это уравнение имеет лишь один корень, если $-1 < f'(x)$ или даже (что несколько труднее), если $f'(x)$ может принимать значение -1, но не существует интервала, на котором $f'(x) = -1$.

3. Показать, что последовательность u_n не сходится к x_0, если в окрестности точки x_0 нижняя грань функции $|f'|$ больше или равна 1.

4. Предположим, что

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| = k < 1.$$

Найти мажоранту для $|u_n - x_0|$ как функцию от $b - a$, k и n.

5. Найти с точностью до 10^{-3} решение уравнения

$$x = 32 \sin_{400} x + 80 = f(x),$$

где $\sin_{400} x$ означает, что берется синус дуги, для которой x есть ее измерение в градах (можно было бы также написать $\sin \pi x/200$, что означало бы меру рассматриваемой дуги в радианах).

4.49. *Частные случаи предыдущей задачи.* (Они представляют теоретический интерес, но, в противоположность предыдущему, не имеют приложения к численному анализу.)

Предположим, что функция f определена, непрерывна и имеет непрерывные производные вплоть до 3-го порядка в окрестности значения x_0, удовлетворяющего уравнению $x_0 = f(x_0)$.

Снова определяем возвратную последовательность u_n посредством соотношения $u_n = f(u_{n-1})$ и задания члена u_0; будем всегда предполагать u_0 достаточно близким к x_0, чтобы условия, необходимые для рассуждения, выполнялись на интервале $[u_0, x_0]$.

1. Показать, что если

$$f'(x_0) = 1, \qquad f''(x_0) > 0,$$

то при $u_0 < x_0$ последовательность u_n имеет предел x_0, а при $u_0 > x_0$ задача теряет смысл.

Что можно утверждать, если $f'(x_0) = 1$ и $f''(x_0) < 0$?

2. Показать, что если

$$f'(x_0) = 1, \qquad f''(x_0) = 0,$$

то последовательность u_n сходится к x_0, если $f'''(x_0) < 0$, и не имеет предела, если $f'''(x_0) > 0$.

3. Применить предыдущие результаты к функции $f \circ f$, при условии $f'(x_0) = -1$.

4. Предположим, что f дифференцируема в окрестности точки x_1 и имеет в x_1 вторую производную. Найти при $x \to x_1$ предел выражения

$$\frac{1}{f(x) - f(x_1)} - \frac{1}{(x - x_1) f'(x_1)}.$$

Вывести отсюда, что если $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) > 0$ и $u_0 < x_0$, то

$$u_n - x_0 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

5. Предположим, что f дважды дифференцируема в окрестности точки x_1, имеет в x_1 третью производную и $f''(x_1) = 0$; найти в этом случае предел при $x \to x_1$ выражения

$$\frac{1}{[f(x) - f(x_1)]^2} - \frac{1}{[(x - x_1) f'(x_1)]^2}.$$

Вывести отсюда, что если $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) < 0$, то

$$u_n - x_0 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

6. Что можно утверждать, если $f'(x_0) = -1$?

4.50. 1. Показать, что если функция φ непрерывна и дифференцируема на $[a, b]$ вплоть до n-го порядка и обращается в нуль для $n+1$ различных значений из $[a, b]$, то ее n-я производная обращается на $]a, b[$ в нуль по крайней мере один раз.

2. Обозначим через f функцию, непрерывную и дифференцируемую на $[a, b]$ вплоть до n-го порядка, а через A — многочлен степени, не превосходящей $n-1$, принимающий для n различных точек из $[a, b]$, скажем, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то же значение, что и f (относительно существования многочлена A см. Пизо и Заманский, Алгебра, гл. IV, 5-й раздел).

Показать, что любому значению $x \in [a, b]$ соответствует хотя бы одно такое число $c \in]a, b[$, что

$$f(x) - A(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c).$$

Для этого можно рассмотреть функцию φ вида

$$\varphi(t) = f(t) - A(t) - C(t-x_1)\ldots(t-x_n),$$

где C — надлежащим образом выбранная постоянная.

3. Показать, что если $a > 1$, $p > 0$ и $0 < x < 1$, то

$$0 < \log_a(p+x) - \log_a p - x[\log_a(p+1) - \log_a p] < \frac{x(1-x)}{2p^2}\log_a e \leqslant \frac{\log_a e}{8p^2}.$$

Приложение. В таблицах логарифмов приводятся десятичные логарифмы целых чисел, заключенных между 10^3 и 10^4. Указать мажоранту Δ погрешности, полученной при вычислении логарифма интерполяцией, т. е. когда в качестве приближенного значения выражения $\log_{10}(p+x) - \log_{10} p$ берется $x[\log_{10}(p+1) - \log_{10} p]$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4.01. 1. Докажем от противного. Если верно обратное, то есть если $a > b$, то найдется хотя бы одно действительное число x_0, заключенное строго между a и b, и стало быть, удовлетворяющее условиям

$$x_0 > b \quad \text{и} \quad a > x_0,$$

что является отрицанием условий задачи.

2. Исключая конечное число членов, получаем последовательность, сходящуюся к тому же пределу, поэтому можно считать, что $u_n \leqslant x$, начиная с некоторого n, а это, как известно, влечет $l \leqslant x$ (продолжение неравенств). Тогда неравенство $l \leqslant x$, верное для любого числа $x > b$, в силу п. 1 влечет $l \leqslant b$.

4.02. Любая мажоранта множества A будет мажорантой и множества B; а мажорированное множество B имеет верхнюю грань. Наименьшая мажоранта A, т. е. $\sup A$, является мажорантой B, и значит, больше или равна наименьшей мажоранты множества B, т. е. $\sup B$.

4.03. Будем предполагать, что $\sup B \leqslant \sup A$; это влечет

$$\max(\sup A,\ \sup B) = \sup A.$$

Число $\sup A$ будет мажорантой множества A; оно будет мажорантой и множества B, поскольку оно больше или равно $\sup B$; поэтому оно не меньше любого элемента из $A \cup B$. Множество $A \cup B$, мажорированное числом $\sup A$, имеет верхнюю грань, равную наименьшей из мажорант,

$$\sup(A \cup B) \leqslant \sup A.$$

Но A содержится в $A \cup B$, и следовательно (задача 4.02),

$$\sup A \leqslant \sup(A \cup B).$$

Исследование относительно $\inf(A \cup B)$ проводится аналогично. Однако можно также рассмотреть множества A' и B', состоящие из элементов, противоположных элементам из A и B, и воспользовавшись соотношениями

$$\inf A = -\sup A',\ \ldots,\ (A \cup B)' = A' \cup B',$$

применить уже полученный результат для верхней грани.

Приложения. 1) По определению предела последовательности, найдется такое число n_0, что

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - l| < 1.$$

Стало быть, множество A элементов x_n с номером $n > n_0$ ограничено. Множество B элементов x_n с номером $n \leqslant n_0$ конечно, а значит, ограничено. Множество всех членов последовательности есть множество $A \cup B$; оно ограничено как объединение двух ограниченных множеств.

2) По определению предела функции в $+\infty$, найдется такое число x_0, что

$$x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < 1.$$

Множество $A = f(]x_0, +\infty[)$, таким образом, ограничено. Функция f непрерывна на замкнутом интервале $[0, x_0]$; значит, она ограничена на этом интервале (теорема максимума; см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III. § 2, теор. 1), т. е. множество $B = f([0, x_0])$ ограничено. Известно, что

$$f([0, +\infty[) = f([0, x_0] \cup]x_0, +\infty[) =$$
$$= f([0, x_0]) \cup f(]x_0, +\infty[).$$

Множество $f([0, +\infty[)$ есть множество $A \cup B$; оно ограничено, и значит, по определению, функция f ограничена на $[0, +\infty[$.

4.04. Множество $A \cap B$, содержащееся в ограниченном множестве A, само ограничено. Установим требуемое неравенство для $\inf(A \cap B)$, предоставив читателю проведение аналогичного доказательства для $\sup(A \cap B)$. Будем пользоваться результатом, соответствующим результату задачи 4.02 для минорированных множеств. Имеем

$$A \cap B \subset A \Rightarrow \inf (A \cap B) \geqslant \inf A,$$
$$A \cap B \subset B \Rightarrow \inf (A \cap B) \geqslant \inf B.$$

Наибольшее из чисел $\inf A$ и $\inf B$ будет минорантой множества $A \cap B$, и значит, оно меньше или равно наибольшей миноранты множества $A \cap B$, т. е. $\inf (A \cap B)$,

$$\max (\inf A, \inf B) \leqslant \inf (A \cap B).$$

Пример: $A = \{0, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$,

$$\max (\inf A, \inf B) = \max (0, 1) = 1, \ \inf (A \cap B) = 2,$$
$$\min (\sup A, \sup B) = \min (5, 4) = 4, \ \sup (A \cap B) = 3.$$

4.05. 1. Мажорированные множества A и B имеют верхние грани $\sup A$ и $\sup B$, откуда следует, что $M = \sup A + \sup B$ есть мажоранта множества C; действительно

$$x \leqslant \sup A \quad \text{и} \quad y \leqslant \sup B \Rightarrow z \leqslant \sup A + \sup B, \quad \forall z \in C.$$

Если $M' < M$, то, по определению верхней грани множества,

$$\exists x_0 \in A: \ \sup A - \frac{M - M'}{2} < x_0,$$
$$\exists y_0 \in B: \ \sup B - \frac{M - M'}{2} < y_0.$$

Отсюда

$$x_0 + y_0 \in C, \qquad M' = \sup A + \sup B - (M - M') < x_0 + y_0.$$

Число M' не может быть мажорантой C; итак, наименьшая мажоранта множества C, т. е. $\sup C$, равна M.

2. Решение п. 1 существенным образом опирается на возможность почленно складывать неравенства. Следовательно, для получения аналогичного результата для произведений необходимо ограничиться множествами положительных чисел; при таком предположении показываем, как и в п. 1, что D мажорировано, и

$$\sup D = \sup A \sup B.$$

Замечания. а) Это свойство может не выполняться, если брать произвольные множества. Например, пусть $A = B$ есть множество действительных отрицательных чисел; оно мажорировано. $D = AB$ есть множество действительных положительных чисел; оно не мажорировано.

б) Доказательство может быть получено применением свойства п. 1 к множествам A' и B' вида

$$x' \in A' \Leftrightarrow e^{x'} \in A, \qquad y' \in B \Leftrightarrow e^{y'} \in B,$$

если ограничиться множествами строго положительных чисел.

3. Множества $f(X)$ и $g(X)$, по условию, мажорированы, и стало быть,

$$\sup[f(X)+g(X)] = \sup f(X) + \sup g(X) = \sup f + \sup g.$$

Легко видеть, что

$$(f+g)(X) \subset f(X) + g(X).$$

Множество $(f+g)(X)$ мажорировано, значит, функция $f+g$ тоже мажорирована, и

$$\sup(f+g) = \sup[(f+g)(X)] \leqslant \sup[f(X)+g(X)] = \sup f + \sup g.$$

Пример со строгим неравенством:

$$X = [0,\ 1], \qquad f(t) = t, \qquad g(t) = 1 - t,$$
$$\sup f = \sup g = \sup(f+g) = 1.$$

4.06. 1. Чтобы показать, что f есть биекция R на себя, докажем, что уравнение

$$f(x) = y$$

при любом действительном y имеет, и притом единственное, решение

$$\begin{aligned} x &= 0, && \text{если } y = 0, \\ x &= 1/y, && \text{если } y \neq 0 \text{ рационально}, \\ x &= y, && \text{если } y \text{ иррационально}. \end{aligned}$$

2. Функция f разрывна в 0, ибо в любом содержащем 0 интервале найдутся рациональные числа, заключенные также между -1 и 1, а для таких чисел x имеем

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \frac{1}{|x|} > 1.$$

Если $x_0 \neq 0$, то любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такое $h > 0$, что

$$|x - x_0| < h \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

(непрерывность функции $x \to 1/x$). Отсюда выводим, что функция f непрерывна в x_0, если $x_0 = 1/x_0$, т. е. для $x_0 = \pm 1$, в силу того, что для x, как рациональных, так и иррациональных,

$$|x - x_0| < \min(h,\ \varepsilon) \Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Для любого другого значения x_0 функция f разрывна. Чтобы в этом убедиться, возьмем ε столь малым, чтобы интервалы длины 2ε с центром в x_0 и в $1/x_0$ не имели общих точек, скажем, $2\varepsilon < |x_0 - 1/x_0|$; тогда для $|x - x_0| < \min(h, \varepsilon)$ имеем

$$|f(x) - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 1/x_0| > \varepsilon, \text{ если } x \text{ иррационально},$$
$$|f(x) - 1/x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - x_0| > \varepsilon, \text{ если } x \text{ рационально}.$$

Для $f(x_0)$, равного как x_0, так и $1/x_0$, на любом открытом интервале, содержащем x_0, найдутся такие точки x, что

$$|x - x_0| < \min(h, \varepsilon),$$

а значит, точки x, для которых

$$|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Стало быть, не существует такого числа $\eta > 0$, чтобы

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4.07. 1. Пусть x_0 принадлежит A, т. е. $f(x_0) < y$, и пусть $u < f(x_0)$ — произвольное число. По определению непрерывности f в x_0, найдется открытый интервал $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, образ которого при отображении f содержится в $]u, y[$; следовательно, этот интервал $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ содержится в A.

Для B доказательство аналогично.

2. Множество $f^{-1}(y)$ непусто, так как функция f, непрерывная на интервале $[a, b]$, принимает по крайней мере один раз любое значение между $f(a)$ и $f(b)$ (теорема о промежуточных значениях, Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, § 2, теорема 2).

Покажем, что $f^{-1}(y)$ имеет наибольший элемент, т. е. что множество $f^{-1}(y)$ мажорировано и его верхняя грань ему принадлежит. Множество $f^{-1}(y)$ мажорировано в силу того, что оно содержится в $[a, b]$, и значит, имеет верхнюю грань m ($a \leqslant \leqslant m \leqslant b$).

В любом содержащем m открытом интервале имеются точки множества $f^{-1}(y)$ (по определению верхней грани). Если бы m принадлежало A, то нашелся бы открытый интервал с центром m, лежащий в A, и значит, не содержащий точек из $f^{-1}(y)$, чего не может быть, т. е. m не может принадлежать A; по тем же соображениям m не может принадлежать B; следовательно, m принадлежит $f^{-1}(y)$.

Для наименьшего элемента доказательство аналогично.

4.08. 1. Легко показать, например, индукцией по n, что

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Стало быть, последовательность u_n сходится и ее предел равен 1.

Для последовательности v_n имеем

$$|v_m - v_n| = \left|\sum_{n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sin k\alpha\right| \leqslant \sum_{n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) |\sin k\alpha| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Отсюда

$$|v_m - v_n| \leqslant u_m - u_n.$$

Сходящаяся последовательность u_n удовлетворяет критерию Коши, а значит, ему удовлетворяет и последовательность v_n, что влечет сходимость последовательности v_n (для u_n критерий Коши используется как необходимое условие сходимости, а для v_n — как достаточное).

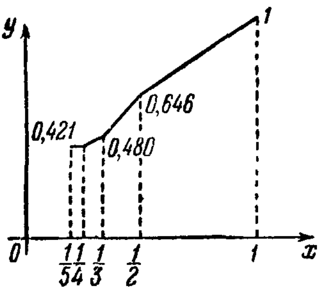

Рис. 5.

2. 1) Из непрерывности f следует, что отрезки, составляющие график сужений f на два смежных интервала, имеют общий конец (рис. 5).

2) Легко видеть, что

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left(\frac{1}{k+1}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right)\right] =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right].$$

На интервале $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ сужение f есть линейная функция, определяемая условием в); отсюда

$$f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sin k\alpha,$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sin k\alpha = 1 - v_{n-1}.$$

Последовательность $f\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится в силу сходимости последовательности v_n.

3) Обозначим через y_0 предел последовательности $f(1/n)$ и покажем, что y_0 есть предел функции f в точке 0.

Зададим $\varepsilon > 0$. По определению предела, найдется такое n_0, что

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - y_0\right| < \varepsilon.$$

Если $0 < x < 1/n_0$, то x принадлежит интервалу $[1/(n+1), 1/n]$, где n — целое, $n \geqslant n_0$; сужение f на этот интервал является аффинной функцией, и потому $f(x)$ заключено между $f(1/n)$ и $f(1/(n+1))$; отсюда

$$|f(x) - y_0| \leqslant \max\left(\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - y_0\right|, \left|f\left(\frac{1}{n+1}\right) - y_0\right|\right) < \varepsilon;$$

тем самым найдено такое число $\eta = 1/n_0$, что

$$0 < x < \eta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon,$$

а это и означает, что функция f имеет в точке 0 правый предел, равный y_0.

3. 1) Пусть заданы x и x' и пусть $x < x'$. Найдутся такие целые m и n, что

$$\frac{1}{m+1} \leqslant x < \frac{1}{m}, \qquad \frac{1}{n+1} < x' \leqslant \frac{1}{n}.$$

Если $m = n$, то x и x' принадлежат одному интервалу, и тогда

$$|f(x') - f(x)| = |(x' - x)\sin n\alpha| \leqslant x' - x.$$

Если же $m > n$, то используя промежуточные точки $1/k$, получим

$$f(x') - f(x) = \left[f(x') - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] + \\ + \left[f\left(\frac{1}{n+1}\right) - f\left(\frac{1}{n+2}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{1}{m-1}\right) - f\left(\frac{1}{m}\right)\right] + \\ + \left[f\left(\frac{1}{m}\right) - f(x)\right] = \left[f(x') - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1}\left[f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1}{m}\right) - f(x)\right],$$

и, следовательно,

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \left|f(x') - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| + \sum_{k=n+1}^{m-1}\left|f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right| + \\ + \left|f\left(\frac{1}{m}\right) - f(x)\right|.$$

По определению функции f,

$$\left|f(x') - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = \left|\left(x' - \frac{1}{n+1}\right)\sin n\alpha\right| \leqslant x' - \frac{1}{n+1},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k+1}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sin k\alpha\right| \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{m}\right) - f(x)\right| = \left|\left(\frac{1}{m} - x\right)\sin m\alpha\right| \leqslant \frac{1}{m} - x.$$

Отсюда

$$|f(x') - f(x)| \leqslant \left(x' - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \\ + \left(\frac{1}{m} - x\right) = x' - x.$$

Постоянная M для f равна 1.

2) Если $m > n$, то

$$\left|g\left(\frac{1}{m}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant M\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Последовательность $g(1/n)$ удовлетворяет критерию Коши, а именно, для заданного $\varepsilon > 0$

$$n > M/\varepsilon \quad \text{и} \quad m > M/\varepsilon \Rightarrow \left| g\left(\frac{1}{m}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Значит, последовательность $g(1/n)$ имеет предел, скажем, y_0, и, как можно заметить, рассматривая предел последовательности $m \to |g(1/m) - g(1/n)|$,

$$\left| y_0 - g\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Отнесем x такое целое n, чтобы $1/n \leqslant x < 1/(n-1)$; тогда

$$|g(x) - y_0| \leqslant \left| g(x) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right| + \left| g\left(\frac{1}{n}\right) - y_0 \right| \leqslant M\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{M}{n},$$

$$|g(x) - y_0| \leqslant \frac{M}{n(n-1)} + \frac{M}{n} \leqslant \frac{2M}{n}.$$

Следовательно, для заданного ε имеем

$$0 < x < \varepsilon/2M \Rightarrow n \geqslant \frac{1}{x} > \frac{2M}{\varepsilon} \Rightarrow |g(x) - y_0| < \varepsilon,$$

т. е. функция g имеет в точке 0 правый предел, равный y_0.

4.09. 1: Из условий задачи вытекает, что

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0.$$

Возрастающая и ограниченная сверху числом v_0 последовательность u_n имеет предел u, который служит верхней гранью множества u_n; убывающая и ограниченная снизу числом u_0 последовательность v_n имеет предел v, который служит нижней гранью множества чисел v_n.

Для двух произвольных целых n и m имеем

$$u_n \leqslant u_{n+m} \leqslant v_{n+m} \leqslant v_m;$$

u_n, будучи минорантой множества членов последовательности v_m, не превосходит нижней грани v множества чисел v_m (нижняя грань есть наибольшая из минорант); стало быть, v есть мажоранта множества чисел u_n, и следовательно, больше или равна верхней грани u этого множества (наименьшей из мажорант).

В итоге

$$u_n \leqslant u \leqslant v \leqslant v_n \Rightarrow 0 \leqslant v - u \leqslant v_n - u_n.$$

Если допустить, что $v - u \neq 0$, но $\lim(v_n - u_n) = 0$, то, по определению предела, найдется такое N, что

$$n > N \Rightarrow v_n - u_n < v - u.$$

Но это, по условию, невозможно, и значит, $v - u = 0$, если $\lim(v_n - u_n) = 0$.

2. Легко проверить индукцией, что $u_n > 0$ и $v_n > 0$.

$$v_n^2 - u_n^2 = \left(\frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}\right)^2 - u_{n-1}v_{n-1} = \left(\frac{v_{n-1} - u_{n-1}}{2}\right)^2 \geqslant 0,$$

а так как u_n и v_n положительны, то

$$v_n^2 - u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow v_n \geqslant u_n \Rightarrow \begin{array}{l} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant u_n \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant v_n. \end{array}$$

Последовательность u_n возрастает, последовательность v_n убывает, и кроме того, $u_n \leqslant v_n$.

Из предыдущих результатов вытекает, что

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n,$$

$$0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Отсюда индукцией по n получаем

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}.$$

Последовательность $v_n - u_n$ имеет пределом 0. Выполнены все условия из п. 1, и последовательности u_n и v_n сходятся к одному и тому же пределу; этот общий предел называется арифметико-геометрическим средним чисел u_0 и v_0.

4.10. 1. Предположим, что $u_1 \geqslant u_0$, и покажем по индукции, что последовательность возрастает, т. е. $u_n \geqslant u_{n-1}$. Для $n = 1$ это верно по условию. Допустим, что $u_{n-1} \geqslant u_{n-2}$. Поскольку f возрастает,

$$u_{n-2} \leqslant u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} = f(u_{n-2}) \leqslant f(u_{n-1}) = u_n.$$

Последовательность u_n возрастает, и, по условию, мажорирована числом b; значит, она сходится и ее предел u удовлетворяет неравенствам

$$a \leqslant u_0 \leqslant u \leqslant b.$$

Точно так же доказывается убывание последовательности u_n в случае $u_1 \leqslant u_0$; здесь u_n минорирована числом a, поэтому снова сходится и ее предел удовлетворяет неравенствам

$$a \leqslant u \leqslant u_0 \leqslant b.$$

Так как для значения $u \in [a, b]$ функция f, по условию, непрерывна, то последовательность $f(u_n)$ имеет предел $f(u)$ (Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 2-й раздел, § 1, 3-е определение непрерывности). Последовательности u_{n+1} и $f(u_n)$ с попарно равными числами имеют один и тот же предел;

$$u = f(u).$$

Предыдущие результаты могут быть проиллюстрированы на графике, однако это не может заменить проведенного доказательства (рис. 6).

Точка графика f с абсциссой u_0 имеет ординату u_1, а точка биссектрисы координатного угла, имеющая ту же ординату u_1, имеет и абсциссу u_1; соответствующая точка графика

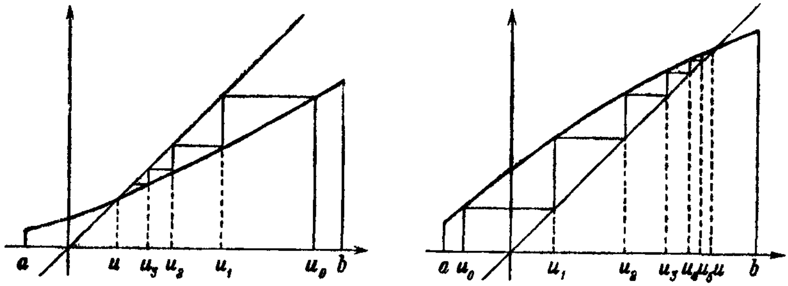

Рис. 6.

имеет ординату $u_2 = f(u_1)$; возьмем точку на биссектрисе с ординатой u_2 и т. д. Правый график соответствует случаю возрастающей последовательности, а левый — убывающей.

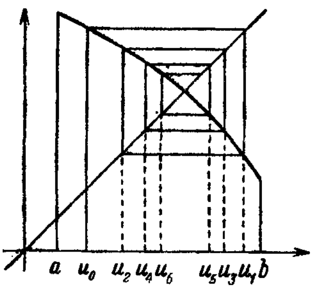

Рис. 7.

2. Так как функция f непрерывна и убывает (рис. 7), то прообраз интервала $[a, b]$ есть интервал $[\alpha, \beta]$, содержащий, по условию, все u_n. На $[\alpha, \beta]$ функция $f \circ f$ определена и возрастает:

$$x' < x \Rightarrow y' = f(x') \geqslant y =$$
$$= f(x) \Rightarrow (f \circ f)(x') = f(y') \leqslant f(y) =$$
$$= (f \circ f)(x).$$

Следовательно, результаты из п. 1 применимы к рекуррентным последовательностям, определенным при помощи функции $f \circ f$, и в частности, к последовательностям u_n' и u_n'', определенным соотношениями

$$u_0' = u_0, \qquad u_n' = (f \circ f)(u_{n-1}') = u_{2n} \text{ (по индукции)},$$
$$u_0'' = u_1, \qquad u_n'' = (f \circ f)(u_{n-1}'') = u_{2n+1} \text{ (по индукции)}.$$

Обе последовательности монотонны и ограничены, т. е. сходятся; кроме того, легко видеть, что если одна из них возрастает, то другая убывает:

$$u_{2n} \geqslant u_{2n-2} \Rightarrow u_{2n+1} = f(u_{2n}) \leqslant f(u_{2n-2}) = u_{2n-1}.$$

Наконец, заметим, что для сходимости последовательности u_n необходимо и достаточно равенство пределов u' и u'' последовательностей $u_n' = u_{2n}$ и $u_n'' = u_{2n+1}$.

3. *Исследование последовательности* u_n. По индукции получаем, что числа u_n положительны, и значит, меньше 1. Здесь f есть дробно-линейная функция, определенная равенством

$$f(x)=\frac{x+1}{x+2};$$

она определена, непрерывна и возрастает для значений x, заключенных между 0 и 1.

Условия п. 1 выполнены; кроме того, $u_1 = 1/2$ больше $u_0 = 0$; последовательность u_n, возрастая, сходится к корню u уравнения

$$u=\frac{u+1}{u+2}, \qquad \text{или} \qquad u^2+u-1=0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень; значит, u равно $(-1+\sqrt{5})/2$.

Исследование последовательности v_n. Индукцией показываем, что $0 \leqslant v_n \leqslant 1$; функция cos на интервале $[0, 1]$ убывает; условия п. 2 выполнены, отсюда последовательность v_{2n} возрастает, ибо $v_2 \geqslant v_0 = 0$, и имеет предел v'; последовательность v_{2n+1} убывает и имеет предел v''.

Записывая, что последовательности $\cos v_{2n}$ и $\cos v_{2n+1}$ имеют пределы $\cos v'$ и $\cos v''$ (непрерывность косинуса от v' и v''), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} v' &= \cos v'', & \qquad v' &= \cos v'', \\ v'' &= \cos v' & \Rightarrow \quad v'' - v' &= \cos v' - \cos v''. \end{aligned}$$

Разность $v''-v'$ не может быть отлична от нуля; в самом деле, если бы $v'-v'' \neq 0$, то

$$|\cos v' - \cos v''| < |v' - v''|.$$

Последовательность v_n сходится и имеет пределом v общий предел двух последовательностей v_{2n} и v_{2n+1}, т. е. корень уравнения

$$v=\cos v.$$

Исследование последовательности w_n. Индукцией показываем, что $0 \leqslant w_n \leqslant 1$. Здесь функция f, определенная формулой $f(x) = (1-x)^2$, непрерывна и возрастает на этом интервале.

Последовательность $w_n' = w_{2n}$ возрастает в силу того, что $w_2 = 9/16 > 1/2 = w_0$; она имеет предел w', удовлетворяющий двойному неравенству $9/16 \leqslant w' \leqslant 1$.

Тогда последовательность $w_n'' = w_{2n+1}$ убывает и имеет первый член $w_1 = 1/4$; ее предел w'' удовлетворяет двойному неравенству $0 \leqslant w'' \leqslant 1/4$.

Пределы w' и w'' не равны между собой, значит, последовательность w_n не сходится (если последовательность имеет предел l, то любая подпоследовательность сходится к l).

Можно иначе определить w' и w'', а именно, эти два числа являются решением системы

$$\begin{matrix} w' = (1-w'')^2 \\ w'' = (1-w')^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} w'-w'' = (w'-w'')(2-w'-w''), \\ w'+w'' = 2-2(w'+w'')+w'^2+w''^2. \end{matrix}$$

Обе части первого уравнения можно разделить на отличный от нуля множитель $w'-w''$,

$$\begin{matrix} 1 = 2-(w'+w'') \\ w'+w'' = 2-2(w'+w'')+(w'+w'')^2-2w'w'' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} w'+w''=1, \\ w'w''=0, \end{matrix}$$

и стало быть, $w'=1$, $w''=0$.

4.11. 1. Условие задачи влечет равномерную непрерывность функции f, и значит, тем более, ее непрерывность в любой точке из $[a, b]$. Это значит, что если задано $\varepsilon > 0$, то

$$|u-v| < \varepsilon \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon.$$

Функция $t \to f(t)-t$, которую мы обозначим через F, строго убывает:

$$F(u)-F(v) = [f(u)-u]-[f(v)-v] = [f(u)-f(v)]+[v-u],$$

и последняя сумма имеет тот же знак, что и разность $v-u$, ибо эта разность, по условию, имеет большее абсолютное значение, чем первая. Значения, принимаемые функцией f, принадлежат $[a, b]$; в частности,

$$a \leqslant f(a) \Rightarrow F(a) = f(a)-a \geqslant 0,$$
$$b \geqslant f(b) \Rightarrow F(b) = f(b)-b \leqslant 0.$$

Непрерывная на $[a, b]$ функция F принимает как положительные, так и отрицательные значения, и стало быть, принимает значение 0 (теорема о промежуточных значениях; см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, § 2, теорема 2). При этом F строго монотонна, т. е. является инъективным отображением, и значит, принимает значение 0 только один раз.

2. Прежде всего заметим, что из условия $f([a, b]) \subset [a, b]$ индукцией по n получаем, что все члены x_n принадлежат $[a, b]$.

а) По определению, $f(\theta)=\theta$; поэтому

$$|x_n-\theta| = |f(x_{n-1})-f(\theta)| < |x_{n-1}-\theta|.$$

Убывающая последовательность $|x_n-\theta|$, минорируемая числом 0, сходится и имеет предел $l \geqslant 0$.

б) Пусть E — множество таких индексов n, что $x_n-\theta \geqslant 0$. Если E бесконечно и $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ — элементы из E, то для подпоследовательности x_{n_i} последовательности x_n имеем

$$x_{n_i}-\theta \geqslant 0 \Rightarrow x_{n_i}-\theta = |x_{n_i}-\theta|.$$

Подпоследовательность $|x_{n_i}-\theta|$ последовательности $|x_n-\theta|$ имеет предел l; значит, последовательность x_{n_i} имеет предел $\theta+l$.

Если E конечно и если n_0 — наибольший элемент из E, то

$$n>n_0 \Rightarrow x_n-\theta<0 \Rightarrow x_n-\theta=-|x_n-\theta|.$$

Тогда последовательность x_n имеет предел $\theta-l$ и является искомой.

в) Предел $\theta+\varepsilon l$ последовательности x_{n_i} элементов замкнутого интервала $[a, b]$ принадлежит этому интервалу; функция f непрерывна в этой точке, и последовательность $f(x_{n_i})$ имеет предел $f(\theta+\varepsilon l)$ (см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 2-й раздел, § 1, 3-е определение непрерывности). При этом

$$|f(\theta+\varepsilon l)-\theta|=\lim|f(x_{n_i})-\theta|=\lim|x_{n_i+1}-\theta|=l$$

(подпоследовательность $|x_{n_i+1}-\theta|$ последовательности $|x_n-\theta|$ имеет предел l).

Но, согласно основному условию, если $\theta+\varepsilon l\neq 0$, т. е. если $l\neq 0$, то

$$l=|f(\theta+\varepsilon l)-\theta|=|f(\theta+\varepsilon l)-f(\theta)|<|\varepsilon l|=l,$$

откуда получаем противоречивое неравенство $l<l$. Итак, остается единственная возможность $l=0$.

Замечание. Предыдущее исследование может быть применено к функции f, определенной на интервале $[0, \pi/2]$ равенством

$$f(t)=\cos t.$$

Соответствующая рекуррентная последовательность уже изучалась в задаче 4.11.

4.12. 1. Если $n<m$, то

$$|S_m(t)-S_n(t)|=\left|\sum_{n+1}^{m}\frac{\sin kt}{k^2(k+1)}\right|\leqslant\sum_{n+1}^{m}\frac{1}{k^2(k+1)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n+1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

Стало быть, выполняется критерий Коши, и последовательность $S_n(t)$ имеет предел.

2. На основании известного неравенства

$$|\sin x'-\sin x|<|x'-x|, \quad \text{для} \quad x'\neq x,$$

имеем

$$| S_n(v) - S_n(u) | = \left| \sum_1^n \frac{\sin kv - \sin ku}{k^2(k+1)} \right| < \sum_1^n \frac{k\,|v-u|}{k^2(k+1)} =$$

$$= |v-u| \sum_1^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Это неравенство между общими членами двух последовательностей справедливо и для пределов (но уже в ослабленной форме):

$$| S(v) - S(u) | \leqslant | v-u | \lim \left(\sum_1^n \frac{1}{k(k+1)} \right) = | v-u |.$$

Таким образом, полученный результат не дает искомого строгого неравенства; чтобы получить его, достаточно заметить, что

$$\left| \sum_2^n \frac{\sin kv - \sin ku}{k^2(k+1)} \right| < | v-u | \sum_2^n \frac{1}{k(k+1)};$$

продолжая это неравенство на пределы, получаем

$$\left| S(v) - S(u) - \frac{\sin v - \sin u}{2} \right| \leqslant \frac{|v-u|}{2}.$$

Отсюда

$$| S(v) - S(u) | \leqslant \left| \frac{\sin v - \sin u}{2} \right| + \frac{|v-u|}{2};$$

применяя строгое неравенство

$$| \sin v - \sin u | < | v-u |,$$

получаем

$$| S(v) - S(u) | < \frac{|v-u|}{2} + \frac{|v-u|}{2} = | v-u |.$$

Чтобы показать, что определенная на $[-\pi, \pi]$ функция $t \to S(t)$ удовлетворяет условиям задачи 4.11, достаточно показать, что образ интервала $[-\pi, \pi]$ содержится в $[-\pi, \pi]$; это очевидно, ибо

$$| S(t) | = | S(t) - S(0) | \leqslant | t | \leqslant \pi.$$

4.13. 1. Пусть α — произвольное положительное число; по определению предела, найдется такое число N, что

$$n > N \Rightarrow | x_n - l | < \alpha.$$

Разность $y_n - l$ может быть записана в виде

$$y_n - l = \frac{(x_1 + \ldots + x_N) + (x_{N+1} + \ldots + x_n) - nl}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + \ldots + x_N - Nl}{n} + \frac{(x_{N+1} - l) + \ldots + (x_n - l)}{n} = \xi_n + \eta_n.$$

Согласно выбору N, $|x_p - l| < \alpha$ для $p > N$, и значит,

$$|\eta_n| = \left| \frac{(x_{N+1} - l) + \ldots + (x_n - l)}{n} \right| \leqslant \frac{|x_{N+1} - l| + \ldots + |x_n - l|}{n} <$$
$$< \frac{(n - N)\alpha}{n} < \alpha.$$

Последовательность

$$\xi_n = \frac{x_1 + \ldots + x_N - Nl}{n},$$

числитель которой не зависит от n, имеет пределом 0; поэтому найдется такое число n_0, что

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| \frac{x_1 + \ldots + x_N - Nl}{n} \right| < \alpha.$$

Окончательно, для $n \geqslant n_0$,

$$|\xi_n| < \alpha \quad \text{и} \quad |\eta_n| < \alpha \Rightarrow |y_n - l| \leqslant |\xi_n| + |\eta_n| < 2\alpha.$$

А так как α — произвольное положительное число, то, по определению, последовательность y_n имеет предел l.

2. Отнесем последовательности x_n последовательность d_n вида

$$d_1 = x_1; \quad d_n = x_n - x_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Последовательность d_n имеет, по условию, предел l; согласно п. 1, последовательность

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n}$$

тоже имеет предел l, и, как очевидно,

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = x_n.$$

3. Применим изоморфизм мультипликативной группы строго положительных действительных чисел и аддитивной группы действительных чисел.

Имеем

$$p_n = \ln \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = \frac{1}{n} \ln (x_1 \ldots x_n) = \frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n}.$$

По условию, последовательность x_n имеет предел l; значит, последовательность $\ln x_n$ имеет предел $\ln l$ (в силу непрерывности логарифмической функции), и p_n тоже имеет предел $\ln l$ (см. п. 1). Тогда, в силу непрерывности показательной функции,

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = e^{p_n} \to e^{\ln l} = l.$$

Точно так же, если последовательность x_{n+1}/x_n имеет предел l, то последовательность $\ln x_{n+1} - \ln x_n$ имеет предел $\ln l$, и тогда на основании п. 2 получаем:

$$\ln \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n} \ln x_n \to \ln l,$$

$$\sqrt[n]{x_n} \to e^{\ln l} = l.$$

4. Члены последовательности u_n записываются в виде

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

Последовательность с общим членом $x_p = 1/p$ имеет пределом 0; значит, тот же предел будет иметь и последовательность

$$u_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Для членов второй последовательности, имеем

$$v_n = \sqrt[n]{x_n}, \quad \text{где} \quad x_n = n^3 + n^2 - 1.$$

Отношение x_{n+1}/x_n есть отношение значений двух многочленов с одинаковыми членами наивысшей степени в точке n; предел этого отношения равен 1, и $v_n = \sqrt[n]{x_n}$ имеет, в силу п. 3, предел 1.

4.14. На любом интервале (см., например, рис. 8), содержащем $x_0 = p_0/q_0$, найдутся иррациональные числа x, и тогда

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{q_0}.$$

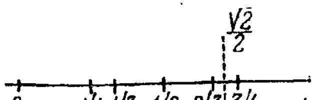

Рис. 8.

Если $0 < \varepsilon < 1/q_0$, то нельзя указать такое η, чтобы

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

так как на интервале $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ найдутся иррациональные x, для которых неравенство не выполняется.

Покажем, что если x_0 иррационально, то взяв $\varepsilon > 0$, можно найти некоторый открытый интервал, содержащий x_0, для точек которого выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Здесь $f(x_0) = 0$ и $f(x) \geqslant 0$, поэтому искомое неравенство записывается в виде $f(x) < \varepsilon$. Числа r, для которых оно не выполняется, рациональны и имеют знаменатель $q \leqslant 1/\varepsilon$; стало быть, число их конечно, и x_0, будучи иррациональным, не совпадает ни с одним из них. Обозначим теперь через r_1 и r_2 два числа, наиболее близких к x_0 слева и справа; интервал $]r_1, r_2[$, по определению r_1 и r_2, не содержит чисел r; значит, любое x из этого интервала удовлетворяет неравенству $f(x) < \varepsilon$.

Наконец, проведенное рассуждение показывает также, что f имеет во всех x_0 нулевой предел (определение предела в x_0 не включает самого значения x_0); в самом деле, среди r, удовлетворяющих неравенству $f(r) \geqslant \varepsilon$, возьмем r_1 и r_2, ближайшие к x_0 слева и справа, исключая само x_0, если оно принадлежит множеству чисел r. Тогда любое x из интервалов $]r_1, x_0[$, $]x_0, r_2[$ удовлетворяет неравенству $f(x) < \varepsilon$. Функция f имеет в x_0 равные нулю левый и правый пределы, и следовательно, имеет в x_0 предел, равный 0.

4.15. Задав $\varepsilon > 0$, исследуем неравенство

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x' - x|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} < \varepsilon.$$

1) Если оба числа x и x' строго меньше ε^2, то

$$0 < \sqrt{x'} < \varepsilon \text{ и } 0 < \sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x}| < \varepsilon.$$

2) Если условия из 1) не выполняются, т. е. если хотя бы одно из чисел x, x' больше ε^2, то $\sqrt{x'} + \sqrt{x} \geqslant \varepsilon$; но

$$\sqrt{x'} + \sqrt{x} \geqslant \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon},$$

$$|x' - x| < \varepsilon^2 \Rightarrow \frac{|x' - x|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{|x' - x|}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Итак, числу ε ставится в соответствие такое число ε^2, что если x, $x' \in [0, 1]$, то

$$|x' - x| < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x'} - \sqrt{x}| < \varepsilon.$$

(Результат справедлив для пар (x, x'), удовлетворяющих условиям как 1), так и 2).) Функция f, по определению, равномерно непрерывна на $[0, 1]$.

4.16. Возрастающая функция f имеет в каждой точке x_0 правый предел $f(x_0 + 0)$ и левый предел $f(x_0 - 0)$ и, как известно,

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x < x_0} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \inf_{x > x_0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

функция f непрерывна в x_0 в том и только том случае, когда

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Допустим, что f разрывна для некоторого $c \in [a, b]$; тогда $f(c - 0) < f(c + 0)$,

$$x < c \Rightarrow f(x) \leqslant \sup_{x < c} f(x) = f(c - 0),$$

$$x > c \Rightarrow f(x) \geqslant \inf_{x > c} f(x) = f(c + 0).$$

Функция f не принимает значений из интервала $]f(c-0), f(c+$ $+0[$, кроме значения $f(c)$. А так как из определения $f(c-0)$ и $f(c+0)$ вытекает, что

$$f(a) \leqslant f(c-0) < f(c+0) \leqslant f(b),$$

то получено противоречие. (Если $c=a$ или $c=b$, то рассматриваемый интервал следует заменить на $]f(a), f(a+0)[$ или на $]f(b-0), f(b)[$.) Функция g на $[0, 2]$, имеющая вид (рис. 9)

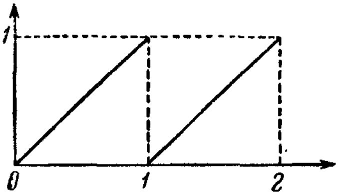

Рис. 9.

$$g(x) = x \quad \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$g(x) = x-1 \quad \text{для} \quad 1 < x \leqslant 2,$$

принимает все значения между $g(0)=0$ и $g(2)=1$, но разрывна при $x=1$.

4.17. 1. Если $n=0$, то $A_0=1$; допустим, что задача верна вплоть до n. Имеем

$$4\cos n\theta \cos\theta = 2\cos(n+1)\theta + 2\cos(n-1)\theta \Rightarrow xA_n =$$
$$= A_{n+1} + A_{n-1}.$$

A_{n+1} есть многочлен, у которого член наивысшей степени совпадает с членом наивысшей степени многочлена xA_n, т. е. равен x^{n+1}.

2. Если $-2 \leqslant x \leqslant 2$, то можно положить $x = 2\cos\theta$ $(0 \leqslant$ $\leqslant \theta \leqslant \pi)$:

$$A_n(x) = 2 \Leftrightarrow \cos n\theta = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0 \quad (2\pi).$$

Следовательно, $A_n - 2$ имеет нули

$$u_k = 2\cos(2k\pi/n) \quad (0 \leqslant k \leqslant n/2).$$

Многочлен $A_n - 2$ принимает на $[-2, 2]$ только отрицательные значения; если $-2 < u_k < 2$, то $A_n - 2$ обращается в u_k в нуль, не меняя знака; тогда порядок нуля u_k будет четным и равным по крайней мере 2. Оценим теперь сумму порядков нулей u_k, рассматривая отдельно два случая в зависимости от четности n.

1) Если $n = 2n'$, то $u_0 = 2$, $u_{n'} = -2$ и в интервале $]-2; +2[$ имеются $n'-1$ нулей u_k; сумма порядков этих нулей по крайней мере равна

$$1 + 1 + 2(n'-1) = 2n'.$$

А так как многочлен $A_n - 2$ имеет степень $2n'$, то тем самым получены все его нули; при этом 2 и -2 — простые нули, а остальные нули u_k — двойные.

2) Если $n=2n'+1$, то $u_0=2$, и на $]-2,2[$ существует n' чисел u_k, где k принимает значения $1, 2, \ldots, n'$. Сумма порядков этих нулей больше или равна

$$1+2n'=2n'+1=n.$$

Получены все нули многочлена A_n-2, из которых 2 — простой нуль, а остальные нули — двойные.

Точно так же исследуются нули многочлена A_n+2. Все они действительны и равны

$$v_h=2\cos\frac{(2h+1)\pi}{n} \qquad \left(0\leqslant h\leqslant\frac{n-1}{2}\right),$$

причем каждый из них — двойной, кроме -2 (в случае, когда он является нулем).

3. Числа u_k и v_h записываются при помощи общего выражения:

$$x_m=2\cos\frac{m\pi}{n} \qquad (0\leqslant m\leqslant n);$$

$$x_{2k}=u_k, \quad \text{если} \quad m=2k;$$

$$x_{2h+1}=v_h, \quad \text{если} \quad m=2h+1.$$

Следовательно, по определению чисел u_k и v_h,

$$A(x_m)=2(-1)^m.$$

По условию, $|f(x_m)|<2$; поэтому $A(x_m)-f(x_m)$ имеет тот же знак, что и $A(x_m)$, т. е. $(-1)^m$. Функция $A-f$ для двух последовательных чисел x_m принимает значения противоположных знаков; значит, она хотя бы один раз обращается в нуль на открытом интервале $]x_m, x_{m+1}[$ (по теореме о промежуточных значениях); а поскольку имеется n попарно не пересекающихся интервалов $]x_m, x_{m+1}[$, то функция A_n-f обращается в нуль на $[-2,2]$ по крайней мере n раз.

4. Рассуждаем от противного. Если

$$|F(x)|<2, \qquad \forall x\in[-2,\ 2],$$

то функция F должна удовлетворять условиям п. 3, и многочлен A_n-F должен иметь на $[-2,2]$ по крайней мере n нулей. В частности, если F имеет степень p, то A_p-F имеет на $[-2,2]$ по крайней мере p нулей; но этот многочлен имеет степень не более $p-1$ (поскольку старшие члены многочленов A_p и F равны x^p), и следовательно, есть нулевой многочлен, что противоречит условию $|F(x)|<2$, ибо многочлен A_p принимает значения -2 и 2.

5. Замена переменных

$$x-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{4}X$$

переводит интервал $[a, b]$ в интервал $[-2, 2]$, а G — в функцию Γ:

$$\Gamma(X) = G\left[\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} X\right].$$

Функция

$$\left(\frac{4}{b-a}\right)^n \Gamma$$

есть многочлен со старшим членом X^n; мы можем применить к нему результат п. 4, согласно которому найдется хотя бы одно значение $X_0 \in [-2, 2]$, для которого

$$\left|\frac{4}{(b-a)^n} \Gamma(X_0)\right| \geqslant 2.$$

Следовательно, существует по крайней мере одно $x_0 \in [a, b]$ $\left(\text{именно, } x_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} X_0\right)$, для которого

$$|G(x_0)| \geqslant 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Колебание ω функции G на $[a, b]$ есть разность $M - m$ граней G на $[a, b]$; поэтому грани функции $G - (M+m)/2$ на $[a, b]$ равны $\omega/2$ и $-\omega/2$. $G - (M+m)/2$ есть многочлен со старшим членом x^n, и к нему можно применить предыдущий результат; поэтому существует по крайней мере одно значение $x_0 \in [a, b]$, в котором

$$2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \leqslant \left|G(x_0) - \frac{M+m}{2}\right| \leqslant \frac{\omega}{2}.$$

4.18. 1. Как известно,

$$(1+u)^n = 1 + nu + A(u),$$

где A — многочлен, наименьшая степень членов которого равна 2. Каждый член в $A(u)$ есть $O(u^2)$, а значит, и их сумма — тоже, поэтому

$$(1+u)^n = 1 + nu + O(u^2).$$

Положим $\sqrt[n]{1+u} = 1 + v$; тогда

$$1 + u = (1+v)^n = 1 + nv + O(v^2) \Rightarrow u = nv + o(v).$$

Значит, функции u и nv эквивалентны и

$$v = O(u) \Rightarrow v^2 = O(u^2) \Rightarrow O(v^2) = O(u^2),$$

$$v = \frac{u}{n} + O(u^2).$$

2. Воспользовавшись предыдущими результатами и заметив, что $2x+3x^2=O(x)$ и $x+x^2=O(x)$, можем записать:

$$\sqrt[2]{1+2x+3x^2}=1+\frac{2x+3x^2}{2}+O[(2x+3x^2)^2]=$$
$$=1+\frac{2x+3x^2}{2}+O(x^2),$$
$$\sqrt[3]{1+x+x^2}=1+\frac{x+x^2}{3}+O[(x+x^2)^2]=1+\frac{x+x^2}{3}+O(x^2),$$
$$f(x)=1+\frac{2x+3x^2}{2}+O(x^2)-\left[1+\frac{x+x^2}{3}+O(x^2)\right]=$$
$$=\frac{2x}{3}+\frac{7x^2}{6}+O(x^2)=\frac{2x}{3}+O(x^2).$$

Можно также записать (учитывая, что $O(x^2)$ есть $o(x)$):

$$f(x)=\frac{2x}{3}+o(x)\Leftrightarrow f\sim\frac{2x}{3}.$$

В применении к функции g тот же метод не проходит; в самом деле, получаем

$$g(x)=\frac{x^2}{4}+O(x^2)=O(x^2),$$

а этого недостаточно, чтобы определить эквивалентную функцию. Поэтому вначале запишем $g(x)$ следующим образом:

$$g(x)=\sqrt[4]{1+x}\left(\sqrt[4]{1+\frac{x^2}{1+x}}-1\right)=$$
$$=\sqrt[4]{1+x}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{1+x}+O\left[\left(\frac{x^2}{1+x}\right)^2\right]\right\},$$
$$\frac{1}{1+x}=O(1)\Rightarrow O\left[\frac{x^4}{(1+x)^2}\right]=O[x^4],$$
$$\frac{g(x)}{x^2}=\frac{\sqrt[4]{1+x}}{4(1+x)}+\frac{O(x^4)}{x^2}=\frac{\sqrt[4]{1+x}}{4(1+x)}+O(x^2);$$

$g(x)/x^2$ имеет при $x\to 0$ предел $1/4$, и значит, g эквивалентна функции $x^2/4$.

4.19. 1. При $x>0$

$$\operatorname{ctg}x<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}\Rightarrow\frac{\cos x}{x}<\operatorname{ctg}x<\frac{1}{x};$$

кроме того,

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}=1-2[O(x)]^2=1-O(x^2),$$

откуда

$$\frac{1-O(x^2)}{x}<\operatorname{ctg}x<\frac{1}{x}.$$

Следовательно, разность $\operatorname{ctg} x - 1/x$, есть $O(x^2)/x$, т. е. $O(x)$, а значит и $o(1)$. А так как функция $\operatorname{ctg} x - 1/x$ нечетна, то результат, установленный для $x > 0$, верен и для $x < 0$.

2. На основании п. 1 записываем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\frac{1}{x} + o(1)\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + o(1).$$

Функция f имеет при $x \to 0$ предел в том и только том случае, если

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0;$$

тогда $f(x) = o(1)$, и предел функции f равен нулю. (Последнее заранее очевидно, ибо если f нечетна и имеет в 0 предел, то этот предел может быть только нулевым.)

4.20. 1. Для $n = 1$ результат верен. Допустим, что он доказан для всех значений вплоть до $n - 1$; тогда

$$x^n = xx^{n-1} \geqslant [1 + (x-1)][1 + (n-1)(x-1)] =$$
$$= 1 + n(x-1) + (n-1)(x-1)^2,$$
$$(n-1)(x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^n \geqslant 1 + n(x-1)$$

(неравенство будет строгим, если $n > 1$, т. е. если $n \geqslant 2$).

Если $x > 1$, то последовательность $1 + n(x-1)$ имеет предел $+\infty$, равно как и последовательность x^n.

Если $x = 1$, то $x^n = 1$, и последовательность x^n имеет предел 1.

Если $x < 1$, то $x^n(1/x)^n = 1$, и последовательность $(1/x)^n$ имеет предел $+\infty$, а последовательность x^n имеет предел 0.

2. При любом $x \in [0, h]$ предел последовательности $f_n(x)$ равен 0, и поэтому предельная функция f — нулевая ($f(x) \equiv 0$). А так как f_n возрастает, то

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant h^n, \qquad \forall x \in [0, h].$$

Мы знаем, что h^n имеет пределом 0. Зададим $\varepsilon > 0$; тогда найдется такое N, что

$$n > N \Rightarrow h^n < \varepsilon,$$

и стало быть,

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon \in [0, h],$$

а это и есть определение равномерной сходимости на $[0, h]$.

Замечание. Мы заменили здесь условие

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [0, h]$$

условием

$$\|f_n - f\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant h} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

в котором переменное x уже не фигурирует, поэтому исследование равномерной сходимости последовательности функций с помощью последнего условия бывает часто более удобным (ибо сводится к исследованию сходимости числовой последовательности).

3. Для любого N функция f_{N+1}, непрерывная на $[0, 1]$, принимает на $[0, 1[$ значения, сколь угодно близкие к 1, и значит, не удовлетворяет условию

$$f_{N+1}(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1[,$$

если $\varepsilon < 1$.

Последовательность $f_n(x)$ сходится к нулю при $0 \leqslant x < 1$ и к 1 при $x = 1$. Стало быть, предельная функция f и функция $|f_n - f|$ определяются следующим образом:

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \quad f(1) = 1,$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \quad |f_n(1) - f(1)| = 0.$$

Но мы только что показали, что для $0 < \varepsilon < 1$ не существует такого N, чтобы

$$n > N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Поэтому не существует N, для которого

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Таким образом, функциональная последовательность f_n не будет равномерно сходиться на $[0, 1]$.

Все функции f_n непрерывны на интервале $[0, 1]$. И если бы последовательность f_n равномерно сходилась на $[0, 1]$, предельная функция f была бы также непрерывна на $[0, 1]$; однако f разрывна слева в 1.

4. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$; тогда

а) $1 - \varepsilon < x \leqslant 1 \Rightarrow 1 - x < \varepsilon$ и $x^n < 1 \Rightarrow x^n(1 - x) < \varepsilon$;

б) $0 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon \Rightarrow 1 - x < 1 \Rightarrow g_n(x) \leqslant f_n(x)$.

Последовательность f_n равномерно сходится на $[0, 1 - \varepsilon]$, и значит, найдется такое N, что

$$n > N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon \Rightarrow g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1 - \varepsilon].$$

Отсюда получаем

$$n > N \Rightarrow g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Действительно, для $x \leqslant 1 - \varepsilon$ это вытекает из б), а для $x > 1 - \varepsilon$ неравенство выполняется при любом n. А так как $g_n(x) \geqslant 0$, то тем самым установлено, что последовательность функций g_n равномерно сходится к нулю на $[0, 1]$.

4.21. Функции u_n нечетны (что легко проверить индукцией), поэтому достаточно исследовать отрезок $[0, \pi/2]$, что мы и сделаем; итак, пусть $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$. При фиксированном x последовательность $u_n(x)$ является возвратной числовой последовательностью, и к ней применимы результаты задачи 4.10. Функция, обозначенная в задаче 4.10 через f, в данном случае есть синус; она возрастает на интервале $[0, \pi/2]$, содержащем все члены $u_n(x)$ (проверяется индукцией). Последовательность $u_n(x)$ монотонна, точнее, убывает, поскольку

$$u_1(x) = \sin x \leqslant x = u_0(x);$$

а так как члены $u_n(x)$ минорированы числом 0, то последовательность $u_n(x)$ сходится. Ее предел $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u(x) = \sin [u(x)] \qquad \text{(непрерывность функции sin)}$$

и значит, $u(x)$ равно 0 — единственному корню уравнения.

Как и в задаче 4.20, мы докажем равномерную сходимость последовательности функций u_n, показав, что числовая последовательность

$$U_n = \sup_{-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2} | u_n(x) - u(x) | = \| u_n - u \|$$

сходится к нулю. Ранее уже говорилось о том, что это определение более удобно, чем то, в котором явно присутствует x.

В рассматриваемой задаче $u(x) = 0$, а u_n — нечетная функция, принимающая при $x \geqslant 0$ положительные значения, поэтому

$$U_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant \pi/2} u_n(x);$$

индукцией покажем, что функция u_n возрастает.

Функция u_0, определяемая равенством $u_0(x) = x$, возрастает. Допустим, что это верно вплоть до $n-1$; тогда

$$x < x' \Rightarrow u_{n-1}(x) \leqslant u_{n-1}(x') \Rightarrow u_n(x) =$$
$$= \sin [u_{n-1}(x)] \leqslant \sin [u_{n-1}(x')] = u_n(x'),$$

чем узаконен переход от $n-1$ к n.

Возрастание функции u_n влечет, что

$$U_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant \pi/2} u_n(x) = u_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Мы уже показали, что при заданном x последовательность $u_n(x)$ сходится к 0; в частности, это справедливо для $x = \pi/2$, т. е. $u_n(\pi/2) = U_n$ сходится к 0, и следовательно, последовательность функций u_n равномерно сходится к 0.

4.22. 1. Знаменатель функции f_n не имеет действительных нулей:

$$(x+1)^{2n+1} = (x-1)^{2n+1} \Leftrightarrow x + 1 = x - 1.$$

Поэтому f_n непрерывна на R.

Числитель функции f_n — нечетный многочлен, а знаменатель — четный; значит, f_n — нечетная функция (в чем можно убедиться, заменив x на $-x$ или исследовав степени одночленов числителя и знаменателя). Таким образом, достаточно изучить поведение f_n на $[0, +\infty)$; заметим, что $x+1 \neq 0$, если $x \geqslant 0$, и стало быть,

$$f_n(x) = \frac{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}},$$

т. е. f_n представлена в виде композиции трех функций

$$u = \frac{x-1}{x+1}, \qquad v = u^{2n+1}, \qquad w = \frac{1+v}{1-v}.$$

Все они возрастают, значит, сложная функция f_n тоже возрастает, и, в силу нечетности f_n, то же самое верно для $x \leqslant 0$. Наконец, при $x \to +\infty$ u стремится к 1, оставаясь меньше 1, равно как и v, а $w \to +\infty$; значит, $f_n \to +\infty$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Числитель функции f_n — нечетный многочлен, и потому не содержит члена степени $2n$, а знаменатель — четный многочлен, и значит, не содержит члена степени $2n-1$; это позволяет записать при $x \to \pm\infty$

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1} + o(x^{2n})}{(2n+1)x^{2n} + o(x^{2n-1})} = \frac{x}{2n+1} \frac{1 + o(1/x)}{1 + o(1/x)}.$$

Если h — бесконечно малая величина, то

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + o(h).$$

Значит,

$$\frac{1}{1+o(1/x)} = 1 - o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left[o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

и

$$f_n(x) = \frac{x}{2n+1}\left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{x}{2n+1} + o(1).$$

Прямая $y = x/(2n+1)$ является асимптотой графика функции f_n (рис. 10).

При $x \to 0$ элементарные выкладки приводят к соотношению

$$f_n(x) = \frac{2(2n+1)x + o(x)}{2} = (2n+1)x + o(x).$$

Прямая $y = (2n+1)x$ есть касательная к графику в начале координат.

И наконец, в силу нечетности f_n, ее график симметричен относительно точки 0 (см. рис. 10).

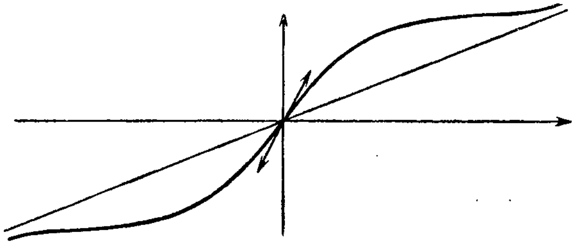

Рис. 10.

3. Предположим, что $x > 0$, и воспользуемся представлением функции f_n в виде композиции функций u, v, w, которое мы использовали для изучения поведения функции f_n; $x > 0 \Rightarrow -1 < u < 1 \Rightarrow v_n = u^{2n+1}$ имеет предел $0 \Rightarrow f_n(x) = \frac{1+v_n}{1-v_n}$ имеет предел 1. Если $x = 0$, то $f_n(0) = 0$, а значит, и предел равен 0. Наконец, в силу нечетности f_n, последовательность $f_n(x)$ при $x < 0$ имеет предел -1.

Пусть концы a и b рассматриваемого интервала имеют одинаковые знаки; будем считать их положительными, ибо в силу нечетности функций f_n полученные результаты будут справедливы и для $[-b, -a]$. Тогда предельная функция f постоянна и равна 1, и

$$f_n(x) - 1 = \frac{2(x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}} = 2\,\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}}.$$

Задав $\varepsilon > 0$, исследуем неравенство

$$|f_n(x) - 1| < \varepsilon,$$

или, вернее, два неравенства

$$-\varepsilon < f_n(x) - 1 < \varepsilon. \tag{1}$$

Эти неравенства эквивалентны двум следующим:

$$-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Дробно-линейная функция $x \to \frac{x-1}{x+1}$ возрастает от $\frac{a-1}{a+1}$ до $\frac{b-1}{b+1}$ на отрезке $[a, b]$, а значит, $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ возрастает от $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n+1}$ до $\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{2n+1}$.

Следовательно, оба неравенства (1) выполняются в том и тольке том случае, если

$$-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n+1} < \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

Числа

$$\frac{a-1}{a+1} \quad \text{и} \quad \frac{b-1}{b+1}$$

по абсолютному значению строго меньше 1; значит, последовательности

$$\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \quad \text{и} \quad \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^n$$

сходятся к 0, и, по определению предела, интервалу

$$\left]-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right[$$

содержащему 0, можно поставить в соответствие такое число N, что

$$n > N \Rightarrow \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n \quad \text{и} \quad \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^n \text{ принадлежит } \left]-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right[,$$

а значит,

$$n > N \Rightarrow -\varepsilon < f_n(x) - 1 < \varepsilon, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Итак, последовательность функций f_n равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

Функции f_n непрерывны для всех действительных значений, и в частности, непрерывны на интервале $[-a, a]$; если бы последовательность f_n равномерно сходилась на $[-a, a]$, то предельная функция была бы на $[-a, a]$ непрерывна, чего на самом деле нет, поскольку f разрывна в 0.

4.23. 1. 1) Решение дается соотношением

$$l(x) = f(u) + (x-u)\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

(что легко проверить, задав x значения u и v).

2) Образом отрезка $[u, v]$ при отображении непрерывной монотонной функции l служит отрезок $[f(u), f(v)]$; а так как $l(x)$ принадлежит этому отрезку, то (по теореме о промежуточных значениях) оно принадлежит множеству $f([u, v])$ значений, принимаемых f на $[u, v]$; следовательно, найдется хотя бы одно $\xi \in [u, v]$, для которого $l(x) = f(\xi)$.

3) Отсюда вытекает, что для любого $x \in [u, v]$

$$|l(x) - f(x)| = |f(\xi) - f(x)| \leqslant \sup_{u \leqslant x \leqslant v} f(x) - \inf_{u \leqslant x \leqslant v} f(x) = \omega;$$

ω является мажорантой множества чисел $|l(x) - f(x)|$, стало быть, больше или равно верхней грани этого множества.

2. Λ есть подмножество векторного пространства $\mathscr{C}$ действительных функций, непрерывных на $[a, b]$. Докажем, что это есть векторное подпространство; для этого покажем, что если λ и μ — функции из Λ и r — действительное число, то $\lambda - \mu$ и $r\lambda$ — функции из Λ.

Для $r\lambda$ это очевидно, ибо сужение $r\lambda$ на каждый из интервалов разбиения есть произведение r на многочлен первой степени, и значит, снова будет многочленом первой степени.

Обозначим через $a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$ и $a, x'_1, \ldots, x'_{p-1}, b$ точки деления интервала $[a, b]$, сопоставляемые функциям λ и μ, а через $a, y_1, \ldots, y_{q-1}, b$ — множество точек деления, полученное в результате упорядоченного объединения множеств $\{x_i\}$ и $\{x'_j\}$. Между двумя последовательными точками y_k и y_{k+1} не содержится ни точек x_i, ни x'_j, ибо все они входят в множество $\{y_h\}$, и значит, интервал $[y_k, y_{k+1}]$ содержится как в некотором интервале $[x_i, x_{i+1}]$, так и в некотором интервале $[x'_j, x'_{j+1}]$.

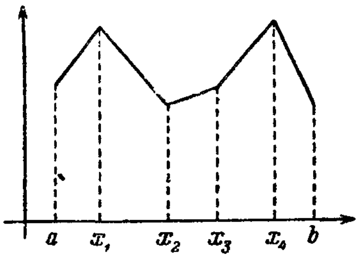

Рис. 11.

Сужения функций λ и μ на $[y_k, y_{k+1}]$ представляют собой многочлены степени, меньшей или равной единице; то же самое имеет место и для сужения функций $\lambda - \mu$ на этот отрезок, ибо это есть разность двух многочленов.

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения график есть прямая, и концы двух последовательных звеньев графика в силу непрерывности λ совпадают (рис. 11).

3. Чтобы показать, что непрерывная на $[a, b]$ функция f является равномерным пределом последовательности функций из Λ, достаточно показать, что если задано $\varepsilon > 0$, то найдется такая функция $\lambda \in \Lambda$, что $|f(x) - \lambda(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in [a, b]$ (искомая последовательность будет получена, если затем взять в качестве ε значения ε_n сходящейся к 0 последовательности, скажем, $\varepsilon_n = 1/n$).

Известно, что на каждом из отрезков разбиения, отвечающих функции λ, эта функция определяется многочленом первой степени; если l_i — многочлен, определяемый, как и в п. 1, равенствами $l_i(x_i) = f(x_i)$ и $l_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, то

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \Rightarrow |\lambda(x) - f(x)| = |l_i(x) - f(x)| \leqslant \omega_i(f),$$

где $\omega_i(f)$ — колебание f на $[x_i, x_{i+1}]$.

Для того чтобы $|f(x)-\lambda(x)|<\varepsilon$ при любом $x \in [a, b]$, достаточно, чтобы $\omega_i(f)<\varepsilon$ для всех значений i. Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна, и стало быть, можно указать такое η, что

$$|x'-x''|<\eta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

и тогда

$$x_{i+1}-x_i<\eta \Rightarrow \omega_i(f)<\varepsilon$$

(см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 2-й раздел, § 3).

Таким образом, решение λ будет получено, если взять разбиение $a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$, такое, чтобы длины интервалов были меньше η, и положить $\lambda(x_i)=f(x_i)$.

4.24. 1. $E(x)$ есть наибольшее целое, не превосходящее x:

$$E(x+1)=1+E(x).$$

Функция E, постоянная на всяком интервале, не содержащем целого числа, непрерывна всюду, за исключением целых значений, где она непрерывна справа и разрывна слева,

$$E(n)=E(n+0)=n, \qquad E(n-0)=n-1.$$

Наконец, на любом конечном интервале функция E имеет не более конечного числа разрывов и значений, т. е. является ступенчатой.

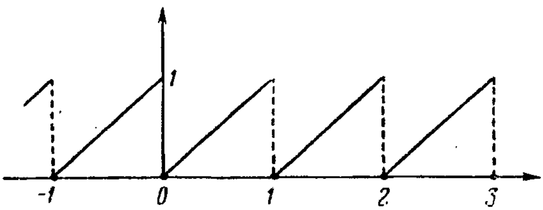

Рис. 12.

Отсюда сразу же выводятся свойства функции D:

$$D(x+1)=x+1-E(x+1)=x-E(x)=D(x).$$

Функция D непрерывна всюду, кроме целых точек, где она непрерывна справа и разрывна слева (рис. 12):

$$D(+0)=D(0)=0, \qquad D(-0)=1.$$

Наконец, D, будучи разностью двух ярусных функций (линейной функции x и ступенчатой функции E), является ярусной функцией на любом конечном интервале.

2. Функции u_n — периодические с периодом 1; в самом деле,

$$D[k(x+1)]=D[kx+k]=D[kx].$$

Поэтому мы исследуем сходимость последовательности на интервале длины 1, скажем, $I_0=[-1/2, 1/2]$. На этом интервале функции $D(kx)$, а значит, и функции u_n, являются ярусными.

Если $p < q$, то в силу того, что $0 \leqslant D(kx) \leqslant 1$, получаем

$$0 \leqslant u_q(x) - u_p(x) = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{D(kx)}{2^k} \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^p},$$

и без каких бы то ни было предположений относительно чисел p и q:

$$\| u_q - u_p \| = \sup_{x \in I_0} | u_q(x) - u_p(x) | < \frac{1}{2^{\min(p, q)}}.$$

Двойная последовательность $\|u_p - u_q\|$ сходится к 0; значит, последовательность функций u_n равномерно сходится на I_0 (см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 5-й раздел, § 2, п. 3) к некоторой ярусной на I_0 функции u (пространство ярусных функций полно относительно нормы $\|f\| = \sup_{x \in I_0} |f(x)|$).

Если x не принадлежит I_0, то найдется такое $x_0 \in I_0$, что $x = x_0 + X$, где X — целое число; в точках x и x_0 функции u_n принимают одно и то же значение, так что последовательности $u_n(x)$ и $u_n(x_0)$ имеют один и тот же предел. Следовательно, предельная функция u определена на всем множестве R и имеет период, равный 1; стало быть,

$$\sup_{x \in R} | u_n(x) - u(x) | = \sup_{x \in I_0} | u_n(x) - u(x) |.$$

Поэтому равномерная сходимость последовательности u_n на I_0 влечет равномерную сходимость последовательности u_n на R.

3. В этом и в следующем пунктах мы будем брать только значения на отрезке I_0; общий случай непосредственно вытекает отсюда в силу того, что период функции u равен длине отрезка I_0.

В иррациональной точке x_0 все функции $D_k(x) = D(kx)$ непрерывны (точки разрыва — это те точки, для которых kx — целое, т. е. x рационально и знаменатель делит k). Функции u_n в x_0 непрерывны, последовательность u_n равномерно сходится на I_0, и значит, предел u непрерывен в x_0 (Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 5-й раздел, § 2, п. 4, теорема 1).

4. Ярусная на I_0 функция u имеет в каждой точке правый предел $u(x+0)$ и левый предел $u(x-0)$. По определению равномерной сходимости, любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое N, что

$$n > N \Rightarrow | u_n(x) - u(x) | < \varepsilon, \qquad \forall x \in I_0;$$

когда $x \to x_0$ справа, $u_n(x)$ и $u(x)$ стремятся к правым пределам $u_n(x_0+0)$ и $u(x_0+0)$, существование которых установлено, и эти пределы удовлетворяют, стало быть, условию

$$n > N \Rightarrow | u_n(x_0+0) - u(x_0+0) | \leqslant \varepsilon,$$

чем доказано, что $u(x_0+0) = \lim u_n(x_0+0)$.

Для левого предела доказательство аналогично.

Функции D_k непрерывны справа в каждой точке, а значит, u_n тоже обладают этим свойством:

$$u_n(x_0+0) = u_n(x_0) \Rightarrow u(x_0+0) = \lim u_n(x_0+0) = \lim u_n(x_0) = u(x_0).$$

Итак, функция u непрерывна справа в каждой точке.

Если x_0 — рациональное число, равное несократимой дроби s/r, то функции D_k, у которых индекс k кратен r, т. е. $k = hr$, разрывны в x_0 и

$$D_{hr}(x_0 - 0) = 1, \qquad D_{hr}(x_0) = 0.$$

Остальные функции D_k непрерывны в x_0 и

$$D_k(x_0) = D_k(x_0 - 0).$$

Отсюда

$$u_n(x_0 - 0) = u_n(x_0) + \sum_{hr \leqslant n} \frac{1}{2^{hr}}.$$

А это влечет $u(x_0 - 0) \neq u(x_0)$. Действительно, если $n \geqslant r$, то

$$u_n(x_0 - 0) \geqslant u_n(x_0) + \frac{1}{2^r},$$

и следовательно,

$$\lim u_n(x_0 - 0) = u(x_0 - 0) \geqslant u(x_0) + \frac{1}{2^r} = \lim u_n(x_0) + \frac{1}{2^r}.$$

Итак, функция u разрывна слева в x_0.

Можно доказать более точное соотношение

$$u(x_0 - 0) = u(x_0) + \sum_h \frac{1}{2^{hr}} = u(x_0) + \frac{1}{2^r - 1}.$$

4.25. 1. Будем пользоваться определением непрерывности в 0 при помощи сходящихся к 0 последовательностей x_n (Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 2-й раздел, § 1, опр. 3).

Если последовательность x_n сходится к 0, то последовательность $f(x_n)$ тоже сходится к 0; действительно, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ такое, что

$$n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_n)| < \varepsilon;$$

но по условию (непрерывность f в 0), последовательность $f(x_n)$ имеет предел $f(0)$.

2. Функция g:

$$g(x) = \left|\frac{f(x)}{x}\right|$$

определена и непрерывна всюду, кроме $x = 0$. (Частное двух непрерывных функций непрерывно и абсолютное значение непрерывной функции непрерывно.)

Функция g, определенная и непрерывная на двух интервалах $[-M, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, M]$, ограничена на этих интервалах, и при этом существуют такие x_1 и x_2, что

$$-M \leqslant x_1 \leqslant -\varepsilon, \qquad g(x_1) = \max_{-M \leqslant x \leqslant -\varepsilon} g(x),$$

$$\varepsilon \leqslant x_2 \leqslant M, \qquad g(x_2) = \max_{\varepsilon \leqslant x \leqslant M} g(x)$$

(теорема о максимуме; см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 2-й раздел, § 2, следствие из теоремы 1).

По условию,

$$g(x_1) = \left|\frac{f(x_1)}{x_1}\right| < 1 \quad \text{и} \quad g(x_2) = \left|\frac{f(x_2)}{x_2}\right| < 1.$$

Число $k = \max(g(x_1), g(x_2))$ в свою очередь тоже строго меньше 1, и мы получаем искомый результат:

$$\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M \Rightarrow g(x) \leqslant k \Rightarrow |f(x)| \leqslant k|x|.$$

Функция f, определенная равенством $f(x) = x/(|x| + 1)$, дает требуемый пример; действительно,

$$|f(x)| < |x|, \quad \text{если} \quad x \neq 0,$$

$$\sup_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{1}{1+\varepsilon} = k.$$

Отношение $f(x)/x$ стремится к 1, когда $x \to 0$; тогда, по определению предела, оно не может мажорироваться никаким числом $h < 1$. (Другие примеры: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln(|x| + 1)$.)

3. Доказываем индукцией по n. Берем сначала $n = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} |x| < \varepsilon \Rightarrow |f_0(x)| < |x| < \varepsilon \\ \varepsilon \leqslant |x| \leqslant M \Rightarrow |f_0(x)| \leqslant k|x| \leqslant kM \end{array}\right\} \Rightarrow |f_0(x)| \leqslant \sup(\varepsilon, kM).$$

Допустим теперь, что утверждение верно вплоть до $(n-1)$. Чтобы перейти к n, возьмем случай $n = 0$ и подставим $f_{n-1}(x)$ вместо x. Тогда

$$|f_{n-1}(x)| \leqslant \sup(\varepsilon, k^n M) \Rightarrow |f_{n-1}(x)| < \varepsilon,$$

или

$$\varepsilon \leqslant |f_{n-1}(x)| \leqslant k^n M, \quad |f_{n-1}(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f[f_{n-1}(x)]| < |f_{n-1}(x)| < \varepsilon$$

$\varepsilon \leqslant |f_{n-1}(x)| \leqslant k^n M \Rightarrow \varepsilon \leqslant |f_{n-1}(x)| \leqslant M$, так как $k < 1$. Следовательно, мы можем применить результат п. 2 при значении переменного $f_{n-1}(x)$:

$$|f[f_{n-1}(x)]| \leqslant k|f_{n-1}(x)| \leqslant k \cdot k^n M = k^{n+1} M.$$

Отсюда получаем

$$|f_n(x)| = |f[f_{n-1}(x)]| \leqslant \sup(\varepsilon, k^{n+1} M).$$

Это может быть записано так:

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{|x| \leqslant M} |f_n(x)| \leqslant \sup(\varepsilon, k^{n+1}M).$$

А так как $k < 1$, то предел последовательности $k^{n+1}M$ равен 0; значит, найдется такое целое N, что

$$n > N \Rightarrow k^{n+1}M < \varepsilon \Rightarrow \|f_n - 0\| < \varepsilon.$$

Во всех предыдущих неравенствах $\varepsilon > 0$ произвольно; поэтому мы можем утверждать, что последовательность $\|f_n - 0\|$ имеет предел 0, т. е. последовательность функций f_n равномерно сходится к нулевой функции.

4.26. 1. Функция $1/x$ непрерывна при $x \neq 0$, а функция синус непрерывна при всех действительных значениях; следовательно, сложная функция f непрерывна всюду, кроме, быть может, $x = 0$.

Покажем, что f не будет непрерывна в 0 ни при каком значении параметра y_0, т. е. f не имеет в 0 правого предела.

Определим последовательность x_n так, чтобы

$$\frac{1}{x_n} = n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что последовательность x_n стремится к 0, а $f(x_n) = (-1)^n$, и $f(x_n)$ не сходится; значит, функция f не имеет в 0 правого предела, и в частности, не может иметь правым пределом y_0 (определение предела через сходящиеся счетные последовательности).

2. Пусть $0 < x_1 < x_2 < \ldots < 1/\pi$ — разбиение интервала $[0, 1/\pi]$ на такие интервалы, на которых φ была бы постоянна. Функция f принимает на интервале $]0, x_1[$ все значения из интервала $[-1, 1]$; если обозначить через φ_1 значение φ на этом интервале, то

$$\sup |f(x) - \varphi(x)| = \max(|1 - \varphi_1|, |1 + \varphi_1|),$$

но

$$|1 - \varphi_1| + |1 + \varphi_1| \geqslant |(1 - \varphi_1) + (1 + \varphi_1)| = 2,$$

и стало быть,

$$\max(|1 - \varphi_1|, |1 + \varphi_1|) \geqslant 1.$$

Таким образом, не может оказаться, чтобы $|f(x) - \varphi(x)| < 1/2$ для всех значений из $]0, x_1[$, а значит, и для всех значений из $[0, 1/\pi]$.

В п. 1 было доказано, что f не имеет в 0 правого предела, и стало быть, эта функция не будет ярусной, т. е. найдется такое ε_0, при котором не существует ступенчатой функции φ, удовлетворяющей условию

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_0, \qquad \forall x \in [0, 1/\pi];$$

предыдущий результат и есть выражение этого факта при $\varepsilon_0 = 1/2$ (это есть отрицание свойства, которое используется для доказательства того, что функция f — ярусная; см. задачу 4.23, п. 3 или Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 5-й раздел, замечание в конце § 1).

4.27. Если $x \in]a, b]$, то f непрерывна на $[a, x]$ и дифференцируема на $]a, x[$, и значит, по теореме о конечных приращениях, существует такое c, что

$$a < c < x, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$

По определению предела, заданному $\varepsilon > 0$ соответствует такое α, что

$$a < u < \alpha \Rightarrow | f'(u) - l | < \varepsilon,$$

и значит, такое, что

$$a < x < \alpha \Rightarrow a < c < \alpha \Rightarrow | f'(c) - l | = \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| < \varepsilon,$$

т. е. l, по определению, есть предел отношения

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

когда x стремится к a справа.

Если производная f' имеет в a правый предел, то функция f дифференцируема в a справа, и ее правая производная равна правому пределу функции f', чем и объясняется обозначение $f'(a+0)$ для правой производной в a.

Пример. Функция $\sqrt{x}$ имеет конечную производную всюду, кроме 0, функция $\sin x$ дифференцируема, поэтому произведение дифференцируемо всюду, кроме, быть может, 0, и

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x.$$

Когда $x \to 0$,

$$\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \sim \frac{x}{2\sqrt{x}} \to 0 \quad \text{и} \quad f'(x) \to 0.$$

Функция f дифференцируема справа в 0 и $f'(+0) = 0$.

(Это видно и непосредственно:

$$\left.\frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0\right).$$

4.28. Функция f дифференцируема при $x \neq 0$, ибо функция x^2 дифференцируема, функция $\cos 1/x$ дифференцируема как композиция двух дифференцируемых функций,

$$f'(x) = 2x \cos\frac{1}{x} + x^2\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\right] = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}.$$

При $x \to 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x \cos\frac{1}{x} \to 0.$$

Функция f имеет в 0 нулевую производную и, значит, дифференцируема в каждой точке области определения.

Дифференцируемая функция f непрерывна, и стало быть, ярусна. Функция f' не будет ярусной; в самом деле, функция $2x\cos\frac{1}{x}$ ярусна (и даже непрерывна, если продолжить ее, задав ей в $x=0$ значение 0), и если бы f' была ярусной, разность $f' - 2x\cos 1/x$ была бы ярусной функцией, а мы видели (задача 4.26), что функция $\sin 1/x$ не является ярусной на $[0, 1/\pi]$.

4.29. 1. f — четная функция, всюду определенная и непрерывная, так как многочлен $x^4 - 2x^2 + 2$ принимает значения, превышающие 1. Функция f дифференцируема (как частное суперпозиций дифференцируемых функций) и

$$f'(x) = x\sqrt{2}\,(x^4 - 2x^2 + 2)^{-1/2} + \\ + \frac{x^2\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^4 - 2x^2 + 2)^{-3/2}(4x^3 - 4x) = \frac{x\sqrt{2}\,(2 - x^2)}{(x^4 - 2x^2 + 2)^{3/2}}.$$

$f'(x)$ имеет знак числителя, и мы можем охарактеризовать поведение функции.

Поскольку $f \sim x^2\sqrt{2}/2x^2$ при $x \to \pm\infty$, то $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ имеет предел $\sqrt{2}/2$; итак, для функции f имеем

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Сложная функция $g = \arcsin \circ f$ определена всюду, поскольку f принимает значения из интервала $[-1, 1]$; она будет четной; g изменяется в том же направлении, что и f, ибо $\arcsin$ — возрастающая функция; итак,

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
g	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$

2. 1) Если функции f и arcsin имеют в x конечные производные, то сложная функция g дифференцируема (кроме случая $f(x)=1$, т. е. кроме $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$), и

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}=\frac{x\sqrt{2}\,(2-x^2)}{(x^4-2x^2+2)^{3/2}}\sqrt{\frac{2(x^4-2x^2+1)}{(x^2-2)^2}}=$$
$$=\frac{2x\,(2-x^2)}{(x^4-2x^2+2)\,|\,x^2-2\,|}.$$

Окончательно:

$$g'(x)=\frac{-2x}{x^4-2x^2+2}\quad\text{при}\quad |\,x\,|>\sqrt{2},$$
$$g'(x)=\frac{2x}{x^4-2x^2+2}\quad\text{при}\quad |\,x\,|<\sqrt{2}.$$

2) Поскольку g — четная фуикция, достаточно провести исследование для значения $x=\sqrt{2}$ (рис. 13): когда $x\to\sqrt{2}+0$

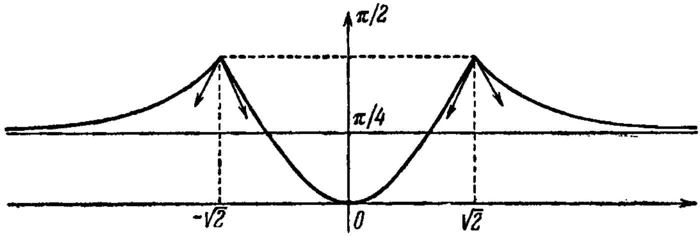

Рис. 13.

(т. е. справа), $g'(x)\to-\sqrt{2}$; когда $x\to\sqrt{2}-0$ (т. е. слева), $g'(x)\to\sqrt{2}$. Тогда, как известно (задача 4.27), g имеет в $\sqrt{2}$ правую и левую производные:

$$g'(\sqrt{2}+0)=-\sqrt{2},\qquad g'(\sqrt{2}-0)=\sqrt{2}.$$

Но в этой точке функция g недифференцируема, так как значения производных не совпадают (это есть пример максимума, не соответствующего нулевой производной).

График функции g, в силу четности g, симметричен относительно оси Oy; в точках с абсциссами $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ он имеет различные правые и левые полукасательные.

4.30. 1. f определена всюду, кроме $x=-1$, и в этих точках непрерывна и дифференцируема.

Когда $x\to-1$ справа (слева), $(1-x)/(1+x)$ стремится к $+\infty$ $(-\infty)$ и $\operatorname{arctg}(1-x)/(1+x)$ стремится к $+\pi/2$ $(-\pi/2)$; функция f имеет правый и левый предел:

$$f(-1-0)=-\frac{1}{2}-\pi,\qquad f(-1+0)=-\frac{1}{2}+\pi.$$

При $x \neq -1$ производная принимает значения

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+1)}{(x^2+1)^2} + 2\,\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{-2x(1+2x)}{(x^2+1)^2}.$$

Когда $x \to -1$, $f'(x)$ имеет предел $-\frac{1}{2}$; следовательно, функция f_1, равная f при $x > -1$ и $f(-1+0)$ при $x = -1$, имеет в $x = -1$ правую производную, равную $-\frac{1}{2}$; точно так же, функция f_2, равная f при $x < -1$ и $f(-1-0)$ при $x = -1$, имеет в $x = -1$ левую производную, равную $-\frac{1}{2}$ (результат задачи 4.27).

Производная $f'(x)$ имеет знак произведения $-x(1+2x)$; итак, можно охарактеризовать поведение функции f:

$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-\pi$ | $-\frac{1}{2}+\pi$	$\searrow$	$2\operatorname{arctg} 3$	$\nearrow$	$1+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

Приближенное значение $2\operatorname{arctg} 3$ равно 2,5.

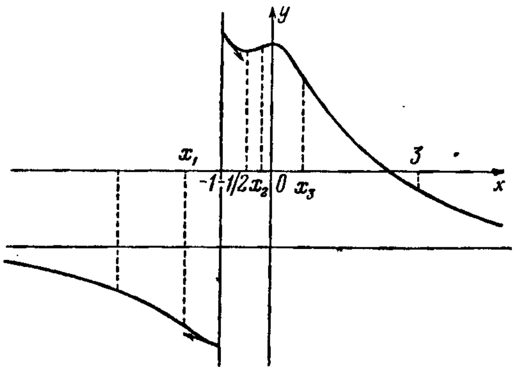

Рис. 14.

Построение графика не представляет труда (рис. 14); уже известно, что прямая $y = -\pi/2$ есть асимптота и что в точках с абсциссой -1 имеются правая и левая полукасательные с наклоном (угловым коэффициентом), равным $-\frac{1}{2}$.

График может быть уточнен (чего здесь не требуется) посредством изучения знака $f''(x)$ для определения выпуклости f:

$$f''(x) = 2\,\frac{4x^3+3x^2-4x-1}{(x^2+1)^2} = 2\,\frac{N(x)}{(x^2+1)^2},$$

$$N(-\infty) = -\infty, \quad N(-2) = -13, \quad N(-1) = 2, \quad N\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4},$$

$$N(0) = -1, \qquad N(1) = 2, \qquad N(+\infty) = +\infty.$$

N имеет 3 нуля: x_1, x_2 и x_3, которые удовлетворяют неравенствам

$$-2 < x_1 < -1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 0 < x_3 < 1.$$

График обращен выпуклостью вверх на интервалах $[x_1, -1[$, $]-1, x_2[$ и $[x_3, +\infty[$, и выпуклостью вниз на интервалах $]-\infty, x_1]$ и $[x_2, x_3]$.

И наконец, заметим, что между -1 и 0 график очень сплющен, так как максимумы функции f близки к 2,64 и 2,57, а минимум близок к 2,5.

2. Для $n = 2$ утверждение верно, так как

$$f'(x) = \frac{A_2(x)}{(x^2+1)^2},$$

где $A_2(x) = -2x(1+2x)$.

Допустим, что оно доказано для 2, 3, ..., n. Имеем

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{A_n(x)}{(x^2+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{A'_n(x)(x^2+1) - 2nxA_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}};$$

$f^{(n)}$ — рациональная дробь со знаменателем $(x^2+1)^{n+1}$ и числителем $A_{n+1} = (x^2+1)A'_n - 2nxA_n$; если старший член у A_n равен a_nx^n, то старший член у A_{n+1} равен

$$na_nx^{n+1} - 2na_nx^{n+1} = -na_nx^{n+1},$$

т. е. A_{n+1} имеет степень $n+1$.

Вопрос о нулях A_n исследуем также по индукции. A_2 имеет два различных действительных нуля: $-\frac{1}{2}$ и 0. Допустим, теперь, что A_n имеет n различных действительных нулей. Тогда производная $f^{(n-1)}$ имеет n нулей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и между двумя из них лежит хотя бы один нуль первой производной $f^{(n)}$ функции $f^{(n-1)}$ (теорема Ролля); кроме того, $f^{(n-1)}$ стремится к 0, когда $x \to \pm\infty$; между $-\infty$ и x_1 и между x_n и $+\infty$ имеется по крайней мере один экстремум функции $f^{(n-1)}$, а значит, и нуль производной $f^{(n)}$.

Итак, производная $f^{(n)}$ имеет по меньшей мере $n+1$ различных действительных нулей (по одному внутри каждого из интервалов последовательности $-\infty, x_1, x_2, \ldots, x_n, +\infty$); эти нули суть нули многочлена A_{n+1} степени $n+1$, который не может иметь других нулей; все эти нули действительны и различны.

4.31. 1. Так как 0 не может служить корнем предложенного уравнения, то оно может быть заменено уравнением

$$a^x x^{-\alpha} = 1.$$

Для исследования этого уравнения изучим поведение функции f, определенной равенством $f(x) = a^x x^{-\alpha}$, которая определена, непрерывна и дифференцируема для любого $x > 0$, и

$$f'(x) = x^{-\alpha} a^x \ln a - \alpha x^{-\alpha-1} a^x = a^x x^{-\alpha-1} (x \ln a - \alpha).$$

1) Если $\alpha \leqslant 0$, то производная $f'(x)$ положительна, и функция f возрастает от 0 до $+\infty$; стало быть, она принимает значение 1 один и только один раз.

2) Если $\alpha > 0$, то производная f' при $\alpha/(\ln a)$ обращается в нуль, и

$$x < \frac{\alpha}{\ln a} \Rightarrow f'(x) < 0, \qquad x > \frac{\alpha}{\ln a} \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Если $x \to 0$, то $a^x \to 1$ и $x^{-\alpha} \to +\infty$; $f(x)$ стремится к $+\infty$.

При $x \to +\infty$ произведение $a^x x^{-\alpha}$ есть неопределенность ($a^x \to +\infty$, а $x^{-\alpha} \to 0$); но мы знаем, что это произведение стремится к $+\infty$ (сравнение показательного и степенного роста см., например: Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 7-й раздел, конец § 6).

Отсюда получаем поведение функции f:

	0		$\frac{\alpha}{\ln a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

где

$$m = a^{\alpha/\ln a} \left(\frac{\alpha}{\ln a}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{e \ln a}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Функция f принимает значение 1 дважды или ни разу, в зависимости от того, будет ли $m < 1$ или $m > 1$. Итак:

$\alpha > 0$ и $\dfrac{e \ln a}{\alpha} < 1$ — два решения,

$\alpha > 0$ и $\dfrac{e \ln a}{\alpha} > 1$ — нет решений,

$\alpha > 0$ и $e \ln a = \alpha$ — одно двойное решение,

$\alpha \leqslant 0$ — одно решение.

2. Доказательство основано на свойстве возрастания показательной функции с основанием $a > 1$; действительно,

$$a^x = x \Rightarrow a^{(a^x)} = x,$$

$$a^x > x \Rightarrow a^{(a^x)} > a^x > x,$$

$$a^x < x \Rightarrow a^{(a^x)} < a^x < x.$$

Следовательно, для того чтобы $a^{(a^x)} = x$, необходимо, чтобы $a^x = x$; это условие и достаточно. Так как корни x этого уравнения — положительные числа, то можно применить результат п. 1. Итак, уравнение имеет два решения, если $e \ln a < 1$, и не имеет решений, если $e \ln a > 1$.

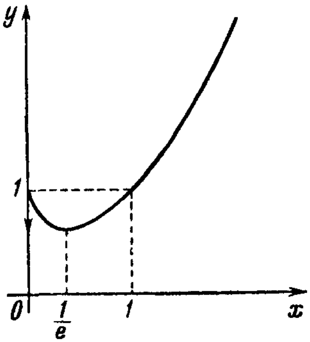

Рис. 15.

4.32. Известно, что $f(x) = e^{x \ln x}$. Функция f определена, непрерывна, дифференцируема для $x > 0$ и

$$f'(x) = e^{x \ln x}(1 + \ln x).$$

$f'(x)$ имеет знак величины $1 + \ln x$, а стало быть, знак величины $x - 1/e$. Итак, функция f ведет себя следующим образом (рис. 15):

$$x \to 0 \Rightarrow x \ln x \to 0 \Rightarrow f(x) \to 1,$$

$$x \to +\infty \Rightarrow x \ln x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty;$$

	0		$1/e$		1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Касательная в точке $(0, 1)$. При $x \to 0$

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} \simeq \frac{x \ln x}{x} \to -\infty$$

или

$$f'(x) = (1 + \ln x) f(x) \to -\infty.$$

Ось Oy служит касательной.

Бесконечная ветвь. При $x \to +\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = e^{(x-1)\ln x} \to +\infty;$$

Oy есть асимптотическое направление, но не асимптота.

4.33. 1. Система (S) равносильна следующей системе, полученной из (S) логарифмированием:

$$\begin{aligned}(x+y)\ln x &= n\ln y,\\ (x+y)\ln y &= m\ln x.\end{aligned} \tag{1}$$

Если одно из неизвестных равно 1, то другое тоже равно 1 (очевидное решение).

Если же x и y отличны от 1, то правая и левая части первого уравнения не обращаются в нуль. Образуем систему, равносильную системе (1), заменив второе уравнение уравнением, полученным в результате почленного умножения обоих уравнений (1):

$$\begin{aligned}(x+y)\ln x &= n\ln y,\\ (x+y)^2\ln x\ln y &= mn\ln x\ln y,\end{aligned} \tag{2}$$

а затем, разделив обе части второго уравнения на произведение $\ln x\ln y \neq 0$:

$$\begin{aligned}(x+y)\ln x &= n\ln y,\\ (x+y)^2 &= mn.\end{aligned} \tag{3}$$

Для того чтобы система (3) имела решения, необходимо, чтобы $mn>0$, что мы и будем теперь предполагать. Тогда в силу того, что $x+y>0$, система (3) равносильна системе

$$\begin{aligned}&x+y=\sqrt{mn},\\ &\ln y=\frac{m}{\sqrt{mn}}\ln x=\frac{m}{|m|}\sqrt{\frac{m}{n}}\ln x.\end{aligned} \tag{4}$$

2. Рассмотрим вначале случай $m>0$ (а значит, и $n>0$). Положим $\sqrt{mn}=p$ и $\sqrt{m/n}=q$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{aligned}\ln y&=q\ln x,\\ x+y&=p\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}y&=x^q,\\ x+x^q&=p.\end{aligned} \tag{5}$$

Соответствие $x\to x+x^q$ определяет функцию φ, возрастающую от 0 до $+\infty$; стало быть, функция φ принимает, и притом только один раз, значение p; система (5) имеет единственное решение, которое совпадает с очевидным при $p=2$ или $mn=4$.

3. Предположим теперь, что $m<0$ (а значит, и $n<0$); тогда, в обозначениях п. 2, система (4) приобретает вид

$$\begin{aligned}\ln y&=-q\ln x,\\ x+y&=p\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}y&=x^{-q},\\ x+x^{-q}&=p.\end{aligned} \tag{5'}$$

Чтобы получить число решений последней системы, изучим поведение функции

$$\psi(x)=x+x^{-q}.$$

ψ определена, непрерывна и дифференцируема при $x > 0$, и

$$\psi'(x) = 1 - qx^{-(q+1)}.$$

ψ' обращается в нуль при $x_0 = q^{1/(q+1)}$ и имеет знак разности $x - x_0$. Если теперь положить $p_0 = \psi(x_0) = q^{1/(q+1)} + q^{-q/(q+1)}$, то поведение функции ψ описывается таблицей

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & & x_0 & & +\infty \\ \hline \psi & +\infty & \searrow & p_0 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Если $p < p_0$, то система (5′) не имеет решений.

Если $p > p_0$, то система (5′) имеет два решения, но одно из них при $p = 2$, т. е. при $mn = 4$, будет очевидным.

Если $p = p_0$, то система (5′) имеет одно решение, которое может рассматриваться как двойное.

4.34. 1. Проведем доказательство индукцией по n. Для $n = 2$ это есть определение выпуклой функции. Допустим, что утверждение верно для целых чисел $\leqslant n - 1$, и запишем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + (1 - p_1) \sum_{i=2}^{n} \frac{p_i}{1 - p_1} x_i.$$

Имеем

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{p_i}{1 - p_1} = 1,$$

так как

$$\sum_{i=2}^{n} p_i = 1 - p_1.$$

Положим

$$y_1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{p_i}{1 - p_1} x_i.$$

Используя определение выпуклой функции, записываем

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = f\left[p_1 x_1 + (1 - p_1) y_1\right] \leqslant p_1 f(x_1) + (1 - p_1) f(y_1).$$

Но для суммы из $n - 1$ членов искомое утверждение верно, поэтому

$$f(y_1) = f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{p_i}{1 - p_1} x_i\right) \leqslant \sum_{i=2}^{n} \frac{p_i}{1 - p_1} f(x_i).$$

Комбинация этих неравенств дает

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant p_1 f(x_1) + (1-p_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{p_i}{1-p_i} f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

2. Известно, что

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Величина $x^{\alpha-2}$ положительна, поэтому производная имеет знак произведения $\alpha(\alpha-1)$. Таким образом, f'' при $\alpha > 1$ строго положительна, а f — строго выпукла (Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 6-й раздел, § 4, следствие из теоремы 2).

Выпишем формулу из п. 1, положив все p_i равными между собой, т. е. равными $1/n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\alpha},$$

а затем умножим обе части на n^{α}:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} \leqslant n^{\alpha-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right).$$

Мы пользовались формулой, установленной в первом пункте; анализ ее доказательства показывает, что для строго выпуклой функции наши неравенства будут строгими, кроме единственного случая, когда значения переменных x_1 и y_1 равны. Значит, необходимо, чтобы $x_1 = y_1$, и если предположить, что $x_1 = \min x_i$, то условие $x_1 = y_1$ влечет $x_i = x_1$ для всех значений i. Итак, равенство достигается в том и только том случае, когда все x_i между собой равны.

3. Доказывается индукцией по n.

1) Пусть $n = 2$. Исследуем поведение функции $\varphi(t) = (x_1 + t)^{\alpha} - t^{\alpha}$ при $t > 0$; эта функция непрерывна и дифференцируема и $\varphi'(t) = \alpha\left[(x_1+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right] > 0$, так как $x_1 \neq 0$. Функция φ строго возрастает; поэтому для $x_2 > 0$

$$\varphi(x_2) = (x_1 + x_2)^{\alpha} - x_2^{\alpha} > x_1^{\alpha} = \varphi(0).$$

2) Для перехода от $(n-1)$ к n воспользуемся предыдущим результатом:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^{\alpha} = \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_n\right]^{\alpha} > \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\alpha} + x_n^{\alpha}.$$

А поскольку для $n-1$ искомое неравенство предполагается верным, т. е.

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{\alpha} > \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha},$$

то, комбинируя оба неравенства, получаем требуемое.

4.35. 1. Указанное неравенство равносильно неравенству

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\alpha\frac{x}{y}+\beta-\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}\geqslant 0.$$

Функция f, определенная формулой $f(u)=\alpha u+\beta-u^{\alpha}$, для $u>0$, непрерывна и дифференцируема, а так как $0<\alpha=1-\beta<1$, то

$$f'(u)=\alpha(1-u^{\alpha-1}) \text{ имеет знак разности } u-1,$$
$$f(1)=\alpha+\beta-1=0.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & +\infty \\ \hline f & & \searrow \; 0 \; \nearrow & \end{array}$$

Функция принимает только неотрицательные значения, обращаясь в нуль в единственной точке $u=1$. (Для данной задачи нет необходимости искать пределы f при $u\to 0$ или $u\to+\infty$.)

Положив теперь $u=x/y$, получаем, что искомое неравенство справедливо и что равенство достигается лишь при $x=y$.

2. Указанные операции дают

$$x_i^{\alpha}y_i^{\beta}=\frac{a_ib_i}{a^{\alpha}b^{\beta}}\leqslant\alpha\frac{a_i^{1/\alpha}}{a}+\beta\frac{b_i^{1/\beta}}{b},$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant a^{\alpha}b^{\beta}\left[\frac{\alpha}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{1/\alpha}\right)+\frac{\beta}{b}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{1/\beta}\right)\right].$$

Если теперь положить

$$a=\sum_{i=1}^{n}a_i^{1/\alpha},\qquad b=\sum_{i=1}^{n}b_i^{1/\beta},$$

то выражение в скобках будет равно $\alpha+\beta=1$, и

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{1/\alpha}\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{1/\beta}\right)^{\beta}.$$

4.36. 1. Знаменатель функции φ не обращается в нуль на $]x_1, x_2]$, и φ непрерывна как частное непрерывных функций. А поскольку функция f дифференцируема (справа) в точке x_1, то φ имеет в x_1 (правый) предел, равный $f'(x_1)$. Если положить $\varphi(x_1)=f'(x_1)$, то φ, по определению, будет непрерывна в x_1, а значит, и на всем интервале $[x_1, x_2]$. То же самое будет и для ψ, если положить $\psi(x_2)=f'(x_2)$.

Непрерывная функция φ принимает в точках x_1, x_2 значения

$$\varphi(x_1)=f'(x_1)\quad\text{и}\quad\varphi(x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=r;$$

стало быть, она принимает хотя бы один раз все значения из интервала $[f'(x_1), r]$ (см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 2-й раздел, § 2, теорема 2). Точно так же, функция ψ принимает хотя бы один раз все значения из интервала $[r, f'(x_2)]$, поскольку $r=\psi(x_1)$ и $f'(x_2)=\psi(x_2)$. Значение m, заключенное между $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, принадлежит одному из двух интервалов $[f'(x_1), r]$, $[r, f'(x_2)]$; значит, это есть значение, принимаемое функцией φ или функцией ψ.

2. По условию, в $[a, b]$ найдутся такие числа x_1 и x_2, что $f'(x_1)=\alpha$ и $f'(x_2)=\beta$. Функция f удовлетворяет на $[x_1, x_2]$ условиям п. 1, поэтому любое значение m между α и β принимается одной из функций φ или ψ, скажем, φ; тогда в $[x_1, x_2]$ найдется такое x, что

$$m=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}.$$

Но на $[x_1, x]$ функция f непрерывна и дифференцируема, и значит, существует такое $c\in\,]x_1, x[$, что

$$m=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(c)$$

(теорема о конечных приращениях).

3. Если f выпукла, то ее производная f' возрастает. А так как f' принимает значения $f'(a)$ и $f'(b)$, то она принимает и все значения между ними (доказано в п. 2). Из этих двух свойств следует непрерывность производной f', если воспользоваться задачей 4.16.

4.37. 1. Будем предполагать $h>0$ (заменив в случае надобности h на $-h$). По условию, при $h\to 0$,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to f'(x_0+0),$$

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\to f'(x_0-0),$$

и значит (теорема о пределе суммы),

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]\to$$

$$\to\frac{1}{2}[f'(x_0+0)+f'(x_0-0).]$$

Функция f имеет симметрическую производную $f'_s(x_0)$, и

$$f'_s(x_0)=\frac{1}{2}[f'(x_0+0)+f'(x_0-0)].$$

2. Отношение

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела при $x \to 0$ (как справа, так и слева); стало быть, f не имеет в 0 ни правой, ни левой производной. Но f — четная функция, и поэтому она имеет в нуле нулевую симметрическую производную:

$$\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=0 \Rightarrow f'_s(0) \quad \text{существует и} \quad f'_s(0)=0.$$

3. Возьмем $h>0$; тогда, по условию,

$$f(x_0+h)-f(x_0-h) \geqslant 0,$$

$$f'_s(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \geqslant 0.$$

4. Проведем исследование, аналогичное проведенному в курсе для производной в обычном смысле. Имеем

$$\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0-h)}{2h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0-h)-g(x_0-h)}{2h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{2h}.$$

При $h\to 0$ каждое из отношений в правой части, по условию, имеет предел; поэтому сумма имеет предел и функция $f+g$ имеет в x_0 симметрическую производную, равную

$$(f+g)'_s(x_0)=f'_s(x_0)+g'_s(x_0)$$

(отметим, что для доказательства этого не требуется непрерывность f и g).

Для симметрической производной произведения воспользуемся тождеством:

$$(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0-h)=$$

$$=f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0-h)\,g(x_0-h)=$$

$$=f(x_0+h)[g(x_0+h)-g(x_0-h)]+g(x_0-h)[f(x_0+h)-f(x_0-h)],$$

а затем, разделив обе части на $2h$, получим

$$\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0-h)}{2h}=$$

$$=f(x_0+h)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0-h)}{2h}+g(x_0-h)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Когда $h\to 0$,

$$f(x_0+h)\to f(x_0), \qquad g(x_0-h)\to g(x_0)$$

(в силу непрерывности f и g), отношения имеют пределы $g'_s(x_0)$ и $f'_s(x_0)$; левая часть имеет, следовательно, предел, т. е. функция fg имеет симметрическую производную, равную

$$(fg)'_s(x_0)=f(x_0)\,g'_s(x_0)+g(x_0)\,f'_s(x_0).$$

4.38. 1. Множество E_λ непусто (содержит x_1), мажорируется значением x_2, и значит, имеет верхнюю грань ξ. По условию, $\varphi(x_1) > \lambda$, а поскольку φ непрерывна в x_1, то найдется интервал $[x_1, x_1+\eta[$, на котором $\varphi(x) > \lambda$; этот интервал содержится в E_λ, и следовательно, $\xi \geqslant x_1 + \eta > x_1$.

Точно так же, $\varphi(x_2) < \lambda$, и φ непрерывна в x_2; стало быть, найдется интервал $]x_2 - \eta', x_2]$, на котором $\varphi(x) < \lambda$; отсюда $\xi \leqslant x_2 - \eta' < x_2$.

Пусть $\xi \in]\alpha, \beta[$. По определению верхней грани, имеется хотя бы одно число $u \in E_\lambda$, $\alpha < u \leqslant \xi$. Кроме того, все числа $v \geqslant \xi$ не принадлежат E_λ и, значит, удовлетворяют неравенству $\varphi(v) \leqslant \lambda$.

Допустим, что $\varphi(\xi)$ не равно λ. Тогда найдется такой содержащий ξ интервал $]\alpha, \beta[$, на котором $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < |\varphi(\xi) - \lambda|$ (непрерывность φ в ξ). При этом условии разность $\varphi(x) - \lambda$ имеет тот же знак, что и разность $\varphi(\xi) - \lambda$, и функция φ принимает на $]\alpha, \beta[$ только меньшие, или только большие λ значения, что противоречит предыдущему.

Число ξ не принадлежит E_λ, так как $\varphi(\xi) = \lambda$. Но можно выбрать в E_λ бесконечную последовательность чисел u_i, имеющую пределом ξ; положим $u_i = \xi - h_i$. Числа $v_i = \xi + h_i$ будут больше ξ и не принадлежат E_λ. Имеем

$$\varphi(u_i) = \varphi(\xi - h_i) > \lambda, \qquad \varphi(v_i) = \varphi(\xi + h_i) \leqslant \lambda.$$

По условию, φ имеет в ξ симметрическую производную, и, по определению предела функции через последовательности, можем записать:

$$\varphi'_s(\xi) = \lim \frac{\varphi(\xi + h_i) - \varphi(\xi - h_i)}{2h_i} \leqslant 0.$$

2. Если f не возрастает, то в $[a, b]$ найдутся такие два числа x_1 и x_2, что

$$x_1 < x_2, \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

Сужение φ функции f на замкнутый интервал $[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям п. 1, откуда следует, что в $]x_1, x_2[$, а значит, и в $]a, b[$, существует число ξ, для которого

$$\varphi'_s(\xi) = f'_s(\xi) \leqslant 0,$$

что противоречит сделанному предположению.

3. Функция $kx - f$ имеет на $]a, b[$ строго положительную симметрическую производную $k - f'_s$. Действительно, симметрическая производная функция kx равна ее производной (задача 4.37, 1));

разность двух функций, имеющих симметрические производные, имеет симметрическую производную, равную разности двух симметрических производных (результат задачи 4.37 п. 4, несколько видоизмененный).

Для функции $kx - f$ выполняются условия п. 2, и поэтому она возрастает на $[a, b]$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow kx_1 - f(x_1) \leqslant kx_2 - f(x_2),$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leqslant k(x_2 - x_1).$$

Если симметрическая производная f'_s имеет на $]a, b[$ верхнюю грань M, то предыдущий результат может быть применен к любому числу $k > M$. Число $f(x_2) - f(x_1)$ есть миноранта множества чисел $k(x_2 - x_1)$, где $k > M$; стало быть, оно не превосходит нижней грани $M(x_2 - x_1)$ этого множества:

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1).$$

Аналогичным рассуждением получаем минорирование разности $f(x_2) - f(x_1)$ числом $m(x_2 - x_1)$, для чего рассматриваем функции $f(x) - hx$, где h — произвольное число, строго меньшее m.

Если $f'_s(x) \geqslant 0$, то нижняя грань m множества f'_s больше или равна 0, и полученное неравенство показывает, что

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2),$$

т. е. функция f возрастает.

Если f не является строго возрастающей, то найдутся по крайней мере две точки x_0 и x'_0, для которых

$$x_0 < x'_0 \quad \text{и} \quad f(x_0) = f(x'_0).$$

А поскольку функция f возрастает, то для любого $x \in [x_0, x'_0]$

$$x_0 \leqslant x \leqslant x'_0 \Rightarrow f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x'_0) = f(x_0).$$

Итак, f постоянна на $[x_0, x'_0]$ и имеет на этом интервале нулевую производную, равно как и нулевую симметрическую производную.

4.39. 1. На интервале $]0, \pi/2]$ функция f представляет собой частное двух непрерывных и дифференцируемых функций; знаменатель x не обращается в нуль; f непрерывна и дифференцируема и

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Исследование в точке 0 получается сразу, если взять формулу Тейлора — Маклорена второго порядка для синуса

$$\sin x = x + o(x^2) \Rightarrow f(x) = 1 + o(x).$$

(Остаток $\varphi_n(x) x^n/n!$ (в обозначениях Пизо и Заманского, Анализ, гл. III. 6-й раздел, § 6), по определению, есть $o(x^n)$, поскольку $\varphi_n(x)$ стремится к 0 вместе с x.)

При $x \to 0$, $f(x) \to 1$ и $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{o(x)}{x} \to 0$. Функция f непрерывна в 0 и имеет там нулевую производную. (Для вычисления производной в 0 можно было бы также найти предел производной $f'(x)$, применив формулу Тейлора для синуса и косинуса).

2. Производная $f'(x)$ имеет тот же знак, что и ее числитель

$$x\cos x - \sin x = \cos x\,(x - \operatorname{tg} x),$$

и значит, отрицательна на интервале $]0, \pi/2]$. Гранями убывающей функции f будут значения f в концах интервала:

$$1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}.$$

4.40. 1. По формуле Тейлора — Маклорена третьего порядка

$$\operatorname{arctg} x - \sin x = \left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] - \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] =$$
$$= -\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$
$$\operatorname{tg} x - \arcsin x = \left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] - \left[x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] = \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

при $x \to 0$ имеем

$$\frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} = \frac{-x^3/6 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{6} + o(1)} \to -1.$$

2. Знаменатель x функции f имеет порядок 1; значит, для нахождения предела функции f достаточно найти разложение первого порядка для $\ln(e^x - 1)/x$; для нахождения предела $\dfrac{e^x - 1}{x}$ надо использовать разложение второго порядка:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Композиция этого разложения и разложения (Пизо и Заманский, книга IV, гл. I, § 5)

$$\ln(1 + u) = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

дает следующее разложение для $\ln(e^x - 1)/x$:

$$\ln\left\{1 + \left[\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right]\right\} =$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2).$$

Итак, при $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} + o(x) \quad \text{имеет предел} \quad \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} + o(1) \quad \text{имеет предел} \quad \frac{1}{24}.$$

3. Две функции $\cos x$ и $(1+ax^2)/(1+bx^2)$ имеют в 1 одинаковые значения; можно заранее подобрать a и b так, чтобы два члена в разложении разности уничтожились. Для этого найдем четыре первых ненулевых члена разложения этих двух функций. Для косинуса имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6).$$

Многочлен, наименьшая степень членов которого строго больше n (при $x \to 0$), есть $o(x^n)$, и значит, деление по возрастающим степеням позволяет записать

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6),$$

$$g(x) = -\left[\frac{1}{2} + (a-b)\right]x^2 + \left[\frac{1}{24} + b(a-b)\right]x^4 - \\ - \left[\frac{1}{720} + b^2(a-b)\right]x^6 + o(x^6).$$

Возьмем

$$a - b = -\frac{1}{2}, \qquad b(a-b) = -\frac{1}{24};$$

тогда

$$b = \frac{1}{12}, \qquad a = -\frac{5}{12}, \qquad g(x) = \frac{3x^6}{1440} + o(x^6).$$

4. Положим $x = 1/t$, чтобы свести все к более простому случаю $t \to 0$:

$$H(t) = h\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{e} - (1+t)^{-1/t}\right].$$

Найдем разложение первого порядка выражения в скобках (поскольку порядок знаменателя t равен 1):

$$(1+t)^{-1/t} = e^{-(1/t)\ln(1+t)} = e^{-1+t/2+o(t)} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\cdot\frac{t}{2} + o(t).$$

Отсюда

$$H(t) = -\frac{1}{2e} + o(1) \to -\frac{1}{2e} \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

4.41. 1. По условию,

$$g = f + o(f) = f[1 + o(1)],$$
$$\ln g = \ln f + \ln[1 + o(1)] = \ln f + o(1).$$

А так как f имеет предел 0 или $+\infty$, то функция $|\ln f|$ при этих условиях имеет предел $+\infty$. Тогда функция $\varphi = \ln g - \ln f$, будучи $o(1)$, будет тем более $o(\ln f)$:

$$|\varphi(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon |\ln f|.$$

Следовательно, $\ln g = \ln f + o(\ln f)$, что и является определением эквивалентности функций.

2. При $x \to +\infty$

$$e^x - 1 \sim e^x \Rightarrow \ln(e^x - 1) \simeq \ln e^x = x.$$

Применим этот результат к

$$f(x)=\frac{1}{x}[\ln(e^x-1)-\ln x]=\frac{\ln(e^x-1)}{x}-\frac{\ln x}{x}.$$

При $x\to\infty$ имеем:

$$\frac{\ln(e^x-1)}{x}\simeq\frac{\ln e^x}{x}=1\Rightarrow\frac{\ln(e^x-1)}{x}\to 1.$$

$$\frac{\ln x}{x}\to 0 \text{ (сравнить возрастание } \ln x \text{ и } x^\alpha)$$

$$f(x)\to 1.$$

4.42. Здесь дважды применяется формула Тейлора третьего порядка для функции $\ln(1+x)$ и $(1+x)^{3/2}$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\frac{1}{(1+c)^3} \qquad (0<c<x)$$

$$(1+x)^{3/2}=1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{x^3}{16}(1+c)^{-3/2} \qquad (0<c<x).$$

А так как c положительно, то

$$1+c>1\Rightarrow 0<\frac{1}{(1+c)^3}<1 \quad \text{и} \quad 0<(1+c)^{-3/2}<1;$$

отсюда сразу же выводим

$$0<\frac{x^3}{3}(1+c)^3=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}<\frac{x^3}{3},$$

$$0>-\frac{x^3}{16}(1+c)^{-3/2}=(1+x)^{3/2}-\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2\right)>-\frac{x^3}{16}.$$

4.43. Рассмотрим

$$v_n=\ln u_n=\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{n^2}\right).$$

Формула Тейлора второго порядка в применении к $\ln(1+x)$ позволяет, как и в задаче 4.42, доказать, что если $x>0$, то

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,$$

и если записать эти неравенства для каждого члена суммы v_n, то получим

$$\frac{p}{n^2}-\frac{p^2}{n^4}<\ln\left(1+\frac{p}{n^2}\right)<\frac{p}{n^2},$$

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2}-\sum_{p=1}^{n}\frac{p^2}{n^4}<\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{n^2}\right)<\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2};$$

но

$$\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2},$$

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 < n \cdot n^2 \Rightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{n^4} < \frac{n^3}{n^4} \to 0.$$

Следовательно, v_n, минорированная и мажорированная последовательностями, сходящимися к $^1/_2$, сходится к $^1/_2$, и $u_n = e^{v_n}$ имеет предел $e^{1/2} = \sqrt{e}$.

4.44. 1. Функции g и h непрерывны и бесконечно дифференцируемы как композиции непрерывных и бесконечно дифференцируемых функций. Производные первого и второго порядка имеют вид

$$g'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \qquad g''(x) = \frac{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}},$$

$$h'(x) = -\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}}, \qquad h''(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{-x} - \sqrt{-x}\operatorname{ch}\sqrt{-x}}{4x\sqrt{-x}}.$$

2. При $x > 0$ функция f совпадает с g; следовательно, она, как и g, непрерывна и дважды дифференцируема, и легко видеть, что

$$4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4xg''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0.$$

Аналогичное рассуждение повторяется для $x < 0$, где f совпадает с h. Стало быть, достаточно исследовать f на непрерывность и дифференцируемость в 0, исследуя отдельно правый и левый предел.

Непрерывность очевидна:

$$f(+0) = g(+0) = 1, \qquad f(-0) = h(-0) = 1.$$

Разложив $\sin\sqrt{x}$ и $\operatorname{sh}\sqrt{-x}$ по степеням $|x|^{1/2}$, получим

$$\sin(|x|^{1/2}) = |x|^{1/2} - \frac{1}{6}|x|^{3/2} + o(|x|^{3/2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{|x|}{12} + o(|x|),$$

$$\operatorname{sh}(|x|^{1/2}) = |x|^{1/2} + \frac{1}{6}|x|^{3/2} + o(|x|^{3/2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{|x|}{12} + o(|x|).$$

Если $x \to 0$ справа, то $f'(x) = g'(x)$ стремится $-\frac{1}{2}$; значит, f имеет правую производную $f'(+0)$, равную $-\frac{1}{2}$ (см. задачу 4.27).

Точно так же, $f'(x)=h'(x)$ стремится к $-\frac{1}{2}$, когда $x\to 0$ слева; функция f имеет левую производную $f'(-0)=-\frac{1}{2}$. Эти производные равны, поэтому f дифференцируема и $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

Если $x\to 0$ справа, то

$$\frac{f'(x)+\frac{1}{2}}{x}=\frac{g'(x)+\frac{1}{2}}{x}=\left[\frac{1}{12}\frac{|x|}{x}+\frac{o(|x|)}{x}\right] \text{ стремится к } \frac{1}{12},$$

а если $x\to 0$ слева, то

$$\frac{f'(x)+\frac{1}{2}}{x}=\frac{h'(x)+\frac{1}{2}}{x}=\left[-\frac{1}{12}\frac{|x|}{x}+\frac{o(|x|)}{x}\right] \text{ стремится к } \frac{1}{12},$$

чем доказано, что сама производная f' дифференцируема в $x=0$ и имеет производную $f''(0)={}^1/_{12}$ (можно было бы также показать, что g'' и h'' имеют в 0 пределы).

Наконец, положив $x=0$, получим

$$4xf''(x)+2f'(x)+f(x)=0+2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0.$$

4.45. 1. 1) При $x\to 0$ справа $x\ln x\to 0 \Rightarrow f(x)\to 0\Rightarrow f$ непрерывна в 0, если $f(0)=0$, и тогда $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\ln x}{x^2-1}\to+\infty\Rightarrow f$ дифференцируема в 0, и $f'(+0)=+\infty$.

2) При $x\to 1$ $u=x-1$ стремится к 0, и

$$f(x)=f(1+u)=\frac{1+u}{2+u}\cdot\frac{\ln(1+u)}{u}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{u}{4}+o(u)\right]\left[1-\frac{u}{2}+o(u)\right]=\frac{1}{2}+o(u)=\frac{1}{2}+o[(x-1)].$$

Следовательно, $f(x)$ имеет предел $^1/_2$ при $x\to 1$, и если положить $f(1)={}^1/_2$, то f будет непрерывна. Кроме того,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{o(x-1)}{x-1}.$$

Функция f дифференцируема в точке $x=1$ и имеет нулевую производную.

Для значений x из интервалов $]0, 1[$ и $]1, +\infty[$ функция f непрерывна и дифференцируема как частное непрерывных и дифференцируемых функций со знаменателем, отличным от нуля:

$$f'(x)=\frac{(1+\ln x)(x^2-1)-2x^2\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-(x^2+1)\ln x}{(x^2-1)^2}.$$

2. Для нахождения знака производной преобразуем числитель:

$$x^2-1-(x^2+1)\ln x=(x^2+1)\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}-\ln x\right]=(x^2+1)\,g(x).$$

Производная имеет тот же знак, что и числитель, т. е. тот же знак, что и $g(x)$, и значит, нужно исследовать знак $g(x)$.

g непрерывна и дифференцируема при $x \geqslant 0$ и

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - (x^2+1)^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2} \leqslant 0;$$

g убывает и $g(1) = 0$; $g(x)$ имеет тот же знак, что $1 - x$.

Тогда для завершения исследования поведения функции f найдем ее предел при $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \simeq \frac{x \ln x}{x^2} \to 0;$$

получаем следующую таблицу поведения f:

	0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Для построения графика функции f (рис. 16) имеются такие элементы:

касательная Oy в начале координат,

горизонтальная касательная в точке с абсциссой 1,

асимптота Ox.

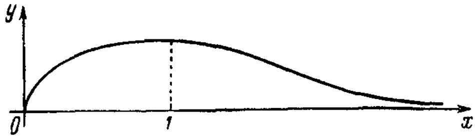

Рис. 16.

4.46. 1. Для $x \neq 0$ классические теоремы о сложных функциях и о частном двух функций позволяют утверждать, что f непрерывна, дифференцируема и

$$f'(x) = \frac{1 + e^{1/x}(1 + 1/x)}{(1 + e^{1/x})^2}.$$

Неравенство $|f(x)| < |x|$ влечет непрерывность f в точке $x = 0$;

$x \to 0$ справа $\Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow e^{1/x} \to +\infty \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \to 0$,

f дифференцируема справа в 0 и $f'(+0) = 0$,

$x \to 0$ слева $\Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \to 1$,

f дифференцируема слева в 0 и $f'(-0) = 1$.

2. Знак производной $f'(x)$ совпадает со знаком числителя:

$$N(x) = 1 + e^{1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Функция N непрерывна и дифференцируема всюду, кроме $x = 0$, и

$$N'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} \frac{2x+1}{x}.$$

$N'(x)$ имеет знак выражения $-x(2x+1)$, и мы можем охарактеризовать поведение N:

$$\begin{array}{c|ccccc|cc} & -\infty & & -\frac{1}{2} & & 0 & & +\infty \\ \hline N & & \searrow & 1-e^{-2} & \nearrow & & \searrow & 2 \end{array}$$

На интервалах $]-\infty, 0[$ и $]0, +\infty[$, где N непрерывна, ее минимумы $1-e^{-2}$ и 2 будут >0; значит, $N(x)$ строго положительна при любом x.

Функция f непрерывна на интервалах $]-\infty, 0[$ и $]0, +\infty[$ и дифференцируема внутри этих интервалов, причем f' положительна; следовательно, функция f возрастает на интервалах $]-\infty, 0]$ и $[0, +\infty[$, т. е. возрастает на R (интервалы имеют общую точку 0).

3. Когда $x \to \pm\infty$, $1/x$ стремится к 0, и

$$1+e^{1/x} = 2+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right) =$$
$$= 2\left[1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].$$

Отсюда получаем разложение обратной величины (Пизо и Заманский, книга IV, гл. I, § 6):

$$\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}\right)^2-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{12x^3}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{24x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{48x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

(Можно было бы также разделить по возрастающим степеням 1 на многочлен $2+u+u^2/2+u^3/6$).

Итак, разложение для f имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Прямая $y = x/2 - 1/4$ является асимптотой графика функции f (рис. 17) и лежит ниже графика, поскольку разность

$$f(x)-y = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{48}+o(1)\right]$$

положительна для достаточно малых положительных значений $1/x$

Значения правой и левой производной в точке 0 (а именно, $f'(+0)=0$ и $f'(-0)=1$) дают значения угловых коэффициентов полукасательных к графику.

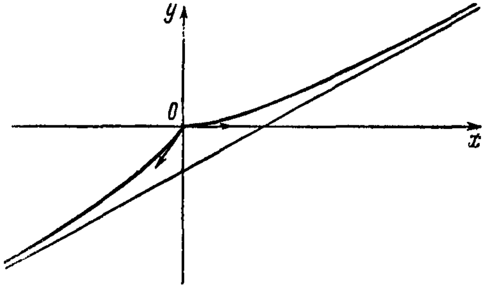

Рис. 17.

4.47. 1. В данном случае в формуле Маклорена отличен от нуля только один остаточный член и, следовательно,

$$|f(x)|=\left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)\right|\leqslant\frac{|x|^n}{n!}n!k^n=(k|x|)^n.$$

Если $k|x|<1$, т. е. $|x|<1/k$, то последовательность $(k|x|)^n$ имеет предел 0, и стало быть, $f(x)=0$; непрерывность функции f позволяет распространить этот результат на $x=\pm 1/k$; следовательно,

$$-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant\frac{1}{k}\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow f^{(n)}(x)=0.$$

Если $[a, b]$ содержится в $[-1/k, 1/k]$, то все доказано.

В противном же случае записываем формулу Тейлора для точки $1/k$; тогда предыдущее рассуждение показывает, что на отрезке $[0, 2/k]$ функция f и ее производные равны нулю. Проделывая то же самое для $2/k, 3/k, \ldots$, или для $-1/k, -2/k, \ldots$, получаем последовательно все числа из $[a, b]$.

2. Рассматриваемая функция является суперпозицией функции $-1/x^2$ и показательной функции; следовательно, она дифференцируема всюду, кроме, быть может, $x=0$ и

$$g'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}=G_1\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

Покажем индукцией по n, что g имеет n-ю производную указанного вида. Для $n=1$ это доказано. Предположим, что это верно для производных порядка не выше n; в частности,

$$g^{(n)}(x)=G_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

Функция $g^{(n)}$ снова дифференцируема при $x\neq 0$ и имеет производную

$$g^{(n+1)}(x)=\left[-\frac{1}{x^2}G'_n\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}G_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-1/x^2}=G_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

где G_n' — производная многочлена G_n; значит, G_{n+1} есть многочлен степени $3(n+1)$.

Если $x \to 0$, то $1/x^2$ стремится к $+\infty$; при этих условиях для любого показателя k произведение

$$\frac{1}{x^k} e^{-1/x^2}$$

имеет пределом 0 (если положить $1/x^2 = u$, то все сводится к тому, что $u^{k/2}e^{-u}$ имеет пределом 0 при $u \to +\infty$); стало быть, произведение $G_n(1/x)e^{-1/x^2}$ тоже имеет предел 0.

Теперь индукцией по n покажем, что $g^{(n)}(0)$ существует и равно 0. Допустим, что это верно для производных порядка $1, 2, \ldots, (n-1)$ и составим отношение

$$\frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(0)}{x} = \frac{g^{(n-1)}(x)}{x}.$$

$g^{(n-1)}(x)/x$ есть сумма членов вида

$$\frac{1}{x^k} e^{-1/x^2}$$

и имеет предел 0 при $x \to 0$; значит, функция $g^{(n-1)}$ дифференцируема в $x = 0$ и ее производная равна нулю.

(Можно было бы также воспользоваться результатом задачи 4.27, т. е. что $g^{(n-1)}$ непрерывна в 0, поскольку $g^{(n-1)}(x)$ имеет предел $0 = g^{(n-1)}(0)$ и ее производная $g^{(n)}(x)$ имеет предел 0 при $x \to 0$.)

Итак, функция g бесконечно дифференцируема для всех действительных значений, все ее производные в 0 равны нулю, и однако, эта функция отлична от нулевой.

4.48. 1. Для того чтобы можно было применить результаты задачи 4.10, необходимо показать, что все члены последовательности принадлежат $[a, b]$.

По теореме о конечных приращениях

$$x_0 - f(a) = f(x_0) - f(a) = (x_0 - a) f'(c) \qquad (a < c < x_0),$$
$$0 \leqslant f'(c) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x_0 - f(a) \leqslant x_0 - a \Rightarrow a \leqslant f(a) \leqslant x_0.$$

Точно так же показывается, что $x_0 \leqslant f(b) \leqslant b$.

Функция f возрастает, поэтому $f([a, b])$ представляет собой замкнутый интервал $[f(a), f(b)]$, содержащийся в $[a, b]$. Отсюда выводим:

индукцией по n — что $u_n \in [a, b]$ при любом n,

применением результата задачи 4.10 п. 1 — что последовательность u_n — монотонная и ее предел есть число из $[a, b]$, являющееся решением уравнения $x = f(x)$. По условию, это уравнение имеет в $[a, b]$ единственный корень x_0; стало быть, предел последовательности u_n равен x_0.

2. Допустим, что $u_0 < u_1$ (в противном случае достаточно изменить знаки неравенств).

u_0 и u_1 принадлежат $[a, b]$ по условию; следовательно, по теореме о конечных приращениях,

$$u_1 - u_2 = f(u_0) - f(u_1) = (u_0 - u_1) f'(c) \qquad (u_0 < c < u_1),$$
$$-1 \leqslant f'(c) \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant u_1 - u_2 \leqslant u_1 - u_0 \Rightarrow u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_1.$$

Функция f убывает; значит, $f([u_0, u_1])$ есть интервал $[f(u_0), f(u_1)]$ или $[u_2, u_1]$, содержащийся в $[u_0, u_1]$; таким образом, функция $f \circ f$, определенная на $[u_0, u_1]$, непрерывна и дифференцируема:

$$(f \circ f)'(x) = f'[f(x)] f'(x).$$

На $[u_0, u_1]$ (и, в частности, в точках x и $f(x)$) производная f' принимает значения, заключенные между -1 и 0, и следовательно,

$$0 \leqslant (f \circ f)'(x) \leqslant 1, \qquad \forall x \in [u_0, u_1].$$

Функция $f \circ f$ удовлетворяет условиям п. 1, поэтому результаты п. 1 применимы к последовательностям

$$v_0 = u_0, \quad v_n = (f \circ f)(v_{n-1}), \quad \text{т. е.} \quad v_n = u_{2n};$$
$$w_0 = u_1, \quad w_n = (f \circ f)(w_{n-1}), \quad \text{т. е.} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

Члены v_n и w_n принадлежат $[a, b]$, а значит, и все u_n принадлежат $[a, b]$; последовательности v_n и w_n монотонны, сходятся, и их пределы v и w являются корнями уравнения $x = (f \circ f)(x)$.

Функция $\varphi = x - f \circ f$, имеющая положительную производную, возрастает; при этом, если она не является строго положительной, то она постоянна на некотором интервале $[\alpha, \beta]$:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \quad \text{и} \quad \alpha < x < \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(\beta) = \varphi(\alpha).$$

Ее производная на этом отрезке равна 0, и

$$f'[f(x)] \cdot f'(x) = 1.$$

Каждое из двух чисел по абсолютной величине не превосходит 1, и значит, их произведение может равняться 1 лишь в том случае, если каждое из них равно -1.

Строго возрастающая функция φ не может иметь на $[u_0, u_1]$ более одного нуля, а поскольку x_0 является нулем, то других нулей нет. Обе последовательности v_n и w_n имеют предел x_0, а стало быть, и u_n тоже имеет предел x_0.

Кроме того, если $u_0 < u_1$, то последовательность u_{2n} возрастает, так как $u_0 < u_2$, а последовательность u_{2n+1} убывает; предел x_0 заключен между двумя последовательными членами. (Если $u_0 > u_1$, то результат аналогичен, но последовательность u_{2n} убывает, а u_{2n+1} возрастает.)

3. Допустим, что $|f'(x)| \geqslant 1$ на $[\alpha, \beta]$ (где $\alpha < x_0 < \beta$). Если последовательность u_n имеет предел x_0, то найдется такое целое N, что

$$n > N \Rightarrow \alpha < u_n < \beta,$$

$$u_{n+1} - x_0 = f(u_n) - f(x_0) = (u_n - x_0) f'(c) \Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \geqslant |u_n - x_0|.$$

Таким образом, последовательность u_n не сходится к x_0, так что допущение было неверно. (Очевидное исключение составляет $x_0 = u_0 = u_1 = \ldots = u_n = \ldots$)

4. Применим снова теорему о конечных приращениях:

$$u_n - x_0 = f(u_{n-1}) - f(x_0) = (u_{n-1} - x_0) f'(c) \Rightarrow |u_n - x_0| \leqslant k |u_{n-1} - x_0|,$$

и далее индукцией по n получим

$$|u_n - x_0| \leqslant k^n |u_0 - x_0| \leqslant k^n (b - a).$$

5. Необходимо принять во внимание, что производная синуса равна косинусу, только когда x является радианной мерой дуги, но не в иных случаях; и, таким образом,

$$[\sin_{400} x]' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{200} x\right)\right]' = \frac{\pi}{200} \cos\left(\frac{\pi}{200} x\right) = \frac{\pi}{200} \cos_{400} x.$$

Функция $x - 32\sin_{400} x$ определена и непрерывна для всех x и имеет производную

$$1 - 32\frac{\pi}{200} \cos_{400} x > 0.$$

Она строго возрастает и принимает значение 80 только один раз:

$$x = 100 \Rightarrow x - 32 \sin_{400} x = 100 - 32 < 80,$$

$$x = \frac{400}{3} \Rightarrow x - 32 \sin_{400} x = \frac{400}{3} - 32 \frac{\sqrt{3}}{2} > 80.$$

Корень x_0 уравнения заключен между 100 и 400/3. На этом интервале производная функции

$$x \to 32 \sin_{400} x + 80,$$

равная

$$\frac{32\pi}{200} \cos_{400} x,$$

заключена между —1 и 0; корень x_0 есть предел возвратной последовательности u_n и заключен между двумя ее последовательными членами. Практически проще находить не последовательность u_n, а последовательность v_n вида $v_n = f(v'_{n-1})$, где v'_{n-1} есть приближенное значение для v_{n-1}:

$v_0 = 100,$

$v_1 = 32 + 80 = 112,$

$v_2 = 32 \sin 112 + 80 = 111{,}43$ с недостатком,

$v_3 = 32 \sin 111{,}43 + 80 = 111{,}49$ с избытком,

$v_4 = 32 \sin 111{,}49 + 80 = 111{,}480$ с недостатком.

Члены v_2 и v_4, минорирующие x_0, берутся с недостатком, и значит, приближенные значения тем более минорируют x_0; член v_3, мажорирующий x_0, берется с избытком, чтобы приближенное значение мажорировало x_0.

Корень x_0 заключен между 111,480 и 111,49. На этом интервале

$$|f'(x)| = \frac{32\pi}{200}|\cos_{400} x| < 0,1,$$

$$|v_4 - x_0| < 0,1\,(111,49 - x_0) < 0,1\,(111,49 - 111,480) = 10^{-3};$$

следовательно, v_4 есть миноранта значения x_0, заключенная между v_4 и $v_4 + 10^{-3}$, т. е.

$$111,480 < v_4 \leqslant 111,481 \Rightarrow 111,480 \leqslant x_0 \leqslant 111,482;$$

$$x_0 = 111,481 \quad \text{с точностью до } 10^{-3}.$$

4.49. 1. Если $f''(x_0) > 0$, то в окрестности $]\alpha, \beta[$ точки x_0 непрерывная функция f'' положительна, а функция f' строго возрастает; в этой окрестности

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 1, \qquad x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 1.$$

Возьмем в качестве u_0 число из $]\alpha, x_0[$, столь близкое к x_0, чтобы производная f' была положительна на отрезке $[u_0, x_0]$. На этом отрезке:

производная f' удовлетворяет двойному неравенству $0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$,

функция $x - f$, имеющая производную $1 - f'$, строго положительную на $]u_0, x_0[$, строго возрастает и обращается в нуль в единственной точке x_0.

Условия п. 1 задачи 4.48 выполнены, а тогда, как мы уже знаем, последовательность u_n возрастает и имеет предел x_0.

Допустим, что $x_0 < u_0 < \beta$. Тогда

$$u_1 - x_0 = f(u_0) - f(x_0) = (u_0 - x_0) f'(c) > u_0 - x_0,$$

и, как показывает индукция по n, для $u_n < \beta$

$$u_{n+1} - u_n \geqslant u_n - u_{n-1} \geqslant \ldots$$
$$\ldots \geqslant u_1 - u_0 \Rightarrow u_{n+1} - u_0 \geqslant (n+1)(u_1 - u_0).$$

Таким образом, в $]x_0, \beta[$ имеется лишь конечное число членов последовательности; а поскольку вне $[a, b]$ как относительно функции f, так и ее производной не делалось никаких предположений, то изучение последовательности не может быть осуществлено.

Если $f''(x_0) < 0$, то последовательность u_n имеет предел x_0 при $u_0 > x_0$; если же $u_0 < x_0$, то начиная с некоторого номера, исследование невозможно.

2. Допустим, что $f'''(x_0) \neq 0$; тогда найдется такая окрестность $]\alpha, \beta[$ точки x_0, в которой $f'''(x)f'''(x_0) > 0$. Тогда на этом интервале поведение f'' и f' определяется знаком f''':

	α	x_0	β
f'''		$-$	
f''	$+\searrow$	0	$-\searrow$
f'	$\nearrow$	1	$\searrow$

	α	x_0	β
f'''		$+$	
f''	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
f'	$\searrow$	1	$\nearrow$

Если $f'''(x_0) > 0$, то нижняя грань функции f' на $[\alpha, \beta]$ равна 1, и значит, последовательность u_n не может сходиться к x_0 (задача 4.48, п. 3).

Если $f'''(x_0) < 0$, то найдется интервал $]\alpha_1, \beta_1[\subset]\alpha, \beta[$, на котором f' положительна. На этом интервале

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant 1,$$

и строго возрастающая функция $x - f$ обращается в нуль в единственной точке x_0.

Возвратная последовательность u_n монотонна и сходится к x_0.

3. Сложная функция $F = f \circ f$ имеет непрерывные производные до 3-го порядка включительно, и

$$F'(x) = (f' \circ f)(x) f'(x),$$
$$F''(x) = (f'' \circ f)(x) [f'(x)]^2 + (f' \circ f)(x) f''(x),$$
$$F'''(x) = (f''' \circ f)(x) [f'(x)]^3 + 3 (f'' \circ f)(x) f'(x) f''(x) + (f' \circ f)(x) f'''(x).$$

В x_0 эти производные имеют значения:

$$F'(x_0) = 1, \qquad F''(x_0) = 0, \qquad F'''(x_0) = -3 [f''(x_0)]^2 - 2f'''(x_0).$$

Рассмотрим возвратные последовательности, соответствующие функции $f \circ f = F$:

$$v_n = (f \circ f)(v_{n-1}), \qquad v_0 = u_0 \Rightarrow v_n = u_{2n},$$
$$w_n = (f \circ f)(w_{n-1}), \qquad w_0 = u_1 \Rightarrow w_n = u_{2n+1}.$$

Точки u_0 и u_1 лежат по разные стороны от x_0, поскольку $f'(x)$ отрицательна; но расположение их по отношению к x_0 не играет в данном случае никакой роли, так как $F''(x_0) = 0$. Таким образом,

$$F'''(x_0) = -3 [f''(x_0)]^2 - 2f'''(x_0) < 0 \Rightarrow v_n \to x_0 \quad \text{и} \quad w_n \to x_0;$$

последовательность u_n сходится к x_0;

$$F'''(x_0) = -3 [f''(x_0)]^2 - 2f'''(x_0) > 0 \Rightarrow v_n \not\to x_0 \quad \text{и} \quad w_n \not\to x_0;$$

последовательность u_n тем более не сходится к x_0.

4. Применив формулу Тейлора, получаем

$$f(x)-f(x_1)=(x-x_1)f'(x_1)\left[1+(x-x_1)\frac{f''(x_1)}{2f'(x_1)}+o(x-x_1)\right],$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_1)}=\frac{1}{(x-x_1)f'(x_1)}\left[1-(x-x_1)\frac{f''(x_1)}{2f'(x_1)}+o(x-x_1)\right],$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_1)}-\frac{1}{(x-x_1)f'(x_1)}=-\frac{f''(x_1)}{2[f'(x_1)]^2}+o(1).$$

Следовательно, искомый предел равен

$$-\frac{1}{2}\frac{f''(x_1)}{[f'(x_1)]^2}.$$

Предел возвратной последовательности u_n равен x_0; применив предыдущий результат к $x_1=x_0$, $x=u_{n-1}$ и $f(x)=u_n$, получаем

$$\lim\left(\frac{1}{u_n-x_0}-\frac{1}{u_{n-1}-x_0}\right)=-\frac{1}{2}f''(x_0);$$

тогда, как известно (задача 4.13),

$$\lim\frac{1}{n(u_n-x_0)}=-\frac{1}{2}f''(x_0)\quad\text{или}\quad u_n-x_0\simeq\frac{-2}{nf''(x_0)},$$

что дает результат даже более точный, чем требуется.

Ясно, что этот способ не годится для вычисления, ибо если $f''(x_0)=1$, то вычисление первых 2000 членов последовательности дает точность всего лишь порядка 10^{-3}.

5. Тем же способом, что и в п. 4, получаем

$$f(x)-f(x_1)=(x-x_1)f'(x_1)\left\{1+\frac{(x-x_1)^2}{6}\frac{f'''(x_1)}{f'(x_1)}+o[(x-x_1)^2]\right\},$$

$$\frac{1}{f(x)-f(x_1)}=\frac{1}{(x-x_1)f'(x_1)}\left\{1-\frac{(x-x_1)^2}{6}\frac{f'''(x_1)}{f'(x_1)}+o[(x-x_1)^2]\right\},$$

$$\frac{1}{[f(x)-f(x_1)]^2}=\frac{1}{[(x-x)f'(x_1)]^2}\left\{1-2\frac{(x-x_1)^2}{6}\frac{f'''(x_1)}{f'(x_1)}+\right.$$

$$\left.+o[(x-x_1)^2]\right\}=\frac{1}{[(x-x_1)f'(x_1)]^2}-\frac{f'''(x_1)}{3[f'(x_1)]^3}+o(1).$$

Таким образом, искомый предел равен

$$-\frac{f'''(x_1)}{3[f'(x_1)]^3}.$$

Если положить $x_1=x_0$, $x=u_{n-1}$ и $f(x)=u_n$, то

$$\lim\left[\frac{1}{(u_n-x_0)^2}-\frac{1}{(u_{n-1}-x_0)^2}\right]=-\frac{1}{3}f'''(x_0),$$

$$\lim\frac{1}{n(u_n-x_0)^2}=-\frac{1}{3}f'''(x_0),\qquad |u_n-x_0|\simeq\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{-3}{f'''(x_0)}}.$$

6. Если $f'(x_0)=-1$, то предыдущие результаты могут быть применены к введенным в п. 3 последовательностям v_n и w_n,

которые сходятся к x_0, если $3[f''(x_0)]^2+2f'''(x_0)>0$; действительно, эти последовательности определены при помощи функции $F=f\circ f$ и, как известно,

$$F'(x_0)=1,\quad F''(x_0)=0,\quad F'''(x_0)=-3[f''(x_0)]^2-2f'''(x).$$

Значит, выполняются условия п. 5 и, следовательно,

$$|u_{2n}-x_0|=|v_n-x_0|\simeq\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{3}{3[f''(x_0)]^2+2f'''(x_0)}},$$

$$|u_{2n+1}-x_0|=|w_n-x_0|\simeq\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{3}{3[f''(x_0)]^2+2f'''(x_0)}};$$

отсюда

$$|u_n-x_0|\simeq\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{6}{3[f''(x_0)]^2+2f'''(x_0)}}.$$

4.50. 1. Доказываем индукцией по n.

Для $n=1$ это есть теорема Ролля.

Допустим, что утверждение верно для $n\leqslant k-1$. Пусть

$$u_1<u_2<\ \ldots\ <u_{k+1}$$

суть нули функции φ на интервале $[a, b]$. Производная φ' имеет на каждом из k интервалов $]u_i, u_{i+1}[$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ хотя бы один нуль v_i, и все эти нули различны, поскольку интервалы $]u_i, u_{i+1}[$ попарно не пересекаются. Функция φ' имеет на $[a, b]$ по крайней мере k различных нулей и дифференцируема на всем интервале $[a, b]$ до $k-1$-го порядка включительно; ее производная $k-1$-го порядка, т. е. $\varphi^{(k)}$, имеет на $]a, b[$ хотя бы один нуль (это есть предположение индукции для $n=k-1$).

2. Допустим, что x не является ни одним из значений x_i (в противном случае равенство выполняется при любом c, так как обе части равны нулю). Функция φ обращается в нуль в x_i при любом C; найдем такое C, при котором она обращается в нуль еще и в x:

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow C=\frac{f(x)-A(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}.$$

Тогда φ обращается в нуль по крайней мере в $n+1$ точке из $[a, b]$, а ее n-я производная обращается в нуль хотя бы в одной точке из $]a, b[$, например, c (в силу 1)):

$$\varphi^{(n)}(c)=f^{(n)}(c)-A^{(n)}(c)-n!C=0.$$

Многочлен A степени $\leqslant n-1$ имеет n-ю производную, равную нулю. Итак,

$$\varphi(x)=0 \quad\text{и}\quad C=f^{(n)}(c)/n!$$

дают ответ на вопрос.

3. Применим предыдущий результат, рассмотрев функцию $f(x)=\log_a(p+x)-\log_a p$ при условии, что многочлен A

принимает в $x_1 = 0$ и в $x_2 = 1$ то же значение, что и f, т. е. A есть многочлен $x[\log_a(p+1) - \log_a p]$.

Тогда, как мы знаем, найдется такое $c \in]0, 1[$, что

$$f(x) - A(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2!} f''(c) = \frac{-x(1-x)}{2}\left(\frac{-\log_a e}{(p+c)^2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < c < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(p+c)^2} < \dfrac{1}{p^2}, \\ 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x(1-x) < \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} 0 < f(x) - A(x) < \frac{\log_a e}{8p^2}.$$

Приложение. Погрешность $f(x) - A(x)$ находится в пределах

$$0 < f(x) - A(x) < \frac{\log_{10} e}{8p^2} < \frac{0,44}{8p^2}.$$

Для табличных значений $p > 10^{-3}$ можно брать

$$\Delta = 6 \cdot 10^{-8} > \frac{0,44}{8 \cdot 10^6}.$$

Эта погрешность очень мала сравнительно с той, которой пренебрегают в шестизначных десятичных таблицах, а именно $5 \cdot 10^{-6}$.

РАЗДЕЛ 5

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЯРУСНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА НЕКОМПАКТНОМ ИНТЕРВАЛЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Задачи основаны на материале, изложенном в главе IV Книги III и в главах II и V Книги IV «Курса математики» Ш. Пизо и М. Заманского.

В этом разделе сгруппированы все задачи, относящиеся к интегрированию действительных числовых функций. Это объясняется постановкой, например, одних и тех же задач мажорирования и применением одних и тех же технических приемов исследования, независимо от того, идет ли речь об интегрировании ярусной функции на замкнутом или на некомпактном интервале. Кроме того, не следует отделять технические задачи на вычисление интегралов при помощи примитивных от более теоретических задач на свойства интегралов.

Хотя в этом разделе и нет полного разделения задач по отдельным вопросам, все же можно сказать, что изучение свойств интегралов от ярусных функций на замкнутом интервале ограничивается задачами 5.01—5.16; при этом в задачах 5.02, 5.03, 5.04, 5.06 и 5.14 не используются свойства производных или свойства, с ними связанные (интегрирование по частям и замена переменных); в задачах 5.17—5.28 вычисляются интегралы от простых функций; эти задачи являются главным образом техническими.

И наконец, лишь начиная с задачи 5.31 идут интегралы на некомпактных интервалах. Что же касается свойств функций, определенных посредством интегралов, то они используются в самом конце, ибо они предполагают известными свойствами отображений R^2 в R, изучаемые в последующей главе.

Определение интеграла от *ярусной* (и в частности, непрерывной) *функции* f при помощи равномерно приближающих функцию f *ступенчатых функций* используется часто в задачах:

либо для оценки интеграла от f; для этого берутся мажорантные или минорантные ступенчатые функции (например,

$$f(x) \leqslant M \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

если считать ступенчатую функцию φ постоянной и равной M);

либо, если некоторое свойство доказано для ступенчатых функций, любому $\varepsilon > 0$ относится такая ступенчатая функция φ, чтобы

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Интеграл по интервалу $[a, b]$ от *положительной функции* f положителен, если $a < b$. Если при этом f непрерывна, то ее интеграл может обращаться в нуль лишь для нулевой функции (этот факт часто применяется для того, чтобы показать, что непрерывная функция тождественно равна нулю). Следствие из этого утверждения: в векторном пространстве C непрерывных отображений интервала $[a, b]$ в R отображение

$$f \to \int_a^b f^2(x)\,dx$$

есть положительно определенная квадратичная форма, в силу чего в C можно ввести структуру евклидова пространства (см. задачу 3.51 п. 3).

1°. Если *последовательность функций* f_n равномерно сходится на $[a, b]$ к f, то

$$\lim \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt;$$

но этого может не быть, если сходимость не является равномерной (см. задачу 5.13).

2°. Если последовательность f_n равномерно сходится на $[a, b]$ к f, F_n — примитивная функции f_n и последовательность $F_n(x_0)$ сходится для некоторого $x_0 \in [a, b]$, то последовательность F_n равномерно сходится на $[a, b]$ к примитивной F функции f.

3° Относительно дифференцирования следует учитывать, что условия накладываются на последовательность первых производных; следует применить предыдущий результат к последовательности функций g_n и к их непрерывным производным g'_n, взяв $f_n = g'_n$, а $F_n = g_n$.

Если последовательность производных g'_n равномерно сходится на $[a, b]$ и если последовательность $g_n(x_0)$ сходится, то последовательность g_n равномерно сходится на $[a, b]$ к функции g; функция g дифференцируема и $g' = \lim g'_n$.

Необходимо отметить, что для *функций, определенных посредством интегралов*, условия различных теорем (непрерывность функции, существование и непрерывность частной производной, и т. д.) должны всегда выполняться на замкнутом прямоугольнике, т. е. содержащем границу.

Для *интегрирования по частям* полезно бывает знать формулу n-кратного интегрирования по частям:

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)}(t)\,g^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(t)\,g^{(n)}(t)\,dt.$$

В частности, если g — многочлен степени $<n$, то последний интеграл обращается в нуль, и интегрирование выполнено. При *замене переменных* существенно не забыть найти новые границы интегрирования. Иногда в результате замены переменных получают интеграл на некомпактном интервале, например, бесконечном. В этом случае полученный интеграл сходится, и нет надобности в каждом случае проводить доказательство (обоснование дано в 2°).

Для интегрирования на некомпактном интервале ($[a, +\infty[$ или $[a, b[$) могут быть сформулированы следующие положения.

1°. Абсолютная сходимость влечет сходимость и более проста для изучения, поэтому следует начинать с того, чтобы выяснить, имеет ли функция f постоянный знак, а в противном случае — интегрируемо ли ее абсолютное значение.

Абсолютная сходимость исследуется часто путем нахождения интегрируемой функции g, мажорирующей $|f|$.

2°. Замена переменного сохраняет сходимость и абсолютную сходимость, и стало быть, можно смело пользоваться заменой переменного для упрощения исследования интеграла на сходимость.

3°. Интегрирование по частям должно применяться к интегралу от функции на $[a, b]$, а затем следует переходить к пределу, устремляя один из концов к нужному значению.

4°. Если интервал интегрирования не содержит ни одного из своих концов (например, $]a, +\infty[$ или $]a, b[$), то проще всего изучить отдельно интегрируемость функции на интервалах $]a, x_0]$ и $[x_0, b[$, где x_0 — произвольная точка из $]a, b[$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

5.01. Пусть f — действительная ярусная функция на $[a, b]$:

$$f(a+b-x) = f(x);$$

показать, что

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

5.02. Пусть f — действительная непрерывная и положительная на $[a, b]$ функция. Показать, что предел последовательности

$$I_n = \left\{\int_a^b [f(x)]^n\,dx\right\}^{1/n}$$

равен верхней грани M функции f на $[a, b]$. Для доказательства справедливости при достаточно больших n неравенств

$$M - \varepsilon < I_n < M + \varepsilon$$

можно взять очень простые ступенчатые функции φ и ψ, минорирующие и мажорирующие f.

5.03. 1. Показать, что если функции f и g непрерывны на замкнутом интервале $[a, b]$, то равенство

$$\Delta = \left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right) = 0$$

влечет существование такого действительного λ, что $f = \lambda g$.

2. Пользуясь неравенством Шварца, найти минимум произведения

$$P_f = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right),$$

определенного на множестве $\mathscr{C}'$ непрерывных и строго положительных функций f на $[a, b]$. (Ясно, что отображение $f \to P_f$

есть отображение $\mathscr{C}'$ в R.) Для каких функций f достигается минимум?

3. Показать, что произведение P_f не ограничено сверху.

5.04. 1. Пусть f и g — ярусные функции на $[a, b]$; обозначим через p и P, q и Q грани соответственно f и g на $[a, b]$ и допустим, что p и q — строго положительные числа.

Показать, что функция

$$\left(f-\frac{P}{q}g\right)\left(f-\frac{p}{Q}g\right)$$

отрицательна, и доказать, что функция

$$F_\lambda=f^2+\lambda fg\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}}+\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)+\lambda^2g^2$$

положительна для некоторых значений λ и отрицательна для остальных. Отсюда заключить, что

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}}+\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right).$$

2. Указать, при каких условиях в предыдущем неравенстве достигается равенство, если предположить дополнительно, что f и g непрерывны на $[a, b]$.

3. Рассмотрим $2n$ положительных чисел p_i и q_i $(i=1, 2, \ldots, \ldots, n)$ и допустим, что

$$0<r\leqslant p_i\leqslant R,\qquad 0<s\leqslant q_i\leqslant S.$$

Показать, что

$$4\left(\sum p_i^2\right)\left(\sum q_i^2\right)\leqslant\left(\sqrt{\frac{RS}{rs}}+\sqrt{\frac{rs}{RS}}\right)^2\left(\sum p_iq_i\right)^2.$$

5.05. 1. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и пусть последовательность σ_n разбиений интервала $[a, b]$ такова, что предел последовательности l_n наибольших длин интервалов из σ_n равен 0.

Показать, что если в каждом интервале $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$ разбиения σ_n взять некоторую точку $\xi_i^{(n)}$, то последовательность сумм

$$S_n=\sum_i\left(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}\right)f\left(\xi_i^{(n)}\right)$$

будет иметь предел $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. В частности, исследовать случай, когда σ_n есть разбиение $[a, b]$ на n равных интервалов, а $\xi_i^{(n)}=x_i^{(n)}$.

2. Показать, что если $a > 1$, то последовательность $n(a^{1/n}-1)$ имеет предел

$$\int_1^a \frac{dx}{x}.$$

Можно рассматривать разбиения σ_n, определяемые точками $a^{i/n}$.

3. Показать, что применение предыдущего результата к возрастающей функции $x \to a^x$ влечет дифференцируемость этой функции в 0.

5.06. Найти пределы трех последовательностей:

$$x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2},$$

$$y_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\ldots 2n} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}(n+p)},$$

$$z_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)\ldots(a+n)}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\prod_{p=1}^{n}(a+p)}.$$

Для некоторых из них можно воспользоваться результатом задачи 5.05, п. 1.

5.07. Пусть $p > 1$ и $q > 1$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

1. Показать, что если u и v — произвольные положительные числа, то

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

(можно исследовать поведение функции $u \to u^p/p - uv$).

2. Ярусным на $[a, b]$, $a < b$, функциям f и g ставятся в соответствие числа

$$N_p(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \qquad N_q(g) = \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Показать, применяя неравенство из п. 1 к числам

$$u = \frac{|f(t)|}{N_p(f)}, \qquad v = \frac{|g(t)|}{N_q(g)},$$

что

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant N_p(f)\,N_q(g).$$

3. Пусть имеются две ярусные положительные функции φ и ψ на $[a, b]$ и пусть α и β — два строго положительных числа, в сумме равные 1. Показать, что

$$\int_a^b [\varphi(t)]^\alpha [\psi(t)]^\beta \, dt \leqslant \left(\int_a^b \varphi(t)\, dt \right)^\alpha \left(\int_a^b \psi(t)\, dt \right)^\beta .$$

5.08. Пусть f — непрерывная строго возрастающая функция на $[0, a]$, в 0 равная 0, и пусть g — обратная к ней функция.

1. Пусть на $[0, a]$ задана функция

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} g(t)\, dt - xf(x);$$

показать, что F дифференцируема и имеет нулевую производную:

сначала в предположении, что f дифференцируема,

а затем непосредственно в общем случае, пользуясь определением производной.

Найти $F(x)$.

2. Показать, что

$$0 \leqslant u \leqslant a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant v \leqslant f(a) \Rightarrow uv \leqslant \int_0^u f(t)\, dt + \int_0^v g(t)\, dt.$$

Используя этот результат, передоказать неравенство, доказанное в 5.07, п. 1:

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

5.09. Пусть f и g — две непрерывные функции на $[a, b]$, $(a < b)$; пусть f возрастает, а g и $1 - g$ строго положительны. И наконец, пусть

$$l = \int_a^b g(t)\, dt.$$

1. Исследовать поведение функции

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

и показать, что $a + G(x) \leqslant x$.

2. Сравнить функции

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt, \qquad \psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)\, dt$$

и показать, что

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \geqslant \int_a^{a+l} f(t)\,dt.$$

3. Исследовать, при каких условиях в последнем неравенстве достигается равенство.

5.10. *Вторая формула о среднем для непрерывных функций.*

1. Пусть f — непрерывная монотонная функция на $[a, b]$, имеющая на этом замкнутом интервале непрерывную ограниченную производную всюду, кроме конечного числа точек, в которых производная функция имеет правый и левый предел. Показать интегрированием по частям, что если g — непрерывная функция на $[a, b]$, то найдется такое число ξ, что

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\int_{\xi}^{b} g(t)\,dt.$$

2. Показать, что предыдущий результат верен для случая, когда f есть равномерный предел последовательности функций f_n, удовлетворяющих условиям п. 1.

Используя результаты задачи 4.23, показать, что среди функций f, которые могут быть определены таким путем, содержатся, в частности, непрерывные монотонные функции.

5.11. *Доказательство иррациональности чисел π и e.*

1. Пусть a и b натуральные числа, а P_n — многочлен

$$\frac{x^n(bx-a)^n}{n!}.$$

Показать, что P_n и все его производные принимают целые значения в точках $x = 0$ и $x = a/b$ (для исследования в 0 можно, например, применить разложение P_n по формуле Маклорена).

2. Показать, что предел последовательности с общим членом

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,dx$$

равен 0.

3. Показать, что если бы π было рационально, т. е. $\pi = a/b$, где a и b — целые, то I_n было бы отличным от нуля целым числом, что противоречит п. 2.

4. Точно так же, рассматривая последовательность

$$J_n = \int_0^{r} P_n(x)\,e^x\,dx,$$

показать, что если r — положительное рациональное число, то e^r иррационально.

5.12. Пусть f — ярусная функция на $[a, b]$. Всякому h, удовлетворяющему условиям $0 < h < (b-a)/2$, ставится в соответствие функция g_h, определенная на $[a+h, b-h]$ формулой

$$g_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+u)\,du.$$

1. Показать, что g_h непрерывна и дифференцируема, если f непрерывна, и дифференцируема вплоть до $n+1$-го порядка, если f дифференцируема вплоть до n-го порядка.

2. Показать, что g_h выпукла, если выпукла f.

3. Показать, что если $h \to 0$, то $g_h(x)$ имеет предел

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

4. Если f непрерывна, то она является равномерным пределом функций g_h на любом интервале $[\alpha, \beta]$, содержащемся в $]a, b[$. Показать это.

5. Пусть f — выпуклая функция на интервале $]a_1, b_1[$ и пусть $[\alpha, \beta]$ — некоторый замкнутый интервал из $]a_1, b_1[$. Показать, что f есть равномерный предел на $[\alpha, \beta]$ выпуклых n раз дифференцируемых функций (n — любое натуральное число).

5.13. Вычислить интеграл

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx,$$

где

$$f_n(x) = \frac{nx-1}{(x\ln n + 1)(1 + nx^2 \ln n)}.$$

Найти предел последовательности I_n и предел $f(x)$ последовательности $f_n(x)$.

Почему эти два результата непротиворечивы?

5.14. 1. Показать, что определенная на $[0, \pi/2]$ функция s_n.

$$s_n(0) = n^2, \quad s_n(t) = \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}, \qquad \text{если} \qquad t \neq 0,$$

непрерывна; найти ее миноранту на $[0, \pi/2n]$.

Показать, что предел последовательности интегралов

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$$

равен $+\infty$.

2. Пусть φ — ярусная функция на $[0, \pi/2]$, имеющая в 0 правый предел, равный 0 ($\varphi(+0) = 0$).

Показать, что предел последовательности

$$u_n = \frac{1}{I_n}\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$$

равен 0. Для этого можно разбить $[0, \pi/2]$ на два интервала $[0, \eta]$ и $[\eta, \pi/2]$ и выбрать η, а затем n так, чтобы u_n было меньше любого наперед заданного ε.

3. Показать, что если f — ярусная функция на $[0, \pi/2]$, то последовательность

$$v_n = \frac{1}{I_n} \int_0^{\pi/2} f(t) \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$$

имеет предел, равный $f(+0)$.

5.15. Пусть на интервале $[-1, 1]$ определены функции f_n и g_n равенствами

$$f_n(x) = \frac{\int\limits_0^x (1-t^2)^n dt}{\int\limits_0^1 (1-t^2)^n dt}, \qquad g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt.$$

1. Показать, что f_n и g_n — многочлены и исследовать их четность.

2. Используя неравенства

$$t(1-t^2)^n \leqslant (1-t^2)^n \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$(1-t^2)^n \leqslant \frac{t}{x}(1-t^2)^n \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1,$$

показать, что $\lim f_n(x) = 1$ при $x > 0$.

Найти предел последовательности $f_n(x)$ при $x \leqslant 0$.

3. Показать, что последовательность f_n равномерно сходится на $[\alpha, 1]$ для любого $\alpha > 0$ и что эта последовательность не будет равномерно сходиться на $[-\alpha, \alpha]$.

4. Показать, что последовательность g_n равномерно сходится на $[-1, 1]$ к функции $x \to |x|$.

При положительном x можно мажорировать разность $x - g_n(x)$, различая случаи $x < h$ и $x \geqslant h$, где h — произвольно выбранное число.

5.16. *Теорема Вейерштрасса.* Непрерывная функция на интервале $[a, b]$ есть равномерный предел многочленов.

Эта задача предполагает известными результаты задач 5.15 и 4.23.

1. Пусть заданы $n+1$ различных действительных чисел $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, и пусть любой системе из $n+1$ действительных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_n$ отнесена функция μ вида

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i |x - x_i|.$$

Показать, что μ непрерывна, является линейной на каждом из интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ и дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек x_i.

Показать, что если μ обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, то она всюду равна нулю, и тогда все коэффициенты c_i равны нулю.

Вывести отсюда, что система уравнений

$$\mu(x_j) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i |x_j - x_i| = y_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n), \qquad (S)$$

где c_i — неизвестные, имеет единственное решение для любых чисел y_j.

2. В обозначениях задачи 4.23 показать, что всякая функция λ на $[a, b]$ может быть определена как функция μ из п. 1, т. е. найдутся такие попарно различные числа $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ и такие коэффициенты c_i, что

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i |x - x_i|.$$

3. Показать, что всякая непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$ функция есть равномерный предел последовательности многочленов.

Можно рассмотреть вначале случай $a = 0$, $b = 1$, а затем применить результат предыдущей задачи.

5.17. Пусть E — множество действительных функций, непрерывных и дифференцируемых на R и таких, что

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x + a) - f(x - a)],$$

где a — заданная положительная постоянная.

1. Показать, что E — векторное пространство.
2. Выяснить, содержит ли E функции

$$x \to e^{rx}, \qquad x \to \cos \omega x, \qquad x \to \sin \omega x.$$

3. Пусть f — действительная функция на R и пусть для любого замкнутого интервала $[x_1, x_2]$ существует последовательность f_n функций из E равномерно сходящаяся на $[x_1, x_2]$ к f. Показать, что тогда f принадлежит E.

5.18. Вычислить интеграл

$$I_m = \int_0^1 \frac{t^2 + 2t - 1}{(t^2 + 1)^m} dt$$

для значений 1, 2 и 3/2 параметра m.

Найти способ вычисления, пригодный для натуральных m или натуральных $m - \frac{1}{2}$ (проводить само вычисление не требуется).

5.19. Вычислить интеграл

$$I_x = \int_1^x \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

Существует ли предел этого интеграла при $x \to +\infty$?

5.20. 1. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}.$$

2. Интегрируя по частям и используя значение I, вычислить

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

3. Вычислить интеграл

$$K = \int_0^1 \frac{(x+1)\, dx}{(x^4+1)^2}.$$

5.21. Вычислить

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx \qquad (a < b).$$

5.22. Вычислить интеграл

$$I_x = \int_x^3 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}\, dt \qquad (x > 0).$$

Найти производную функции $x \to I_x$. Показать, что $I_x \to +\infty$ при $x \to 0$. (Это можно предвидеть, если знать теорию интеграла на некомпактном интервале.)

5.23. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^a \frac{dx}{x - 2\sqrt[3]{x} + 4} \qquad (a > 0).$$

5.24. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x},$$

1. сделав замену $\operatorname{tg} x/2 = t$,
2. сделав замену $\cos x = u$.

5.25. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x \sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}\, dx.$$

5.26. Обозначим через $I(a, b)$ интеграл

$$\int_a^b \frac{(1 - x^2)\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}}.$$

1. Показать, что

$$I(a, b) = I(-b, -a)$$

и что если a и b имеют одинаковые знаки, то

$$I(a, b) = I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right).$$

Наконец, установить, что

$$I\left(a, \frac{1}{a}\right) = 0.$$

2. Вычислить $I(a, b)$. Можно начать со случая, когда $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$, и сделать замену $t = x + (1/x)$.

5.27. Обозначим через I_n интеграл

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, dx.$$

1. Вычислить I_0 и I_1. Найти соотношение между I_n и I_{n+2} и применить его для вычисления I_4.

2. Показать, что последовательность I_n убывает и имеет предел, равный 0; вывести отсюда, что I_n эквивалентна π/n^2. Точнее, установить, что

$$\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}\left[1 - \frac{\pi^2}{(n+3)(n+4)}\right] < I_n < \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}.$$

5.28. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

5.29. Рассмотрим интеграл

$$I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\, dx,$$

где α — положительное число.

1. Интегрированием по частям найти соотношение между I_α и $I_{\alpha+2}$ и показать, что функция f, определенная для $\alpha \geqslant 0$ равенством

$$f(\alpha) = (\alpha + 1) I_\alpha I_{\alpha+1},$$

является периодической с периодом 1. Вычислить $f(0)$.

2. Показать, что функция $\alpha \to I_\alpha$ убывает, и вывести отсюда, что

$$p \leqslant \alpha < p + 1 \Rightarrow \frac{p+1}{p+2} f(0) < f(\alpha) < \frac{p+2}{p+1} f(0).$$

Найти предел последовательности с общим членом $f(\alpha + n)$ и показать, что f постоянна.

3. Показать, что отношение $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ стремится к 1 при $\alpha \to +\infty$, и найти простой эквивалент для I_α.

5.30. Обозначим через E векторное пространство над R многочленов степени $\leqslant n$ с действительными коэффициентами, и напомним, что E имеет размерность $n + 1$.

1. Действительной непрерывной функции f на $[a, b]$ ставится в соответствие отображение F пространства E в R, определенное формулой

$$F(A) = \int_a^b A(x) f(x)\, dx.$$

Показать, что F есть линейная форма на E.

2. Если f есть многочлен степени $\leqslant n$, то линейная форма F может быть нулевой только для нулевого многочлена f. Если $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — многочлены степени $\leqslant n$, то для того, чтобы формы $F_1, F_2, \ldots, F_p$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы были независимы многочлены $f_1, f_2, \ldots, f_p$.

3. Обратно, показать, что всякой линейной форме G на E может быть поставлен в соответствие такой многочлен g степени $\leqslant n$, что

$$G(A) = \int_a^b A(x)\, g(x)\, dx.$$

5.31. В этой задаче предполагаются известными результаты предыдущей; решение облегчается, если воспользоваться задачами 3.15 и 3.52, но может быть проведено и непосредственно.

Рассмотрим векторное пространство E многочленов степени $\leqslant 2k - 1$ с действительными коэффициентами и обозначим через D многочлен

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^k.$$

1. Показать, что если A — многочлен степени, строго меньшей k, то

$$\int_{-1}^{1} A(x)\, D(x)\, dx = 0.$$

2. Показать, что все нули $x_1, \ldots, x_k$ многочлена действительны, различны и лежат между -1 и 1.

3. Показать, что многочлены из E, кратные D, образуют k-мерное векторное подпространство V.

Показать, что линейные формы

$$l(A) = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx, \qquad l_i(A) = A(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

принадлежат векторному подпространству W пространства E^* нулевых форм на подпространстве V и что формы l_i составляют базис пространства W.

4. Показать, что существуют такие постоянные m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, что для любого многочлена A степени $\leqslant 2k-1$

$$\int_{-1}^{1} A(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} m_i A(x_i).$$

Показать, что

$$m_i = \frac{1}{D'(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{D(x)}{x - x_i}\, dx.$$

5.32. Показать, что функция f, определенная для $|x| < 1$ равенством

$$f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^4}},$$

интегрируема на полуоткрытом интервале $[0, 1[$, и вычислить

$$I = \int_{0}^{1-0} f(x)\, dx.$$

5.33. Пусть p — положительное целое число. Показать, что функция $x \to (\ln x)^p$ интегрируема на полуоткрытом интервале $]0, 1]$, и вычислить

$$I = \int_{0}^{1} (\ln x)^p\, dx.$$

5.34. Показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \ln \frac{p}{n} = \int_{0}^{1} \ln x\, dx,$$

и вывести отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

5.35. 1. Обозначим через P и Q два многочлена, а через a — действительное число, строго большее действительных нулей многочлена Q. Показать, что если $\deg P\leqslant \deg Q-2$, то интегралы

$$\int_a^{+\infty}\frac{P(t)}{Q(t)}\sin t\,dt,\qquad \int_a^{+\infty}\cos t\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$$

абсолютно сходятся.

2. Показать интегрированием по частям, что интеграл

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{(1+t^2)}\,dt$$

сходится.

3. Показать, что способ п. 2 может быть применен к интегралам

$$\int_a^{+\infty}\sin t\frac{A(t)}{B(t)}\,dt,$$

если A и B — два многочлена, у которых $\deg A=\deg B-1$ (a — действительное число, строго большее действительных нулей многочлена B).

5.36. Обозначим через α и β действительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0<\alpha<1,\qquad 1-\alpha<\beta\leqslant 1,$$

а через λ — строго положительный параметр.

1. Доказать сходимость интегралов

$$I(\lambda)=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+\lambda x)},\qquad J(\lambda)=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^\alpha)(1+\lambda x)}.$$

2. Показать, что

$$I(\lambda)-\lambda^{\alpha-1}\int_{+0}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

стремится к конечному пределу, когда $\lambda\to 0$.

3. Показать, что интеграл

$$K(\lambda)=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\beta(1+x^\alpha)(1+\lambda x)}$$

сходится и стремится к

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\beta}(1+x^{\alpha})},$$

когда $\lambda \to 0$. (Для верхней оценки разности можно воспользоваться результатом п. 2.)

4. Показать, что если $1/(n+1) < \alpha < 1/n$ (n — натуральное), то найдутся такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, что

$$J(\lambda) - C_1\lambda^{\alpha-1} - C_2\lambda^{2\alpha-1} - \ldots - C_n\lambda^{n\alpha-1}$$

стремится к конечному пределу, когда $\lambda \to 0$.

5. Указать видоизменение п. 4 для случая $\alpha = 1/n$.

5.37. Пусть a и b — действительные числа, $0 < a < b$, f — непрерывная функция на $[0, +\infty[$, и пусть функция $t \to f(t)/t$ интегрируема на $[1, +\infty[$.

1. Показать, что функция $x \to f(kx)/x$ интегрируема на $[u, +\infty[$, если u и k строго положительны, и что

$$\int_{u}^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

2. Показать, что функция

$$x \to \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$$

интегрируема на $]0, +\infty[$ и что

$$\int_{+0}^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

3. Доказать сходимость интеграла

$$\int_{+0}^{+\infty} \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}\,dt$$

и вычислить его.

5.38. Пусть a и b — действительные числа, причем $0 < a < b$.

1. Рассмотрим функцию f, заданную на $]0, +\infty[$ формулой

$$f(u) = v = \frac{ab+u^2}{2u}.$$

Исследовать ее поведение. Найти, каково должно быть сужение области определения функции f, чтобы существовала обратная функция. Найти выражение этой функции.

2. Рассмотрим интеграл

$$I(a,\ b)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}.$$

Показать, что в качестве новых переменных можно взять

$$u=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},\qquad v=\frac{ab+u^2}{2u},$$

и найти новые выражения для I (во втором случае выражение дифференциального элемента уже не будет одинаковым на всем интервале интегрирования).

Вывести отсюда, что

$$I(a,\ b)=I\left(\sqrt{ab},\ \frac{a+b}{2}\right).$$

3. Напомним, что последовательности a_n и b_n вида

$$a_0=a,\quad b_0=b,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

имеют общий предел l и что $a_n\leqslant l\leqslant b_n$ (см. задачу 4.09).

Показать, что

$$I(a,\ b)=\frac{\pi}{2l}.$$

5.39. 1. Показать, что если $1<\alpha<3$, то функция $t\to\sin^2 t/t^\alpha$ интегрируема на интервале $]0,\ +\infty[$.

2. Обозначим через φ действительную функцию, непрерывную на интервале $]0,\ +\infty[$, и предположим, что существуют такие положительные постоянные M и K и такое число β, удовлетворяющее неравенствам $-1<\beta\leqslant 1$, что

$$0<t\leqslant 1\Rightarrow|\varphi(t)|\leqslant Mt^\beta,$$
$$1\leqslant t\Rightarrow|\varphi(t)|\leqslant K.$$

Показать, что при натуральном n интеграл

$$I_n=\int\limits_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$$

сходится для всех n и что, если $\beta\neq 1$, то

$$|I_n|\leqslant\frac{A}{n^\beta}\qquad (A \text{ не зависит от } n),$$

а если $\beta=1$, то

$$|I_n|\leqslant\frac{B\ln n}{n}\qquad (B \text{ не зависит от } n)$$

(можно разбить интервал $]0,\ +\infty[$ на интервалы $]0,\ 1]$, $[1,\ n]$ и $[n,\ +\infty[$).

3. Обозначим через f действительную функцию, непрерывную и ограниченную на действительной прямой, и допустим, что существуют числа H и γ, удовлетворяющие неравенствам $H \geqslant 0$ и $0 < \gamma \leqslant 1$ и такие, что

$$|f(x') - f(x)| \leqslant H\,|x' - x|^{\gamma}.$$

Полагаем

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{t}{n}\right) + f\left(x - \frac{t}{n}\right)\right] \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt,$$

$$C = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

Показать, что последовательность F_n равномерно сходится к Cf.

5.40. Пусть n — натуральное число.

1. Доказать неравенства

$$\frac{t^2}{n} - \frac{t^4}{2n^2} < \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) < \frac{t^2}{n}$$

и вывести отсюда, что последовательность функций $t \to (1 + t^2/n)^{-n}$ равномерно сходится к функции $t \to e^{-t^2}$ на любом замкнутом интервале $[a,\ b]$.

Установить также неравенства

$$e^{-t^2} < \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} < (1 + t^2)^{-1}.$$

2. Показать, что функции $t \to e^{-t^2}$ и $t \to (1 + t^2/n)^{-n}$ интегрируемы на $[0,\ +\infty[$ и что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Для этого можно рассмотреть отдельно замкнутый интервал $[0,\ a]$ и полуоткрытый интервал $[a,\ +\infty[$ и показать, что на каждом из них разность интегралов может мажорироваться числом $\varepsilon/2$, если выбрать a надлежащим образом.

3. Показать, что вычисление интеграла

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

может быть сведено заменой переменного к вычислению интегралов

$$I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\,dx,$$

и найти на основании п. 3 задачи 5.29 значение

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

5.41. Вычислить интеграл

$$f_x(y)=\int_0^x \frac{dt}{t^2+y},$$

где y — заданное строго положительное число.

Показать, что функция $y\to f_x(y)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема на интервале $]0, +\infty[$ и что

$$f_x^{(n)}(y)=(-1)^n (n!)\int_0^x \frac{dt}{(t^2+y)^{n+1}}.$$

Приложение. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3}.$$

5.42. Пусть α — заданное действительное число.

1. Показать, что для $|\alpha|\neq 1$

$$P_n(\alpha)=\prod_0^{n-1}\left(1-2\alpha\cos\frac{k\pi}{n}+\alpha^2\right)=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1).$$

2. Вывести из п. 1, что

$$I(\alpha)=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\begin{cases} 0, & \text{если } |\alpha|<1,\\ \pi\ln\alpha^2, & \text{если } |\alpha|>1.\end{cases}$$

Для этого можно рассмотреть среднее значение функции

$$x\to\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2).$$

3. Найти, пользуясь предыдущим, значение интеграла

$$J(\alpha)=\int_0^\pi \frac{\alpha-\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$$

для $|\alpha|\neq 1$.

4. Сделав замену $t=\operatorname{tg} x/2$, вычислить $I(\alpha)$.

5.43. Считается известным результат, полученный в предыдущей задаче:

$$I(\alpha)=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=\begin{cases} 0, & \text{если } |\alpha|<1,\\ \pi\ln\alpha^2, & \text{если } |\alpha|>1.\end{cases}$$

1. Показать, что если $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $0\leqslant x\leqslant\pi/3$, то

$$\sin^2 x\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2\leqslant 1,$$

и если при этом $x \neq 0$, то

$$\frac{3}{4} \leqslant \frac{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}{2 - 2\cos x} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2. Доказать сходимость интегралов

$$K = \int_0^{\pi/3} \ln(\sin x)\,dx, \qquad I(1) = \int_0^{\pi} \ln(2 - 2\cos x)\,dx.$$

3. Показать, что $I(\alpha) - I(1)$ стремится к 0, когда $\alpha \to 1$. Для мажорирования этой разности можно разбить $]0, \pi]$ на интервал $]0, X]$ и замкнутый интервал $[X, \pi]$, выбрав X, а затем α, так, чтобы соответствующие интегралы были сколь угодно малы.

4. Получить, на основании предыдущего, значения интегралов

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx.$$

5.44. Пусть имеется последовательность функций f_n на $]0, +\infty[$, определенных формулой

$$f_n(x) = \int_0^n e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

1. Показать, что последовательность f_n сходится при любом $x > 0$. Показать, что функция f:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

имеет предел 0 при $x \to +\infty$.

2. Показать, что функция f непрерывна и дифференцируема, и вычислить ее производную $f'(x)$.

Получить отсюда выражение для $f(x)$ через элементарные функции.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.01. Сделаем замену $a + b - x = u$; тогда

$$a \to b, \quad b \to a, \quad dx = -du,$$

$$\int_a^b xf(x)\,dx = \int_b^a (a + b - u) f(a + b - u)[-du] =$$

$$= \int_a^b (a + b - u) f(a + b - u)\,du =$$

$$= \int_a^b (a + b - u) f(u)\,du = (a + b)\int_a^b f(u)\,du - \int_a^b uf(u)\,du.$$

Переменное u может быть обозначено как угодно, в частности, x, и тогда

$$\int_a^b xf(x)\,dx = (a+b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b xf(x)\,dx,$$

откуда и получаем искомое соотношение.

5.02. Возьмем в качестве мажорирующей функцию f постоянную функцию $\psi = M$; тогда

$$\int_a^b [f(x)]^n\,dx \leqslant \int_a^b [\psi(x)]^n\,dx = M^n(b-a) \Rightarrow I_n \leqslant M(b-a)^{1/n}.$$

Предел последовательности

$$(b-a)^{1/n} = e^{(1/n)\ln(b-a)}$$

равен 1. Любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такое N_1, что

$$n > N_1 \Rightarrow (b-a)^{1/n} < 1 + \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow I_n < M + \varepsilon.$$

Функция f, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней грани M хотя бы в одной точке x_0; а поскольку f непрерывна в x_0, то найдется содержащий x_0 отрезок $[\alpha, \beta]$, на котором

$$M_1 = \inf_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x) > M - \varepsilon.$$

В качестве функции, минорирующей f, возьмем функцию φ, определенную следующим образом: $\varphi(x) = M_1$, если $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\varphi(x) = 0$, если $x < \alpha$ или $x > \beta$. Тогда

$$I_n^n = \int_a^b [f(x)]^n\,dx \geqslant \int_a^b [\varphi(x)]^n\,dx = M_1^n(\beta - \alpha).$$

Предел последовательности $(\beta - \alpha)^{1/n}$ равен 1, а предел последовательности $M_1(\beta-\alpha)^{1/n}$ равен $M_1 > M - \varepsilon$. Следовательно, найдется такое N_2, что

$$n > N_2 \Rightarrow M_1(\beta-\alpha)^{1/n} > M - \varepsilon \Rightarrow I_n > M - \varepsilon.$$

Объединив полученные результаты, видим, что

$$n \geqslant \sup(N_1, N_2) \Rightarrow M - \varepsilon < I_n < M + \varepsilon$$

что и является определением предела.

5.03. 1. Очевидно, Δ есть дискриминант трехчлена от k:

$$\int_a^b [f(x)+kg(x)]^2\,dx =$$

$$= k^2\int_a^b [g(x)]^2\,dx + 2k\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

$\Delta = 0$. Этот трехчлен имеет один двойной корень $-\lambda$, и

$$\int_a^b [f(x)-\lambda g(x)]^2\,dx = 0.$$

Функция $(f-\lambda g)^2$ непрерывна и положительна на $[a, b]$ и ее интеграл равен нулю; значит, она тождественно равна нулю (Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 3-й раздел, § 1, замечание 2), и $f = \lambda g$.

2. Так как функция f непрерывна и строго положительна на $[a, b]$, то функции $1/f$, $\varphi = \sqrt{f}$ и $\psi = 1/\varphi$ непрерывны на $[a, b]$. Применяя неравенство Шварца к функциям φ и ψ, получаем

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [\psi(x)]^2\,dx\right),$$

и далее,

$$\left(\int_a^b dx\right)^2 = (b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right) = P_f.$$

Произведение P_f минорируется числом $(b-a)^2$. На основании п. 1 заключаем, что P_f равно $(b-a)^2$ в том и только в том случае, если $\varphi = \lambda\psi$, т. е.

$$f = \lambda^2 \frac{1}{f}.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы f была постоянной.

3. Определим функции f и $1/f$ следующим образом:

$$a \leqslant x \leqslant a + \frac{b-a}{3} \Rightarrow f(x) = M \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{M},$$

$$a + 2\frac{b-a}{3} \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(x) = \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = M.$$

На интервале

$$\left[a + \frac{b-a}{3},\ a + 2\frac{b-a}{3}\right]$$

функция f есть произвольная убывающая непрерывная функция, скажем, аффинная функция вида

$$f(x)=M-\frac{3}{b-a}\left(M-\frac{1}{M}\right)\left[x-a-\frac{b-a}{3}\right],$$

а $1/f$ — функция, к ней обратная.

Так как f и $1/f$ положительны, то очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\geqslant \int_a^{a+(b-a)/3} f(x)\,dx=\frac{b-a}{3}M,\\ \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx &\geqslant \int_{a+2(b-a)/3}^{b} \frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{b-a}{3}M\end{aligned}\right\}\Rightarrow P_f\geqslant\frac{(b-a)^2}{9}M.$$

Но M произвольно, и поэтому P_f может принимать сколь угодно большие значения.

5.04. 1. По определению чисел p, P, q, Q,

$$g\geqslant q\Rightarrow\frac{P}{q}g\geqslant P\Rightarrow f-\frac{P}{q}g\leqslant 0,$$

$$g\leqslant Q\Rightarrow\frac{p}{Q}g\leqslant p\Rightarrow f-\frac{p}{Q}g\geqslant 0,$$

и значит,

$$\left(f-\frac{P}{q}g\right)\left(f-\frac{p}{Q}g\right)\leqslant 0.$$

Это произведение есть функция F_λ для

$$\lambda=-\sqrt{\frac{Pp}{Qq}};$$

и следовательно, при этом значении λ функция F_λ отрицательна.

Если $\lambda\geqslant 0$, то F_λ, будучи суммой трех положительных функций, положительна. Интеграл

$$\int_a^b F_\lambda(x)\,dx$$

есть трехчлен от λ, принимающий положительные (при $\lambda\geqslant 0$) и отрицательные (при $\lambda=-\sqrt{Pp/Qq}$) значения; отсюда заключаем, что его дискриминант Δ положителен, а поскольку

$$\int_a^b F_\lambda(x)\,dx=\int_a^b [f(x)]^2\,dx+\lambda\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}}+\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+$$

$$+\lambda^2\int_a^b [g(x)]^2\,dx,$$

то

$$\Delta=\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}}+\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)^2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2-$$

$$-4\left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right)\geqslant 0.$$

2. Равенство будет иметь место при $\Delta=0$, т. е. в том случае, когда трехчлен от λ, равный

$$\int_a^b F_\lambda(x)\,dx,$$

сохраняет постоянный знак, а именно знак $+$. Для $\lambda=-\sqrt{Pp/Qq}$ функция F_λ неположительна, и ее интеграл тоже; но этот интеграл должен обратиться в нуль, что в силу непрерывности функций f и g, а с ними и F_λ, влечет тождественное равенство F_λ нулю (Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 3-й раздел, § 1, замечание 2). Для этого значения

$$F_\lambda=\left(f-\frac{P}{q}g\right)\left(f-\frac{p}{Q}g\right).$$

Один из двух множителей должен равняться нулю, а следовательно, f и g пропорциональны и их отношение равно

$$\frac{P}{Q}=\frac{p}{q}=\begin{cases}\dfrac{P}{q},\\[2mm] \dfrac{p}{Q}\end{cases}$$

в зависимости от того, какой множитель у F_λ равен нулю. В обоих случаях $p=P$ и $q=Q$, т. е. обе функции должны быть постоянны. Это условие необходимо и, очевидно, достаточно.

3. Рассмотрим две ступенчатые функции f и g вида

$$i-1<x<i\Rightarrow f(x)=p_i \quad \text{и} \quad g(x)=q_i.$$

По определению интеграла,

$$\int_0^n [f(x)]^2\,dx=\sum_{i=1}^n p_i^2,\qquad \int_0^n [g(x)]^2\,dx=\sum_{i=1}^n q_i^2,$$

$$\int_0^n f(x)g(x)\,dx=\sum_{i=1}^n p_iq_i.$$

Числа $p=\inf p_i$, $P=\sup p_i$, $q=\inf q_i$ и $Q=\sup q_i$ являются гранями функций f и g; результат из п. 1 записывается так:

$$4\left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n q_i^2\right)\leqslant\left(\sqrt{\frac{PQ}{pq}}+\sqrt{\frac{pq}{PQ}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^n p_iq_i\right)^2.$$

Числа r, s, R, S удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{array}{l} r\leqslant p\leqslant P\leqslant R\Rightarrow \dfrac{R}{r}\geqslant\dfrac{P}{p}, \\ s\leqslant q\leqslant Q\leqslant S\Rightarrow\dfrac{S}{s}\geqslant\dfrac{Q}{q} \end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{\frac{RS}{rs}}\geqslant\sqrt{\frac{PQ}{pq}};$$

возрастание функции $u+1/u$ при $u>1$ влечет

$$\sqrt{\frac{RS}{rs}}+\sqrt{\frac{rs}{RS}}\geqslant\sqrt{\frac{PQ}{pq}}+\sqrt{\frac{pq}{PQ}},$$

чем и доказано требуемое неравенство.

5.05. 1. Сумма S_n есть интеграл по интервалу $[a, b]$ от ступенчатой функции φ_n вида

$$\varphi_n(x)=f\left(\xi_i^{(n)}\right),\quad \text{если}\quad x_{i-1}^{(n)}<x<x_i^{(n)},\qquad \text{и}\qquad \varphi_n\left(x_i^{(n)}\right)=f\left(x_i^{(n)}\right).$$

Функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$, т. е. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, такое, что

$$|x'-x|<\eta\Rightarrow|f(x')-f(x)|<\varepsilon.$$

Теперь найдем такое N, чтобы $l_n<\eta$ для $n>N$; тогда

$$n>N\Rightarrow x_i^{(n)}-x_i^{(n-1)}\leqslant l_n<\eta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left|f(x)-f\left(\xi_i^{(n)}\right)\right|<\varepsilon,\quad \text{если}\quad x_{i-1}^{(n)}<x<x_i^{(n)}.$$

Всякое $x\in[a, b]$ либо принадлежит интервалу $\left]x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right[$, либо является одним из чисел $x_i^{(n)}$:

$$n>N\Rightarrow|f(x)-\varphi_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a, b].$$

Последовательность функций φ_n равномерно сходится на $[a, b]$ к f, и по определению интеграла,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\int_a^b\varphi_n(x)\,dx=\lim S_n.$$

В рассматриваемом частном случае

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{b-a}{n}f\left(x_i^{(n)}\right)\right]=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right),$$

$$\lim\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Заметим, что

$$a^{1/n}-1=\frac{a^{i/n}-a^{(i-1)/n}}{a^{(i-1)/n}}.$$

Если в качестве f взять функцию $f(x) = 1/x$, в качестве разбиения σ_n интервала $[1, a]$ — последовательность $a^{i/n}$, а в качестве $\xi_i^{(n)}$ — точку $x_{i-1}^{(n)}$, то сумма S_n из п. 1 будет равна

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n-1)}\right) f\left(x_{i-1}^{(n)}\right) = n\left(a^{1/n} - 1\right).$$

Длина каждого из интервалов

$$a^{i/n} - a^{(i-1)n} < a\left(a^{1/n} - 1\right);$$

верхняя грань l_n их длин не превышает $a(a^{1/n} - 1)$ и стремится к 0. Таким образом, можно применить результат п. 1, в силу которого

$$\lim n\left(a^{1/n} - 1\right) = \int_1^a \frac{dx}{x}.$$

3. Исследуем дифференцируемость справа. Любому x между 0 и 1 можно поставить в соответствие такое целое n, что

$$\frac{1}{n} \leqslant x < \frac{1}{n-1}.$$

Тогда, в силу возрастания показательной функции,

$$a^{1/n} - 1 \leqslant a^x - 1 < a^{1/(n-1)} - 1,$$

откуда

$$(n-1)\left(a^{1/n} - 1\right) < \frac{a^x - 1}{x} < n\left(a^{1/(n-1)} - 1\right).$$

При $x \to 0$ и $n \to +\infty$ имеем

$$(n-1)\left(a^{1/n} - 1\right) = \frac{n-1}{n}\left[n\left(a^{1/n} - 1\right)\right] \to \int_1^a \frac{dx}{x},$$

$$n\left(a^{1/(n-1)} - 1\right) = \frac{n}{n-1}\left[(n-1)\left(a^{1/(n-1)} - 1\right)\right] \to \int_1^a \frac{dx}{x},$$

а значит,

$$\frac{a^x - 1}{x} \to \int_1^a \frac{dx}{x} \quad \text{(дифференцируемость справа).}$$

Для $x < 0$ запишем $x = -|x|$,

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{a^{-|x|} - 1}{-|x|} = a^{-|x|}\,\frac{1 - a^{|x|}}{-|x|} = a^{-|x|}\,\frac{a^{|x|} - 1}{|x|}.$$

Если $x \to 0$, то $a^{-|x|}$ стремится к 1, а $(a^{|x|} - 1)/|x|$ — к $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x}$.

5.06. Представим x_n в виде

$$x_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1+p^2/n^2} = \sum_{p=1}^{n} \left(x_p^{(n)} - x_{p-1}^{(n)}\right) f\left(x_p^{(n)}\right),$$

где $x_p^{(n)} = p/n$ (тем самым определено разбиение σ_n интервала $[0, 1]$ на n равных интервалов), и $f(x) = 1/(1+x^2)$. Отсюда видно, что последовательность x_n имеет предел (задача 5.05, п. 1)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Для y_n возьмем логарифм, с тем чтобы можно было произведение заменить суммой:

$$\ln y_n = \ln \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{p}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1+\frac{p}{n}\right).$$

$\ln y_n$ является суммой S_n для логарифмической функции и для разбиения σ_n интервала $[1, 2]$ на n равных частей, если выбрать $\xi_p^{(n)} = x_p^{(n)} = 1 + p/n$ (в обозначениях п. 1 задачи 5.05). Стало быть, последовательность $\ln y_n$ имеет предел:

$$\int_1^2 \ln x\, dx = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

Что же касается последовательности z_n, то здесь способ будет совершенно другим, и сходство последовательностей y_n и z_n является чисто внешним. Последовательность с общим членом $u_n = 1 + a/n$ имеет предел, равный 1. Доказано (задача 4.13, п. 3), что тогда последовательность

$$z_n = \sqrt[n]{u_1 \ldots u_n}$$

имеет тот же предел, что и u_n, т. е. 1.

5.07. 1. Пусть h — функция вида

$$h(u) = \frac{u^p}{p} - uv;$$

Эта функция непрерывна и дифференцируема при любом $u \geqslant 0$ и

$$h'(u) = u^{p-1} - v \Rightarrow h'(u) = 0, \quad \text{если} \quad u = u_0 = v^{1/(p-1)}.$$

Производная $h'(u)$ имеет знак разности $u - u_0$; следовательно, функция h имеет абсолютный минимум, достигаемый в точке u_0 и равный

$$h(u_0) = \frac{u_0^p}{p} - u_0 v = v^{p/(p-1)}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = -\frac{v^q}{q},$$

$$h(u) \geqslant h(u_0) \Leftrightarrow \frac{u^p}{p} - uv \geqslant -\frac{v^q}{q}.$$

2. Задавая u и v указанные значения, получаем

$$\frac{|f(t)\,g(t)|}{N_p(f)\,N_q(g)} \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p\,[N_p(f)]^p} + \frac{|g(t)|^q}{q\,[N_q(g)]^q}.$$

Это неравенство позволяет написать соответствующее неравенство для интегралов:

$$\frac{\int\limits_a^b |f(t)\,g(t)|\,dt}{N_p(f)\,N_q(f)} \leqslant \frac{\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt}{p\,[N_p(f)]^p} + \frac{\int\limits_a^b |g(t)|^q\,dt}{q\,[N_q(f)]^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда сразу получаем искомое неравенство, поскольку

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(t)\,g(t)|\,dt.$$

3. Воспользуемся результатом п. 2, положив

$$\frac{1}{p} = \alpha, \qquad \frac{1}{q} = \beta \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad f = \varphi^\alpha, \qquad g = \psi^\beta.$$

Все функции положительны; следовательно,

$$\int\limits_a^b [\varphi(t)]^\alpha\,[\psi(t)]^\beta\,dt \leqslant \left\{\int\limits_a^b [\varphi(t)]^{\alpha p}\,dt\right\}^\alpha \left\{\int\limits_a^b [\psi(t)]^{\beta q}\right\}^\beta,$$

а поскольку $\alpha p = \beta q = 1$, то искомое неравенство получено.

5.08. 1. Предположим, что функция f дифференцируема. Поскольку f непрерывна, то функция

$$x \to \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

дифференцируема и имеет производную $f(x)$. Функция g, обратная к непрерывной монотонной функции, непрерывна; следовательно, функция

$$y \to \int\limits_a^y g(t)\,dt$$

имеет производную, равную $g(y)$. Функция

$$x \to \int_a^{f(x)} g(t)\, dt$$

есть композиция функции f, дифференцируемой по условию, и предыдущей функции; стало быть, она дифференцируема и ее производная равна

$$g[f(x)]\, f'(x) = xf'(x).$$

(По определению обратной функции $x = g[f(x)]$.)

Итак, F дифференцируема и

$$F'(x) = f(x) + xf'(x) - [xf(x)]' = 0.$$

Рассмотрим непосредственное решение в общем случае.

Возьмем значения x и $x + \Delta x$ переменного и значения $f(x)$ и $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$ функции; для уточнения смысла неравенств, мы будем проводить доказательство для $\Delta x > 0$; для $\Delta x < 0$ результат не изменится.

Итак, исследуем разность

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt + \int_{f(x)}^{f(x+\Delta x)} g(t)\, dt - [(x + \Delta x)(f(x) + \Delta f) - xf(x)].$$

Но так как f и g возрастают, то

$$\Delta x f(x) \leqslant \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt \leqslant \Delta x f(x + \Delta x) = \Delta x [f(x) + \Delta f],$$

$$x\, \Delta f = g[f(x)]\, \Delta f \leqslant \int_{f(x)}^{f(x+\Delta x)} g(t)\, dt \leqslant g[f(x + \Delta x)]\, \Delta f = (x + \Delta x)\, \Delta f.$$

Складывая почленно эти неравенства и предыдущее равенство, в котором раскрываем скобки, получаем

$$-\Delta x\, \Delta f \leqslant \Delta F \leqslant \Delta x\, \Delta f \Leftrightarrow -\Delta f \leqslant \frac{\Delta F}{\Delta x} \leqslant \Delta f.$$

Если $\Delta x \to 0$, то Δf также стремится к 0 (в силу непрерывности f); таким образом, функция F имеет нулевую производную, т. е. постоянна. Поэтому

$$F(x) = F(0) = 0.$$

2. Если неравенство $v \leqslant f(u)$ не выполняется, то $f(u) > v$, т. е. $u > g(v)$; переставив в случае надобности f и g, играющие

одинаковую роль, можно предположить, что $v \geqslant f(u)$. Мы знаем (результат п. 1), что

$$uf(u) = \int_0^u f(t)\,dt + \int_0^{f(u)} g(t)\,dt.$$

На интервале $[f(u), v]$ функция g минорируется посредством $g[f(u)] = u$, и

$$u[v - f(u)] \leqslant \int_{f(u)}^{v} g(t)\,dt.$$

Прибавив к обеим частям неравенства $uf(u)$, получим неравенство

$$uv \leqslant \int_0^u f(t)\,dt + \int_0^{f(u)} g(t)\,dt + \int_{f(u)}^{v} g(t)\,dt = \int_0^u f(t)\,dt + \int_0^v g(t)\,dt.$$

Положим $f(u) = u^{p-1}$; функция f непрерывна и строго возрастает, так как $p - 1 > 0$; обратная функция g определяется следующим образом:

$$g(v) = u \Leftrightarrow v = f(u) = u^{p-1} \Leftrightarrow u = v^{1/(p-1)} = v^{q-1}.$$

Для этих конкретных функций неравенство принимает вид

$$uv \leqslant \int_0^u t^{p-1}\,dt + \int_0^v t^{q-1}\,dt = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

5.09. 1. Функция G есть примитивная функции g; она возрастает и ее гранями являются числа $G(a) = 0$ и $G(b) = l$. Функция $x \to x - a - G(x)$ имеет производную $1 - g(x)$; она возрастает и имеет наибольшее значение в $x = a$, т. е. 0.

2. Функции f и g непрерывны; значит, φ дифференцируема и ее производная равна $f(x)g(x)$. Функция

$$u \to \int_a^u f(t)\,dt$$

имеет производную $f(u)$; функция ψ, являющаяся композицией функции $a + G$ и этой функции, дифференцируема и имеет производную

$$\psi'(x) = f[a + G(x)]\,G'(x) = f[a + G(x)]\,g(x).$$

Функция $\varphi - \psi$ возрастает и обращается в нуль при $x = a$; следовательно, она неотрицательна на $[a, b]$ и $\varphi \geqslant \psi$. В частности, записывая, что $\varphi(b) \geqslant \psi(b)$, получаем

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \geqslant \int_a^{a+l} f(t)\,dt.$$

3. Предыдущее неравенство обращается в равенство при $\varphi(b)-\psi(b)=0$; возрастающая функция $\varphi-\psi$ обращается в нуль в точках a и b, т. е. тождественно равна 0, и ее производная $\varphi'-\psi'$ равна нулю (необходимое и достаточное условие):

$$\varphi'(x)-\psi'(x)=\{f(x)-f[a+G(x)]\}g(x)=0.$$

По условию, g не обращается в нуль; значит, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x)=f[a+G(x)].$$

Функция $x-(a+G)$ имеет, по условию, производную >0; следовательно, она строго возрастает и строго положительна при $x>a$. Возрастающая функция f принимает одинаковые значения в $a+G(x)$ и в x, и стало быть, постоянна на интервале $[a+G(x),\ x]$.

В частности, функция f постоянна и равна $f(b)$ на интервале $[a+G(b),\ b]$; возьмем теперь нижнюю грань x_0 множества тех x, для которых f равна $f(b)$ на интервале $[x, b]$. На любом интервале $[x_0,\ x_0+h[$ найдутся такие x, в которых $f(x)=b$; тогда непрерывность f в x_0 влечет $f(x_0)=b$, и функция постоянна на интервале $[x_0, b]$.

Если $x_0>a$, то функция f постоянна на отрезке $[a+G(x_0), x_0]$; ее значение на этом интервале равно $f(x_0)=f(b)$, и функция f постоянна и равна $f(b)$ на интервале $[a+G(x_0),\ b]$, что противоречит сделанному предположению, ибо

$$a+G(x_0)<x_0=$$
$$=\inf\{x, \text{ для которых } f(t)=f(b), \text{ если } t\in[x, b]\}.$$

Итак, для того чтобы неравенство обращалось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы функция f была постоянна на $[a,\ b]$.

5.10. 1. Обозначим через G примитивную функции g, обращающуюся в 0 в точке a. Если для любого x функция f имеет производную $f'(x)$ и функция f' непрерывна, то, как известно,

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt=[f(t)\,G(t)]_a^b-\int_a^b f'(t)\,G(t)\,dt. \qquad (1)$$

Если для конечного числа значений $x_1<x_2<\ldots<x_n$ функция f не дифференцируема или производная f' не непрерывна, то предыдущая формула записывается для каждого из интервалов $[a,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, ..., $[x_n,\ b]$ и почленное сложение полученных равенств дает соотношение (1).

Функция f, по условию, монотонна; заменив в случае необходимости эту функцию на противоположную, мы будем предполагать, что она возрастает. Производная f' возрастающей функции f положительна, а функция G непрерывна; для функций f' и G выполняются условия первой формулы о среднем:

$$\int_a^b f'(t)\,G(t)\,dt = G(\xi)\int_a^b f'(t)\,dt = G(\xi)\,[f(b)-f(a)].$$

(Если f' непрерывна, то f есть примитивная для f', и тогда, как известно,

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a).$$

В противном случае применяем предыдущий результат к интервалам $[x_i,\ x_{i+1}]$, определяемым точками разрыва, и складываем почленно полученные равенства.) Тогда соотношение (1) принимает вид

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(b)\,G(b) - G(\xi)\,[f(b)-f(a)] =$$

$$= f(a)\,G(\xi) + f(b)\,[G(b)-G(\xi)] = f(a)\int_a^{\xi} g(t)\,dt + f(b)\int_{\xi}^{b} g(t)\,dt.$$

2. Для каждой из функций f_n можно написать, что

$$\int_a^b f_n(t)\,G(t)\,dt = f_n(b)\,G(b) - G(\xi_n)\,[f_n(b)-f_n(a)].$$

По условию, последовательность f_n равномерно сходится к f; функция G ограничена; значит, последовательность f_nG равномерно сходится к fG и

$$\lim \int_a^b f_n(t)\,G(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,G(t)\,dt.$$

Из последовательности ξ_n можно выбрать сходящуюся последовательность ξ_{n_i} (следствие из теоремы Больцано — Вейерштрасса), и ее предел ξ будет принадлежать $[a, b]$; непрерывность функции G влечет, что последовательность $G(\xi_{n_i})$ имеет предел $G(\xi)$. Подпоследовательность

$$\int_a^b f_{n_i}(t)\,G(t)\,dt$$

сходящейся последовательности

$$\int_a^b f_n(t)\,G(t)\,dt$$

имеет тот же предел, и стало быть,

$$\int_a^b f(t)\,G(t)\,dt = \lim \int_a^b f_{n_i}(t)\,G(t)\,dt = f(b)\,G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)].$$

Теперь сразу же получаем требуемое.

Результат задачи 4.23 может быть сформулирован так: непрерывная на $[a, b]$ функция f является равномерным пределом функций λ, каждая из которых определяется заданием разбиения $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ интервала $[a, b]$ и условиями:

λ — аффинная функция на $[x_i, x_{i+1}]$,

$\lambda(x_i) = f(x_i)$.

Тогда, очевидно, λ есть непрерывная функция, имеющая производную всюду, кроме значений x_i. Эта производная постоянна на каждом из интервалов $]x_i, x_{i+1}[$ и, значит, имеет в x_i правые и левые пределы. Кроме того, λ монотонна на каждом из замкнутых интервалов $[x_i, x_{i+1}]$; если функция f возрастает, то условия $f(x_i) \leqslant f(x_{i+1})$ влекут возрастание λ на каждом из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$, т. е. возрастание на $[a, b]$ (если f убывает, то и λ убывает).

Всякая непрерывная монотонная функция есть равномерный предел последовательности λ_n монотонных функций λ, т. е. функций, удовлетворяющих условиям п. 1.

5.11. 1. Многочлен P_n может быть разложен, с одной стороны, по формуле бинома, а с другой стороны, по формуле Маклорена:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{C_n^k}{n!} b^k a^{n-k} x^{n+k} = \sum_h \frac{P_n^{(h)}(0)}{h!} x^h.$$

Отсюда

$$P_n^{(h)}(0) = 0, \quad \text{если} \quad h < n \quad \text{или} \quad h > 2n,$$

$$P_n^{(n+k)}(0) = (-1)^{n-k} (n+k)! \frac{C_n^k}{n!} b^k a^{n-k}, \quad \text{если} \quad h = n + k.$$

Число C_n^k—целое, $(n+k)!/n!$—тоже целое, и значит, $P_n^{(n+k)}(0)$ — целое.

Для исследования значений производных при $x = a/b$ положим $x - a/b = u$:

$$P_n(x) = \left(\frac{a}{b} + u\right)^n \frac{b^n u^n}{n!} = \frac{u^n (a + bu)^n}{n!} = \Pi_n(u).$$

Производные функции $\Pi_n(u)$ при $u = 0$ являются целыми; они равны производным многочлена P_n при $x = a/b$, так как разложение Тейлора многочлена P_n в точке a/b есть разложение Маклорена для Π_n.

2. Пусть

$$M = \sup_{0 \leqslant x \leqslant \pi} | x(bx - a) |;$$

тогда

$$| P_n(x) \sin x | \leqslant | P_n(x) | \leqslant \frac{M^n}{n!}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$| I_n | \leqslant \int_0^\pi | P_n(x) \sin x | \, dx \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!} dx = \pi \frac{M^n}{n!}.$$

Отношение M/n двух последовательных членов последовательности $\pi M^n/n!$ стремится к 0; поэтому последовательность $\pi M^n/n!$, а значит, и последовательность I_n, сходится к 0.

3. Применяем $(2n+1)$ раз формулу интегрирования по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, g^{(2n+1)}(x) \, dx =$$

$$= \left[f(x) \, g^{(2n)}(x) - f'(x) \, g^{(2n-1)}(x) + \ldots + (-1)^{2n} f^{(2n)}(x) \, g(x) \right]_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ (-1)^{2n+1} \int_{x_1}^{x_2} f^{(2n+1)}(x) \, g(x) \, dx$$

(см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 3-й раздел, § 4).

Возьмем в последней формуле в качестве f многочлен P_n, а в качестве $g^{(2n+1)}$ — функцию $\sin x$; производная порядка $2n+1$ от P_n равна нулю, а последовательные примитивные $g^{(2n)}, \ldots, g$ равны $\pm \sin x$ или $\pm \cos x$; тогда, полагая $x_1 = 0$ и $x_2 = a/b$, получаем

$$I_n = \int_0^{a/b} P_n(x) \sin x \, dx =$$

$$= \left[-P_n(x) \cos x + \ldots + (-1)^{n+1} P_n^{(2n)}(x) \cos x \right]_0^{a/b}.$$

Если $a/b = \pi$, то $\sin x$ и $\cos x$ в 0 и в a/b равны 0 и ± 1, а все производные многочлена P_n принимают в этих точках целые значения. Таким образом, интеграл I_n является целым числом.

I_n есть интеграл по интервалу $[0, \pi]$ от функции $P_n \sin x$, непрерывной и неотрицательной на $[0, \pi]$ и принимающей ненулевые значения; стало быть, I_n не может равняться нулю (Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 3-й раздел, § 1, замечание 2).

Итак, если $\pi = a/b$, то I_n равны целым отличным от нуля числам, и поэтому последовательность I_n не может иметь пределом 0, что противоречит результатам п. 2. Следовательно, π не может быть рациональным.

4. Как и в п. 2, показывается, что последовательность J_n сходится к 0 (e^x мажорируется числом e^r, а J_n — посредством $re^rM^n/n!$). Интегрирование по частям, примененное $2n+1$ раз к функциям $f = P_n$ и $g = e^x$, дает

$$J_n = \int_0^r P_n(x) e^x\,dx = \left[P_n(x) e^x + \ldots + P_n^{(2n)}(x) e^x\right]_0^r.$$

Если в качестве a и b выбрать такие целые, чтобы $a/b = r$, то значения P_n и его производных в точках 0 и a/b будут целыми, и

$$J_n = e^r N_1 - N_2 \qquad (N_1 \text{ и } N_2 \text{ — целые}).$$

Наконец, интеграл от непрерывной положительной функции P_n строго положителен.

Если бы e^r было рациональным числом p/q, то отличное от нуля число

$$J_n = \frac{pN_1 - qN_2}{q}$$

было бы больше или равно $1/q$, и последовательность J_n не могла бы сходиться к 0. Стало быть, числа e^r, и в частности, $e^1 = e$, иррациональны.

5.12. 1. Составим разность

$$2h\left[g_h(x') - g_h(x)\right] = \left[\int_{x-h}^{x'+h} f(t)\,dt - \int_{x-h}^{x'-h} f(t)\,dt\right] - \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{x+h}^{x'+h} f(t)\,dt - \int_{x-h}^{x'-h} f(t)\,dt.$$

Ярусная функция $|f|$ мажорируется на $[a, b]$ некоторым числом M, и

$$\left|\int_{x+h}^{x'+h} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x+h}^{x'+h} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x+h}^{x'+h} M\,dt\right| = M|x' - x|.$$

То же самое справедливо для второго интеграла; отсюда

$$2h\,|g_h(x') - g_h(x)| \leqslant \left|\int_{x+h}^{x'+h} f(t)\,dt\right| + \left|\int_{x-h}^{x'-h} f(t)\,dt\right| \leqslant 2M\,|x' - x|.$$

Из этого неравенства очевидным образом следует непрерывность функции g_h. Если f непрерывна, а x_0 — точка из $[a, b]$, то

$$g_h(x) = \frac{1}{2h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x-h} f(t)\,dt\right].$$

Оба интеграла, будучи сложными функциями от x через функции $x+h$ и $x-h$, дифференцируемы, а значит, дифференцируема и g_h, и

$$g'_h(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)].$$

Тогда очевидно, что если f дифференцируема n раз на $[a, b]$, то g'_h дифференцируема n раз на $[a+h, b-h]$, и стало быть, g_h дифференцируема $n+1$ раз.

2. Возьмем такое число λ, что $0 < \lambda < 1$; имеем

$$g_h[\lambda x + (1-\lambda)x'] = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f[\lambda x + (1-\lambda)x' + u]\,du.$$

По определению свойства выпуклости функции f,

$$f[\lambda x + (1-\lambda)x' + u] =$$
$$= f[\lambda(x+u) + (1-\lambda)(x'+u)] \leqslant \lambda f[x+u] + (1-\lambda) f[x'+u].$$

Отсюда

$$g_h[\lambda x + (1-\lambda)x'] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\{\lambda f[x+u] + (1-\lambda) f[x'+u]\}\,du =$$
$$= \lambda g_h(x) + (1-\lambda) g_h(x').$$

Следовательно, g_h — выпуклая функция.

3. Функция f, будучи ярусной функцией, имеет для всех x правый и левый предел; рассмотрим разность

$$g_h(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2h}\int_{x}^{x+h}[f(t) - f(x+0)]\,dt + \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x}[f(t) - f(x-0)]\,dt.$$

По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$x < t < x+\eta \Rightarrow |f(t) - f(x+0)| < \varepsilon$$

и

$$x-\eta < t < x \Rightarrow |f(t) - f(x-0)| < \varepsilon.$$

Если взять $h < \eta$, то

$$]x, \ x+h[\subset]x, \ x+\eta[\Rightarrow \left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x+0)]\, dt \right| < \varepsilon h,$$

$$]x-h, \ x[\subset]x-\eta, \ x[\Rightarrow \left| \int_{x-h}^{x} [f(t) - f(x-0)]\, dt \right| < \varepsilon h,$$

$$\left| g_h(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\left[\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x+0)]\, dt \right| + \left| \int_{x-h}^{x} [f(t) - f(x-0)]\, dt \right| \right] < \varepsilon$$

Предел функции $h \to g_h(x)$ в точке $h = 0$ равен $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

4. Если f непрерывна, то предел функции $g_h(x)$ в $h = 0$ равен $f(x)$. Возьмем столь малые значения h, чтобы $a + h < \alpha < \beta < b - h$. Для доказательства того, что f есть равномерный предел функций g_h на $[\alpha, \ \beta]$, достаточно показать, что f может быть равномерно приближена функциями g_h, т. е. что для заданного $\varepsilon > 0$ число η из предыдущего доказательства может быть выбрано одним и тем же для всех значений x из $[\alpha, \ \beta]$. Но это является следствием равномерной непрерывности функции f на $[a, \ b]$: $\forall \varepsilon$, $\exists \eta$ такое, что

$$|t - x| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon, \ \ \forall x \in [a, \ b]$$

$$h < \inf(\eta, \ \alpha - a, \ b - \beta) \Rightarrow |g_h(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in [\alpha, \ \beta].$$

(Если теперь взять сходящуюся к 0 последовательность h_n, то соответствующая ей последовательность функций g_{h_n} будет равномерно сходиться к f на $[\alpha, \ \beta]$.)

5. Доказываем индукцией по n. В обеих частях доказательства числа a и b будут удовлетворять неравенствам $a_1 < a < \alpha < \beta < b < b_1$. Если $n = 1$, то в силу выпуклости, функция f непрерывна на $[a, \ b]$; значит, она будет на $[\alpha, \ \beta] \subset]a, \ b[$ равномерным пределом функций g_h, а так как f непрерывна, то эти функции будут выпуклыми (см. п. 2) и дифференцируемыми (см. п. 1). Допустим, что утверждение верно для $n = k - 1$. Мы будем использовать его относительно интервала $[a, \ b]$. Функция f является равномерным пределом на $[a, b]$ выпуклых $k - 1$ раз дифференцируемых функций. Значит, если задать $\varepsilon > 0$, то найдется такая выпуклая $k - 1$ раз дифференцируемая функция φ, что

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция φ является на $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ равномерным пределом функций γ_h, определенных, исходя из φ, так же, как g_h

определялись, исходя из f. Следовательно, найдется такая выпуклая (в силу выпуклости φ) k раз дифференцируемая (в силу того, что φ дифференцируема $k-1$ раз) функция γ_{h_0}, что

$$\sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |\varphi(x) - \gamma_{h_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полученные неравенства позволяют заключить, что

$$\sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f(x) - \gamma_{h_0}(x)| \leqslant \sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f(x) - \varphi(x)| + \\ + \sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |\varphi(x) - \gamma_{h_0}(x)| < \varepsilon.$$

Функция f может быть равномерно приближена выпуклой k раз дифференцируемой функцией γ_{h_0}, и следовательно, является равномерным пределом таких функций.

5.13. Нетрудно разложить f_n на более простые элементы и найти примитивную F_n, при помощи которой и вычисляется I_n. Имеем

$$f_n(x) = -\frac{1}{\ln n} \frac{1}{x + \frac{1}{\ln n}} + \frac{nx}{1 + nx^2 \ln n},$$

$$F_n(x) = -\frac{1}{\ln n} \ln(x \ln n + 1) + \frac{1}{2 \ln n} \ln(1 + nx^2 \ln n),$$

$$I_n = F_n(1) - F_n(0) = -\frac{1}{\ln n} \ln(1 + \ln n) + \frac{1}{2 \ln n} \ln(1 + n \ln n).$$

Мы видели (задача 4.41), что если f и g стремятся к $+\infty$ и эквивалентны, то $\ln f$ и $\ln g$ тоже эквивалентны; следовательно, при $n \to +\infty$

$$\frac{\ln(1 + \ln n)}{\ln n} \simeq \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \to 0$$

(действительно, $t = \ln n \to +\infty$, а тогда, как известно, $(\ln t)/t \to \to 0$). Точно так же,

$$\frac{\ln(1 + n \ln n)}{\ln n} \simeq \frac{\ln(n \ln n)}{\ln n} = \frac{\ln n}{\ln n} + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \to 1.$$

Предел последовательности I_n равен $\frac{1}{2}$.

Если $x \neq 0$, то $f_n(x) \simeq \frac{nx}{x^3 n (\ln n)^2} \to 0 = f(x)$.

Если $x = 0$, то $f_n(0) = -1 \to -1 = f(0)$.

Интеграл от ступенчатой функции f равен 0, и следовательно,

$$\lim \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 [\lim f_n(x)]\, dx.$$

Этот результат не является неожиданным, ибо равенство этих двух чисел доказывается для случая равномерной сходимости последовательности f_n, чего в данном случае нет, так как

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{n}-1}{\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+1\right)(1+\ln n)}\simeq\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\to+\infty \text{ при } n\to+\infty,$$

$$\|f_n-f\|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|\geqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$\|f_n-f\|$ стремится к $+\infty$, а не к 0, и поэтому сходимость f_n к f не будет равномерной.

5.14. 1. Если $t\to 0$, то $\sin nt\simeq nt$, $\sin t\simeq t$ и

$$\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\simeq\frac{n^2t^2}{t^2}=n^2\Rightarrow\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\to n^2.$$

Известно (задача 4.39), что

$$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2t}{\pi}\leqslant\sin t\leqslant t,$$

$$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2n}\Rightarrow 0\leqslant nt\leqslant\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2nt}{\pi}\leqslant\sin nt,$$

$$0<t\leqslant\frac{\pi}{2n}\Rightarrow\frac{\sin nt}{\sin t}\geqslant\frac{2nt}{\pi}\cdot\frac{1}{t}=\frac{2n}{\pi}.$$

Таким образом, функция s_n минорируется на $[0, \pi/2n]$ посредством $4n^2/\pi^2$; для $]0, \pi/2n]$ это следует из последнего соотношения, а для 0 — из того, что $4n^2/\pi^2\leqslant n^2=s_n(0)$. Функция s_n положительна; поэтому

$$I_n=\int_0^{\pi/2n}s_n(t)\,dt+\int_{\pi/2n}^{\pi/2}s_n(t)\,dt\geqslant\int_0^{\pi/2n}s_n(t)\,dt\geqslant\int_0^{\pi/2n}\frac{4n^2}{\pi^2}\,dt=\frac{2n}{\pi}.$$

Последовательность I_n, минорируемая последовательностью $2n/\pi$, стремится к $+\infty$.

2. Положим

$$\varphi_\eta=\sup_{0<t<\eta}|\varphi(t)| \quad \text{и} \quad \Phi=\sup_{0<t<\pi/2}|\varphi(t)|.$$

Мы можем написать следующие интегральные оценки:

$$\left|\int_0^\eta\varphi(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt\right|\leqslant\int_0^\eta|\varphi(t)|\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt\leqslant\varphi_\eta\int_0^\eta\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt\leqslant\varphi_\eta I_n,$$

и, заметив, что $\Phi/\sin^2\eta$ является на $]\eta, \pi/2[$ мажорантой для

$$\left|\varphi(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\right|,$$

получаем

$$\left|\int_{\eta}^{\pi/2} \varphi(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt\right| \leqslant \int_{\eta}^{\pi/2} \frac{\Phi}{\sin^2\eta}\,dt = \left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)\frac{\Phi}{\sin^2\eta} \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{\Phi}{\sin^2\eta}.$$

Эти оценки дают для $|u_n|$ оценку

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{I_n}\left(\varphi_\eta I_n + \frac{\pi}{2}\,\frac{\Phi}{\sin^2\eta}\right) = \varphi_\eta + \frac{1}{I_n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Phi}{\sin^2\eta}.$$

А так как $\varphi(+0)=0$, то любому $\varepsilon>0$ можно отнести такое η, что

$$t<\eta \Rightarrow |\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \varphi_\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Допустим, что такое η выбрано; тогда выражение

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Phi}{\sin^2\eta}$$

определено и не зависит от n, а его произведение на $1/I_n$ стремится к 0, поскольку I_n стремится к $+\infty$; следовательно, найдется такое N, что

$$n>N \Rightarrow \frac{1}{I_n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Phi}{\sin^2\eta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для заданного ε мы нашли такое N (зависящее от η, однако процесс нахождения несуществен), что

$$n>N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

И последовательность u_n, по определению, сходится к 0.

3. Очевидно, что

$$f(+0) = \frac{I_n}{I_n} f(+0) = \frac{1}{I_n}\int_0^{\pi/2} f(+0)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt,$$

$$v_n - f(+0) = \frac{1}{I_n}\int_0^{\pi/2} [f(t)-f(+0)]\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt.$$

Функция $f-f(+0)$ является ярусной, и ее правый предел в 0 равен 0; она удовлетворяет тем же условиям, что и функция φ из п. 2, и значит,

$$\lim(v_n - f(+0)) = 0 \Rightarrow \lim v_n = f(+0).$$

5.15. 1. Примитивная четного многочлена $(1-t^2)^n$, в 0 равная нулю, есть нечетный многочлен; f_n есть частное от деления этого многочлена на постоянную, т. е. снова нечетный многочлен. Примитивая g_n нечетного многочлена f_n есть четный многочлен.

2. Указанные неравенства легко получаются в результате умножения на положительную величину $(1-t^2)^n$ неравенств, выражающих условия на t. Если $0<x\leqslant 1$, то

$$1-f_n(x)=\frac{\int\limits_x^1 (1-t^2)^n\,dt}{\int\limits_0^1 (1-t^2)^n\,dt}$$

есть частное двух положительных чисел, и значит, минорируется числом 0; мажоранту получим, мажорируя числитель и минорируя знаменатель:

$$\int\limits_x^1 (1-t^2)^n\,dt\leqslant\int\limits_x^1 \frac{t}{x}(1-t^2)^n\,dt=\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)x},$$

$$\int\limits_0^1 (1-t^2)^n\,dt\geqslant\int\limits_0^1 t(1-t^2)^n\,dt=\frac{1}{2(n+1)},$$

$$0\leqslant 1-f_n(x)\leqslant\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)x}:\frac{1}{2(n+1)}=\frac{(1-x^2)^{n+1}}{x},$$

$$0\leqslant 1-x^2<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(1-x^2)^{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}1-f_n(x)=0.$$

Далее, имеем

$$f_n(0)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0,$$

$$f_n(x)=-f_n(-x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(x)=-\lim_{n\to\infty}f_n(-x)=-1,$$

$$\text{если}\quad -1\leqslant x<0.$$

3. Предел последовательности f_n на $[\alpha,\ 1]$ равен постоянной функции $f\equiv 1$, и если обозначить через ν_α норму относительно этого интервала, то

$$\nu_\alpha(f-f_n)=\sup_{\alpha\leqslant x\leqslant 1}(1-f_n(x))\leqslant\frac{(1-\alpha^2)^{n+1}}{\alpha}.$$

Числовая последовательность $(1-\alpha^2)^{n+1}/\alpha$ сходится к 0; тогда последовательность $\nu_\alpha(f-f_n)$ тоже сходится к 0, и последовательность f_n равномерно сходится к f на $[\alpha,\ 1]$.

Функции f_n непрерывны на $[-\alpha,\ \alpha]$; если бы последовательность f_n равномерно сходилась, то предельная функция f была бы непрерывна на $[-\alpha,\ \alpha]$, но ее левый и правый предел в 0 не совпадают и равны

$$f(-0)=-1,\qquad f(+0)=1.$$

Таким образом, f не является непрерывной на $[-\alpha, \alpha]$, и сходимость не будет равномерной. Можно было бы также на основании непрерывности f_n заключить, что

$$\sup_{0<x<\alpha} [1 - f_n(x)] = \sup_{0\leqslant x\leqslant\alpha} [1 - f_n(x)] = 1 - f_n(0) = 1.$$

Следовательно, $\sup\limits_{-\alpha\leqslant x\leqslant\alpha} |f(x) - f_n(x)| = 1$ не стремится к 0, и значит, последовательность f_n не будет равномерно сходиться на $[-\alpha, \alpha]$.

4. Функции g_n и функция $|x|$ являются четными; стало быть, при обычном обозначении нормы $\| \ \|$ функций на $[-1, 1]$ получаем

$$\||x| - g_n\| = \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} ||x| - g_n(x)| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} ||x| - g_n(x)|.$$

Для положительных значений x имеем

$$0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x - g_n(x) \leqslant x \Rightarrow \||x| - g_n\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} [x - g_n(x)].$$

Из предыдущих неравенств вытекает также, что

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant h} [x - g_n(x)] \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant h} x = h.$$

Равномерная сходимость последовательности f_n на $[h, 1]$, доказанная в п. 3, позволяет оценить сверху

$$\int_h^x [1 - f_n(t)]\, dt = x - g_n(x) - [h - g_n(h)],$$

а именно,

$$\int_h^x [1 - f_n(t)]\, dt \leqslant \int_h^x \nu_h(1 - f_n)\, dt = (x - h)\, \nu_h(1 - f_n) \leqslant \leqslant \nu_h(1 - f_n) \leqslant \frac{(1 - h^2)^{n+1}}{h};$$

отсюда получаем на $[h, 1]$:

$$x - g_n(x) = h - g_n(h) + \int_h^x [1 - f_n(t)]\, dt \leqslant h + \frac{(1 - h^2)^{n+1}}{h}.$$

Эта оценка справедлива и для значений из $[0, h]$; следовательно,

$$\||x| - g_n\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} [x - g_n(x)] \leqslant h + \frac{(1 - h^2)^{n+1}}{h},$$

где h — произвольное положительное число.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем $h = \varepsilon/2$; тогда

$$\| |x| - g_n \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{(1-\varepsilon^2/4)^{n+1}}{\varepsilon}.$$

Последовательность

$$\frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{n+1}$$

сходится к 0; значит, найдется такое N, что

$$n > N \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \| |x| - g_n \| < \varepsilon.$$

Итак, последовательность g_n равномерно сходится к функции $|x|$.

5.16. 1. Функции $x \to |x - x_j|$ непрерывны, а стало быть, и μ непрерывна. Каждая функция $|x - x_j|$ аффинна на $[x_{i-1}, x_i]$, а именно, равна $-(x - x_j)$ для $i \leqslant j$, и $x - x_j$ для $i > j$; следовательно, μ — аффинная функция. На каждом из интервалов $]x_{i-1}, x_i[$ функции $|x - x_i|$, а с ними и μ, дифференцируемы. В точках x_i дифференцируемы $|x - x_j|$ с индексом $j \neq i$ и не дифференцируемы $|x - x_i|$. Таким образом, функция μ дифференцируема в x_i в том и только том случае, если $c_i = 0$.

Если $\mu(x_i) = 0$ при любом i, то функция μ, будучи аффинной на каждом из замкнутых интервалов $[x_{i-1}, x_i]$, всюду равна нулю, и значит, она дифференцируема для всех x, и в частности, для всех значений x_i; все коэффициенты равны нулю.

Мы только что показали, что однородная система, соответствующая системе (S):

$$\mu(x_j) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

не имеет другого решения, кроме нулевого; а так как число неизвестных равно числу уравнений, то из этого следует, что система (S) есть система Крамера и имеет единственное решение при любых y_j (теорема об альтернативе, Пизо и Заманский, Алгебра, гл. VII, 6-й раздел, § 2).

2. Функции λ — это непрерывные функции, характеризующиеся следующим свойством: существует такое разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ интервала $[a, b]$, что на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция λ аффинна.

Функция μ:

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i |x - x_i|$$

тоже обладает этим свойством; она совпадает с λ, если

$$\mu(x_j) = \lambda(x_j), \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \qquad (S')$$

ибо тогда на каждом из интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ аффинные функции λ и μ совпадают. Система (S') представляет собой не что иное, как изучавшуюся в п. 1 систему (S), если положить $\lambda(x_j) = y_j$, а последняя, как мы уже установили, имеет, и притом единственное, решение.

3. Мы знаем (задача 4.23), что любая непрерывная на $[0, 1]$ функция f является равномерным пределом функций λ, т. е., согласно п. 2, функций μ. Если $\alpha > 0$ произвольно, то найдется такая функция μ, что

$$\|f - \mu\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - \mu(x)| < \alpha.$$

В предыдущей задаче показано, что функция $|x|$ есть равномерный предел многочленов на $[-1, 1]$; а значит, то же самое имеет место для функции $|x - x_i|$ на $[x_i - 1, x_i + 1]$. Следовательно, функция μ, будучи линейной комбинацией функций $|x - x_i|$ (где $0 \leqslant x_i \leqslant 1$), является равномерным пределом многочленов на замкнутом интервале $[0, 1]$, принадлежащем всем интервалам $[x_i - 1, x_i + 1]$, т. е. найдется такой многочлен A, что

$$\|\mu - A\| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\mu(x) - A(x)| < \alpha.$$

Из обоих результатов следует, что

$$\|f - A\| \leqslant \|f - \mu\| + \|\mu - A\| < 2\alpha.$$

А поскольку α произвольно, то это неравенство показывает, что f может быть равномерно приближена многочленом, а тогда, как известно, можно найти последовательность многочленов, равномерно сходящуюся к f, для чего достаточно взять сходящуюся к нулю последовательность α_n и рассмотреть последовательность многочленов A_n, для которых

$$\|f - A_n\| < 2\alpha_n.$$

Наконец, если функция F определена и непрерывна на $[a, b]$, то сделаем замену переменных, переводящую $[a, b]$ в $[0, 1]$:

$$x = \frac{t - a}{b - a}, \qquad f(x) = F(t) = F[(b - a)x + a].$$

Функция f есть равномерный предел на $[0, 1]$ последовательности многочленов A_n, и значит, функция F есть равномерный предел на $[a, b]$ многочленов B_n, преобразованных из A_n, т. е. имеющих вид

$$B_n(t) = A_n\left(\frac{t - a}{b - a}\right).$$

5.17. 1. Если поставить в соответствие функции f функцию g вида

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x + a) - f(x - a)] - f'(x),$$

то тем самым будет определено линейное отображение векторного пространства действительных функций, непрерывных и дифференцируемых на R, в векторное пространство непрерывных функций. Тогда ядро этого отображения, т. е. множество E, будет векторным пространством.

2. 1) Функция $x \to e^{rx}$ принадлежит E, если

$$re^{rx} = \frac{1}{2}\left(e^{r(x+a)} - e^{r(x-a)}\right) \Leftrightarrow r = \operatorname{sh} ra.$$

Если r является решением последнего уравнения, то $-r$ тоже будет решением. Найдем положительные решения, исследуя поведение функции φ, определенной для $r \geqslant 0$ формулой

$$\varphi(r) = \operatorname{sh} ra - r \Rightarrow \varphi'(r) = a \operatorname{ch} ra - 1.$$

При $a \geqslant 1$ производная φ' положительна; возрастающая функция φ обращается в нуль только в точке 0.

При $a < 1$ производная φ' отрицательна в 0, возрастает и обращается в 0 в единственной точке r_0.

	0		r_0		$+\infty$
φ	0	$\searrow$	φ_0	$\nearrow$	$+\infty$

Следовательно, функция φ обращается в нуль в 0 и в некоторой точке $\rho > r_0$.

Итак, E содержит две функции: $x \to e^{\rho x}$ и $x \to e^{-\rho x}$, если $a < 1$, и не содержит показательных функций, если $a \geqslant 1$. В обоих случаях постоянные (соответствующие $r = 0$) являются функциями из E.

2) Точно так же убеждаемся в том, что функции $x \to \cos \omega x$ и $x \to \sin \omega x$ принадлежат E, если

$$\omega = \sin \omega a.$$

Если ω — решение этого уравнения, то ω тоже будет решением. Найдем положительные решения, исследуя поведение функции ψ, определенной для $\omega \geqslant 0$ формулой

$$\psi(\omega) = \sin \omega a - \omega \Rightarrow \psi'(\omega) = a \cos \omega a - 1.$$

При $a \leqslant 1$ производная ψ' отрицательна и убывающая функция ψ обращается в нуль только в 0.

При $a > 1$ производная ψ' обращается в нуль для некоторого значения ω_0, заключенного между 0 и $\pi/2a$, а также для значений $\omega_0 + 2k\pi/a$ и $2k\pi/a - \omega_0$.

	0		ω_0		$2\pi/a - \omega_0$		$\omega_0 + 2\pi/a$		$4\pi/a - \omega_0$	
ψ	0	$\nearrow$	M_0	$\searrow$	m_1	$\nearrow$	M_1	$\searrow$	m_2	$\nearrow$

Минимумы m_h отрицательны, поскольку

$$\sin a\,[2h\pi/a-\omega_0]=-\sin a\omega_0<0.$$

Таким образом, число точек, в которых ψ обращается в нуль, равно удвоенному числу положительных максимумов M_h. Последовательность максимумов убывает, так как

$$M_h=\sin[a\omega_0+2h\pi]-[\omega_0+2h\pi/a]=M_0-2h\pi/a,$$

и последний положительный максимум M_n, определяемый соотношениями

$$2n\pi/a\leqslant \sin a\omega_0-\omega_0<2(n+1)\pi/a,$$

будет иметь номер

$$n=E\left(\frac{a[\sin a\omega_0-\omega_0]}{2\pi}\right)=E\left(\frac{aM_0}{2\pi}\right),$$

где через $E(u)$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее u.

Тогда число положительных максимумов равно $n+1$, а число значений ω, в которых ψ обращается в нуль, равно $2(n+1)$. Окончательно получаем:

число строго положительных решений уравнения

$$\omega=\sin\omega a$$

при $a>1$ и $\omega_0=(1/a)\arccos(1/a)$ равно

$$2n+1=1+2E\left(\frac{a[\sin a\omega_0-\omega_0]}{2\pi}\right).$$

Замечание. Чертеж графиков функций $\omega\to\sin\omega a$ и $\omega\to\omega$ на одной системе осей может дать некоторое представление о полученных результатах, но не может сам по себе служить доказательством.

3. Возьмем такой интервал $[x_1, x_2]$, чтобы $x_2-x_1>2a$. На $[x_1, x_2]$ функция f будет равномерным пределом последовательности функций f_n из E, т. е. таких, что

$$f'_n(x)=\frac{1}{2}[f_n(x+a)-f_n(x-a)].$$

Если $x_1+a\leqslant x\leqslant x_2-a$, то числа $x+a$ и $x-a$ принадлежат $[x_1, x_2]$. Следовательно, на $[x_1+a, x_2-a]$ имеется равномерная сходимость:

последовательности $x\to f_n(x+a)$ к $x\to f(x+a)$,
последовательности $x\to f_n(x-a)$ к $x\to f(x-a)$,

последовательности $x\to f'_n(x)$ к $x\to\frac{1}{2}[f(x+a)-f(x-a)]$.

Так как последовательность производных f'_n равномерно сходится на $[x_1+a, x_2-a]$, то предел f последовательности f_n дифференцируем на этом отрезке и

$$f'(x)=\lim f'_n(x)=\frac{1}{2}[f(x+a)-f(x-a)].$$

Но всякое x принадлежит некоторому замкнутому интервалу длины $>2a$, например, $[x-2a, x+2a]$, и этот интервал может играть роль исходного интервала $[x_1, x_2]$ (функция f на любом интервале является равномерным пределом последовательности функций из E). Таким образом, функция f дифференцируема для всех x, и ее производная равна

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f(x+a)-f(x-a)],$$

чем доказано, что f принадлежит E.

5.18. Для $m=1$ имеем

$$\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}=1+\frac{2t}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1},$$

$$I_1=\int_0^1\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}\,dt=[t+\ln(t^2+1)-2\operatorname{arctg}t]_0^1=1+\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

Для одной части интеграла при любых значениях m имеем

$$\int_0^1 2t(t^2+1)^{-m}\,dt=\left[\frac{(t^2+1)^{1-m}}{1-m}\right]_0^1=\frac{1-2^{1-m}}{m-1}.$$

Для $m=2$, сделав замену $\varphi=\operatorname{arctg}t$, получаем

$$\int_0^1\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt=-\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{2}[\sin 2\varphi]_0^{\pi/4}=-\frac{1}{2},$$

$$I_2=-\frac{1}{2}+\frac{1-2^{-1}}{2-1}=0.$$

Для $m=\frac{3}{2}$ снова сделаем замену $\varphi=\operatorname{arctg}t$:

$$\int_0^1\frac{t^2-1}{(t^2+1)^{3/2}}\,dt=\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{\cos\varphi}-2\cos\varphi\right]d\varphi=$$

$$=\left[\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\varphi\right]_0^{\pi/4}=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2},$$

$$I_{3/2}=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+\frac{1-2^{-1/2}}{1/2}=2-2\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}).$$

В общем случае можем написать

$$\int_0^1 \frac{t^2-1}{(t^2+1)^m}\,dt=\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^{m-1}}-2\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^m}=J_{m-1}-2J_m.$$

Найдем рекуррентное соотношение между J_m и J_{m-1}, которое позволило бы свести вычисление J_m к J_1 при целом m, и к $J_{1/2}$ при целом $m-\frac{1}{2}$. Соотношение между J_m и J_{m-1} получается интегрированием по частям:

$$J_{m-1}=\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^{m-1}}=\left[\frac{t}{(t^2+1)^{m-1}}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{2(m-1)t^2\,dt}{(t^2+1)^m}=$$

$$=\frac{1}{2^{m-1}}+2(m-1)(J_{m-1}-J_m),$$

$$2(m-1)J_m=\frac{1}{2^{m-1}}+(2m-3)J_{m-1}.$$

Можно также получить значение J_m, применив дифференцирование под знаком интервала (см. задача 5.41).

5.19. Произведем интегрирование по частям, чтобы заменить логарифм его производной, которая рациональна:

$$I_x=\left[\frac{-\ln t}{1+t^2}\right]_1^x+\int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)}=\frac{-\ln x}{1+x^2}+\int_1^x \left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{-\ln x}{1+x^2}+\ln x-\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln 2]=\frac{-\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x^2}{x^2+1}\right).$$

При $x\to+\infty$

$$\frac{\ln x}{1+x^2}\to 0 \quad \text{и} \quad \ln\frac{2x^2}{x^2+1}\to\ln 2,$$

откуда

$$\lim_{x\to\infty} I_x=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Это первый пример интеграла на некомпактном интервале; по определению,

$$\lim_{x\to\infty} I_x=\int_1^{+\infty}\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{1}{2}\ln 2.$$

5.20. 1. Полюсы подынтегральной функции — мнимые и простые; следовательно, нам нужно найти разложение дроби на действительные элементы:

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{-Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

(как и дробь, разбиение на простейшие должно быть инвариантно при замене x на $-x$, так как оно единственно).

Находим A и B, задавая x конкретные значения:

$$x=0 \Rightarrow 1=2B \Rightarrow B=\frac{1}{2},$$

$$x=i \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{Ai+B}{i\sqrt{2}}+\frac{-Ai+B}{-i\sqrt{2}} \Rightarrow A=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

откуда

$$Ax+B=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}.$$

Поскольку $2x+\sqrt{2}$ есть производная знаменателя $x^2+x\sqrt{2}+1$, то

$$\int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx=\left[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)\right]_0^1=\ln(2+\sqrt{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2}\left[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)\right]_0^1=\sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Для другой дроби вычисления идентичны, и следовательно,

$$I=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln(2+\sqrt{2})-\ln(2-\sqrt{2})\right]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3+2\sqrt{2})+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

2. Получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}=\left[\frac{x}{x^4+1}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{4x^4\,dx}{(x^4+1)^2}=\frac{1}{2}+4(I-J),$$

$$J=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}I=\frac{3\pi\sqrt{2}+4}{32}+\frac{3\sqrt{2}}{32}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

3. Замечаем, что

$$K=J+\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^4+1)^2}=J+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Второй интеграл может быть вычислен при помощи замены переменного $\varphi=\operatorname{arctg} t$ или рекуррентной формулы из задачи 5.17 (в той задаче этот интеграл обозначается J_2):

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{8}\left[2\varphi+\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}.$$

5.21. Воспользуемся параметрическим представлением соотношения

$$y=\sqrt{(x-a)(b-x)} \Leftrightarrow y \geqslant 0 \quad \text{и} \quad y^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

откуда в результате замены переменного

$$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos t; \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$

$$dx=-\frac{b-a}{2}\sin t\,dt, \qquad y=\frac{b-a}{2}\sin t \geqslant 0$$

получаем

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx=\int_\pi^0 -\frac{(b-a)^2}{4}\sin^2 t\,dt=$$

$$=\int_0^\pi \frac{(b-a)^2(1-\cos 2t)}{8}\,dt=\pi\frac{(b-a)^2}{8}.$$

5.22. Взяв за новое переменное $\sqrt{1+t}$, или еще проще, $u=\sqrt{1+t}-1$, получаем

$$I_x=\int_{\sqrt{1+x}-1}^{1} \frac{u+2}{u}\,2(u+1)\,du=[u^2+6u+4\ln u]_{\sqrt{1+x}-1}^{1}=$$

$$=11-x-4\sqrt{1+x}-4\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right).$$

Известно, что

$$\frac{dI_x}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\int_3^x \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}\,dt\right)=-\frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1},$$

в чем легко убедиться непосредственным вычислением.

Если $x \to 0$, то $\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ стремится к $-\infty$, а остальные члены — к конечным пределам; следовательно, I_x стремится к $+\infty$. Этот факт можно получить и следующим образом:

$$1<\sqrt{1+t}<1+\frac{t}{2} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}>\frac{2}{1+\frac{1}{2}t-1}=\frac{4}{t};$$

функция $4/t$ не интегрируема на $[0, 3]$, а значит, и рассматриваемая функция тоже.

5.23. Делаем замену $t=\sqrt[3]{x}$; это дает

$$I=\int_0^{\sqrt[3]{a}} \frac{3t^2\,dt}{t^3-2t+4};$$

далее имеем

$$\frac{3t^2}{t^3-2t+4}=\frac{3}{5}\left[\frac{2}{t+2}+\frac{3t-2}{t^2-2t+2}\right]=\frac{3}{5}\left[\frac{2}{t+2}+\frac{3(2t-2)+2}{2(t^2-2t+2)}\right],$$

$$I=\left[\frac{6}{5}\ln(t+2)+\frac{9}{10}\ln(t^2-2t+2)+\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(t-1)\right]_0^{\sqrt[3]{a}}=$$

$$=\frac{6}{5}\ln(\sqrt[3]{a}+2)+\frac{9}{10}\ln(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}+2)=$$

$$=\frac{3}{9}\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{a}-1)-\frac{21}{10}\ln 2+\frac{3\pi}{20}.$$

5.24. 1. $\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},\qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1;$

$$I=\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{1}\frac{(1+t^2)^2}{4t^3}\,dt=\left[-\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{2}\ln t+\frac{t^2}{8}\right]_{\sqrt{3}/3}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.$$

2. $\qquad du=-\sin x\,dx,\qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\qquad \cos\frac{\pi}{2}=0;$

$$I=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x\,dx}{(1-\cos^2 x)^2}=\int\limits_{0}^{1/2}\frac{du}{(1-u^2)^2}.$$

Двойные полюсы рациональной дроби равны 1 и -1; четность рациональной дроби позволяет получать без вычислений простейшие элементы относительно полюса -1 из элементов относительно полюса 1:

$$\frac{1}{(1-u^2)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}\right];$$

отсюда

$$I=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}+\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_0^{1/2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3.$$

5.25. Чтобы выяснить, приведет ли переход к переменным $\sin x$, $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$ (выбор, вообще говоря, более выгодный, чем $\operatorname{tg} x/2$) к интегралу от рациональной функции, можно исследовать, будет ли дифференциальный элемент (понимая под этим дифференциал dx) инвариантен относительно преобразований

$x\to -x$ — новое переменное $\cos x$,

$x\to\pi-x$ — новое переменное $\sin x$,

$x\to\pi+x$ — новое переменное $\operatorname{tg} x$.

В изучаемом частном случае можно взять $\sin x=u$, ибо

$$\frac{\sin(\pi-x)\sin(2\pi-2x)}{\sin^4(\pi-x)+\cos^4(\pi-x)+1}(-dx)=\frac{\sin x\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}\,dx;$$

тогда получим

$$I=\int\limits_0^{\pi/3}\frac{2\sin^2 x\cos x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}=\int\limits_0^{\sqrt{3}/2}\frac{u^2\,du}{u^4-u^2+1}.$$

Биквадратный трехчлен u^4-u^2+1 не имеет действительных нулей; можно представить его в виде

$$u^4-u^2+1=(u^2+1)^2-3u^2=(u^2-u\sqrt{3}+1)(u^2+u\sqrt{3}+1),$$

и четность рациональной дроби позволяет записать

$$\frac{u^2}{u^4-u^2+1}=\frac{Au+B}{u^2-u\sqrt{3}+1}+\frac{-Au+B}{u^2+u\sqrt{3}+1}.$$

Задавая u численные значения, например, 0 и i, получаем

$$A=\frac{\sqrt{3}}{6},\qquad B=0.$$

Замена $v=-u$ преобразует интеграл

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}/2}\frac{-u\,du}{u^2+u\sqrt{3}+1}=\int\limits_0^{-\sqrt{3}/2}\frac{-v\,dv}{v^2-v\sqrt{3}+1}=\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{0}\frac{v\,dv}{v^2-v\sqrt{3}+1};$$

$$I=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\int\limits_0^{\sqrt{3}/2}\frac{u\,du}{u^2-u\sqrt{3}+1}+\int\limits_0^{\sqrt{3}/2}\frac{-u\,du}{u^2+u\sqrt{3}+1}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{u\,du}{u^2-u\sqrt{3}+1};$$

$$I=\frac{\sqrt{3}}{12}\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{(2u-\sqrt{3})+\sqrt{3}}{u^2-u\sqrt{3}+1}\,du=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\left[\ln(u^2-u\sqrt{3}+1)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2u-\sqrt{3})\right]_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2};$$

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{12}\ln 13.$$

5.26. 1. Замена $u=-x$ дает

$$I(a,b)=\int\limits_{-a}^{-b}\frac{(1-u^2)}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}(-du)=-I(-a,-b).$$

Если a и b — одного знака, то $x=1/v$ определяет на $[a,b]$ непрерывную замену и

$$I(a,b)=\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{(1-v^{-2})(-v^{-2}\,dv)}{(1+v^{-2})\sqrt{1+v^{-4}}}=\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{(1-v^2)\,dv}{(1+v^2)\sqrt{1+v^4}}=I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right).$$

В частности, для $b=1/a$ получаем

$$I\left(a, \frac{1}{a}\right)=I\left(\frac{1}{a}, a\right)=-I\left(a, \frac{1}{a}\right)=0.$$

2. Функция $x \to t = x + 1/x$ непрерывна и дифференцируема для $x \neq 0$ и строго возрастает для $x \geqslant 1$, поскольку

$$dt = \frac{x^2-1}{x^2}\,dx.$$

Если $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 1$, то эта функция определяет дифференцируемый гомеоморфизм замкнутых интервалов $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$, где $\alpha = a + 1/a$ и $\beta = b + 1/b$. С помощью такой замены находим

$$I(a, b)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{-x^2\,dt}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{-dt}{t\sqrt{t^2-2}}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{t}\right]_{\alpha}^{\beta},$$

$$I(a, b)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1}-\arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}\right]=f(a, b).$$

Если a и b заключены между 0 и 1, то обратные к ним числа будут $\geqslant 1$, и

$$I(a, b)=I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)=f\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)=f(a, b).$$

Если $a \leqslant 1 \leqslant b$, то точно так же получаем

$$I(a, b)=I\left(a, \frac{1}{a}\right)+I\left(\frac{1}{a}, b\right)=I\left(\frac{1}{a}, b\right)=f\left(\frac{1}{a}, b\right)=f(a, b).$$

Следовательно, в случае положительных a и b значение $I(a, b)$ известно. Если же a и b оба отрицательны, то, как мы знаем,

$$I(a, b)=-I(-a, -b)=-f(-a, -b)=f(a, b).$$

Наконец, функции $a \to I(a, b)$ и $b \to I(a, b)$ непрерывны, поскольку I есть интеграл от непрерывной функции. Тогда, взяв a одного знака с b, получаем

$$I(0, b)=\lim_{a\to 0} I(a, b)=\lim_{a\to 0} f(a, b)=f(0, b),$$

откуда выводим общую формулу

$$I(a, b)=I(0, b)-I(0, a)=f(0, b)-f(0, a)=f(a, b)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1}-\arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}\right].$$

5.27. 1. Легко находим

$$I_0=\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{2}{\pi},$$

$$I_1=\int_0^1 x\sin(\pi x)\,dx=\left[\frac{-x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\,dx=\frac{1}{\pi}.$$

Применяя дважды формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_{n+2} = \left[\frac{-x^{n+2}\cos(\pi x)}{\pi} + \frac{(n+2)\,x^{n+1}\sin(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 - \\ - \int_0^1 \frac{(n+2)(n+1)\,x^n \sin(\pi x)}{\pi^2}\,dx,$$

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n;$$

задавая n значения 0 и 2 получаем

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} I_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3},$$

$$I_4 = \frac{1}{4} - \frac{12}{\pi^2} I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}.$$

2. Для $0 < x < 1$ последовательность x^n строго убывает и

$$x^n \sin(\pi x) > x^{n+1}\sin(\pi x) \Rightarrow \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,dx > \int_0^1 x^{n+1}\sin(\pi x)\,dx.$$

Кроме того, если $0 < x < 1$, то

$$0 < x^n \sin(\pi x) < x^n \Rightarrow 0 < I_n < \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Последовательность I_n строго убывает и стремится к 0. Соотношение между I_n и I_{n+2} позволяет записать:

$$I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2 I_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (R)$$

так как I_{n+2} стремится к 0, когда $x \to +\infty$;

$$I_n = \frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow I_n \sim \frac{\pi}{n^2}.$$

Более точно выводим из (R), что

$$I_{n+2} > 0 \Rightarrow I_n < \frac{\pi}{(n+1)(n+2)},$$

и применяя это неравенство для индекса $n+2$, получаем

$$I_{n+2} < \frac{\pi}{(n+3)(n+4)} \Rightarrow I_n > \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \\ - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{\pi}{(n+3)(n+4)}.$$

5.28. Имеем $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$. Сделаем замену $x-1=\operatorname{sh}\varphi$ и обозначим через α решение уравнения $-1=\operatorname{sh}\alpha$; тогда

$$I=\int\limits_{\alpha}^{0}(\operatorname{sh}\varphi+1)\operatorname{ch}^2\varphi\,d\varphi=\left[\frac{\operatorname{ch}^3\varphi}{3}+\frac{\varphi}{2}+\frac{\operatorname{sh}2\varphi}{4}\right]_{\alpha}^{0}=$$
$$=\frac{1}{3}-\left(\frac{\operatorname{ch}^3\alpha}{3}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\operatorname{sh}2\alpha}{4}\right).$$
$$\operatorname{sh}\alpha=-1\Rightarrow\operatorname{ch}\alpha=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\alpha}=\sqrt{2}\Rightarrow e^{\alpha}=$$
$$=\operatorname{sh}\alpha+\operatorname{ch}\alpha=\sqrt{2}-1,$$
$$I=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

5.29. 1. Интегрируем по частям:

$$I_{\alpha+2}=\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha+1}x\,(\sin x\,dx)=$$
$$=-\left[\sin^{\alpha+1}x\cos x\right]_0^{\pi/2}+(\alpha+1)\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^2x\,dx,$$
$$I_{\alpha+2}=(\alpha+1)(I_{\alpha}-I_{\alpha+2})\Rightarrow(\alpha+2)I_{\alpha+2}=(\alpha+1)I_{\alpha}.$$

Это соотношение влечет:

$$f(\alpha+1)=(\alpha+2)I_{\alpha+1}I_{\alpha+2}=(\alpha+1)I_{\alpha}I_{\alpha+1}=f(\alpha).$$

Функция f имеет период 1, и для целого p

$$f(p)=f(0)=I_0I_1=\frac{\pi}{2}.$$

2. Имеем

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\sin x<1,$$
$$\alpha<\alpha'\Rightarrow\sin^{\alpha}x>\sin^{\alpha'}x\Rightarrow\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\,dx>\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha'}x\,dx.$$

В соответствии с неравенствами $p\leqslant\alpha<p+1$,

$$I_p\geqslant I_{\alpha}>I_{p+1},\qquad I_{p+1}\geqslant I_{\alpha+1}>I_{p+2},$$
$$\frac{p+2}{p+1}f(p)=(p+2)I_pI_{p+1}>(\alpha+1)I_{\alpha}I_{\alpha+1}>(p+1)I_{p+1}I_{p+2}=$$
$$=\frac{p+1}{p+2}f(p+1).$$

А поскольку $f(p+1)=f(p)=f(0)=\pi/2$, то

$$\frac{p+2}{p+1}\cdot\frac{\pi}{2}>(\alpha+1)I_{\alpha}I_{\alpha+1}>\frac{p+1}{p+2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Применение предыдущего двойного неравенства к значению $\alpha+n$ параметра дает

$$\frac{n+p+2}{n+p+1}\cdot\frac{\pi}{2}>f(\alpha+n)>\frac{n+p+1}{n+p+2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности $f(\alpha+n)$ равен $\pi/2$; но функция f имеет период 1; значит, $f(\alpha+n)=f(\alpha)$:

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha+n)=f(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

3. Функция $\alpha\to I_\alpha$ убывает:

$$I_\alpha>I_{\alpha+1}>I_{\alpha+2}\Rightarrow 1>\frac{I_{\alpha+1}}{I_\alpha}>\frac{I_{\alpha+2}}{I_\alpha}=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$$

Отношение $I_{\alpha+1}/I_\alpha$, заключенное между 1 и $(\alpha+2)/(\alpha+1)$, стремится к 1 при $\alpha\to+\infty$; отсюда

$$f(\alpha)=\alpha I_\alpha^2\frac{I_{\alpha+1}}{I_\alpha}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \alpha I_\alpha^2\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow I_\alpha\simeq\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

5.30. 1. F есть отображение E в R; значит, достаточно проверить, что если λ и μ — произвольные действительные числа, то

$$F(\lambda A+\mu B)=\lambda F(A)+\mu F(B);$$

но это хорошо известное свойство интеграла.

2. Так как степень f не превосходит n, то можно рассмотреть

$$F(f)=\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Этот интеграл может обратиться в нуль лишь в том случае, если непрерывная (как многочлен) функция f^2 тождественно равна нулю. Следовательно, если F — нулевая форма, то f — нулевой многочлен.

Отображение $f\to F$ пространства E в сопряженное пространство E^* линейно (действительно, $\lambda f_1+\mu f_2\to\lambda F_1+\mu F_2$), и стало быть,

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_iF_i=0\Leftrightarrow\sum_{1}^{p}\lambda_if_i=0.$$

3. Отображение $f\to F$ пространства E в E^* линейно и имеет, в силу п. 2, нулевое ядро; следовательно, образом пространства E при этом отображении является подпространство E' пространства E^*, имеющее одинаковую с E размерность. Но, как известно, само E^* имеет ту же размерность, что и E, значит, его подпространство E' имеет одинаковую с ним размерность, а стало быть, E' совпадает с E^*, и любая линейная форма G на E яв-

ляется элементом из E', т. е. существует такой многочлен g степени, не превосходящей n, что,

$$G(A) = \int_a^b g(x) A(x)\, dx.$$

5.31. 1. Доказательство проводится при помощи формулы интегрирования по частям, примененной k раз:

$$\int_{-1}^{1} A(x)\left\{\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\right\}dx = \left[\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p A^{(p)}(x)\left\{\frac{d^{k-p-1}}{dx^{k-p-1}}(x^2-1)^k\right\}\right]_{-1}^{1} + $$
$$+ (-1)^k \int_{-1}^{1} A^{(k)}(x)(x^2-1)^k\, dx.$$

В точках -1 и 1 производные порядка $< k$ от $(x^2-1)^k$ равны нулю; следовательно, внеинтегральное выражение равно нулю; с другой стороны, $A^{(k)}(x)=0$, так как степень A строго меньше k.

2. Решение получается в результате изучения нулей последовательных производных

$$\frac{d^h}{dx^h}(x^2-1)^k$$

(см. 3.52, п. 4, многочлен U_p пропорционален D).

3. Легко убеждаемся в том, что если A и B принадлежат V, а λ и μ — произвольные действительные числа, то многочлен $\lambda A + \mu B$ принадлежит V. Кроме того, многочлены D, Dx, ..., Dx^{k-1} образуют базис в V.

Если A кратно D, то по определению $A = DQ$, где Q имеет степень, не превосходящую $2k-1-k = k-1$, и, как мы видели,

$$\int_{-1}^{1} D(x) Q(x)\, dx = 0 \qquad (\deg Q < k).$$

Точно так же,

$$l_i(A) = A(x_i) = D(x_i) Q(x_i) = 0.$$

Обозначим через Δ_i многочлен

$$\frac{D}{x - x_i} = \prod_{j \neq i}(x - x_j).$$

Многочлены Δ_i независимы и составляют базис векторного подпространства V' многочленов степени, строго меньшей степени D; это пространство V' является дополнительным к пространству V:

$$l_j(\Delta_i) = 0, \quad \text{если} \quad j \neq i, \quad l_i(\Delta_i) = \prod_{j \neq i}(x_i - x_j) \neq 0.$$

Допустим, что формы l_j удовлетворяют соотношению

$$\sum_{l} \lambda_l l_l = 0 \Leftrightarrow \sum_{l} \lambda_l l_l(A) = 0, \quad \forall A.$$

Взяв в качестве A многочлен Δ_i, получим

$$\sum_{j} \lambda_j l_j(\Delta_i) = \lambda_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) = 0.$$

Отсюда все коэффициенты λ_j равны нулю, и следовательно, формы l_j независимы.

Если $\mathscr{L}$ — форма из W, то коэффициенты μ_i находятся из условий

$$\left(\mathscr{L} - \sum_{i} \mu_i l_i\right)(\Delta_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

В самом деле, $\mathscr{L}(\Delta_j) - \mu_j l_j(\Delta_j) = 0$, что и определяет коэффициенты μ_j. Форма

$$\mathscr{L} - \sum_{i} \mu_i l_i,$$

по условию, равна нулю на пространстве V; на дополнительном к V пространстве V' она равна нулю в силу выбора μ_i (V' порождается Δ_j); значит, она равна нулю на всем пространстве. Всякая форма из W есть линейная комбинация независимых форм l_i, и стало быть, l_i составляют базис пространства W.

4. Форма l принадлежит W; поэтому она является линейной комбинацией форм l_i базиса пространства W, т. е. существуют такие числа m_i, что

$$l = \sum_{i=1}^{k} m_i l_i \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} m_i A(x_i)$$

для любого многочлена A из E, или, иными словами, многочлена A степени, не превосходящей $2k - 1$.

Для нахождения m_i возьмем в качестве A последовательно все многочлены Δ_j:

$$\int_{-1}^{1} \Delta_j(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta_j(x_i) = m_j \Delta_j(x_j).$$

По определению,

$$D(x) = (x - x_j)\,\Delta_j(x),$$

$$D'(x) = \Delta_j(x) + (x - x_j)\,\Delta_j'(x) \Rightarrow D'(x_j) = \Delta(x_j),$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{D(x)}{x - x_j}\,dx = m_j D'(x_j).$$

5.32. Если $0 \leqslant x < 1$, то функция f положительна;

$$\frac{x}{1 + x^2} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \Rightarrow f(x) < \frac{1}{\sqrt{1 - x}}.$$

Положительная функция f мажорируется интегрируемой функцией $(1-x)^{-1/2}$, и значит, она интегрируема. Мы знаем, что замена переменного переводит сходящийся интеграл в сходящийся (см. Пизо и Заманский, книга IV, гл. II, § 3). Делаем замену $x^2 = t$; получаем

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^{1-0} \frac{dt}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}.$$

Затем делаем замену $\varphi = \arccos t$; получаем

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/2}^{+0} \frac{-\sin\varphi\, d\varphi}{(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\cos^2\varphi/2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

(Заметим, что после второй замены интеграл I может быть определен на замкнутом интервале $[0, \pi/2]$, т. е. компактном.)

5.33. Известно, что для любого $\alpha > 0$ и для $x \to 0$

$$x^\alpha \ln x \to 0.$$

Но тогда и $x^{\alpha p}(\ln x)^p \to 0$. Если взять $\alpha = 1/2p$, то, по определению предела, найдется такое x_0, что

$$x < x_0 \Rightarrow |x^{1/2}(\ln x)^p| < 1 \Rightarrow |(\ln x)^p| < x^{-1/2}.$$

Функция $|(\ln x)^p|$ мажорируется интегрируемой функцией $x^{-1/2}$; значит, эта функция и функция $(\ln x)^p$ интегрируемы на $]0, 1]$. Сделаем замену $t = \ln x$, т. е. $x = e^t$; тогда

$$I = \int\limits_{-\infty}^{0} t^p e^t\, dt.$$

Будем вычислять интеграл $p+1$ кратным интегрированием по частям, но в соответствии с требованием будем применять этот способ на компактном интервале $[u, 0]$, а затем перейдем к пределу при $u \to -\infty$:

$$\int\limits_u^0 t^p e^t\, dt = \left[e^t\left(t^p - pt^{p-1} + \ldots + (-1)^p p!\right)\right]_u^0 =$$
$$= (-1)^p p! - e^u\left(u^p - pu^{p-1} + \ldots + (-1)^p p!\right).$$

Но мы знаем, что при $u \to -\infty$ произведение показательной функции e^u на многочлен стремится к 0, поэтому получаем

$$I = \lim_{u\to-\infty} \int\limits_u^0 t^p e^t\, dt = (-1)^p p!$$

5.34. Логарифмическая функция возрастает, так что

$$\frac{p}{n} < x \Rightarrow \ln\frac{p}{n} < \ln x \Rightarrow \frac{1}{n}\ln\frac{p}{n} < \int\limits_{p/n}^{(p+1)/n} \ln x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1} \ln\frac{p}{n} < \sum_{p=1}^{n-1} \int\limits_{p/n}^{(p+1)/n} \ln x\,dx = \int\limits_{1/n}^{1} \ln x\,dx.$$

Точно так же,

$$x < \frac{p+1}{n} \Rightarrow \ln x < \ln\frac{p+1}{n} \Rightarrow \int\limits_{p/n}^{(p+1)n} \ln x\,dx < \frac{1}{n}\ln\frac{p+1}{n}.$$

Последние неравенства справедливы и при $p=0$, так как логарифмическая функция интегрируема на $]0, 1/n]$; отсюда выводим, что

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \ln\frac{p+1}{n} > \sum_{p=0}^{n-1} \int\limits_{p/n}^{(p+1)/n} \ln x\,dx = \int\limits_{+0}^{1} \ln x\,dx.$$

Замечая, что $\ln(n/n)=0$, видим, что рассматриваемые суммы совпадают и что

$$\int\limits_{+0}^{1} \ln x\,dx < \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\frac{p}{n} < \int\limits_{1/n}^{1} \ln x\,dx.$$

Если $1/n \to 0$, то интеграл

$$\int\limits_{1/n}^{1} \ln x\,dx$$

имеет предел

$$\int\limits_{+0}^{1} \ln x\,dx;$$

по определению последнего, мы получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\frac{p}{n} = \int\limits_{+0}^{1} \ln x\,dx = [x\ln x - x]_{+0}^{1} = -1.$$

Рассматриваемое выражение может быть записано так:

$$u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \sqrt[n]{\prod_{1}^{n} \frac{p}{n}} \Rightarrow \ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \ln\frac{p}{n}.$$

Но, как известно, последовательность $\ln u_n$ имеет предел, равный -1, и значит (по непрерывности показательной функции), последовательность u_n имеет предел $e^{-1} = 1/e$.

5.35. 1. Функция $(t^2+1)P/Q$ непрерывна при $t \geqslant a$ и имеет конечный предел при $t \to \infty$; следовательно, эта функция ограничена на интервале $[a, +\infty[$ и существует такое число k, что

$$\left|\sin t \frac{P(t)}{Q(t)}\right| \leqslant \left|\frac{P(t)}{Q(t)}\right| \leqslant \frac{k}{t^2+1}, \qquad \forall t \geqslant a.$$

Функция $t \to k/(t^2+1)$ интегрируема на $[a, +\infty[$, а значит, функция

$$t \to \sin \frac{P(t)}{Q(t)}$$

абсолютно интегрируема.

2. Проинтегрируем по частям на компактном интервале $[0, x]$; получим

$$\int_0^x \frac{t}{t^2+1}(\sin t\, dt) = \frac{-x\cos x}{x^2+1} + \int_0^x \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos t\, dt.$$

Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos t\, dt$$

сходится в силу п. 1; выражение

$$\frac{-x\cos x}{x^2-1}$$

стремится к 0 при $x \to +\infty$; следовательно, при $x \to \infty$

$$\int_0^x \frac{t\sin t}{1+t^2}\, dt \to \int_0^{+\infty} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos t\, dt.$$

Интеграл I, по определению, сходится.

3. Интегрируем по частям:

$$\int_a^x \frac{A(t)}{B(t)}(\sin t\, dt) =$$

$$= \frac{-\cos x\, A(x)}{B(x)} + \frac{\cos a A(a)}{B(a)} + \int_a^x \cos t \frac{A'(t)\, B(t) - A(t)\, B'(t)}{B^2(t)}\, dt.$$

Последний интеграл абсолютно сходится, так как

$$\deg A'B - AB' = \deg A + \deg B - 1 = 2\deg B - 2 = \deg B^2 - 2.$$

При $x \to +\infty$ этот интеграл имеет предел; функция

$$x \to \frac{-\cos xA(x)}{B(x)}$$

имеет пределом 0, и значит, исследуемый интеграл сходится.

Замечание. Сходимость интеграла можно установить, применяя критерий Коши и вторую формулу о среднем (см. задачу 5.10); действительно, существует такое t_0, что функция $t \to A(t)/(B(t)$ монотонна на $[t_0, +\infty[$. Если x и x' больше t_0, то

$$\int_x^{x'} \sin t \frac{A(t)}{B(t)} dt = \frac{A(x)}{B(x)} \int_x^{\xi} \sin t\, dt + \frac{A(x')}{B(x')} \int_{\xi}^{x'} \sin t\, dt.$$

Каждый из интегралов в правой части по абсолютному значению не превосходит числа 2, и значит,

$$\left| \int_x^{x'} \sin t \frac{A(t)}{B(t)} dt \right| \leqslant 2 \left| \frac{A(x)}{B(x)} \right| + 2 \left| \frac{A(x')}{B(x')} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x' \to +\infty}} \int_x^{x'} \sin t \frac{A(t)}{B(t)} dt = 0,$$

чем доказана сходимость интеграла.

5.36. 1. Очевидно, что на интервале $[1, +\infty[$

$$0 < \frac{1}{(1 + x^\alpha)(1 + \lambda x)} < \frac{1}{x^\alpha (1 + \lambda x)} < \frac{1}{\lambda x^{\alpha+1}}.$$

Функции

$$x \to \frac{1}{(1 + x^\alpha)(1 + \lambda x)} \quad \text{и} \quad x \to \frac{1}{x^\alpha (1 + \lambda x)}$$

положительны и мажорируются функцией

$$x \to \frac{1}{\lambda x^{\alpha+1}},$$

интегрируемой на $[1, +\infty[$, поскольку $\alpha + 1 > 1$; значит, они интегрируемы на $[1, +\infty[$.

2. При $\alpha < 1$ из неравенств

$$0 < \frac{1}{x^\alpha (1 + \lambda x)} < \frac{1}{x^\alpha}$$

следует, что функция

$$x \to \frac{1}{x^\alpha (1 + \lambda x)}$$

интегрируема на $]0, 1]$, а стало быть, и на $]0, +\infty[$; сделав замену $t = \lambda x$, получаем

$$\int_{+0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (1 + \lambda x)} = \lambda^{\alpha-1} \int_{+0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1 + t)} \Rightarrow I(\lambda) - \lambda^{\alpha-1} \int_{+0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1 + t)} =$$

$$= - \int_{+0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha (1 + \lambda x)}.$$

Для значений x из интервала $]0, 1]$ имеем

$$\frac{1}{1+\lambda} \leqslant \frac{1}{1+\lambda x} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\lambda} \int\limits_{+0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \int\limits_{+0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha (1+\lambda x)} \leqslant \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha};$$

отсюда при $\lambda \to 0$

$$\int\limits_{+0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha (1+\lambda x)}$$

стремится к $1/(1-\alpha)$, т. е. к общему пределу мажоранты и миноранты, и следовательно,

$$I(\lambda) - \lambda^{\alpha-1} \int\limits_{+0}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (1+t)} \to \frac{-1}{1-\alpha}.$$

3. Условия $\beta > 0$ и $x > 1$ влекут неравенства

$$0 < \frac{1}{x^\beta (1+x^\alpha)(1+\lambda x)} < \frac{1}{(1+x^\alpha)(1+\lambda x)}.$$

Таким образом, сходимость $K(\lambda)$ является следствием сходимости $J(\lambda)$. Кроме того, положительная функция

$$x \to \frac{1}{x^\beta (1+x^\alpha)},$$

мажорируемая функцией

$$x \to \frac{1}{x^{\alpha+\beta}},$$

интегрируема, ибо последняя интегрируема на $[1, +\infty[$ (поскольку $\alpha+\beta > 1$), и

$$0 < K(\lambda) - \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta (1+x^\alpha)} =$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\lambda x\, dx}{x^\beta (1+x^\alpha)(1+\lambda x)} < \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\lambda\, dx}{x^{\alpha+\beta-1} (1+\lambda x)}.$$

Полученная мажоранта является интегралом $I(\lambda)$ относительно показателя $\alpha+\beta-1$, который, по предположению, заключен между 0 и 1. Тогда (в силу п. 2) при $\lambda \to 0$

$$\lambda \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\beta-1} (1+\lambda x)} \simeq \lambda \cdot \lambda^{\alpha+\beta-2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\beta-1} (1+x)}.$$

Предел этой мажоранты, одновременно с пределом величины $\lambda^{\alpha+\beta-1}$, равен 0; таким образом, доказано, что

$$\lim_{\lambda \to 0} K(\lambda) - \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta (1+x^\alpha)} = 0.$$

4. Формула для суммы членов геометрической прогрессии позволяет записать

$$\frac{1}{1+x^{\alpha}}=\frac{1}{x^{\alpha}(1+x^{-\alpha})}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{-k\alpha}+(-1)^{n}\frac{x^{-n\alpha}}{1+x^{\alpha}},$$

$$J(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-k\alpha}\,dx}{1+\lambda x}+(-1)^{n}\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-n\alpha}}{(1+x^{\alpha})(1+\lambda x)}\,dx.$$

Интегралы правой части этого равенства были изучены в п. 2 $(0<k\alpha<1)$, и (последний) в п. 3 $(0<\beta=n\alpha\leqslant 1)$; отсюда следует, что при $\lambda\to 0$

$$(-1)^{k-1}\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-k\alpha}}{1+\lambda x}\,dx-C_{k}\lambda^{k\alpha-1}\to\frac{(-1)^{k}}{1-k\alpha},$$

если положить

$$C_{k}=(-1)^{k-1}\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{t^{k\alpha}(1+t)};$$

кроме того, при $\lambda\to 0$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-n\alpha}\,dx}{(1+x^{\alpha})(1+\lambda x)}\to\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{n\alpha}(1+x^{\alpha})},$$

а значит,

$$J(\lambda)-\sum_{k=1}^{n}C_{k}\lambda^{k\alpha-1}\to\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{1-k\alpha}+(-1)^{n}\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{n\alpha}(1+x^{\alpha})}.$$

5. Если $\alpha=1/n$, о в исследовании, проведенном в п. 4, изменится только то, что относится к интегралу

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-n\alpha}\,dx}{1+\lambda x}=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\lambda x)}=-\ln\lambda+\ln(1+\lambda);$$

при $\lambda\to 0$

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{-n\alpha}\,dx}{1+\lambda x}+\ln\lambda$$

стремится к 0, и значит,

$$J(\lambda)-\sum_{k=1}^{n-1}C_{k}\lambda^{k/(n-1)}-(-1)^{n}\ln\lambda\to\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k}}{1-k/n}.$$

5.37. 1. Сделаем замену $kx = t$, не влияющую на сходимость интеграла; тогда

$$\int_u^{+\infty} \frac{f(kx)}{x}\,dx = \int_{ku}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{ku}^{1} \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Функция $t \to f(t)/t$ интегрируема на $[ku, 1]$, так как она, по условию, непрерывна и интегрируема на $[1, +\infty[$; следовательно, она интегрируема на $[ku, +\infty[$. Применяя предыдущий результат для значений $k = b$ и $k = a$, получаем

$$\int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \int_{bu}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{au}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

2. Функция

$$x \to \frac{f(bx) - f(ax)}{x}$$

интегрируема на $[0, +\infty[$, если интеграл от этой функции на $[u, +\infty[$ имеет предел при $u \to 0$, т. е. если имеет предел интеграл

$$\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Если $u \to 0$, то

$$S(u) = \sup_{t \in [au,\, bu]} |f(t) - f(0)|$$

стремится к 0 (непрерывность функции f в 0) и

$$\left| \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(0)}{t}\,dt \right| \leqslant S(u) \left| \int_{bu}^{au} \frac{dt}{t} \right| = S(u) \ln \frac{b}{a}.$$

При этих условиях, если $u \to 0$, то

$$\int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{bu}^{au} f(0)\,\frac{dt}{t} + \int_{bu}^{au} \frac{f(t) - f(0)}{t}\,dt \to f(0) \ln \frac{b}{a},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = \lim_{u \to 0} \int_u^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,dx = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$

3. Показательная функция непрерывна на R; при $t \to +\infty$ произведение te^{-t} стремится к 0, поэтому существует такое t_0, что

$$t \geqslant t_0 \Rightarrow te^{-t} < 1 \Rightarrow \frac{e^{-t}}{t} < \frac{1}{t^2}.$$

Следовательно, функция $t \to e^{-t}/t$ интегрируема на $[1, +\infty[$; функция $t \to e^{-t}$ удовлетворяет условиям, наложенным на функцию f в п. 2. Таким образом, функция

$$t \to \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$$

интегрируема на $]0, +\infty[$ и

$$\int_{+0}^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}\, dt = e^0 \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{a}{b}.$$

5.38. 1. Функция f непрерывна, дифференцируема, и следовательно,

$$f'(u) = \frac{u^2 - ab}{2u^2};$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & \sqrt{ab} & +\infty \\ \hline t & +\infty & & +\infty \\ & \searrow & \sqrt{ab} & \nearrow \end{array}$$

Обратная функция к f может быть определена только в том случае, если f — инъективная функция, а поскольку функция f непрерывна, то только в том случае, если она строго монотонна (см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 3-й раздел, § 2). Здесь необходимо сузить определение f на один из интервалов $]0, \sqrt{ab}]$ или $[\sqrt{ab}, +\infty[$.

Сужение f_1 функции f на $]0, \sqrt{ab}]$ имеет обратную функцию φ_1, определенную на $[\sqrt{ab}, +\infty[$ следующим образом:

$$u = \varphi_1(v) = v - \sqrt{v^2 - ab}.$$

Сужение f_2 функции f на $[\sqrt{ab}, +\infty[$ имеет обратную функцию φ_2, определенную на том же полуоткрытом интервале $[\sqrt{ab}, +\infty[$ формулой

$$u = \varphi_2(v) = v + \sqrt{v^2 - ab}.$$

2. Функция $\theta \to u$ непрерывна и строго возрастает на $[0, \pi/2]$; она имеет производную, равную

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{(b^2 - a^2)\cos\theta \sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}.$$

Обратная функция $u \to \theta$ непрерывна и строго возрастает на $[a, b]$; она имеет производную, конечную на $[a, b]$ и бесконечную в точках a и b. Следовательно, замена $\theta \to u$ переводит I в интеграл на некомпактном интервале $]a, b[$; но этот интеграл сходится, так как он получен при помощи замены переменного из итеграла от непрерывной функции на компактном интервале $[0, \pi/2]$, а замена переменного сохраняет сходимость интегралов.

Легко видеть, что

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{b^2-u^2}{b^2-a^2}}, \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{u^2-a^2}{b^2-a^2}},$$

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}.$$

Взяв за новое переменное v, мы должны различать два случая, в зависимости от того, будет ли $u \leqslant \sqrt{ab}$ или $u \geqslant \sqrt{ab}$ (в обоих случаях обратные к f функции φ_1 и φ_2 имеют не одинаковое выражение). Согласно п. 1,

$$u = v + \varepsilon\sqrt{v^2 - ab}, \qquad \text{где} \qquad \varepsilon = \frac{u-\sqrt{ab}}{|u-\sqrt{ab}|};$$

отсюда

$$du = \frac{\varepsilon u\, dv}{v^2-ab}, \quad (b^2-u^2)(u^2-a^2) = -4u^2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2\right],$$

$$\int_a^{\sqrt{ab}} \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} = \int_{(a+b)/2}^{\sqrt{ab}} \frac{-dv}{2\sqrt{v^2-ab}\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2}}$$

$$(\varepsilon = -1),$$

$$\int_{\sqrt{ab}}^{b} \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}} = \int_{\sqrt{ab}}^{(a+b)/2} \frac{+dv}{2\sqrt{v^2-ab}\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2}} \quad (\varepsilon = 1).$$

Окончательно, складывая полученные интегралы, получаем

$$I(a, b) = \int_{\sqrt{ab}}^{(a+b)/2)} \frac{dv}{\sqrt{[v^2-ab]\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - v^2\right]}} = I\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right).$$

(Переход от переменного u к переменному v переводит I в интеграл того же типа, но в котором a и b заменены на $\sqrt{ab}$ и $(a+b)/2$ как в пределах интегрирования, так и в подынтегральном выражении).

3. Мы показали, что $I(a, b) = I(a_1, b_1)$; по индукции легко доказать, что $I(a, b) = I(a_n, b_n)$, т. е.

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}};$$

но

$$a_n \leqslant \sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta} \leqslant b_n \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{b_n} \leqslant I(a, b) \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a_n}.$$

Число $I(a, b)$ заключено между двумя выражениями, имеющими общий предел $\pi/2l$; следовательно, $I(a, b)$ равно этому пределу.

5.39. 1. Простые оценки функции синус показывают, что

$$0 < t \leqslant 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \leqslant \frac{t^2}{t^\alpha} = t^{2-\alpha}, \quad \text{где} \quad 2-\alpha > -1,$$

$$1 \leqslant t \Rightarrow \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha > 1.$$

Положительная функция

$$t \to \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}.$$

мажорируемая на интервалах $]0, 1]$ и $[1, +\infty[$ интегрируемыми функциями, интегрируема на каждом из этих интервалов, а значит, и на $]0, +\infty[$.

2. Прежде всего заметим, что неравенства, которым удовлетворяет функция φ, соответствуют значениям $t/n \leqslant 1$ или $t/n \geqslant 1$, т. е. $t \leqslant n$ или $t \geqslant n$. Далее, имеем

$$0 < t \leqslant n \Rightarrow \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\right| \leqslant \frac{Mt^\beta}{n^\beta}\cdot\frac{t^2}{t^2} = M\frac{t^\beta}{n^\beta},$$

где $\beta > -1$,

$$n \leqslant t \Rightarrow \left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\right| \leqslant \frac{K}{t^2}.$$

Функции $t \to Mt^\beta/n^\beta$ и $t \to K/t^2$ интегрируемы соответственно на $]0, n]$ и $[n, +\infty[$; стало быть, интеграл абсолютно сходится.

Используя исходные мажоранты функции $|\varphi|$ и мажорируя $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ единицей для $t \leqslant 1$ и величиной $1/t^2$ для остальных t, получаем

$$\left|\int_0^1 \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{Mt^\beta}{n^\beta}\,dt = \frac{M}{n^\beta}\cdot\frac{1}{1+\beta},$$

$$\left|\int_1^n \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_1^n \frac{Mt^{\beta-2}}{n^\beta}\,dt = \begin{cases} \dfrac{M}{n^\beta}\cdot\dfrac{1-n^{\beta-1}}{1-\beta} < \dfrac{M}{n^\beta}\cdot\dfrac{1}{1-\beta}, & \beta < 1 \\ \dfrac{M}{n}\ln n, \text{ если } \beta = 1, \end{cases}$$

$$\left|\int_n^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{K}{t^2}\,dt = \frac{K}{n} \leqslant \frac{K}{n^\beta}, \text{ так как } \beta \leqslant 1.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$\text{если } \beta < 1, \quad \text{то} \quad |I_n| < \frac{1}{n^\beta}\left(\frac{M}{1+\beta} + \frac{M}{1-\beta} + K\right);$$

$$\text{если } \beta = 1, \quad \text{то} \quad |I_n| < \frac{M}{n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{M}{n}\ln n + \frac{K}{n};$$

а поскольку $\ln n > 1$ для $n \geqslant 3$, то

$$|I_n| < \frac{\ln n}{n}\left(\frac{3M}{2} + K\right).$$

3. Рассмотрим для $t \geqslant 0$ функцию φ_x:

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Эта функция удовлетворяет условиям п. 2. Действительно,

$$|\varphi_x(t)| \leqslant |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \leqslant 2Ht^{\gamma},$$

$$|\varphi_x(t)| \leqslant |f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|f(x)| \leqslant 4 \sup_{u \in R} |f(u)|;$$

эти неравенства совпадут с условиями п. 2, если положить

$$\beta = \gamma, \qquad M = 2H, \qquad K = 4 \sup_{u \in R} |f(u)|.$$

Тогда, как мы уже знаем,

$$\left|\int_0^{+\infty} \varphi_x\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin^2 t}{t^2} dt\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{4}{n^{\gamma}}\left(\dfrac{H}{1-\gamma^2} + \sup\limits_{u \in R} |f(u)|\right), & \text{если} \quad \gamma < 1, \\ \dfrac{\ln n}{n}\left(3H + 4 \sup\limits_{u \in R} |f(u)|\right), & \text{если} \quad \gamma = 1; \end{cases}$$

но

$$\int_0^{+\infty} \varphi_x\left(\frac{t}{n}\right) \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = F_n(x) - Cf(x).$$

Мажоранты, полученные для этой величины, не зависят от x; поэтому, обозначив

$$\|g\| = \sup_{x \in R} |g(x)|,$$

получаем

$$\|F_n - Cf\| \leqslant \frac{4}{n^{\gamma}}\left(\frac{H}{1-\gamma^2} + \|f\|\right), \qquad \text{если} \qquad \gamma < 1,$$

$$\|F_n - Cf\| \leqslant \frac{\ln n}{n}(3H + 4\|f\|), \qquad \text{если} \qquad \gamma = 1.$$

В обоих случаях последовательность $\|F_n - Cf\|$ сходится к 0, а стало быть, последовательность F_n равномерно сходится к Cf на действительной прямой.

5.40. 1. Напишем формулу Маклорена второго порядка:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{1+c}, \qquad \text{где} \qquad c \in]0, u[;$$

$$u \geqslant 0 \Rightarrow c \geqslant 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+c} < 1,$$

$$-\frac{u^2}{2} < \ln(1+u) < u \Rightarrow \frac{t^2}{n} - \frac{t^4}{2n^2} < \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) < \frac{t^2}{n};$$

отсюда сразу же выводим

$$-t^2+\frac{t^4}{2n} > -n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) > -t^2 \Rightarrow e^{-t^2+t^4/2n} > \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} >$$

$$> e^{-t^2} \Rightarrow 0 < \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} - e^{-t^2} < e^{-t^2}(e^{t^4/2n}-1) \leqslant e^{t^4/2n}-1.$$

$|t|$ мажорируется на $[a, b]$ числом $\theta = \sup(|a|, |b|)$, поэтому

$$\sup_{t\in[a,\,b]}\left|\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} - e^{-t^2}\right| \leqslant e^{\theta^4/2n}-1;$$

отсюда следует, что левая часть этого неравенства стремится к 0 при $n \to +\infty$, и стало быть, последовательность функций

$$t \to \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $t \to e^{-t^2}$.

Разложение бинома позволяет записать

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n} > 1+n\frac{t^2}{n} = 1+t^2,$$

откуда

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} < (1+t^2)^{-1},$$

а выше было показано, что

$$e^{-t^2} < \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

2. Функция $(1+t^2)^{-1}$ интегрируема на $[0, +\infty[$ и согласно п. 1

$$0 < e^{-t^2} < \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} < (1+t^2)^{-1},$$

чем обеспечивается интегрируемость на $[0, +\infty[$ двух других функций. Кроме того, эти неравенства показывают, что

$$0 < \int\limits_a^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt - \int\limits_a^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < \int\limits_a^{+\infty}(1+t^2)^{-1}\,dt = \operatorname{arctg}\frac{1}{a}.$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то последнее выражение будет меньше $\varepsilon/2$ при $a > (\operatorname{tg}\varepsilon/2)^{-1}$. Пусть a_0 — число, удовлетворяющее этому условию. Мы знаем, что на замкнутом интервале $[0, a_0]$ последовательность функций $t \to (1+t^2/n)^{-n}$ равномерно сходится к функции $t \to e^{-t^2}$, и следовательно,

$$\int\limits_0^{a_0} e^{-t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{a_0}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt,$$

т. е. можно указать такое N, что

$$n > N \Rightarrow \int_0^{a_0} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt - \int_0^{a_0} e^{-t^2}\, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая полученные неравенства, видим, что

$$n > N \Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \varepsilon.$$

Замечания. 1°. Число a_0 не входит в окончательное неравенство; оно служит только для определения числа N.

2°. Значение числа N может быть уточнено, если заметить, что, на основании п. 1,

$$\int_0^{a_0} \left[\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} - e^{-t^2}\right] dt < a_0 \sup_{0 \leqslant t \leqslant a_0} \left[\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} - e^{-t^2}\right] <$$

$$< a_0\left(e^{a_0^4/2n} - 1\right);$$

поэтому в качестве N можно взять корень уравнения

$$a_0\left(e^{a_0^4/2n} - 1\right) = \frac{\varepsilon}{2},$$

а именно,

$$N = \frac{a_0^4}{2\ln(1+\varepsilon/2a_0)},$$

однако, это ничего не меняет в доказательстве.

3. Сделаем замену $t = \sqrt{n}\operatorname{ctg}\varphi$; тогда

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = -\sqrt{n}\int_{\pi/2}^{0} \sin^{2n-2}\varphi\, d\varphi = \sqrt{n}\, I_{2n-2}.$$

Мы знаем (задача 5.29, п. 3), что

$$I_\alpha \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}},$$

и значит, при $\alpha \to +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_{2n-2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

5.41. Вычисляя интеграл, получаем

$$f_x(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right).$$

Функция $(t, y) \to (t^2+y)^{-1}$ имеет производные по y любого порядка, и n-я производная равна

$$(-1)^n (n!) (t^2+y)^{-n-1};$$

эта производная является непрерывной функцией от (t, y) на замкнутом прямоугольнике

$$0 \leqslant t \leqslant x, \qquad 0 \leqslant y_1 \leqslant y \leqslant y_2.$$

Следовательно, функция f_x бесконечно дифференцируема на любом интервале $[y_1, y_2]$ (доказывается индукцией по n), а значит (в силу того, что y_1 и y_2 — произвольные положительные числа > 0), и для любого $y > 0$, и

$$f_x^{(n)}(y) = (-1)^n (n!) \int_0^x (t^2+y)^{-n-1}\, dt.$$

Приложение:

$$f_x''(y) = 2\int_0^x \frac{dt}{(t^2+y)^3} \Rightarrow I = \frac{1}{2} f_1''(1),$$

$$f_1(y) = y^{-1/2} \operatorname{arctg}(y^{-1/2}),$$

$$f_1'(y) = -\frac{1}{2} y^{-3/2} \operatorname{arctg}(y^{-1/2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y(y+1)},$$

$$f_1''(y) = \frac{3}{4} y^{-5/2} \operatorname{arctg}(y^{-1/2}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y^2(y+1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2y+1}{y^2(y+1)^2},$$

$$I = \frac{1}{2} f_1''(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right] = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

5.42. 1. Очевидно,

$$P_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - e^{ik\pi/n})(\alpha - e^{-ik\pi/n});$$

$P_n(\alpha)$ есть многочлен от α, нулями которого служат корни порядка $2n$ из 1, причем каждый является нулем порядка 1, кроме 1, имеющей порядок 2, и -1, не являющейся нулем для $P_n(\alpha)$; следовательно,

$$P_n(\alpha) = (\alpha^{2n} - 1)\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}.$$

2. Среднее значение относительно разбиения $[0, \pi]$ на n равных частей равно

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right)\right];$$

но

$$\frac{1}{\pi} I(\alpha) = \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left[\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\alpha^{2n}-1)\right],$$

$$\frac{1}{\pi} I(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\alpha^{2n}-1|;$$

$\ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right|$ не зависит от n, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right| = 0;$$

$$|\alpha| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\alpha^{2n}-1| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\alpha^{2n}-1| = 0,$$

$$|\alpha| > 1 \Rightarrow |\alpha^{2n}-1| \simeq \alpha^{2n} \Rightarrow \ln|\alpha^{2n}-1| \simeq \ln(\alpha^{2n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\alpha^{2n}-1| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha^{2n} = \ln(\alpha^2).$$

Следовательно,

$$I(\alpha) = 0, \qquad \text{если} \quad |\alpha| < 1,$$

$$I(\alpha) = \pi \ln \alpha^2, \qquad \text{если} \quad |\alpha| > 1.$$

3. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) = \frac{2(\alpha - \cos x)}{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}.$$

Производная есть непрерывная функция от (x, α) на замкнутом прямоугольнике

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2,$$

если интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ не содержит ни -1, ни 1. Тогда, как мы знаем, функция $\alpha \to I(\alpha)$ дифференцируема для любого α, не равного ни 1, ни -1, и

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial\alpha} \{\ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\} = 2J(\alpha).$$

Следовательно,

$$J(\alpha) = 0, \qquad \text{если} \quad |\alpha| < 1,$$

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}, \qquad \text{если} \quad |\alpha| > 1.$$

4. Сделав замену $\operatorname{tg} x/2 = t$, получаем

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha(1+t^2) - (1-t^2)}{(1+\alpha^2)(1+t^2) - 2\alpha(1-t^2)} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Рациональная дробь интегрируется разложением на простейшие действительные дроби; в данном случае имеем (поступая при этом так, как если бы переменным было t^2)

$$\frac{1}{\alpha(1+t^2)} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{t^2 + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2},$$

откуда, взяв примитивную, получаем

$$J(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\left[\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right]_0^{+\infty},$$

$$|\alpha| < 1 \Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 0 \Rightarrow \left[\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow J(\alpha) = 0,$$

$$|\alpha| > 1 \Rightarrow \frac{1+\alpha}{1-\alpha} < 0 \Rightarrow \left[\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right]_0^{+\infty} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow J(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha}.$$

5.43. 1. Исследуем поведение функции T_x от одного переменного α, определенную на $[0, 1]$ формулой

$$T_x(\alpha) = 1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2.$$

Минимум трехчлена $T_x(\alpha)$ достигается при $\alpha = \cos x$ из замкнутого интервала $[0, 1]$, поскольку $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$, и равен $\sin^2 x$. Максимум достигается на одном из концов интервала; но

$$T_x(0) = 1, \qquad T_x(1) = 2 - 2\cos x = 4\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 1, \qquad \text{если} \qquad x \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

Стало быть, для любого (α, x) из прямоугольника $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$,

$$\sin^2 x \leqslant 1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2 \leqslant 1.$$

Отсюда, в силу неравенства $2 - 2\cos x > 0$, получаем

$$\frac{\sin^2 x}{2 - 2\cos x} \leqslant \frac{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}{2 - 2\cos x} \leqslant \frac{1}{2 - 2\cos x}.$$

Кроме того,

$$2 - 2\cos x = T_x(1) \geqslant \sin^2 x \Rightarrow \frac{1}{2 - 2\cos x} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{\sin^2 x}{2 - 2\cos x} = \cos^2\frac{x}{2} \geqslant \frac{3}{4}, \quad \text{так как } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

2. Рассматриваемые функции отрицательны; изучим их абсолютные значения, т. е. им противоположные, которые ставят в

соответствие x

$$\ln\frac{1}{\sin x} \quad \text{и} \quad \ln\frac{1}{2-2\cos x}.$$

На полуоткрытом интервале $]0, \pi/3]$ имеем

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2-2\cos x} \leqslant \ln\frac{1}{\sin x} \leqslant \ln\left(\frac{\pi}{2x}\right).$$

(относительно последнего неравенства см. задачу 4.39).

Функция $x \to \ln(\pi/2x) = -\ln(2x/\pi)$ интегрируема на $]0, \pi/3]$, ибо если $0 < \gamma < 1$, то $\ln(2x/\pi) = o(x^{-\gamma})$ при $x \to 0$. Стало быть, функции $x \to \ln\sin x$ и $x \to \ln(2-2\cos x)$ интегрируемы на $]0, \pi/3]$, а так как вторая непрерывна на $[\pi/3, \pi]$, то она интегрируема на $]0, \pi]$.

3. Мы можем записать

$$I(\alpha) - I(1) = \int_{+0}^{X} \ln\left(\frac{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}{2-2\cos x}\right)dx + I_X(\alpha) - I_X(1),$$

если положить

$$I_X(\alpha) = \int_X^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx.$$

Результаты п. 1 позволяют оценить сверху первый интеграл для $X < \pi/3$; именно,

$$\left|\int_{+0}^{X} \ln\left(\frac{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}{2-2\cos x}\right)dx\right| \leqslant \int_{+0}^{X} \ln\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = 2\left|\int_{+0}^{X} \ln(\sin x)\,dx\right|.$$

Интеграл K сходится; значит, по определению,

$$\lim_{X\to 0}\int_0^X \ln(\sin x)\,dx = \lim_{X\to 0}\left[\int_{+0}^{\pi/3} \ln(\sin x)\,dx - \int_X^{\pi/3} \ln(\sin x)\,dx\right] = 0.$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то, по определению предела, найдется такое конкретное значение X_0, для которого абсолютное значение первого интеграла меньше $\varepsilon/2$. На прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{2},$$

$$X_0 \leqslant x \leqslant \pi$$

функция $(\alpha, x) \to \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$ непрерывна; следовательно, функция $\alpha \to I_{X_0}(\alpha)$ непрерывна (Пизо и Заманский, гл. IV, 4-й раздел, § 2), и значит, найдется такое $\eta > 0$, что

$$|\alpha - 1| < \eta \Rightarrow |I_{X_0}(\alpha) - I_{X_0}(1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возвращаясь к выражению $I(\alpha)-I(1)$, видим, что

$$|\alpha-1|<\eta \Rightarrow |I(\alpha)-I(1)| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{+0}^{X_0} \ln\left(\frac{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}{2-2\cos x}\right)dx\right| + |I_{X_0}(\alpha)-I_{X_0}(1)|<\varepsilon,$$

т. е. что функция $\alpha\to I(\alpha)$ непрерывна в точке 1. (Еще раз заметим, что выбор X_0 делался для определения $\eta=\sup|\alpha-1|$, но непосредственно в заключении не фигурирует). Итак:

$$I(1)=\lim_{\alpha\to 1} I(\alpha)=0.$$

4. По определению $I(1)$,

$$I(1)=\int_{+0}^{\pi}\ln\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int_{+0}^{\pi}2\left[\ln 2+\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\right]dx=0,$$

$$\int_{+0}^{\pi}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=-\pi\ln 2.$$

Сделав замену $x/2=t$, а затем $\pi/2-t=u$, получаем

$$\int_{+0}^{\pi}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dt=2\int_{+0}^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt=-\pi\ln 2,$$

$$\int_{+0}^{\pi/2}\ln(\sin t)\,dt=\int_{0}^{\pi/2-0}\ln(\cos u)\,du=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

5.44. 1. Функция

$$t\to e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$$

стремится к 1 при $t\to 0$, и если положить ее в 0 равной 1, то получим непрерывную функцию на $[0,+\infty[$; следовательно, функции f_n полностью определены.

Функция

$$t\to e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$$

интегрируема, поскольку ее абсолютное значение мажорируется интегрируемой функцией e^{-xt}, и

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}.$$

На основании определения интеграла на $[0, +\infty[$ заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt = f(x).$$

И, наконец, поскольку установлено, что $|f(x)| \leqslant 1/x$, то f стремится к 0 при $x \to +\infty$.

2. Покажем, что f дифференцируема, изучая последовательность производных f'_n функций f_n; тем самым будет доказана и непрерывность f.

Функция

$$t \to \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\right] = -e^{-xt} \sin t$$

непрерывна на замкнутом прямоугольнике

$$0 \leqslant t \leqslant n, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

для любых x_1 и x_2; стало быть, функция f_n дифференцируема на $]0, +\infty[$ и имеет производную, равную

$$f'_n(x) = \int_0^n -e^{-xt} \sin t\, dt.$$

Интеграл вычисляется без труда при помощи примитивной:

$$-e^{-xt}e^{it} = -\left(\frac{e^{-xt}e^{it}}{i-x}\right)' = \left[e^{-xt}(\cos t + i \sin t)\, \frac{x+i}{x^2+1}\right]',$$

$$-e^{-xt} \sin t = \left[e^{-xt} \frac{x \sin t + \cos t}{x^2+1}\right]',$$

$$f'_n(x) = \left[e^{-xt} \frac{x \sin t + \cos t}{x^2+1}\right]_0^n = e^{-nx} \frac{x \sin n + \cos n}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Для исследования сходимости последовательности f'_n заметим, что

$$\left| e^{-nx} \frac{x \sin n + \cos n}{x^2+1} \right| \leqslant e^{-nx} \frac{x+1}{x^2+1} \leqslant 2e^{-nx}.$$

Функция $x \to e^{-nx}$ убывает; значит, если $x_0 > 0$, то

$$\left| f'_n(x) + \frac{1}{1+x^2} \right| \leqslant 2e^{-nx_0}, \qquad \forall x \in [x_0, +\infty[.$$

Последовательность функций f'_n равномерно сходится на $[x_0, +\infty[$ к функции

$$x \to -\frac{1}{x^2+1};$$

но тогда, как известно, функция f дифференцируема на

$[x_0, +\infty[$ как предел последовательности f_n, и ее производная равна

$$f'(x) = \lim f'_n(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Для любого $x > 0$ ей можно поставить в соответствие такое x_0, $0 < x_0 < x$, чтобы выполнялся предыдущий результат. Таким образом, функция f дифференцируема при любом $x > 0$, и

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Функция f есть примитивная для f', стремящейся к 0 при $x \to \infty$; следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

РАЗДЕЛ 6

ОТОБРАЖЕНИЯ R В R^p, R^p В R ИЛИ R^q, C В C. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задачи опираются на свойства, изложенные в главах V—IX книги III «Курса математики» Ш. Пизо и М. Заманского.

Хотя теория вектор-функций, т. е. отображений R^p в R или R^q, и имеет многочисленные геометрические приложения, все же в этом разделе представлены лишь задачи из анализа. Это не означает, что автору этой книги геометрические задачи представляются лишенными интереса. Дело только в том, что внимание, которое уделяется им в курсах математики, разностороннее, и если бы мы захотели тщательно излагать геометрию, то потребовалось бы значительное утяжеление этого задачника без особой пользы для многих студентов. Наконец, элементарные геометрические задачи почти сразу же сводятся к задачам анализа и не представляют особых трудностей для студентов, усвоивших программу алгебры и анализа, составляющего, впрочем, существенную часть курса математики.

Прежде чем перейти к конкретным свойствам, небезынтересно подчеркнуть аналогии, существующие между теоретическими фактами, относящимися к пространству R и к пространству R^p. Основные теоретические свойства пространства R^p одинаковы с R (такие, как теоремы Бореля—Лебега, Больцано—Вейерштрасса); свойства пределов и непрерывных функций тоже будут почти идентичны (например, определение пределов сходящихся последовательностей, равномерная непрерывность функции, определенной и непрерывной на замкнутом ограниченном множестве). Однако имеется и существенное различие: отношение порядка играет важную роль в свойствах, относящихся к R (например, монотонные функции), в то время как пространство R^p не является упорядоченным множеством (равно как и поле C комплексных чисел).

Существование трех *норм* в R^p не создает усложнения, ибо эти нормы эквивалентны, и следовательно, безразлично, какая из этих норм берется для исследования предела или для записи равномерной непрерывности. В R все три нормы сводятся к абсолютному значению; стало быть, норма в R^p является обобщением абсолютного значения в R и часто используется именно в этом смысле.

Для того чтобы выяснить, является ли дуга спрямляемой *жордановой*, часто оказывается полезной следующая теорема. Дифференцируемая вектор-функция, имеющая в качестве производной ограниченную функцию, определяет спрямляемую жорданову дугу. Спрямляемые жордановы дуги играют важную роль в теории двойных интегралов, ибо представляют собой плоские множества нулевой меры.

Для отображений R^p в R или в R^p чрезвычайно важным является понятие дифференцируемости, и свойства *дифференциала* используются очень часто. Для вычисления дифференциалов применимы классические правила:

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda\, df + \mu\, dg, \qquad d(fg) = g\, df + f\, dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, df - f\, dg}{g^2}.$$

Основная теорема о сложных функциях: суперпозиция двух дифференцируемых функций дифференцируема, и ее дифференциал есть суперпозиция двух дифференциалов (инвариантность дифференциала при замене переменных). Эта теорема позволяет также вычислять частные производные сложной функции, поскольку они служат коэффициентами дифференциала. Используется и следующий результат: если частные производные некоторой функции являются непрерывными функциями в окрестности рассматриваемой точки, то функция дифференцируема в этой точке.

Для изучения локальных свойств функции (пределы, относительный максимум и т. д.) удобнее представить *формулу Тейлора* в следующем виде. Если f имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, то

$$f(X+H) - f(X) = \frac{1}{1!}\left(\sum_p \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} h_k\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\sum_p \frac{\partial f(X)}{\partial x_k} h_k\right)^{[n]} + g_n(X, H)\,[V(H)]^n,$$

где функция $H \to g_n(X, H)$ стремится к 0, когда $H \to 0$ ($V(H)$ означает любую из трех норм).

Отображение $t \to e^{it}$ пространства R в C определяет изоморфизм аддитивной группы действительных чисел по модулю 2π и мультипликативной группы комплексных чисел с модулем 1. Вообще, удобнее пользоваться *показательной функцией*, чем тригонометрическими (дифференцирование и формулы сложения имеют более простой вид).

Если U — дифференцируемая функция, а Γ — жорданова дуга с концами X_1 и X_2, то

$$\int_{\Gamma+} dU = U(X_2) - U(X_1).$$

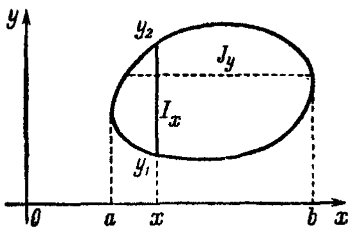

Рис. 18.

В частности, если Γ замкнута, то интеграл равен нулю. На плоскости формула Римана часто позволяет установить, что криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy$$

обращается в нуль на любой спрямляемой замкнутой жордановой дуге Γ; но при этом существенно, чтобы в области $\bar{D}$, состоящей из Γ и внутренних к Γ точек, функции P, Q и их производные $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$ были непрерывны.

Когда вычисление двойных интегралов производится посредством двух простых интегрирований, скажем, сначала по y, а затем по x, то необходимо в каждом случае найти пределы интегрирования, которые, вообще говоря, задаются просто неравенствами, определяющими область интегрирования. Однако с целью проверки рекомендуется все же начертить контур области интегрирования (рис. 18); при интегрировании по y переменное x постоянно, и пределами интегрирования служат ординаты y_1 и y_2 концов отрезка I_x с абсциссой x, содержащегося в D (или же отрезков, если граница области D

пересекается параллельно к Oy более чем в двух точках). Пределы a и b при интегрировании вдоль x также сразу видны на чертеже: это концы проекции области D на Ox. Если интегрировать сначала вдоль x, то рассуждение аналогично, но только рассматривается отрезок J_y.

В двойном интеграле при замене переменных еще более, чем подынтегральная функция, упрощения требует область интегрирования; самой простой следует считать прямоугольник. Наконец, нельзя забывать при замене переменных умножать на абсолютное значение якобиана.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

6.01. Отображение f пространства R^2 в R имеет вид

$$f(0,\ 0)=0,$$

$$f(x,\ y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad \text{если}\qquad (x,\ y)\neq(0,\ 0).$$

1. Показать, что функция f дифференцируема всюду, кроме, быть может, точки $(0,0)$, и вычислить ее дифференциал.

2. Показать, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$ и ее дифференциал равен нулю.

3. Показать, что функция f имеет в каждой точке вторые частные производные f''_{xy} и f''_{yx}, и вычислить значение этих производных в точке $(0,0)$.

Объяснить, почему из полученного результата следует, что по крайней мере одна из частных производных f''_{xy} и f''_{yx} не будет непрерывной в точке $(0,0)$.

6.02. Ищутся действительные функции f, непрерывные и дифференцируемые в области $x>0$ пространства R^2 и удовлетворяющие уравнению

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0. \qquad (E)$$

1. Показать, что уравнению (E) удовлетворяют:

функция φ, определенная формулой $\varphi(x,y)=y/x$, а также функция $g\circ\varphi$, где g — непрерывное и дифференцируемое отображение R в R.

2. Показать, что других решений, кроме указанных в п. 1, не существует.

6.03. Исследуются отображения f пространства R^2 в R, имеющие непрерывные производные первого и второго порядка, удовлетворяющие уравнению

$$af''_{x^2}+2bf''_{xy}+cf''_{y^2}=0. \qquad (e)$$

1. Сделаем замену переменных

$$u=x+my,\qquad v=x+ny,$$

где m и n — различные действительные числа. Тогда функции f соответствует функция F:

$$F(u,\ v)=F(x+my,\ x+ny)=f(x,\ y). \qquad (E)$$

Показать, что если f имеет непрерывные частные производные порядков 1 и 2, то тем же свойством обладает и F; выразить частные производные от f через m, n и производные от F и составить уравнение (E), которому удовлетворяют частные производные функции F.

2. Показать, что если $b^2 - ac > 0$, то можно выбрать m и n так, чтобы уравнение (E) имело вид $F''_{uv} = 0$. Охарактеризовать решения f уравнения (e).

3. Показать, что если $b^2 - ac = 0$, то можно выбрать m и n так, чтобы уравнение (E) имело вид $F''_{v^2} = 0$. Охарактеризовать решения f уравнения (e).

4. Показать, что если $b^2 - ac < 0$, то можно выбрать числа m и n так, чтобы уравнение (E) имело вид $F''_{u^2} + F''_{v^2} = 0$. (В этом случае не требуется характеризовать функцию f.)

6.04. 1. Любой действительиой функции φ, определенной и дифференцируемой на области $D \subset R^2$, не содержащей точку $(0, 0)$, ставится в соответствие функция Φ:

$$\Phi(r, \theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

определенная на области Δ, удовлетворяющей условию

$$(r, \theta) \in \Delta \Rightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D.$$

Показать, что функция Φ дифференцируема, и выразить Φ'_r и Φ'_θ через φ'_x, φ'_y, r и θ, а также выразить φ'_x и φ'_y через Φ'_r, Φ'_θ, r и θ.

2. Пусть функция f определена и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка на области $D \subset R^2$ не содержащей точку $(0, 0)$, и пусть ей, как и в п. 1, соответствует функция F, определенная на области Δ, связанной с D соотношением

$$F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

Показать, что функция F имеет непрерывные производные первого и второго порядка и, применяя формулы п. 1, доказать, что

$$\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} = F''_{r^2} + \frac{1}{r^2}F''_{\theta^2} + \frac{1}{r}F'_r.$$

Выяснить, существуют ли функции f, зависящие только от $x^2 + y^2$ и являющиеся решением уравнения

$$\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} = 0.$$

6.05. В этой задаче предполагаются известными результаты предыдущей задачи.

Полярными координатами точки $X = (x, y, z)$ в R^3 называются такие числа ρ, θ, φ, что

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\cos\varphi\sin\theta, \qquad z = \rho\sin\varphi.$$

1. Показать, что если точка X принадлежит дополнению ω до R^3 множества точек, определяемых условиями $x = y = 0$ (т. е. если X не является точкой оси Oz), то она обладает единственной тройкой полярных координат, удовлетворяющих неравенствам

$$\rho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Обозначим через P точку (ρ, θ, φ) из R^3, определенную, таким образом, через Ω — множество всех таких точек P, и через T — отображение Ω в ω, определяемое как $X = T(P)$.

2. Убедиться в том, что отображение T есть композиция $T_1 \circ T_2$ отображений T_1 и T_2, определенных соответственно как

$$T_1\colon\ x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$
$$T_2\colon\ r = \rho\cos\varphi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho\sin\varphi.$$

Воспользоваться предыдущим замечанием и результатами задачи 6.04, чтобы выразить

$$\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2}$$

через ρ, θ, φ и частные производные функции $F = f \circ T$. (Предполагается, что функция f определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка.)

Найти функции f, зависящие от единственного переменного $x^2 + y^2 + z^2$ и являющиеся решением уравнения

$$\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2} = 0.$$

6.06. Пусть действительная функция f определена на области D из R^n. Всякий вектор X из R^n может быть задан своими координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно базиса α векторного пространства R^n; тем самым каждому базису α соответствует функция f_α:

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = f(X).$$

Относительно другого базиса β пространства R^n вектор X имеет координаты $(y_1, \ldots, y_n)$, и существует, как известно, такая обратимая матрица $P = (p_{i,j})$, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

1. Показать, что если функция f_α дифференцируема в точке X, то функции f_β, отнесенные к другим базисам, тоже дифференцируемы в точке X, и что

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_n} \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

2. Показать, что если матрица P ортогональна, то вектор F_α с координатами $\partial f_\alpha/\partial x_i$ относительно базиса α и вектор F_β с координатами $\partial f_\beta/\partial y_i$ относительно базиса β совпадают.

Если брать только ортонормированные базисы в R^n, рассматриваемом как евклидово пространство, то можно, следовательно, функции f в каждой ее точке, в которой она дифференцируема, поставить в соответствие вектор, называемый градиентом функции f в этой точке.

3. Показать, что дифференциалы df_α, df_β, ... суть не что иное, как выражение одной и той же линейной формы df на R^n относительно базисов α, β, ... Отображая сопряженное к R^n пространство в R^n (рассматриваемое как евклидово пространство), при помощи скалярного произведения вновь получить результат п. 2.

6.07. Рассмотрим векторное поле в R^3, а именно, каждой точке M с координатами x, y, z относительно базиса α отнесем вектор S_M с координатами X, Y, Z относительно того же базиса α. Допустим, что функции X, Y, Z дифференцируемы.

Относительно другого базиса β точка M и вектор S_M имеют координаты u, v, w и U, V, W, определенные при помощи обратимой матрицы P соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}.$$

1. Показать, что если f есть функция точки (x, y, z), а $\bar{f}$ — функция точки (u, v, w), то композиция функции f и линейного отображения p с матрицей P имеет вид

$$(\bar{f}'_u \bar{f}'_v \bar{f}'_w) = (f'_x f'_y f'_z)\, P,$$

и вывести отсюда, что

$$B(S_M) = \begin{pmatrix} U'_u & U'_v & U'_w \\ V'_u & V'_v & V'_w \\ W'_u & W'_v & W'_w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X'_x & X'_y & X'_z \\ Y'_x & Y'_y & Y'_z \\ Z'_x & Z'_y & Z'_z \end{pmatrix} P = P^{-1} A(S_M)\, P.$$

2. Вывести из предыдущего результата, что

$$X'_x + Y'_y + Z'_z = U'_u + V'_v + W'_w.$$

Можно ли без вычислений получить другие инварианты?

6.08. Обозначим через Г дугу окружности с концами A и B; точки M дуги Г будут определяться параметром t, которым может служить длина дуги AM.

1. Показать, что площадь треугольника AMB (где M — произвольная точка на Г) будет наибольшей, если M равноотстоит от A и B.

2. Пусть в дугу Г вписана выпуклая ломаная $AM_1M_2 \ldots M_nB$ из $n+1$ звеньев; при этом допускается совпадение соседних вершин.

Показать, что площадь выпуклого многоугольника $AM_1M_2 \ldots$ $\ldots M_nB$ имеет максимум, достигаемый по крайней мере для одной ломаной. Пусть это будет $AP_1 \ldots P_nB$.

3. Показать при помощи результата п. 1, что ломаная $AP_1P_2 \ldots P_nB$ — правильная.

6.09. Говорят, что действительная функция f, определенная на множестве E из R^p, имеет в точке X_0 максимум (минимум), если существует такой шар B с центром X_0, что

$$X \in B \cap E \Rightarrow f(X) \leqslant f(X_0) \qquad (f(X) \geqslant f(X_0));$$

говорят, что функция имеет в X_0 экстремум, если она имеет в этой точке максимум или минимум.

1. Показать, что если функция f имеет в точке X_0 экстремум и имеет в этой точке частные производные, причем множество E содержит некоторый шар с центром X_0, то все частные производные функции f обращаются в точке X_0 в нуль.

Показать, что эти условия не являются достаточными, рассмотрев для этого функцию φ, определенную в R^p соотношением

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = x_1^3 + \ldots + x_p^3.$$

2. На множестве E точек $(x, y) \in R^2$, удовлетворяющих условию $-a\sqrt{6} \leqslant x \leqslant a\sqrt{6}$, рассматривается функция f:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4a} + \sqrt{6a^2 - x^2}\cos y \qquad (a > 0).$$

Показать, что f имеет внутри E непрерывные частные производные любого порядка, и найти точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль.

Записав формулу Тейлора порядка 2 в окрестности одной из этих точек X_0, показать, что функция f имеет или не имеет экстремум в зависимости от того, будет ли величина

$$\delta = [f''_{xy}(X_0)]^2 - f''_{x^2}(X_0) f''_{y^2}(X_0)$$

строго отрицательной или строго положительной (случай равенства нулю не рассматривается), и применить этот результат к различным полученным точкам.

3. Исследовать, имеет ли функция f экстремум в точках, не удовлетворяющих условиям из п. 2 (можно сделать замену $t=\sqrt{6a^2-x^2}$).

6.10. Пусть U и V — действительные функции, определенные на области D из R^2, и пусть функция U строго положительна. Поставим в соответствие этим функциям действительные функции P и Q и комплексную функцию f, определенную следующим образом:

$$f(z)=f(x+iy)=U(x,\ y)\,e^{iV(x,\ y)}=P(x,\ y)+iQ(x,\ y).$$

1. Для того чтобы f была дифференцируемой функцией переменного z, необходимо и достаточно, чтобы функции P и Q были дифференцируемы и чтобы

$$P'_x=Q'_y, \qquad P'_y=-Q'_x,$$

или чтобы функции U и V были дифференцируемы и чтобы

$$U'_x=UV'_y, \qquad U'_y=-UV'_x.$$

Вывести отсюда, что функции P, Q, $\ln U$ и V удовлетворяют уравнению

$$\varphi''_{x^2}+\varphi''_{y^2}=0,$$

если они имеют непрерывные частные производные второго порядка.

2. Используя задачу 6.04, найти такие функции f, чтобы модуль функции $f(z)$ был функцией только модуля z и не зависел от аргумента.

6.11. Пусть z есть заданное комплексное число.

1. Исследовать сходимость последовательности z^{2^n} при $|z|\neq 1$.

2. Показать, что если $|z|=1$, то для сходимости последовательности z^{2^n} необходимо и достаточно, чтобы

$$\arg z=\frac{r\pi}{2^s} \qquad (r \text{ и } s \text{ — целые}).$$

6.12. Напомним, что дробно-линейные преобразования H, оставляющие инвариантным множество E чисел с модулем <1, имеет вид

$$Z=e^{i\alpha}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \qquad (\alpha \text{ — действительное, } |z_0|<1)$$

(см. задачу 2.17). Определенную таким образом дробно-линейную функцию обозначим через $H(\alpha, z_0)$.

1. Найти образ точки z_0 при отображении $H(\alpha, z_0)$ и применить результат для доказательства того, что преобразование

H, переводящее точку z_0 в точку Z_0, может быть определено следующим образом:

$$H = [H(0, Z_0)]^{-1} \cdot H(\alpha, z_0) \quad \text{или} \quad \frac{Z - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 Z} = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

2. Показать, что функция $H(\alpha, z_0)$ дифференцируема, и вычислить ее производную dZ/dz. Найти значение производной при $z = z_0$.

Вывести из п. 1 и п. 2, что

$$\frac{|dZ|}{1 - |Z|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

3. Каждой точке $(x, y) \in R^2$, для которой $x^2 + y^2 < 1$, ставим в соответствие комплексное число $z = x + iy$ и определяем на этом множестве метрику, принимая за длину дуги кривой Γ значение криволинейного интеграла

$$\int_{\Gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Вычислить длину l отрезка прямой, соединяющего точку $(0, 0)$ с образом числа $z = re^{i\theta}$ $(r < 1)$. Показать, что длина любой дуги Γ с теми же концами больше, чем l.

Заданы две точки M_1 и M_2 с аффиксами z_1 и z_2 $(|z_1| < 1,$ $|z_2| < 1)$; показать, что существует, и притом только одна, дуга минимальной длины, имеющая концами эти точки.

6.13. Пусть B — замкнутая область плоскости R^2, определенная следующим образом:

$$(s, t) \in B, \quad \text{если} \quad |t| \leqslant \pi.$$

1. Доказать непрерывность в каждой точке области B следующего отображения f области B в поле C комплексных чисел:

$$f(s, t) = \frac{s + it}{e^{s+it} - 1}, \qquad \text{если} \qquad (s, t) \neq (0, 0),$$
$$f(0, 0) = 1.$$

2. Пусть g — отображение пространства R в C, определенное формулой

$$g(s) = \int_0^{\pi} f(s, t)\, dt.$$

Показать, что функция g непрерывна и стремится к 0, когда $s \to \infty$.

3. Показать, что функция g дифференцируема всюду, кроме, быть может, точки 0, и найти для $g'(s)$ выражение, не содержащее интегралов. Можно воспользоваться тем фактом, что f зависит от s и от t только через величину $s + it$.

4. Показать, что функция g дифференцируема в 0 и что производная g' непрерывна.

Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} g'(s)\,ds = -g(0),$$

и сравнивая это с определением $g(0)$, получить значения интегралов

$$\int_0^{+\infty} \frac{se^s}{e^{2s}-1}\,ds, \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt.$$

6.14. Пусть

$$\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

где

$$P(x, y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y}, \qquad Q(x, y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

1. Показать, что на области D, определенной условиями $x>0$ и $y>0$, функции P и Q непрерывно дифференцируемы и что $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

2. Найти функцию U на D, имеющую дифференциал, равный ω.

3. Вычислить значение криволинейного интеграла $\int_\Gamma \omega$, где дуга Γ определяется условиями

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad x = t + \cos^2 t, \qquad y = 1 + \sin^2 t.$$

6.15. Обозначим через φ отображение R^2 в R и положим

$$P(x, y) = y\left[1 + \frac{\varphi(x, y)}{x^2+y^2}\right], \qquad Q(x, y) = -x\left[1 + \frac{\varphi(x, y)}{x^2+y^2}\right].$$

1. Для того чтобы выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ было в окрестности заданной точки $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ дифференциалом функции U, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядка, необходимо, чтобы функция φ имела непрерывные частные производные, удовлетворяющие уравнению

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) + 2(x^2+y^2) = 0. \qquad (E)$$

2. Пусть r, θ, Φ заданы соотношениями

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad \Phi(r, \theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Найти функции Φ, соответствующие решениям φ уравнения (E), либо непосредственно, либо через уравнение (E'), преобразованное из (E).

3. Пусть функция φ определена на дополнении Ω точки $(0,0)$ до R^2 формулой

$$\varphi(x, y) = -(x^2 + y^2) + \frac{4x^2}{x^2+y^2}.$$

Найти функцию U, дифференциал которой в окрестности точки $(1,0)$ равен $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. Можно ли указать функцию U_0, дифференциал которой был бы равен $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ на всем множестве Ω?

6.16. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

на области D, заданной условиями

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \leqslant 0$$

(a и b — положительные постоянные).

Замечание. Этот интеграл дает значение момента инерции однородной треугольной пластинки с единичной плотностью относительно вершины.

6.17. Вычислить интеграл

$$I = \iint_C x\,dx\,dy,$$

где область C есть круг $x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0$.

6.18. Вычислить интеграл

$$I = \iint_D x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где область D задается условиями

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

6.19. Пусть заданы три действительных числа $a \leqslant x_0 \leqslant b$ и функция f, определенная и непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$.

1. Вычисляя двойной интеграл двумя различными способами, показать, что

$$\int_{x_0}^{x} du \left(\int_{x_0}^{u} (u - v)^n f(v)\,dv \right) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - v)^{n+1}}{n+1} f(v)\,dv.$$

2. Показать, что функция

$$x \to \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - v)^{n-1} f(v)\,dv$$

служит примитивной порядка n для функции f. Возможны 2 способа:

а) использовать результат п. 1,

б) непосредственно вычислить производную от этой функции.

6.20. Вычисляя двумя различными способами интеграл

$$I = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

распространенный на соответствующую область D, показать, что

$$\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_0^{\pi/4} \left(1 - e^{-a^2/\cos^2\theta}\right) d\theta.$$

6.21. Найти объем μ тела D, определенного как

$$0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0,$$

где a и b — строго положительные действительные числа.

6.22. 1. Вычислить интеграл

$$I = \iiint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

по области S вида

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1;$$

для этого можно сделать следующую замену переменных:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\sin\varphi.$$

2. Вычислить интеграл

$$J = \iiint\limits_E (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

по области E вида

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leqslant 0$$

(a, b, c — действительные строго положительные числа).

6.23. 1. Вычислить интеграл

$$I_R = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

по области D вида

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant R^2.$$

Выразить двойной интеграл

$$J_a = \iint\limits_{\Delta} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

по области Δ вида

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant a$$

через простой интеграл

$$K(a) = \int\limits_0^a e^{-t^2}\,dt.$$

2. Сравнивая I_R и J_a, получить для $K(a)$ миноранту и мажоранту.

Показать, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

сходится, и вычислить его значение.

6.24. 1. Показать, что криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} e^{-x^2+y^2}[\cos(2xy)\,dx + \sin(2xy)\,dy]$$

по любой спрямляемой замкнутой жордановой кривой Γ равен нулю.

2. Записать выражение предыдущего результата для контура прямоугольника со сторонами

$$x=0, \quad x=a, \quad y=0, \quad y=b$$

(a и b строго положительны).

3. Показать, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

сходится, и вычислить его значение, зная, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(доказано в предыдущей задаче).

6.25. Пусть I_Γ есть криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

по жордановой дуге Г, а P и Q — функции, определяемые формулами

$$P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \sin x - y \cos x),$$

$$Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \cos x + y \sin x)$$

на дополнении точки $(0, 0)$ до R^2.

1. Показать, что если Г — замкнутая дуга, не содержащая внутри точку $(0, 0)$, то $I_\Gamma = 0$.

2. Пусть Г — полуокружность C с центром 0 и радиусом R, лежащая в полуплоскости $y \geqslant 0$ и пробегаемая в положительном направлении. Показать, что тогда

$$I_C = \int_0^\pi e^{-R \sin\theta} \cos(R \cos\theta)\, d\theta$$

и что I_C стремится к 0 или к π, когда R стремится к $+\infty$ или к 0.

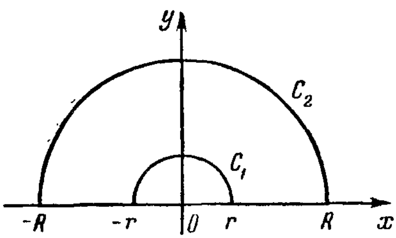

Рис. 19.

3. Пусть контур Г состоит из полуокружностей C_1 и C_2 с центром 0 и радиусами r и R, расположенных в полуплоскости $y \geqslant 0$, и из двух отрезков $[-R, -r]$ и $[r, R]$, соединяющих концы этих полуокружностей (рис. 19).

Вывести из предыдущих результатов, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

сходится, и вычислить его значение.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6.01. 1. На дополнении Ω множества $(0, 0)$ до R^2 функция f является рациональной дробью с отличным от нуля знаменателем; следовательно, она непрерывна и имеет частные производные, причем

$$f'_x(x, y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f'_y(x, y) = x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Эти частные производные определяют два непрерывных отображения Ω в R, и стало быть, функция f дифференцируема на Ω (Пизо и Заманский, Анализ, гл. VII, 2-й раздел, § 1) и

$$df = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}dx + x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

2. В данном случае

$$f(0,\ y)=0 \Rightarrow f'_y(0,\ 0)=0,$$
$$f(x,\ 0)=0 \Rightarrow f'_x(0,\ 0)=0.$$

Поэтому, если f дифференцируема в точке 0, то ее дифференциал равен 0; значит, для доказательства существования дифференциала необходимо, в соответствии с определением, показать, что существует функция φ, имеющая в точке $(0, 0)$ предел, равный 0, и такая, что

$$|f(x,\ y)-f(0,\ 0)|=|f(x,\ y)|=\varphi(x,\ y)(|x|+|y|).$$

Сразу же получаем искомый результат, так как

$$|f(x,\ y)|\leqslant|x||y|\leqslant\frac{(|x|+|y|)^2}{2}\Rightarrow|\varphi(x,\ y)|\leqslant\frac{|x|+|y|}{2}.$$

3. На Ω функции f'_x и f'_y являются рациональными дробями, и значит, непрерывны и дифференцируемы; в частности, существуют производные f''_{xy} и f''_{yx}; это рациональные дроби, т. е. непрерывные функции; они равны между собой.

В точке $(0, 0)$ необходимо сделать исследования:

$$f'_x(0,\ y)=-y\Rightarrow f''_{xy}(0,\ 0)=-1,$$
$$f'_y(0,\ x)=x\Rightarrow f''_{yx}(0,\ 0)=1.$$

Производные f''_{xy} и f''_{yx} в точке $(0, 0)$ не равны между собой; а если бы они были непрерывны в $(0, 0)$, то они были бы равны (Пизо и Заманский, Анализ, гл. VII, 1-й раздел, § 4). Стало быть, по крайней мере, одна из производных не будет непрерывна.

6.02. 1. Рациональная функция φ непрерывна, дифференцируема на области $x>0$, так как знаменатель отличен от 0, и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\ y)=-\frac{y}{x^2},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,\ y)=\frac{1}{x}\Rightarrow x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Точно так же, суперпозиция $g\circ\varphi$ двух дифференцируемых функций дифференцируема и

$$d(g\circ\varphi)=(g'\circ\varphi)\,d\varphi.$$

Поэтому частные производные

$$(g'\circ\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad \text{и} \quad (g'\circ\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

удовлетворяют заданному уравнению.

2. Сделаем замену

$$\begin{cases} u=x, \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u, \\ y=uv \end{cases}$$

(определив тем самым биективное отображение области $x>0$ на область $u>0$). Тогда x и y будут дифференцируемыми функциями от u и v; следовательно, то же самое имеет место и для функции F:

$$F(u, v)=f(u, uv),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если f есть решение уравнения (E), то производная $\partial F/\partial u$ равна нулю, и F является дифференцируемой функцией одного переменного v:

$$f(x, y)=F\left(\frac{y}{x}\right)=(F\circ\varphi)(x, y).$$

Итак, получены единственные функции, которые и были указаны в п. 1.

6.03. 1. Рассматриваемая замена определяет обратимое линейное преобразование T плоскости R^2 в себя; x и y — линейные функции от u и v, имеющие непрерывные частные производные по u и v любого порядка. Тогда теорема о дифференцировании сложных функций позволяет утверждать, что $F=f\circ T^{-1}$ имеет непрерывные частные производные того же порядка, что и f, и, в частности, порядка 1 и 2.

Продифференцируем теперь по x и по y равенство

$$f(x, y)=F(u, v);$$

получаем

$$f'_x=F'_u u'_x+F'_v v'_x=F'_u+F'_v,$$

$$f'_y=F'_u u'_y+F'_v v'_y=mF'_u+nF'_v.$$

Применяя эти правила вычисления к производным, находим

$$f''_{x^2}=\frac{\partial}{\partial u}(F'_u+F'_v)+\frac{\partial}{\partial v}(F'_u+F'_v)=F''_{u^2}+2F''_{uv}+F''_{v^2},$$

$$f''_{xy}=m\frac{\partial}{\partial u}(F'_u+F'_v)+n\frac{\partial}{\partial v}(F'_u+F'_v)=mF''_{u^2}+(m+n)F''_{uv}+nF''_{v^2},$$

$$f''_{y^2}=m\frac{\partial}{\partial u}(mF'_u+nF'_v)+n\frac{\partial}{\partial v}(mF'_u+nF'_v)=$$

$$=m^2F''_{u^2}+2mnF''_{uv}+n^2F''_{v^2}.$$

Итак, преобразованное из (e) уравнение (E) имеет вид

$$[a+2bm+cm^2]F''_{u^2}+2[a+b(m+n)+cmn]F''_{uv}+$$

$$+[a+2bn+cn^2]F''_{v^2}=0.$$

2. Если $b^2-ac>0$ и $c\neq 0$, то в качестве m и n можно взять нули трехчлена $a+2b\lambda+c\lambda^2$; тогда коэффициенты при

F''_{u^2} и F''_{v^2} в уравнении (E) обращаются в нуль, а коэффициент при F''_{uv} отличен от нуля:

$$a+b(m+n)+cmn=a+b\left(-\frac{2b}{c}\right)+c\frac{a}{c}=2\,\frac{ac-b^2}{c}\neq 0.$$

При таком выборе чисел m и n уравнение (E) сводится к уравнению $F''_{uv}=0$, решение которого определяется соотношением

$$F(u,\ v)=g(u)+h(v),$$

или

$$f(x,\ y)=g(x+my)+h(x+ny),$$

где g и h — произвольные дифференцируемые функции.

Если $c=0$, $a\neq 0$, то для того, чтобы получить предыдущий результат, достаточно переставить местами x и y (полагая $u=mx+y$, $v=nx+y$).

Если $a=c=0$, то уравнение (e) принимает вид $f''_{xy}=0$, и его решение имеет указанный выше тип; следует лишь u, v заменить на x, y.

3. Пусть $b^2-ac=0$. В качестве m возьмем двойной нуль трехчлена $a+2b\lambda+c\lambda^2$. Тогда

$$a+2bm+cm^2=0,\qquad a+bm=0,\qquad b+cm=0,$$
$$\forall n\neq m,\qquad a+2bn+cn^2\neq 0.$$

Уравнение (E) сводится к уравнению $F''_{v^2}=0$, решение которого определяется соотношением

$$F(u,\ v)=g(u)+vh(u),$$

и при $n=0$

$$f(x,\ y)=g(x+my)+xh(x+my),$$

где g и h — произвольные функции, имеющие непрерывные производные первого и второго порядка.

Единственным исключением является случай $b=c=0$, когда трехчлен $a+2b\lambda+c\lambda^2$ не имеет нулей. Тогда уравнение (e) имеет вид $f''_{x^2}=0$; в этом случае

$$f(x,\ y)=g(y)+xh(y).$$

4. Для того чтобы (E) было уравнением указанного типа, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{matrix} a+2bm+cm^2=a+2bn+cn^2, \\ a+b(m+n)+cmn=0 \end{matrix}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{matrix} m+n=-\dfrac{2b}{c}, \\ mn=\dfrac{2b^2-ac}{c^2}, \end{matrix}$$

поскольку $m-n\neq 0$ и $c\neq 0$ (в противном случае было бы $b^2-ac\geqslant 0$).

Полученная система имеет единственное решение, так как

$$\frac{(m+n)^2}{4} - mn = \frac{b^2 - (2b^2 - ac)}{c^2} = \frac{ac - b^2}{c^2} > 0.$$

6.04. 1. Обозначим через $X = (x, y)$ и $U = (r, \theta)$ элементы пространства R^2, а через g — отображение области Δ в D, определяемое как

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta), \qquad \text{или} \qquad X = g(U).$$

Отображение g дифференцируемо; функция $\Phi = \varphi \circ g$, будучи композицией двух дифференцируемых функций, дифференцируема, и

$$d\Phi = \varphi'_x(X)[dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta] + \varphi'_y(X)[dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta] =$$

$$= [\varphi'_x(X)\cos\theta + \varphi'_y(X)\sin\theta]\, dr + r[-\varphi'_x(X)\sin\theta + \varphi'_y(X)\cos\theta]\, d\theta.$$

По определению, коэффициенты при dr и $d\theta$ равны $\Phi'_r(U)$, $\Phi'_\theta(U)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\Phi'_r(U) &= \varphi'_x(X)\cos\theta + \varphi'_y(X)\sin\theta,\\ \Phi'_\theta(U) &= r[-\varphi'_x(X)\sin\theta + \varphi'_y(X)\cos\theta]\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned}\varphi'_x(X) &= \Phi'_r(U)\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}\Phi'_\theta(U),\\ \varphi'_y(X) &= \Phi'_r(U)\sin\theta + \frac{\cos\theta}{r}\Phi'_\theta(U).\end{aligned}$$

2. Функция f дифференцируема вместе со своими первыми производными (она имеет непрерывные вторые производные); значит, функции $F = f \circ g$, $f'_x \circ g$ и $f'_y \circ g$ дифференцируемы (g определена в п. 1) и, как известно (формулы п. 1, в которых X заменяется на $g(U)$),

$$F'_r(U) = (f'_x \circ g)(U)\cos\theta + (f'_y \circ g)(U)\sin\theta,$$

$$F'_\theta(U) = r[-(f'_x \circ g)(U)\sin\theta + (f'_y \circ g)(U)\cos\theta].$$

Все функции в правой части дифференцируемы; следовательно, функции F'_r и F'_θ дифференцируемы, что позволяет применить результаты п. 1 для вычисления вторых производных.

Мы уже знаем, что

$$f'_x(X) = F'_r(U)\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}F'_\theta(U),$$

$$f'_y(X) = F'_r(U)\sin\theta + \frac{\cos\theta}{r}F'_\theta(U).$$

Чтобы получить вторую производную $f''_{x^2}(X)$, применим результат п. 1 к двум функциям:

$$\varphi(X) = f'_x(X), \qquad \Phi(U) = F'_r(U)\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}F'_\theta(U);$$

получаем

$$f''_{x^2}(X)=\varphi'_x(X)=\cos\theta\Phi'_r(U)-\frac{\sin\theta}{r}\Phi'_\theta(U)=$$

$$=F''_{r^2}(U)\cos^2\theta-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}F''_{r\theta}(U)+\frac{\sin^2\theta}{r^2}F''_{\theta^2}(U)+$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r}F'_r(U)+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}F'_\theta(U).$$

Точно так же получаем

$$f''_{y^2}(X)=\frac{\partial}{\partial y}(f'_y)(X)=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[F'_r\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}F'_\theta\right](U)+$$

$$+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[F'_r\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}F'_\theta\right](U)=$$

$$=F''_{r^2}(U)\sin^2\theta+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}F''_{r\theta}(U)+\frac{\cos^2\theta}{r^2}F''_{\theta^2}(U)+$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r}F'_r(U)-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}F'_\theta(U),$$

$$\Delta f=f''_{x^2}(X)+f''_{y^2}(X)=F''_{r^2}(U)+\frac{1}{r^2}F''_{\theta^2}(U)+\frac{1}{r}F'_r(U).$$

Функция $F=f\circ g$ должна зависеть от одного переменного r, и поэтому должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)=0,$$

$$r\frac{dF}{dr}=\alpha\Rightarrow F(r)=\alpha\ln|r|+\beta,$$

$$f(x,y)=\alpha\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\beta,$$

где α и β — произвольные постоянные.

6.05. 1. Сразу же получаем

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad \varphi=\arcsin\frac{z}{\rho}.$$

Наконец, θ определяется двумя уравнениями:

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho\cos\varphi},\qquad \sin\theta=\frac{y}{\rho\cos\varphi}.$$

Эти уравнения совместны, так как

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{x^2+y^2}{\rho^2\cos^2\varphi}=\frac{x^2+y^2}{\rho^2-z^2}=1.$$

Следовательно, существует число θ, единственное с точностью до кратного 2π, удовлетворяющее этим двум уравнениям, т. е. единственное в пределах $0\leqslant\theta<2\pi$.

2. Замена в уравнениях, определяющих T_1, r и z, на их выражения через θ и φ сразу же показывает, что $T=T_1\circ T_2$.

Рассмотрим сначала функцию $h = f \circ T_1$; имеем

$$h(r, \theta, z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

При дифференцировании по z функции h и f рассматриваются как функции одного переменного z; тогда преобразование T_1 становится тождественным; h дважды дифференцируема по z и

$$h'_z = f'_z \circ T_1, \qquad h''_{z^2} = f''_{z^2} \circ T_1.$$

Если z постоянно, то функция f является отображением R^2 в R, а отображение T_1 совпадает с изученным в предыдущей задаче; тогда, как известно

$$f''_{x^2}(X) + f''_{y^2}(X) = h''_{r^2}(U) + \frac{1}{r^2} h''_{\theta^2}(U) + \frac{1}{r} h'_r(U),$$

где U означает точку (r, θ, z) из R^3; прибавив к этому равенству $f''_{z^2}(X) = h''_{z^2}(U)$, получим

$$\Delta f(X) = f''_{x^2}(X) + f''_{y^2}(X) + f''_{z^2}(X) =$$
$$= h''_{r^2}(U) + \frac{1}{r^2} h''_{\theta^2}(U) + \frac{1}{r} h'_r(U) + h''_{z^2}(U).$$

По определению функции F,

$$F = f \circ T = f \circ (T_1 \circ T_2) = (f \circ T_1) \circ T_2 = h \circ T_2,$$

или

$$F(P) = F(\rho, \theta, \varphi) = h(\rho\cos\varphi, \theta, \rho\sin\varphi) = h(U).$$

При дифференцировании по θ функции h и F рассматриваются как функции только этого переменного; тогда T_2 превращается в тождественное преобразование, и

$$F'_\theta(P) = h'_\theta(U), \qquad F''_{\theta^2}(P) = h''_{\theta^2}(U).$$

Если зафиксировать θ, то преобразование T_2 становится отображением R^2 в R^2, изученным в задаче 6.04, и

$$h''_{r^2}(U) + h''_{z^2}(U) = F''_{\rho^2}(P) + \frac{1}{\rho^2} F''_{\varphi^2}(P) + \frac{1}{\rho} F'_\rho(P),$$
$$h'_r(U) = F'_\rho(P)\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\rho} F'_\varphi(P);$$

складывая эти соотношения, окончательно получаем

$$\Delta f(X) = F''_{\rho^2}(P) + \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi} F''_{\theta^2}(P) + \frac{1}{\rho^2} F''_{\varphi^2}(P) + \frac{2}{\rho} F'_\rho(P) - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\rho^2} F'_\varphi(P).$$

Если f есть функция, зависящая только от $x^2+y^2+z^2$, то функция F зависит только от ρ и является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2F}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dF}{d\rho}=\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dF}{d\rho}\right)=0;$$

$$\rho^2\frac{dF}{d\rho}=\alpha\Rightarrow F(\rho)=-\frac{\alpha}{\rho}+\beta,$$

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{-\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\beta,$$

где α и β — произвольные постоянные.

6.06. 1. Обозначим через p линейное преобразование с матрицей P. Отображение p пространства R^p в R^p дифференцируемо и композиция $f_\beta=f_\alpha\circ p$ двух дифференцируемых отображений тоже дифференцируема; по теореме о дифференцировании сложных функций,

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial y_i}=\sum_j\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}=\sum_j p_{ji}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}.$$

Следовательно, производные $\partial f_\beta/\partial y_i$ являются линейными комбинациями производных $\partial f_\alpha/\partial x_j$, и общий член матрицы преобразования равен $p'_{ij}=p_{ji}$, т. е. это транспонированная к P матрица ${}^tP$.

2. Если матрица P ортогональна, то $P^{-1}={}^tP$:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_n}\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_n}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_n}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

$\partial f_\alpha/\partial x_i$ получаются из $\partial f_\beta/\partial y_j$ при помощи той же матрицы перехода P, что и x_i из y_j; стало быть, это координаты одного и того же вектора F относительно базисов α и β.

Если рассматривать в R^n только ортонормированные базисы, то матрицы перехода P будут ортогональны; все векторы F_α тождественны, а вектор F, определенный таким образом (через любой вектор F_α), зависит только от функции f и не зависит от выбора базиса α.

3. Дифференциал df_α есть линейная форма вектора dX, имеющего относительно базиса α координаты dx_i; координатами этого вектора dX относительно базиса β будут такие dy_j, чтобы матрицей перехода от dy_j к dx_i была матрица P.

Известно, что дифференциал $df_\beta=d(f_\alpha\circ p)$ получается заменой dx_i их выражениями как функций от dy_j, т. е. чтобы для любого вектора dX было $df_\alpha=df_\beta$; линейная форма вектора

dX, определяемая через df_α или df_β, будет одна и та же, а именно, линейная форма df, соответствующая функции f и не зависящая от выбора конкретного базиса.

Если α — ортонормированный базис в евклидовом пространстве, то линейная форма a имеет вид

$$a(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \langle A, X \rangle,$$

если A — вектор с координатами a_i относительно базиса α. Равенство $a(X) = \langle A, X \rangle$, полученное путем использования координат относительно базиса α, не зависит от этого базиса; отображение $a \to A$ сопряженного пространства в само пространство есть изоморфизм векторного пространства.

Применяя этот способ к линейной форме df, видим, что соответствующий вектор F имеет относительно ортонормированного базиса α координаты $\partial f_\alpha / \partial x_i$; тем самым снова приходим к результату п. 2, т. е. вектор F_α, координаты которого относительно ортонормированного базиса α равны $\partial f_\alpha / \partial x_i$, не зависит от рассматриваемого базиса α, а зависит только от функции f.

6.07. 1. Это есть, с точностью до транспозиции, результат п. 1 предыдущей задачи (полученный в результате применения дифференцирования сложных функций):

$$\begin{pmatrix} \bar{f}'_u \\ \bar{f}'_v \\ \bar{f}'_w \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\bar{f}'_u \bar{f}'_v \bar{f}'_w) = (f'_x f'_y f'_z) P.$$

Применяя предыдущий результат к функциям X, Y, Z и к композициям $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ функций X, Y, Z и P, получаем

$$\begin{bmatrix} \bar{X}'_u & \bar{X}'_v & \bar{X}'_w \\ \bar{Y}'_u & \bar{Y}'_v & \bar{Y}'_w \\ \bar{Z}'_u & \bar{Z}'_v & \bar{Z}'_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_x & X'_y & X'_z \\ Y'_x & Y'_y & Y'_z \\ Z'_x & Z'_y & Z'_z \end{bmatrix} P = A(S_M) P.$$

По определению U, V и W,

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U'_t \\ V'_t \\ W'_t \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}'_t \\ \bar{Y}'_t \\ \bar{Z}'_t \end{bmatrix}.$$

Полученные уравнения после замены t на u, v, w эквивалентны следующим:

$$B(S_M) = \begin{bmatrix} U'_u & U'_v & U'_w \\ V'_u & V'_v & V'_w \\ W'_u & W'_v & W'_w \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \bar{X}'_u & \bar{X}'_v & \bar{X}'_w \\ \bar{Y}'_u & \bar{Y}'_v & \bar{Y}'_w \\ \bar{Z}'_u & \bar{Z}'_v & \bar{Z}'_w \end{bmatrix} = P^{-1} A(S_M) P.$$

2. Матрицы $B(S_M)$ и $A(S_M)$ подобны; следовательно, они имеют один и тот же характеристический многочлен; коэффициенты характеристических многочленов матриц $B(S_M)$ и $A(S_M)$ равны. В частности, равенство коэффициентов при членах второй степени даст

$$U'_u + V'_v + W'_w = X'_x + Y'_y + Z'_z.$$

Можно получить и другие инварианты, записывая равенство коэффициентов при членах первой степени и нулевой; в частности, последнее уравнение имеет вид

$$\det B(S_M) = \det A(S_M).$$

6.08. 1. Высота MH, опущенная на AB, имеет наибольшую длину, когда M лежит на перпендикуляре к середине отрезка AB.

2. Определим точку M_i через длину s_i дуги AM_i. Для того чтобы ломаная была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant l,$$

где через l обозначена длина дуги AB. Площадь многоугольника $AM_1M_2\ldots M_nB$ есть функция переменного $s = (s_1, s_2, \ldots \ldots, s_n)$, определенная на области D, описанной указанными выше соотношениями. Эта область ограничена, ибо содержится в брусе $0 \leqslant s_i \leqslant l$. Она замкнута, ибо ее точка накопления σ, будучи пределом последовательности $s^{(k)} = \left(s_1^{(k)}, \ldots, s_n^{(k)}\right)$ элементов из D, имеет координаты σ_i, являющиеся пределом последовательности $s_i^{(k)}$, и

$$0 \leqslant s_1^{(k)} \leqslant s_2^{(k)} \leqslant \ldots \leqslant s_n^{(k)} \leqslant l \Rightarrow 0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_n \leqslant l;$$

следовательно, σ является элементом из D.

Площадь треугольника AM_iM_{i+1} есть непрерывная функция криволинейных абсцисс s_i и s_{i+1} вершин M_i и M_{i+1}, и значит, является непрерывной функцией от s; площадь многоугольника $AM_1M_2\ldots M_nB$, будучи суммой предыдущих площадей треугольников, будет непрерывной функцией f от s.

Функция f, определённая и непрерывная на ограниченной замкнутой (компактной) области D, ограничена и достигает своей верхней грани S, а именно, существует по крайней мере один многоугольник $AP_1, \ldots, P_nB$, площадь которого равна S.

3. Рассмотрим три последовательные вершины P_{i-1}, P_i, P_{i+1} предыдущей ломаной. Если M — точка дуги $P_{i-1}P_{i+1}$, то площадь многоугольника

$$AP_1 \ldots P_{i-1}P_iP_{i+1} \ldots B$$

должна быть не меньше площади многоугольника $AP_1\ldots \ldots P_{i-1}MP_{i+1}\ldots B$; но площади этих многоугольников равны сумме площади многоугольника

$$AP_1 \ldots P_{i-1}P_{i+1} \ldots B$$

и площади треугольника $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ в первом случае, и треугольника $P_{i-1}MP_{i+1}$ — во втором. Максимум площади треугольника $P_{i-1}MP_i$ должен получиться, когда M есть точка P_i; а тогда, как известно из п. 1, P_i равноотстоит от P_{i-1} и P_{i+1}.

В проведенном рассуждении индекс i произволен; следовательно, все стороны ломаной $AP_1P_2\ldots P_nB$ равны между собой.

6.09. 1. Пусть $u_1, \ldots, u_p$ — координаты точки X_0. Отображение

$$x_i \to f(u_1, \ldots, u_{i-1}, x_i, u_{i+1}, \ldots)$$

имеет экстремум при $x_i = u_i$; оно определено на некотором интервале, содержащем u_i, и дифференцируемо в u_i; следовательно, его производная обращается в этой точке в нуль (результат, известный для функций одного действительного переменного), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0.$$

В точке $X_0 = (0, \ldots, 0)$ все частные производные функции φ обращаются в нуль, но в этой точке нет ни максимума, ни минимума, поскольку для любого $x_1 > 0$

$$\varphi(-x_1, 0, \ldots, 0) < 0 = \varphi(0, \ldots, 0) < \varphi(x_1, 0, \ldots, 0).$$

2. Функция $x \to \sqrt{6a^2 - x^2}$ бесконечно дифференцируема для $|x| < a\sqrt{6}$; функции $x \to x^2/4a$ и $y \to \cos y$ бесконечно дифференцируемы; значит, функция f тоже бесконечно дифференцируема, и

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x\left[\frac{1}{2a} - (6a^2 - x^2)^{-1/2}\cos y\right], \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y\sqrt{6a^2 - x^2};$$

$\sqrt{6a^2 - x^2}$ внутри E не обращается в нуль; $\partial f/\partial y$ равно нулю при $\sin y = 0$; учитывая периодичность функции f относительно y, рассмотрим только случаи $y = 0$ и $y = \pi$. Приравнивая нулю $\partial f/\partial x$, получаем 6 решений:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad (1), \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = \pi, \end{cases} \quad (2),$$

$$\begin{cases} x = \pm a\sqrt{2}, \\ y = 0, \end{cases} \quad (3), \qquad \begin{cases} x = \pm a\sqrt{2}, \\ y = \pi, \end{cases} \quad (4).$$

Формула Тейлора порядка 2 в окрестности точки $X_0 = (u, v)$, в которой частные производные функции f равны нулю, имеет вид

$$\Delta f = f(u+h, v+k) - f(u, v) =$$
$$= h^2 f''_{x^2}(X_0) + 2hk f''_{xy}(X_0) + k^2 f''_{y^2}(X_0) + (h^2 + k^2)\,\alpha(h, k),$$

где функция α стремится к 0 при $(h, k) \to (0, 0)$; если положить

$$h = \cos\theta \sqrt{h^2 + k^2}, \qquad k = \sin\theta \sqrt{h^2 + k^2},$$

то получим

$$\Delta f = (h^2 + k^2)\left[f''_{x^2}(X_0)\cos^2\theta + 2f''_{xy}(X_0)\cos\theta\sin\theta + f''_{y^2}(X_0)\sin^2\theta + \right.$$
$$\left. + \alpha(h, k)\right] = (h^2 + k^2)\left[q(\theta) + \alpha(h, k)\right].$$

Если $q(\theta) \geqslant m > 0$, то найдется шар B с центром X_0, на котором $|\alpha(h, k)| < m$; на этом шаре $\Delta f > 0$, и значит, имеет место минимум.

Точно так же, если $q(\theta) \leqslant M < 0$, имеет место максимум.

Наконец, если $q(\theta)$ принимает строго положительные и строго отрицательные значения, то не будет ни максимума, ни минимума.

Эти три случая соответствуют следующим:

$$[f''_{xy}(X_0)]^2 - f''_{x^2}(X_0) f''_{y^2}(X_0) < 0, \qquad f''_{y^2}(X_0) > 0,$$
$$[f''_{xy}(X_0)]^2 - f''_{x^2}(X_0) f''_{y^2}(X_0) < 0, \qquad f''_{y^2}(X_0) < 0,$$
$$[f''_{xy}(X_0)]^2 - f''_{x^2}(X_0) f''_{y^2}(X_0) > 0.$$

В изучаемом здесь частном случае имеем

$$f''_{x^2}(X) = \left[\frac{1}{2a} - (6a^2 - x^2)^{-1/2}\cos y\right] - x^2(6a^2 - x^2)^{-3/2}\cos y,$$
$$f''_{xy}(X) = x(6a^2 - x^2)^{-1/2}\sin y,$$
$$f''_{y^2}(X) = -\cos y\,(6a^2 - x^2)^{1/2}.$$

Следовательно, для четырех рассматриваемых случаев получаем:

1) $\qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad \delta = a\sqrt{6}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{a\sqrt{6}}\right) > 0.$

Экстремума нет.

2) $\qquad x = 0, \qquad y = \pi, \qquad \delta = -a\sqrt{6}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{a\sqrt{6}}\right) < 0,$

$$f''_{y^2}(0, \pi) = a\sqrt{6}; \quad \text{минимум.}$$

3) $\qquad x = \pm a\sqrt{2}, \qquad y = 0, \qquad \delta = -\frac{1}{2} < 0,$

$$f''_{y^2}(X_0) = -2a < 0; \quad \text{максимум.}$$

4) $\qquad x = \pm a\sqrt{2}, \qquad y = \pi, \qquad \delta = -\frac{5}{2} < 0,$

$$f''_{y^2}(X_0) = 2a > 0; \quad \text{минимум.}$$

3. Предыдущее исследование не может быть применено к точкам с абсциссой $x = \pm a\sqrt{6}$; в этих точках f принимает

значение 3/2. Функция f принимает одинаковые значения в точках (x, y) и $(-x, y)$; поэтому достаточно исследовать эту функцию в окрестности точки $(a\sqrt{6}, y_0)$. Сделаем замену $t = \sqrt{6a^2 - x^2}$ и будем рассматривать только положительные значения t:

$$\Delta f = -\frac{t^2}{4a} + t \cos y = t\left(\cos y - \frac{t}{4a}\right).$$

Так как сомножитель t положителен, то Δf имеет знак выражения $\cos y - t/4a$, т. е. тот же знак, что $\cos y_0$, если $\cos y_0 \neq 0$; тогда

$$-\frac{\pi}{2} < y_0 - 2n\pi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos y_0 > 0; \quad \text{минимум};$$

$$\frac{\pi}{2} < y_0 - 2n\pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos y_0 < 0; \quad \text{максимум}$$

(в обоих случаях экстремум будет нестрогим, поскольку для $x = \pm a\sqrt{6}$ функция f постоянна).

Если $y_0 = \pi/2 + n\pi$, то в любой окрестности точки $(a\sqrt{6}, y_0)$ отношение $(\cos y)/t$ принимает произвольные значения, а выражение $\cos y - (t/4a)$ — значения противоположных знаков, поэтому в этой точке нет экстремума.

Внутри E имеются пять точек, в которых f имеет экстремум; во всех точках отрезков границы множества E, кроме точек с ординатой, равной одному из чисел $\pi/2 + n\pi$, функция f имеет экстремум.

6.10. 1. Если f дифференцируема, то, по определению, существуют такие постоянные A и B и такие действительные функции φ и ψ переменного $(\Delta x, \Delta y)$, имеющие в $(0, 0)$ предел 0, что

$$\Delta f = \Delta P + i\,\Delta Q = (A + iB)\,\Delta z + [\varphi(\Delta x, \Delta y) + i\psi(\Delta x, \Delta y)]\,|\Delta z|,$$

откуда после замены Δz на $\Delta x + i\,\Delta y$ получаем, что, для того чтобы f была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta P = A\,\Delta x - B\,\Delta y + \varphi(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$\Delta Q = B\,\Delta x + A\,\Delta y + \psi(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

т. е., в соответствии с определением дифференцируемости, чтобы P и Q были дифференцируемы и чтобы коэффициенты их дифференциалов (т. е. частные производные) удовлетворяли уравнениям

$$A = P'_x(x, y) = Q'_y(x, y), \qquad B = -P'_y(x, y) = Q'_x(x, y). \tag{1}$$

По определению функций P и Q,

$$P(x, y) = U(x, y)\cos[V(x, y)], \quad Q(x, y) = U(x, y)\sin[V(x, y)].$$

Если U и V дифференцируемы, то дифференцируемы и P и Q; обратно, если P и Q дифференцируемы, то функция

$$U(x, y) = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$$

дифференцируема, а значит, дифференцируемы функции $\cos V$ и $\sin V$, откуда следует, что функция V дифференцируема.

В точке (x_0, y_0), где функции U и V принимают значения U_0 и V_0, по правилам вычисления дифференциалов получаем

$$df = dP + i\,dQ = dUe^{iV_0} + iU_0e^{iV_0}\,dV = e^{iV}\,(dU + iU_0\,dV).$$

С другой стороны, для того чтобы f была дифференцируемой функцией от z, необходимо и достаточно, чтобы

$$df = (A + iB)(dx + i\,dy) = e^{iV_0}(A' + iB')(dx + i\,dy).$$

(Для удобства вычислений полагаем $A + iB = e^{iV_0}(A' + iB')$.)

Итак, для того чтобы функция f была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы были дифференцируемы функции U, V и чтобы

$$A' = U'_x(x_0, y_0) = U_0V'_y(x_0, y_0), \quad B' = -U'_y(x_0, y_0) = U_0V'_x(x_0, y_0). \quad (2)$$

Дифференцируя почленно уравнения (1), получаем

$$P''_{x^2}(x, y) = Q''_{yx}(x, y), \qquad -P''_{y^2}(x, y) = Q''_{xy}(x, y).$$

Непрерывность производных Q''_{yx} и Q''_{xy} влечет

$$Q''_{yx}(x, y) = Q''_{xy}(x, y) \Rightarrow P''_{x^2}(x, y) = -P''_{y^2}(x, y).$$

То же самое доказательство годится и для функции Q. Для функций U и V достаточно заметить, что $\ln U$ и V удовлетворяют тем же уравнениям, что и функции P и Q.

2. Нахождение функций φ, зависящих только от $x^2 + y^2$ и удовлетворяющих уравнению $\varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2} = 0$, было сделано в задаче 6.04; применяя этот результат к функции $\ln U$, получаем

$$\ln[U(x, y)] = \alpha \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \beta \Rightarrow U(x, y) = e^{\beta}(x^2 + y^2)^{\alpha/2}.$$

Функция V определяется теперь, исходя из ее дифференциала:

$$dV = V'_x\,dx + V'_y\,dy = -\frac{1}{U}U'_y\,dx + \frac{1}{U}U'_x\,dy = \alpha\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

$$V(x, y) = \alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + V_0,$$

и, если положить $z = x + iy = re^{i\theta}$, то

$$f(z) = e^{\beta}r^{\alpha}e^{i\alpha\theta}e^{iV_0} = Cr^{\alpha}e^{i\alpha\theta},$$

где через C обозначено число $e^{\beta}e^{iV_0}$.

В частности, если α — целое, то $f(z) = z^{\alpha}$.

6.11. 1. Имеем $\left|z^{2^n}\right| = |z|^{2^n}$ и $2^n > n$. Следовательно,

$$|z| < 1 \Rightarrow \left|z^{2^n}\right| < |z|^n \quad \text{и} \quad \lim|z|^n = 0,$$

откуда

$$\lim z^{2^n} = 0;$$

$$|z| > 1 \Rightarrow \left|z^{2^n}\right| > |z|^n \quad \text{и} \quad \lim|z|^n = +\infty;$$

отсюда

$$\lim |z^{2^n}| = +\infty,$$

т. е. сходимость не имеет места.

2. Если z^{2^n} имеет предел l, то

$$|l| = \lim |z^{2^n}| = 1, \qquad l = \lim z^{2^{n+1}} = \lim [z^{(2^n)}]^2 = l^2.$$

Оба эти условия влекут $l = 1$.

Последовательность $u_n = z^{2^n} - 1$ сходится к 0; значит, начиная с некоторого номера p, $|u_n|$ будет меньше $1/2$. По определению,

$$1 + u_{n+1} = z^{2^{n+1}} = [z^{2^n}]^2 = (1 + u_n)^2 \Rightarrow u_{n+1} = u_n (2 + u_n);$$

отсюда

$$n \geqslant p \Rightarrow |u_n| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |2 + u_n| \geqslant 2 - |u_n| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2} \Rightarrow |u_{n+1}| \geqslant \frac{3}{2} |u_n| \Rightarrow |u_n| \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-p} |u_p|.$$

Тогда условие $|u_n| \leqslant \frac{1}{2}$ влечет

$$\left\{ |u_p| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p} \left(\frac{1}{2}\right), \ \forall n \leqslant p \right\} \Rightarrow |u_p| = 0 \Rightarrow |u_n| = 0, \ \forall n \geqslant p,$$

z есть корень порядка 2^n из 1 (n — целое, $n \geqslant p$), и в частности, корень из 1 порядка 2^p, так что

$$\arg z = \frac{2k\pi}{2^p} = \frac{k}{2^{p-1}} \pi.$$

Это необходимое условие сходимости последовательности будет также и достаточным, поскольку оно влечет $z^{2^p} = 1$, а стало быть, $z^{2^n} = 1$ при $n \geqslant p$.

6.12. 1. Преобразование $H(\alpha, z_0)$ переводит z_0 в 0. Композиция $H(0, Z_0) \circ H$ оставляет инвариантным множество E и переводит z_0 в 0, т. е. является преобразованием $H(\alpha, z_0)$:

$$H(0, Z_0) \circ H = H(\alpha, z_0) \Rightarrow H = [H(0, Z_0)]^{-1} \circ H(\alpha, z_0).$$

Совпадение образов точки z при $H(\alpha, z_0)$ и $H(0, Z_0) \circ H$ записывается следующим образом:

$$e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} = \frac{Z - Z_0}{1 - \bar{Z}_0 Z}.$$

2. Рациональная дробь Z дифференцируема, и

$$\frac{dZ}{dz} = e^{i\alpha} \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}.$$

В частности, если $z = z_0$, то

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z_0} = e^{i\alpha} \frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

Если преобразование $H(\alpha, z_0)$ переводит z в Z, то, как мы видели в п. 1, образ U числа u при $H(\alpha, z_0)$ может быть определен соотношением (в котором z и Z играют роль z_0 и Z_0 из п. 1)

$$v = \frac{U - Z}{1 - \bar{Z}U} = e^{i\beta} \frac{u - z}{1 - \bar{z}u}.$$

Приравнивая друг другу дифференциалы от v, получаем

$$dv = \frac{1 - |Z|^2}{(1 - \bar{Z}U)^2} dU = e^{i\beta} \frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}u)^2} du,$$

после чего, задавая u значение z, получаем

$$\frac{dU}{1 - |Z|^2} = e^{i\beta} \frac{du}{1 - |z|^2} \Rightarrow \frac{|dU|}{1 - |Z|^2} = \frac{|du|}{1 - |z|^2},$$

что и дает с точностью до замены обозначений (dU и du на dZ и dz) искомый результат.

3. Для рассматриваемого отрезка γ имеем $z = te^{i\theta}$, где $0 \leqslant t \leqslant r$, а $z = x + iy$; следовательно,

$$l = \int_\gamma \frac{|dz|}{1 - |z|^2} = \int_0^r \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Уравнение другой кривой Γ будет иметь вид $z = \rho e^{i\omega}$, где ρ и ω — функции одного и того же параметра t; в этом случае

$$dz = d\rho\, e^{i\omega} + i\rho\, e^{i\omega}\, d\omega \Rightarrow |dz| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2}.$$

Длина этой кривой минорируется следующим образом:

$$\int_\Gamma \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2\, d\omega^2}}{1 - \rho^2} \geqslant \int_\Gamma \frac{|d\rho|}{1 - \rho^2} \geqslant \int_\gamma \frac{d\rho}{1 - \rho^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r}{1 - r} = l.$$

Длина дуги не изменится, если подвергнуть ее точки преобразованию, определенному для их аффиксов соотношением

$$Z = H(\alpha, z) = e^{i\alpha} \frac{z - z}{1 - \bar{z}_0 z},$$

ибо, как показано в п. 2,

$$\frac{|dZ|}{1 - |Z|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Переводя теперь преобразованием $H(0, z_1)$ точку z_1 в 0, а z_2 — в Z_2, возвращаемся к предыдущему случаю, т. е. кривая Γ' минимальной длины, имеющая своими концами образы точек 0 и Z_2, представляет собой отрезок $Z = tZ_2$, и значит, кривая Γ минимальной длины с концами M_1 и M_2 (рис. 20) определяется соотношением

$$\frac{z - z_1}{1 - z\bar{z}_1} = t\, \frac{z_2 - z_1}{1 - z_2\bar{z}_2} \qquad (t \text{ — действительное, } 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

А поскольку t — действительное неотрицательное число, то аргумент выражения $\frac{z-z_1}{1-z\bar{z}_1}$, равно как и аргумент выражения $\frac{z-z_1}{z-1/\bar{z}_1}$, будет постоянным, т. е.

$$\arg\frac{z-z_1}{z-1/\bar{z}_1}=\arg(z-z_1)-\arg\left(z-\frac{1}{\bar{z}_1}\right)=$$

$$=(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{M_1M})-(\overrightarrow{Ox},\ \overrightarrow{M_1'M})=(\overrightarrow{M_1'M},\ \overrightarrow{M_1M}).$$

Следовательно, точка M лежит на окружности γ, проходящей через точку M_1 и точку M_1' (см. рис. 20), получаемую из нее инверсией относительно окружности с центром в O и радиусом 1. А так как точки M_1 и M_2 равноправны, то окружность γ проходит через M_2 и обратную ей точку M_2'; итак, Γ есть дуга M_1M_2 окружности $M_1M_2M_2'M_1'$.

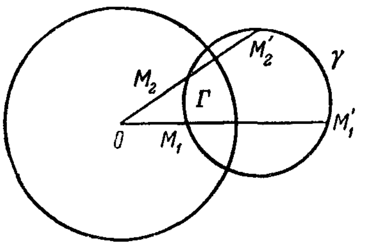

Рис. 20.

6.13. 1. Функции $(s,t)\to s+it$ и $(s,t)\to e^{s+it}$ непрерывны; функция f непрерывна на дополнении точки $(0,0)$ до B как частное двух не имеющих нулевых значений непрерывных функций.

Если $(s,t)\to(0,0)$ в R^2, то переменное $s+it$ стремится к 0 в C, и (дифференцируемость показательной функции)

$$\frac{e^{s+it}-1}{s+it}\to 1.$$

Таким образом, функция f, имеющая в $(0,0)$ предел, равный 1, непрерывна в этой точке, т. е. непрерывна в каждой точке области B.

2. Сужение функции f на отрезок $s=s_0$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, непрерывно; поэтому интеграл $g(s_0)$ определен.

Любой прямоугольник

$$s_1\leqslant s\leqslant s_2,\qquad 0\leqslant t\leqslant\pi$$

лежит внутри B; поэтому функция f непрерывна на этом прямоугольнике, а g непрерывна на $[s_1,s_2]$ (см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. IV, 4-й раздел, § 2. Сформулированная там теорема для действительных функций f переносится, очевидно, и на комплексные функции, если рассмотреть отдельно действительную и мнимую часть). Так как s_1 и s_2 выбираются произвольно, то для любого значения s_0 можно взять такие числа s_1 и s_2, чтобы $s_1\leqslant s_0\leqslant s_2$; в силу этого, g непрерывна для всех s. (Заметим, что это верно, в частности, и для $s=0$).

При $s > 1$ с помощью соотношения $|e^{s+it} - 1| \geqslant |e^{s+it}| - 1 = e^s - 1$ получаем

$$|g(s)| \leqslant \int_0^\pi \frac{|s+it|}{|e^{s+it}-1|} dt \leqslant \int_0^\pi \frac{s+\pi}{e^s-1} dt = \pi \frac{s+\pi}{e^s-1}.$$

Мажоранта

$$\pi \frac{s+\pi}{e^s-1},$$

а с ней и функция g, стремится к 0 при $s \to +\infty$.

3. На дополнении B' точки $(0, 0)$ до B функция f дифференцируема по s, и

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{e^{s+it} - 1 - (s+it) e^{s+it}}{(e^{s+it}-1)^2}.$$

Функция $\partial f/\partial s$ снова непрерывна на B', а значит, и на прямоугольниках

$$0 \leqslant t \leqslant \pi, \qquad s_1 \leqslant s \leqslant s_2,$$

если s_1 и s_2 либо одновременно строго положительны, либо строго отрицательны. Любое отличное от нуля значение s принадлежит некоторому интервалу $[s_1, s_2]$, удовлетворяющему сформированным выше условиям, но тогда g дифференцируема в точке s, и

$$g'(s) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial s}(s, t)\, dt.$$

Функция f зависит от s и t только через переменное $s + it$, и стало быть, производные $\partial f/\partial s$ и $\partial f/\partial t$ пропорциональны, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = i \frac{\partial f}{\partial s}(s, t);$$

следовательно,

$$g'(s) = -i \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial t}(s, t)\, dt = i[f(s, 0) - f(s, \pi)],$$

$$g'(s) = \frac{2ise^s}{e^{2s}-1} - \frac{\pi}{e^s+1}.$$

4. Производная g' имеет в 0 предел:

$$\frac{e^{2s}-1}{s} \to \left(\frac{de^{2s}}{ds}\right)_{s=0} = 2 \Rightarrow g'(s) \to i - \frac{\pi}{2}.$$

Функция g определена и непрерывна в окрестности 0, и ее производная при $s \to 0$ имеет предел $i - \pi/2$. Следовательно, функция g дифференцируема в 0, и $g'(0) = i - \pi/2$ (см. задачу 4.27).

Функция g' определена и непрерывна для всех s (в 0, как мы только что видели, $g'(0)$ равна пределу $g'(s)$ при $s \to 0$); значит, она интегрируема на любом интервале $[0, \sigma]$, и

$$\int_0^\sigma g'(s)\,ds = g(\sigma) - g(0).$$

При $\sigma \to +\infty$ функция $g(\sigma)$ стремится к 0; по определению, интеграл

$$\int_0^{+\infty} g'(s)\,ds$$

сходится и равен $-g(0)$, т. е.

$$-g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{2ise^s\,ds}{e^{2s}-1} - \pi \int_0^{+\infty} \frac{ds}{e^s+1} = 2i \int_0^{+\infty} \frac{se^s\,ds}{e^{2s}-1} - \pi \ln 2.$$

Заметим, что сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{se^s\,ds}{e^{2s}-1},$$

т. е. мнимой части интеграла

$$\int_0^{+\infty} g'(s)\,ds,$$

исследовать не нужно, так как сходимость последнего доказана.

По определению,

$$g(0) = \int_0^\pi \frac{it\,dt}{e^{it}-1} = \int_0^\pi \frac{ite^{-it/2}}{2i\sin t/2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt - \int_0^\pi \frac{it\,dt}{2}.$$

Приравнивая оба выражения для $g(0)$, получаем

$$\pi \ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{se^s\,ds}{e^{2s}-1} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{t\,dt}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Функция

$$t \to \frac{1}{2}t\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = f(0, t)$$

будет непрерывна в точке $t = 0$, если положить $f(0, 0) = 1$ (результат п. 1), и стало быть, вопрос о сходимости интеграла

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}t\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt$$

не возникает. Но для того чтобы преобразовать его интегрированием по частям, необходимо рассмотреть замкнутый интервал $[\theta, \pi]$, на котором функции t и $\operatorname{ctg} t/2$ были бы непрерывны (т. е. надо брать $\theta > 0$); тогда

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{1}{2} t \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = \left[t \ln\left(\sin \frac{t}{2}\right)\right]_{\theta}^{\pi} - \int_{\theta}^{\pi} \ln\left(\sin \frac{t}{2}\right) dt.$$

При $\theta \to 0$

$$\ln\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \simeq \ln \frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad \theta \ln\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \to 0,$$

$$\int_{+0}^{\pi} \ln \sin \frac{t}{2}\, dt = \lim_{\theta \to 0} \int_{\theta}^{\pi} \ln\left(\sin \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} t \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = -\pi \ln 2.$$

Наконец, сделав замену $t/2 = u$, получаем

$$\int_{+0}^{\pi} \ln\left(\sin \frac{t}{2}\right) dt = 2 \int_{+0}^{\pi/2} \ln(\sin u)\, du = -\pi \ln 2.$$

6.14. 1. Функции P и Q являются рациональными дробями со знаменателем, не обращающимся в нуль на D; следовательно, они дифференцируемы. Частные производные снова будут рациональными дробями со знаменателем, не обращающимся на D в нуль, и значит, непрерывны. Тогда для того, чтобы ω было дифференциалом функции U, необходимо, чтобы $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$; имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2(x^2 - y^2) - (3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y^2} = \frac{-3y^4 + 2x^2y^2 - 3x^4}{x^2y^2}.$$

Перестановка x и y переводит P в Q, а значит, и $\partial P/\partial y$ в $\partial Q/\partial x$; но поскольку $\partial P/\partial y$ симметрично относительно x и y, то $\partial Q/\partial x$ имеет тот же вид, и следовательно, обе производные равны между собой.

2. Функция U определяется двумя уравнениями

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = \frac{1}{y}\left[3x^2 + 2y^2 - \frac{y^4}{x^2}\right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = \frac{1}{x}\left[-\frac{x^4}{y^2} + 2x^2 + 3y^2\right].$$

Для того чтобы получить решение первого уравнения, берем в качестве U примитивную функцию $x \to P(x, y)$, считая при этом y фиксированным параметром; другие решения получаются из него прибавлением к этому решению произвольной функции от y, т. е.

$$U(x, y) = \frac{1}{y}\left[x^3 + 2xy^2 + \frac{y^4}{x}\right] + \varphi(y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{xy} + \varphi(y).$$

Подставляя это во второе уравнение, получаем

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = \text{const} \quad (\text{например, } \varphi(y) = 0),$$

$$U(x, y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{xy}.$$

3. Если A и B — концы дуги Γ, лежащей в области D, то, как известно (см. Пизо и Заманский, Анализ, гл. VIII, § 2),

$$\int_\Gamma d\omega = \int_\Gamma dU = U(B) - U(A).$$

Легко видеть, что рассматриваемая дуга Γ лежит целиком внутри D; концами этой дуги служат точки $A = (1, 1)$, $B = \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ и, следовательно,

$$\int_\Gamma d\omega = U(\pi/2, 2) - U(1, 1) = \frac{(\pi^2+16)^2}{16\pi} - 4.$$

6.15. 1. Функция U определяется соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Если U имеет непрерывные частные производные порядка 2, то P и Q имеют непрерывные частные производные первого порядка, а значит, этим свойством обладает функция φ, поскольку

$$\varphi(x, y) = (x^2+y^2)[P(x, y) - y]/y.$$

Но непрерывность вторых производных функции U влечет

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

и, значит,

$$1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x, y) + \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) =$$

$$= -1 - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\varphi(x, y) - \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y),$$

откуда элементарными вычислениями получаем уравнение (E).

2. Инвариантность дифференциала относительно замены переменных позволяет получить дифференциал функции V, соответствующей U, т. е. определенной соотношением $V(r, \theta) = U(r\cos\theta, r\sin\theta)$, а именно,

$$dV = P(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dx + Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dy =$$

$$= r\sin\theta\left[1 + \frac{\Phi(r, \theta)}{r^2}\right](dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta) -$$

$$- r\cos\theta\left[1 + \frac{\Phi(r, \theta)}{r^2}\right](dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta) = -[\Phi(r, \theta) + r^2]\,d\theta.$$

Следовательно, V зависит только от θ, и

$$\Phi(r, \theta) + r^2 = f(\theta),$$

где f — произвольная дифференцируемая функция; отсюда

$$V(\theta) = V_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} f(t)\,dt.$$

Функция φ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x, y) + x^2 + y^2 = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Уравнение (E') будет иметь вид

$$r\Phi'_r + 2r^2 = 0.$$

3. Функция φ относится к типу функций, только что рассмотренных:

$$\Phi(r, \theta) = -r^2 + 4\cos^2\theta \Rightarrow V(\theta) = V_0 - 2\theta - \sin 2\theta.$$

В окрестности точки $(1, 0)$ в качестве θ можно взять значение $\operatorname{arctg} y/x$, и тогда

$$U(x, y) = -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Если функция U_0 существует, то

$$\int_\Gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_\Gamma dU_0 = 0,$$

при условии, что Γ есть замкнутая кривая, не проходящая через начало (интеграл равен $U_0(B) - U_0(A)$, где A и B — концы дуги Γ, и значит, равен нулю в случае их совпадения). Пусть Γ есть окружность с центром в O и радиусом 1; возьмем в качестве A и B точку $(1, 0)$, получаем

$$\int_\Gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\,d\theta = -4\pi.$$

Итак, задача не имеет решения.

Замечание. Если Γ — спрямляемая замкнутая жорданова дуга, а область $\bar{D}$, состоящая из точек кривой Γ и ее внутренних к Γ точек, содержится в Ω, то достаточные условия справедливости формулы Римана выполняются, и

$$\int_{\Gamma+} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_{\bar{D}} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right] dx\,dy = 0;$$

иными словами, если точка O не принадлежит ни Γ, ни внутренней к Γ области, то криволинейный интеграл по Γ равен нулю; в случае же, когда O находится внутри Γ, это, как мы уже видели, будет не так.

6.16. Область D может быть определена соотношениями (рис. 21)

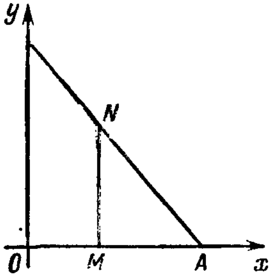

Рис. 21.

$$0 \leqslant y \leqslant b\left(1-\frac{x}{a}\right) \qquad \text{(отрезок } MN\text{)},$$

$$0 \leqslant x \leqslant a.$$

Тогда, как известно,

$$I=\int_0^a dx\left(\int_0^{b(1-x/a)}(x^2+y^2)\,dy\right),$$

$$I=\int_0^a\left[bx^2\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{3}b^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]dx=$$

$$=b\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}\right)+\frac{1}{3}b^3\frac{a}{4}=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.$$

Замечание. Можно также проинтегрировать сначала по x, что дает

$$I=\int_0^b dy\left(\int_0^{a(1-y/b)}(x^2+y^2)\,dx\right).$$

6.17. Интегрируем сначала по y, а затем по x; в пределах интегрирования (рис. 22):

$$-\sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$$

(отрезок MN),

$$0 \leqslant x \leqslant 2;$$

имеем

$$I=\int_0^2 x\,dx\left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}dy\right)=$$

$$=\int_0^2 2x\sqrt{2x-x^2}\,dx.$$

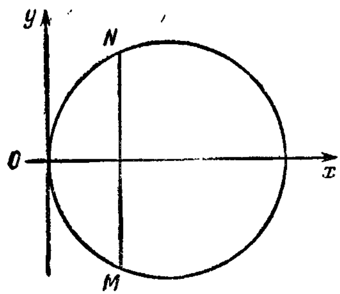

Рис. 22.

Заменяем соотношение $u=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ параметрическими уравнениями

$$x=1+\cos\varphi, \qquad u=\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi;$$

это дает

$$I=\int_0^\pi(2\sin^2\varphi+2\cos\varphi\sin^2\varphi)\,d\varphi=\left[\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{2}{3}\sin^3\varphi\right]_0^\pi=\pi.$$

Другой способ вычислений. Напомним (формула Римана), что если Γ — контур области C, то

$$\int_{\Gamma^+} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = \iint_C \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] dx\,dy.$$

В данном случае можно взять, например,

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = \frac{x^2}{2} \quad \text{или} \quad f(x, y) = -xy, \quad g(x, y) = 0,$$

и тогда

$$I = \int_\Gamma \frac{x^2}{2}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)^2 \cos\varphi\,d\varphi = \pi.$$

6.18. Первый способ. Интегрируем сначала по x, ибо, если рассматривать y как параметр, то

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2) = -\frac{1}{2}\,d(1 - x^2 - y^2).$$

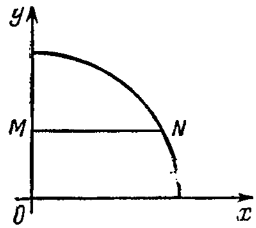

Рис. 23.

Область D может быть определена соотношениями (рис. 23)

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и мы получаем в результате интегрирования

$$I = \int_0^1 dy \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\right) =$$

$$= \int_0^1 dy \left[-\frac{1}{3}(1 - x^2 - y^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3}\int_0^1 (1 - y^2)^{3/2}\,dy.$$

Сделав замену $\varphi = \arcsin y$, получаем

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos 4\varphi}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{3}{8}\right) d\varphi = \frac{\pi}{16}.$$

Преобразование $\cos^4\varphi$ в сумму может быть осуществлено, например, следующим образом:

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi}}{16} + \frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{4} + \frac{3}{8}.$$

Второй способ. Произведем в интеграле I замену

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Преобразованная область Δ имеет вид

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и якобиан отображения равен r; таким образом,

$$I = \iint\limits_{\Delta} r \cos\theta \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta.$$

Область Δ есть прямоугольник, а подынтегральная функция является произведением функции от r на функцию от θ; в этом случае

$$I = \left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int\limits_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2}\, dr\right) = \int\limits_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2}\, dr.$$

Теперь замена $r = \sin\varphi$ даст

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

6.19. 1. Допустим, что $x > x_0$.

Левая часть соотношения равна двойному интегралу I от функции

$$(u, v) \to (u-v)^n f(v)$$

на области T, определенной неравенствами (рис. 24)

$$x_0 \leqslant v \leqslant u \ (\text{отрезок } MN) \quad \text{и} \quad x_0 \leqslant u \leqslant x,$$

т. е. T — треугольник со сторонами, образованными биссектрисой координатного угла и параллелями к осям с уравнениями $v = x_0$, $u = x$.

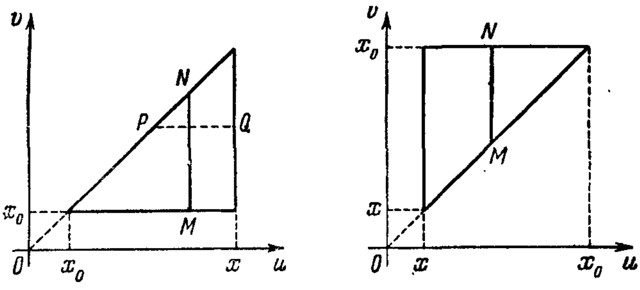

Рис. 24.

Если вычислять I, интегрируя сначала по u, а затем по v, то область T должна иметь вид $v \leqslant u \leqslant x$ (отрезок PQ) и $x_0 \leqslant v \leqslant x$; тогда

$$I = \int\limits_{x_0}^{x} dv \left(\int\limits_{v}^{x} (u-v)^n f(v)\, du\right) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-v)^{n+1}}{n+1} f(v)\, dv.$$

Для $x < x_0$ получим тот же результат, заменив треугольник T треугольником T' вида

$$u \leqslant v \leqslant x_0 \quad (\text{отрезок } MN) \quad \text{и} \quad x \leqslant u \leqslant x_0,$$

т. е. треугольником, лежащим над биссектрисой. Действительно, интеграл J на T' от функции

$$(u,\ v) \to (u - v)^n f(v)$$

равен

$$J = \int_x^{x_0} du \left(\int_u^{x_0} (u - v)^n f(v)\, dv \right) =$$

$$= \int_x^{x_0} dv \left(\int_x^{v} (u - v)^n f(v)\, du \right) = - \int_x^{x_0} \frac{(x - v)^{n+1}}{n+1} f(v)\, dv.$$

Переставляя пределы интегрирования, умножив при этом левую часть на $(-1)^2 = 1$, а правую на -1, получаем искомый результат.

2. Доказывается индукцией по n. Для $n = 1$ результат очевиден (принимаем $(n-1)! = 0! = 1$). Допустим, что

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

есть примитивная n-го порядка функции f, обращающаяся в точке x_0 в нуль вместе со своими $n - 1$ производными.

Результат п. 1 позволяет записать, что

$$F_{n+1}(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x - v)^n}{n!} f(v)\, dv = \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} \frac{(u - v)^{n-1}}{(n-1)!} f(v)\, dv = \int_{x_0}^{x} F_n(u)\, du.$$

Следовательно, F_{n+1} есть примитивная для F_n, обращающаяся в нуль в точке x_0; она является примитивной $(n+1)$-го порядка функции f и обращается в x_0 в нуль вместе со своими n производными.

Можно также вычислить производную от F_{n+1}, заметив, что переменное x присутствует как в пределах интегрирования, так и в подынтегральной функции; а так как производная последней непрерывна, то F_{n+1} дифференцируема, и

$$F'_{n+1}(x) = \left[\frac{(x - v)^n}{n!} f(v) \right]_{v=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(x - v)^n}{n!} f(v) \right] dv =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x - v)^{n-1}}{(n-1)!} f(v)\, dv = F_n(x).$$

6.20. Имеем

$$\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)^2=\left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2}\,dy\right)=\iint_D e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy,$$

где область D (рис. 25) есть квадрат $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$ (действительно, на прямоугольнике, а здесь на квадрате, интеграл от произведения функции, зависящей только от x, на функцию только от y равен произведению интегралов от этих функций).

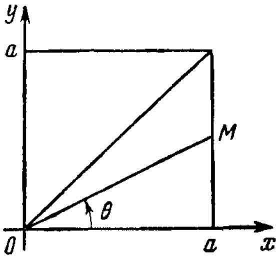

Рис. 25.

В точках, симметричных относительно биссектрисы, функция $e^{-(x^2+y^2)}$ принимает одинаковые значения; область D симметрична относительно биссектрисы. Следовательно, интеграл I на квадрате D равен двойному интегралу I_0 на треугольнике D_0, состоящем из точек области D, лежащих под биссектрисой, т. е. удовлетворяющих соотношениям $0\leqslant y\leqslant x$, $0\leqslant x\leqslant a$. Для вычисления I_0 сделаем замену $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Область Δ_0, преобразованная из D_0, задается неравенствами $0\leqslant r\leqslant a/\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$, и якобиан преобразования равен r; получаем

$$I=2I_0=2\iint_{\Delta_0} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/4}d\theta\left(\int_0^{a/\cos\theta}2e^{-r^2}r\,dr\right),$$

$$I=\int_0^{\pi/4}\left(1-e^{-a^2/\cos^2\theta}\right)d\theta.$$

6.21. Известно (Пизо и Заманский, Анализ, гл. IX, 2-й раздел, § 5), что

$$\mu=\iint_d \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)dx\,dy,$$

где d — проекция на плоскость xOy области D; множество d определяется неравенством

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leqslant 0.$$

Сделаем замену

$$x=au\cos v,\qquad y=bu\sin v,\qquad 0\leqslant v<2\pi.$$

Область δ, преобразованная из d, имеет вид $0\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v<2\pi$, и якобиан равен abu; следовательно,

$$\mu=\iint_\delta \frac{1}{2}u^2(a\cos^2 v+b\sin^2 v)\,abu\,du\,dv.$$

δ есть прямоугольник, а подынтегральная функция есть произведение функции от u на функцию от v; в силу этого

$$\mu=\frac{ab}{2}\left(\int_0^1 u^3\,du\right)\left(\int_0^{2\pi}(a\cos^2 v+b\sin^2 v)\,dv=\pi ab\,\frac{a+b}{8}\right.$$

6.22. 1. Согласно результатам задачи 6.05, можно считать, что числа ρ, θ, φ удовлетворяют соотношениям

$$\rho\geqslant 0,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

При выполнении этих неравенств S преобразуется в область Σ, определяемую неравенствами

$$0\leqslant\rho\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

и якобиан равен

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho^2\cos\varphi.$$

А поскольку этот якобиан положителен на Σ, то

$$I=\iiint\limits_{\Sigma}\rho^4\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\left(\int_0^1\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right)$$

(I является произведением трех простых интегралов, потому что Σ — параллелепипед, а подынтегральная функция представляет собой произведение трех функций, каждая из которых зависит только от одного переменного ρ, θ или φ). Итак,

$$I=\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{10}.$$

2. Сделаем замену

$$x=aX,\qquad y=bY,\qquad z=cZ.$$

Тогда E переходит в область вида

$$X\geqslant 0,\qquad Y\geqslant 0,\qquad Z\geqslant 0,\qquad X^2+Y^2+Z^2-1\leqslant 0,$$

т. е. область S из п. 1.

Якобиан равен abc, и значит,

$$J=\iiint\limits_{S}(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)\,abc\,dX\,dY\,dZ.$$

Вычисление J равносильно вычислению трех интегралов:

$$\iiint\limits_{S}X^2\,dX\,dY\,dZ,\qquad\iiint\limits_{S}Y^2\,dX\,dY\,dZ,\qquad\iiint\limits_{S}Z^2\,dX\,dY\,dZ.$$

Очевидно, что область S инвариантна относительно перестановки X и Y или X и Z; следовательно, эти три интеграла равны между собой, и каждый равен $I/3$, т. е.

$$J=(a^2+b^2+c^2)\,abc\,\frac{I}{3}=(a^2+b^2+c^2)\,abc\,\frac{\pi}{30}.$$

6.23. 1. Сделаем замену

$$x=r\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta.$$

Область D преобразуется в область D':

$$0\leqslant r\leqslant R \text{ и } 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2;$$

якобиан равен r, и значит,

$$I_R=\iint\limits_{D'} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\left(\int\limits_0^R e^{-r^2}r\,dr\right)\left(\int\limits_0^\theta d\theta\right)=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Интегрируя функцию

$$e^{-(x^2+y^2)}=e^{-x^2}e^{-y^2}$$

по квадрату Δ, получаем

$$J_a=\left(\int\limits_0^a e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int\limits_0^a e^{-y^2}\,dy\right)=[K(a)]^2.$$

2. Функция $e^{-(x^2+y^2)}$ положительна; следовательно,

$$D_1\subset D_2\Rightarrow\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Квадрат Δ лежит в круге радиуса $a\sqrt{2}$ и содержит круг радиуса a; отсюда

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)=I_a\leqslant J_a=[K_a]^2\leqslant I_{a\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right).$$

При $a\to+\infty$ функции e^{-a^2} и e^{-2a^2} стремятся к 0; $[K_a]^2$ имеет предел $\pi/4$, а значит, K_a имеет предел $\sqrt{\pi}/2$. По определению, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

сходится и равен $\sqrt{\pi}/2$. (Этот результат был уже получен в задаче 5.39 совершенно другим способом).

6.24. 1. Функции f и g, определенные на R^2 формулами

$$f(x,\ y)=e^{-x^2+y^2}\cos 2xy,$$
$$g(x,\ y)=e^{-x^2+y^2}\sin 2xy,$$

непрерывны и непрерывно дифференцируемы на всей плоскости, и, как легко видеть,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = e^{-x^2+y^2}[2y\cos(2xy) - 2x\sin(2xy)].$$

Поэтому к дуге Γ и ограничиваемой ею области $\overline{D}$ применима формула Римана, и это дает

$$\int_{\Gamma^+} f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy =$$

$$= \iint_{\overline{D}} \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] dx\,dy = 0.$$

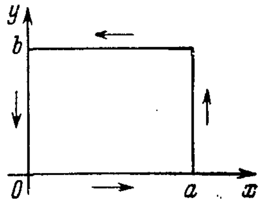

Рис. 26.

2. Интеграл по контуру прямоугольника (рис. 26), пробегаемому в положительном направлении, равен сумме интегралов по четырем сторонам, а именно, по сторонам, лежащим на прямых, определяющих прямоугольник, т. е.

$$y = 0, \qquad I_1 = \int_0^a e^{-x^2}\,dx,$$

$$x = a, \qquad I_2 = \int_0^b e^{-a^2}e^{y^2}\sin(2ay)\,dy,$$

$$y = b, \qquad I_3 = \int_a^0 e^{b^2}e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx,$$

$$x = 0, \qquad I_4 = 0.$$

А поскольку прямоугольник есть спрямляемая жорданова дуга, то результат из п. 1 дает

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

3. Если $a \to +\infty$, то I_1 стремится к

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для интеграла I_2 имеем

$$0 \leqslant y \leqslant b \Rightarrow |\, e^{y^2}\sin(2ay)\,| \leqslant e^{b^2} \Rightarrow |\, I_2\,| \leqslant e^{-a^2}e^{b^2}\pi;$$

значит, если $a \to +\infty$, то I_2 стремится к 0, и

$$\int_0^a e^{b^2} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = -I_3 = I_1 + I_2 \to \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

чем доказано, что функция $x \to e^{-x^2}\cos(2bx)$ интегрируема на $[0, +\infty[$, и

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx = e^{-b^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6.25. 1. Функции P и Q непрерывно дифференцируемы на дополнении Ω точки (0, 0) до R^2, и, как легко видеть,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) =$$

$$= e^{-y}\left[\frac{-x\sin x + y\cos x}{x^2+y^2} - \frac{(x^2-y^2)\cos x + 2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}\right].$$

Стало быть, если замкнутая область $\bar{D}$, ограниченная замкнутой дугой Γ, содержится в Ω, то согласно формуле Римана,

$$\int_{\Gamma+} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_{\bar{D}} \left[\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\right] dx\, dy = 0.$$

2. Представим полуокружность C в виде

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Тогда

$$x\, dx + y\, dy = 0,$$

$$\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2+y^2} = d\theta,$$

$$I_C = \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} \cos(R\cos\theta)\, d\theta.$$

Чтобы найти предел I_C при $R \to +\infty$, заметим, что

$$|I_C| \leqslant \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\, d\theta.$$

(Последнее соотношение получается заменой $t = \pi - \theta$ в интеграле по интервалу $[\pi/2, \pi]$.)

Известно (см. задача 4.39), что

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta \leqslant \theta \Rightarrow e^{-R\sin\theta} \leqslant e^{-2R\theta/\pi},$$

и следовательно,

$$|I_C| \leqslant 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\, d\theta = \pi \frac{1-e^{-R}}{R} \leqslant \frac{\pi}{R}.$$

Значит, когда $R \to +\infty$, $I_C \to 0$.

Функция

$$(R,\ \theta) \to e^{-R\sin\theta} \cos(R\cos\theta)$$

непрерывна на всей плоскости; следовательно, интеграл I_C от этой функции по замкнутому интервалу $[0, \pi]$ является непрерывной функцией от R. При $R \to 0$ интеграл I_C имеет в качестве предела интеграл со значением $R = 0$, т. е. интеграл от 1. Итак, при $R \to 0$ интеграл I_C стремится к π.

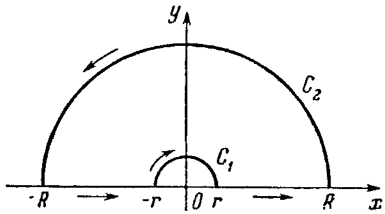

Рис. 27.

3. Интеграл по Г равен нулю (как интеграл по замкнутому контуру, не содержащему внутри себя точки O). Этот интеграл равен сумме интегралов $I_{C_2^+}$ и $-I_{C_1^+}$ по полуокружностям C_1 и C_2 с радиусами r и R, где C_2 описывается в одном направлении, а C_1 — в противоположном, и интегралов J и J' по отрезкам $[r, R]$ и $[-R, -r]$ оси Ox (рис. 27).

Для интегралов J и J' имеем

$$y = 0, \qquad dy = 0,$$

$$P(x,\ 0) = \frac{\sin x}{x},$$

$$J' = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx = J.$$

Записывая условие равенства нулю интеграла по Г, получаем

$$2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx + I_{C_2^+} - I_{C_1^+} = 0.$$

Если $r \to 0$, $I_{C_1^+} \to \pi$; стало быть, интеграл

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

имеет предел (это очевидно, ибо функция $x \to (\sin x)/x$ может быть продолжена в функцию, непрерывную на $[0, R]$, если положить ее равной 1 в $x=0$), и

$$2\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi - I_{C_2^+}.$$

Если $R \to +\infty$, то $I_{C_2^+} \to 0$, и интеграл

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$$

имеет предел: по определению, функция $(\sin x)/x$ интегрируем на $[0, +\infty[$, и

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim \frac{1}{2}\left(\pi - I_{C_2^+}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

РАЗДЕЛ 7

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Задачи опираются на результаты главы III книги IV «Курса математики» Ш. Пизо и М. Заманского.

Если $\sum u_n$ и $\sum v_n$ — *ряды с положительными членами* $u_n \leqslant v_n$ и ряд $\sum v_n$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится; в частности, если $u_n = O\left(n^{-\alpha}\right)$, где $\alpha > 1$, то ряд $\sum u_n$ сходится (факт, полезный для применения асимптотических разложений).

Если $u_n \geqslant w_n$ и ряд $\sum w_n$ расходится, то ряд $\sum u_n$ тоже расходится.

Если $u_n \simeq v_n$ при $n \to +\infty$, то оба ряда ведут себя одинаково.

В дополнение к признакам Коши, Даламбера и $n^\alpha u_n$ укажем следующий.

Если $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqslant k > 1$, то ряд $\sum u_n$ сходится.

Если $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqslant 1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

(Доказательство этого составляет содержание задачи 7.07 п. 1.)

Для рядов с произвольными действительными или комплексными членами вначале следует проверить, не будет ли ряд абсолютно сходиться, применяя для ряда из абсолютных величин методы исследования рядов с положительными членами. Такая проверка разумна по следующим причинам: абсолютно сходящиеся ряды обладают специальными свойствами, кроме того, гораздо проще исследовать сходимость ряда с положительными действительными членами, чем сходимость ряда с произвольными действительными или комплексными членами. Для рядов, не сходящихся абсолютно, полезно отметить, что положительность чисел a_n, их убывание и стремление к 0 является достаточным условием сходимости рядов

$$\sum (-1)^n a_n, \quad \sum a_n \cos n\theta, \quad \sum a_n \sin n\theta, \quad \sum a_n e^{in\theta}.$$

В иных случаях необходимо прямое исследование; часто возможны упрощения путем группирования двух-трех последовательных членов, что не меняет поведения ряда, если общий член стремится к 0 при $n \to +\infty$.

Наконец, если абсолютное значение a_n общего члена сходящегося знакопеременного ряда $\sum (-1)^n a_n$ убывает, то сумма ряда заключена между двумя последовательными частичными суммами.

Для абсолютно сходящихся рядов, и только для них, имеют место свойства коммутативности и ассоциативности конечных сумм, т. е.:

сумма не зависит от порядка членов;

любое (конечное или бесконечное) число членов может быть заменено их суммой (т. е. в бесконечном случае суммой некоторого ряда).

В частности, имеет место следующая теорема о счетных семействах действительных или комплексных чисел x_α:

если множество конечных сумм чисел $|x_\alpha|$ ограничено (например, один из рядов, полученных в результате упорядочивания семейства x_α, абсолютно сходится), то все ряды, полученные упорядочиванием членов семейства x_α, абсолютно сходятся и имеют одну и ту же сумму s;

если члены x_α семейства расположены в бесконечное множество рядов $\sum_n u_{k,n}$, так что каждый член x_α принадлежит одному и только одному из этих рядов, то ряды $\sum_n u_{k,n}$ абсолютно сходятся и ряд с общим членом

$$U_k = \sum_n u_{k,n}$$

тоже абсолютно сходится и его сумма равна числу s.

По определению, сумма S *функционального* ряда есть предел последовательности S_n сумм n первых членов; для исследования многих свойств существенно проверить, будет ли последовательность S_n *сходиться равномерно.* Как уже указывалось, для этого лучше всего воспользоваться нормой

$$\|f\| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Полагая

$$U(x) = \sum_0^\infty u_n(x) \quad \text{и} \quad U_p(x) = \sum_0^p u_n(x),$$

можно утверждать, что функциональный ряд $\sum u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$:

если последовательность

$$\|U - U_p\| = \left\| \sum_{p+1}^{+\infty} u_n \right\|$$

стремится к 0,

или если двойная последовательность

$$\|U_p - U_q\| = \left\| \sum_{p+1}^{q} u_n \right\|$$

стремится к 0,

или, наконец, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\left| \sum_{p+1}^{+\infty} u_n(x) \right| < \varepsilon \qquad \text{для всех} \qquad x \in [a, b].$$

Часто используются следующие *признаки равномерной сходимости.*

Если сходится ряд $\sum \|u_n\|$, то ряд $\sum u_n$ равномерно сходится, ибо

$$\|U_p - U_q\| \leqslant \sum_{p+1}^{q} \|u_n\|.$$

Если $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$ и числовой ряд $\sum \alpha_n$ сходится, то ряд $\sum u_n$ равномерно сходится; это есть следствие предыдущего случая, так как

$$\|u_n\| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |u_n(x)| \leqslant \alpha_n.$$

Основные теоремы о равномерно сходящихся рядах. 1. Если ряд $\sum u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$ и функции u_n непрерывны на $[a, b]$, то сумма ряда непрерывна на $[a, b]$.

2. Если ряд $\sum u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$ и если примитивные v_n обладают тем свойством, что при некотором фиксированном значении $x_0 \in [a, b]$ ряд $\sum v_n(x_0)$ сходится, то ряд $\sum v_n$ равномерно сходится на $[a, b]$ и его сумма V является примитивной для суммы U ряда $\sum u_n$.

Эта теорема применяется часто для того случая, когда примитивная v_n обращается в x_0 в нуль; тогда

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{0}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt.$$

Взяв в качестве x_0 и x определенные значения α и β, получим теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

3. Если функции u_n дифференцируемы и ряд $\sum u_n'$ из производных равномерно сходится на $[a, b]$, то сумма U ряда $\sum u_n$ (предполагаемого сходящимся) дифференцируема и

$$U'(x) = \sum_{0}^{\infty} u_n'(x).$$

Необходимо отметить, что в теоремах 1 и 2 мы пользуемся равномерной сходимостью ряда $\sum u_n$, а в теореме 3 — равномерной сходимостью ряда $\sum u_n'$.

Запись *степенного ряда* всегда должна сопровождаться указанием его радиуса сходимости. Для рядов из производных и рядов из примитивных радиус сходимости, как известно, будет тот же самый. Степенной ряд равномерно сходится на любом круге с центром в 0 и радиусом, строго меньшим радиуса сходимости; но внутри круга сходимости он, вообще говоря, не будет равномерно сходящимся. Сумма степенного ряда определяет внутри круга сходимости непрерывную бесконечно дифференцируемую функцию, и производные являются суммами рядов, полученных почленным дифференцированием исходного ряда.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7.01. Исследовать сходимость рядов с общими членами

$$\frac{n^2+n+1}{n^3+1}, \quad \frac{n^2+n+1}{n^4+1}, \quad \frac{n!\,x^n}{n^n},$$

$$\frac{n^{1/2}\ln n}{n^2+1}\sin n\theta, \quad \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n}{n+1},$$

где x — комплексный параметр, а θ — действительный.

7.02. Показать, что ряд с общим членом

$$u_n = \sin\left(\sqrt{n^2+a^2}\,\pi\right)$$

сходится (a — заданное действительное число).

7.03. 1. Если убывающая последовательность u_n сходится к 0, то ряды с общими членами u_n и $v_n = 2^n u_{2^n}$ ведут себя одинаково.

Применить этот результат к ряду Римана с $u_n = n^{-\beta}$.

2. Исследовать сходимость ряда с общим членом

$$t_n = n^{-\alpha} (\ln n)^{-\beta}.$$

7.04. Показать, что ряд с общим членом $(\sin n\alpha)/n$ сходится, но не абсолютно (α — заданное действительное число).

7.05. Показать, что последовательность с общим членом

$$u_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n^{a-1}(n!)}$$

при $a > 0$ имеет отличный от нуля предел (исследовать ряд с общим членом $\ln(u_n/u_{n-1})$).

Сохранится ли результат для $a \leqslant 0$?

7.06. 1. Допустим, что тригонометрический ряд с общим членом

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

абсолютно сходится для значения x_0. Показать, что если он сходится для $x_0 + h$, то он сходится и для $x_0 - h$, и что если он абсолютно сходится для $x_0 + h$, то он абсолютно сходится и для $x_0 - h$.

2. Если тригонометрический ряд абсолютно сходится для двух значений x_0 и x_1, разность которых несоизмерима с π, то он абсолютно сходится для бесконечного множества значений x, не сравнимых по $\operatorname{mod} 2\pi$.

7.07. 1. Общему члену ряда, обладающего, к примеру, свойством $u_n > 0$, ставится в соответствие число

$$v_n = 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Показать, что если, начиная с некоторого номера,

$$nv_n \geqslant k > 1, \text{ то ряд } \sum u_n \text{ сходится;}$$

$$nv_n \leqslant 1, \qquad \text{то ряд } \sum u_n \text{ расходится.}$$

(Сравниваем ряд u_n с рядом Римана $\sum n^{-k}$.)

Что можно вывести отсюда, если nv_n имеет предел l?

2. Применить предыдущий результат к исследованию сходимости ряда с общим членом

$$u_n = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

3. Показать, что если $\alpha \neq -1$, то ряд с общим членом

$$\ln \frac{n-\alpha}{n+1} \qquad (n > \alpha)$$

расходится, и найти предел u_n.

4. Исследовать сходимость ряда с общим членом

$$w_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},$$

7.08. 1. Доказать сходимость ряда с общим членом

$$u_n = \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t \sin t}{1+t^2}\, dt$$

и вывести отсюда сходимость интеграла

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t \sin t}{1+t^2}\, dt.$$

2. Показать, что для ряда с общим членом u_n и для интеграла I абсолютная сходимость не имеет места.

3. Показать, что те же результаты справедливы для интеграла

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{A(t)}{B(t)} \sin t\, dt,$$

если A и B — многочлены, у которых $\deg B = \deg A + 1$, a — число, строго большее нулей B. (Сходимость этого интеграла уже изучалась в задаче 5.35 иным способом, без исследования абсолютной сходимости.)

7.09. Последовательность u_n определена заданием члена u_0 и рекуррентным соотношением

$$u_n = \sin u_{n-1}.$$

Показать, что последовательность u_n сходится к 0.

Рассмотреть функцию f_n вида

$$u_n = f_n(u_0)$$

и показать, что последовательность функций f_n равномерно сходится к 0 на действительной прямой.

2. Показать, что ряд с общим членом u_n^3 сходится (можно использовать сходимость ряда с общим членом $u_{n+1} - u_n$); показать, что ряд функций f_n^3 равномерно сходится на действительной прямой.

3. Показать, что ряды с общими членами

$$\ln \frac{\sin u_n}{u_n} \quad \text{и} \quad u_n^2$$

расходятся.

4. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n x^n$ для всех комплексных x.

7.10. Пусть радиус сходимости степенного ряда с общим членом $a_n t^n$ равен 1, а коэффициенты a_n положительны.

Показать, что если сумма

$$S(t) = \sum_{0}^{\infty} a_n t^n$$

ограничена на полуоткрытом интервале $[t_0, 1[$, то ряд $\sum_0^\infty a_n$ сходится, и

$$\lim_{t\to 1} \sum_0^\infty a_n t^n = \sum_0^\infty a_n.$$

Исследовать, имеет ли сумма

$$S(t) = \sum_0^\infty a_n t^n$$

предел слева в 1, если ряд Σa_n расходится.

7.11. 1. Выразить $\cos^{2p} t$ в виде линейной комбинации степеней с мнимым показателем и применить этот результат к вычислению интеграла

$$I_p = \int_0^{2\pi} \cos^{2p} t\, dt.$$

2. Доказать, не пользуясь результатом из п. 1, соотношение

$$2nI_n = (2n-1)\, I_{n-1}$$

и найти таким путем значение I_p.

3. Показать, что функция F вида

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)\, dt$$

определена на интервале $]-1, 1[$ и разложима на этом интервале в степенной ряд.

4. Найти разложение в степенной ряд производной F' функции F. Определить F', а затем и F, при помощи элементарных функций.

7.12. Пусть для действительных x, удовлетворяющих условию $0 < x < 1$, определена функция f:

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}}\, dt,$$

где α — действительная постоянная, $\alpha > -1$.

1. Показать, что интеграл $f(x)$ имеет смысл.

2. Разложить $(1-t^4)^{-1/2}$ в степенной ряд и показать, что функцию f можно разложить в ряд S с членами $a_n t^{k_n}$.

3. Показать, что ряд S равномерно сходится на замкнутом интервале $[0, 1]$ (можно исследовать сходимость ряда в 1 и применить результат задачи 7.07 п. 1).

Воспользоваться этим фактом для доказательства того, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha}\,dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

сходится и равен сумме ряда S при $x = 1$.

4. Установить непосредственно сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha}\,dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

7.13. 1. Показать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

сходится при любом x, а интеграл

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

сходится при $x > 0$.

2. Для $x > 0$ определим функцию Γ формулой

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Показать, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, и вычислить $\Gamma(x)$ для целых x.

3. Показать, что для $x > 0$

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}.$$

4. Показать, что ряд

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}$$

сходится всюду, кроме целых не положительных x. Сумма этого ряда будет обозначаться через $S(x)$.

5. На дополнении до R множества целых не положительных чисел определена функция G:

$$G(x) = S(x) + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Показать, что сужение функции G на множество $x > 0$ есть функция Γ и что G удовлетворяет соотношению

$$G(x+1) = xG(x).$$

7.14. Применяя теорему о перемножении рядов, показать, что функция

$$x \to \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

может быть разложена при $|x| < 1$ в степенной ряд; найти общий член этого ряда.

Найти непосредственно радиус сходимости полученного ряда.

7.15. Обозначим через x действительное число, удовлетворяющее условию $-1 < x < 1$.

1. Показать, что любое натуральное n может быть единственным способом представлено в виде суммы различных целых не отрицательных степеней двойки, т. е. в виде

$$n = \sum_{i=1}^{I} 2^{k_i}.$$

Какие числа n будут получены, если все k_i не превосходят некоторого натурального P?

2. Показать, что последовательность

$$u_P = \prod_{k=0}^{P} [1 + x^{2^k}]$$

имеет предел $1/(1-x)$.

3. Показать, что ряд с общим членом $\ln(1+x^n)$ абсолютно сходится и

$$\sum_{1}^{+\infty} \ln(1+x^n) = -\sum_{1}^{+\infty} \ln(1-x^{2p-1}),$$

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{1}^{N} (1+x^n) = \lim_{N'\to\infty} \prod_{1}^{N'} \frac{1}{1-x^{2p-1}}.$$

7.16. Через x и z обозначены комплексные числа, удовлетворяющие неравенству

$$2|x||z| + |z|^2 < 1.$$

1. Показать, что

$$s(x, z) = (1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, z),$$

где

$$u_0(x, z) = 1, \qquad u_k(x, z) = \frac{1\cdot 3 \ldots (2k-1)}{2\cdot 4 \ldots 2k} (2xz - z^2)^k.$$

2. Пусть через $v_n(x) z^n$ обозначен член n-й степени многочлена $\sum_{k=0}^{n} u_k(x, z)$ от z.

Показать, что ряд с общим членом $v_n(x)z^n$ сходится и его сумма равна $s(x, z)$.

3. Показать, что

$$v_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

4. Вычислить частную производную $\partial s/\partial z$ и при помощи полученного выражения найти соотношение между тремя последовательными многочленами v_n.

7.17. 1. Применяя разложение e^z в степенной ряд, показать, что для любого комплексного z справедливы неравенства

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n,$$

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant e^{|z|}\frac{|z|^2}{2n}.$$

2. Показать, что последовательность функций f_n:

$$f_n(x) = i\frac{\left(1 + \frac{ix}{2n}\right)^{2n} + \left(1 - \frac{ix}{2n}\right)^{2n}}{\left(1 + \frac{ix}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{ix}{2n}\right)^{2n}}$$

равномерно сходится на $]0, \pi/2]$ к функции $\operatorname{ctg} x$.

7.18. Показать, что ряд с общим членом

$$\frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$$

сходится при $x \geqslant 0$ и расходится при $x < 0$.

Пусть f — функция, определенная для всех неотрицательных x формулой

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

Показать, что f непрерывна при $x \geqslant 0$ и дифференцируема при $x > 0$.

7.19. Пусть α — заданное действительное число, а t и x — действительные переменные.

1. Найти ряд Фурье функции f:

$$f(t) = \cos \alpha t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Объяснить, почему сумма ряда равна $f(t)$, если $-\pi < t < \pi$, и найти значение суммы ряда при $t = \pi$.

Вывести из предыдущего результата, что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

2. Показать, что если $|x| \leqslant M$ и $N > M/\pi$, то функция

$$x \to \sum_{N}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

непрерывна. Вычислить

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

3. Показать, что если $0 < x < \pi$, то

$$\ln \sin x = \ln x + \sum_{1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

4. Показать, что если x не является числом, кратным π, то

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}.$$

7.20. Рассмотрим 2π-периодическую функцию f, определенную соотношением

$$f(t) = t, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

1. Найти ряд Фурье функции f; чему равно значение $S(t)$ суммы этого ряда для различных значений t переменного?

2. Найти наименьшее положительное значение t_n переменного t, для которого сумма $S_n(t)$ первых $n+1$ членов предыдущего ряда имеет относительный минимум.

3. Показать, что последовательность $S_n(t_n)$ имеет предел

$$\pi - 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

4. Найти разложение в степенной ряд функции

$$x \to \frac{1}{\pi}\int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt;$$

в качестве приближенного значения величины

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

взять сумму первых четырех отличных от нуля членов степенного ряда и указать полученную точность.

5. Показать, что последовательность $S(t_n) - S_n(t_n)$ не стремится к 0. Объяснить, почему нет противоречия с тем, что $S_n(t)$ сходится к $S(t)$ при любом t.

7.01. Ряд, все члены которого (или начиная с некоторого номера) имеют одинаковый знак, ведет себя так же, как ряд, полученный в результате замены каждого члена на эквивалентный, поэтому

$$\frac{n^2+n+1}{n^3+1}>0 \quad \text{и} \quad \frac{n^2+n+1}{n^3+1}\simeq\frac{1}{n}\Rightarrow \text{ ряд расходится.}$$

$$\frac{n^2+n+1}{n^4+1}>0 \quad \text{и} \quad \frac{n^2+n+1}{n^4+1}\simeq\frac{1}{n^2}\Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

Применим признак Даламбера к ряду с общим членом $u_n=n!\,x^n/n^n$ (т. е. к ряду из модулей):

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{(n+1)\,|x|\,n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{|x|}{(1+1/n)^n}.$$

Последовательность $(1+1/n)^n$ имеет предел e (Пизо и Заманский, Анализ, гл. III, 7-й раздел, § 6), и значит, $|u_{n+1}|/|u_n|$ имеет предел $|x|/e$. Ряд сходится, если $|x|<e$, и расходится, если $|x|>e$. Покажем, что если $|x|=e$, то ряд сходится. Для этого достаточно установить, что $|u_{n+1}|/|u_n|>1$, т. е. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<$ $<e$, а это неравенство проверяется следующим образом:

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}\,\frac{1}{(1+\theta/n)^2}<1=\ln e.$$

Для любого показателя $\beta>0$ при $x\to+\infty$

$$\ln x=o(x^\beta)\Rightarrow\ln x=O(x^\beta);$$

поскольку $|\sin n\theta|\leqslant 1$, то

$$\frac{n^{1/2}\ln n}{n^2+1}\sin n\theta=\frac{n^{1/2}}{n^2+1}\,O(n^\beta)=O(n^{\beta-3/2}).$$

Для того чтобы установить сходимость ряда с таким общим членом, достаточно (признак $n^\alpha u_n$) взять $\beta<\frac{1}{2}\left(\text{например, } \beta=\frac{1}{4}\right)$.

Наконец, в последнем случае $v_n=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{n+1}$ положительно и стремится к 0;

$$\cos v_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}-v_n\right)=\frac{n}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{n+1}=1-\cos v_n\simeq\frac{v_n^2}{2}.$$

v_n положительно и эквивалентно $\sqrt{2/(n+1)}$, и стало быть, ряд $\sum v_n$, как и ряд $\sum\sqrt{2/(n+1)}$, расходится.

7.02. Поскольку

$$\sqrt{n^2+a^2}=n+\frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n},$$

то

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\,\pi\right) = (-1)^n \sin v_n.$$

Последовательность положительных членов v_n убывает и стремится к 0; значит, последовательность $\sin v_n$ обладает теми же свойствами.

Ряд $\sum u_n$ — знакопеременный, и последовательность $|u_n| = \sin v_n$ убывает и стремится к 0; следовательно, ряд $\sum u_n$ сходится (см. Пизо и Заманский, книга IV, гл. III, 1-й раздел, § 4).

7.03. 1. Заметим вначале, что u_n положительны в силу того, что последовательность u_n убывает и стремится к 0. Кроме того,

$$2^p < n < 2^{p+1} \Rightarrow u_{2^p} \geqslant u_n \geqslant u_{2^{p+1}}.$$

Суммируя эти неравенства для $2^{p+1} - 2^p = 2^p$ значений n, получаем

$$2^p u_{2^p} \geqslant \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} u_n \geqslant 2^p u_{2^{p+1}},$$

или, обозначив через U_k сумму $\sum\limits_{n=1}^{k} u_n$,

$$v_p \geqslant U_{2^{p+1}} - U_{2^p} \geqslant \frac{1}{2}\, v_{p+1}.$$

Суммируя эти неравенства для значений $p \leqslant P$, получаем

$$V_P = \sum_{p=1}^{P} v_p \geqslant U_{2^{P+1}} - U_2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{P+1} v_p = \frac{1}{2}(V_{P+1} - V_1).$$

Если ряд $\sum u_n$ сходится, то сумма $U_{2^{P+1}}$ мажорируется суммой U ряда; следовательно, сумма V_{P+1} мажорируется конечным числом, не зависящим от P, т. е. ряд $\sum v_p$ с положительными членами сходится.

Если ряд $\sum u_n$ расходится, то сумма $U_{2^{P+1}}$ стремится к $+\infty$ при $P \to +\infty$, а значит, и сумма $V_P \to +\infty$, т. е. ряд $\sum v_n$, расходится. В рассматриваемом частном случае

$$u_n = n^{-\alpha} \Rightarrow v_n = 2^n (2^n)^{-\alpha} = \left(2^{1-\alpha}\right)^n.$$

v_n является общим членом геометрической прогрессии со знаменателем $2^{1-\alpha}$. Следовательно, ряд $\sum v_n$, равно как и ряд $\sum u_n$,

сходится, если $2^{1-\alpha} < 1$, т. е. $\alpha > 1$,

расходится, если $2^{1-\alpha} \geqslant 1$, т. е. $\alpha \leqslant 1$.

2. Известно, что $\ln n = o(n^h)$ при любом $h > 0$; отсюда легко выводится, что

если $\alpha > 1$ и $\alpha > \alpha' > 1$, то $n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta} = O(n^{-\alpha'})$, и тогда ряд $\sum n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta}$ сходится;

если $\alpha < 1$ и $\alpha < \alpha' < 1$, то, начиная с некоторого номера, $n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta} \geqslant n^{-\alpha'}$, и ряд $\sum n^{-\alpha}(\ln n)^{-\beta}$ расходится.

Если $\alpha = 1$, то воспользуемся результатом п. 1 (u_n положительно и возрастает для достаточно больших n); получаем

$$2^n t_{2^n} = 2^n 2^{-n} (\ln 2^n)^{-\beta} = n^{-\beta} (\ln 2)^{-\beta}.$$

Итак, оба ряда $\sum t_n$ и $\sum 2^n t_{2^n}$ одновременно

сходятся, если $\beta > 1$,

расходятся, если $\beta \leqslant 1$.

7.04. Очевидно, что если α кратно π, то ряд сходится, он сходится или расходится одновременно для значений α, $2\pi - \alpha$ и $2n\pi + \alpha$ (n — целое). Следовательно, можно предположить, что $0 < \alpha < \pi$. Для доказательства сходимости ряда $(\sin n\alpha)/n$ можно воспользоваться преобразованием Абеля (см. Пизо и Заманский, Книга IV, гл. III, 1-й раздел, § 4). Полагая

$$S_k = \sum_{p=1}^{k} \sin p\alpha,$$

можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k} = S_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}(S_k - S_{k-1}) = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k;$$

но, как известно,

$$|S_k| = \left|\sum_{p=1}^{k} \sin p\alpha\right| = \left|\frac{\sin k\alpha/2 \sin (k+1)\alpha/2}{\sin \alpha/2}\right| \leqslant \frac{1}{\sin \alpha/2}.$$

Ряд

$$\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k$$

абсолютно сходится (абсолютное значение общего члена мажорируется членами

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{\sin \alpha/2}$$

сходящегося ряда); последовательность S_n/n имеет пределом 0; поэтому сумма

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k}$$

имеет предел при $n \to +\infty$; $\sum (\sin k\alpha)/k$ по определению сходится.

Для исследования ряда $\sum |\sin n\alpha|/n$ можно предположить, что $0 < \alpha \leqslant \pi/2$ (общий член принимает одно и то же значение в точках α и $\pi - \alpha$).

Рассмотрим на единичной окружности (рис. 28) точки A и B оси Ox и точки M и N с криволинейными абсциссами $n\alpha$ и $(n+1)\alpha$; возможны два случая.

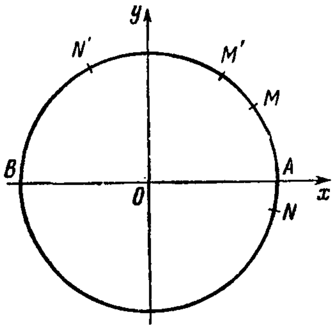

Рис. 28.

а) Меньшая из двух дуг MN содержит точку A или B. Так как мера этой дуги равна α, то, очевидно, одна из дуг AM или AN (или же BM или BN, если B заключено между M и N) имеет меру больше или равную $\alpha/2$; тогда $|\sin n\alpha|$ или $|\sin(n+1)\alpha|$ больше или равно $\sin \alpha/2$.

б) Меньшая из двух дуг MN не содержит ни A, ни B; на рисунке это случай точек M' и N'. Так как дуга $M'N'$ имеет меру меньше или равную $\pi/2$, то сумма дуг AM' и BN' больше или равна $\pi/2$; одна из этих дуг больше или равна $\pi/4$, и синус этой дуги больше или равен $\sin \pi/4 \geqslant \sin \alpha/2$.

Итак, по крайней мере одно из двух чисел $|\sin n\alpha|$ и $|\sin(n+1)\alpha|$ минорируется числом $\sin \alpha/2$; по крайней мере один из двух последовательных членов

$$\frac{|\sin 2p\alpha|}{2p} \quad \text{и} \quad \frac{|\sin(2p+1)\alpha|}{2p+1}$$

ряда имеет числитель больше или равный $\sin \alpha/2$; знаменатель этого члена не превосходит $(2p+1)$, и значит,

$$\frac{|\sin 2p\alpha|}{2p} + \frac{|\sin(2p+1)\alpha|}{2p+1} \geqslant \frac{\sin \alpha/2}{2p+1}.$$

Ряд

$$\sum \frac{1}{2p+1} \sin \frac{\alpha}{2}$$

расходится, а вместе с ним расходится и ряд

$$\sum \frac{|\sin n\alpha|}{n},$$

сумма первых $2p+1$ членов которого бесконечно возрастает вместе с p.

Замечание. Предыдущие исследования остаются без изменений, если рассматривать ряды $\sum a_n \sin n\alpha$, и $\sum |a_n \sin n\alpha|$, где последовательность a_n, убывая, стремится к нулю, а ряд $\sum a_n$ расходится.

7.05. Можем записать

$$u_n = \frac{a}{1}\left(1+\frac{a-1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a-1}{n}\right)n^{-(a-1)},$$

и, логарифмируя, заменить произведение суммой

$$\ln u_n = \ln a + \ln\left(1+\frac{a-1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{a-1}{n}\right) - (a-1)\ln n.$$

Чтобы найти предел этой последовательности, поставим ей в соответствие такой ряд $\sum v_n$, чтобы сумма первых n членов этого ряда была равна $\ln u_n$; тогда

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1} = \ln\frac{u_n}{u_{n-1}} = \ln\left(1+\frac{a-1}{n}\right) + (a-1)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) =$$
$$= \frac{a-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + (a-1)\left[-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

v_n является общим членом сходящегося ряда; сумма $\ln u_n$ первых n членов этого ряда имеет предел, равный сумме v ряда, а $u_n = e^{v_n}$ имеет предел, равный положительному числу e^v.

Если a — целое отрицательное число, то u_n, начиная с некоторого номера, равны нулю. Кроме этого случая, u_n никогда не обращается в нуль, а так как $a+n-1$, начиная с некоторого номера n_0, положительно, то все члены u_n, начиная с некоторого номера, имеют одинаковые знаки, и значит, достаточно исследовать $|u_n|$ или $\ln|u_n|$.

Исследование тождественно проделанному для случая положительного a: для $n \geqslant n_0$ рассмотрим

$$v_n = \ln\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \ln\left(1+\frac{a-1}{n}\right) + (a-1)\left(\ln\frac{n-1}{n}\right).$$

Итак, для целых отрицательных a, начиная с некоторого номера, $u_n = 0$. Для всех остальных значений a последовательность u_n имеет конечный отличный от нуля предел.

7.06. 1. Элементарным тригонометрическим преобразованием получаем

$$u_n(x_0+h) + u_n(x_0-h) = 2a_n \cos nh \cos nx_0 + 2b_n \sin nx_0 \cos nh =$$
$$= 2\cos nh u_n(x_0),$$

откуда

$$|u_n(x_0+h) + u_n(x_0-h)| \leqslant 2|u_n(x_0)|.$$

Ряд $\sum\{u_n(x_0+h) + u_n(x_0-h)\}$ абсолютно сходится, так как сходится, по условию, мажорирующий ряд $\sum|u_n(x_0)|$.

Записывая

$$u_n(x_0-h) = [u_n(x_0+h) + u_n(x_0-h)] - u_n(x_0+h),$$

видим, что ряд $\sum u_n(x_0-h)$, равный разности двух сходящихся или абсолютно сходящихся рядов, в зависимости от условий, наложенных на $\sum u_n(x_0 + h)$, ведет себя так же, как и ряд $\sum u_n(x_0 + h)$.

2. Можно применить предыдущий результат, положив $x_1 = x_0 + h$; в силу этого результата ряд абсолютно сходится в точке $x_0 - h = x_0'$. Тот же результат в применении к значениям x_0' и $x_0' + h = x_0$ показывает, что ряд абсолютно сходится для значения $x_0' - h = x_0 - 2h$. Вообще, убеждаемся индукцией по n, что ряд абсолютно сходится для значений $x_0 - nh$ (а также для значений $x_0 + nh$).

Если бы два члена из этих последовательностей были сравнимы по $\mathrm{mod}\, 2\pi$, то нашлись бы такие различные целые числа m и n, что

$$x_0 - nh = x_0 - mh \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \Rightarrow (m - n)\, h = 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

и тогда h было бы, вопреки предположению, соизмеримо с π.

7.07. 1. По условию,

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow n v_n \geqslant k \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \frac{k}{n};$$

но (формула Маклорена порядка 2),

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-k} = 1 - \frac{k}{n} + \frac{k(k+1)}{2}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^{-k-2}$$
$$(0 < \theta < 1);$$

отсюда

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-k} \geqslant 1 - \frac{k}{n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} > 0.$$

Перемножая почленно эти неравенства, начиная с номера n_0, получаем

$$\frac{(n+1)^{-k}}{n_0^{-k}} > \frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \Rightarrow u_{n+1} < (n+1)^{-k} \frac{u_{n_0}}{n_0^{-k}}.$$

Ряд

$$\sum \frac{u_{n_0}}{n_0^{-k}} (n+1)^{-k}$$

сходится $\left(u_{n_0}/n_0^{-k}\right.$ не зависит от $\left.n\right)$, а значит, сходится и ряд $\sum u_n$.

Во втором случае

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow n v_n \leqslant 1 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Перемножая почленно последние неравенства, начиная с некоторого значения n_0 индекса n, получаем

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \geqslant \frac{n_0 - 1}{n} \qquad \text{или} \qquad u_{n+1} \geqslant \frac{(n_0 - 1)\, u_{n_0}}{n}.$$

Ряд

$$\sum \frac{(n_0 - 1)\, u_{n_0}}{n}$$

расходится, а значит, расходится и ряд $\sum u_{n+1}$.

Допустим, что nv_n имеет предел l.

Если $l > 1$, то $l > k > 1$ для некоторого числа k; по определению предела, $nv_n \geqslant k > 1$, начиная с некоторого номера n_0, и следовательно, ряд $\sum u_n$ сходится.

Если $l < 1$, то, начиная с некоторого номера n_0, $nv_n \leqslant 1$ и ряд $\sum u_n$ расходится.

Если $l = 1$, то ничего сказать нельзя (кроме того случая, когда nv_n стремится к 1, оставаясь меньше 1, и тогда ряд $\sum u_n$ расходится).

2. Отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-\alpha}{n+1}$$

стремится к 1 при $n \to +\infty$. Следовательно, все члены u_n, начиная с некоторого номера, имеют одинаковые знаки, и можно применить результат п. 1.

В этом случае

$$v_n = 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha+1}{n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} nv_n = \alpha + 1$$

Если $\alpha + 1 > 1$, т. е. $\alpha > 0$, то ряд $\sum u_n$ сходится.

Если $\alpha + 1 < 1$, т. е. $\alpha < 0$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Если $\alpha + 1 = 1$, т. е. $\alpha = 0$, то $u_n = 0$; ряд сходится.

3. Если $\alpha = -1$, то $\ln \dfrac{n-\alpha}{n+1} = \ln 1 = 0$.

Если $\alpha \neq -1$, то все члены имеют одинаковые знаки, а именно, положительны при $\alpha < -1$ и отрицательны при $\alpha > -1$. В силу этого для исследования поведения ряда можно заменить общий член ему эквивалентным:

$$\ln \frac{n-\alpha}{n+1} \simeq \frac{n-\alpha}{n+1} - 1 = -\frac{\alpha+1}{n+1}.$$

Отсюда видно, что ряд расходится, причем сумма первых n членов стремится к $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от того, будет ли $\alpha < -1$ или $\alpha > -1$. Имеем

$$\sum_{p>\alpha}^{n} \ln \frac{p-\alpha}{p+1} = \ln \frac{(p_0-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{(p_0+1)\ldots(n+1)} = \ln \frac{u_{n+1}}{k},$$

где

$$k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p_0+1)}{p_0!}(-1)^{p_0}.$$

Коэффициент k не зависит от n, и стало быть, предел последовательности u_n равен:

0, если $\alpha > -1$, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_{n+1}/k) = -\infty$;

$\pm\infty$, если $\alpha < -1$, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_{n+1}/k) = +\infty$;

1, если $\alpha = -1$, ибо $u_n = n!/n!$

4. Ряд $\sum w_n$ — знакопеременный, и $|w_n| = |u_n|$. Если $\alpha \geqslant 0$, то ряд $\sum u_n$ сходится; все его члены имеют одинаковые знаки; ряд $\sum |w_n| = \sum |u_n|$ сходится, и таким образом, ряд $\sum w_n$ абсолютно сходится.

Если $-1 < \alpha \leqslant 0$, то, как известно, u_n, а с ним и w_n, стремится к 0; отношение

$$\left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \frac{n-\alpha}{n+1}$$

не превосходит 1. А тогда, как мы знаем, знакопеременный ряд $\sum w_n$ сходится (см. Пизо и Заманский, книга IV, гл. III, 1-й раздел, § 4).

Если $\alpha \leqslant -1$, то u_n, а значит, и w_n не стремится к 0 при $n \to \infty$, и ряд $\sum w_n$ расходится.

7.08. 1. На $[(n-1)\pi, n\pi]$ функция синус положительна для нечетных и отрицательна для четных n; значит, u_n имеет тот же знак, что и $(-1)^{n-1}$, и

$$|u_n| = (-1)^{n-1} u_n = \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\,|\sin t|}{1+t^2}\,dt.$$

Функция $t \to t/(1+t^2)$ убывает при $t \geqslant 1$; следовательно, числа

$$\frac{(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2} \quad \text{и} \quad \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}$$

являются мажорантой и минорантой для $t/(1+t^2)$ на $[(n-1)\pi, n\pi]$; отсюда

$$\frac{(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2} \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\,dt \geqslant |u_n| \geqslant \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2} \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\,dt.$$

Интеграл от $|\sin t|$ является также интегралом от $(-1)^{n-1}\sin t$ и равен 2. Теперь из предыдущих неравенств, написанных для номеров n и $n+1$, выводим, что

$$\frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2} \geqslant |u_n| \geqslant \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \geqslant |u_{n+1}|.$$

Из этих неравенств следует, что последовательность $|u_n|$ убывает и стремится к 0, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2} = 0.$$

Знакопеременный ряд с общим членом u_n сходится и имеет сумму

$$U = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} u_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{n\pi} \frac{t}{1+t^2} \sin t\,dt$$

Для доказательства сходимости интеграла I необходимо выяснить, имеет ли интеграл

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2} \sin t \, dt$$

предел при $x \to +\infty$; для этого поставим в соответствие x такое целое n, что

$$n\pi \leqslant x < (n+1)\pi.$$

Тогда справедливы соотношения:

$$\left| \int_0^x \frac{t \sin t}{1+t^2} dt - \int_0^{n\pi} \frac{t \sin t}{1+t^2} dt \right| = \left| \int_{n\pi}^x \frac{t \sin t}{1+t^2} dt \right| < | u_{n+1} |,$$

$$\int_0^{n\pi} \frac{t \sin t}{1+t^2} dt - | u_{n+1} | \leqslant \int_0^x \frac{t \sin t}{1-t^2} dt \leqslant \int_0^{n\pi} \frac{t \sin t}{1-t^2} dt + | u_{n+1} |.$$

Когда $x \to +\infty$, n тоже стремится к $+\infty$; крайние члены неравенства имеют предел U, а значит, I сходится и равен сумме U ряда.

2. Ряд $\sum | u_n |$, члены которого минорируются членами $\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}$ расходящегося ряда (ибо они в свою очередь минорируются членами $1/n\pi$), расходится.

Сумма первых n членов стремится к $+\infty$ вместе с n. Но

$$\sum_1^n | u_n | = \sum_1^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{t \,| \sin t \,| \, dt}{1+t^2} dt = \int_0^{n\pi} \frac{t \,| \sin t \,|}{1+t^2} dt.$$

Функция $\frac{t \,| \sin t \,|}{1+t^2}$ не интегрируема на $[0, +\infty[$; таким образом, интеграл I не будет абсолютно сходиться.

3. На сходимость интеграла не влияет замена нижней грани a этого интеграла числом $(n_0 - 1)\pi$, которое больше a и больше нулей как многочлена A, так и числителя $A'B - AB'$ производной функции A/B, и значит, таковая замена может быть в случае необходимости осуществлена.

Для значений, превышающих $(n_0 - 1)\pi$, функция A/B имеет постоянный знак (допустим, положительный) и монотонна; следовательно, она убывает, ибо A/B при $x \to +\infty$ стремится к 0.

Тогда ряд с общим членом

$$v_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin t \, \frac{A(t)}{B(t)} dt$$

(где $n \geqslant n_0$) будет знакопеременным; $|v_n|$ убывает и стремится к 0 (доказывается так же, как в п. 1); этот ряд сходится, и его сумма равна пределу выражения

$$\sum_{n_0}^{n} v_k = \int_{(n_0-1)\pi}^{n\pi} \sin t \frac{A(t)}{B(t)} dt.$$

Для завершения доказательства воспользуемся, как и в п. 1, тем, что если $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$, то

$$\left| \int_{(n_0-1)\pi}^{x} \sin t \frac{A(t)}{B(t)}\, dt - \int_{(n_0-1)\pi}^{n\pi} \sin \frac{A(t)}{B(t)} dt \right| \leqslant |v_{n+1}|.$$

7.09. Для любого u_0 член u_1 заключен между -1 и 1; значениям, противоположным u_1, соответствуют значения, противоположные всем u_n; стало быть, достаточно изучить свойства u_n в предположении $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

1. Индукцией по n убеждаемся, что

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

Последовательность u_n, убывающая и минорированная числом 0, сходится, и ее предел u является решением уравнения $u = \sin u$, т. е. равен 0.

Функция $\sin u$ возрастает на [0, 1]; следовательно, если обозначить через U_n общий член той из последовательностей u_n, у которой первый член есть $U_1 = 1$, то, по индукции, получаем

$$0 \leqslant u_n \leqslant U_n \Rightarrow U_n = \sup_{0 \leqslant u_1 \leqslant 1} u_n.$$

Для отрицательных значений u_1 получаем противоположные значения для u_n, и следовательно,

$$U_n = \sup_{-1 \leqslant u_1 \leqslant 1} |u_n| = \sup_{u_0} |f_n(u_0)| = \| f_n \|.$$

Последовательность U_n, как мы уже доказали, стремится к 0, и стало быть, последовательность f_n равномерно сходится к 0.

2. Ряд с общим членом $u_n - u_{n+1}$ сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{N} (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{N+1}$$

стремится к u_1, когда $N \to +\infty$.

Члены этого ряда положительны, поскольку последовательность u_n убывает и

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \sin u_n \simeq \frac{u_n^3}{6}.$$

Таким образом, ряд $\sum u_n^3/6$ сходится, а с ним сходится и ряд $\sum u_n^3$.

Так же, как в п. 1, убеждаемся, что

$$U_n^3 = \sup_{0 \leqslant u_1 \leqslant 1} u_n^3 = \sup_{-1 \leqslant u_1 \leqslant 1} |u_n|^3 = \sup_{u_0} |f_n^3(u_0)| = \|f_n^3\|.$$

Так как последовательность U_n есть одна из последовательностей u_n, то ряд с общим членом $U_n^3 = \|f_n^3\|$ сходится, и следовательно, ряд с общим членом f_n^3 равномерно сходится (см. теоретические сведения в начале этого раздела. Можно также исходить из того, что это есть следствие признака равномерной сходимости: Пизо и Заманский, Книга IV, гл. III, 2-й раздел, § 1; достаточно в качестве значения фигурирующего там члена α_n взять число $\|f_n^3\|$).

3. Исследование проводится тем же путем, что и в п. 2. Имеем

$$\sum_1^N \ln \frac{\sin u_n}{u_n} = \sum_1^N \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(\prod_1^N \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln \frac{u_{N+1}}{u_1}.$$

При $N \to +\infty$ отношение u_{N+1}/u_1 стремится к 0, а $\ln(u_{N+1}/u_1) \to -\infty$; ряд

$$\sum \ln \frac{\sin u_n}{u_n}$$

расходится.

Члены $(\sin u_n)/u_n$ меньше 1, и значит, их логарифмы отрицательны; более того,

$$-\ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) \simeq 1 - \frac{\sin u_n}{u_n} \simeq \frac{u_n^2}{6}.$$

Итак, ряд $\sum u_n^2/6$ расходится, равно как и ряд с положительными членами

$$-\ln \frac{\sin u_n}{u_n}.$$

4. Применим признак Даламбера абсолютной сходимости:

$$\frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \frac{u_{n+1}}{u_n}|x| = \frac{\sin u_n}{u_n}|x|,$$

$$\lim_n u_n = 0 \Rightarrow \lim_n \frac{\sin u_n}{u_n} = 1 \Rightarrow \lim_n \frac{\sin u_n}{u_n}|x| = |x|.$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится для $|x| < 1$ и расходится для $|x| > 1$ (его радиус сходимости равен 1).

При $x = 1$ ряд $\sum u_n$ расходится, ибо $u_n > u_n^2$, а ряд $\sum u_n^2$, как известно, расходится (см. п. 3).

При $x = -1$ ряд $\sum (-1)^n u_n$ будет знакопеременным; u_n убывает и стремится к 0; ряд сходится.

Для $x = e^{i\alpha}$ ($\alpha \neq k\pi$) ряды $\sum u_n \cos n\alpha$ и $\sum u_n \sin n\alpha$ сходятся, поскольку u_n убывает и стремится к 0 (см. Пизо и Заманский, Книга IV, гл. III, 1-й раздел, § 4), а стало быть, сходится и ряд с общим членом

$$u_n x^n = u_n e^{in\alpha} = u_n \cos n\alpha + iu_n \sin n\alpha.$$

7.10. Допустим, что

$$\sum_0^{+\infty} a_n t^n \leqslant K$$

при любом $t \in [t_0, 1[$. Так как члены ряда $\sum a_n t^n$ положительны, то сумма этого ряда является верхней гранью множества конечных сумм членов ряда; следовательно,

$$\sum_0^N a_n t^n \leqslant K, \qquad \forall t \in [t_0, 1[\text{ и } \forall N.$$

Многочлен

$$\sum_0^N a_n t^n$$

есть непрерывная функция от t; следовательно,

$$\lim_{t \to 1} \sum_0^N a_n t^n = \sum_0^N a_n \leqslant K, \ \forall N.$$

K является мажорантой множества частичных сумм ряда с положительными членами a_n, и стало быть, этот ряд сходится.

Ряд с общим членом $a_n t^n$ равномерно сходится на $[0, 1]$, так как $0 \leqslant a_n t^n \leqslant a_n$, а числовой ряд a_n сходится.

Тогда функция

$$t \to \sum_0^{+\infty} a_n t^n$$

будет непрерывной функцией от t на $[0, 1]$ и, в частности, непрерывной слева в 1:

$$\lim_{t \to 1} \sum_0^{+\infty} a_n t^n = \sum_0^{+\infty} a_n.$$

Если ряд $\sum a_n$ расходится, то сумма

$$S(t) = \sum_0^{+\infty} a_n t^n$$

не может быть ограниченной (тогда ряд a_n сходился бы); функция $t \to S(t)$ возрастает и не ограничена на $[t_0, 1[$; ее левый предел при $t = 1$ равен верхней грани множества значений, которые она принимает в интервале $[t_0, 1[$, т. е. $+\infty$.

7.11. 1. Мы знаем, что
$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$
и стало быть,
$$\cos^{2p} t = \frac{1}{2^{2p}} (e^{it} + e^{-it})^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{q=0}^{2p} C_{2p}^{q} e^{2(p-q)it}.$$
Интегралы
$$\int_0^{2\pi} e^{2(p-q)it}\,dt$$
при $p - q \neq 0$ обращаются в нуль; следовательно,
$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^{p}\,dt = \frac{2\pi}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{(p!)^2} = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2p)}.$$

2. Интегрируя по частям, получаем
$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos^{2n-1} t\,(\cos t\,dt) =$$
$$= [\sin t \cos^{2n-1} t]_0^{2\pi} + (2n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{2n-2} t \sin^2 t\,dt.$$
Внеинтегральный член равен нулю; отсюда
$$I_n = (2n-1) \int_0^{2\pi} \cos^{2n-2} t\,(1 - \cos^2 t)\,dt = (2n-1)(I_{n-1} - I_n),$$
$$2nI_n = (2n-1)\,I_{n-1}.$$
Почленное умножение полученных уравнений для $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p$ дает
$$2 \cdot 4 \ldots 2pI_p = 1 \cdot 3 \ldots (2p-1)\,I_0 = 1 \cdot 3 \ldots (2p-1)\,2\pi.$$

3. Все значения функции $t \to 1 - x\cos t$ лежат на отрезке $[1 - |x|,\ 1 + |x|]$; для того чтобы логарифм был определен, необходимо и достаточно, чтобы эти значения были строго положительны, т. е. чтобы $|x| < 1$; тогда функция $t \to \ln(1 - x\cos t)$ будет непрерывна и интегрируема на $[0, 2\pi]$.

Но мы знаем, что при $|x\cos t| < 1$
$$\ln(1 - x\cos t) = -\sum_{1}^{+\infty} \frac{x^k \cos^k t}{k}.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно относительно t на замкнутом интервале $[0, 2\pi]$, так как

$$\left| \frac{x^k \cos^k t}{k} \right| \leqslant | x^k | = | x |^k,$$

а геометрический ряд с общим членом $|x|^k$ сходится.

Тогда можно интегрировать почленно:

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)\, dt = -\sum_1^{+\infty} \frac{x^k}{k} \int_0^{2\pi} \cos^k t\, dt.$$

При k нечетном интеграл от $\cos^k t$ по интервалу $[0, 2\pi]$ равен нулю; в самом деле, положив $t = u + \pi$, видим, что

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^k t\, dt = -\int_0^\pi \cos^k u\, du.$$

При k четном и равном $2p$ интеграл вычислен и равен I_p; итак,

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - x\cos t)\, dt = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p} 2\pi \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2p)}.$$

При $|x| < 1$ полученный ряд сходится, ибо его радиус сходимости больше или равен 1. Пользуясь признаком Даламбера, убеждаемся в том, что он равен 1; действительно, отношение двух последовательных членов равно

$$x^2 \frac{2p}{2p+2} \frac{2p+1}{2p+2}$$

и стремится к x^2.

4. Сумма степенного ряда дифференцируема в круге сходимости, и ее производная есть сумма почленно продифференцированного ряда:

$$F'(x) = -2\pi \sum_1^{+\infty} x^{2p-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p}.$$

Легко видеть (при помощи разложения бинома), что

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_1^{+\infty} x^{2p} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p}.$$

Отсюда

$$F'(x) = \frac{2\pi}{x} \left[1 - (1 - x^2)^{-1/2}\right],$$

а поскольку F в 0 обращается в нуль, то

$$F(x) = \int_0^x \frac{2\pi}{u} \left[1 - (1 - u^2)^{-1/2}\right] du.$$

Интеграл легко берется подстановкой $v=(1-u^2)^{1/2}$; получаем

$$F(x)=2\pi\int\limits_1^{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{v}\right)\frac{-v\,dv}{1-v^2}=$$

$$=2\pi\int\limits_1^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dv}{v+1}=2\pi\left[\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\ln 2\right].$$

7.12. 1. Функция $t\to t^{\alpha}(1-t^4)^{-1/2}$ непрерывна на $[0,x]$ при $\alpha\geqslant 0$, и значит, интегрируема в этом случае.

Если же $-1<\alpha<0$, то эта функция непрерывна на $]0,x]$, и

$$0<t\leqslant x\Rightarrow 0<t^{\alpha}(1-t^4)^{-1/2}\leqslant t^{\alpha}(1-x^4)^{-1/2}.$$

Мажорантная функция $t\to t^{\alpha}(1-x^4)^{-1/2}$ интегрируема на $]0,x]$, а с ней интегрируема и функция $t\to t^{\alpha}(1-t^4)^{-1/2}$.

2. Известно, что для $0<x<1$

$$t^{\alpha}(1-t^4)^{-1/2}=t^{\alpha}\left[1+\sum_1^{+\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{4n}\right]=$$

$$=t^{\alpha}+\sum_1^{+\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{4n+\alpha}.$$

Общий член этого ряда, равный

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{4n+\alpha},$$

положителен и мажорируется общим членом

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{4n-1}$$

(действительно, $t^{\alpha}<t^{-1}$ на $]0,1[$) степенного ряда с радиусом сходимости 1; этот ряд равномерно сходится на $[0,x]$, а значит, сходится и ряд

$$\sum\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}t^{4n+\alpha}.$$

Тогда, как известно, он может быть почленно проинтегрирован.

$$f(x)=\int\limits_0^x t^{\alpha}dt+\sum_1^{+\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\int\limits_0^x t^{4n+\alpha}\,dt=$$

$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\sum_1^{+\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\frac{x^{4n+\alpha+1}}{4n+\alpha+1},$$

и полученный ряд S сходится при $0 < x < 1$; общий член этого ряда мы обозначим через $u_n(x)$.

3. Для $x = 1$ получаем ряд с общим членом

$$u_n(1) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{1}{4n + \alpha + 1}.$$

Исследование его сходимости с помощью признака Даламбера ничего не дает, ибо

$$\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{4n+\alpha+1}{4n+\alpha+5} \Rightarrow \lim \frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = 1;$$

применим результат задачи 7.07 п. 1, образовав для этого величину

$$v_n = 1 - \frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{12n + 2\alpha + 9}{(2n+2)(4n+\alpha+5)}.$$

nv_n имеет предел $3/2 > 1$, и следовательно, ряд $\sum u_n(1)$ сходится.

Функция $x \to u_n(x)$ возрастает; поэтому на $[0, 1]$

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(1).$$

Это двойное неравенство влечет равномерную сходимость ряда S; действительно, можно применить критерий равномерной сходимости (Пизо и Заманский, книга IV, гл. III, 2-й раздел, § 1) или заметить, что ряд с общим членом $\|u_n\| = u_n(1)$ сходится (см. теоретические сведения в начале 7-го раздела).

Сумма ряда S, равномерно сходящегося на $[0, 1]$, непрерывна на этом замкнутом интервале и, в частности, непрерывна слева в 1, т. е.

$$f(x) \to \frac{1}{\alpha+1} + \sum_{1}^{+\infty} u_n(1) \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

Итак, функция $t^\alpha(1 - t^4)^{-1/2}$, по определению, интегрируема на $]0, 1[$, и

$$\int_0^1 t^\alpha (1 - t^4)^{-1/2} dt = \lim_{x \to 1} \int_0^x t^\alpha (1 - t^4)^{-1/2} dt = \frac{1}{\alpha+1} + \sum_{1}^{+\infty} u_n(1).$$

4. Мы знаем, что функция $t \to t^\alpha(1 - t^4)^{-1/2}$ интегрируема на любом интервале $]0, x]$, где $0 < x < 1$; стало быть, достаточно провести исследование на интервале $[x, 1[$. Запишем

$$t^\alpha (1 - t^4)^{-1/2} = (1 - t)^{-1/2} \left[t^\alpha (1 + t + t^2 + t^3)^{-1/2}\right];$$

функция $t \to t^\alpha(1 + t + t^2 + t^3)^{-1/2}$ непрерывна на $[x, 1]$ и, значит, мажорируется некоторым числом M; отсюда

$$x \leqslant t < 1 \Rightarrow 0 \leqslant t^\alpha (1 - t^4)^{-1/2} \leqslant M (1 - t)^{-1/2}.$$

Мажорантная функция $t \to M(1-t)^{-1/2}$ интегрируема на $[x, 1]$, а следовательно, и функция $t \to t^{\alpha}(1-t^4)^{-1/2}$ также интегрируема на $[x, 1]$.

7.13. 1. Известно, что для любого числа x

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{x-1}t^2 = 0 \Rightarrow e^{-t}t^{x-1} \leqslant t^{-2}, \quad \text{если} \quad t \geqslant t_0;$$

интегрируемость функции $t \to t^{-2}$ на $[1, \infty[$ влечет интегрируемость положительной функции $t \to e^{-t}t^{x-1}$.

Во втором случае имеем

$$0 < t \leqslant 1 \Rightarrow t^{x-1} > e^{-t}t^{x-1} \geqslant e^{-1}t^{x-1} \geqslant 0;$$

таким образом, функция $t \to e^{-t}t^{x-1}$ интегрируема или нет на $]0, 1]$ в зависимости от того, будет ли интегрируема функция $t \to t^{x-1}$, и стало быть, интегрируема при условии: $x-1 > -1$ или $x > 0$.

2. Из п. 1 вытекает, что если $x > 0$, то функция $t \to e^{-t}t^{x-1}$ интегрируема на $]0, +\infty[$. Проинтегрируем сначала по частям на компактном интервале $[u, v]$, а затем перейдем к пределу:

$$\int_u^v e^{-t}t^x\,dt = e^{-u}u^x - e^{-v}v^x + x\int_u^v e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

$$\lim_{u\to+0} e^{-u}u^x = 0, \text{ так как } x > 0,$$

$$\lim_{v\to+\infty} e^{-v}v^x = 0$$

(сравнительное возрастание показательной и степенной функции). По определению, при $u \to 0$ и $v \to +\infty$ интегралы стремятся к $\Gamma(x+1)$ и к $\Gamma(x)$, и значит,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Из соотношения

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$$

индукцией по n получаем

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n[(n-1)!] = n!$$

3. e^{-t} разлагается при любом t в сходящийся степенной ряд, и

$$e^{-t}t^{x-1} = t^{x-1}\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!} = \sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+x-1}}{n!}.$$

На $[0, 1]$ функция t^{n+x-1} мажорируется единицей, если $n+x-1 \geqslant 0$, что выполняется в случае $n \geqslant 1$, ибо $x > 0$. Следовательно, при $n \geqslant 1$

$$\left|(-1)^n\frac{t^{n+x-1}}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}.$$

Сходимость ряда $\sum 1/n!$ влечет равномерную сходимость рассматриваемого ряда, и значит, можно почленно интегрировать:

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+x-1}\,dt = \sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}.$$

4. Если x не является целым отрицательным, то величина $|n+x|$ независимо от n минорируется строго положительным числом d, равным разности между x и ближайшим целым числом $\nu \leqslant 0$, и следовательно,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}\right| \leqslant \frac{1}{d}\,\frac{1}{n!}.$$

Ряд абсолютно сходится, так как сходится ряд $\sum 1/n!$.

5. Согласно п. 1, интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

сходится при любом x. Следовательно, функция G определена, если определено значение $S(x)$, т. е. если x не является целым отрицательным числом и числом 0.

Если $x>0$, то, как показано в п. 3,

$$S(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

и значит,

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \Gamma(x).$$

Как и в п. 2, интегрируя по частям на компактном интервале $[1, v]$ и переходя к пределу, получаем

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x}\,dt = e^{-1} + x\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Для сравнения члена

$$\frac{1}{n!\,(n+x+1)}$$

из $S(x+1)$ с членом из $S(x)$, в котором фигурирует $n+x+1$, т. е. с членом

$$\frac{1}{(n+1)!\,(n+x+1)},$$

записываем:

$$\frac{1}{n!\,(n+x+1)}=\frac{n+x+1-x}{(n+1)!\,(n+x+1)}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{x}{(n+1)!\,(n+x+1)},$$

$$S(x+1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+x+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}-x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!\,(n+x+1)}.$$

Для вычисления рядов в правой части берем индекс суммирования $p=n+1$, принимающий значения $1, 2, \ldots$ Получаем

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p!}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!}=1-e^{-1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!\,(n+x+1)}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p!\,(p+x)}=-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(p+x)}=\frac{1}{x}-S\,(x).$$

И окончательно,

$$S\,(x+1)=1-e^{-1}-x\left[\frac{1}{x}-S\,(x)\right]=xS\,(x)-e^{-1}.$$

Складывая рассмотренные выше интегралы, получаем

$$G\,(x+1)=xG\,(x).$$

7.14. Известно, что

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\qquad \text{если}\quad |x|<1,$$

$$(1+x)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\qquad \text{если}\quad |x|<1.$$

Оба степенных ряда имеют радиус сходимости, равный 1, и при $|x|<1$ абсолютно сходятся; следовательно, их произведение абсолютно сходится при $|x|<1$ и его сумма равна произведению сумм исходных рядов.

Общий член произведения равен

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}(-1)^{n-k}x^{n-k}=(-1)^{n-1}x^n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right),$$

и значит, если $|x|<1$,

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Для нахождения радиуса сходимости полученного степенного ряда применим признак Даламбера:

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

Последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

имеет предел $+\infty$, а последовательность $1/(n+1)$ имеет предел, равный 0; следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{n+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) = 1.$$

Отношение

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$$

имеет предел, равный $|x|$; таким образом, радиус сходимости ряда равен 1.

7.15. 1. Для $n = 1$ утверждение справедливо, так как здесь $n = 2^0$. Допустим, что оно верно для $n < 2^k$, и рассмотрим числа n, удовлетворяющие неравенствам $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$.

Эти числа единственным образом представимы в виде $n = 2q + r$, где $r = 0$ или 1 и $2^{k-1} \leqslant q < 2^k$.

Разложение $\sum 2^{k_i}$ числа n содержит или нет слагаемое 2^0 в зависимости от того, будет $r = 1$ или $r = 0$; после этого замечания видно, что любому разложению числа q соответствует разложение числа n и обратно; разложение q, по условию, единственно, а значит, единственно и разложение числа n.

Если все k_i меньше или равны P, то получаем число n, не превосходящее

$$\sum_{k=0}^{P} 2^k = 2^{P+1} - 1;$$

обратно, в разложении числа $n \leqslant 2^{P+1} - 1$ показатели k_i не превосходят P; следовательно, все числа $n \leqslant 2^{P+1} - 1$ могут быть получены, если взять суммы

$$\sum_i 2^{k_i},$$

где $k_i \leqslant P$ при любом i.

Замечание. Проведенное рассуждение представляет собой исследование двоичной системы счисления.

2. Разложив произведение, получаем

$$u_P = 1 + \sum x^{2^{k_1}} \ldots x^{2^{k_j}} = 1 + \sum x^{2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_j}},$$

где все числа $k_1, k_2, \ldots, k_j$ различны и не превосходят P. Тогда, как мы знаем, все числа $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_j}$ не превосходят $2^{P+1} - 1$, каждое из них получается единственный раз, и значит,

$$u_P = 1 + \sum_{h=1}^{2^{P+1}-1} x^h = \frac{1 - x^{2^{P+1}}}{1 - x}.$$

Когда $P \to +\infty$, $x^{2^{P+1}} \to 0$, а $u_P \to 1/(1-x)$.

3. Когда $n \to +\infty, x^n \to 0$; но тогда

$$\ln(1 + x^n) \simeq x^n \Rightarrow |\ln(1 + x^n)| \simeq |x|^n.$$

Ряд $\sum \ln(1 + x^n)$ абсолютно сходится, так как сходится ряд $\sum |x|^n$.

Тогда, как известно, если каждый член этого ряда содержится единственный раз в бесконечном множестве рядов $\sum\limits_k u_{p,k}$, то суммы U_p рядов $\sum\limits_k u_{p,k}$ являются членами абсолютно сходящегося ряда, сумма которого равна сумме ряда $\sum\limits_0^{+\infty} \ln(1 + x^n)$ (см. Пизо и Заманский, Книга IV, глава III, 1-й раздел, § 3).

Пользуясь результатом п. 2, записываем

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left[1 + x^{2^k}\right],$$

и, заменяя x на x^{2p-1}, получаем

$$\ln \frac{1}{1 - x^{2p-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left[1 + x^{(2p-1)2^k}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{p,k}.$$

Всякое целое число представимо единственным образом в виде произведения степени двойки на нечетное число. Следовательно, любой член $\ln(1 + x^n)$ равен одному и только одному из членов $u_{p,k}$. Таким образом, применив сформулированное выше утверждение, получаем

$$\sum_0^{+\infty} \ln(1 + x^n) = \sum_{p=1}^{+\infty} U_p = \sum_{p=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{1 - x^{2p-1}} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \ln(1 - x^{2p-1}).$$

По определению суммы ряда,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_1^N \ln(1+x^n)=\lim_{N'\to\infty}\sum_1^{N'}\ln\frac{1}{1-x^{2p-1}},$$

и, в силу непрерывности показательной функции,

$$\lim_{N\to\infty}\prod_1^N(1+x^n)=\lim_{N'\to\infty}\prod_1^{N'}\frac{1}{1-x^{2p-1}}.$$

7.16. 1. Бином $(1-u)^{-1/2}$ при $|u|<1$ разлагается в степенной ряд по степеням u; здесь $u=2xz-z^2$ и, по условию,

$$|u|\leqslant 2|xz|+|z|^2<1;$$

в силу этого имеем

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2}=1+\sum_1^{+\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}(2xz-z^2)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(x,\ z).$$

2. Обозначим через $t_{k,p}$ член с z^p многочлена $u_k(x,z)$ (для того чтобы $t_{k,p}\neq 0$, необходимо, чтобы $k\leqslant p\leqslant 2k$); имеем

$$s(x,\ z)=\sum_k\left(\sum_{p=k}^{2k}t_{k,p}\right).$$

Для получения $|t_{k,p}|$ нужно заменить x и z на $|x|$ и $|z|$, а коэффициент заменить его абсолютным значением, что сводится к замене $2xz-z^2$ на $2|x|\,|z|+|z|^2$, откуда легко следует сходимость ряда, составленного из сумм

$$\sum_{p=k}^{2k}|t_{k,p}|,$$

поскольку из условия $2|x|\,|z|+|z|^2<1$ следует, что

$$\sum_k\left(\sum_{p=k}^{2k}|t_{k,p}|\right)=\sum_k(2|x|\,|z|+|z|^2)^k=(1-2|x|\,|z|-|z|^2)^{-1/2}.$$

Сгруппировав члены $t_{k,p}$, имеющие одинаковый индекс p, т. е. все члены, содержащие множитель z^p, получаем

$$\sum_k t_{k,p}.$$

Достаточно задать в этой сумме значения k, меньшие или равные p; действительно, члены в $u_k(x,z)$ имеют степень относительно z, по крайней мере равную k, и следовательно, при $k>p$ член $t_{k,p}$ обращается в нуль.

Таким образом, $\sum\limits_{k=0}^{p}t_{k,p}$ есть член степени p в $\sum\limits_{k=0}^{p}u_k(x,\ z)$; по определению, это есть $v_p(x)\,z^p$.

Ряд $\sum v_p(x) z^p$ абсолютно сходится, так как

$$|v_p(x) z^p| = \left|\sum_{k=0}^{p} t_{k,p}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |t_{k,p}|,$$

и следовательно, конечная сумма, составленная из $|v_p(x) z^p|$, меньше или равна конечной сумме из $|t_{h,p}|$; но множество последних сумм ограничено, ибо $(1-2|x||z|-|z|^2)^{-1/2}$ есть мажоранта этого множества. Таким образом, множество конечных сумм из $|v_p(x) z^p|$ ограничено, что и является достаточным условием сходимости ряда $\sum |v_p(x) z^p|$.

Наконец, известно (см. Пизо и Заманский, Книга IV, гл. III, § 1, двойной ряд), что если θ_i есть простая последовательность, полученная упорядочением двойной последовательности $t_{h,p}$, то сходимость рядов

$$\sum_k \left(\sum_p |t_{k,p}|\right) \quad \text{и} \quad \sum_p \left(\sum_k |t_{k,p}|\right)$$

влечет равенства

$$\sum_i \theta_i = \sum_k \left(\sum_p t_{k,p}\right) = \sum_p \left(\sum_k t_{k,p}\right),$$

где $t_{k,p}$ упорядочены по возрастающим степеням z; таким образом,

$$s(x, z) = \sum_p v_p(x) z^p.$$

3. В выражении

$$(2xz - z^2)^k = z^k (2x - z)^k$$

член с z^n (таковой один при $n/2 \leqslant k \leqslant n$) равен произведению на z^k члена при z^{n-k} в разложении бинома $(2x-z)^k$; стало быть, его коэффициент имеет вид

$$(-1)^{n-k} C_k^{n-k} (2x)^{2k-n},$$

и

$$v_n(x) = \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} C_k^{n-k} (2x)^{2k-n} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2k} =$$

$$= \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} 2^{2k-n} \frac{k!}{[(2k-n)!]\,[(n-k)!]} \frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k-n} =$$

$$= \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} \frac{(-1)^{n-k}}{2^n} \cdot \frac{(2k)!}{[(2k-n)!]\,[(n-k)!]\,[k!]} x^{2k-n}.$$

Вычислим теперь

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2k}(-1)^{n-k}\right]=$$

$$=\sum_{n/2\leqslant k\leqslant n}\frac{n!}{[k!]\,[(n-k)!]}\cdot\frac{(2k)!}{(2k-n)!}x^{2k-n}(-1)^{n-k}=(n!)\,2^n v_n(x).$$

4. $$\frac{\partial s}{\partial z}=(x-z)(1-2xz+z^2)^{-3/2}=s\frac{x-z}{1-2xz+z^2}.$$

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(x)\,z^n$$

почленно дифференцируем внутри круга сходимости, и этот круг содержит, в частности, такие z, что

$$|z^2|+2|x||z|<1.$$

Следовательно, для этих значений z

$$\frac{\partial s}{\partial z}=\sum_{n=0}^{+\infty}nv_n(x)\,z^{n-1},$$

и значит,

$$(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{+\infty}nv_n(x)\,z^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(x)\,z^n\right)(x-z).$$

Два степенных ряда, принимающие одинаковые значения в окрестности нуля, имеют одинаковые коэффициенты; приравнивая коэффициенты при z^{n-1}, получаем

$$(n-2)\,v_{n-2}(x)-2(n-1)\,xv_{n-1}(x)+nv_n(x)=xv_{n-1}(x)-v_{n-2}(x),$$

$$(n-1)\,v_{n-2}(x)-(2n-1)\,xv_{n-1}(x)+nv_n(x)=0.$$

7.17. 1. Используя разложение e^z и бинома, получаем

$$e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{z^k}{k!}=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\frac{z^k}{k!}+\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Модуль первой суммы справа и модуль суммы ряда мажорируются соответствующими суммами модулей членов; учитывая, что коэффициенты при z^k действительны и положительны, видим, что мажоранта получается заменой в исходном выражении z на $|z|$:

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|\leqslant e^{|z|}-\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n.$$

Запишем формулу Маклорена для функции $u \to \ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}\frac{1}{(1+\theta u)^2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда для $u \geqslant 0$ имеем

$$u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u.$$

Взяв в качестве u значение $|z|/n$ и умножив неравенства на n, получаем

$$|z| - \frac{|z|^2}{2n} \leqslant n \ln\left(1 + \frac{|z|}{n}\right) \leqslant |z|,$$

$$e^{|z|}e^{-|z|^2/2n} \leqslant \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leqslant e^{|z|}.$$

Легко показать (используя, например, формулу Маклорена), что $e^{-u} \geqslant 1 - u$ при $u \geqslant 0$; это приводит к соотношению

$$e^{|z|}\left(1 - \frac{|z|^2}{2n}\right) \leqslant \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leqslant e^{|z|},$$

откуда, вычитая $(1+|z|/n)^n$ из всех трех выражений, получаем

$$0 \leqslant e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \leqslant e^{|z|}\frac{|z|^2}{2n}.$$

Этот результат, установленный для мажоранты выражения

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right|,$$

тем более верен и для него самого.

2. Положим

$$\left(1 + \frac{ix}{2n}\right)^{2n} = e^{ix} + r_n, \quad \left(1 - \frac{ix}{2n}\right)^{2n} = e^{-ix} + s_n;$$

при этом мы знаем, что $|r_n|$ и $|s_n|$ мажорируются посредством

$$e^{|x|}\frac{|x|^2}{4n} \leqslant \frac{e^{\pi/2}}{4} \cdot \frac{x^2}{n} = C\frac{x^2}{n},$$

так как в данном случае $0 < x \leqslant \pi/2$. Имеем

$$f_n(x) - \operatorname{ctg} x = i\frac{e^{ix} + e^{-ix} + r_n + s_n}{e^{ix} - e^{-ix} + r_n - s_n} - i\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} =$$

$$= \frac{i(r_n + s_n)\sin x - (r_n - s_n)\cos x}{\sin x\,(2i\sin x + r_n - s_n)},$$

$$|f_n(x) - \operatorname{ctg} x| = \frac{|i(r_n + s_n)\sin x - (r_n - s_n)\cos x|}{\sin x\,|2i\sin x + r_n - s_n|}.$$

Воспользуемся неравенствами

$$|\sin x| \leqslant 1, \quad |\cos x| \leqslant 1, \quad |\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}x,$$

чтобы оценить числитель сверху, а знаменатель снизу (последнее неравенство доказано в задаче 4.39).

Так как модуль суммы больше (или равен) разности модулей слагаемых, то

$$|f_n(x) - \operatorname{ctg} x| \leqslant \frac{|r_n + s_n| + |r_n - s_n|}{\frac{2}{\pi} x \left(\frac{4}{\pi} x - |r_n| - |s_n|\right)} \leqslant \frac{2(|r_n| + |s_n|)}{\frac{2}{\pi} x \left(\frac{4}{\pi} x - |r_n| - |s_n|\right)}.$$

Заменим теперь $|r_n|$ и $|s_n|$ их мажорантой Cx^2/n:

$$|f_n(x) - \operatorname{ctg} x| \leqslant \frac{4Cx^2/n}{\frac{2}{\pi} x \left(\frac{4}{\pi} x - 2C\frac{x^2}{n}\right)} = \frac{C\pi^2}{n} \frac{1}{\left(2 - \frac{C\pi x}{n}\right)}.$$

Наконец, заметим, что при $n \geqslant 5$

$$2 - \frac{C\pi x}{n} \geqslant 2 - \frac{C\pi^2}{2n} \geqslant 2 - \frac{5}{4}\frac{\pi^2}{10} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Окончательно, при $n \geqslant 5$ получаем

$$|f_n(x) - \operatorname{ctg} x| \leqslant \frac{\pi^2 e^{\pi/2}}{4n} \frac{4}{3} = \frac{\pi^2 e^{\pi/2}}{3n}.$$

Сходимость последовательности f_n к функции котангенс равномерна на $]0, \pi/2]$.

7.18. Члены ряда положительны;

$$x \geqslant 0 \Rightarrow \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow \text{сходимость},$$

$$x < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1} = +\infty \Rightarrow \text{расходимость}$$

(Отношение показательной функции к степенной стремится к $+\infty$.)

Для $x \geqslant 0$ показано, что общий член ряда мажорируется общим членом $1/(n^2+1)$ сходящегося числового ряда; это влечет равномерную сходимость ряда на $[0, +\infty[$. Тогда сумма ряда будет непрерывной функцией от x.

Ряд из производных имеет общий член

$$\frac{-ne^{-nx}}{n^2+1};$$

при $x = 0$ он расходится. Но для всех строго положительных x ряд сходится, так как последовательность ne^{-nx} стремится к 0, и значит, начиная с некоторого номера,

$$\left|\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2+1}.$$

Поскольку $x \to e^{-nx}$ есть убывающая функция от x, то

$$x \geqslant a > 0 \Rightarrow e^{-nx} \leqslant e^{-na} \Rightarrow \left|\frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}\right| \leqslant \frac{ne^{-na}}{n^2+1}.$$

Ряд

$$\sum_n \frac{ne^{-na}}{n^2+1}$$

сходится; следовательно, ряд производных равномерно сходится на $[a, +\infty[$. Тогда, как известно, функция f дифференцируема при $x \geqslant a$, и

$$f'(x) = -\sum_0^{+\infty} \frac{ne^{-nx}}{n^2+1}.$$

Если $x_0 > 0$, то можно взять такое a, чтобы $0 < a < x_0$; следовательно, функция f дифференцируема при любом значении $x_0 > 0$.

7.19. 1. Функция f — четная; коэффициенты b_k равны нулю; для нахождения коэффициентов a_k интегрируем на $[0, \pi]$ и удваиваем полученный результат:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha t \, dt = 2 \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha t \cos kt \, dt = \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\alpha^2 - k^2}.$$

Разложение в ряд Фурье рассматривается только для 2π-периодических функций, поэтому следует продолжить функцию f, положив

$$f(-\pi) = f(\pi) = \cos \alpha\pi, \qquad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Функция f будет непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и дифференцируема на всем замкнутом интервале, и в частности, имеет правую производную в $-\pi$ и левую в π. Отсюда вытекает, что периодическая функция f непрерывна и имеет правую и левую производную при любом значении x; но в π она не имеет производной, так как

$$f'(\pi - 0) = -\alpha \sin \alpha\pi, \qquad f'(\pi + 0) = f'(-\pi + 0) = \alpha \sin \alpha\pi.$$

Тогда, как известно, ряд Фурье сходится к $f(t)$ при любом t, а значит, к $\cos \alpha t$ при любом t из $[-\pi, \pi]$, включая значение π, поскольку мы положили $f(\pi) = \cos \alpha\pi$.

В частности, при $t = \pi$ имеем

$$\cos \alpha\pi = \sin \alpha\pi \left[\frac{1}{\alpha\pi} + \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^k 2\alpha \cos k\pi}{\pi(\alpha^2 - k^2)} \right] =$$

$$= \sin \alpha\pi \left[\frac{1}{\alpha\pi} + \sum_1^{+\infty} \frac{2\alpha\pi}{\pi^2(\alpha^2 - k^2)} \right].$$

Положив $\alpha\pi = x$, получим

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

2. Если $|x| < M$, то ряд равномерно сходится, так как

$$\left| \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2} \right| \leqslant \frac{1}{k^2\pi^2 - M^2}$$

для

$$k \geqslant \frac{M}{\pi},$$

и

$$\frac{1}{k^2\pi^2 - M^2}$$

есть общий член сходящегося числового ряда.

Если $k \geqslant N > M/\pi$, то функции

$$x \to \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

непрерывны, поскольку их знаменатель не обращается в нуль. Тогда сумма ряда определяет непрерывную функцию от x; функция

$$x \to \sum_{N}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

непрерывна, если $|x| \leqslant M$.

В частности, если $|x| \leqslant 1$, функция

$$x \to \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

есть непрерывная функция от x, и значит,

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{-k^2\pi^2} = \lim_{x \to 0} \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right).$$

Воспользуемся асимптотическими разложениями:

$$\frac{1}{2x}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \frac{x - x^3/2 - x + x^3/6 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \frac{-x^3/3 + o(x^3)}{2x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{6} + o(1),$$

что дает

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\pi^2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то ряд

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$$

равномерно сходится; в самом деле, ряд

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2},$$

как показано в п. 2, равномерно сходится на $[0, \pi]$, а множитель $2x$ есть ограниченная на $[0, \pi]$ функция.

Тогда, как известно,

$$\int_0^x \left(\sum_{2}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - k^2\pi^2} \right) du = \sum_{2}^{+\infty} \int_0^x \frac{2u}{u^2 - k^2\pi^2}\, du = \sum_{2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

С другой стороны, примитивная выражения

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2} = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - \pi^2}$$

равна

$$\ln \frac{\sin x}{x} - \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

При $x \to 0$ эта функция стремится к 0; значит, примитивная в нуле обращается в 0, и мы получаем

$$\sum_{2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \ln \frac{\sin x}{x} - \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right),$$

$$\ln \sin x = \ln x + \sum_{1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

4. Исследуем ряд производных

$$\left(\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}\right)' = \frac{-1}{(x - k\pi)^2} + \frac{-1}{(x + k\pi)^2}.$$

Если $|x| \leqslant M$ и $k > M/\pi$, то

$$|x \pm k\pi| \geqslant k\pi - M \Rightarrow \left| \left(\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}\right)' \right| \leqslant \frac{2}{(k\pi - M)^2}.$$

Ряд

$$\sum_{k} \left(\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}\right)'$$

равномерно сходится на интервале $[-M, M]$. Члены с номерами

$k \geqslant N > M/\pi$ непрерывны на $[-M, M]$; на этом интервале функция

$$x \to \sum_{N}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}$$

дифференцируема, и ее производная равна сумме ряда из производных:

$$\sum_{N}^{+\infty} \left(\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}\right)' = -\sum_{N}^{+\infty} \left[\frac{1}{(x - k\pi)^2} + \frac{1}{(x + k\pi)^2}\right].$$

Если при этом x не кратно π, то каждый из N первых членов ряда дифференцируем и

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{x^2} + \sum_{1}^{N-1} \left(\frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}\right)' + \left(\sum_{N}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}\right)';$$

изменив знаки у всех членов, получим

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{1}^{+\infty} \left[\frac{2x}{(x^2 - k\pi)^2} + \frac{1}{(x + k\pi)^2}\right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}.$$

Предыдущий результат был доказан для $x \in [-M, M]$; но M произвольно, поэтому он верен для всех x.

7.20. 1. Вычисляем одновременно коэффициенты a_k и b_k, заметив, что

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} te^{ikt}\, dt = \left[\frac{te^{ikt}}{ik\pi}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{ik\pi}\, dt = -\frac{2i}{k},$$

$$a_k = 0,$$

$$b_k = -\frac{2}{k},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi,$$

и следовательно,

$$S(t) = \pi - \sum_{1}^{+\infty} \frac{2}{k} \sin kt.$$

Функция f непрерывна и дифференцируема для значений из $]0, 2\pi[$; при всех этих значениях ряд сходится и имеет сумму $f(t) = t$. При $t = 0$ ясно, что $S(0) = \pi$; при этом, как легко видеть,

$$\frac{f(+0) + f(-0)}{2} = \frac{f(+0) + f(2\pi - 0)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = S(0).$$

2. Вычислим производную функции $t \to S_n(t)$:

$$S_n(t) = \pi - 2\sum_1^n \frac{\sin kt}{k} \Rightarrow S_n'(t) = -2\sum_1^n \cos kt = -2\,\mathrm{Re}\left(\sum_1^n e^{ikt}\right)$$

$$\sum_1^n e^{ikt} = e^{it}\,\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1} = e^{i(n+1)t/2}\,\frac{e^{int/2}-e^{-int/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = e^{i(n+1)t/2}\,\frac{\sin nt/2}{\sin t/2},$$

$$S_n'(t) = -2\,\mathrm{Re}\left(\sum_1^n e^{ikt}\right) = -2\,\frac{\cos(n+1)\,t/2\sin nt/2}{\sin t/2}.$$

Производная $S_n'(t)$ отрицательна, когда $t \to 0$ справа; для наименьшего положительного нуля производной $S_n'(t)$ функция S_n имеет относительный минимум. Следовательно, значение t_n определяется соотношением

$$\frac{n+1}{2}t_n = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_n = \frac{\pi}{n+1}.$$

3. Соответствующий минимум функции S_n равен $\pi - 2\sigma_n(t_n)$, где

$$\sigma_n(t_n) = \sum_1^n \frac{1}{k}\sin kt_n = t_n\sum_1^n \frac{\sin kt_n}{kt_n} = \frac{\pi}{n+1}\sum_1^n \frac{\sin kt_n}{kt_n}.$$

Значения kt_n определяют разбиение замкнутого интервала $[0, \pi]$ на $n+1$ равных интервалов; $\sigma_n(t_n)/\pi$ есть интегральная сумма функции

$$x \to \frac{\sin x}{x}$$

относительно концов интервалов разбиения ($n+1$-е значение равно $(\sin\pi)/\pi = 0$).

Тогда, как известно, при неограниченном возрастании n,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\lim S_n(t_n) = \pi - 2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

4. Из разложения синуса в степенной ряд получаем

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_0^{+\infty} (-1)\frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \quad \text{(при любом } t\text{)}.$$

Степенной ряд почленно интегрируем внутри круга сходимости, т. е. в данном случае при любых t, поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_0^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[(2n+1)!]\,[2n+1]},$$

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_0^{+\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{[(2n+1)!]\,[2n+1]} = \sum_0^{+\infty} u_n.$$

I есть сумма знакопеременного ряда; абсолютное значение общего члена убывает, так как

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+1)\,\pi^2}{(2n+2)\,(2n+3)^2} < \frac{\pi^2}{(2n+3)^2} < \frac{10}{25}, \qquad \text{если} \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, сумма I ряда заключена между двумя последовательными частичными суммами, в частности, между

$$\sum_0^3 u_n \quad \text{и} \quad \sum_0^4 u_n.$$

Так как u_4 положительно, то сумма

$$\sum_0^3 u_n$$

меньше I; вычислим ее десятичное приближение с недостатком, минорируя положительные члены и мажорируя отрицательные:

$$\sum_0^3 u_n = 1 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^4}{600} - \frac{\pi^6}{35\,280} = 1 - 0{,}549 + 0{,}162 - 0{,}028 = \\ = 0{,}585$$

с недостатком с точностью до 0,003,

$$|u_4| = |u_3|\cdot\frac{7\pi^2}{8\cdot 81} < \frac{0{,}028\times 10}{81} < 0{,}004.$$

Мажоранта $\sum_0^4 u_n$ должна вычисляться с избытком:

$$\sum_0^4 u_n < (0{,}585 + 0{,}003) + 0{,}004 = 0{,}592;$$

таким образом, получаем

$$0{,}585 < I < 0{,}592.$$

5. Для значений $t \in\,]0, 2\pi[$, и в частности, для значения t_n, ряд сходится к $f(t) = t$.

Стало быть, последовательность $S(t_n) = t_n$ имеет пределом 0, а последовательность $S(t_n) - S_n(t_n)$ имеет предел $\pi - 2\pi I = \pi(1 - 2I)$. Оценки п. 4 показывают, что $\pi(1 - 2I) < -0{,}17\pi$; таким образом, предел последовательности $S(t_n) - S_n(t_n)$ не равен нулю.

Здесь нет противоречия со сходимостью в каждой точке последовательности $S_n(t)$ к $S(t)$. В самом деле, последний результат влечет только, что при фиксированном t_n предел разности $S(t_n) - S_p(t_n)$ при $p \to +\infty$ равен 0. В последовательности же $S(t_n) - S_n(t_n)$ значение t_n переменного зависит от номера n.

Нетрудно показать, что сходимость S_n к S на $[0, 2\pi]$ не является равномерной: как бы ни было велико N, найдутся такие значения t и такие числа $n > N$, что

$$| S(t) - S_n(t) | > 0,17\pi;$$

достаточно взять в качестве t числа t_n. Следовательно, предел последовательности чисел

$$\| S - S_n \| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} | S(t) - S_n(t) |$$

не равен нулю.

РАЗДЕЛ 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этих задачах значительную роль будет играть техника вычислений, что должно послужить для студентов возможностью проверить свою способность доводить вычисления до конца. Было бы совершенно нежелательно, если бы они довольствовались отысканием способа решения и не пытались бы получить окончательный результат.

Общее решение уравнения или системы уравнений может быть всегда получено путем прибавления к частному решению общего решения уравнения или системы без правой части.

Решение уравнения с разделяющимися переменными:

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

находится по формуле

$$\int_{x_0}^{x} f(u)\,du + \int_{y_0}^{y} g(v)\,dv = C^{te}.$$

Однородные уравнения

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

решаются следующим образом. Сначала отыскиваются линейные решения ($y = mx$), затем исходное уравнение преобразуется в уравнение относительно функции переменного $t = y/x$; решения последнего уравнения дают остальные решения исходного уравнения. Можно также воспользоваться полярными координатами.

Линейные уравнения

$$y' = a(x)\,y + b(x).$$

можно решить следующим образом. Находится решение y_1 уравнения без правой части и берется новое неизвестное z, определенное равенством $y = y_1 z$.

Если функция f непрерывна в области D, дифференцируема по y в этой области и ее производная f'_y ограничена в D, то уравнение

$$y' = f(x, y)$$

имеет, и притом единственное, решение y, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ для любой точки $(x_0, y_0) \in D$.

Неполные уравнения второго порядка: если x в явном виде отсутствует в уравнении, то находят уравнение, удовлетворяемое функцией z, которая y

ставит в соответствие y'. Это уравнение первого порядка; если оно интегрируется, то x получается затем квадратурой.

Интегралы *линейного уравнения без правой части* второго порядка образуют двумерное векторное пространство над полем действительных или комплексных чисел, в зависимости от того, принимают ли исследуемые решения действительные или комплексные значения. Если известно одно решение y_1, то остальные решения получаются квадратурами; для этого следует в качестве нового неизвестного взять функцию z, определяемую равенством $y = y_1 z$.

Символическая запись системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Если матрица A имеет различные собственные значения r_i и если V_i есть собственный вектор, соответствующий значению r_i, то общее решение системы имеет вид

$$X = \sum \lambda_i V_i e^{r_i t},$$

где λ_i — произвольные постоянные. Если не все собственные значения различны, то упрощаем максимально матрицу A, сделав замену базиса (но при этом не всегда можно получить диагональную матрицу) и исследуем преобразованную систему, полученную заменой соответствующих переменных.

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

равносильно системе

$$u_1 = y', \quad u_2 = u_1', \ \ldots, \ u_{n-1} = u_{n-2}',$$
$$u_{n-1}' + a_1 u_{n-1} + \ldots + a_n y = 0.$$

Следовательно, применимы методы предыдущего пункта, и в частности, числа r, обладающие тем свойством, что e^{rt} является решением уравнения, определяются характеристическим уравнением

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Если корни этого уравнения различны, то соответствующие экспоненты e^{rt} составляют базис векторного пространства решений.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

8.01. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y' = \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}$$

и показать, что решения можно получить, записав, что многочлен от x и от y равен нулю.

8.02. Найти решения дифференциального уравнения

$$x' \sin t - x \cos t = e^t \sin^4 t.$$

Показать, что для некоторых значений t не существует или существует бесконечное множество решений, принимающих заданное значение x_0.

8.03. 1. Найти решения дифференциального уравнения

$$x(1+x^2)y' - y(x^2-1) + 2x = 0.$$

Существуют ли решения, определенные для всех действительных x?

2. Рассмотрим касательные к интегральным кривым в точке с абсциссой $x_0 \neq 0$. Показать, что эти касательные проходят через одну точку, координаты которой являются функциями от x_0.

8.04. 1. Найти решения дифференциального уравнения

$$y'(y^2 - x^2 - 2xy) + y^2 - x^2 + 2xy = 0. \qquad (E)$$

2. Показать, что можно найти такую функцию φ переменного $u = x^2 + y^2$, что произведение

$$\varphi(x^2+y^2)\,[(y^2 - x^2 + 2xy)\,dx + (y^2 - x^2 - 2xy)\,dy]$$

является дифференциалом функции U двух переменных x и y. Выбрать одну из возможных функций φ и вычислить соответствующую функцию U. Найти таким способом решения уравнения (E).

8.05. Найти решения уравнения

$$xy' + y = xy^3.$$

8.06. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0. \qquad (E)$$

1. Найти степенной ряд $\sum a_n x^n$, сумма которого была бы решением уравнения (E), и вычислить его радиус сходимости.

2. Выразить сумму предыдущего ряда при помощи элементарных функций.

8.07. Дано дифференциальное уравнение

$$y' + xy'^2 - y = 0.$$

1. Применяя теорему о существовании решений дифференциального уравнения первого порядка, показать, что через каждую точку области D, определяемую неравенством $4xy + 1 > 0$, проходит хотя бы одна интегральная кривая (рассмотреть, в частности, точки оси Oy).

2. Найти интегральные кривые уравнения (E), являющиеся прямыми.

3. Найти остальные интегральные кривые уравнения (E), отыскивая функции $t \to x$ и $t \to y$ переменного $y' = t$. Изучение этих интегральных кривых не требуется.

4. Найти геометрическое место точек интегральных кривых, в которых касательная имеет заданный наклон m.

8.08. Найти решения дифференциального уравнения

$$y - xy' + y'^3 = 0.$$

8.09. Найти решения дифференциального уравнения

$$y^3 + y'^3 - yy' = 0. \qquad (E)$$

8.10. Найти решения дифференциального уравнения

$$3(x^2 - 1)\, y^2 y' + xy^3 = x^3 + x^2 - x - 1$$

на двух интервалах $-1 < x < 1$ и $x > 1$.

8.11. Найти решения следующих дифференциальных уравнений (принадлежащих к классическим типам):

$$(x^2 + y^2)(1 + y'^2) = 4(y - xy')^2, \qquad (A)$$

$$2x(x+1)\, y' - y = y^3 \arcsin x, \qquad (B)$$

$$x^6 y'^2 = 4y(x-2)^2, \qquad (C)$$

$$x + yy' = y'^3. \qquad (D)$$

8.12. Дано дифференциальное уравнение

$$4x^2 y'^2 - y^2 = xy^3. \qquad (E)$$

1. Показать, что кривая, симметричная относительно 0 к интегральной кривой уравнения (E), также будет интегральной кривой этого уравнения.

2. Преобразуем уравнение (E) заменой переменных T_{ab}:

$$x = aX, \quad y = bY \qquad (a \text{ и } b \text{ — постоянные}).$$

Какое соотношение (R) должно существовать между a и b, чтобы преобразованное уравнение было уравнением (E)? Найти функцию f от двух переменных x и y, инвариантную относительно всех замен T_{ab} переменных, удовлетворяющих соотношению (R).

3. Положим для строго положительных y

$$u = f(x, y), \qquad v = \ln y.$$

Показать, не производя вычислений, что уравнение (E'), полученное из (E) этой заменой, интегрируется одной квадратурой.

4. Составить уравнение (E'); найти его решение и составить уравнения интегральных кривых уравнения (E).

8.13. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(y - x)\, y'' + (1 + y')(1 + y'^2) = 0. \qquad (E)$$

1. Найти такую функцию f, чтобы множество решений уравнения (E) совпадало с множеством решений уравнений

$$(y - x)\, f(y') = a, \qquad (e_a)$$

где a — произвольная постоянная.

2. Найти решения уравнения (E).

8.14. Найти решения дифференциального уравнения

$$1 + y'^2 - yy'' = 0. \qquad (E)$$

8.15. Найти решения уравнения

$$2y'y'' + y'^2 = 1.$$

8.16. 1. Дано дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)\, y'' + xy' - \frac{1}{4}\, y = 0. \qquad (E)$$

Проверить, что функция

$$x \to \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

является решением уравнения (E), и найти остальные решения.

2. Найти разложение в степенной ряд по x функции

$$x \to \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}.$$

8.17. 1. Обозначим через p и q две непрерывные и непрерывно дифференцируемые комплексные функции действительного переменного t. Как нужно выбрать эти две функции, чтобы дифференциальное уравнение

$$x'' + px' + qx = 0 \qquad (E)$$

имело два решения u и v, произведение которых равно 1?

2. Предположим теперь, что функции p и q принимают действительные значения. При каком условии уравнение (E) имеет два действительных решения u и v, произведение которых равно 1?

Показать, что если таких решений не существует, то существуют действительные решения y и z, удовлетворяющие равенству $y^2 + z^2 = 1$.

8.18. Найти решения дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{sh}\, x,$$

обращающиеся вместе со своей первой производной в нуль при $x = 0$.

8.19. Найти решения дифференциального уравнения

$$L(x) = x''' + x'' + x' + x = \sin t + t^2 e^t.$$

8.20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y'' - 2y = x^4 \cos x.$$

8.21. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p)\, y = 0 \qquad (E)$$

(p — заданное действительное число).

1. Обозначим через T_k преобразование вида

$$x = x_1 + k, \qquad y = \varphi(k) e^{kx} y_1$$

(k — произвольная постоянная, φ — заданная функция).

Показать, что уравнение (E'), полученное из (E) преобразованием T_k, тождественно (E).

2. Показать, что функция φ может быть выбрана так, чтобы преобразования T_k образовывали группу (G), изоморфную аддитивной группе действительных чисел (показать, что можно взять в качестве $\ln \varphi$ некоторый многочлен от k).

Найти функцию f двух переменных x и y, инвариантную относительно преобразований T_k группы G.

3. Возьмем в качестве новой неизвестной функции функцию z вида

$$z(x) = f[x, \; y(x)].$$

Указать априори вид дифференциального уравнения (E'), которому удовлетворяет функция z.

Найти в явном виде (E') и отыскать решения уравнений (E') и (E).

8.22. 1. Найти решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 2y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= x + z. \end{aligned} \qquad (1)$$

2. Найти решение системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 2y + z + e^{2t}, \\ \frac{dz}{dt} &= x + z + e^{2t}, \end{aligned} \qquad (2)$$

удовлетворяющее условиям

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0.$$

8.23. Найти решение системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -y + z, \\ \frac{dz}{dt} &= x - z, \end{aligned}$$

удовлетворяющее условиям

$$x(0)=1, \quad y(0)=j, \quad z(0)=j^2.$$

Показать, что если M, N, P — изображение чисел $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ в комплексной плоскости, то треугольник MNP — равносторонний.

8.24. Найти решения системы

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}-4x+6y=0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-2x+4y=0. \end{aligned} \tag{S}$$

8.25. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= x+y, \\ y' &= -x+3y. \end{aligned} \tag{S}$$

1. Показать, что надлежащей заменой переменных система (S) может быть преобразована в систему

$$\begin{aligned} u' &= 2u+kv, \\ v' &= 2v. \end{aligned} \tag{S_1}$$

Проинтегрировать системы (S_1) и (S).

2. Показать, что функции x в решении (x, y) системы (S) являются решениями некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка. Отсюда найти вновь решения системы (S).

3. Найти решения системы

$$\begin{aligned} x' &= x+y+\sin t, \\ y' &= -x+3y. \end{aligned} \tag{\Sigma}$$

8.26. Найти решения системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8x-y-5z, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x+3y+z, \\ \frac{dz}{dt} &= 4x-y-z. \end{aligned} \tag{S}$$

Матрица A этой системы исследована в задаче 3.46, и результаты этого исследования рекомендуется использовать.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

8.01. Это есть уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решения имеют вид

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} - \int_0^y \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} =$$

$$= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = C;$$

полагая $C = \ln\lambda$, приходим к равенству

$$x+\sqrt{1+x^2} = \lambda\left(y+\sqrt{1+y^2}\right),$$

откуда путем простых выкладок получаем

$$4\lambda^2(x^2+y^2) - 4\lambda(1+\lambda^2)xy - (\lambda^2-1)^2 = 0.$$

8.02. Уравнение линейно; поэтому сначала найдем решение однородного уравнения. Кроме того, допустим, что $n\pi < t < (n+1)\pi$ (n — целое), чтобы на рассматриваемом интервале синус не обращался в нуль:

$$\frac{x'}{x} = \frac{\cos t}{\sin t} \Rightarrow x = C\sin t.$$

Для отыскания решений полного уравнения возьмем в качестве неизвестной функции y функцию, определяемую равенством $x = y\sin t$; имеем

$$y'\sin^2 t = e^t \sin^4 t \Rightarrow y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^u \sin^2 u\, du.$$

Записывая, что

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i},$$

получаем

$$y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^u \frac{2 - e^{2iu} - e^{-2iu}}{4}\, du =$$

$$= \left[\frac{e^u}{2} - \frac{e^{u(1+2i)}}{4(1+2i)} - \frac{e^{u(1-2i)}}{4(1-2i)}\right]_{t_0}^{t} =$$

$$= \left[e^u\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2iu}(1-2i)}{20} - \frac{e^{-2iu}(1+2i)}{20}\right)\right]_{t_0}^{t},$$

$$y(t) = e^t\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t + 2\sin 2t}{10}\right) + \lambda,$$

$$x(t) = e^t \sin t\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t + 2\sin 2t}{10}\right) + \lambda\sin t.$$

При $t \to n\pi$ функция $x(t)$ стремится к 0; стало быть, имеется бесконечно много решений, принимающих в точках $n\pi$ значение 0, и не существует решений, принимающих в $n\pi$ значение, отличное от нуля.

8.03. 1. Уравнение линейно. Решение однородного уравнения

$$\frac{y'}{y}=\frac{x^2-1}{x(1+x^2)}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$$

имеет вид

$$y=C\frac{x^2+1}{x}.$$

Возьмем теперь в качестве неизвестного функцию z, определяемую равенством $y=z(x^2+1)/x$; тогда

$$(1+x^2)^2z'+2x=0\Rightarrow z=\frac{1}{1+x^2}+\lambda.$$

Общее решение имеет вид

$$y=\frac{1}{x}+\lambda\frac{x^2+1}{x}=\frac{\lambda x^2+(1+\lambda)}{x}.$$

Если $x\to 0$, то $y\to\pm\infty$, кроме случая $\lambda=-1$, когда $y=-x$, что и является единственным решением, определенным для всех x.

Действительно, теорема о существовании решений дифференциального уравнения применена к уравнению, представимому в форме $y'=f(x,y)$; а в данном случае это невозможно, так как для $x=0$ коэффициент при y' равен нулю.

2. Запишем уравнение в виде

$$y'=p(x)y+q(x).$$

Касательная к интегральной кривой в точке (x_0,y_0) имеет уравнение

$$Y-y_0=y_0'(X-x_0)=[p(x_0)y_0+q(x_0)](X-x_0),$$

или

$$[Y-q(x_0)(X-x_0)]-y_0[1+p(x_0)(X-x_0)]=0.$$

Это уравнение удовлетворяется при любом y_0 решением (X, Y) системы

$$\begin{matrix} Y-q(x_0)(X-x_0)=0, \\ 1+p(x_0)(X-x_0)=0 \end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix} X=x_0-\dfrac{1}{p(x_0)}, \\ Y=-q(x_0)/p(x_0). \end{matrix}$$

Здесь

$$p(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)},\qquad q(x)=\frac{-2}{1+x^2},$$

$$X=\frac{-2x_0}{x_0^2-1},\qquad Y=\frac{2x_0}{x_0^2-1}.$$

8.04. 1. Уравнение однородно; классический метод интегрирования состоит в отыскании дифференциального уравнения, удовлетворяемого функцией x переменного $t=y/x$. Но этот метод неприменим к решениям, для которых y/x равно постоянной m; найдем сначала эти частные решения. m является решением уравнения

$$m(m^2-1-2m)+(m^2-1+2m)=(m-1)(m^2+1)=0.$$

Таким образом, единственным решением этого типа будет $y=x$.

Для нахождения остальных решений имеем:

$$y=tx, \qquad dy=d(tx)=x\,dt+t\,dx,$$

$$(x\,dt+t\,dx)(t^2-1-2t)+(t^2-1+2t)\,dx=0,$$

$$\frac{dx}{x}=-dt\,\frac{t^2-1-2t}{(t-1)(t^2+1)}=\left(\frac{1}{t-1}-\frac{2t}{t^2+1}\right)dt,$$

и следовательно,

$$x=C\,\frac{t-1}{t^2+1}, \qquad y=\frac{Ct(t-1)}{t^2+1}.$$

Интегральными кривыми являются окружности, касающиеся в начале координат биссектрисы координатного угла (прямой $y=x$); уравнение в декартовых координатах одной из этих окружностей получается, например, путем замены t на y/x в выражении для x (в предположении $x\neq 0$):

$$x=C\,\frac{x(y-x)}{y^2+x^2}\Rightarrow x^2+y^2=C(y-x).$$

2. Для того чтобы выражение $A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy$ было дифференциалом функции U, необходимо, при условии непрерывной дифференцируемости A и B, чтобы

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x};$$

обозначив через φ' производную функции φ независимого переменного u, получаем

$$2y\varphi'(x^2+y^2)[y^2-x^2+2xy]+2\varphi(x^2+y^2)[x+y]=$$
$$=2x\varphi'(x^2+y^2)[y^2-x^2-2xy]-2\varphi(x^2+y^2)[x+y],$$

откуда

$$2\varphi'(x^2+y^2)[x^3+y^3+x^2y+xy^2]+4\varphi(x^2+y^2)[x+y]=0,$$

и, после сокращения на $x+y$,

$$2\varphi'(x^2+y^2)[x^2+y^2]+4\varphi(x^2+y^2)=0;$$

$$u\varphi'(u)+2\varphi(u)=0\Rightarrow\varphi(u)=\frac{\lambda}{u^2}\Rightarrow\varphi(x^2+y^2)=\frac{\lambda}{(x^2+y^2)^2}.$$

При $\lambda=1$ функция U находится из соотношений

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

и имеет вид

$$U=\frac{x-y}{(x^2+y^2)}+U_0.$$

Уравнение (E) может быть заменено уравнением $dU = 0$; следовательно, решения определяются соотношением $U = \text{const}$, т. е.

$$\frac{x-y}{(x^2+y^2)} = K.$$

При $K = 0$ находим вновь $y = x$, а при других значениях K —

$$x^2 + y^2 = -\frac{1}{K}(y - x).$$

Полагая $-1/K = C$, получаем в точности те же уравнения окружностей, что и в п. 1.

8.05. Это есть уравнение Бернулли; оно может быть записано в виде

$$xy'y^{-3} + y^{-2} = x,$$

или, если взять в качестве неизвестной функции $y^{-2} = u$, — в виде

$$-x\frac{u'}{2} + u = x.$$

Решаем однородное уравнение:

$$\frac{u'}{u} = \frac{2}{x} \Rightarrow u = cx^2.$$

Приняв, далее, в качестве неизвестного v функцию, определяемую равенством $u = vx^2$, получаем

$$-v'\frac{x^3}{2} = x \Rightarrow v = \frac{2}{3} + \lambda \Rightarrow u = 2x + \lambda x^2, \quad y = (2x + \lambda x^2)^{-1/2}.$$

8.06. 1. Предположим, что радиус сходимости ρ ряда отличен от нуля; внутри интервала сходимости, как известно,

$$y = \sum_0^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_0^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

и тогда левая часть уравнения имеет вид

$$a_0 - 1 + (3a_1 + a_0)x + \sum_2^{+\infty} [n a_{n-1} + (2n+1) a_n] x^n = 0.$$

Если степенной ряд обращается в нуль, то все его коэффициенты равны нулю (как производные суммы в точке $x = 0$, умноженные на $1/n!$):

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad a_n = -\frac{n}{2n+1} a_{n-1}.$$

Признак Даламбера позволяет сразу же найти радиус сходимости ρ ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} |x| = \frac{|x|}{2} \Rightarrow \rho = 2.$$

Следовательно, существует степенной ряд, сумма которого является решением уравнения; его радиус сходимости равен 2; это есть ряд

$$S(x) = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)} x^n.$$

2. Уравнение (E) линейно; найдем его решения классическим способом.

Решаем однородное уравнение:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x+1}{x(x+2)} \Rightarrow y = \frac{C}{\sqrt{|x(x+2)|}}.$$

Возьмем в качестве нового неизвестного функцию z:

$$y = \frac{z}{\sqrt{|x(x+2)|}}$$

и решим полученное уравнение:

$$\frac{x(x+2)z'}{\sqrt{|x(x+2)|}} = 1 \Rightarrow z(x) = \lambda + \int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{|t(t+2)|}}{t(t+2)}\, dt.$$

Для вычисления интеграла рассмотрим отдельно два случая в зависимости от знака выражения $t(t+2)$.

а) $$-2 < t < 0 \Rightarrow |t(t+2)| = -t(t+2),$$

$$z(x) = \lambda + \int_{-1}^{x} \frac{-dt}{\sqrt{-t(t+2)}} = \lambda - \arcsin(x+1);$$

б) $$t > 0 \Rightarrow |t(t+2)| = t(t+2),$$

$$z(x) = \lambda + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)}} = \mu + \ln\left[(x+1) + \sqrt{x(x+2)}\right].$$

(Для $t < -2$ исследование аналогично, но нас оно не интересует, так как ряд сходится на $]-2, 2[$.)

Решения уравнения (E) имеют вид:

$$y(x) = \frac{\lambda - \arcsin(x+1)}{\sqrt{-x(x+2)}}, \qquad \text{если} \quad -2 < x < 0;$$

$$y(x) = \frac{\mu + \ln\left[(x+1) + \sqrt{x(x+2)}\right]}{\sqrt{x(x+2)}}, \qquad \text{если} \quad 0 < x < 2.$$

При $x \to 0$ знаменатель стремится к 0, и эти решения стремятся к $\pm\infty$, кроме, быть может, тех, у которых числитель при $x=0$ равен нулю, а именно, тех, которые получаются при

$$\lambda = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \mu = 0.$$

Мы знаем, что существует решение, остающееся ограниченным при $x \to 0$, а именно, функция $x \to S(x)$; но как мы только что показали, такое решение на каждом из интервалов $]-2, 0[$ и $]0, 2[$ единственно; поэтому получаем

$$S(x) = \frac{\pi/2 - \arcsin(x+1)}{\sqrt{-x(x+2)}} = \frac{\arccos(x+1)}{\sqrt{-x(x+2)}}, \quad \text{если} \quad -2 < x < 0;$$

$$S(x) = \frac{\ln\left[(x+1) + \sqrt{x(x+2)}\right]}{\sqrt{x(x+2)}} = \frac{\operatorname{arch}(x+1)}{\sqrt{x(x+2)}}, \quad \text{если} \quad 0 < x < 2.$$

8.07. 1. Решая исходное уравнение относительно y', получаем два решения, если $4xy + 1 > 0$ и $x \neq 0$; одно из этих решений при $x \to 0$ стремится к $\pm\infty$, а другое к y; это второе решение мы и рассмотрим:

$$y' = f(x, y),$$

$$f(x, y) = \frac{-1 + \sqrt{4xy+1}}{2x} \quad \text{для} \quad x \neq 0, \quad f(0, y) = y.$$

Функция f определена и непрерывна в области D; в самом деле, при $(x, y) \to (0, y_0)$

$$\sqrt{1 + 4xy} = 1 + 2xy + 2xy\varepsilon(x, y) = 1 + 2xy_0 + x\varepsilon_1(x, y),$$

где $\varepsilon(x, y)$ и $\varepsilon_1(x, y)$ стремятся к 0 при $(x, y) \to (0, y_0)$, и

$$f(x, y) = y_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_1(x, y) \to y_0 = f(0, y_0) \quad \text{при} \quad (x, y) \to (0, y_0).$$

Функция f дифференцируема по y в области D, и

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4xy+1}}, \quad \text{если} \quad x \neq 0, \quad f'_y(0, y) = 1,$$

т. е.

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4xy+1}}$$

при любом x.

Производная f'_y ограничена в области D_a, определяемой условиями $4xy + 1 \geqslant a > 0$. Следовательно, через любую точку области D_a проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$ (см. Пизо и Заманский, книга IV, гл. VI, 1-й раздел, § 3). Каждая точка (x_0, y_0) области D принадлежит некоторой области D_a (достаточно взять $4x_0y_0 + 1 > a > 0$), и значит, через любую точку области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$.

Замечания. а) То же самое исследование, проведенное для уравнения

$$y' = \frac{-1 - \sqrt{4xy+1}}{2x},$$

показывает, что через любую точку области D, не лежащую на Oy, проходит одна и только одна интегральная кривая этого уравнения.

б) При отыскании интегральных кривых, а не решений уравнения (E), полезно заметить, что x и y входят в уравнение симметрично и (E) может быть записано в виде

$$dx\,dy + x\,dy^2 - y\,dx^2 = 0.$$

В такой записи очевидно, что ось Oy, определяемая уравнением $x = 0$ (так что и $dx = 0$), есть интегральная кривая. Итак, через каждую точку области D, определенной условием $4xy + 1 > 0$, проходят ровно две интегральные кривые уравнения (E). Любой точке (x_0, y_0) из D при $x_0 \neq 0$ соответствуют две функции y, являющиеся решениями уравнения (E) и такие, что $y(x_0) = y_0$, и только одна — в случае $x_0 = 0$.

2. Для того чтобы прямая $y = mx + p$ была интегральной кривой для (E), необходимо и достаточно, в силу равенства $y' = m$, чтобы

$$y = mx + p = xm^2 + m,$$

т. е.

$$m = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{и} \quad p = m;$$

отсюда получаем два решения:

$$y = 0, \qquad y = x + 1.$$

3. Для остальных интегральных кривых y' есть переменное и может быть выбрано в качестве параметра на кривой; заменяем тогда уравнение (E) системой

$$\begin{aligned} y &= t + xt^2, \\ dy &= t\,dx = d(t + xt^2) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y &= t + xt^2, \\ \frac{dx}{dt}\,t(1 - t) &= 2xt + 1. \end{aligned}$$

Последнее уравнение линейно и решается классическим способом: сначала решаем однородное уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{2}{1 - t}\,dt \Rightarrow x = \frac{\lambda}{(t - 1)^2};$$

далее вводим новую функцию u:

$$x = \frac{u}{(t - 1)^2}$$

и получаем

$$u' \frac{t}{1 - t} = 1 \Rightarrow u' = \frac{1 - t}{t} \Rightarrow u = \ln(Ct) - t.$$

Отсюда окончательно находим

$$x = \frac{\ln(Ct) - t}{(t - 1)^2},$$

$$y = t + xt^2 = \frac{t^2 \ln(Ct) - 2t^2 + t}{(t - 1)^2}.$$

Для проверки выкладок можно вычислить dx/dt, dy/dt и y'

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(1/t-1)(t-1)-2[\ln(Ct)-t]}{(t-1)^2}=\frac{-2t\ln(Ct)+t^2+2t-1}{t(t-1)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{[2t\ln(Ct)-3t+1](t-1)-2[t^2\ln(Ct)-2t^2+t]}{(t-1)^2}=$$
$$=\frac{-2t\ln(Ct)+t^2+2t-1}{(t-1)^2};$$

итак, получаем

$$y'=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=t.$$

4. Наклон μ касательных к интегральным кривым, проходящим через точку (x, y), удовлетворяет уравнению

$$x\mu^2+\mu-y=0.$$

Если это уравнение имеет два различных корня, то точка (x, y) принадлежит области D, а тогда, как известно, существуют две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Следовательно, искомое геометрическое место есть прямая Δ_m, имеющая уравнение

$$xm^2+m-y=0,$$

кроме, быть может, точки с координатами $x=-1/2m$, $y=m/2$, не принадлежащей D, так как $4xy+1=0$.

Более точное исследование позволяет установить, что точки гиперболы уравнения $4xy+1=0$ являются точками возврата интегральных кривых (в этих точках $dx/dt=dy/dt=0$) и что касательная к интегральной кривой снова имеет наклон t, являющийся двойным корнем уравнения $xt^2+t-y=0$. Следовательно, вся прямая Δ_m и является искомым геометрическим местом.

8.08. Это уравнение есть частный случай уравнения Лагранжа; оно принадлежит к типу уравнений Клеро.

Решениями этого уравнения являются линейные функции вида

$$y(x)=mx-m^3$$

(m — произвольная постоянная).

Кроме того, имеется решение, для которого y' не является постоянной; y' принимается за независимое переменное t, что дает

$$\begin{matrix} y=xt-t^3, \\ dy=t\,dx=d(xt-t^3)\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=xt-t^3, \\ (x-3t^2)\,dt=0,\end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x=3t^2, \\ y=2t^3\end{matrix} \Leftrightarrow y=\frac{2\varepsilon}{3\sqrt{3}}x^{3/2} \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Но мы знаем, что полученная таким образом интегральная кривая имеет в качестве касательных прямые, изображающие найденные ранее линейные функции.

8.09. Уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как в нем x не фигурирует явно, но решить его относительно y' трудно. Поэтому воспользуемся параметрическим представлением, положив

$$y = ty',$$

откуда

$$y' = \frac{t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Тогда функция $t \to x$ определяется равенствами

$$dy = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\,dt = y'\,dx = \frac{t}{1+t^3}\,dx.$$

Уравнению удовлетворяет $t=0$, что дает для уравнения (E) решение $y=0$. В остальных случаях

$$dx = \frac{2-t^3}{1+t^3}\,dt = \left(-1 + \frac{3}{1+t^3}\right)dt \Rightarrow x = x_0 - t + \int_{t_1}^{t} \frac{3du}{1+u^3},$$

$$\int_{t_1}^{t} \frac{3du}{1+u^3} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{u+1} + \frac{-u+2}{u^2-u+1}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\right] + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-1) + C^{te}.$$

Окончательно для обоих интервалов $t < -1$ и $t > -1$ получаем:

$$x = \lambda - t + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\right] + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(2t-1)\right],$$

$$y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

8.10. Заданное уравнение не принадлежит к классическому типу; но если взять новую неизвестную функцию $Y = y^3$, то получится линейное уравнение

$$(x^2-1)Y' + xY = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Решаем однородное уравнение

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{-x}{x^2-1} \Rightarrow Y = \frac{C}{\sqrt{|x^2-1|}}.$$

Замена неизвестной функции

$$Y = \frac{z}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

приводит к уравнению

$$(x^2-1)\frac{z'}{\sqrt{|x^2-1|}}=x^3+x^2-x-1=(x+1)(x^2-1),$$

откуда, учитывая, что $x^2-1\neq 0$, получаем

$$z'=(x+1)\sqrt{|x^2-1|}\Rightarrow z-z_0=\int_{x_0}^{x}(t+1)\sqrt{|t^2-1|}\,dt.$$

Если $x>1$, то замена переменных $t=\operatorname{ch} u$ дает:

$$z-z_0=\int_{U_0}^{U}(1+\operatorname{ch} u)\operatorname{sh}^2 u\,du=\left[-\frac{u}{2}+\frac{\operatorname{sh} 2u}{4}+\frac{\operatorname{sh}^3 u}{3}\right]_{U_0}^{U},$$

$$z=-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{3}+\lambda$$

и

$$Y=y^3=\frac{z}{\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow y=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[6]{x^2-1}}.$$

Если $|x|<1$, то выбираем переменное $u=\arccos t$; получаем

$$z-z_0=-\int_{U}^{U_0}(1+\cos u)\sin^2 u\,du=-\left[\frac{u}{2}-\frac{\sin 2u}{4}+\frac{\sin^3 u}{3}\right]_{U}^{U_0},$$

$$z=-\frac{1}{2}\arccos x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}-\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3}+\lambda,$$

и, как и в предыдущем случае,

$$y=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[6]{1-x^2}}.$$

8.11. Решения будут проводиться в сокращенной форме, так как аналогичные примеры уже рассматривались в предыдущих задачах.

А) Уравнение однородно (см. задачу 8.04, п. 1). В качестве переменного можно взять $t=y/x$ или, в полярных координатах, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$:

$$(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)=r^2\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]d\theta^2,$$

$$x\,dy-y\,dx=r^2\,d\theta,$$

$$r^2\left(r^2+r'^2\right)=4r^4\Leftrightarrow r^2+r'^2=4r^2,$$

$$r'=\varepsilon r\sqrt{3},\quad (\varepsilon=\pm 1)\Rightarrow r=r_0e^{\varepsilon\sqrt{3}\,\theta}.$$

В) Это — уравнение Бернулли (см. задачу 8.05), определенное для $-1<x<1$.

Уравнение линейно, если взять в качестве неизвестного $u=y^{-2}$:

$$-x(x+1)u'-u=\arcsin x.$$

Решаем однородное уравнение

$$\frac{u'}{u}=-\frac{1}{x(x+1)}\Rightarrow u=C\frac{x+1}{x}.$$

Выбираем новое неизвестное v:

$$u=v\frac{x+1}{x};$$

получаем

$$-v'(x+1)^2=\arcsin x\Rightarrow v-v_0=-\int_{x_0}^{x}\frac{\arcsin x}{(t+1)^2}\,dt.$$

Интегрируем по частям:

$$v-v_0=\left(\frac{\arcsin t}{t+1}\right)_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{(t+1)\sqrt{1-t^2}}=\frac{\arcsin x}{x+1}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C^{te}.$$

$$y^{-2}=u=\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\lambda\frac{x+1}{x}.$$

C) Это — уравнение с разделяющимися переменными (см. задачу 8.01):

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\varepsilon\frac{x-2}{x^3}\,dx\Rightarrow\varepsilon\sqrt{y}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\lambda,$$

$$y=\frac{(\lambda x^2-x+1)^2}{x^4}.$$

D) Это — уравнение Лагранжа (см. задачу 8.07). Никакая аффинная функция $y=mx+p$ не может служить решением, так как нужно, чтобы $m=-1/m$ или $m^2+1=0$. Выберем параметр $y'=t$:

$$\begin{array}{c} x+yt=t^3, \\ dx=\frac{1}{t}\,dy=d\,(t^3-yt) \end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{c} x+yt=t^3, \\ \frac{t^2+1}{t}\frac{dy}{dt}+y=3t^2. \end{array}$$

Последнее уравнение линейно.

Решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{y}=\frac{-t\,dt}{t^2+1}\Rightarrow y=\frac{C}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Вводим новое неизвестное z по формуле $y=z/\sqrt{t^2+1}$; тогда

$$z'\frac{t^2+1}{t\sqrt{t^2+1}}=3t^2\Rightarrow z=z_0+\int_{x_0}^{x}\frac{3t^3\,dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Взяв в качестве переменного $u=\sqrt{t^2+1}$, получаем

$$z=u^3-3u+\lambda \Rightarrow y=t^2-2+\frac{\lambda}{\sqrt{t^2+1}},$$

$$x=t^3-yt \Rightarrow x=2t-\frac{\lambda t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

8.12. 1. При переходе от кривой к симметричной ей кривой относительно 0, переменные x, y и y' заменяются на $-x$, $-y$, y', и уравнение (E) снова удовлетворяется.

2. Уравнение, преобразованное из (E) посредством T_{ab}, имеет вид

$$4b^2X^2Y'^2-b^2Y^2=ab^3XY^3.$$

Оно тождественно уравнению (E), если $ab=1$ (соотношение (R)). Функцию f получить легко, если заметить, что соотношение (R) может быть записано в форме

$$ab=\frac{x}{X}\frac{y}{Y}=1 \Rightarrow xy=XY;$$

следовательно, f может быть определена равенством $f(x, y)=xy$. (Очевидно, что любая функция переменного xy тоже является решением.)

3. Уравнение (E'), преобразованное из (E) заменой переменных $u=xy$, $v=\ln y$, инвариантно относительно преобразований $\theta_{a,1/a}$, полученных из преобразований $T_{a,1/a}$ заменой переменных и, следовательно, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} x&=aX, \\ y&=\frac{1}{a}Y \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} u&=U, \\ v&=V-\ln a. \end{aligned}$$

Таким образом, если (E') есть уравнение $dv/du=\varphi(u, v)$, то должно выполняться

$$\frac{dV}{dU}=\varphi(U, V) \Rightarrow \frac{dv}{du}=\varphi(u, v+\ln a)=\varphi(u, v).$$

А так как $\ln a$ произвольно, то это соотношение влечет, что φ есть функция только одного переменного u и что, следовательно,

$$\frac{dv}{du}=\varphi(u) \Rightarrow v=v_0+\int_{u_0}^{u}\varphi(t)\,dt.$$

4. По определению u и v,

$$\begin{aligned} x&=ue^{-v}, \\ y&=e^{v} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} dx&=e^{-v}(du-u\,dv), \\ dy&=e^{v}\,dv. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (E'), преобразованное из (E), имеет вид

$$4u^2\,dv^2=(1+u)(du-u\,dv)^2.$$

Необходимо, чтобы $1+u \geqslant 0$, т. е. $1+xy \geqslant 0$ (возвращаясь к уравнению (E), видим, что это условие необходимо для существования значения y', удовлетворяющего уравнению). Тогда

$$2\varepsilon u\, dv = \sqrt{1+u}\,(du - u\, dv) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$u\, dv\left(\sqrt{1+u} + 2\varepsilon\right) = \sqrt{1+u}\, du.$$

Уравнение (E') справедливо, если: $u=0$, т. е. $x=0$ или $y=0$; $\sqrt{1+u}=2$, т. е. $xy=3$. В остальных случаях, взяв в качестве параметра $t=\sqrt{1+u}$, получаем

$$dv = \frac{2t^2\, dt}{(t^2-1)(t+2\varepsilon)} =$$

$$= \left[\frac{1}{1+2\varepsilon}\cdot\frac{1}{t-1} + \frac{1}{1-2\varepsilon}\cdot\frac{1}{t+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{t+2\varepsilon}\right] dt,$$

т. е.

$$\text{если} \quad \varepsilon = 1, \qquad v = v_0 + \frac{1}{3}\ln\left|(t-1)(t+1)^{-3}(t+2)^8\right|;$$

$$\text{если} \quad \varepsilon = -1, \quad v = v_0 + \frac{1}{3}\ln\left|(t+1)(t-1)^{-3}(t-2)^8\right|.$$

Из выражения для v сразу же выводим выражение для y, затем для x, поскольку $xy = u = t^2 - 1$; полученные результаты справедливы для $y>0$. Отсюда переходим к общему случаю, используя результат из п. 1: любой интегральной кривой соответствует ей симметричная относительно 0.

Итак, параметрические уравнения двух семейств интегральных кривых (кроме осей и гиперболы $xy=3$) имеют вид:

$$y = y_0 (t-1)^{1/3}(t+2)^{8/3}(t+1)^{-1},$$
$$x = y_0^{-1}(t+1)^2(t-1)^{2/3}(t+2)^{-8/3};$$
$$y = y_0 (t+1)^{1/3}(t-2)^{8/3}(t-1)^{-1},$$
$$x = y_0^{-1}(t-1)^2(t+1)^{2/3}(t-2)^{-3/3}.$$

Но если $t' = -t$, то оба семейства кривых взаимозаменяемы; следовательно, все интегральные кривые уравнения (E) получаются рассмотрением только одного из двух семейств.

8.13. 1. Дифференцируя уравнение (e_a), убеждаемся, что решения уравнения (e_a) удовлетворяют уравнению

$$(y'-1)\, f(y') + (y-x)\, f'(y')\, y'' = 0.$$

Обратно, любое решение этого уравнения является решением одного из уравнений (e_a).

Для того чтобы функция f была искомой, необходимо и достаточно, чтобы (E') было тождественно (E), т. е.

$$\frac{(y'-1)\, f(y')}{f'(y')} = (1+y')(1+y'^2).$$

Следовательно, функция f определяется соотношениями

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{u-1}{(u+1)(u^2+1)}=\frac{-1}{u+1}+\frac{u}{u^2+1}\Rightarrow f(u)=C\frac{\sqrt{u^2+1}}{u+1}.$$

Находим функцию f, задавая C произвольное значение, например, равное 1.

2. Уравнение (e_a) есть уравнение Лагранжа. Единственная линейная функция, удовлетворяющая (e_a), есть функция

$$y=x+\frac{a}{f(1)}=x+a\sqrt{2}.$$

Находим остальные решения, взяв в качестве независимого переменного $t=y'$:

$$\left.\begin{aligned} y&=x+a\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}},\\ dy&=t\,dx=dx+a\frac{(1-t)\,dt}{(t^2+1)^{3/2}} \end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} y&=x+a\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}},\\ dx&=\frac{-a\,dt}{(t^2+1)^{3/2}}, \end{aligned}\right.$$

т. е.

$$x=\frac{-at}{\sqrt{t^2+1}}+x_0,$$

$$y=\frac{a}{\sqrt{t^2+1}}+x_0.$$

Положив $t=\operatorname{tg}\varphi$, видим, что интегральные кривые являются окружностями.

8.14. Переменное x не фигурирует в уравнении; поэтому преобразуем его в уравнение относительно функции $y\to y'$, которую мы обозначим через z:

$$y'=z(y)\Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$1+z^2-yz\frac{dz}{dy}=1+u-\frac{1}{2}y\frac{du}{dy}=0,$$

где введена новая неизвестная функция $u=z^2$.

Линейное уравнение относительно u имеет частное решение $u=-1$, и значит, имеет общее решение

$$u=-1+\lambda y^2.$$

Таким образом, решения уравнения (E) определяются соотношениями

$$y'^2=-1+\lambda y^2=\frac{1}{k^2}(y^2-k^2)$$

(строго положительная постоянная λ обозначается через $\frac{1}{k^2}$). Получаем

$$\frac{k\,dy}{\sqrt{y^2-k^2}}=\pm\,dx\Rightarrow\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2-k^2}}{k}\right|=\pm\frac{x-x_0}{k}$$

и, переходя к обратной функции,

$$\left|\frac{y}{k}\right| = \operatorname{ch}\left(\pm\frac{x-x_0}{k}\right) = \operatorname{ch}\frac{x-x_0}{k} \Rightarrow y = k\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{k}.$$

8.15. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим функцию $y \to y'$, обозначаемую z; как уже показано, $y'' = z\,dz/dy$. Имеем

$$2z^2\frac{dz}{dy} + z^2 = 1,$$

$$dy = \frac{2z^2}{1-z^2}\,dz \Rightarrow y - y_0 = -2z + \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|.$$

Вместо того чтобы решать полученное уравнение относительно $z = y'$, найдем x как функцию от z:

$$dx = \frac{1}{z}\,dy = \frac{2z}{1-z^2}\,dz \Rightarrow x - x_0 = -\ln|1-z^2|.$$

Можно было бы также заметить, что уравнение записывается в виде

$$\frac{d(y'^2)}{dx} + y'^2 = 1;$$

легко выразить y'^2 через x, а затем найти y квадратурой.

8.16. 1. Положим

$$y_1(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}};$$

имеем

$$y_1'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 + x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{y_1(x)}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

Вычислим $y_1''(x)$, дифференцируя соотношение

$$2\sqrt{1+x^2}\,y_1'(x) = y_1(x);$$

получаем

$$2\sqrt{1+x^2}\,y_1''(x) + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,y_1'(x) = y_1'(x) = \frac{y_1(x)}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

Умножая обе части равенства на $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}$, получаем уравнение (E); таким образом, y_1 есть решение этого уравнения.

Чтобы найти решение уравнения (E), линейно независимое с y_1, выберем в качестве неизвестного такую функцию z, чтобы $y = y_1 z$; преобразованное уравнение будет иметь вид

$$y_1 z'' + z'\left(2y_1' + \frac{x}{1+x^2}\,y_1\right) = 0;$$

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{2y_1'}{y_1} - \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow z' = \frac{C}{y_1^2\sqrt{1+x^2}},$$

$$z' = \frac{C}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = C\,\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} = C\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

$$z = C\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) + D.$$

Следовательно, решения уравнения (E) определяются соотношениями

$$y(x) = C\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\,(x-\sqrt{1+x^2}) + D\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= -C\sqrt{\sqrt{1+x^2}-x} + D\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Функция y_1 есть единственное решение уравнения (E), удовлетворяющее условиям

$$y_1(0) = 1, \qquad y_1'(0) = 1/2.$$

Теперь мы найдем степенной ряд, являющийся решением уравнения (E) и удовлетворяющий двум предыдущим условиям; если такой степенной ряд существует, то его суммой будет функция y_1.

Положим

$$S(x) = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{2}^{+\infty} a_n x^n$$

и допустим, что радиус сходимости ряда отличен от нуля; тогда на интервале сходимости

$$S'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad S''(x) = \sum_{2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}.$$

Левая часть уравнения (E) будет степенным рядом, если заменить y, y', y'' на $S(x)$, $S'(x)$ и $S''(x)$; уравнение (E) будет удовлетворяться, когда все коэффициенты этого степенного ряда равны нулю, т. е.:

$$2a_2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8} \qquad \text{(1-й член)},$$

$$6a_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{16} \qquad \text{(2-й член)},$$

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + n(n-1)\,a_n + na_n - \frac{1}{4}a_n = 0 \qquad \text{(n-й член)},$$

$$a_{n+2} = -\frac{n^2 - 1/4}{(n+1)(n+2)}\,a_n.$$

Предел отношения $|a_{n+2}/a_n|$ равен 1; следовательно, радиус сходимости ряда, состоящего из членов четных степеней, равен 1 (применение правила Даламбера); точно так же, равен 1 и радиус сходимости ряда из членов нечетных степеней.

Таким образом, радиус сходимости исходного ряда равен 1; проведенные выкладки справедливы на интервале $]-1, 1[$, значит, на этом интервале сумма степенного ряда равна

$$\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Коэффициенты a_{2p} и a_{2p+1} могут быть вычислены по индукции, и мы находим, что

$$a_{2p}=(-1)^{p-1}\,2\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{p-1}\left(4k^2-\frac{1}{4}\right)}{(2p)!}\,a_2=\frac{(-1)^{p-1}}{4}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{p-1}\left(4k^2-\frac{1}{4}\right)}{(2p)!},$$

$$a_{2p+1}=(-1)^{p}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{p}\left[(2k-1)^2-\frac{1}{4}\right]}{(2p+1)!}\,a_1=\frac{(-1)^{p}}{2}\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{p}\left[(2k-1)^2-\frac{1}{4}\right]}{(2p+1)!}.$$

8.17. 1. Выразим функцию v и ее производные через функцию u и ее производные:

$$v=\frac{1}{u},\qquad v'=-\frac{u'}{u^2},\qquad v''=\frac{2u'^2-uu''}{u^3}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (E), видим, что u есть решение системы

$$\begin{aligned}2u'^2-uu''-puu'+qu^2&=0,\\ u''+pu'+qu&=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Прибавив к первому уравнению второе, умноженное на u, получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned}2u'^2+2qu^2&=0,\\ u''+pu'+qu&=0\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{aligned}u'&=\varepsilon Qu,\\ u''+pu'+qu&=0,\end{aligned}\tag{2}$$

где через Q обозначен один из квадратных корней из $-q$, а через ε — одно из двух чисел ± 1.

Тогда первое уравнение дает

$$u(t)=u_0\exp\left(\varepsilon\int_{t_0}^{t}Q(\theta)\,d\theta\right),$$

откуда, записывая, что выполняется второе уравнение, получаем

$$q'+2pq=0.$$

Это условие удовлетворяется, в частности, при $q=0$; в дальнейшем мы этим решением будем пренебрегать, так как соответствующие функции u и v постоянны.

2. Для того чтобы найденное в п. 1 решение u было действительным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{0}^{t}Q(\theta)\,d\theta$$

было действительно (тогда в качестве u_0 берем действительное число), т. е. чтобы Q было действительной функцией и, значит, чтобы q было отрицательной функцией. Следовательно, уравнение (E) имеет действительные решения u и v, произведение которых равно 1 на интервалах, где функция q отрицательна.

Если на интервале $[\alpha, \beta]$ функция q положительна, то функция Q и ее примитивная

$$\int_{t_0}^{t} Q(\theta)\, d\theta$$

принимают чисто мнимые значения, и

$$u = \exp\left(\int_{t_0}^{t} Q(\theta)\, d\theta\right)$$

принимает значения, по модулю равные 1; решение $v = 1/u$ равно $\bar{u}$; оба решения $y = (u + \bar{u})/2$ и $z = (u - \bar{u})/2i$ действительны, и

$$1 = uv = (y + iz)(y - iz) = y^2 + z^2.$$

8.18. Начнем с отыскания общего решения этого уравнения, которое является линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

Параметры r экспонент e^{rx}, являющихся решением уравнения без правой части, являются корнями характеристического уравнения

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет двойной корень, равный 1; в этом случае общее решение уравнения без правой части имеет вид

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

Далее нужно найти частное решение уравнения с правой частью; поскольку $2\operatorname{sh} x = e^x - e^{-x}$, то будем искать частные решения уравнений с правыми частями e^x и $-e^{-x}$, а затем возьмем сумму полученных результатов.

Так как 1 есть двойной корень характеристического уравнения, то мы ищем для правой части e^x решение в виде $\lambda x^2 e^x$; подставляя его в уравнение, получаем $\lambda = \frac{1}{2}$. Напротив, -1 не является корнем характеристического уравнения; поэтому для правой части $-e^{-x}$ решение ищется в виде μe^{-x}, и мы получаем $\mu = -\frac{1}{4}$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Запишем теперь, что оно удовлетворяет заданным частным условиям:

$$y(0) = A - \frac{1}{4} = 0,$$

$$y'(0) = A + B + \frac{1}{4} = 0.$$

Следовательно, искомое решение получается при $A = 1/4$, $B = -1/2$.

8.19. Способ тот же, что и для уравнения второго порядка: находим общее решение уравнения без правой части, а затем частное решение уравнения с правой частью.

Решение уравнения $L(x) = 0$. Показательная функция $t \to e^{rt}$ будет решением, если r есть корень характеристического уравнения

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0,$$

т. е. если

$$r = -1, \quad r = i \quad \text{или} \quad r = -i.$$

Общее решение есть линейная комбинация трех частных решений, полученных таким путем.

2. Правая часть $\sin t + t^2 e^t$ есть сумма функций

$$\frac{e^{it}}{2i}, \qquad -\frac{e^{-it}}{2i} \quad \text{и} \quad t^2 e^t;$$

частное решение x_0 уравнения с правой частью будет найдено в виде суммы таких функций x_1, x_2, x_3, что

$$L(x_1) = \frac{e^{it}}{2i}, \qquad L(x_2) = -\frac{e^{-it}}{2i}, \qquad L(x_3) = t^2 e^t.$$

Частные решения x_1 *и* x_2. Число i является простым корнем характеристического уравнения; поэтому будем искать решение x_1 в виде $\lambda t e^{it}$:

$$L(\lambda t e^{it}) = 2\lambda(i-1)e^{it} = \frac{e^{it}}{2i},$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{4i(i-1)} = -\frac{1}{8} + \frac{i}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+i}{8} t e^{it}.$$

В $L(x)$ коэффициенты у производных — действительные числа; следовательно,

$$L(\bar{x}_1) = \overline{L(x_1)} = \overline{\left(\frac{e^{it}}{2i}\right)} = \frac{e^{-it}}{-2i}.$$

Функция $\bar{x}_1$ есть функция x_2.

Частное решение x_3. В качестве x_3 можно взять произведение e^t на многочлен A второй степени, и тогда

$$L(x_3) = L(e^t A) = e^t(4A + 6A' + 4A'') = t^2 e^t,$$

$$4A + 6A' + 4A'' = t^2 \Rightarrow A(t) = \frac{2t^2 - 6t + 5}{8}.$$

Таким образом, частное решение уравнения с правой частью имеет вид

$$x_0(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = -\frac{t}{4}(\sin t + \cos t) + \frac{2t^2 - 6t + 5}{8} e^t,$$

а общее решение уравнения с правой частью имеет вид

$$x(t) = -\frac{t}{4}(\sin t + \cos t) + \frac{2t^2 - 6t + 5}{8} e^t + u \sin t + v \cos t + we^{-t},$$

где u, v и w — произвольные постоянные.

8.20. Уравнение без правой части есть уравнение Эйлера (см. Пизо и Заманский, Книга IV, гл. VI, 2-й раздел, § 3); заменой $t = \ln|x|$ оно преобразуется в уравнение с постоянными коэффициентами и, значит, имеет решения $x \to x^r$. Число r является решением уравнения

$$r(r-1) - 2 = (r+1)(r-2) = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения без правой части имеет вид

$$y(x) = \frac{\lambda}{x} + \mu x^2.$$

Для того чтобы найти теперь частное решение уравнения с правой частью, мы воспользуемся методом вариации постоянных, т. е. определим функцию y через такие две функции u и v, что

$$y(x) = \frac{u(x)}{x} + v(x)\, x^2,$$

тогда

$$y'(x) = u(x)\left(\frac{1}{x}\right)' + v(x)(x^2)' = -\frac{u(x)}{x^2} + 2xv(x).$$

Следовательно, функции u' и v' удовлетворяют соотношению

$$\frac{u'(x)}{x} + v'(x)\, x^2 = 0.$$

Второе уравнение получаем, записывая, что функция y есть решение заданного уравнения:

$$y''x = \frac{2u(x)}{x^3} + 2v(x) - \frac{u'(x)}{x^2} + 2xv'(x),$$

$$x^2 y''(x) - 2y(x) = -u'(x) + 2x^3 v'(x) = x^4 \cos x.$$

Итак, две функции u и v определяются соотношениями

$$\begin{aligned} &\frac{u'(x)}{x} + v'(x)\,x^2 = 0, \\ &-u'(x) + 2x^3 v'(x) = x^4 \cos x \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &u'(x) = -\frac{x^4}{3}\cos x, \\ &v'(x) = \frac{x}{3}\cos x, \end{aligned}$$

и частное решение этой системы имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{3}(-x^4 \sin x - 4x^3 \cos x + 12x^2 \sin x + 24x \cos x - 24 \sin x),$$

$$v(x) = \frac{1}{3}(x \sin x + \cos x),$$

откуда

$$y(x) = (8 - x^2)\cos x + 4\left(x - \frac{2}{x}\right)\sin x.$$

Следовательно, общее решение уравнения равно

$$y(x) = (8 - x^2)\cos x + 4\left(x - \frac{2}{x}\right)\sin x + \frac{\lambda}{x} + \mu x^2.$$

8.21. 1. Производные по x и по x_1 равны, так как $dx = dx_1$; поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1} = \varphi(k)\,e^{kx}\left(\frac{dy_1}{dx_1} + ky_1\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx_1^2} = \varphi(k)\,e^{kx}\left(\frac{d^2y_1}{dx_1^2} + 2k\frac{dy_1}{dx_1} + k^2 y_1\right).$$

В уравнении (E') выражение $\varphi(k)e^{kx}$ содержится множителем, и мы получаем уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} + 2k\frac{dy_1}{dx_1} + k^2 y_1 - 2(x_1 + k)\left(\frac{dy_1}{dx_1} + ky_1\right) + \\ + [(x_1 + k)^2 - p]\,y_1 = 0,$$

т. е. после упрощения получаем уравнение, тождественное (E).

2. Произведение $T_k T_{k'}$ двух преобразований T_k и $T_{k'}$ определяется соотношениями

$$x = x_2 + k + k',$$

$$y = y_2 \varphi(k)\,\varphi(k')\,e^{(k+k')x - kk'}.$$

Эта операция коммутативна, и если $T_k T_{k'}$ есть преобразование семейства, то это может быть лишь $T_{k+k'}$. Для того чтобы это было так, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(k)\,\varphi(k')\,e^{-kk'} = \varphi(k + k'),$$

и тогда отображение $k \to T_k$ есть изоморфизм группы, т. е. T_k образуют группу, изоморфную аддитивной группе действительных чисел.

Если положить $\psi(k) = \ln \varphi(k)$, то соотношение для функции φ преобразуется в соотношение

$$\psi(k) + \psi(k') - kk' = \psi(k + k').$$

Будем искать дифференцируемые решения ψ и продифференцируем последнее соотношение по k'; получим

$$\psi'(k') - k = \psi'(k + k') \Rightarrow \psi'(0) - k = \psi'(k) \quad (\text{если } k' = 0),$$

$$\psi(k) = \psi(0) + k\psi'(0) - \frac{k^2}{2}.$$

$\psi(0)$ равно нулю (что вытекает из основного соотношения, если положить в нем $k = k' = 0$); потребуем, чтобы $\psi'(0) = 0$. Это даст

$$\psi(k) = -\frac{k^2}{2} \Rightarrow \varphi(k) = e^{-k^2/2}.$$

Тогда преобразование T_k определяется соотношениями

$$x = x_1 + k, \qquad y = e^{kx - k^2/2} y_1.$$

Исключая k из обоих уравнений, получаем

$$y = y_1 e^{(x - x_1)x - (x - x_1)^2/2} = y_1 e^{x^2/2 - x_1^2/2}, \quad ye^{-x^2/2} = y_1 e^{-x_1^2/2}.$$

Поэтому

$$f(x, y) = ye^{-x^2/2}.$$

3. Уравнение (E'), преобразованное из (E), снова линейно. Как и (E), оно инвариантно относительно T_k, которое определяется для переменных x и z соотношениями

$$x = x_1 + k, \qquad z = z_1.$$

Следовательно, если принять в (E') коэффициент при d^2z/dx^2 равным 1, то коэффициенты при z и при dz/dx инвариантны, так что результат преобразования x посредством T_k произволен — его коэффициенты не зависят от x и уравнение (E') есть уравнение с постоянными коэффициентами.

Уравнение (E') находится элементарно:

$$y = ze^{x^2/2}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{x^2/2}\left(\frac{dz}{dx} + xz\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x^2/2}\left[\frac{d^2z}{dx^2} + 2x\frac{dz}{dx} + (x^2 + 1)z\right].$$

Подставляя эти значения в уравнение (E), получаем

$$\frac{d^2z}{dx^2} + (1 - p)z = 0.$$

Если $p > 1$, полагаем $1 - p = -q^2$; тогда

$$z = A'e^{qx} + B'e^{-qx} \Rightarrow y = A'e^{qx + x^2/2} + B'e^{-qx + x^2/2};$$

$$y = Ae^{(x+q)^2/2} + Be^{(x-q)^2/2},$$

где
$$A'e^{-q^2/2}=A, \qquad B'e^{-q^2/2}=B.$$

Если $p=1$, то
$$z=A+Bx \Rightarrow y=e^{x^2/2}(A+Bx).$$

Если $p<1$, то мы полагаем $1-p=q^2$; тогда
$$z=A\cos qx+B\sin qx \Rightarrow y=e^{x^2/2}(A\cos qx+B\sin qx).$$

8.22. 1. Для простоты изложения положим
$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Известно, что если V — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению r, то вектор $X=Ve^{rt}$ является решением заданной системы, так как
$$\frac{dX}{dt}=rVe^{rt}=AVe^{rt}=AX.$$

В случае различных собственных значений общее решение есть линейная комбинация таких решений.

Координаты x, y, z собственного вектора, соответствующего собственному значению r, являются решениями системы
$$\begin{aligned} x(1-r)+y&=0, \\ -x+y(2-r)+z&=0, \\ x+z(1-r)&=0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} x&=z(r-1), \\ y&=x(r-1)=z(r-1)^2, \\ z[-(r-1)&+(2-r)(r-1)^2+1]=0. \end{aligned}$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид
$$(r-1)^2(2-r)+2-r=(2-r)[(r-1)^2+1]=0,$$
и собственные значения равны $r_1=2$, $r_2=1+i$, $r_3=1-i$.

Из первых двух уравнений второй системы сразу получаем собственные векторы, соответствующие каждому из этих значений; например, положив для этих векторов $z=1$, имеем
$$\underset{(r_1=2)}{V_1}\begin{cases} 1\\ 1,\\ 1\end{cases} \qquad \underset{(r_2=1+i)}{V_2}\begin{cases} i\\ -1,\\ 1\end{cases} \qquad \underset{(r_3=1-i)}{V_3}\begin{cases} -i\\ -1\\ 1.\end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы (1) имеет вид
$$X=aV_1e^{r_1t}+bV_2e^{r_2t}+cV_3e^{r_3t},$$
где a, b, c — произвольные постоянные; в координатной форме это записывается так:
$$\begin{aligned} x&=ae^{2t}+ie^t(be^{it}-ce^{-it}), \\ y&=ae^{2t}-e^t(be^{it}+ce^{-it}), \\ z&=ae^{2t}+e^t(be^{it}+ce^{-it}). \end{aligned}$$

Замечание. Для нахождения действительных решений системы необходимо и достаточно, чтобы a было действительным, а b и c — сопряженными; нетрудно найти выражение, в котором фигурируют лишь действительные члены, положив $b = (\beta + i\gamma)/2$ и $c = (\beta - i\gamma)/2$:

$$x = ae^{2t} - e^t(\gamma \cos t + \beta \sin t),$$
$$y = ae^{2t} - e^t(\beta \cos t - \gamma \sin t),$$
$$z = ae^{2t} + e^t(\beta \cos t - \gamma \sin t).$$

Но вообще удобнее сохранять выражения с мнимыми показателями.

2. Для отыскания частного решения системы с правой частью и нахождения решения, удовлетворяющего заданным условиям, удобно использовать базис, образованный собственными векторами V_1, V_2, V_3 матрицы A; тогда мы найдем матрицы перехода P и P^{-1}.

Если X и U — матрицы из одного столбца, состоящие из координат вектора относительно канонического базиса и относительно базиса из собственных векторов, то положим

$$X = PU, \qquad U = P^{-1}X.$$

Известно, что P есть матрица, столбцы в которой являются векторами V_1, V_2, V_3:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно найти P^{-1}, либо вычисляя определитель матрицы P и его миноры, либо решая систему

$$\begin{aligned} x &= u + iv - iw, & u &= \frac{y+z}{2}, \\ y &= u - v - w, \quad \Leftrightarrow & v + w &= \frac{z-y}{2}, \\ z &= u + v + w, & v - w &= -i\,\frac{2x - y - z}{2}. \end{aligned}$$

$$U = P^{-1}X \Leftrightarrow \begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z, \\ v &= -\frac{i}{2}\,x - \frac{1-i}{4}\,y + \frac{1+i}{4}\,z, \\ w &= \frac{ix}{2} - \frac{1+i}{4}\,y + \frac{1-i}{4}\,z. \end{aligned}$$

Тогда система (2′), преобразованная из (2) заменой базиса, может быть сразу получена:

$$\frac{dX}{dt}=AX+e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{dU}{dt}=P^{-1}APU+e^{2t}P^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\frac{du}{dt}=2u+e^{2t},$$

$$\frac{dv}{dt}=(1+i)v+ie^{2t},$$

$$\frac{dw}{dt}=(1-i)w-ie^{2t}.$$

Требуется найти такое решение этой системы, чтобы

$$U_0=\begin{pmatrix}u(0)\\v(0)\\w(0)\end{pmatrix}=P^{-1}X_0=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{i}{2}\\\frac{i}{2}\end{pmatrix}.$$

Для этого найдем для каждого из трех уравнений системы общее решение, а затем найдем значение постоянной:

$$\begin{aligned}
u&=ae^{2t}+te^{2t}, & u(0)&=0\Rightarrow a=0,\\
v&=be^{t(1+i)}-\frac{1-i}{2}e^{2t}, & v(0)&=-\frac{i}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{2}-i,\\
w&=ce^{t(1-i)}-\frac{1+i}{2}e^{2t}, & w(0)&=\frac{i}{2}\Rightarrow c=\frac{1}{2}+i.
\end{aligned}$$

Тогда решение системы (2) есть вектор $X=PU$; получаем

$$x=e^t(2\cos t-\sin t)+te^{2t}-e^{2t},$$

$$y=-e^t(\cos t+2\sin t)+te^{2t}+e^{2t},$$

$$z=e^t(\cos t+2\sin t)+te^{2t}-e^{2t}.$$

8.23. Для получения общего решения мы воспользуемся методом п. 1 предыдущей задачи и найдем постоянные, записывая условия, заданные для $t=0$ (в этом конкретном случае нет надобности находить матрицу P^{-1}, так как задача может быть решена без явного выписывания уравнений относительно базиса из собственных векторов).

Координаты собственного вектора матрицы системы являются решением уравнений

$$\begin{aligned}
-(1+r)x+y&=0, & & y=(1+r)x,\\
-(1+r)y+z&=0, &\Leftrightarrow\quad & z=(1+r)y=(1+r)^2x,\\
x-(1+r)z&=0 & & x[1-(1+r)^3]=0.
\end{aligned}$$

Собственные значения являются нулями многочлена $1-(1+r)^3$; следовательно, они равны 0, $j-1$ и j^2-1.

Собственные векторы имеют координаты

$$\underset{(r_1=0)}{V_1}\begin{cases}1\\1,\\1\end{cases}\qquad \underset{(r_2=j-1)}{V_2}\begin{cases}1\\j,\\j^2\end{cases}\qquad \underset{(r_3=j^2-1)}{V_3}\begin{cases}1\\j^2.\\j\end{cases}$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$X=aV_1+be^{(j-1)t}V_2+ce^{(j^2-1)t}V_3$$

(a, b, c — произвольные постоянные), т. е.

$$\begin{aligned}x&=a+be^{(j-1)t}+ce^{(j^2-1)t},\\ y&=a+bje^{(j-1)t}+cj^2e^{(j^2-1)t},\\ z&=a+bj^2e^{(j-1)t}+cje^{(j^2-1)t}.\end{aligned}$$

Искомое частное получится, если записать, что

$$\begin{aligned}x(0)&=a+b+c=1, & & a=0,\\ y(0)&=a+bj+cj^2=j, &\Leftrightarrow\quad & b=1,\\ z(0)&=a+bj^2+cj=j^2 & & c=0.\end{aligned}$$

Следовательно, аффиксы точек MNP равны

$$x(t)=e^{(j-1)t},\quad y(t)=je^{(j-1)t},\quad z(t)=j^2e^{(j-1)t}.$$

Эти аффиксы являются произведением чисел 1, j, j^2 на одно и то же комплексное число $e^{(j-1)t}$; но мы знаем, что при этих условиях треугольник MNP подобен треугольнику $M_0N_0P_0$ образов чисел 1, j, j^2 (см. Пизо и Заманский, книга IV, гл. IV, 2-й раздел); а этот треугольник $M_0N_0P_0$ — равносторонний.

8.24. Введя две функции $u=dx/dt$ и $v=dy/dt$, получаем систему первого порядка, эквивалентную заданной системе:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=u,\\ \frac{dy}{dt}&=v,\\ \frac{du}{dt}&=4x-6y-3v,\\ \frac{dv}{dt}&=2x-4y-u.\end{aligned}\qquad (S')$$

Здесь снова годится метод, применявшийся в двух предыдущих задачах: находим собственные значения и собственные векторы матрицы системы и сразу же получаем общий вид решения.

Но в рассматриваемой задаче функции u и v являются вспомогательными неизвестными, и нет смысла находить, например, четыре координаты собственных векторов матрицы. Так как известен вид решений системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то сразу ищем решение в виде

$$x = \lambda e^{rt}, \qquad y = \mu e^{rt}.$$

Таким образом, получаем решение системы (S), если

$$\lambda(r^2 - 4) + 3\mu(r + 2) = 0,$$
$$\lambda(r - 2) + \mu(r^2 + 4) = 0,$$

и r должно быть нулем многочлена

$$(r^2 - 4)(r^2 + 4) - 3(r^2 - 4) = (r^2 - 4)(r^2 + 1),$$

откуда значения r равны 2, -2, i и $-i$.

Соответствующие значения λ и μ:

$$\begin{array}{llll} \text{если} & r = 2, & \lambda = 1, & \mu = 0; \\ \text{если} & r = -2, & \lambda = 2, & \mu = 1; \\ \text{если} & r = i, & \lambda = 3, & \mu = 2 - i; \\ \text{если} & r = -i, & \lambda = 3, & \mu = 2 + i. \end{array}$$

И общее решение системы, являющееся линейной комбинацией четырех независимых решений, имеет вид

$$x = ae^{2t} + 2be^{-2t} + 3ce^{it} + 3de^{-it}$$
$$y = be^{-2t} + (2 - i)ce^{it} + (2 + i)de^{-it},$$

где a, b, c, d — произвольные постоянные.

Для получения действительных решений необходимо и достаточно, чтобы c и d были сопряженными числами.

8.25. 1. Матрица A системы (S) имеет двойное собственное значение, равное 2, и соответтствующие собственные векторы образуют одномерное векторное пространство, причем один из этих векторов имеет координаты $x = y = 1$.

В данном случае нельзя выбрать базис, состоящий из собственных векторов; возьмем в качестве новых векторов базиса векторы $(1, 1)$ и $(0, 1)$. Тогда получим новые координаты u и v и матрицу A', преобразованную из A:

$$\begin{array}{ll} x = u, & u = x, \\ y = u + v, & v = y - x, \end{array} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (S_1), преобразованная из (S), будет иметь вид

$$\begin{array}{l} u' = 2u + v, \\ v' = 2v \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u' = 2u + ae^{2t}, \\ v = ae^{2t}. \end{array}$$

Первое уравнение есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка и интегрируется непосредственно:

$$u = (at + b)\,e^{2t},$$
$$v = ae^{2t};$$

отсюда получаем общее решение системы (S):

$$x = (at + b)\,e^{2t},$$
$$y = (at + a + b)\,e^{2t}.$$

2. Система (S) эквивалентна системе

$$x' = x + y,$$
$$x'' = x' - x + 3y$$

(действительно, дифференцируя первое уравнение и вычитая из второго, находим $y' = -x + 3y$).

Снова получим эквивалентную систему, если запишем

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ x'' &= x' - x + 3(x' - x) = 4x' - 4x \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x' &= x + y, \\ x'' - 4x' + 4x &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение есть линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, и его характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет один двойной корень, равный 2; следовательно, общее решение линейного уравнения имеет вид

$$x = (at + b)\,e^{2t},$$

откуда

$$y = x' - x = (at + a + b)\,e^{2t}.$$

3. Замена переменных из п. 1 преобразует систему (Σ) в систему

$$\begin{aligned} u' &= 2u + v + \sin t, \\ v' &= 2v - \sin t. \end{aligned} \qquad (\Sigma_1)$$

Вместо того чтобы представлять $\sin t$ в виде

$$(e^{it} - e^{-it})/2i,$$

заметим, что при действительных коэффициентах системы действительные решения u, v могут быть найдены как мнимые части решений системы

$$u' = 2u + v + e^{it},$$
$$v' = 2v - e^{it}.$$

Частное решение второго уравнения имеет вид

$$v = e^{it}\,\frac{2 + i}{5}.$$

Соответствующая функция u является решением уравнения

$$u' = 2u + e^{it}\frac{7+i}{5},$$

и частное решение равно

$$u = -\frac{13+9i}{25}e^{it}.$$

Общее решение системы (Σ_1) получается в результате прибавления к мнимой части предыдущего решения общего решения системы без правой части:

$$u = (at+b)e^{2t} - \frac{9\cos t + 13\sin t}{25},$$

$$v = ae^{2t} + \frac{5\cos t + 10\sin t}{25},$$

откуда получаем общее решение системы (Σ):

$$x = (at+b)e^{2t} - \frac{9\cos t + 13\sin t}{25},$$

$$y = (at+a+b)e^{2t} - \frac{4\cos t + 3\sin t}{25}.$$

8.26. В задаче 3.46 показано, что матрица A имеет преобразованную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

если векторы базиса равны:

$$V_1 \left| \begin{matrix} 1 \\ 1, \\ 1 \end{matrix} \right. \qquad V_2 \left| \begin{matrix} 1 \\ -1, \\ 1 \end{matrix} \right. \qquad V_3 \left| \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}. \\ 0 \end{matrix} \right.$$

Если u, v, w — координаты относительно базиса V_1, V_2, V_3, то система (S) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} u' &= 2u, \\ v' &= 4v + w, \\ w' &= 4w. \end{aligned} \qquad (S_1)$$

Система, составленная из двух последних уравнений, принадлежит к типу исследованной в предыдущей задаче, и мы без труда получаем общее решение:

$$u = ae^{2t},$$

$$v = (bt+c)e^{4t},$$

$$w = be^{4t}.$$

Решение системы (S) получается отсюда сразу
тить что вектор X с координатами x, y, z равен

$$X = uV_1 + vV_2 + wV_3,$$

и следовательно,

$$x = ae^{2t} + bte^{4t} + \left(\frac{b}{3} + c\right) e^{4t},$$

$$y = ae^{2t} - bte^{4t} + \left(\frac{b}{3} - c\right) e^{4t},$$

$$z = ae^{2t} + bte^{4t} + ce^{4t}.$$

Г. Лефор

АЛГЕБРА И АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ

М., 1973 г., 464 стр. с илл.

Редактор ***В. В. Арестов***

Техн. редактор ***И. Ш. Аксельрод***

Корректоры *О. А. Бутусова, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 5/I 1973 г. Подписано к печати 2/VIII 1973 г. **Бумага $60\times90^1/_{16}$. тип. № 2. Физ. печ. л. 29. Условн. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 28,77. Тираж 39 000 экз. Цена книги 1 р. 15 к. Заказ № 482**

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29