

И. Л. ЭКО

ФЛУКТУАЦИИ

И

КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ



Statistical Physics, Phase, Transitions,
and Superconductivity

Eds. M. Chrétien, E. P. Gross,
and S. Deser

M. LAX

FLUCTUATION AND COHERENCE
PHENOMENA IN CLASSICAL AND QUANTUM
PHYSICS

NEW YORK
GORDON AND BREACH
1968

М. ЛЭКС

**ФЛУКТУАЦИИ
И КОГЕРЕНТНЫЕ
ЯВЛЕНИЯ**

Перевод с английского
С. П. МАЛЫШЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1974

В основу книги положен цикл лекций, прочитанных известным американским физиком Мэлвином Лэксом в Летней школе по теоретической физике в Университете Брэндиса. В лекциях исключительно обстоятельно и глубоко изложена теория флуктуаций и на ее основе развит новый подход к физике излучения лазеров и мазеров, в частности исследована возможность неустойчивого лазерного поля.

В качестве приложения в книгу включены более поздние работы, развивающие это направление физики.

Книга представляет интерес для физиков-теоретиков, специалистов по физической оптике, физике твердого тела, физике лазеров и мазеров.

Редакция литературы по физике

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

После того как в середине 50-х годов были предложены новые источники электромагнитных волн — лазеры и мазеры, начались интенсивные поиски новых типов веществ, используемых в качестве рабочих систем, стали поступать многочисленные сообщения о различных конструктивных улучшениях приборов, о создании новых типов оптических квантовых генераторов.

Одновременно продолжались теоретические исследования, причем сложности здесь, по-видимому, не являются принципиальными, поскольку основные уравнения хорошо известны. Вместе с тем для трех основных элементов генератора—двух- или трехуровневой системы (активное вещество), электромагнитного поля и резервуара (накачка) — возможно классическое или квантовое описание; связи между элементами могут быть сильными или слабыми, помимо средних характеристик, существенны также различные типы шумов и т. д. Поэтому регулярно появляются работы, в каком-нибудь отношении улучшающие существующую теорию лазеров и мазеров. Читателю, особенно экспериментатору или инженеру, трудно получить общую картину по отдельным частным исследованиям. Такую работу легче провести исследователю, а затем сообщить результаты читателю.

В предлагаемой работе известного американского физика Мэлвина Лэкса, как это видно из весьма подробного оглавления, с единой точки зрения рассмотрены практически все вопросы теории лазеров и мазеров. Книга составлена в виде обзора работ автора с сотрудниками, выполненных в 1958—1970 гг. (Последняя работа Лэкса и Цванцигера появилась в печати в 1970 г. и приведена в приложении.)

Книга написана по материалам лекций, прочитанных автором в Летней школе по теоретической физике в

Университете Брэндиса. (Три лекции этой школы — Ф. Дайсона, М. Каца и Е. Монтролла — недавно вышли в русском переводе [1].)

М. Лэкс проводит сравнение своих расчетов с результатами других авторов, однако библиография отнюдь не является полной и заканчивается 1968 г. Полная библиография до 1966 г. имеется в обзоре Вольфа и Манделя [2], а в дополнении к монографии Дж. Клаудера и Э. Сударшана [3] приведен весьма подробный список литературы, появившейся в 1966—1969 гг. Имеется также более поздний обзор Ю. Л. Климонтовича с сотр. [4].

При переводе мы сочли целесообразным дополнить книгу статьей Г. Хакена, посвященной общности проблем поведения лазерного излучения вблизи порога возбуждения и фазовых переходов второго рода. Эта аналогия кратко отмечается Лэксом, а также служит предметом исследования в ряде работ [5—7].

Книга М. Лэкса, несомненно, окажется полезной широкому кругу читателей, интересующихся квантовой механикой, статистической оптикой, теорией случайных процессов, а также применением лазеров и мазеров.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Дайсон Ф., Кац М., Монтролл Е., Фишер Е., Устойчивость и фазовые переходы, изд-во «Мир», 1973.
2. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., 37, 231 (1965) [см. перевод: УФН, 87, 491 (1965); 88, 347, 819 (1966)].
3. Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики, изд-во «Мир», 1970.
4. Климонтович Ю. Л., Ковалев А. С., Ланда П. С., УФН, 106, 279 (1972).
5. Graham R., Haken H., Zs. f. Phys., 237, 31 (1970).
6. De Giorgio J. C., Scully M. O., Phys. Rev., A2, 1170 (1970).
7. Goldstein J. S., Scully M. O., Lee P. A., Phys. Lett., A35, 317 (1971).

1. ВВЕДЕНИЕ

Темой предлагаемых лекций является детальное исследование работы мазеров и лазеров с помощью динамических и статистических методов. В дальнейшем, однако, станет очевидно, что эти методы применимы также и для целого ряда других задач, особенно в теории шумов и квантовой теории измерений.

Настоящие лекции представляют собой изложение девятнадцати работ автора [1—19] (см. также обзор этих статей в работе [20]). Шесть из них [1—6] относятся к классической, а тринадцать [7—19] — к квантовой теории.

Прежде чем приступить к математическим выводам, проведем подробное качественное рассмотрение стоящей перед нами важной проблемы, начав с краткого изложения полученных результатов.

1.1. КАКИЕ ВЕЛИЧИНЫ НАС ИНТЕРЕСУЮТ?

Прежде всего возникает вопрос о разумном способе квантостатистического описания лазерного поля, которое «почти когерентно». Нас будут интересовать три спектральные величины:

1. Мы хотим определить *спектр флуктуаций*. Для одночастотного мазера это означает расчет величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \langle b^+(t) b(0) \rangle, \quad (1.1.1)$$

где b^+ и b — операторы рождения и уничтожения одной нормальной моды электромагнитного поля, удовлетворяющие обычным правилам коммутации $[b, b^+] = 1$.

2. Затем нас интересует *спектр корреляции интенсивности* (или спектр флуктуаций интенсивности)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt [\langle b^+(0) b^+(t) b(t) b(0) \rangle - \langle b^+ b \rangle^2], \quad (1.1.2)$$

3. Наконец, рассмотрим *спектр числа фотонов*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt [\langle b^+(t) b(t) b^+(0) b(0) \rangle - \langle b^+ b \rangle^2], \quad (1.1.3)$$

который содержит информацию о флуктуациях чисел фотонов. В гл. 18 мы обсудим также проблему фотодетектирования, т. е. вероятность $p(m, T)$ появления m фотоэлектронов («счет фотонов») за интервал времени T .

1.2. КАЧЕСТВЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. *Усредненные движения* в лазере и мазере в общих чертах описываются классической механикой. Флуктуации крайне малы, и поэтому при изучении усредненных движений естественно предполагать, что флуктуации вообще отсутствуют. С точки зрения квантовой механики поле излучения хорошо описывается в терминах «когерентных состояний» (Глаубер [21]).

2. Стационарное движение самовозбуждающегося осциллятора определяется нелинейностями. Легко установить, что имеется два диссипативных параметра, играющих роль положительного и отрицательного сопротивлений, причем либо одно, либо оба, эти эффективных сопротивления могут быть нелинейными. Отыскивается такой режим работы лазера, в котором эффекты положительного и отрицательного сопротивлений компенсируют друг друга. Эта компенсация в отсутствие шума является причиной нулевой ширины линии, а при наличии шума объясняет чрезвычайную узость линий в рассматриваемых системах.

Частота лазерного излучения составляет около 10^{14} Гц. При тщательном устранении колебаний лазера можно добиться ширины линии менее 0,5 Гц [22]. Есть

основания ожидать, что возможно получение линий с шириной порядка 10^{-2} Гц.

3. Некоторые исследователи (Шимода, Такахаси и Таунс [23]) при анализе работы лазера исходили исключительно из представления о фотонах, используя такие понятия, как числа заполнения фотонов и вероятности переходов. Этот подход может быть согласован с «методом когерентных состояний» Лэмба [24]¹⁾ и других — оба метода исследования, вероятно, правильны.

Усредненное движение правильно описывается классической механикой, в то время как флуктуации отражают квантовый характер населенностей фотонных уровней. Шум (разность между истинными и усредненными движениями) мы будем считать дробовым, поскольку определяющие его населенности и числа фотонов являются целыми числами. Ниже будут приведены некоторые классические примеры дробового шума.

4. Вопрос о возможности квазиклассического описания шума является гораздо более тонким. Ответ на этот вопрос (по крайней мере для области значительно выше порога возбуждения) будет утвердительным, если не учитывать довольно тонкого различия между флуктуациями интенсивности (1.1.2) и флуктуациями числа фотонов (1.1.3).

5. Стабилизация амплитуды автоколебательных осцилляторов является очень общей проблемой — лазер представляет собой лишь весьма простой частный пример. Вблизи и ниже порога возбуждения имеют место очень большие флуктуации, которые при переходе через порог возбуждения «размываются», так что флуктуации амплитуды становятся все менее и менее существенными. Поэтому в достаточно далекой области выше порога возбуждения хорошо применимы квазилинейные методы. Квазилинейный метод учитывает нелинейность системы, но флуктуационные отклонения от усредненного движения рассматривают в линейном приближении с помощью разложения относительно соответствующим образом выбранной рабочей точки. Указанная

¹⁾ Первоначально предложенная Лэмбом теория газового лазера была по существу классической.

процедура справедлива до тех пор, пока флуктуации малы. Это необходимое условие выполняется, если система находится в достаточно далекой области над порогом возбуждения. Для системы, находящейся намного ниже порога возбуждения, квазилинейное приближение также можно использовать, но по другой причине. Ниже порога возбуждения число фотонов P флуктуирует, согласно статистике Бозе, по закону

$$\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 \equiv \langle (\Delta P)^2 \rangle \sim P(P + 1).$$

Для $P \gg 1$ отсюда вытекает, что $\langle (\Delta P)^2 \rangle \sim P^2$ и, следовательно, флуктуации населенности возрастают так же быстро, как и P вблизи порога возбуждения. Поэтому можно было бы думать, что квазилинейное приближение становится неприменимым. Однако в достаточно далекой области ниже порога возбуждения нелинейные члены малы сами по себе и нелинейные коэффициенты можно заменить их средними значениями. Итак, не интересуясь некоторыми «тонкими» вопросами (например, оценкой строгости замены нелинейных членов их средними значениями), можно описывать поведение рассматриваемой системы вдали от порога возбуждения: с помощью квазилинейных методов — выше порога возбуждения и методом среднего значения — ниже порога. Трудности возникают лишь в области, близкой к порогу возбуждения, где эти методы неприменимы.

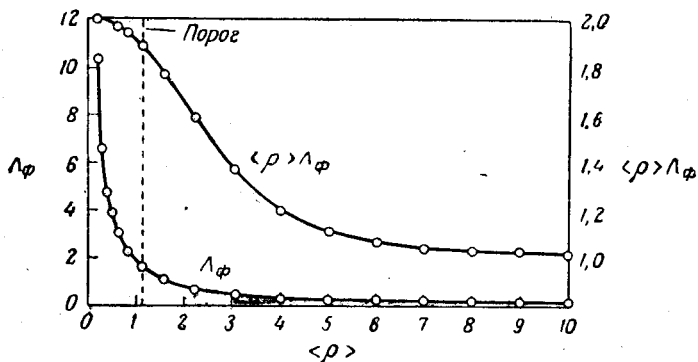
6. Переход из области ниже порога возбуждения в область выше порога в каком-то смысле аналогичен фазовому переходу из некоторого неупорядоченного состояния в состояние, в высшей степени упорядоченное. Однако, поскольку мы интересуемся флуктуациями, нам приходится иметь дело с системами конечных размеров. Поэтому нет необходимости совершать переход к «термодинамическому пределу», и, следовательно, не возникают истинные разрывы, а в узкой области вблизи порога возбуждения будут, вообще говоря, происходить резкие изменения свойств системы.

Мы постараемся детально объяснить явления, происходящие вблизи порога возбуждения на (несколько необычном) примере лазера. Будет показано, что вблизи порога возбуждения газовый лазер очень хорошо описы-

вается в приближении волн вращающейся поляризации осциллятора Ван дер Поля.

В работах [5, 6] приведены соображения, показывающие, что любые спектрально чистые осцилляторы могут быть рассмотрены как осцилляторы Ван дер Поля.

В работе [6] автор совместно с Хемпстедом рассмотрел классическое уравнение движения такого осциллятора и нашел точное решение в области порога возбуждения. Оказалось, что и спектр фазы, и спектр интенсивности имеют в хорошем приближении лоренцев вид.



Фиг. 1.1. Полуширина спектра флуктуаций фазы.

7. Если обозначить (в удобно выбранных единицах) b^+b через ρ , а ширину лоренцевой линии, описывающей спектр флуктуаций, через $\Delta\phi$, то в приближении средних значений получаем [25]

$$\Delta\phi \approx \frac{2}{\langle \rho \rangle}, \quad (1.2.1)$$

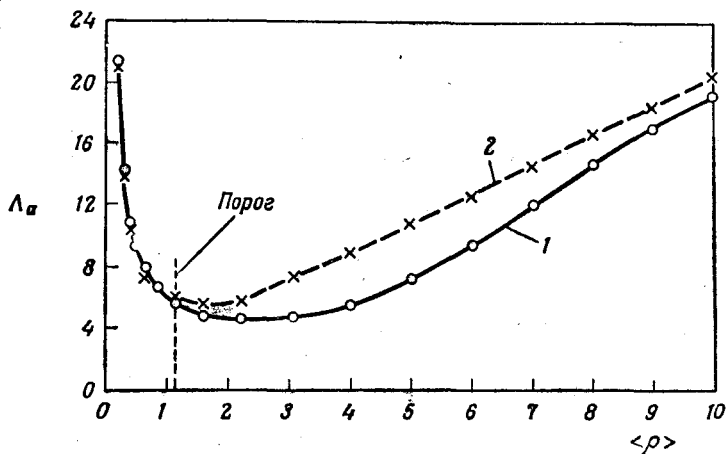
тогда как в квазилинейном приближении [26]

$$\Delta\phi \approx \frac{1}{\langle \rho \rangle}. \quad (1.2.2)$$

Эти выражения различаются множителем 2. Подчеркнем, что оба эти выражения правильны: формула (1.2.1) для области ниже, а (1.2.2) — выше порога возбуждения. На фиг. 1.1 приведена (см. [6]) зависимость $\Delta\phi$ от $\langle \rho \rangle$, а также показано плавное изменение

величины $\Lambda_{\phi}(\rho)$ от 2 до 1 при прохождении через пороговую мощность из области гораздо ниже пороговой в область гораздо выше пороговой.

8. На фиг. 1.2 показана зависимость от $\langle \rho \rangle$ лоренцевой ширины линий Λ_a , соответствующей спектру флуктуаций интенсивности (1.1.2). Очевидно, что и строгий



Фиг. 1.2. Полуширина спектра флуктуаций амплитуды.
1 — точный расчет, 2 — приближенная теория.

расчет, проведенный в работе [6], и квазилинейное приближение приводят к минимуму величины Λ_a вблизи порога возбуждения.

9. Изображенные на фиг. 1.1 и 1.2 точные значения величин Λ_{ϕ} и Λ_a получены в работе [6] (см. здесь гл. 7) с помощью численного решения уравнения Фоккера — Планка для осциллятора Ван дер Поля при наличии шумов. В работах [5, 6] приведены соображения, показывающие, что вблизи порога возбуждения любые осцилляторы адекватно описываются осцилляторами Ван дер Поля. Вдали от порога возбуждения эти осцилляторы могут быть исследованы в квазилинейном приближении. В результате квантовомеханические осцилляторы, использованные в качестве модели лазера, не отличаются от классических.

10. На основе приведенных выше соображений можно было бы заключить, что даже при исследовании проблемы шума лазер можно рассматривать как классическую систему. В частности, это могло быть обусловлено тем, что число излученных фотонов даже вблизи порога возбуждения намного больше единицы. Тем не менее желательно провести наши расчеты на квантовомеханическом уровне. Хотя $\langle b^+(0)b^+(t)b(t)b(0) \rangle$ и $\langle b^+(t)b(t)b^+(0)b(0) \rangle$ для высоких рабочих уровней пропорциональны $\langle b^+b \rangle^2$, при вычитании $\langle b^+b \rangle^2$ из каждого из этих выражений второе (флуктуации числа фотонов) будет возрастать как $\langle b^+b \rangle$ для больших чисел фотонов, а первое (флуктуации интенсивности) — стремиться к насыщению. Следовательно, эти две классически неразличимые величины могут иметь разные квантовомеханические значения даже для столь больших $\langle b^+b \rangle$, когда среднее электромагнитное поле правильно описывается классической механикой.

2. ОБЗОР ПРИМЕНЯЕМЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В этой книге используется специальный математический аппарат, который, как мы считаем, удобен при рассмотрении явлений когерентности и шумов. Данная глава содержит обзор основных математических методов, и в тех случаях, где это необходимо, приведены без доказательства некоторые результаты, которые будут доказаны позже.

2.1. СВЯЗЬ КВАНТОВЫХ И КЛАССИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Используя перестановочные соотношения, оператор $M(bb^+)$ всегда можно привести к нормальному виду, когда все (b^+) находятся левее всех (b) :

$$M(b, b^+) = M^{(n)}(b, b^+). \quad (2.1.1)$$

Например, $bb^+ = b^+b + 1$.

Теперь можно установить соответствие между оператором $M(b, b^+)$ и классической функцией $M^{(n)}(\beta, \beta^*)$ (где β и β^* — c -числа) посредством введения оператора \mathcal{N} нормального упорядочения¹⁾:

$$M(b, b^+) = \mathcal{N}M^{(n)}(\beta, \beta^*) \equiv \mathcal{N}\bar{M}^{(n)}(\beta, \beta^*). \quad (2.1.2)$$

Здесь в операторах, приведенных к нормальному виду, b заменено на β , b^+ — на β^* ; черта над $\bar{M}^{(n)}$ поставлена для того, чтобы подчеркнуть классический характер функции $\bar{M}^{(n)}(\beta, \beta^*)$.

В приложении D к работе [11] мы, следуя Луиселлу и Уолкеру [28], нашли классический аналог $\rho^{(n)}(\beta, \beta^*, t)$ квантовой матрицы плотности $\rho(b, b^+, t)$. Более удобное

¹⁾ Подробнее см. гл. 9 и 11 данной книги, а также гл. 3 книги [27].

соотношение получено в [16]:

$$\rho(b, b^+, t) = \mathcal{A}\rho^{(a)}(\beta, \beta^*, t) = \pi \mathcal{A}P(\beta, \beta^*, t), \quad (2.1.3)$$

причем действие оператора антинормального упорядочения \mathcal{A} сводится к замене β на b , β^* на b^+ и приведению получаемого оператора к антинормальному виду.

Важность преобразований (2.1.3) и (2.1.4) следует из соотношения [см. (1.1.2)]

$$\text{Sp} M\rho = \int M^{(a)}(\beta, \beta^*) P(\beta, \beta^*, t) d^2\beta, \quad (2.1.4)$$

где $d^2\beta \equiv d \text{Re} \beta d \text{Im} \beta$. Другими словами, если мы хотим найти средние значения нормально упорядоченных операторов типа (1.1.1) или (1.1.2), необходимо пользоваться антинормально упорядоченной матрицей плотности. Более того, счетчики фотонов, которые поглощают фотоны (нулевое показание соответствует вакууму), должны быть нормально упорядочены.

Множитель π , связывающий функции $P(\beta)$ и $\rho^{(a)}(\beta)$, введен для упрощения выражения (2.1.4), а также в связи с тем, что функция $P(\beta) \equiv P(\beta, \beta^*)$ совпадает с диагональной весовой функцией Глаубера [21, 29] и Сударшана [30].

Благодаря соотношению (2.1.4) (и в этом его значении) мы рассматриваем $P(\beta, \beta^*, t)$ как функцию распределения классического случайного процесса. Менее очевидно, что если мы хотим оценить выражение $\langle b^+(t)b(0) \rangle$ или $\langle b^+(0)b^+(t)b(t)b(0) \rangle$, то вполне корректно будет воспользоваться оценкой выражения $\langle \beta\beta^*(t) \rangle$ и $\langle |\beta(t)|^2 |\beta(0)|^2 \rangle$ для соответствующего классического случайного процесса. Это доказано¹⁾ в гл. 11 данной книги и в работе [18]. Мы покажем, что сравнительно просто получить уравнение для величины $\partial P(\beta, \beta^*, t)/\partial t$ (хотя при этом и приходится привлечь некоторые дополнительные соображения).

¹⁾ Подобное соотношение получено Манделем и Вольфом [31], но лишь для случая свободного электромагнитного поля, в то время как наш вывод относится к полю, взаимодействующему с излучающим атомом или с произвольным тепловым резервуаром.

Это уравнение, однако, приходится решать на счетной машине (подробнее см. [6, 7]).

Таким образом, мы пришли к поразительному результату: квантовую проблему когерентности нетрудно свести к классической.

В то же время сама классическая задача далеко не тривиальна. и была решена совсем недавно [32].

2.2. ПЕРЕМЕННЫЕ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧЕ

ПОЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Предположим, что мазерные и лазерные поля описываются набором нормальных мод с амплитудами b_λ , удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[b_\lambda, b_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (2.2.1)$$

В этих лекциях мы для простоты ограничимся лишь случаем одночастотного лазера. Тогда имеется лишь одна переменная, и, опустив индексы, мы перепишем перестановочное соотношение в виде

$$[b, b^\dagger] = 1. \quad (2.2.2)$$

ОДИН АТОМ

Пусть атом характеризует набор энергетических уровней. Оператор $a_i^\dagger a_j$ соответствует переходу атома с уровня j на уровень i . Сумма вероятностей нахождения атома в каком-либо из состояний j , очевидно, равна единице:

$$\sum_j a_j^\dagger a_j = 1. \quad (2.2.3)$$

В представлении вторичного квантования оператор A можно следующим образом выразить через его матричные элементы A_{ij} :

$$A = \sum_{i,j} A_{ij} a_i^\dagger a_j; \quad A_{ij} = (\varphi_i, A \varphi_j). \quad (2.2.4)$$

Точно так же, другой оператор B записывается в виде

$$B = \sum_{k,l} B_{kl} a_k^+ a_l \quad (2.2.5)$$

В работе [9] проведен подробный анализ представления вторичного квантования и доказана лемма

$$a_i^+ a_j a_k^+ a_l = \delta_{j,k} a_i^+ a_l \quad (2.2.6)$$

Эта лемма непосредственно следует из того факта, что нельзя уничтожить частицу в данном состоянии, если она в нем не находится. Чтобы проверить это соотношение, опустим общий (справа и слева) оператор a_i^+ и выясним действие оставшегося оператора в равенстве (2.2.6) на состояние $|s\rangle$, которое соответствует нахождению атома на s -м уровне. Таким образом, мы можем записать

$$a_j a_k^+ a_l |s\rangle = a_j a_k^+ \delta_{l,s} |0\rangle = \delta_{l,s} a_j |k\rangle = \delta_{j,k} \delta_{l,s} |0\rangle = \delta_{j,k} a_l |s\rangle \quad (2.2.7)$$

Поскольку мы доказали выполнимость операторного соотношения (2.2.6) для произвольного состояния s , оно выполняется также для любой линейной комбинации таких состояний и поэтому является операторным тождеством. Воспользовавшись указанной леммой, мы находим, что произведение двух операторов

$$AB = \sum_{\substack{i,j \\ k,l}} A_{ij} B_{kl} a_i^+ a_j a_k^+ a_l = \sum_{\substack{i,j \\ k,l}} A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} a_i^+ a_l = \sum_{i,l} (AB)_{il} a_i^+ a_l \quad (2.2.8)$$

соответствует произведению их матричных элементов.

МНОГО АТОМОВ

Для случая многих атомов удобно ввести в качестве операторов средние величины, приходящиеся на один атом (позеим их индексом M):

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum (a_i^+ a_j)_M \quad (2.2.9)$$

Очевидно, что для этих усредненных переменных тождество (2.2.6) несправедливо:

$$\sigma_{ij}\sigma_{k,l} \neq \delta_{j,k}\sigma_{i,l}. \quad (2.2.10)$$

Операторы σ имеют простой смысл. Диагональные элементы определяют населенность данного уровня, а недиагональные соответствуют электрическому моменту при переходе из одного состояния в другое:

$$N\sigma_{ii} = N_i \text{ — полная населенность } i\text{-го уровня,} \\ \sigma_{ij} \text{ — дипольный момент, связанный с} \quad (2.2.11) \\ \text{переходом } i\text{-го состояния в } j\text{-е.}$$

ПЕРЕМЕННЫЕ НАШЕЙ ЗАДАЧИ

Так как мы в первую очередь интересуемся двухуровневыми системами, будем описывать задачу о лазере шестью переменными:

$$b, b^+, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21} = \{a\}, \quad (2.2.12)$$

где символом a обозначены все шесть переменных a_μ ($\mu = 1, 2, \dots, 6$).

2.3. ВЕКТОРЫ СМЕЩЕНИЯ И ДИФFUЗНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Компонентами вектора смещения для случайного процесса являются величины

$$A_\mu(a) \equiv D_\mu(a, t) \equiv \frac{1}{\Delta t} \langle \Delta a_\mu \rangle, \quad (2.3.1)$$

где

$$\Delta a_\mu \equiv a_\mu(t + \Delta t) - a_\mu(t) \quad (2.3.2)$$

означает изменение переменной a_μ за малый интервал времени Δt . Ясно, что для чисто марковского процесса подразумевается предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$. Для процесса, близкого к марковскому, предполагается, что малое Δt все-таки достаточно велико по сравнению с временем единичного столкновения. При таком определении Δt можно записать матрицу коэффициентов диффузии в виде

$$2! D_{\mu\nu}(a, t) \equiv \frac{1}{\Delta t} \langle \Delta a_\mu \Delta a_\nu \rangle, \quad (2.3.3)$$

а диффузионные постоянные более высокого порядка в виде

$$3! D_{\mu\nu\lambda}(a, t) \equiv \frac{1}{\Delta t} \langle \Delta a_\mu \Delta a_\nu \Delta a_\lambda \rangle \quad (2.3.4)$$

и т. д.

Приведенные соотношения предполагают определенный порядок сомножителей, поэтому такие определения векторов смещения и диффузионных постоянных применимы как к классическому, так и к квантовомеханическому случаям. Уравнения движения для усредненного оператора a_μ имеет вид

$$\frac{d \langle a_\mu \rangle}{dt} = \langle A_\mu(a, t) \rangle. \quad (2.3.5)$$

Воспользовавшись алгебраическим тождеством

$$\begin{aligned} a_\mu(t + \Delta t) a_\nu(t + \Delta t) - a_\mu(t) a_\nu(t) = \\ = \Delta a_\mu \Delta a_\nu + \Delta a_\mu a_\nu + a_\mu \Delta a_\nu, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

получим уравнение движения для вторых моментов

$$\frac{d \langle a_\mu(t) a_\nu(t) \rangle}{dt} = 2 \langle D_{\mu\nu} \rangle + \langle A_\mu a_\nu \rangle + \langle a_\mu A_\nu \rangle. \quad (2.3.7)$$

Это уравнение в равной степени справедливо и для классического, и для квантовомеханического оператора a_μ . Единственное различие состоит в том, что в квантовомеханическом случае

$$D_{\mu\nu} \neq D_{\nu\mu}. \quad (2.3.8)$$

2.4. ДИССИПАТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АТОМОВ

И ПОЛЯ, НЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МЕЖДУ СОБОЙ

Будем теперь считать без доказательства, что взаимодействие совокупности атомов с резервуаром (фононами в твердом теле или другими атомами в газе) индуцирует переходы между энергетическими уровнями этих атомов, причем скорость переходов описывается обычными уравнениями Паули:

$$\frac{d \langle a_i^+ a_i \rangle}{dt} = -\Gamma_i \langle a_i^+ a_i \rangle + \sum_{k \neq i} w_{ik} \langle a_k^+ a_k \rangle, \quad (2.4.1)$$

где первый член определяет полную скорость затухания для i -го уровня, а второй член — полную скорость перехода на уровень i со всех других уровней k .

Недиагональные элементы подчиняются более простому уравнению

$$\frac{d\langle a_i^+ a_j \rangle}{dt} = (i\omega_{ij} - \Gamma_{ij}) \langle a_i^+ a_j \rangle, \quad (2.4.2)$$

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j, \quad \Gamma_{ij} \geq \frac{1}{2} (\Gamma_i + \Gamma_j). \quad (2.4.3)$$

Поле, взаимодействующее с поглощающим резервуаром (например, со стенками микроволновой полости), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\langle b \rangle}{dt} = - \left(i\omega_c + \frac{\gamma}{2} \right) \langle b \rangle \quad (2.4.4)$$

и эрмитово-сопряженному уравнению. Эти результаты, полученные пока чисто интуитивно, строго вытекают из уравнения движения (12.1.28) для средних значений оператора всей системы при учете взаимодействия с резервуаром.

Подробный вывод уравнений (2.4.4), (2.4.1) и (2.4.2) приведен соответственно в гл. 13 и 14.

Радиационное взаимодействие между атомами и полем обсуждается в разд. 2.6, а его оценка дается в гл. 3.

2.5. ЛАНЖЕВЕНОВСКИЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Для рассмотрения флуктуаций недостаточно знать лишь усредненное уравнение движения. По Ланжевону, уравнение движения (2.3.5) следует дополнить членом, учитывающим источник шума F_μ :

$$\frac{da_\mu}{dt} = A_\mu(\mathbf{a}) + F_\mu(\mathbf{a}, t), \quad (2.5.1)$$

причем для того, чтобы обеспечить соответствие с формулой (2.3.5), среднее значение F_μ должно равняться нулю:

$$\langle F_\mu(\mathbf{a}, t) \rangle = 0. \quad (2.5.2)$$

Если уравнение Ланжевена описывает марковский процесс, т. е. процесс с нулевой «памятью», можно ожидать, что второй момент для функции F_μ имеет вид дельта-функции. (Доказательство см. в разд. 8 работы [4], разд. 7 Токийских лекций автора [20], для квантового случая — в разд. 2 работы [11].)

Таким образом, мы примем, что

$$\langle F_\mu[\mathbf{a}(t), t] F_\nu[\mathbf{a}(t'), t'] \rangle = 2 \langle D_{\mu\nu}(\mathbf{a}, t) \rangle \delta(t - t'). \quad (2.5.3)$$

Коэффициент в (2.5.3) становится полностью определенным, если следующим образом задать матрицу коэффициентов диффузии:

$$2D_{\mu\nu} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta a_\mu \Delta a_\nu \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} du dv \langle F_\mu(u) F_\nu(v) \rangle. \quad (2.5.4)$$

Второе равенство в (2.5.4) следует из первого, если отбросить члены, исчезающие в пределе $\Delta t \rightarrow 0$. Подстановка (2.5.3) в подинтегральное выражение (2.5.4) дает правильное значение матрицы коэффициентов диффузии.

Поскольку эта матрица играет определяющую роль в теории шумов, желательно иметь простое выражение для ее оценки. Из определения $D_{\mu\nu}$ видно, что необходимо прежде всего иметь оценки для флуктуаций Δa_μ и Δa_ν , обусловленных резервуаром. Однако, поскольку известно уравнение движения для усредненных операторов, учитывающее диссипативную роль резервуара [см. уравнение (12.1.28)], то удобнее разрешить уравнение (2.3.7) относительно $D_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} 2 \langle D_{\mu\nu} \rangle &= \frac{d \langle a_\mu a_\nu \rangle}{dt} - \langle A_\mu a_\nu \rangle - \langle a_\mu A_\nu \rangle = \\ &= \frac{d \langle a_\mu a_\nu \rangle}{dt} - \left\langle \left\{ \frac{da_\mu}{dt} \right\} a_\nu \right\rangle - \left\langle a_\mu \left\{ \frac{da_\nu}{dt} \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

где введена величина

$$\left\{ \frac{da_\mu}{dt} \right\} = A_\mu. \quad (2.5.6)$$

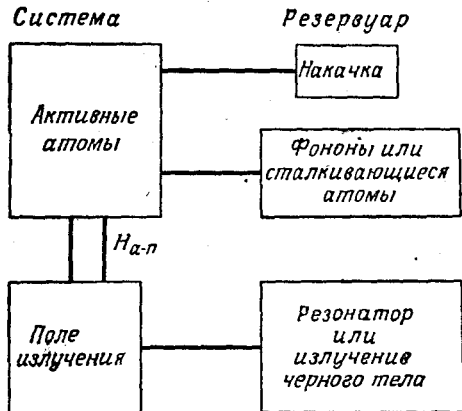
Видно, что $2D_{\mu\nu}$ показывает, насколько нарушено правило дифференцирования произведения. Тот факт, что

при расчете $D_{\mu\nu}$ необходимо лишь знание уравнения движения для средних операторов a_{μ} , a_{ν} и $a_{\mu}a_{\nu}$ без непосредственного расчета флуктуации, является серьезным преимуществом «обобщенного соотношения Эйнштейна» (2.5.5).

Преимущество ланжевеновского описания случайных процессов заключается в том, что оно дает возможность без труда получить полезные приближенные результаты в квазилинейном случае. Затем можно для изучения спектра шумов использовать точное выражение (1.13) из работы [3] и ввести понятие эквивалентных токов. Конечно, при наличии неустойчивой фазы все переменные, кроме тех, которые соответствуют этой фазе, можно рассматривать в квазилинейном приближении.

2.6. МОДЕЛЬ МАЗЕРА

Обычная модель лазера показана на фиг. 2.1. Активные атомы взаимодействуют с двумя независимыми



Фиг. 2.1.

резервуарами: системой накачки и системой фононов для твердотельного лазера или системой сталкивающихся атомов для газового лазера. Резервуар («черное тело»), который взаимодействует с полем излучения, несуществен для лазера, но важен для микроволнового лазера,

Отметим, что система фононов не взаимодействует с полем излучения, а «черное тело» — с атомами. Если существуют какие-либо случайные силы, действующие на атомы (F_a) и на поле (F_n), то можно предположить, что эти силы нескоррелированы, т. е.

$$\langle F_a F_n \rangle = 0. \quad (2.6.1)$$

Если теперь описать взаимодействие атомов с полем посредством гамильтониана взаимодействия H_{a-n} типа электрических дипольных взаимодействий, то уравнение для db/dt содержит добавочный член $[b, H_{a-n}]/i\hbar$, а в уравнении для атомного дипольного момента добавляется член $[a_1^+ a_2, H_{a-n}]/i\hbar$. Разумно предположить, что независимость соответствующих случайных сил при этом не затронута. Это утверждение «почти очевидно», но оно все же доказывается в разд. 5 работы [11] и здесь в гл. 15.

Будем предполагать, что источники шума имеют гауссову природу. Для замкнутой полости это, очевидно, является очень хорошим приближением, поскольку поле излучения взаимодействует с огромным числом атомов, и тогда, следуя центральной предельной теореме теории вероятности, можно сделать вывод о гауссовом характере полного излучения черного тела.

Для отдельных атомов эти силы, разумеется, описываются не гауссовым распределением, а скорее распределением Пуассона. Однако мы интересуемся не поведением отдельных атомов, а лишь средним поведением всего ансамбля активных атомов. Поэтому для полного отклика большого числа активных атомов рассмотрение соответствующей случайной силы как гауссовой снова является хорошим приближением. (Негауссовы поправочные члены, найденные в [17], оказываются малыми, когда число возбужденных атомов велико.)

Мы видели, что при расчете флуктуаций можно исходить из уравнений движения для средних величин. Возникает, таким образом, задача получения таких уравнений для атомов и для поля при учете связывающего эти уравнения радиационного взаимодействия. Это будет сделано в следующей главе.

2.7. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Обычно применяемые квазилинейные методы расчета становятся неприменимыми вблизи порога возбуждения лазера. В этом случае уравнение Ланжевена для марковского процесса может быть заменено уравнением Фоккера — Планка для плотности вероятности $P(\mathbf{a}, t)$:

$$\frac{\partial P(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial a_{\mu}} [A_{\mu}(\mathbf{a}) P] + \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu}} [D_{\mu\nu}(\mathbf{a}) P] \quad (2.7.1)$$

(членами более высокого порядка $D_{\mu\nu\lambda}$ и др. можно пренебречь, если источники шума характеризуются гауссовым распределением, как это предполагалось в разд. 2.6). Подробный вывод и обсуждение уравнения Фоккера — Планка (2.7.1) даны в гл. 5 и 8. Здесь мы лишь отметим, что это уравнение может быть сразу написано, если известен вектор смещения $A_{\mu}(\mathbf{a})$ и матрица коэффициентов диффузии $D_{\mu\nu}(\mathbf{a})$.

Поскольку производная $\partial^2 / \partial a_{\mu} \partial a_{\nu}$ симметрична относительно перестановки индексов μ и ν , уравнение (2.7.1) зависит от $D_{\mu\nu} + D_{\nu\mu}$, а не от $D_{\mu\nu} - D_{\nu\mu}$. Эта разность, однако, определяется коммутатором

$$2(D_{\mu\nu} - D_{\nu\mu}) = \langle [\Delta a_{\mu}, \Delta a_{\nu}] \rangle / \Delta t, \quad (2.7.2)$$

содержащим определенную квантовомеханическую информацию. Каким же образом классическое уравнение Фоккера — Планка может описывать квантовомеханическую систему?

В случае электромагнитного поля весовая функция $P(\beta, \beta^*, t)$, определенная в (2.1.3) через матрицу плотности, подчиняется следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\beta, \beta^*, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial \beta} [A_{\beta} P] - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [A_{\beta^*} P] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [D_{\beta\beta} P] + \frac{\partial^2}{\partial \beta^{*2}} [D_{\beta^*\beta^*} P] + 2 \frac{\partial}{\partial \beta^* \partial \beta} [D_{\beta^*\beta} P], \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

где

$$A_{\beta} = \frac{\langle \Delta b \rangle}{\Delta t}, \quad 2D_{\beta\beta} = \frac{\langle \Delta b \Delta b \rangle}{dt}, \quad (2.7.4)$$

$$2D_{\beta^*\beta} = \frac{\langle \Delta b^+ \Delta b \rangle}{\Delta t} = 2\bar{D}_{b^+b}.$$

Специфика квантового случая состоит в том, что уравнение не зависит от

$$2\bar{D}_{bb^+} = \frac{\langle \Delta b \Delta b^+ \rangle}{\Delta t} \neq 2D_{\beta^*\beta}, \quad (2.7.5)$$

т. е.

$$\bar{D}_{b^+b} + \bar{D}_{bb^+} \rightarrow 2\bar{D}_{b^+b}. \quad (2.7.6)$$

Далее будет показано [см. (17.7.21)], как этот результат естественно получается при выводе квантового уравнения Фоккера — Планка.

2.8. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Хотя для газового лазера основной интерес представляет уравнение Фоккера — Планка вида (2.7.3), мы начнем со случая большего числа переменных. Например, в гл. 17 выводится уравнение для $P(\beta, \beta^*, N_1, N_2, t)$ (где $N_i = N\sigma_{ii}$ — полная населенность уровня i), которое описывает корреляцию между полем и флуктуациями населенности уровней атомов. Такой расчет окажется существенным для твердотельного лазера. В случае газового лазера затухание для атомов настолько больше, чем для поля, что населенности мгновенно следуют за полем. При этом населенности уровней следует исключить с помощью адиабатического приближения (приближения Борна — Оппенгеймера). Это легко сделать, исходя из уравнения Ланжевена.

Для трехуровневого лазера, показанного на фиг. 2.2, уравнение для населенности нижнего уровня имеет вид

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = -\Gamma_1\sigma_{11} + \omega_{10}\sigma_{00} + \omega_{12}\sigma_{22} + B + F_{11}, \quad (2.8.1)$$

где B — радиационная скорость переходов, определенная в гл. 3, а F_{11} — соответствующая ланжевенская

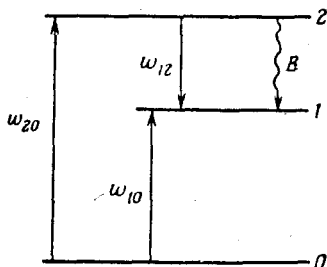
сила. Если $\Gamma_1 \gg \gamma$ (γ — скорость затухания поля), то $\frac{d\sigma_{11}}{dt} \sim \gamma\sigma_{11} < \Gamma_1\sigma_{11}$, и в уравнении (2.8.1) можно положить

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} \approx 0, \quad (2.8.2)$$

т. е. в адиабатическом приближении

$$\sigma_{11} = (\omega_{10}\sigma_{00} + \omega_{12}\sigma_{22} + B + F_{11})/\Gamma_1. \quad (2.8.3)$$

Подстановка (2.8.3) и аналогичного выражения для σ_{22} в уравнения для поля приводит не только к измене-



Ф и г. 2.2.

нию векторов смещения для поля, но и к появлению случайных сил типа F_{11}/Γ_1 , изменяющих диффузионные постоянные $D_{\beta\beta}$ и т. д.

2.9. ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ

Исключив методом адиабатического приближения все переменные, относящиеся к атомам, приведем уравнение для полевых переменных к виду

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta E + F_{\beta}. \quad (2.9.1)$$

Аналогично записывается уравнение, комплексно сопряженное к (2.9.1). Входящая в эти уравнения величина E равна

$$E = \frac{\text{const}}{10^8 + |\beta|^2} - \text{const}. \quad (2.9.2)$$

Вблизи порога возбуждения $|\beta|^2 \sim (10^8)^{1/2} \sim 10^4$, поэтому можно разложить E в ряд по степеням $|\beta|^2$ и получить волновое уравнение Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} \gamma \beta (\Pi - R_0 |\beta|^2) + F_\beta, \quad (2.9.3)$$

где Π и R_0 зависят от параметров затухания.

Можно, кроме того, вместо β и t ввести безразмерную длину a и время τ :

$$\beta = \xi a, \quad t = T\tau \quad (2.9.4)$$

и выбрать нормировочные параметры ξ и T так, чтобы переменные a и a^* удовлетворяли уравнению

$$\frac{da}{d\tau} = (p - |a|^2) a + h(\tau), \quad (2.9.5)$$

где

$$\begin{aligned} \langle h(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle h^*(\tau) h(\tau') \rangle &= 4\delta(\tau - \tau'), \\ \langle h(\tau) h(\tau') \rangle &= \langle h^*(\tau) h^*(\tau') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

а единственный параметр p был пропорционален разности между данной скоростью накачки и скоростью, обеспечивающей работу лазера.

2.10. СПЕКТР ОБЕЗРАЗМЕРЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ВОЛН ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ

УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Уравнение Фоккера — Планка, соответствующее ланжевеновскому процессу (2.9.5), имеет простой вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial a} [(p - |a|^2) a P] - \\ & - \frac{\partial}{\partial a^*} [(p - |a|^2) a^* P] + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial a^* \partial a}. \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

Безразмерная переменная τ , введенная в предыдущем разделе, будет здесь обозначаться буквой t . Запишем

переменную a через амплитудную и фазовую переменные

$$a = r \exp(-i\varphi). \quad (2.10.2)$$

Тогда уравнение Фоккера — Планка примет следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = H_r P + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2}, \quad (2.10.3)$$

где оператор H_r определяется равенством

$$H_r P \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(r^3 - pr - \frac{1}{r} \right) P \right] + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}. \quad (2.10.4)$$

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Будем искать решения, зависящие от времени по простому экспоненциальному закону

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\Lambda P. \quad (2.10.5)$$

Можно предположить, что решения имеют вид

$$P = \exp(-\Lambda_{\lambda, n} t) \exp(i\lambda\varphi) \hat{R}_n(r; \lambda), \quad (2.10.6)$$

где \hat{R}_n являются собственными функциями уравнения

$$\left(H_r - \frac{\lambda^2}{r^2} \right) \hat{R}_n(r, \lambda) = -\Lambda_{\lambda, n} \hat{R}_n(r, \lambda). \quad (2.10.7)$$

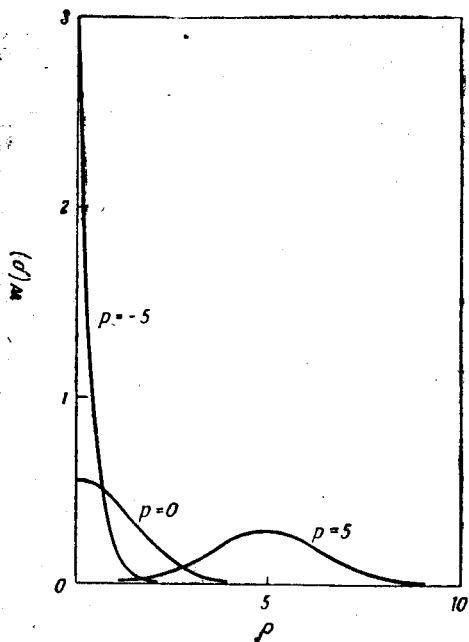
Основное или устойчивое состояние ($\lambda = 0$, $n = 0$, $\Lambda_{\lambda, n} = 0$) является выделенным — для него можно сразу написать точное решение:

$$P_{00}(r) = r \exp\left(-\frac{r^4}{4} + \frac{pr^2}{2}\right) / \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{r^4}{4} + \frac{pr^2}{2}\right) dr. \quad (2.10.8)$$

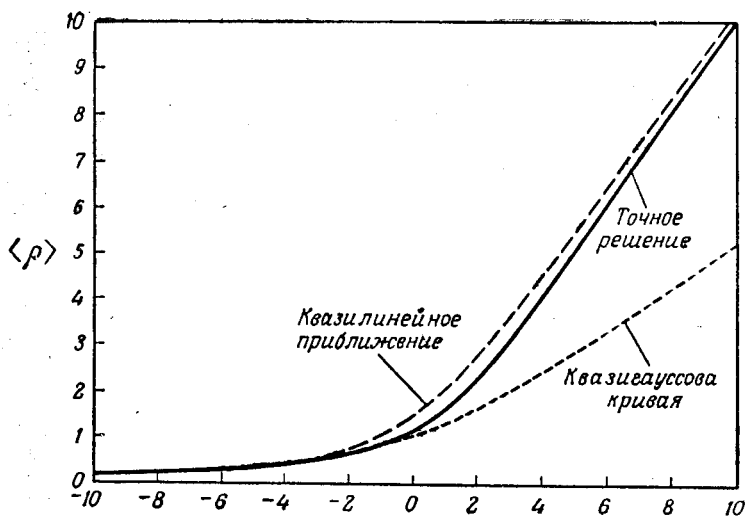
Для нормированного основного состояния получаем «обрезанное» гауссово распределение с центром в точке $\rho = p$ (фиг. 2.3):

$$W(\rho) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} p\rho - \frac{1}{4} \rho^2\right)}{\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2} p\rho - \frac{1}{4} \rho^2\right) d\rho}. \quad (2.10.9)$$

Здесь введено обозначение $\rho = r^2$.



Фиг. 2.3.



Фиг. 2.4.

Точное выражение для среднего числа фотонов пропорционально величине

$$\bar{\rho} = \langle \rho \rangle = \int_0^{\infty} \rho W(\rho) d\rho, \quad (2.10.10)$$

которая изображена на фиг. 2.4 как функция от параметра накачки ρ .

Теперь нетрудно получить спектр флуктуаций (1.1.1) (см. гл. 7 и работу [6]), который представляет собой сумму лоренцевых кривых с ширинами $\Lambda_{l, n}$. Определяющим в этой сумме является член наимизшего порядка, так что ширина спектра по существу равна $\Lambda_{l, 0} = \Lambda_p$. Этот результат и приведен на фиг. 1.1.

Спектр флуктуаций интенсивности (1.1.2) выражается суммой лоренцевых кривых с ширинами $\Lambda_{0, n}$, среди которых преобладает Λ_a (см. фиг. 1.2).

2.11. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ДРУГИМИ ИССЛЕДОВАТЕЛЯМИ

Лэмб и Скали [33] рассчитали матрицу плотности для системы поле + атомы, исключив с самого начала атомы с помощью адиабатического приближения. При этом они сразу получили уравнение для величины $\frac{\partial \rho(b, b^+)}{\partial t}$ без промежуточного результата, эквивалентного нашему уравнению для $\frac{\partial P(\beta, \beta^*, N_1, N_2)}{\partial t}$, которое удобно при изучении твердотельных лазеров. Если наше уравнение для функции $\frac{\partial P(\beta, \beta^*)}{\partial t}$ преобразовать в уравнение для матрицы плотности $\frac{\partial \rho_{m, n}}{\partial t}$, мы получим полное совпадение (см., например, [17]) с соответствующими уравнениями Лэмба и Скали.

Наше уравнение для $P(\beta)$ легче решать, чем уравнение Лэмба — Скали для $\rho_{m, n}$, поскольку наш способ введения безразмерных переменных приводит к появлению лишь одного безразмерного параметра. Поэтому нам не приходится иметь дело с матрицами высоких порядков. Кроме того, наша процедура непосредственно

приспособлена для вычисления всех обычно исследуемых спектров: спектра флуктуаций (1.1.1), спектра флуктуаций интенсивности (1.1.2) и распределения фототока. Однако для вычисления флуктуаций числа фотонов удобнее работать в представлении числа фотонов $\rho_{m, n}$.

Хакен с соавторами [34] использовал квантовый метод Ланжевена, подобный нашему. Однако в дальнейшем [35] они работали с классическим уравнением Фоккера — Планка, пренебрегая коммутационными соотношениями (2.7.2). При этом вблизи порога возбуждения можно пользоваться представлением об осцилляторе Ван дер Поля, но соответствующие параметры оказываются не вполне точными. Это обстоятельство, конечно, маскируется введением безразмерных переменных, так что сравнение вариационных оценок Рискина [32] для безразмерных величин Λ_p и Λ_a с нашими оценками дает хорошее, хотя и неполное согласие. В работе [6] мы рассчитали величины $\Lambda_{\lambda, n}$ и для $\lambda = 1, n = 0 \div 9$, и для $\lambda = 0, n = 1 \div 10$ с тем, чтобы получить более точные оценки, чем при использовании лишь наинизшей моды. Рискин [36] проделал такую же работу для четырех наинизших мод и получил результаты, прекрасно согласующиеся с нашими.

В заключение отметим, что, по-видимому, нет никаких противоречий между анализом шумов и явлений когерентности для мазеров. Наша работа представляет собой мост между исследованиями Лэмба — Скали и Хакена.

3. СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАЗЕРОВ И ЛАЗЕРОВ

3.1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ АТОМОМ И ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ

В этом разделе рассматриваются вопросы, исследованные в гл. 6 работы [11] и в неопубликованной рукописи [13].

Мы уже ввели уравнения для вероятностей атомных переходов и в модели гармонического осциллятора — для моды электромагнитного поля в резонаторе. Теперь необходимо ввести взаимодействие атом — поле, которое в случае электромагнитного взаимодействия имеет простой вид $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$. Это взаимодействие в представлении вторичного квантования сводится к

$$H_{\text{п-а}} = \hbar \mu (a_2^+ a_1 + a_1^+ a_2) i (b^+ - b), \quad (3.1.1)$$

где μ — константа взаимодействия, пропорциональная дипольному моменту атома, поделенному — для нормировки — на квадратный корень из объема. Множитель $i(b^+ - b)$ соответствует электрическому полю в резонаторе, $(b + b^+)$ — магнитному полю. Член $\mu a_2^+ a_1$ определяет вероятность перехода атомного момента «вверх», а $\mu a_1^+ a_2$ — «вниз».

В ходе вычислений мы будем использовать приближение волн вращающейся поляризации (rotating wave approximation, RWA). Оно состоит в удержании секулярных членов и отбрасывании всех членов, приводящих к появлению удвоенной частоты. В этом приближении мы получаем (полагая $E_2 > E_1$)

$$H_{\text{п-а}} \approx i \hbar \mu (b^+ a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1 b), \quad (3.1.2)$$

где опущено, например, произведение функций a_2^+ и b^+ , соответствующее переходам с положительной частотой. (Если $E_1 > E_2$, в рассматриваемом приближении следует удержать другие члены в $H_{\text{п-а}}$.)

К членам, уже встречавшимся в уравнениях движения (2.4.1) — (2.4.4), мы должны теперь добавить слабые, связанные с радиационным взаимодействием, например,

$$\left(\frac{db}{dt}\right)_{\text{рад}} = \frac{1}{i\hbar} [b, H_{\text{п-а}}] = \mu a_1^+ a_2. \quad (3.1.3)$$

Это уравнение показывает, что атомный дипольный момент стремится создать поле излучения.

Аналогично этому уравнения

$$\left(\frac{da_1^+ a_2}{dt}\right)_{\text{рад}} = \frac{1}{i\hbar} [a_1^+ a_2, H_{\text{п-а}}] = \mu b D \quad (3.1.4)$$

описывают появление момента $a_1^+ a_2$ в поле b . Здесь через

$$D \equiv a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1 \quad (3.1.5)$$

обозначена разность населенностей. Из уравнений

$$\left(\frac{da_1^+ a_1}{dt}\right)_{\text{рад}} = \mu (a_1^+ a_2 b^+ + a_2^+ a_1 b) \equiv B, \quad (3.1.6)$$

$$\left(\frac{da_2^+ a_2}{dt}\right)_{\text{рад}} = -B \quad (3.1.7)$$

видно, что B имеет смысл скорости излучательного перехода с уровня 2 на уровень 1.

До сих пор речь шла лишь об одном атоме. Для системы идентичных атомов, обозначенных индексом M , радиационное взаимодействие можно записать в виде

$$H_{\text{п-а}} = i\hbar\mu \sum_M [b^+ (a_1^+ a_2)_M - (a_2^+ a_1)_M b]. \quad (3.1.8)$$

3.2. МОДЕЛЬ МАЗЕРА БЕЗ ИСТОЧНИКОВ ШУМА

Полное уравнение для $\frac{db}{dt}$ в пренебрежении источниками шума имеет вид

$$\frac{db}{dt} = -\left(i\omega_c + \frac{1}{2}\gamma\right)b + \mu \sum_M (a_1^+ a_2)_M \quad (3.2.1)$$

и включает в дополнение к уравнению (2.4.4) также и радиационное взаимодействие (3.1.3). Таким образом,

полный дипольный момент индуцирует поле амплитуды b и частоты ω_c . Уравнение (3.2.1) и последующие уравнения этого раздела взяты из гл. 6 работы [11].

Если включить источники шума, уравнение (3.2.1) следует рассматривать как операторное. В приведенном выше виде это уравнение по существу связывает средние величины $\langle b \rangle$ и $\langle (a_1^+ a_2)_M \rangle$. Для упрощения обозначений мы не будем повсюду ставить значок усреднения, однако будем подразумевать, что все операторы, встречающиеся в этом разделе, b , b^+ , $a_1^+ a_2$, D и т. д., являются c -числами, описывающими усредненное движение для лазера. Поправки к этому (хорошему) приближению будут сделаны позже, когда будет рассматриваться строгая квантовая теория с учетом источников шума. Заметим, что квантовомеханическое рассмотрение без учета источников шума, вообще говоря, непоследовательно. Например, если считать уравнение (2.4.4) операторным уравнением, можно переписать его в виде

$$\frac{d[b, b^+]}{dt} = -\gamma [b, b^+],$$

т. е. операторы b и b^+ со временем превращаются в коммутирующие операторы. Учет шумов не изменит этого результата, если рассмотренные операторы коммутируют с оператором, соответствующим источникам шума (этому моменту придавал большое значение Сеницкий [37]). Только введение некоммутирующих источников шума, как это показано в работе [11], может обеспечить выполнение правил коммутации.

Вернемся теперь к уравнению (2.4.2) для атомного момента и добавим к нему радиационный член (3.1.4); тогда получим

$$\frac{d(a_1^+ a_2)_M}{dt} = -(\Gamma_{12}^M + i\omega^M)(a_1^+ a_2)_M + \mu b D^M, \quad (3.2.2)$$

где ω^M — разность частот для M -го атома;

$$\omega^M = \omega_2^M - \omega_1^M.$$

Наконец, из уравнений (2.4.1) и (3.1.7) находим

$$\frac{d(a_2^+ a_2)_M}{dt} = \omega_{20}(a_0^+ a_0)_M + \omega_{21}(a_1^+ a_1)_M - \Gamma_2(a_2^+ a_2)_M - B^M. \quad (3.2.3)$$

Поскольку на каждый атом приходится лишь один (активный) электрон, то

$$(a_0^+ a_0 + a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2)_M = 1. \quad (3.2.4)$$

Определим σ_{jj} — среднюю населенность j -го состояния:

$$\sigma_{jj} \equiv \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N (a_j^+ a_j)_M. \quad (3.2.5)$$

Разность средних заселенностей равна

$$D \equiv \sigma_{22} - \sigma_{11}. \quad (3.2.6)$$

В разд. 3.9 — 3.11 мы рассмотрим неоднородный случай, из которого однородный случай будет получаться в пределе, когда все ω^M равны ω_a .

Удобно определить усредненный оператор перехода «вниз» следующим образом:

$$\sigma \equiv \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N (a_1^+ a_2)_M e^{i\omega_0 t}, \quad (3.2.7)$$

где добавлен экспонент $e^{i\omega_0 t}$ для компенсации множителя в $a_1^+ a_2$, содержащего отрицательную частоту. Эта компенсация будет почти полной, если выбрать в качестве ω_0 пока неизвестную рабочую частоту мазера.

Подобным же образом введем

$$b' \equiv b e^{i\omega_0 t}, \quad (3.2.8)$$

так чтобы b' и σ были медленно меняющимися величинами. Далее для удобства штрихи опускаются. В дальнейшем будем иметь в виду, что частоты во всех b сдвинуты.

Итак, средняя скорость излучения B равна

$$B \equiv \frac{1}{N} \sum_M B^M = \mu (b^+ \sigma + \sigma^+ b). \quad (3.2.9)$$

Типичное уравнение для населенностей записывается теперь в форме

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = \omega_{20}\sigma_{00} + \omega_{21}\sigma_{11} - \Gamma_2\sigma_{22} - B, \quad (3.2.10)$$

где $\omega_{20}\sigma_{00}$ — скорость накачки из основного состояния на верхний уровень, $\Gamma_2\sigma_{22}$ — усредненная полная скорость затухания для верхнего уровня, а B — средняя скорость затухания, связанная с излучательным переходом с верхнего уровня на нижний. Точно так же

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = \omega_{10}\sigma_{00} + \omega_{12}\sigma_{22} - \Gamma_1\sigma_{11} + B. \quad (3.2.11)$$

Уравнение для медленно меняющейся функции $\frac{db}{dt}$ сводится теперь к следующему:

$$\frac{db}{dt} = - \left[\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) \right] b + N\mu\sigma. \quad (3.2.12)$$

Введем в равенство (3.2.4) множитель $d = 1$:

$$\sigma_{00} = 1 - d(\sigma_{11} + \sigma_{22}),$$

для того чтобы выделить члены, связанные с истощением основного уровня, часто опускаемые. Используем последнее равенство для исключения σ_{00} из уравнений (3.2.10) и (3.2.11). Благодаря предполагаемой однородности системы все атомы имеют одинаковые разность частот ω_a и скорость затухания Γ :

$$\omega^M \equiv \omega_a, \quad \Gamma_{1,2}^M \equiv \Gamma, \quad (3.2.13)$$

поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = - [\Gamma + i(\omega_a - \omega_0)]\sigma + \mu bD. \quad (3.2.14)$$

Теперь у нас есть шесть уравнений: (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12), (3.2.14) и сопряженные к (3.2.12) и (3.2.14), а также шесть неизвестных: σ_{22} , σ_{11} , b , b^+ , σ , σ^+ .

Далее мы добавим шумы, но прежде всего нужно посмотреть, описывают ли эти уравнения усредненное движение самовозбуждающегося осциллятора.

3.3. УСЛОВИЯ СТАЦИОНАРНОСТИ

Будем искать стационарное решение системы из шести уравнений, положив все производные по времени равными нулю. Это означает, что все населенности постоянны, а относительно начальных значений переменных b и $a_1^+ a_2$ предполагается, что они изменяются по простому экспоненциальному закону $e^{-i\omega_0 t}$; переменные b^+ и $a_1^+ a_2$ изменяются по закону $e^{i\omega_0 t}$. Такое решение существует, если система из шести нелинейных алгебраических уравнений совместна. Введем следующее обозначение для таких решений: $b_0, b_0^*, \sigma_0, \sigma_0^*, (\sigma_{11})_0$ и $(\sigma_{22})_0$, где индекс 0 соответствует стационарной рабочей точке. Если система первоначально находилась в этом состоянии, то равенство нулю производной по времени означает, что система и дальше будет оставаться в этом же состоянии в отсутствие флуктуаций¹⁾.

Для начала приравняем нулю левую часть уравнения (3.2.12):

$$0 = \frac{db}{dt} = - \left[\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) \right] b_0 + N\mu\sigma_0. \quad (3.3.1)$$

Разрешим это уравнение относительно b_0 и подставим полученное выражение в (3.2.14):

$$0 = \frac{d\sigma}{dt} = - [\Gamma + i(\omega_a - \omega_0)] \sigma_0 + D_0 R(\omega_0) \sigma_0, \quad (3.3.2)$$

где

$$R(\omega_0) \equiv N\mu^2 / \left[\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) \right]. \quad (3.3.3)$$

Первый член в правой части (3.3.2) соответствует атомному рассеянию (положительное сопротивление), в то время как второй член обусловлен наличием

¹⁾ Вопрос о том, может ли система оставаться в данном состоянии и при наличии флуктуаций, будет рассматриваться в разд. 3.4.

положительной обратной связи с полем излучения (отрицательное сопротивление). В рабочей точке эти члены компенсируют друг друга. Поделим равенство (3.3.2) на σ_0 и, разделив действительную и мнимую части, определим рабочий уровень D_0 и рабочую частоту осциллятора ω_0 :

$$D_0 = \Gamma / \operatorname{Re} [R(\omega_0)], \quad (3.3.4)$$

$$\omega_a = \omega_0 = D_0 \operatorname{Im} [R(\omega_0)]. \quad (3.3.5)$$

Найдем явный вид D_0 и ω_0 , умножив (3.3.2) на знаменатель выражения $R(\omega_0)$:

$$(\omega_a - \omega_0) / \Gamma = (\omega_0 - \omega_c) / \frac{1}{2} \gamma = \frac{\omega_a - \omega_c}{\frac{1}{2} \gamma + \Gamma} \equiv \alpha, \quad (3.3.6)$$

$$\omega_0 = \left(\frac{1}{2} \gamma \omega_a + \Gamma \omega_c \right) / \left(\frac{1}{2} \gamma + \Gamma \right). \quad (3.3.7)$$

$$D_0 = \frac{\frac{1}{2} \gamma \Gamma}{N \mu^2} (1 + \alpha^2). \quad (3.3.8)$$

Рабочая частота ω_0 является взвешенным средним значением атомной частоты и частоты резонансной полости; статистическим весом для каждой частоты является затухание другой частоты; частота ω_0 не зависит от рабочего уровня. Это простой результат представляет собой пример «линейного увлечения» частоты. В более сложных случаях ω_0 будет зависеть от рабочего уровня.

Подчеркнем разумность получившегося значения разности населенностей D_0 . Увеличение либо атомной, либо фотонной постоянных затухания приводит (для обеспечения работы лазера) к необходимости увеличения инверсной населенности. При увеличении либо атомного дипольного момента, либо числа активных атомов необходимо уменьшить инверсную населенность. Наконец, α является мерой расстройки; при наличии расстройки требуется большая инверсная населенность для генерирования. Для того чтобы выяснить, как велика должна быть скорость накачки для обеспечения данной инверсной населенности, мы должны рассмотреть еще два уравнения, содержащие населенности σ_{11} и σ_{22} . Из

уравнений (3.2.10) и (3.2.11) имеем

$$0 = \frac{d\sigma_{22}}{dt} = (\omega_{20} - \Gamma'_2 \sigma_{22} + \omega'_{21} \sigma_{11}) - B_0, \quad (3.3.9)$$

$$0 = \frac{d\sigma_{11}}{dt} = (\omega_{10} - \Gamma'_1 \sigma_{11} + \omega'_{12} \sigma_{22}) + B_0, \quad (3.3.10)$$

где

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_1 + d\omega_{10}, \quad \omega'_{21} \equiv \omega_{21} - d\omega_{20}, \quad (3.3.11)$$

$$\Gamma'_2 \equiv \Gamma_2 + d\omega_{20}, \quad \omega'_{12} \equiv \omega_{12} - d\omega_{10},$$

так что штрихованные и нештрихованные величины неотличимы друг от друга, если пренебречь истощением уровней. Здесь B_0 — стационарное значение B . Из уравнений (3.3.9) и (3.3.10) можно определить полную разность населенностей D :

$$\sigma_{11} = \frac{\omega'_{12}(B_0 - \omega_{20}) - \Gamma'_2(B_0 + \omega_{10})}{\omega'_{12}\omega'_{21} - \Gamma'_1\Gamma'_2}, \quad D = D_w - \frac{1}{r(0)} B_0, \quad (3.3.12)$$

где

$$D_w \equiv \frac{\Gamma'_1\omega_{20} - \Gamma'_2\omega_{10} - \omega'_{12}\omega_{20} + \omega'_{21}\omega_{10}}{-\omega'_{12}\omega'_{21} + \Gamma'_1\Gamma'_2}, \quad (3.3.13)$$

$$r(0) \equiv \frac{\Gamma'_1\Gamma'_2 - \omega'_{12}\omega'_{21}}{\Gamma'_1 + \Gamma'_2 - \omega'_{12} - \omega'_{21}}. \quad (3.3.14)$$

Здесь D_w — разность населенностей, вызванная накачкой в отсутствие поля излучения, а D меньше D_w на поправочный член $B_0/r(0)$, связанный с полем излучения.

Из (3.2.9) найдем теперь скорость излучательного перехода с уровня 2 на уровень 1:

$$NB_0 = N\mu(b_0^+ \sigma_0 + b_0 \sigma_0^+) = \gamma |b_0|^2. \quad (3.3.15)$$

При получении выражения (3.3.15) мы воспользовались равенством (3.3.1) и комплексно-сопряженным к нему. Выражение (3.3.15) вполне разумно, так как $|b_0|^2$ — число фотонов, а коэффициент γ характеризует исчезновение фотонов. В стационарном состоянии скорость эмиссии фотонов излучающими атомами должна быть равна скорости фотонов, уходящих из системы.

Исключая B_0 из (3.3.15) и (3.3.12) и используя (3.3.8), получим

$$|b_0|^2 = \frac{r(0)}{\pi} \left(\frac{D_w}{D_0} - 1 \right), \quad \pi \equiv \frac{\gamma}{ND_0} = \frac{2\mu^2}{\Gamma(1 + \alpha^2)}. \quad (3.3.16)$$

Таким образом, число имеющихся фотонов пропорционально разности населенностей, обусловленной накачкой, поделенной на минимальную разность населенностей при пороге возбуждения, минус единица. Величину $\frac{D_w}{D_0}$ называют, следуя Лэмбу [24], относительным возбуждением. Выражение для D_w (разности населенностей, индуцированной накачкой в отсутствие излучения) зависит от деталей релаксационного механизма, но $|b_0|^2$ всегда пропорционально «избыточному» возбуждению $\left(\frac{D_w}{D_0} - 1\right)$.

Для того чтобы возбуждение системы оказалось выше порогового, согласно (3.3.16), должно выполняться неравенство $D_w > D_0$. Положив для простоты $\omega_{10} = 0$, определим минимальную скорость накачки:

$$\omega_{20} \geq D_0 \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}}{\Gamma_1 - \omega_{12} - d(\Gamma_1 + \omega_{12}) D_0}. \quad (3.3.17)$$

Чтобы удовлетворить этому условию при некоторой конечной скорости накачки, необходимо благодаря эффекту «истощения» ($d=1$) потребовать выполнения условий

$$D_0 \leq \frac{\Gamma_1 - \omega_{12}}{\Gamma_1 + \omega_{12}} \quad (3.3.18)$$

или

$$N \geq N_m \equiv \frac{\gamma}{\pi} \frac{\Gamma_1 + \omega_{12}}{\Gamma_1 - \omega_{12}}, \quad (3.3.19)$$

т. е., для того чтобы лазер генерировал, необходимо наличие минимального числа атомов N_m при произвольной мощности накачки. Если $N \gg N_m$, то $D_0 \ll 1$; и можно пренебречь слагаемыми, характеризующими «истощение» (они в выражении (3.3.17) и в других местах умножены на d). Из табл. 3.1 видно, что обычно условие $N \gg N_m$ легко удовлетворяется, поэтому в дальнейшем мы будем для простоты пренебрегать «истощением».

Таблица 3.1

Типичные параметры лазера
(по Мак-Камберу [38])

Тип лазера	Газовый	Твердотельный	Твердотельный дiodный
$\Gamma_2, \text{с}^{-1}$	10^8	10^3	10^9
$\pi, \text{с}^{-1}$	10^{-1}	10^{-6}	10^6
$\gamma, \text{с}^{-1}$	10^7	10^9	10^{11}
γ/π	10^8	10^{15}	10^6

Поступая таким образом, можно упростить выражение для числа фотонов:

$$\gamma |b_0|^2 = \frac{N\omega_{20}(\Gamma_1 - \omega_{12}) - \frac{\gamma}{\pi}(\Gamma_1\Gamma_2 - \omega_{12}\omega_{21})}{\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{12} - \omega_{21}}. \quad (3.3.20)$$

Если предположить, что вероятности кросс-переходов ω_{12} и ω_{21} малы по сравнению с полными величинами Γ_1 и Γ_2 , то

$$\gamma |b_0|^2 \simeq \frac{\Gamma_1 \left(N\omega_{20} - \frac{\Gamma_2\gamma}{\pi} \right)}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (3.3.21)$$

Выше порога возбуждения $|b_0|^2 > 0$, и поэтому, используя (3.3.16), приходим к необходимости выполнения неравенства

$$R_2 \equiv N\omega_{20} > \frac{\Gamma_2\gamma}{\pi} = \Gamma_2 N D_0. \quad (3.3.22)$$

В этом случае населенности определяются следующими выражениями:

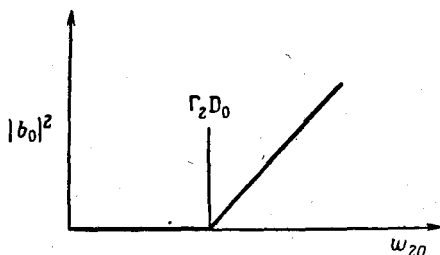
$$N_1 \approx \left(R_2 - \frac{\gamma\Gamma_2}{\pi} \right) / (\Gamma_2 + \Gamma_1), \quad (3.3.23)$$

$$N_2 \approx \left(R_2 + \frac{\gamma\Gamma_1}{\pi} \right) / (\Gamma_2 + \Gamma_1). \quad (3.3.24)$$

Итак, ω_{20} должно быть больше, чем $\Gamma_2 D_0$: для достижения порога генерации уровень 2 должен заселяться быстрее, чем опустошаться.

Начало генерации при критическом значении ω_{20} нельзя описать аналитически, оно похоже на фазовый

переход. На фиг. 3.1 показана зависимость числа фотонов от скорости накачки. Число фотонов равно нулю, пока ω_{20} не достигнет критической величины, после чего



Фиг. 3.1.

оно линейно возрастает. Такое поведение очень напоминает неаналитичность при фазовом переходе. При учете шума такого рода неаналитичность исчезнет (см. гл. 17).

3.4. УСТОЙЧИВОСТЬ

Вернемся теперь к системе из шести зависящих от времени уравнений [(3.2.10) — (3.2.12), (3.2.14)] с целью исследовать поведение системы атом — поля во времени, а также ее устойчивость. Удобнее перейти от комплексных переменных к действительным. Пусть

$$b = b_0 e^{i\mu - i\varphi}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{x - i\theta}, \quad (3.4.1)$$

где стационарные величины b_0 и σ_0 определены в разд. 3.2.

Подставляя (3.4.1) и (3.3.6) в уравнение (3.2.12), найдем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & -\frac{\gamma}{2} [1 - e^{x-u} \cos(\varphi - \theta)] + \\ & + \frac{1}{2} \gamma \alpha e^{x-u} \sin(\varphi - \theta), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & -\frac{1}{2} \gamma e^{x-u} \sin(\varphi - \theta) - \\ & - \frac{1}{2} \gamma \alpha [1 - e^{x-u} \cos(\varphi - \theta)]. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Аналогично, подставляя (3.3.3) в (3.2.14), получим

$$\frac{dx}{dt} = -\Gamma \left[1 - \frac{D}{D_0} e^{u-x} \cos(\varphi - \theta) \right] + \\ + \Gamma \alpha \frac{D}{D_0} e^{u-x} \sin(\varphi - \theta), \quad (3.4.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Gamma \alpha \left[1 - \frac{D}{D_0} e^{u-x} \cos(\varphi - \theta) \right] + \\ + \Gamma \frac{D}{D_0} e^{u-x} \sin(\varphi - \theta). \quad (3.4.5)$$

Наконец, из (3.2.9) следует

$$NB = \gamma |b_0|^2 [\cos(\varphi - \theta) + \alpha \sin(\varphi - \theta)] e^{x-u} \equiv \\ \equiv \gamma |b_0|^2 + N \Delta B. \quad (3.4.6)$$

Эта система уравнений (при учете σ_{11} и σ_{22}) имеет большое число неустойчивых решений, например при $u = x = \Delta\sigma_{11} = \Delta\sigma_{22} = 0$, а $\varphi = \theta$ — произвольные постоянные. Более детальное исследование устойчивости можно провести в предположении о том, что флуктуации амплитуд малы и что мала разность фаз $\varphi - \theta$, хотя каждая фаза в отдельности не обязательно мала. Линеаризуя систему уравнений (3.4.2) — (3.4.6), получаем

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma (u - x) + \frac{1}{2} \gamma \alpha (\varphi - \theta), \quad (3.4.7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma (\varphi - \theta) - \frac{1}{2} \gamma \alpha (u - x), \quad (3.4.8)$$

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma \frac{\Delta D}{D_0} - \Gamma (u - x) + \alpha \Gamma (\varphi - \theta), \quad (3.4.9)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma \alpha \frac{\Delta D}{D_0} + \Gamma \alpha (u - x) + \Gamma (\varphi - \theta), \quad (3.4.10)$$

$$N \Delta B = \gamma |b_0|^2 [(x + u) + \alpha (\varphi - \theta)], \quad (3.4.11)$$

$$\Delta D = D - D_0. \quad (3.4.12)$$

Функции $\Delta\sigma_{11}$ и $\Delta\sigma_{22}$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и σ_{11} и σ_{22} , в которых, однако, опущены члены, связанные с накачкой, и B заменено на ΔB .

Обычный метод исследования устойчивости состоит в том, что полагают $\frac{du}{dt} = -su$, $\frac{d\varphi}{dt} = -s\varphi$ и т. д.,

затем приравнивают нулю появляющийся при этом секулярный детерминант и находят шесть корней для s . Данная мода устойчива при $\text{Re}(s) > 0$, неустойчива при $\text{Re}(s) < 0$ или находится в безразличном равновесии при $\text{Re}(s) = 0$. Возникающий полином шестой степени содержит s в виде множителя. Поэтому мы находим, как и следовало ожидать, что одна мода находится в безразличном равновесии, а оставшиеся пять мод устойчивы.

В случае идеальной настройки $\alpha = 0$ фазовые и амплитудные флуктуации независимы. Секулярные уравнения для φ и θ и детерминант этой системы равны соответственно

$$\left(s - \frac{1}{2}\gamma\right)\varphi + \frac{1}{2}\gamma\theta = 0, \quad \Gamma\varphi + (s - \Gamma)\theta = 0, \quad (3.4.13)$$

$$\begin{vmatrix} s - \frac{1}{2}\gamma & \frac{1}{2}\gamma \\ \Gamma & s - \Gamma \end{vmatrix} = s^2 - \left(\frac{1}{2}\gamma + \Gamma\right)s = 0. \quad (3.4.14)$$

Корень $s = 0$ соответствует нестабильному смещению $\varphi = \theta$, корень $s = \frac{1}{2}\gamma + \Gamma$ — устойчивому смещению, для которого $\Gamma\varphi + \frac{1}{2}\gamma\theta = 0$. Эти моды являются в сущности правыми собственными векторами матрицы затухания

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\gamma & \frac{1}{2}\gamma \\ \Gamma & -\Gamma \end{bmatrix}.$$

Благодаря неэрмитовости матрицы ее левые собственные векторы отличаются от правых. Используя левые собственные векторы, найдем преобразования к новым переменным, для которых уравнения движения оказываются простыми:

$$\frac{d(\varphi - \theta)}{dt} = -\left(\frac{1}{2}\gamma + \Gamma\right)(\varphi - \theta), \quad (3.4.15)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \psi \equiv \left(\Gamma\varphi + \frac{1}{2}\gamma\theta\right) / \left(\Gamma + \frac{1}{2}\gamma\right). \quad (3.4.16)$$

Таким образом, неустойчивое смещение $\varphi = \theta$ связано

$$\text{с переменной } \psi = \frac{\Gamma\varphi + \frac{1}{2}\gamma\theta}{\Gamma + \frac{1}{2}\gamma}, \text{ а не с } \frac{1}{2}(\varphi + \theta).$$

Существование одной неустойчивой моды полезно для нашего описания. Рабочая точка b_0 была выбрана так, чтобы положительное и отрицательное сопротивления компенсировали друг друга и чтобы в результате ширина линии мазера равнялась нулю. Добавление шума к устойчивой нелинейной системе прибавило бы фон, но не изменило бы дельтаобразного спектра сигнала. Благодаря наличию неустойчивого состояния учет шума приводит к уширению спектральной линии; дельтаобразная линия заменится лоренцевой с конечной шириной. Ланжевенский подход дает возможность естественно описать такой процесс уширения линии, исходя из броуновского движения или из диффузии фазы, описываемой неустойчивой переменной ψ .

Так как зависимость переменных u и x от населенностей σ_{11} и σ_{22} определяется только величиной D , удобно левые части уравнений для $\frac{d\sigma_{11}}{dt}$ и $\frac{d\sigma_{22}}{dt}$ заменить соответственно на $\lambda\theta_{11}$ и $\lambda\sigma_{22}$ и разрешить их относительно σ_{11} , σ_{22} (а значит, и D), выразив эти переменные через параметры накачки и B . Результат таких алгебраических преобразований уже был приведен [см. (3.3.12) — (3.3.14)]; здесь мы лишь сделаем замены $\Gamma'_2 \rightarrow \Gamma'_2 + \lambda$, $\Gamma'_1 \rightarrow \Gamma'_1 + \lambda$ и запишем

$$D = D_w - \frac{1}{r(\lambda)} B, \quad (3.4.17)$$

$$\frac{1}{r(\lambda)} = \frac{\Gamma_1 - \omega_{21} + \lambda + \Gamma_2 - \omega_{12} + \lambda}{\Gamma_1\Gamma_2 - \omega_{12}\omega_{21} + (\Gamma_1 + \Gamma_2)\lambda + \lambda^2}, \quad (3.4.18)$$

где $\lambda \equiv \frac{d}{dt} = -s$. Поскольку члены, связанные с накачкой, не зависят от времени, мы получим нуль, если подействуем на них оператором λ . Величина D_w не меняется [см. (3.3.13)]. Штрихи у Γ_1 , ω_{21} и т. д. в (3.4.18) опущены, так как мы пренебрегли «истощением».

Сложный вид функции $r(\lambda)$ связан с наличием двух времен релаксации в выражении, связывающем D и B .

Только наименьшее из них следует определить экспериментально. «Медленный» отклик можно выделить из $r(\lambda)$, разложив его в степенной ряд и оставив два первых члена ряда:

$$r(\lambda) = r(0) \left(1 + \frac{\lambda}{\Lambda} \right), \quad (3.4.19)$$

где

$$\Lambda = \frac{(\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}) (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{12} - \omega_{21})}{(\Gamma_1 + \Gamma_2) (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{12} - \omega_{21}) - 2 (\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21})}. \quad (3.4.20)$$

Пренебрегая ω_{12} и ω_{21} , получим простые выражения

$$r(0) = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad \Lambda = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}. \quad (3.4.21)$$

Тогда, если еще положить $\omega_{10} = 0$,

$$D_\omega = \frac{\omega_{20}}{\Gamma_2}. \quad (3.4.22)$$

Приближение (3.4.19) для $r(\lambda)$ эквивалентно записи уравнения (3.4.17) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right) D &= \\ &= \left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right) D_\omega - \frac{\Lambda}{r(0)} B = \Lambda D_\omega - \frac{\Lambda}{r(0)} B. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Из равенства (3.4.6) в случае квазилинейной настройки имеем

$$NB = \gamma |b_0|^2 (1 + x + u). \quad (3.4.24)$$

Комбинируя (3.4.23) и (3.4.24) и вводя для удобства обозначение $\frac{\Delta D}{D_0} = \frac{D - D_0}{D_0}$, получим

$$\left(\frac{d}{dt} + \Lambda \right) \frac{\Delta D}{D_0} = -\Lambda \left(\frac{D_\omega}{D_0} - 1 \right) (x + u). \quad (3.4.25)$$

Уравнения (3.4.7) и (3.4.10) приводятся к виду

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma (u - x), \quad \frac{dx}{dt} = \Gamma \frac{\Delta D}{D_0} - \Gamma (u - x). \quad (3.4.26)$$

Для исследования амплитудной устойчивости рассмотрим уравнения (3.4.25) и (3.4.26).

Если $\gamma \gg \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, что справедливо для твердотельных лазеров, один корень λ окажется порядка γ . Меньшие по величине корни можно определить, заметив, что для такого медленного движения

$$\frac{du}{dt} \ll \gamma u, \quad u = \left[\frac{1}{2} \gamma / \left(\frac{1}{2} \gamma + \frac{d}{dt} \right) \right] x \approx x,$$

т. е. в адиабатическом приближении амплитуда поля изменяется достаточно быстро для того, чтобы следовать за мгновенным изменением амплитуды поляризации. Рассмотрим теперь два уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma \frac{\Delta D}{D_0}, \quad (3.4.27)$$

$$\frac{d\left(\frac{\Delta D}{D_0}\right)}{dt} = -\Lambda \frac{\Delta D}{D_0} - 2\Lambda \left(\frac{D\omega}{D_0} - 1\right) x. \quad (3.4.28)$$

Записав $(-s)$ вместо $\frac{d}{dt}$, получим два алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} sx + \Gamma \frac{\Delta D}{D_0} &= 0, \\ -2\Lambda \left(\frac{D\omega}{D_0} - 1\right) x + (s - \Lambda) \frac{\Delta D}{D_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Нетривиальные решения системы уравнений (3.4.29) существуют при

$$s = \frac{1}{2} \Lambda \pm \left[\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 - 2\Lambda \Gamma \left(\frac{D\omega}{D_0} - 1\right) \right]^{1/2}. \quad (3.4.30)$$

Эти значения s соответствуют двум самым медленно затухающим модам. Они устойчивы, так как $\text{Re}(s) > 0$. Если бы оказалось, что подкоренное выражение отрицательно, т. е. s — комплексно, то решение было бы осциллирующим, затухающим, стремящимся к стационарному состоянию. Мнимой части s будет соответствовать «пичок» частоты, величина которого согласуется с расчетами Мак-Камбера [38], Клейнмана [39] и автора [14]. Однако с помощью такого затухающего осциллятора нельзя удовлетворительно объяснить множество пичков, наблюдаемых во многих лазерах.

3.5. ШИРОКИЕ АТОМНЫЕ ЛИНИИ

До сих пор мы видели, как проявляется пик в линейной задаче. Можно провести полный нелинейный анализ приближения к стационарному состоянию для различных соотношений между характерными (постоянными) скоростями.

Рассмотрим сначала случай широких атомных линий $\Gamma \gg \gamma$, $\frac{d\sigma}{dt} \ll \Gamma\sigma$. Тогда из (3.2.14) получим

$$\sigma = \mu b D / \Gamma (1 - i\alpha). \quad (3.5.1)$$

Другими словами, предполагается, что постоянная времени для σ больше, чем для всех других величин, так как σ сразу подстраивается под все изменения величины bD .

Подставляя (3.5.1) в выражения (3.2.12) для b и используя (3.3.8), получим

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \gamma (1 - i\alpha) b \frac{\Delta D}{D_0}. \quad (3.5.2)$$

Для того чтобы найти полную скорость излучения B , необходимо учесть выражения (3.2.9), (3.3.16) и (3.5.1), что дает

$$B = \pi |b|^2 D, \quad \pi \equiv \frac{2\mu^2}{\Gamma(1 + \alpha^2)}. \quad (3.5.3)$$

Пропорциональность скорости излучения числу фотонов и разности населенностей — вполне разумный результат. В то же время известно, что B в действительности пропорционально не $|b|^2$, а $(|b|^2 + 1)$. Появление единицы связано со спонтанным излучением — когда позже будет учтен шум, то единица появится автоматически. Величина π представляет собой просто постоянную скорость излучения.

3.6. ГАЗОВЫЙ ЛАЗЕР

Газовый лазер представляет собой дальнейшую конкретизацию уже рассмотренного случая: надо считать не только $\Gamma \gg \gamma$, но и $\Gamma_1, \Gamma_2 \gg \gamma$. Следует теперь в уравнениях (3.2.10) и (3.2.11) положить $\frac{d\sigma_{11}}{dt} \approx \frac{d\sigma_{22}}{dt} \approx 0$ и решить эти уравнения относительно σ_{11} и σ_{22} .

Пренебрегая истощением и полагая $\omega_{12} \approx \omega_{21} \approx 0$, получаем для D

$$D = \sigma_{22} - \sigma_{11} = \frac{\omega_{20}}{\Gamma_2} - \left(\frac{1}{\Gamma_2} - \frac{1}{\Gamma_1} \right) B, \quad (3.6.1)$$

что согласуется с формулами (3.4.21) и (3.4.22). Чтобы получить рабочую точку лазера, исключим B из выражений (3.6.1) и (3.5.3):

$$D = \frac{D_0}{1 + \pi |b|^2 / r(0)}. \quad (3.6.2)$$

Однако $r(0)$ всегда порядка Γ_1 или Γ_2 , т. е. около 10^8 , в то время как π порядка единицы. Подставляя (3.6.2) в (3.5.2), получаем уравнение для b :

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \gamma (1 - i\alpha) \frac{\omega_{20} b}{D_0} \cdot \frac{1}{\Gamma_2 + \left(1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) |b|^2 \pi} - \frac{D_0}{\omega_{20}}. \quad (3.6.3)$$

Согласно табл. 3.1, $\frac{\Gamma_2}{\pi} \sim 10^8$, а среднее число фотонов $\langle |b|^2 \rangle$ вблизи порога, согласно формуле (6.5) работы [14], порядка $\left(\frac{\Gamma_2}{\pi}\right)^{1/2}$. Поэтому всюду, начиная от области значительно ниже порога и вплоть до величины 10^4 выше порога, можно разложить знаменатель в ряд, что дает

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2} (1 - i\alpha) N \omega_{20} \frac{\pi^2 b}{\Gamma_2^2} \left(1 + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}\right) (|b|^2 - |b_0|^2). \quad (3.6.4)$$

Величина

$$|b_0|^2 \equiv \left(\frac{\Gamma_1}{\gamma} N \omega_{20} - \frac{\Gamma_2 \gamma}{\pi} \right) / (\Gamma_1 + \Gamma_2) \quad (3.6.5)$$

может быть отрицательной, но, будучи положительной, она представляет собой, согласно (3.3.21), число фотонов $|b_0|^2$ в рабочей точке. При этом наше уравнение сводится к

$$\frac{db}{dt} = C b (\Pi - |b|^2) \quad (3.6.6)$$

— приближению волн вращающейся поляризации для осциллятора Ван дер Поля (RWVP). Это уравнение проще, чем исходное уравнение для осциллятора Ван дер Поля, которое содержит слагаемое b^3 и поэтому

смешивает три частоты, давая в решении все нечетные степени ω_0 . Наоборот, решение нашего уравнения не просто периодическое, но и синусоидальное. Разумеется, мы свели уравнение к виду (3.6.6), используя некоторые приближения. При этом совершается ошибка порядка $1/\Omega_{рез}^2$, где типичные значения $\Omega_{рез} \sim 500$.

3.7. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СКОРОСТЕЙ

Вернемся к случаю широкой линии $\Gamma \gg \gamma$, ω_{12} , ω_{21} . Предположим далее, что переходы с нижнего уровня происходят гораздо быстрее, чем с верхнего ($\Gamma_1 \gg \Gamma_2$), так что разность населенностей совпадает с населенностью верхнего уровня. В то же время соотношение между Γ_2 и γ может быть произвольным. В этих предположениях исключим все переменные, кроме разности населенностей и числа фотонов. Из уравнений (3.2.2) для b и b^+ получим

$$\begin{aligned} \frac{d|b|^2}{dt} &= -\gamma|b|^2 + N\mu(b^+\sigma + b\sigma^+) = \\ &= -\gamma|b|^2 + NB. \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Из (3.2.14) и (3.3.16) можно в случае пренебрежения величиной $\frac{d\sigma}{dt}$ исключить σ , что приводит к

$$\frac{d|b|^2}{dt} = \pi|b|^2 ND - \gamma|b|^2. \quad (3.7.2)$$

Полагая в уравнении (3.2.10) $\sigma_{22} \approx D$ и $\sigma_{11} \approx 0$, находим

$$\frac{d(ND)}{dt} = N\omega_{20} - \Gamma_2 ND - \pi|b|^2 ND. \quad (3.7.3)$$

Скорость увеличения числа фотонов равна числу излученных фотонов минус потери на границах. Единственным результатом учета шума будет замена $|b|^2$ на $|b|^2 + 1$.

3.8. ПИКИ ФАЗЫ

Посмотрим теперь, как эти уравнения для скорости приводят к появлению пиков на графике изменения фазы во времени. Из (3.4.1) имеем

$$|b|^2 = |b_0|^2 e^{2u}. \quad (3.8.1)$$

Разделив почленно уравнение (3.7.2) на $|b|^2$ и используя (3.3.16), получим

$$\frac{d(2u)}{dt} = -\gamma + \pi ND = \gamma \frac{\Delta D}{D_0}. \quad (3.8.2)$$

Деление уравнения (3.7.3) на ND_0 дает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta D}{D_0} \right) = \frac{\omega_{20}}{D_0} - \Gamma_2 \frac{D}{D_0} - \pi |b|^2 \frac{D}{D_0} = \quad (3.8.3)$$

$$= -\pi |b_0|^2 (e^{2u} - 1) - (\Gamma_2 + \pi |b_0|^2 e^{2u}) \frac{\Delta D}{D_0}. \quad (3.8.4)$$

Если бы мы использовали для величины ΔD адиабатическое приближение, предполагая, что ΔD следует за полем, то не было бы пиков фазы. Они возникают из-за того, что разность населенностей не следует мгновенно за изменениями поля.

Уравнение движения похоже на уравнение для нелинейного осциллятора. Условие (3.8.2) $\frac{du}{dt} \sim \frac{\Delta D}{D_0}$ похоже на пропорциональность импульса и производной от смещения по времени, а выражение (3.8.4) — на равенство производной от импульса по времени некоторой функции координат и импульсов.

Чтобы обезразмерить уравнения (3.8.2) и (3.8.4), положим

$$t \equiv \frac{\tau}{\Gamma_2}, \quad p \equiv \frac{\gamma \Delta D}{2\Gamma_2 D_0}. \quad (3.8.5)$$

Пренебрегая величиной $\pi |b_0|^2 \exp(2u)$ по сравнению с Γ_2 , получим

$$\frac{du}{d\tau} = p, \quad \frac{dp}{d\tau} = -p - A(e^{2u} - 1), \quad (3.8.6)$$

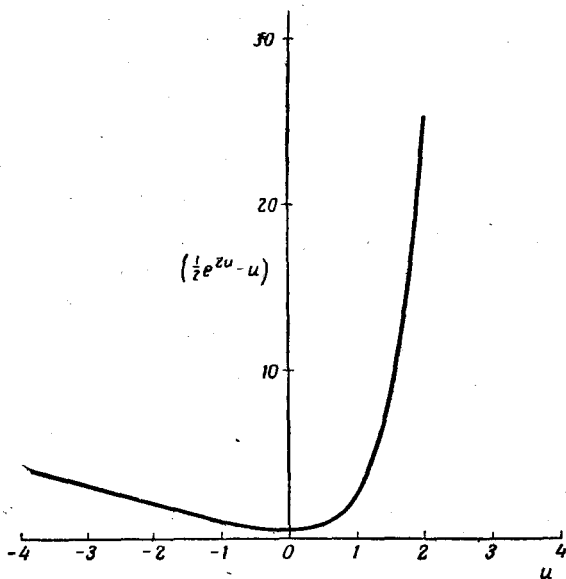
где

$$A = \frac{1}{2} \frac{\pi \gamma |b_0|^2}{\Gamma_2^2}. \quad (3.8.7)$$

На фиг. 3.2 изображена зависимость потенциальной энергии $V = A \left[\frac{1}{2} \exp(2u) - u \right]$ от u .

Если пренебречь в (3.8.6) слагаемым $(-p)$, определяющим затухание, то рассматриваемое движение похоже на движение мяча, катящегося от u_1 до некоторой высоты u_2 . Так как функция $V(u)$ круче в области

$u > 0$, то закон движения $u(t)$ будет слабонемонотонным, в то время как для больших A график функции $\exp(2u)$, пропорциональной числу фотонов, будет круто нарастать. На фиг. 3.3 и 3.4 изображены соответственно зависимости функций $u(t)$ и $\exp[2u(t)]$ от t с учетом слабого, определяющего затухание.



Фиг. 3.2.

Интересно заметить, что если исходить из нулевого числа фотонов $e^{2u} = 0$, т. е. $u = -\infty$, то для достижения состояния с $u = 0$ требуется бесконечное время.

Для появления пиков фазы не требуется выполнения условия $\Gamma \gg \gamma$. Рассмотрим, например, общий случай твердого тела, когда

$$\gamma \gg \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2. \quad (3.8.8)$$

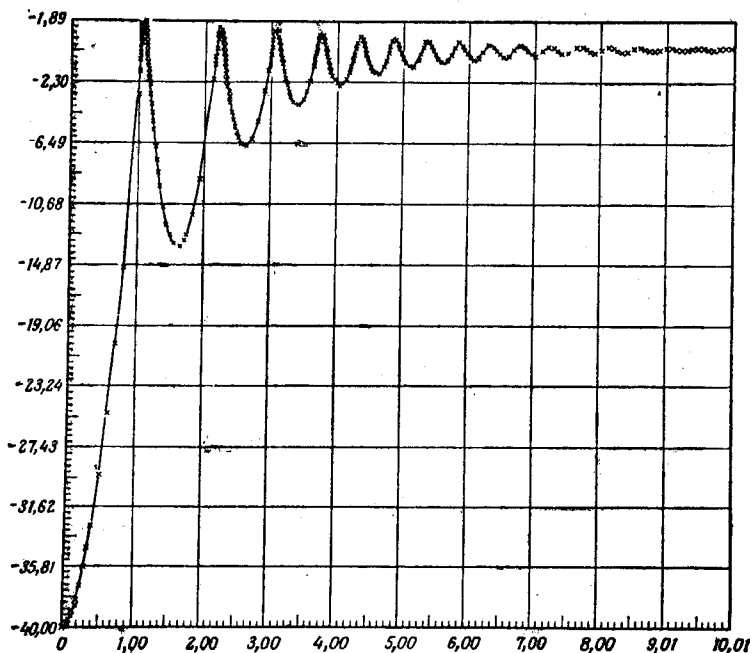
Так как $\frac{db}{dt} \ll \gamma b$, то можно найти выражение для поля из уравнения (3.2.12):

$$b = \frac{2N\mu\sigma}{\gamma(1 - i\alpha)}, \quad (3.8.9)$$

а затем исключить поле из уравнения (3.2.14):

$$\frac{d\sigma}{dt} = \Gamma (1 + i\alpha) \sigma \frac{\Delta D}{D_0}. \quad (3.8.10)$$

Здесь использовано также выражение (3.3.8). Уравнение



Ф и г. 3.3.

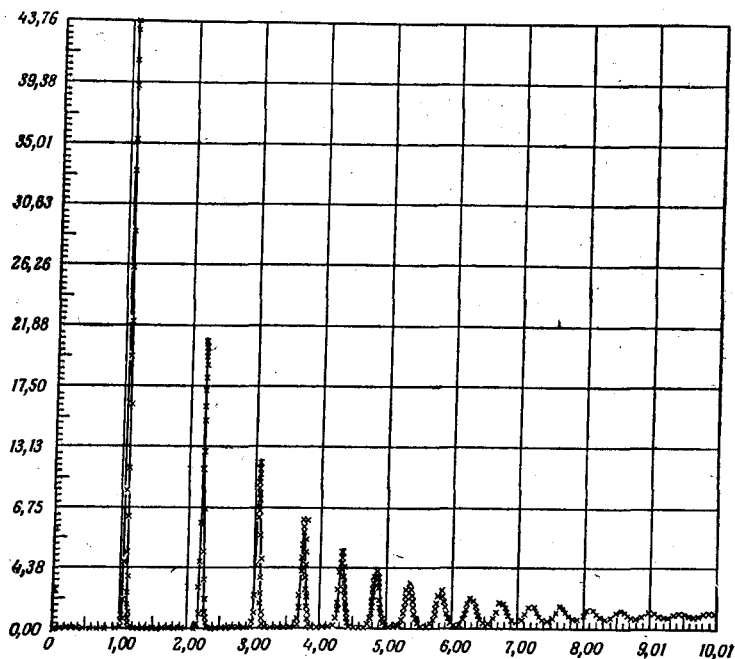
(3.8.10) имеет такой же вид, как и уравнение (3.5.2) для случая фотонов:

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \gamma (1 - i\alpha) b \frac{\Delta D}{D_0}.$$

Из (3.4.23) и (3.4.6) найдем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta D}{D_0} \right) = -\Lambda \frac{\Delta D}{D_0} - \frac{\Lambda \gamma |b_0|^2}{r(0) N D_0} (e^{x+u} - 1). \quad (3.8.11)$$

Подставляя $x = u$ и вводя величины $p = \frac{\Gamma}{\Lambda} \frac{\Delta D}{D_0}$, $\tau = \Delta t$, сведем наши уравнения к канонической форме



Ф и г. 3.4.

(3.8.6), содержащей пики фазы:

$$\frac{dx}{d\tau} = p, \quad \frac{dp}{d\tau} = -p - A(e^{2x} - 1), \quad (3.8.12)$$

где

$$A = \frac{\Gamma\pi |b_0|^2}{\Delta r(0)}. \quad (3.8.13)$$

3.9. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В СЛУЧАЕ БЕГУЩИХ ВОЛН

Мы должны теперь правильно учесть расположение атомов в различных участках поля. При этом произойдет лишь незначительное изменение уравнений движения.

Гамильтониан взаимодействия атома с излучением имеет вид

$$H_{п-а} = - \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (3.9.1)$$

где

$$\mathbf{E} \sim i [b^+(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - b(t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}] \mathbf{e}. \quad (3.9.2)$$

Предположим, что волна распространяется в направлении оси z , так что всюду в дальнейшем $\mathbf{k}\mathbf{r} = kz$. Далее,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \sim \mu \sum_M (a_1^+ a_2)_M \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_M(t)] \quad (3.9.3)$$

плюс эрмитово-сопряженное слагаемое. Здесь мы рассматриваем взаимодействие поляризации и одной моды электромагнитного поля, имеющей форму плоской волны. Рассмотрим теперь величину¹⁾

$$\int e^{ikz} dz \delta(z - z_M - v_M t) = e^{ik(z_M + v_M t)} \equiv e^{i\theta_M}, \quad (3.9.4)$$

где z_M — положение M -го атома в момент времени $t=0$. Тогда в приближении волн вращающейся поляризации

$$H_{п-а} = i\hbar\mu \sum_M [b^+ (a_1^+ a_2)_M e^{i\theta_M} - b (a_2^+ a_1)_M e^{-i\theta_M}]. \quad (3.9.5)$$

Таким образом, учет бегущей волны сводится лишь к появлению в (3.1.2) добавочного фазового множителя $\exp(\pm i\theta_M)$. Соответственно имеем

$$\frac{db}{dt} = - \left(i\omega_c + \frac{1}{2} \gamma \right) b + \mu \sum_M (a_1^+ a_2)_M e^{i\theta_M}, \quad (3.9.6)$$

$$\frac{d(a_1^+ a_2)_M}{dt} = - (\Gamma + i\omega_a) (a_1^+ a_2)_M + \mu b D_M e^{-i\theta_M}, \quad (3.9.7)$$

$$V_M = \mu [b^+ (a_1^+ a_2)_M e^{i\theta_M} + b (a_2^+ a_1)_M e^{-i\theta_M}]. \quad (3.9.8)$$

Уравнения для населенностей, выраженные через V_M , не меняются — изменяется лишь зависимость V_M от основных переменных. Удобно, как это уже делалось раньше, ввести медленно меняющиеся переменные

$$b' = b e^{i\omega_0 t}, \quad \sigma_M = (a_1^+ a_2)_M e^{i\omega_0 t} e^{i\theta_M}.$$

¹⁾ Соударениями пренебрегаем.

Тогда, опуская штрихи, имеем

$$\frac{db}{dt} = - \left[\frac{1}{2} \gamma + i(\omega_c - \omega_0) \right] b + \mu \sum_M \sigma_M, \quad (3.9.9)$$

$$\frac{d\sigma_M}{dt} = - [\Gamma + i(\omega_M - \omega_0)] \sigma_M + \mu b D_M, \quad (3.9.10)$$

где

$$\omega_M = \omega_a - kv_M, \quad (3.9.11)$$

$$B_M = \mu (b^+ \sigma_M + b \sigma_M^+). \quad (3.9.12)$$

Итак, мы свели задачу о бегущей волне к эквивалентной задаче о стационарных атомах и неоднородно уширенной линии.

Уравнения движения для населенностей и сами населенности, выраженные через новые переменные σ_M и B_M , не изменяются. Можно получить решение задачи с помощью подстановки

$$D_M = D_w - \frac{1}{r \left(\frac{d}{dt} \right)} B_M, \quad (3.9.13)$$

где D_w — разность населенностей, поддерживаемая лишь с помощью накачки, а операция $r \left(\frac{d}{dt} \right)$ была определена в (3.4.18). Рассмотрим теперь стационарное решение задачи о неоднородном уширении.

3.10. НЕОДНОРОДНОЕ УШИРЕНИЕ; СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ

Положим здесь все производные по времени равными нулю. Тогда ¹⁾

$$0 = \frac{d\sigma_M}{dt} = - [\Gamma + i(\omega_M - \omega_0)] \sigma_M + \mu b D_M. \quad (3.10.1)$$

Отсюда

$$\sigma_M = \frac{\mu b}{\Gamma + i(\omega_M - \omega_0)} D_M. \quad (3.10.2)$$

¹⁾ В этом разделе индекс 0 у соответствующей переменной будет означать ее величину в стационарном состоянии.

Подставляя величину σ_M в выражение для скорости излучения, получим

$$B_M = \frac{2\mu^2\Gamma |b|^2 D_M}{\Gamma^2 + (\omega_M - \omega_0)^2} = \pi_M |b|^2 D_M, \quad (3.10.3)$$

где ¹⁾

$$\pi_M \equiv 2\mu^2\Gamma / [\Gamma^2 + (\omega_M - \omega_0)^2]. \quad (3.10.4)$$

Для стационарного состояния

$$D_M = D_\omega - \frac{1}{r(0)} \pi_M |b|^2 D_M = D_\omega - \frac{1}{r(0)} B_M. \quad (3.10.5)$$

Поэтому

$$D_M = \frac{r(0) D_\omega}{r(0) + \pi_M |b|^2}. \quad (3.10.6)$$

Здесь D_ω — «вынуждающее» слагаемое, а величина $\pi_M |b|^2$ определяет «насыщение», причем ее эффективность определяется тем, насколько далеко находится каждый атом от резонансных условий. Зная D_M , можно подставить его в формулу (3.10.2) для σ_M , что дает

$$\sigma_M = \frac{\mu b}{\Gamma + i(\omega_M - \omega_0)} \frac{r(0) D_\omega}{r(0) + \pi_M |b|^2}. \quad (3.10.7)$$

Перейдем теперь к следующему уравнению:

$$0 = \frac{db}{dt} = \left[\frac{1}{2} \gamma + i(\omega_c - \omega_0) \right] b - r(0) D_\omega \sum_M \frac{\mu^2}{[\Gamma + i(\omega_M - \omega_0)]} \frac{1}{[r(0) + \pi_M |b|^2]} b.$$

Вещественная часть этого уравнения определяет рабочую точку, а мнимая — рабочую частоту лазера. Но

$$\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) = N \mu^2 D_\omega \left\langle \frac{\Gamma - i(\omega_M - \omega_0)}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega_M - \omega_0)^2} \right\rangle, \quad (3.10.8)$$

где по определению

$$\langle F(\omega_M) \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_M F(\omega_M) \quad (3.10.9)$$

¹⁾ Раньше мы использовали символ π для этой же величины, но в случае, когда все ω_M равны ω_a .

и введено обозначение

$$m^2 \equiv \frac{2\mu^2\Gamma}{r(0)} |b|^2. \quad (3.10.10)$$

Отношение мнимой части к вещественной равно

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\langle (\omega_M - \omega_0) / [\Gamma^2 + m^2 + (\omega_M - \omega_0)^2] \rangle}{\langle \Gamma / [\Gamma^2 + m^2 + (\omega_M - \omega_0)^2] \rangle}. \quad (3.10.11)$$

Заметим, что в предельном случае однородного уширения правая часть равенства (3.10.11) сводится к $\frac{\omega_a - \omega_0}{\Gamma}$, как это было в (3.3.6).

Из вещественной части выражения (3.10.8) находим

$$1 = \frac{D_\omega}{D_i} \left\langle \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega_M - \omega_0)^2} \right\rangle, \quad (3.10.12)$$

где $D_i = \frac{\gamma\Gamma}{2N\mu^2}$ — величина, которая соответствует D_0 в однородном случае [см. (3.3.8)]. Для проверки согласования с однородным случаем положим все ω_M равными ω_a . При этом

$$1 = \frac{D_\omega}{D_i} \frac{\Gamma^2}{m^2 + \Gamma^2(1 + \alpha^2)}.$$

Тогда для величины $\gamma|b|^2$ получаем такое же выражение

$$\gamma|b|^2 = \frac{\gamma r(0)}{\pi} \left(\frac{D_\omega}{D_0} - 1 \right),$$

как и (3.3.16) для однородного случая.

Вводя распределение частот атомов, характеризуемое функцией распределения $g(\omega' - \omega_a)$ с центром в ω_a и условием нормировки $\int g(\omega') d\omega' = 1$, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega_M - \omega_0)^2} \right\rangle &\equiv \\ &\equiv \int \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega' - \omega_0)^2} g(\omega' - \omega_a) d\omega'. \end{aligned} \quad (3.10.13)$$

Если в неоднородном случае ширина линии, определяемая функцией g , мала по сравнению с Γ , то полученный результат сводится к случаю однородного уширения.

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда характерная ширина распределения g значительно больше, чем Γ . При этом множитель $\Gamma^2/[\Gamma^2 + m^2 + (\omega' - \omega_0)^2]$ в подынтегральном выражении можно приближенно считать δ -функцией, и подынтегральное выражение имеет максимум при ω_0 , так что

$$\begin{aligned} \int \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega' - \omega_0)^2} g(\omega' - \omega_a) d\omega' &\approx \\ &\approx g(\omega_0 - \omega_a) \int \frac{\Gamma^2 d\omega'}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega' - \omega_0)^2} = \\ &= g(\omega_0 - \omega_a) \frac{3,14\Gamma^2}{(\Gamma^2 + m^2)^{1/2}} = \frac{1}{W} \frac{\Gamma^2}{(\Gamma^2 + m^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.10.14)$$

где численный множитель 3,14 — значение числа π , и $W = [3,14 g(\omega_0 - \omega_a)]^{-1} \gg \Gamma$ в рассматриваемом случае резко неоднородного уширения. Из выражений (3.10.12), (3.10.10) и (3.10.14) находим

$$|b|^2 = \frac{r(0)}{2\mu^2\Gamma} \left[\left(\frac{D_\omega}{D_t} \frac{\Gamma}{W} \right)^2 - 1 \right]. \quad (3.10.15)$$

Рассмотрим теперь частный случай доплеровского уширения. Функция распределения скорости имеет вид

$$F(v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{u} e^{-\frac{v^2}{u^2}} dv, \quad (3.10.16)$$

где v — z -компонента скорости. Так как наличие скорости v приводит к появлению сдвига частоты ω , равного kv , то выражение (3.10.16) эквивалентно размазке частоты. Соответствующая функция распределения для частоты равна

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}ku} e^{-\left(\frac{\omega}{ku}\right)^2}. \quad (3.10.17)$$

В случае сильно неоднородного уширения можно, как и в (3.10.14), заменить ω на ω_0 . Тогда

$$W^{-1} = \pi g(\omega_0 - \omega_a) = \frac{\sqrt{\pi}}{ku} e^{-\frac{(\omega_0 - \omega_a)^2}{(ku)^2}}. \quad (3.10.18)$$

Если атомы находятся в строго резонансных условиях, то $W \approx ku$. Для типичного газового лазера $\Gamma \sim 10^8$, а $W \sim 10^{10}$, так что лазер находится в режиме сильно неоднородного уширения, когда доплеровская ширина

много больше ширины атомных линий. Для однородного случая порог возбуждения определялся условием

$$D_w \sim D_0 \approx D_t.$$

Для неоднородного случая это условие заменяется на следующее:

$$D_w \sim D_t \frac{W}{\Gamma}, \quad (3.10.19)$$

и для достижения порога требуется большая мощность накачки.

Случай промежуточного уширения допускает точный анализ. Здесь при усреднении важную роль играет свертка лоренцовых или гауссовых функций — операция, хорошо известная в теории формы оптических линий. Определим функцию

$$\begin{aligned} H(\omega_a - \omega_0, \Gamma) &\equiv \left\langle \frac{1}{\Gamma - i(\omega_M - \omega_0)} \right\rangle = \\ &= \int g(\omega' - \omega_a) d\omega' \int_0^\infty e^{-[\Gamma - i(\omega' - \omega_0)]t} dt. \end{aligned} \quad (3.10.20)$$

Усреднение здесь проводится с гауссовой весовой функцией. Известно, однако, что гауссово усреднение плоской волны дает гауссову функцию. Можно сразу провести интегрирование по ω . Вводя обозначение $\omega_a - \omega_0 \equiv \Delta$, находим

$$H(\Delta, \Gamma) = \int_0^\infty dt e^{-\Gamma t + i \Delta t - \frac{k^2 u^2 t^2}{4}}. \quad (3.10.21)$$

Выражение (3.10.21) представляет собой неполный интеграл вероятности от комплексного аргумента. Эта функция полностью протабулирована. «Дисперсионное соотношение», определяющее рабочую точку и частоту, выражается через функцию H :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) &= \\ &= N \mu D_w \left[\frac{\Gamma}{\Gamma'} \operatorname{Re} H(\Delta, \Gamma') - i \operatorname{Im} H(\Delta, \Gamma') \right], \end{aligned} \quad (3.10.22)$$

где

$$\Gamma' \equiv (\Gamma^2 + m^2)^{1/2}, \quad \Delta \equiv \omega_a - \omega_0. \quad (3.10.23)$$

Из вещественной части выражения (3.10.22) находим

$$|b|^2 = \frac{r(0)}{2\mu^2/\Gamma} \left[\left(\Gamma \frac{D_w}{D_t} \operatorname{Re} H \right)^2 - 1 \right], \quad (3.10.24)$$

а из мнимой части

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\Gamma' \operatorname{Im} H}{\Gamma \operatorname{Re} H} = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\Gamma t} \sin(\Delta t) e^{-\frac{k^2 u^2 t^2}{4}} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\Gamma t} \cos(\Delta t) e^{-\frac{k^2 u^2 t^2}{4}} dt}. \quad (3.10.25)$$

Здесь, вообще говоря, $\Gamma \ll ku$.

Соотношение между Δ и ku зависит от степени расстройки. Если расстройка не слишком велика, т. е. $\Delta \leq ku$, то можно в числителе подынтегрального выражения в (3.10.25) разложить $\sin(\Delta t)$ в ряд, что приведет к следующему выражению:

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\frac{1}{2}\gamma} \approx \frac{\Gamma' \Delta}{\Gamma} \frac{\int_0^{\infty} e^{-\Gamma t} t e^{-\frac{k^2 u^2 t^2}{4}} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\Gamma t} e^{-\frac{k^2 u^2 t^2}{4}} dt} = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \frac{\omega_a - \omega_0}{\frac{ku}{2} \sqrt{\pi}}. \quad (3.10.26)$$

Для однородного случая правая часть этого выражения, согласно (3.3.6), имела вид $\frac{\omega_a - \omega_0}{\Gamma}$, а теперь она равна меньшей величине, грубо говоря, $\frac{\omega_a - \omega_0}{ku}$. Таким образом, в неоднородном случае частота ω_0 стабилизируется значительно ближе к резонансной частоте ω_c , чем в однородном случае. Усреднение уравнения (3.3.6) для разностей населенностей дает

$$\langle D_M \rangle = r(0) D_w \langle [r(0) + \pi_M |b|^2]^{-1} \rangle.$$

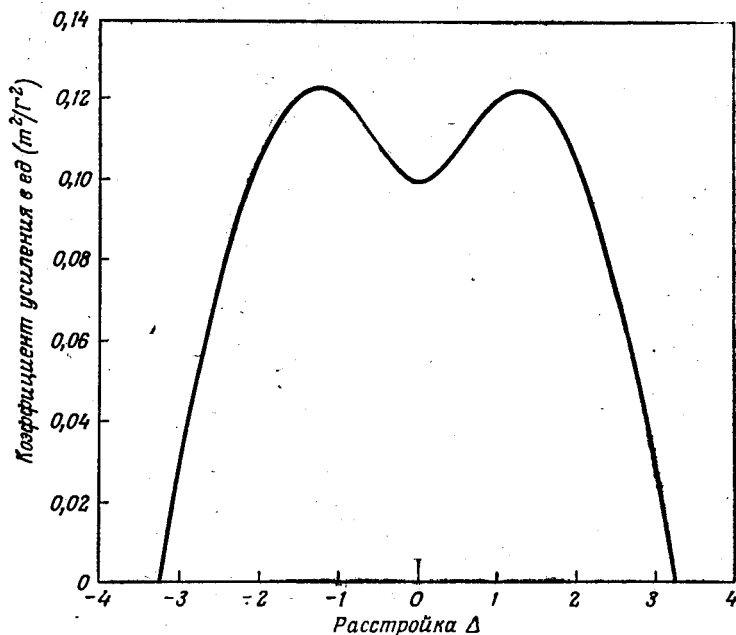
Это выражение может быть упрощено следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle D_M \rangle &= D_w \left\langle \frac{\Gamma^2 + (\omega_M - \omega_0)^2}{\Gamma^2 + m^2 + (\omega_M - \omega_0)^2} \right\rangle = \\ &= D_w \left[1 - \frac{m^2}{\Gamma'} \operatorname{Re} H(\Delta, \Gamma') \right]. \end{aligned} \quad (3.10.27)$$

Из-за наличия в (3.10.27) величины Γ' разность населенностей является функцией рабочего уровня. Такая зависимость не возникала в случае однородного уширения.

3.11. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В СЛУЧАЕ СТОЯЧИХ ВОЛН

Мак-Ферлан, Беннет и Лэмб [40], а также Соук и Яван [41] нашли провал на кривой коэффициента усиления для газового лазера, работающего на стоячей волне



Фиг. 3.5.

(фиг. 3.5). Этот провал характеризуется шириной порядка 10^8 Гц, т. е. величиной, типичной для ширин атомных линий Γ , в то время как полная доплеровская ширина порядка 10^{10} Гц. Эта доплеровская ширина настолько велика, что делает невозможным прямые измерения ширин атомных линий методами атомной спектроскопии.

Однако стоячая волна образуется из двух бегущих в противоположных направлениях волн. При этом возникают интерференционные эффекты, компенсирующие доплеровские сдвиги, и, таким образом, появляется возможность измерения величин порядка ширины атомных линий. Покажем теперь в рамках классической теории, как возникает такая интерференция [24].

Энергия взаимодействия системы атомов с электромагнитным полем, согласно классической теории, равна

$$\omega = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (3.11.1)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — электрическое поле, а $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ — поляризация системы. Электрическое поле выберем в виде поляризованной стоячей волны, направленной по оси z :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i(b^+ - b) \sin kz \cdot \mathbf{e}. \quad (3.11.2)$$

Используя выражение (3.9.3) для поляризации системы, сведем гамильтониан взаимодействия к следующему виду:

$$H_{\text{п-а}} = i\hbar\mu (b^+ - b) 2 \sin \theta_M [(a_1^+ a_2)_M + (a_2^+ a_1)_M], \quad (3.11.3)$$

где множитель 2 добавлен из соображений удобства.

В приближении волн вращающейся поляризации уравнение движения для электрического поля имеет вид

$$\frac{db}{dt} = -i\left(\omega_c - \frac{1}{2}\gamma\right)b + 2\mu \sum_M (a_1^+ a_2)_M \sin \theta_M, \quad (3.11.4)$$

а уравнение движения для оператора перехода M -го атома

$$\frac{d}{dt} (a_1^+ a_2)_M = -(\Gamma + i\omega_a) (a_1^+ a_2)_M + 2\mu b D_M \sin \theta_M. \quad (3.11.5)$$

Уравнения для населенностей сохраняют обычную форму (3.2.3), но с измененным значением скорости излучения для M -го атома:

$$B_M = 2\mu [b^+ (a_1^+ a_2)_M + b (a_2^+ a_1)_M] \sin \theta_M. \quad (3.11.6)$$

где, как и в (3.9.4),

$$\theta_M = k(z_M + v_M t).$$

Мы хотим по возможности устранить равномерное движение, т. е. зависимость наших полевых переменных от высокой частоты. Для этого положим

$$b' = be^{i\omega_0 t}, \quad (a_1^+ a_2)'_M = (a_1^+ a_2)_M e^{i\omega_0 t}, \quad (3.11.7)$$

переходя тем самым к новым (штрихованным) переменным, медленно меняющимся во времени. Для простоты обозначений будем опускать штрихи. В новых переменных уравнение (3.11.4) имеет вид

$$\left[\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) + \frac{d}{dt} \right] b = i\mu \sum_M (a_1^+ a_2)_M (e^{i\theta_M} - e^{-i\theta_M}). \quad (3.11.8)$$

Определим теперь величины σ_n , σ_n^M и D_{2n}^M в виде разложений в ряды, удобных для нахождения решений уравнений методом итераций:

$$(a_1^+ a_2)_M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{2n+1}^M e^{i(2n+1)\theta_M}, \quad (3.11.9)$$

$$D_M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{2n}^M e^{i2n\theta_M}, \quad (3.11.10)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{N} \sum_M \sigma_n^M. \quad (3.11.11)$$

Из вещественности величины D_M следует, что $D_{-2n}^{M*} = (D_{2n}^M)^*$. Тогда уравнение (3.11.8) сведется к

$$\left[\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) + \frac{d}{dt} \right] b = N\mu i(\sigma_1 - \sigma_{-1}) + \text{Шум}. \quad (3.11.12)$$

В выражение для шума входят слагаемые вида $\sum_M \exp(i2n\theta_M)$, которые обращаются при усреднении в нуль, так как фазы — случайные величины. Стационарное решение уравнения (3.11.12) равно

$$b = N\mu i(\sigma_1 - \sigma_{-1}) / \left[\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) \right]. \quad (3.11.13)$$

Аналогично получаем для уравнения (3.11.5)

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma + i(\omega_a - \omega_0) + \frac{d}{dt} \right] \sum_n \sigma_{2n+1}^M e^{i(2n+1)\theta_M} = \\ & = -i\mu b \sum_n D_{2n}^M [e^{i(2n+1)\theta_M} - e^{i(2n-1)\theta_M}]. \end{aligned} \quad (3.11.14)$$

Стационарное решение этого уравнения

$$\sigma_{2n+1}^M = -i\mu b \frac{D_{2n}^M - D_{2n+2}^M}{\Gamma + i\omega_{2n+1}}, \quad (3.11.15)$$

где

$$\omega_n = \omega_a - \omega_0 + nk\nu_M. \quad (3.11.16)$$

В частности,

$$\sigma_1^M = -i\mu b \frac{D_0^M - D_2^M}{\Gamma + i\omega_1}, \quad (3.11.17)$$

$$\sigma_{-1}^M = -i\mu b \frac{D_{-2}^M - D_0^M}{\Gamma + i\omega_{-1}}. \quad (3.11.18)$$

Подставляя эти выражения в (3.11.11), (3.11.12), получим дисперсионное соотношение для стационарного состояния

$$\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) = N\mu^2 \left\langle \frac{D_0^M - D_2^M}{\Gamma + i\omega_1} + \frac{D_0^M - D_{-2}^M}{\Gamma + i\omega_{-1}} \right\rangle. \quad (3.11.19)$$

Вещественная и мнимая части этого выражения определяют рабочую точку и частоту лазера. Остается еще найти входящие в (3.11.19) величины D_0 и $D_{\pm 2}$.

Согласно формуле (3.4.17), разность населенностей атома в поле излучения определяется выражением

$$D_\omega^M = D_\omega^M - \frac{1}{r\left(\frac{d}{dt}\right)} B^M. \quad (3.11.20)$$

Функция $r(\lambda)$ определена в (3.4.18); величина D_ω^M [см. (3.3.13)] представляет собой разность населенностей, которая определяется накачкой в отсутствие поля излучения, т. е.

$$D_\omega^M = D^M \Big|_{B^M=0}, \quad (3.11.21)$$

а скорость излучения B^M (3.11.6) сводится к

$$\begin{aligned} B^M &= -i\mu \left[b^+ \sum_n \sigma_{2n+1}^M e^{i(2n+1)\theta_M} \right] (e^{i\theta_M} - e^{-i\theta_M}) + \text{К. С.} = \\ &= -i\mu b^+ \sum_n (\sigma_{2n-1}^M - \sigma_{2n+1}^M) e^{i2n\theta_M} + \text{К. С.} \quad (3.11.22) \end{aligned}$$

Используя (3.11.15), можно выразить скорость излучения через разность населенностей

$$B^M = -\mu^2 |b|^2 \sum_n \left[\frac{D_{2n-2}^M - D_{2n}^M}{\Gamma + i\omega_{2n-1}} - \frac{D_{2n}^M - D_{2n+2}^M}{\Gamma + i\omega_{2n+1}} \right] e^{i2n\theta_M} + \text{К. С.} \quad (3.11.23)$$

Комплексно-сопряженное слагаемое в (3.11.23) содержит $\exp(-i2n\theta_M)$, что с помощью замены индекса суммирования n на $(-n)$ сводится к $\exp(i2n\theta_M)$. Используя также условие вещественности

$$(D_{-2n}^M)^* = D_{2n}^M, \quad (3.11.24)$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} B^M &= -\mu^2 |b|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2n\theta_M} \left[(D_{2n-2} - D_{2n}) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_{2n-1}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{\Gamma - i\omega_{-2n+1}} \right) - (D_{2n} - D_{2n+2}) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_{2n+1}} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{-2n-1}} \right) \right]. \quad (3.11.25) \end{aligned}$$

Определим параметр насыщения

$$\frac{m^2}{\Gamma^2} = \frac{2\mu^2 |b|^2}{\Gamma \cdot r(0)}, \quad (3.11.26)$$

который может стать большим по сравнению с единицей в области значительно выше порога возбуждения, а также величину

$$\frac{1}{S_{2n}} \equiv \frac{r(0)}{r(i2nkv)}. \quad (3.11.27)$$

Подставляя (3.11.26), (3.11.27) в формулу (3.11.20), запишем ее в виде рекуррентного соотношения

$$D_{2n}^M = D_\omega^M \delta_{n,0} + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\Gamma} \cdot \frac{1}{S_{2n}} \left[(D_{2n-2}^M - D_{2n}^M) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_{2n-1}} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{1-2n}} \right) - (D_{2n}^M - D_{2n+2}^M) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_{2n+1}} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{1-2n}} \right) \right]. \quad (3.11.28)$$

В частности,

$$D_0^M = D_\omega^M - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\Gamma} \left[(D_0^M - D_2^M) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_1} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{-1}} \right) + \text{К. С.} \right], \quad (3.11.29)$$

$$D_2^M = \frac{1}{2} \frac{m^2}{\Gamma} \frac{1}{S_2} \left[(D_0^M - D_2^M) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_1} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{-1}} \right) - (D_2^M - D_4^M) \left(\frac{1}{\Gamma + i\omega_3} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{-3}} \right) \right]. \quad (3.11.30)$$

Выражения (3.11.28) — (3.11.30) полностью согласуются с условием

$$D_{2n}^M(-v) = [D_{2n}^M(v)]^*, \quad (3.11.31)$$

так что дисперсионное соотношение (3.11.19), которое содержит интегрирование четных функций переменной v , может быть упрощено и сведено к виду

$$\frac{1}{2} \gamma - i(\omega_0 - \omega_c) = 2N\mu^2 \left\langle \frac{D_0^M - D_2^M}{\Gamma + i\omega_1} \right\rangle. \quad (3.11.32)$$

Для случая $\frac{m^2}{\Gamma^2} \ll 1$ эти уравнения могут быть решены с помощью метода итераций, причем основное слабое в D_{2n} пропорционально $\left(\frac{m^2}{\Gamma^2}\right)^n$, так что $D_0 \gg \gg D_2 \gg D_4$. В первом порядке по $\frac{m^2}{\Gamma^2}$ находим

$$D_0^M \approx D_\omega - \frac{m^2}{\Gamma^2} D_\omega \left(\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \omega_1^2} + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \omega_{-1}^2} \right), \quad (3.11.33)$$

$$D_2^M \approx \frac{1}{2} \frac{m^2}{\Gamma^2} D_\omega \left(\frac{\Gamma}{\Gamma + i\omega_1} + \frac{\Gamma}{\Gamma - i\omega_{-1}} \right). \quad (3.11.34)$$

Выражение, комплексно-сопряженное к (3.11.32), в первом порядке по $\frac{m^2}{\Gamma^2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma + i(\omega_0 - \omega_c) = N\mu^2 D_\omega \left\{ 2 \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\omega_1} \right\rangle - \right. \\ \left. - \frac{m^2}{\Gamma^2} \left[2 \left\langle \frac{\Gamma^2}{(\Gamma^2 + \omega_1^2)} \frac{1}{(\Gamma - i\omega_1)} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\Gamma^2}{(\Gamma^2 + \omega_1^2)} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_{-1})} \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{1}{S_{-2}} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_1)} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma - i\omega_1} + \frac{\Gamma}{\Gamma + i\omega_{-1}} \right) \right\rangle \right] \right\}. \quad (3.11.35) \end{aligned}$$

Если разложить правую часть равенства (3.11.35) на элементарные дроби, то отдельные слагаемые могут быть выражены через функцию

$$\begin{aligned} H(\Delta, \Gamma) \equiv \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\omega_1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\Delta - ikv} \right\rangle = \\ = \int_0^\infty dt \cdot e^{-\Gamma t} \cdot e^{i\Delta t} \cdot e^{-\frac{(kvt)^2}{4}}, \quad (3.11.36) \end{aligned}$$

которая приводится к (табулированному) интегралу вероятности от комплексного аргумента. Например, второе слагаемое в (3.11.35) равно

$$\begin{aligned} 2 \left\langle \frac{\Gamma^2}{(\Gamma^2 + \omega_1^2)} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_1)} \right\rangle = \left\langle \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega_1^2} + \frac{\Gamma}{(\Gamma - i\omega_1)^2} \right\rangle = \\ = \operatorname{Re} H(\Delta, \Gamma) - \Gamma \frac{\partial}{\partial \Gamma} H(\Delta, \Gamma), \quad (3.11.37) \end{aligned}$$

где $\Delta = \omega_a - \omega_0$. Точно так же для третьего слагаемого в (3.11.35) найдем

$$\begin{aligned} 2 \left\langle \frac{\Gamma^2}{(\Gamma^2 + \omega_1^2)} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_{-1})} \right\rangle = \left\langle \frac{\Gamma}{2i\Delta} \left[\frac{1}{\Gamma - i\omega_{-1}} - \frac{1}{\Gamma + i\omega_1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma}{2(\Gamma - i\Delta)} \left[\frac{1}{\Gamma - i\omega_1} + \frac{1}{\Gamma - i\omega_{-1}} \right] \right\rangle. \quad (3.11.38) \end{aligned}$$

Так как усредняются четные функции от kv , то можно заменить ω_{-1} на ω_1 , что дает

$$2 \left\langle \frac{\Gamma^2}{(\Gamma^2 + \omega_1^2)} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_{-1})} \right\rangle = \frac{\Gamma}{\Delta} \operatorname{Im} \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\omega_1} \right\rangle + \\ + \frac{\Gamma}{\Gamma - i\Delta} \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\omega_1} \right\rangle = \frac{\Gamma}{\Delta} \operatorname{Im} H(\Delta, \Gamma) + \\ + \frac{\Gamma}{\Gamma - i\Delta} H(\Delta, \Gamma). \quad (3.11.39)$$

Полагая для простоты $\omega_{12} = \omega_{21} = 0$, получаем

$$\frac{1}{r\left(\frac{d}{dt}\right)} = \left(\Gamma_1 + \frac{d}{dt}\right)^{-1} + \left(\Gamma_2 + \frac{d}{dt}\right)^{-1}, \quad (3.11.40)$$

$$\frac{1}{r(0)} = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}, \quad (3.11.41)$$

$$\frac{1}{s-2} = \frac{r(0)}{r\left(\frac{d}{dt}\right)} \Bigg|_{\frac{d}{dt} = -2ikv} = \\ = r(0) \left(\frac{1}{\Gamma_1 - i2kv} + \frac{1}{\Gamma_2 - i2kv} \right). \quad (3.11.42)$$

Разложение предпоследнего слагаемого в (3.11.35) на элементарные дроби приводит к следующему выражению [множитель $-\frac{m^2}{\Gamma^2} r(0)$ выписан]:

$$\sum_{j=1, 2} \left\langle \frac{1}{(\Gamma_j - 2ikv)} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_1)^2} \right\rangle = \\ = \sum_j \left\{ \frac{2\Gamma}{(2\Gamma - \Gamma_j - 2i\Delta)^2} \left[\left\langle \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\Gamma_j - ikv\right)} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\omega_1} \right\rangle \right] - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma}{2\Gamma - \Gamma_j - 2i\Delta} \left\langle \frac{1}{(\Gamma - i\omega_1)^2} \right\rangle \right\} = \\ = \sum_j \left\{ \frac{2\Gamma}{(2\Gamma - \Gamma_j - 2i\Delta)^2} \left[H\left(\Delta, \frac{1}{2}\Gamma_j\right) - H(\Delta, \Gamma) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma}{2\Gamma - \Gamma_j - 2i\Delta} \frac{\partial}{\partial \Gamma} H(\Delta, \Gamma) \right\}. \quad (3.11.43)$$

Аналогично для последнего слагаемого в (3.11.35) имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_l \left\langle \frac{1}{(\Gamma_l - 2ikv)} \cdot \frac{1}{(\Gamma - i\omega_1)} \cdot \frac{\Gamma}{(\Gamma + i\omega_{-1})} \right\rangle &= \\
 &= \sum_l \left\{ \frac{2\Gamma}{(2\Gamma - \Gamma_l)^2 + 4\Delta^2} \left\langle \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma_l - ikv} \right\rangle - \right. \\
 &\quad - \frac{\Gamma}{2\Delta} \frac{1}{[2\Delta + i(2\Gamma - \Gamma_l)]} \cdot \left\langle \frac{1}{\Gamma - i\omega_1} \right\rangle - \\
 &\quad \left. - \frac{\Gamma}{2\Delta} \cdot \frac{1}{[2\Delta - i(2\Gamma - \Gamma_l)]} \left\langle \frac{1}{\Gamma + i\omega_{-1}} \right\rangle \right\} = \\
 &= \sum_l \Gamma [(2\Gamma - \Gamma_l)^2 + 4\Delta^2]^{-1} \times \\
 &\quad \times \left\{ 2H\left(0, \frac{1}{2}\Gamma_l\right) - \operatorname{Re} H(0, \Gamma) - \frac{2\Gamma - \Gamma_l}{\Delta} \operatorname{Im} H(0, \Gamma) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.11.44}$$

Таким образом, полное дисперсионное соотношение оказывается равным

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\gamma + i(\omega_0 - \omega_c) &= N\mu^2 D_\omega \left\{ 2H(\Delta, \Gamma) - \frac{m^2}{\Gamma^2} \left[\operatorname{Re} H(\Delta, \Gamma) - \right. \right. \\
 &\quad \left. - \Gamma \frac{\partial H(\Delta, \Gamma)}{\partial \Gamma} + \frac{\Gamma}{\Gamma - i\Delta} H(\Delta, \Gamma) + \frac{\Gamma}{\Delta} \operatorname{Im} H(\Delta, \Gamma) \right] - \\
 &\quad - \frac{m^2}{\Gamma^2} r(0) \sum_l \left[\frac{2\Gamma}{(2\Gamma - \Gamma_l - 2i\Delta)^2} \left(H\left(0, \frac{1}{2}\Gamma_l\right) - H(\Delta, \Gamma) \right) + \right. \\
 &\quad \quad \left. + \frac{\Gamma}{2\Gamma - \Gamma_l - 2i\Delta} \frac{\partial}{\partial \Gamma} H(0, \Gamma) \right] - \\
 &\quad - \frac{m^2}{\Gamma^2} r(0) \sum_l \frac{\Gamma}{(2\Gamma - \Gamma_l)^2 + 4\Delta^2} \left(\left[2H\left(0, \frac{1}{2}\Gamma_l\right) - \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \operatorname{Re} H(\Delta, \Gamma) \right] - \frac{2\Gamma - \Gamma_l}{\Delta} \operatorname{Im} H(\Delta, \Gamma) \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.11.45}$$

Этот результат согласуется с дисперсионным соотношением, полученным Саргентом и Лэмбом [42].

Большинство газовых лазеров удовлетворяет условию сильного уширения

$$\Gamma \ll kv. \tag{3.11.46}$$

В этом случае можно пренебречь величиной

$$\Gamma \frac{\partial H}{\partial \Gamma} = i\Gamma \frac{\partial H}{\partial \Delta} = i \frac{\Gamma}{ku} \frac{\partial H}{\partial (\Delta/ku)}, \quad (3.11.47)$$

имеющей порядок Γ/ku . Все слагаемые, содержащие резонансный множитель типа $(\Gamma - i\Delta)^{-1}$, существенны лишь при $\Delta \sim \Gamma \ll ku$. В этой области можно также пренебречь величиной

$$\frac{\text{Im } H(\Delta, \Gamma)}{\text{Re } H(\Delta, \Gamma)} \sim \frac{2\Delta}{\sqrt{\pi} ku}. \quad (3.11.48)$$

Наконец, можно пренебречь последним слагаемым в (3.11.35), содержащим пульсирующую величину s_{-2} . При этом дисперсионное соотношение упрощается и сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma + i(\omega_0 - \omega_c) &= N\mu^2 D_\omega \times \\ &\times \left[2H(\Delta, \Gamma) - \frac{m^2}{\Gamma^2} \text{Re } H(\Delta, \Gamma) \left(1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - i\Delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.11.49)$$

Это выражение справедливо даже для больших Δ , если только $\Gamma \ll ku$. Результат Лэмба [24] совпадает с нашим, за исключением сделанной им приближенной замены $\text{Re } H(\Delta, \Gamma)$ на $\text{Re } H(0, 0)$.

Взяв вещественную часть от выражения (3.11.49) и решая полученное уравнение относительно параметра насыщения $\frac{m^2}{\Gamma^2}$, можно найти рабочую точку лазера:

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{\Gamma^2} &= \left\{ 2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{N\mu^2 D_\omega} [\text{Re } H(\Delta)]^{-1} \right\} / s(\Delta) = \\ &= 2 \left[1 - \mathcal{N}^{-1} \exp\left(\frac{\Delta}{ku}\right)^2 \right] / s(\Delta), \end{aligned} \quad (3.11.50)$$

где

$$s(\Delta) = 1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Delta^2}. \quad (3.11.51)$$

Поскольку $s(0) = 2$, а $s(\infty) = 1$, то величина $s(\Delta)$ представляет собой гасящий множитель, который вызывает лэмбовский провал, показанный на фиг. 3.5.

Далее,

$$H(\Delta) \equiv \lim_{\Gamma \rightarrow 0} H(\Delta, \Gamma), \quad (3.11.52)$$

$$\operatorname{Re} H(\Delta) = \frac{\sqrt{\pi}}{ku} \exp \left[-\frac{\Delta^2}{(ku)^2} \right]. \quad (3.11.53)$$

Величина \mathcal{N} представляет собой введенное Лэмбом [24] «относительное возбуждение», которое определяется равенством

$$\mathcal{N} = \frac{D_w}{D_0}, \quad (3.11.54)$$

где D_0 — величина D_w на пороге возбуждения, когда $\Delta = 0$. Для случая $\Gamma \ll ku$

$$\mathcal{N} = \frac{D_w}{\gamma/4N\mu^2 \operatorname{Re} H(0)}. \quad (3.11.55)$$

Для получения сдвига частоты надо взять мнимую часть от выражения (3.11.49):

$$\omega_0 - \omega_c = N\mu^2 D_w \left[2 \operatorname{Im} H(\Delta) - \frac{m^2}{\Gamma^2} \operatorname{Re} H(\Delta) \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma^2 + \Delta^2} \right], \quad (3.11.56)$$

где $\Delta = \omega_a - \omega_c$. Это уравнение можно решить относительно ω_0 методом итераций. При разложении $\omega_0 - \omega_c$ по степеням $\frac{m^2}{\Gamma^2}$ постоянное слагаемое, или «линейное затягивание», частоты равно

$$\omega_0 - \omega_c = 2N\mu^2 D_w \operatorname{Re} H \frac{\operatorname{Im} H}{\operatorname{Re} H} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\operatorname{Im} H(\Delta)}{\operatorname{Re} H(\Delta)}. \quad (3.11.57)$$

При $\Delta < ku \ll 1$ можно с помощью (3.11.46) найти, что

$$\frac{\omega_0 - \omega_c}{\frac{1}{2} \gamma} = \frac{\omega_a - \omega_0}{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} ku}. \quad (3.11.58)$$

Это выражение совпадает с (3.3.7), но Γ заменено значительно большей величиной $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} k u$. Отсюда

$$\omega_0 = \omega_c + (\omega_a - \omega_c) \frac{\frac{1}{2} \gamma}{\frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} k u}. \quad (3.11.59)$$

Для газового лазера $\gamma < \Gamma \ll k u$ и ω_0 намного ближе к ω_c , чем к ω_a . При этом $\Delta = \omega_a - \omega_0$ почти равно $\Delta_c = \omega_a - \omega_c$, и для нелинейной (пропорциональной квадрату напряженности поля) добавки к ω_0 в хорошем приближении находим

$$\delta\omega_0 = -N\mu^2 D_w \frac{m^2}{\Gamma^2} \operatorname{Re} H(\Delta_c) \cdot \frac{\Gamma \cdot \Delta_c}{\Gamma^2 + \Delta_c^2}. \quad (3.11.60)$$

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИИ

В этой главе будет дано обычное определение шума, выведена теорема Винера — Хинчина и рассмотрено соотношение между реальными измерениями и идеализированным определением шума. Мы исследуем как стационарные, так и нестационарные процессы и получим выражения для некоторых экспериментально определяемых характеристик квантового шума.

4.1. ОБЫЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШУМА

Случайная переменная $\alpha(t)$ с нулевым средним значением

$$\langle \alpha(t) \rangle = 0 \quad (4.1.1)$$

в соответствии обычным (инженерным) определением¹⁾ характеризуется спектром шума $G_s(\alpha, \omega)$:

$$\frac{1}{2} G_s(\alpha, \omega) \equiv (\alpha^2)_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\langle \left| \int_{-T}^T \alpha(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle. \quad (4.1.2)$$

Мы, однако, чаще будем иметь дело с шумом частоты ω в момент времени t , получаемым с помощью преобразования Фурье

$$\frac{1}{2} G(\alpha, \omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau, t) d\tau \equiv (\alpha^2)_{\omega, t} \quad (4.1.3)$$

от автокорреляционной функции

$$R(\tau, t) \equiv \langle \alpha(t + \tau) \alpha(t)^* \rangle. \quad (4.1.4)$$

¹⁾ Это определение связано с усреднением по совокупности, поскольку даже при $T \rightarrow \infty$ функция $G_s(\omega)$ характеризуется большими флуктуациями [см. формулу (3.35) в [43]].

Спектр шума на частоте ω получается с помощью усреднения по времени:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T G(\omega, t) dt. \quad (4.1.5)$$

Выражение (4.1.5) получено для переменной α , которую можно не писать.

Эквивалентность определений величин $G_s(\omega)$ и $G(\omega)$ представляет собой содержание теоремы Винера — Хинчина. Мы докажем эту теорему с помощью разложения функции $G_s(\omega)$ по $G(\omega)$:

$$G_s(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' e^{i\omega(t-t')} \langle \alpha(t) \alpha(t')^* \rangle. \quad (4.1.6)$$

Совершая преобразование Фурье, обратное к (4.1.3):

$$\langle \alpha(t) \alpha(t')^* \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'(t-t')} G(\omega', t') d\omega', \quad (4.1.7)$$

получим

$$G_s(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' G(\omega', t') e^{i(\omega - \omega')t'} \times \\ \times \frac{\sin(\omega' - \omega)T}{\pi(\omega' - \omega)T}. \quad (4.1.8)$$

Рассмотрим сначала стационарный случай

$$R(\tau, t) = R(\tau); \quad G(\omega', t') = G(\omega'). \quad (4.1.9)$$

Проведем в (4.1.8) интегрирование по t' :

$$G_s(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' G(\omega') \frac{\sin^2(\omega' - \omega)T}{\pi(\omega' - \omega)^2 T}. \quad (4.1.10)$$

Используем теперь формулу, получаемую в зависящей от времени теории возмущений (см., например, [44]):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\omega' - \omega)T}{\pi(\omega' - \omega)^2 T} = \delta(\omega' - \omega). \quad (4.1.11)$$

Подстановка (4.1.11) в (4.1.10) приводит к требуемому результату

$$G_s(\omega) = G(\omega). \quad (4.1.12)$$

В нестационарном случае можно использовать следующую формулу:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega' - \omega)T}{\pi(\omega' - \omega)T} = \delta(\omega' - \omega), \quad (4.1.13)$$

что приводит к

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' G(\omega', t') e^{i(\omega - \omega')t'} \frac{\sin(\omega' - \omega)T}{\pi(\omega' - \omega)T} = G(\omega, t') + E, \quad (4.1.14)$$

где величина E определяет ошибку, обращающуюся в нуль при $T \rightarrow \infty$. Таким образом, при $T \rightarrow \infty$ получаем желаемый результат:

$$G_s(\omega) \rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T G(\omega, t') dt' = G(\omega). \quad (4.1.15)$$

Положим в выражении (4.1.7) $t = t'$:

$$\langle |\alpha(t)|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G(\omega, t). \quad (4.1.16)$$

Для вещественной и не зависящей от времени случайной переменной α функция $G(\omega)$ — четная и выражения (4.1.3), (4.1.7) сведутся к следующему:

$$\langle \alpha^2 \rangle = \int_0^{\infty} G(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2)_{\omega} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.1.17)$$

Мы использовали «инженерное» определение функции $G(\omega)$, чтобы удовлетворить этому условию нормировки с помощью одних только положительных частот. В то же время величина $(\alpha^2)_{\omega}$ более удобна для нашего рассмотрения, так как у нас будут встречаться и положительные, и отрицательные частоты.

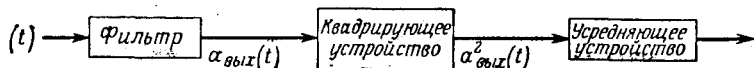
Для нестационарного случая выберем более симметричное выражение (вигнеровского типа [45])

$$(\alpha^2)_{\omega, t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \left\langle \alpha \left(t + \frac{1}{2} \tau \right) \alpha \left(t - \frac{1}{2} \tau \right) \right\rangle, \quad (4.1.18)$$

которое всегда вещественно и при вещественных $\alpha(t)$ является четной функцией ω . В следующем разделе будет показано, что спектр шума с частотой ω и в момент времени t может быть измерен лишь в том случае, если он медленно меняется во времени. При этом несущественно различие между симметричным и несимметричным определением.

4.2. КЛАССИЧЕСКИЙ ФИЛЬТР

Как относится введенное в прошлом разделе несколько произвольное определение шума к реальным



Ф и г. 4.1.

спектральным измерениям? Типичная измерительная схема (фиг. 4.1) фильтрует входной сигнал $\alpha(t)$ так, чтобы получить на выходе величину

$$\alpha_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t k(t-t') \alpha(t') dt', \quad (4.2.1)$$

характеризуемую областью частот вблизи ω_0 ¹⁾. Поскольку фильтр удовлетворяет требованию причинности, т. е.

$$k(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \quad (4.2.2)$$

то, используя для коэффициента преобразования

$$k(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \quad (4.2.3)$$

¹⁾ Нижний предел $-\infty$ означает, что аппаратура была включена за некоторое время до начала измерений.

теорему свертки, можно показать, что

$$(\alpha_{\text{вых}})_{\omega} = k(\omega) \alpha_0; \quad (\alpha_{\text{вых}})_{\omega}^2 = |k(\omega)|^2 (\alpha^2)_{\omega}. \quad (4.2.4)$$

Для получения измеряемого спектра G_m , который все еще остается случайной величиной, возводится в квадрат и усредняется по времени:

$$G_m(\omega_0, t_0)_{\text{случ}} = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} [\alpha_{\text{вых}}(t)]^2 dt. \quad (4.2.5)$$

Усреднение по большому числу повторяющихся экспериментов приводит к среднему по совокупности

$$G_m(\omega_0, t_0) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \langle [\alpha_{\text{вых}}(t)]^2 \rangle dt, \quad (4.2.6)$$

или

$$G_m(\omega_0, t_0) = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} A(\omega_0, t) dt. \quad (4.2.7)$$

Подстановка (4.2.1) в (4.2.6) дает для функции $A(\omega, t)$

$$\begin{aligned} A(\omega, t) &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' k(t-t') k(t-t'') \langle \alpha(t') \alpha(t'') \rangle = \\ &= \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} dv k(u) k(v) \langle \alpha(t-u) \alpha(t-v) \rangle. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Наконец, подставляя (4.1.7) в (4.2.8), имеем

$$A(\omega, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dv k(v) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega k(\omega) G(\omega, t-v) e^{i\omega v}. \quad (4.2.9)$$

СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом случае $G(\omega, t) = G(\omega)$ и можно провести интегрирование по v в (4.2.9), что дает

$$A(\omega_0, t) = A(\omega_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(\omega)|^2 d\omega G(\omega). \quad (4.2.10)$$

Поэтому независимо от выбора T в выражении (4.2.5) оно сводится к ¹⁾

$$G_m(\omega_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(\omega)|^2 d\omega G(\omega). \quad (4.2.11)$$

Для узкополосного фильтра, т. е. для

$$|k(\omega)|^2 = \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (4.2.12)$$

с весьма малым Γ , вместо функции $G_m(\omega_0)$ можно в хорошем приближении рассматривать функцию $G(\omega_0)$.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

А. Предел больших времени $T \rightarrow \infty$.

В этом случае усреднение по времени (4.2.5) сводится к замене $G(\omega, t - v)$ на величину

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0 - T}^{t_0 + T} G(\omega, t - v) dt = G(\omega), \quad (4.2.13)$$

которая не зависит от v . Дальнейшие преобразования проводятся так же, как и в стационарном случае, и приводят к тому же результату:

$$G_m(\omega_0, t_0) |_{T \rightarrow \infty} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k(\omega)|^2 d\omega G(\omega). \quad (4.2.14)$$

Б. Предел малых времен.

Рассмотрим шумовой сигнал, и пусть за время $t_{\text{ш}}$ величина $G(\omega, t + t_{\text{ш}})$ становится сильно отличной от $G(\omega, t)$. Выберем некоторое T так, чтобы $T \ll t_{\text{ш}}$. Тогда при усреднении по времени (4.2.5) $G(\omega, t - v)$ заменится на величину $G(\omega, t_0 - v)$:

$$G_m(\omega_0, t_0) \approx \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega v} k(\omega) k(v) G(\omega, t_0 - v). \quad (4.2.15)$$

¹⁾ Для стационарного случая нет необходимости, кроме усреднения по времени, усреднять также по совокупности, так как последнее усреднение уже не зависит от времени.

Выберем теперь такой фильтр, чтобы время t_{Φ} , в течение которого фильтр дает заметную величину $k(v)$, удовлетворяло неравенству

$$t_{\Phi} \ll t_{\text{ш}} \quad (4.2.16)$$

Тогда можно в $G(\omega, t_0 - v)$ положить $v = 0$, что приводит к

$$G_m(\omega_0, t_0) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |k(\omega)|^2 G(\omega, t_0). \quad (4.2.17)$$

Если ширина частотного спектра Γ функции $|k(\omega)|^2$ мала по сравнению с шириной $\omega_{\text{ш}}$ спектра шума $G(\omega, t)$, то измеряемая нами величина является хорошим приближением к идеальной величине $G(\omega_0, t_0)$:

$$G_m(\omega_0, t_0) \approx G(\omega_0, t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi} |k(\omega)|^2.$$

Так как $\Gamma \ll \omega_{\text{ш}}$, то должно быть справедливо следующее неравенство:

$$\Gamma t_{\Phi} \ll \omega_{\text{ш}} t_{\text{ш}}.$$

Но, согласно принципу неопределенности, нельзя выбрать величину Γt_{Φ} малой по сравнению с единицей. Таким образом, измерение величины $G(\omega, t)$ возможно лишь при $\omega_{\text{ш}} t_{\text{ш}} \gg 1$.

4.3. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Можно с помощью простого способа обобщить наш формализм на случай многих переменных: не будем теперь квадрировать одну переменную, как в (4.2.10), а перемножим две переменные, относящиеся к разным моментам времени, т. е. определим шум на частоте ω , соответствующий переменным α_{μ} , как

$$G_{\mu\nu}(\alpha, \omega, t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \langle \alpha_{\mu}(t + \tau) \alpha_{\nu}(t) \rangle, \quad (4.3.1)$$

где

$$\langle \alpha_\mu(t) \alpha_\nu(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df G_{\mu\nu}(\alpha, f, t). \quad (4.3.2)$$

В выражении (4.3.2) нет множителя $(2\pi)^{-1}$, поскольку мы интегрируем не по ω , а по $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Все остальные результаты разд. 4.2 получаются теперь при соответствующем изменении обозначений.

4.4. КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

До сих пор мы имели дело с классическим рассмотрением шума. Все результаты остаются теми же самыми и для квантового случая, если заменить величину $\alpha(t)\alpha(t')$ эрмитовским оператором, взятым в виде антикоммулятора [46]:

$$\alpha(t)\alpha(t') \rightarrow \frac{1}{2} [\alpha(t)\alpha(t') + \alpha(t')\alpha(t)] = \frac{1}{2} \{\alpha(t), \alpha(t')\}. \quad (4.4.1)$$

Итак, надо рассчитать $\langle \alpha(t)\alpha(t') \rangle$ или более общую величину $\langle \alpha_\mu(t)\alpha_\nu(t') \rangle$. В этом разделе будут обсуждены два простых эксперимента, которые позволяют определить эти величины.

СПЕКТР ФОТОНОВ [47]

Рассмотрим экспериментальную установку (фиг. 4.2), состоящую из источника света (одночастотного лазера) двух зеркал (времени задержки) и фотопластинки (интерференционной плоскости).

Вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ на фотопластинке равен

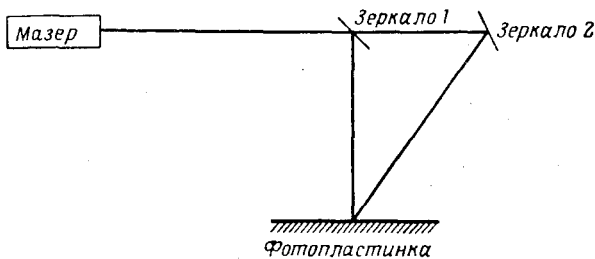
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_1 b \left(t - \frac{d_1(\mathbf{r})}{c} \right) + \mathbf{a}_2 b \left(t - \frac{d_2(\mathbf{r})}{c} \right), \quad (4.4.2)$$

где \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 — функции координаты пластинки, индексы 1 и 2 относятся к первому и второму зеркалам, а b — амплитуда поля на зеркалах. Фотопластинку можно рассматривать как счетчик фотонов, поглощающий и тем самым считающий фотоны. Поэтому измеряемая

величина пропорциональна

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \rangle = & |a_1|^2 \langle b^+ b \rangle + |a_2|^2 \langle b^+ b \rangle + \\ & + a_1^* a_2 \left\langle b^+ \left(t - \frac{d_1}{c} \right) b \left(t - \frac{d_2}{c} \right) \right\rangle + \\ & + a_2^* a_1 \left\langle b^+ \left(t - \frac{d_2}{c} \right) b \left(t - \frac{d_1}{c} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Первые два слагаемых в правой части (4.4.3) представляют собой интенсивности фона, а последние два — ин-



Ф и г. 4.2.

терференционные эффекты. Пусть

$$d_2 > d_1 \quad (4.4.4)$$

и обозначим

$$t = \frac{d_2 - d_1}{c}. \quad (4.4.5)$$

Тогда интерференционные слагаемые примут следующий вид:

$$a_1^* a_2 \langle b^+(\tau) b(0) \rangle + a_2^* a_1 \langle b^+(0) b(\tau) \rangle. \quad (4.4.6)$$

Если величины a_1 и a_2 находятся в фазе, то выражение (4.4.6) сведется к

$$\langle b^+(\tau) b(0) + b^+(0) b(\tau) \rangle. \quad (4.4.7)$$

В отличие от антикоммутиатора

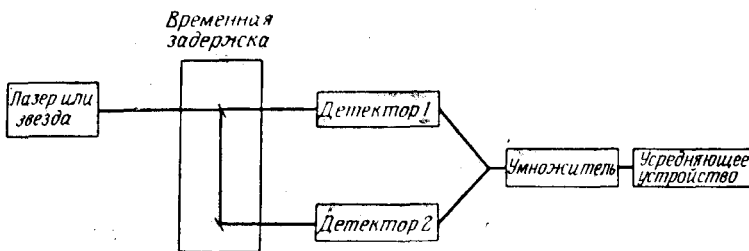
$$\langle \{b^+(\tau) b(0)\} \rangle \quad (4.4.8)$$

выражение (4.4.7) эрмитово и нормально упорядочено, т. е. все b^+ стоят слева от b .

Величина (4.4.8), которая не упорядочена нормально, будет давать ненулевой вклад даже в случае вакуума. Это явное противоречие устраняется, если рассматривать только нормально упорядоченные операторы. В случае предложенных Манделем [48] счетчиков, работающих на вынужденном излучении, надо использовать антинормально упорядоченные операторы.

4.5. ИЗМЕРЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ

На фиг. 4.3 изображена схема более сложного эксперимента, представляющего собой по существу эксперимент Хэнбери Брауна и Твисса [49]. Дробовые шумы



Фиг. 4.3.

в двух детекторах нескоррелированы, поэтому при усреднении смеси этих шумов дробовой эффект ослабляется. На выходе системы получаем

$$\text{Выход} = \langle J_1(t + \tau) J_2(t) \rangle, \quad (4.5.1)$$

где выходной сигнал

$$J_j(t) = \int_{-\infty}^t dt' B(t - t') I_j(t') \quad (4.5.2)$$

определяется входным сигналам, прошедшим через детектор; $I_j(t)$ — интенсивность сигнала, попадающего на детектор, а $B(t - t')$ — реакция аппаратуры. В идеальном случае $B(t - t')$ пропорционально $\delta(t - t')$, и поэтому на выходе измеряется величина

$$\text{Выход} = \langle I_1(t + \tau) I_2(t) \rangle. \quad (4.5.3)$$

Изменения, вносимые величиной $B(t - t')$ в более реальных случаях, по существу не влияют на проводимый нами анализ. Для одночастотного лазера выражение (4.5.3) сводится к следующему:

$$\text{Выход} \sim \langle b^+(t + \tau) b(t + \tau) b^+(t) b(t) \rangle. \quad (4.5.4)$$

Мы не уточняли порядок, в котором написаны эти операторы, поскольку наше рассмотрение классическое. Для детекторов, использующих поглощение фотонов, на выходе указанной выше экспериментальной схемы должно быть поглощено два фотона. Поэтому операторы должны быть нормально упорядочены. В формуле Дайсона теории возмущений операторы хронологически упорядочены [50]. Поэтому на выходе системы получаем величину, пропорциональную

$$\text{Выход} \sim \langle b^+(t) b^+(t + \tau) b(t + \tau) b(t) \rangle. \quad (4.5.5)$$

Проблема упорядочения операторов более подробно изучалась Гольдбергером, Льюисом и Ватсоном [51], Гольдбергером и Ватсоном [52], Келли и Клейнером [53], Глаубером [54, 21]. Келли и Клейнер [53] показали, что для эксперимента с n задержками, работающими по схеме совпадений, на выходе получается величина, пропорциональная

$$\text{Выход} \sim \langle b^+(t_1) b^+(t_2) \dots b^+(t_n) b(t_n) \dots b(t_2) b(t_1) \rangle, \quad (4.5.6)$$

где

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

или

$$\text{Выход} \sim T_N \langle I(t_1) \dots I(t_n) \rangle. \quad (4.5.7)$$

Здесь оператор T_N означает хронологическое и нормальное упорядочение. Существенно отметить, что используемые нами операторы b не относятся к свободному электромагнитному полю, так как они получены из уравнений для db/dt , содержащих взаимодействие поля с атомами и со случайными силами. Поэтому операторы b , относящиеся к различным моментам времени в отличие от операторов свободного поля, не коммутируют, и, следовательно, в уравнениях необходимо провести хронологическое упорядочение операторов.

4.6. СТАТИСТИКА ФОТОТОКА

С помощью классического анализа можно показать, что если на идеальный детектор падает свет с нефлуктуирующей интенсивностью, то вероятность $P(m, T)$ отсчета m фотоэлектронов за время наблюдения T равна

$$P(m, T) = \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega}, \quad (4.6.1)$$

где среднее число отсчетов Ω пропорционально

$$\Omega \sim \varepsilon \langle b^+ b \rangle T. \quad (4.6.2)$$

Здесь ε — характерный для данного детектора множитель; $\langle b^+ b \rangle$ — среднее число фотонов. Выражение (4.6.1) соответствует распределению Пуассона для электронов, выбитых из детектора подающими фотонами. Этот результат справедлив для лазера в области значительно выше порога возбуждения, где стабилизированы флуктуации амплитуды. Для более общего (классического) расчета при наличии флуктуаций определим величину

$$\Omega = \varepsilon \int_t^{t+T} b^+(s) b(s) ds, \quad (4.6.3)$$

где $b^+(s)$ — оператор, комплексно-сопряженный с $b(s)$, а вероятность $P(m, T)$ усредним по флуктуациям. В этом случае выражение (4.6.1) сведется к формуле Мандела [55]

$$P(m, T) = \left\langle \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega} \right\rangle. \quad (4.6.4)$$

Подробный квантовомеханический анализ работы детекторов такого типа, проведенный Глаубером [54, 21] и Келли с Клейнером [53], привел к такому же выражению для $P(m, T)$:

$$P(m, T) = \left\langle T_N \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega} \right\rangle, \quad (4.6.5)$$

где T_N — оператор хронологического и нормального упорядочения операторов поля b и b^+ . К счастью, эти T_N упорядочивающие операторы очень легко рассчитать. В гл. 11 будет дан метод расчета для квантовых и классических величин.

5. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В этой главе мы введем понятие марковских процессов и рассмотрим их свойства. Прежде чем приступить к изложению общей теории, остановимся на двух частных примерах: дробовом шуме и процессах генерации — рекомбинации.

5.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ДРОБОВОЙ ШУМ (ПРОЦЕСС ПУАССОНА)

Определим случайную целочисленную величину $a(t)$ как число событий, происшедших к моменту времени t , и положим

$$a(0) = 0 \quad (5.1.1)$$

так, что $a(t)$ — число событий, происшедших за интервал времени от 0 до t . Предположим, что эти события происходят случайным образом со скоростью ν . (Примером такого процесса является генерация фотоэлектронов.) Тогда изменение во времени вероятности $P(a, t)$, того, что за время t произойдет a событий, описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial P(a, t)}{\partial t} = \nu [P(a-1, t) - P(a, t)]. \quad (5.1.2)$$

Это уравнение означает, что изменение функции $P(a, t)$ со временем равно разности между вероятностью перехода из состояния $(a-1)$ в состояние a и вероятностью перехода из a в $(a+1)$. При $a=0$ уравнение (5.1.2) сводится к

$$\frac{\partial P(0, t)}{\partial t} = -\nu P(0, t). \quad (5.1.3)$$

Так как число происходящих событий всегда положительно, то

$$P(a, t) = 0 \quad \text{при} \quad a < 0. \quad (5.1.4)$$

Из (5.1.3) следует, что

$$P(0, t) = e^{-vt}. \quad (5.1.5)$$

Подстановка выражения

$$P(a, t) = e^{-vt}Q(a, t) \quad (5.1.6)$$

в общее уравнение (5.1.2) приводит к уравнению для $Q(a, t)$:

$$\frac{\partial Q(a, t)}{\partial t} = vQ(a-1, t) \quad (5.1.7)$$

при начальном условии

$$Q(0, t) = 1. \quad (5.1.8)$$

Решение уравнения (5.1.7) методом итераций дает

$$Q(a, t) = \frac{(vt)^a}{a!}, \quad (5.1.9)$$

или

$$P(a, t) = (vt)^a \frac{e^{-vt}}{a!}. \quad (5.1.10)$$

Запишем теперь уравнение (5.1.2) в другой форме. Разложим функцию $P(a-1, t)$ в ряд Тэйлора вблизи точки a :

$$\begin{aligned} P(a-1, t) &= P(a, t) - \frac{\partial P(a, t)}{\partial a} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 P(a, t)}{\partial^2 a} + \dots = \\ &= \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial a}\right) \right] P(a, t). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Тогда уравнение (5.1.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(a, t)}{\partial t} &= v \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial a}\right) - 1 \right] P(a, t) = \\ &= v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^n P(a, t) = \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^n D_n P(a, t), \quad (5.1.13)$$

где

$$D_n = \frac{v}{n!} \quad (5.1.14)$$

представляет собой коэффициент диффузии n -го порядка. Уравнение (5.1.13) — дифференциальное уравнение бесконечного порядка, известное как обобщенное уравнение Фоккера — Планка.

Рассмотрим теперь второй пример.

5.2. ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ — РЕКОМБИНАЦИИ

Определим населенность некоторого состояния как случайную целочисленную переменную n . Предположим, что частицы генерируются со скоростью $G(n)$ и поглощаются (рекомбинируют) со скоростью $R(n)$. Тогда уравнение движения для средних величин имеет вид

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = \langle G_n \rangle - \langle R_n \rangle \equiv \langle A(n) \rangle, \quad (5.2.1)$$

где $\langle A(n) \rangle$ — вектор смещения. Поскольку населенность n -го состояния увеличивается при генерации из $(n-1)$ -го состояния и уменьшается при генерации из n -го состояния, то распределение вероятности $P(n, t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = & G(n-1)P(n-1, t) - G(n)P(n, t) + \\ & + R(n+1)P(n+1, t) - R(n)P(n, t), \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где два последних слагаемых относятся к процессам рекомбинации и соответствуют вероятности перехода из $(n+1)$ -го состояния в n -е и вероятности покинуть n -е состояние. Процесс, рассмотренный в предыдущем разделе, является частным случаем процесса (5.2.2) при $R=0$, $G=v$.

Для получения коэффициента диффузии r -го порядка D_r преобразуем уравнение (5.2.2) аналогично тому, как это было сделано выше [(5.2.11) — (5.1.14)]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial n}\right) - 1 \right] G(n)P(n) + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) - 1 \right] R(n)P(n) = \\ = & \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^r \{ [G(n) + (-1)^r R(n)] P(n) \}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

откуда

$$D_r = \frac{1}{r!} [G(n) + (-1)^r R(n)]. \quad (5.2.4)$$

Таким образом, все коэффициенты диффузии четного порядка пропорциональны сумме скоростей генерации и поглощения, а коэффициенты диффузии нечетного порядка — разности этих скоростей.

В частности, второй момент D_2 , который, как мы увидим, представляет собой момент источника шума, равен

$$D_2 = G + R. \quad (5.2.5)$$

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В дальнейшем мы будем иметь дело с одной переменной $a(t)$, но очевидно, что все рассматриваемые уравнения останутся справедливыми, если под a понимать совокупность переменных

$$\mathbf{a}(t) \equiv [a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)].$$

Условная вероятность $P[a(t_n)/a(t_{n-1}) \dots a(t_2)a(t_1)]$, того, что величина $a(t)$ принимает в момент времени t_n значение $a(t_n)$ при условии, что в прошедшие моменты времени $t_n \geq t_{n-1} \dots \geq t_2 \geq t_1$ ее значения были $a(t_j)$, определяется следующим образом:

$$P[a(t_n)/a(t_{n-1}) \dots a(t_2)a(t_1)] = \frac{P[a(t_n) \dots a(t_1)]}{P[a(t_{n-1}) \dots a(t_1)]}, \quad (5.3.1)$$

где $P[a(t_n) \dots a(t_1)]$ — полная вероятность, т. е. вероятность того, что в моменты времени $t_n \geq t_{n-1} \dots \geq t_2 \geq t_1$ величина $a(t)$ была равна $a(t_n) \dots a(t_1)$. Это уравнение справедливо независимо от марковости процесса.

Для простоты введем обозначение $a(t_n) = a_n$. Применяя метод итераций, получим

$$P(a_n \dots a_2, a_1) = P(a_n/a_{n-1} \dots a_1) P(a_{n-1}/a_{n-2} \dots a_1) \dots \dots P(a_2/a_1) P(a_1). \quad (5.3.2)$$

Случайный процесс будем называть марковским, если

$$P(a_n/a_{n-1} \dots a_2, a_1) = P(a_n/a_{n-1}), \quad (5.3.3)$$

т. е. если вероятность любого события зависит лишь от предшествующего состояния. Марковский процесс не «помнит» о более ранних событиях. Поэтому для марковских процессов уравнение (5.3.2) сводится к

$$P(a_n, \dots, a_2, a_1) = P(a_n/a_{n-1}) P(a_{n-1}/a_{n-2}) \dots P(a_2/a_1) P(a_1), \quad (5.3.4)$$

и, следовательно, вероятность сложного события, происшедшего за большой временной интервал, может быть просто выражена через вероятности переходов $P(a_j/a_{j-1})$ и начальное распределение $P(a_1)$. Для частного случая $n = 3$, разделив обе части уравнения (5.3.4) на $P(a_1)$, перепишем его в виде

$$\frac{P(a_3, a_2, a_1)}{P(a_1)} = P(a_3/a_2) P(a_2/a_1). \quad (5.3.5)$$

Обобщая выражение (5.3.1), определяющее величину $P(a_n/a_{n-1} \dots a_1)$, на случай $P(a_n, a_{n-1} \dots a_r/a_{r-1} \dots a_1)$, найдем

$$P(a_3 a_2/a_1) = P(a_3/a_1) P(a_2/a_1). \quad (5.3.6)$$

Интегрируя это равенство по a_2 , получим условие Чепмена — Колмогорова, связывающее вероятности перехода:

$$P(a_3/a_1) = \int P(a_3/a_2) P(a_2/a_1) da_2. \quad (5.3.7)$$

Строго говоря, в наших старых обозначениях P зависит не только от $a(t_n)$, но и от t_n . Будем называть процесс стационарным, если

$$P(a_n, t_n; a_{n-1}, t_{n-1}, \dots, a_1, t_1) = \\ = P(a_n, t_n + \tau; a_{n-1}, t_{n-1} + \tau; \dots, a_1, t_1 + \tau), \quad (5.3.8)$$

где τ — произвольное время, т. е. если вероятности являются функциями лишь от разности времен. В част-

ности, для стационарного процесса справедливы соотношения

$$P(a_2, t_1/a_1, t_1) = P(a_2, t_2 - t_1/a_1, 0), \quad (5.3.9)$$

$$P(a, t) = P(a, 0) = P(a), \quad (5.3.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(a, t/a_0, t_0) = P(a). \quad (5.3.11)$$

5.4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вернемся к нашим исходным обозначениям и запишем уравнение

$$P(a', t + \Delta t) = \int P(a', t + \Delta t/a, t) P(a, t) da. \quad (5.4.1)$$

В такой форме уравнение справедливо как для марковских, так и для немарковских процессов. Если под величиной $P(a, t)$ подразумевается $P(a, t/a_0, t_0)$, то уравнение (5.4.1) сведется к уравнению (5.3.7) Чепмена — Колмогорова.

Предположим, что моменты вероятности перехода для малых Δt можно разложить в ряд по степеням Δt . В первом порядке по Δt имеем, согласно условию нормировки,

$$\int P(a', t + \Delta t/a, t) da' = 1, \quad (5.4.2)$$

а для $n > 1$

$$\int P(a', t + \Delta t/a, t) (a' - a)^n da' = n! D_n(a, t) \Delta t. \quad (5.4.3)$$

Это уравнение является определением величины $D_n(a, t)$. Заметим, что из (5.4.3) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} n! D_n(a, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int P(a', t + \Delta t/a, t) (a' - a)^n da' = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle [a(t + \Delta t) - a(t)]^n \rangle_{|a(t)=a}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Разложение произвольной функции $f(a')$ в ряд Тэйлора имеет вид

$$f(a') = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} (a' - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (5.4.5)$$

Чтобы получить уравнение движения для функции $f(a)$, умножим уравнение (5.4.1) на $f(a')$, затем проинтегрируем его по da' и заменим функцию $f(a')$ ее разложением (5.4.5) в ряд Тэйлора. Используя также (5.4.2) и (5.4.3), получим

$$\langle f(a) \rangle_{t+\Delta t} = \langle f(a) \rangle_t + \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} \int da P(a, t) f^{(n)}(a) D_n(a, t), \quad (5.4.6)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \langle f(a) \rangle}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle D_n(a, t) \frac{\partial^n f(a)}{\partial a^n} \rangle, \quad (5.4.7)$$

где

$$\langle f(a) \rangle = \int f(a) P(a, t) da. \quad (5.4.8)$$

Записав уравнение (5.4.6) для $f(a) = a$ и a^2 и подставляя в них вектор смещения

$$D_1(a, t) = A \quad (5.4.9)$$

и матрицу коэффициентов диффузии

$$D_2(a, t) = D, \quad (5.4.10)$$

получим полезные соотношения для моментов

$$\frac{\partial \langle a \rangle}{\partial t} = \langle A(a, t) \rangle, \quad (5.4.11)$$

$$\frac{\partial \langle a^2 \rangle}{\partial t} = 2 \langle D(a, t) \rangle + 2 \langle aA \rangle. \quad (5.4.12)$$

Более общее соотношение для многих переменных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a_u a_v \rangle = 2 \langle D_{uv} \rangle + \langle a_u A_v \rangle + \langle A_u a_v \rangle. \quad (5.4.13)$$

Введем теперь переменную α , определяющую отклонение от рабочей точки:

$$\alpha = a - a_0. \quad (5.4.14)$$

Точка a_0 выбрана так, чтобы вектор смещения в ней обращался в нуль:

$$A(a_0) = 0. \quad (5.4.15)$$

Тогда из уравнений (5.4.11) и (5.4.12) получим

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha^2 \rangle = 2 \langle D \rangle + \langle \alpha A \rangle + \langle A \alpha \rangle. \quad (5.4.16)$$

Используя далее квазилинейное приближение для случая одной переменной, т. е.

$$D(a) \approx D(a_0) \quad (5.4.17)$$

и

$$A(a) \approx -\Lambda \alpha, \quad (5.4.18)$$

где

$$\Lambda = - \left. \frac{\partial A}{\partial a} \right|_{a=a_0}, \quad (5.4.19)$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha^2 \rangle = 2D - 2\Lambda \langle \alpha^2 \rangle. \quad (5.4.20)$$

Стационарным решением этого уравнения является хорошо известное соотношение Эйнштейна

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{D}{\Lambda}. \quad (5.4.21)$$

Рассчитаем теперь коэффициенты диффузии для рассмотренного ранее процесса генерации — рекомбинации. Основное уравнение для этого процесса, эквивалентное уравнению (5.2.2), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = & \sum_{n'} \frac{P(n, t + \Delta t | n', t)}{\Delta t} P(n', t) + \sum_{n'} \{G(n') \delta_{n', n-1} + \\ & + R(n') \delta_{n', n+1} - [G(n) + R(n)] \delta_{n, n'}\} P(n', t). \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Согласно выражению (5.4.4), коэффициенты диффузии определяются равенством

$$r! D_r = \frac{\langle (n' - n)^r \rangle}{\Delta t} = \sum_{n'} (n' - n)^r \frac{P(n', t + \Delta t | n, t)}{\Delta t}. \quad (5.4.23)$$

Отсюда при учете (5.4.22) получим

$$\begin{aligned} r! D_r = & \sum_n (n' - n)^r [G(n) \delta_{n, n'-1} + R(n) \delta_{n, n'+1}] = \\ = & G(n) + (-1)^r R(n), \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

т. е. результат, совпадающий с (5.2.4). Из этого же уравнения имеем для вектора смещения A

$$A(n) = G(n) - R(n). \quad (5.4.25)$$

Следовательно, в квазилинейном приближении рабочая точка, величина Λ и коэффициент диффузии определяются равенствами

$$G(n_0) = R(n_0), \quad (5.4.26)$$

$$\Lambda = - \left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{n=n_0} = R'(n_0) - G'(n_0), \quad (5.4.27)$$

$$D = \frac{1}{2} [G(n_0) + R(n_0)]. \quad (5.4.28)$$

Используя теперь соотношение Эйнштейна, получим выражение для флуктуаций, средней населенности

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \frac{D}{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{G(n_0) + R(n_0)}{R'(n_0) - G'(n_0)}. \quad (5.4.29)$$

Рассмотрим автокорреляционную функцию

$$\langle \Delta n(t) \Delta n(0) \rangle.$$

Из уравнений (5.4.7), (5.4.9) и (5.4.17) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \Delta n(t) \rangle = \langle A \rangle = -\Lambda \langle \Delta n \rangle.$$

Поэтому

$$\langle \Delta n(t) \rangle = e^{-\Lambda t} \langle \Delta n(0) \rangle. \quad (5.4.30)$$

Воспользовавшись соотношением (5.2.1), записанным в виде

$$P(\Delta n(t), \Delta n(0)) = P(\Delta n(t)/\Delta n(0)) P(\Delta n(0)), \quad (5.4.31)$$

можно провести два усреднения по времени, причем первое при условии фиксированного значения величины $\Delta n(0)$:

$$\langle \Delta n(t), \Delta n(0) \rangle = \langle \langle \Delta n(t) \rangle |_{\Delta n(0)} \Delta n(0) \rangle = e^{-\Lambda t} \langle [\Delta n(0)]^2 \rangle. \quad (5.4.32)$$

Учтя, наконец, (5.4.29), получим

$$\langle \Delta n(t) \Delta n(0) \rangle = \frac{1}{2} e^{-\Lambda t} \frac{G(n_0) + R(n_0)}{R'(n_0) - G'(n_0)}. \quad (5.4.33)$$

Таким образом, мы определили автокорреляционную функцию для флуктуаций в процессе генерации — рекомбинации. Согласно (4.1.3) — (4.1.4), компонента Фурье этой функции описывает шум.

5.5. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Под обобщенным уравнением Фоккера — Планка мы понимаем уравнение Фоккера — Планка, включающее производные всех порядков. Обычное уравнение Фоккера — Планка содержит лишь вторые производные. Запишем еще раз уравнение (5.4.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f(a) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle D_n(a, t) \frac{\partial^n f(a)}{\partial a^n} \rangle. \quad (5.5.1)$$

Предположим, что обобщенное уравнение Фоккера — Планка имеет вид

$$\frac{\partial P(a, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^n D_n(a) P(a, t). \quad (5.5.2)$$

Покажем, что уравнения (5.5.1) и (5.5.2) совместны и имеют одинаковые коэффициенты D_n . Для вычисления среднего значения произвольной случайной переменной $f(a)$ умножим уравнение (5.5.2) на $f(a)$ и проинтегрируем по a :

$$\frac{\partial \langle f(a) \rangle}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int da f(a) \left(- \frac{\partial}{\partial a} \right)^n D_n(a) P(a, t). \quad (5.5.3)$$

Интегрируя это уравнение по частям, приходим к уравнению (5.5.2):

$$\frac{\partial \langle f(a) \rangle}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int da D_n(a) P(a, t) \left[\left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^n f(a) \right], \quad (5.5.4)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle D_n(a, t) \frac{\partial^n f(a)}{\partial a^n} \rangle. \quad (5.5.5)$$

Таким образом, уравнения (5.5.1) и (5.5.2) согласованы и содержат один и тот же коэффициент диффузии D_n (5.4.4).

Перепишем теперь обобщенное уравнение Фоккера — Планка (5.5.2) в более простом виде. Для этого сделаем подстановку

$$y_{op} = -i \frac{\partial}{\partial a} \quad (5.5.6)$$

и введем обозначение

$$L(y, a, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} (iy)^n D_n(a, t). \quad (5.5.7)$$

Тогда

$$L(y_{op}, a, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} (iy_{op})^n D_n(a, t) = \quad (5.5.8)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{\partial}{\partial a} \right)^n D_n(a, t) \quad (5.5.9)$$

и окончательно

$$\frac{\partial P(a, t)}{\partial t} = - L(y_{op}, a, t) P(a, t). \quad (5.5.10)$$

Заметим, что если y или a являются операторами, то нужно внимательно следить за порядком их расположения. Из (5.5.8) видно, что y надо располагать слева от a .

5.6. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Определим характеристическую функцию $\phi(y, t)$ для нормированной плотности вероятности P :

$$\phi(y, t) = \langle e^{iya} \rangle = \int [\exp(iya)] P(a, t) dt. \quad (5.6.1)$$

Из уравнения (5.6.1) следует

$$\phi(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (iy)^n \frac{\langle a \rangle^n}{n!}, \quad (5.6.2)$$

если моменты $\langle a^n \rangle$ определить как n -е производные по y от функции $\phi(y, t)$ в точке $y = 0$.

Уравнение движения для функции $\phi(y, t)$ вытекает из формулы (5.5.5):

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle D_n(a, t) \frac{\partial^n e^{iy a}}{\partial a^n} \rangle. \quad (5.6.3)$$

Далее имеем

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^n e^{iy a} \right\rangle = (iy)^n \langle e^{iy a} \rangle. \quad (5.6.4)$$

и

$$\langle a e^{iy a} \rangle = \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle e^{iy a} \rangle. \quad (5.6.5)$$

Тогда

$$\langle D_n(a, t) e^{iy a} \rangle = D_n(a_{op}, t) \langle e^{iy a} \rangle, \quad (5.6.6)$$

где

$$a_{op} = -i \frac{\partial}{\partial y}. \quad (5.6.7)$$

Таким образом, уравнение движения для функции $\phi(y, t)$ (5.6.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (iy)^n D_n(a_{op}, t) \phi(y, t), \quad (5.6.8)$$

который после перехода типа (5.5.7) — (5.5.9) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = -L(y, a_{op}, t) \phi(y, t). \quad (5.6.9)$$

У нас уже было уравнение (5.5.10):

$$\frac{\partial P(a, t)}{\partial t} = L(y_{op}, a, t) P(a, t). \quad (5.6.10)$$

Эти два уравнения аналогичны квантовомеханическим уравнениям в координатном и импульсном представлениях. Так же как и в квантовой механике, выбор того или другого представления зависит от особенностей рассматриваемой задачи.

5.7. СВЯЗАННЫЕ СРЕДНИЕ

Для случая двух независимых случайных переменных a и b характеристическая функция $\phi(a + b)$ от переменной $a + b$ равна

$$\langle \exp[iy(a + b)] \rangle = \langle \exp(iya) \rangle \langle \exp(iyb) \rangle, \quad (5.7.1)$$

т. е.

$$\phi(a + b) = \phi(a) \phi(b). \quad (5.7.2)$$

и.и.

$$\ln \phi(a + b) = \ln \phi(a) + \ln \phi(b). \quad (5.7.3)$$

Последнее соотношение наводит на мысль о следующем определении функции $\langle \exp(iya) \rangle$:

$$\langle \exp(iya) \rangle = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy)^n \mu_n(a) \right], \quad (5.7.4)$$

откуда, если a и b — независимые переменные,

$$\mu_n(a + b) = \mu_n(a) + \mu_n(b). \quad (5.7.5)$$

Из уравнения (5.7.4) вытекает, кроме того, следующее определение величины $\mu_n(a)$:

$$\mu_n^L(a) = \langle a^n \rangle^L, \quad (5.7.6)$$

где символом L обозначены связанные моменты. Согласно Тайлу [56], величины μ_n называются также семинвариантами или кумулянтами [57]. Смысл символа L следует из разложения обеих частей уравнения (5.7.4) в ряд и сравнения коэффициентов по y^n . Например,

$$\begin{aligned} \langle a \rangle^L &= \langle a \rangle, & \langle a^2 \rangle^L &= \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2, & \langle a^3 \rangle^L &= \langle (a - \langle a \rangle)^3 \rangle, \\ \langle a^4 \rangle^L &= \langle (a - \langle a \rangle)^4 \rangle - 3[\langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle]^2. \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Таким образом, $\langle a^n \rangle^L$ — характерные корреляторы n -го порядка, которые нельзя получить из корреляторов более низкого порядка. Ниже мы покажем, что для гауссовых переменных только эти моменты существенны. Используя (5.7.6), перепишем выражение (5.7.4) в следующем виде:

$$\langle \exp(iya) \rangle = \exp[\langle \exp(iya) - 1 \rangle^L]. \quad (5.7.8)$$

Если переменная a — Гауссова и \bar{a} — ее среднее значение, то

$$\langle e^{iy a} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy a} e^{-\frac{(a-\bar{a})^2}{2\langle a^2 \rangle}} \frac{da}{2\pi \sqrt{\langle a^2 \rangle}} = \quad (5.7.9)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} y^2 \langle a^2 \rangle + iy \bar{a}}. \quad (5.7.10)$$

В то же время из (5.7.8) следует, что

$$\langle e^{iy a} \rangle = \exp[\langle e^{iy a} - 1 \rangle^L] = \exp \left[iy \langle a \rangle^L - \frac{1}{2} y^2 \langle a^2 \rangle^L + \dots \right]. \quad (5.7.11)$$

Сравнивая выражения (5.7.10) и (5.7.11), получаем, что для гауссовой переменной

$$\langle a^n \rangle^L = 0 \quad \text{при } n > 2. \quad (5.7.12)$$

Уравнение (5.7.12) можно рассматривать как определение гауссовой переменной. Мы уже определили [см. выражение (5.4.4)] коэффициенты диффузии через обычные моменты:

$$n! D_n(a, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle [a(t + \Delta t) - a(t)]^n \rangle}{\Delta t}, \quad (5.7.13)$$

однако их можно определить и через связанные моменты:

$$n! D_n(a, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle [a(t + \Delta t) - a(t)]^n \rangle^L}{\Delta t}, \quad (5.7.14)$$

если отбросить все низшие моменты, т. е. «несвязанные» части, содержащие произведение по крайней мере двух средних величин вида $\langle [a(t + \Delta t) - a(t)]^l \rangle$, где $l \geq 1$. Действительно, поскольку среднее значение, деленное на Δt , остается конечным при переходе к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, то произведение двух средних, деленное на Δt , является величиной порядка Δt , т. е. все несвязанные моменты низшего порядка оказываются более высокого порядка по Δt и могут быть опущены.

Усреднение в уравнениях (5.7.13) и (5.7.14) проводится при начальном условии $a(t) = a$. Используя уравнение (5.7.13) и вводя обозначение $\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t)$, можно переписать выражение (5.5.7) для $L(y, a, t)$

в виде

$$-L(y, a, t) = \frac{\langle [\exp(iy \Delta a) - 1] \rangle^L}{\Delta t}. \quad (5.7.15)$$

Рассмотрим теперь случай дробового шума. Мы видели [см. (5.1.14)], что коэффициенты диффузии D_n равны

$$D_n = \frac{\nu}{n!}. \quad (5.7.16)$$

Тогда уравнение (5.5.7) для $L(y, a, t)$ переходит в

$$-L(y, a, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (iy)^n \frac{\nu}{n!} = \nu (e^{iy} - 1). \quad (5.7.17)$$

Заметим, что $L(y, a, t)$ не зависит от a и точно так же $L(y, a_{op}, t)$ не зависит от a_{op} . Тогда уравнение движения (5.6.9) для характеристической функции $\phi(y, t)$ запишется как

$$\frac{\partial \phi(y, t)}{\partial t} = -L(y, a_{op}, t) \phi(y, t) = \nu (e^{iy} - 1) \phi, \quad (5.7.18)$$

а его решением является функция

$$\phi(y, t) = \exp[\nu t (e^{iy} - 1)]. \quad (5.7.19)$$

Однако из уравнений (5.6.1) и (5.7.8) следует, что

$$\phi(y, t) = \langle e^{iy a} \rangle = \exp[\langle e^{iy a} - 1 \rangle^L]. \quad (5.7.20)$$

Сравнивая теперь показатели экспонент в уравнениях (5.7.19) и (5.7.20), получаем

$$\langle e^{iy a} - 1 \rangle^L = \nu t (e^{iy} - 1),$$

или

$$\langle a^n \rangle^L = \nu t \quad \text{при } n \geq 1, \quad (5.7.21)$$

т. е. все связанные моменты одинаковы и равны среднему числу событий $\langle a \rangle = \nu t$.

5.8. УСРЕДНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО ТРАЕКТОРИЯМ

До сих пор мы имели дело со средними, взятыми в определенный момент времени или самое большое в два различных момента времени. Теперь мы будем рассматривать настоящие многовременные функции.

Целый ряд важных задач в теории случайных процессов может быть сведен к вычислению математического ожидания следующего вида [3, 43, 58 — 60]:

$$M_0 = \left\langle \exp \left[- \int_{t_0}^t Q(a(s), s) ds \right] \right\rangle \Big|_{a(0)=a_0} \quad (5.8.1)$$

или к фурье-компоненте такого выражения. В качестве примера укажем на задачу о флуктуациях при фотодетектировании, где существенна величина $-\int_0^t a^*(s) a(s) ds$.

Мы покажем, что такого типа задача, по крайней мере в классическом случае, действительно может быть решена. Разобьем прежде всего область интегрирования на малые промежутки времени:

$$M_0 = \left\langle \exp \left[- \sum_{j=0}^{n-1} Q(a_j, s_j) \Delta s_j \right] \right\rangle \quad (5.8.2)$$

и преобразуем этот интеграл, согласно (5.4.8), к виду

$$M_0 = \int \exp \left[- \sum_{j=0}^{n-1} Q(a_j, s_j) \Delta s_j \right] \times \\ \times P(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 | a_0) da_n \dots da_1. \quad (5.8.3)$$

Заметим, что в (5.8.3) не содержится интегрирование по da_0 , так как M_0 представляет собой условное среднее значение, взятое при условии $a(t_0) = a_0$. Для расчета полного среднего значения следует провести интегрирование по da_0 :

$$M = \int M_0 P(a_0) da_0. \quad (5.8.4)$$

Для марковского процесса, воспользовавшись выражениями (5.3.2) и (5.3.3), сведем (5.8.3) к следующему виду:

$$M_0 = \prod_{j=0}^{n-1} \int \exp[-Q(a_j, s_j) \Delta s_j] P(a_{j+1} | a_j) da_{j+1}. \quad (5.8.5)$$

Это выражение является по существу фейнмановским интегралом по траектории [61]. Введем теперь величину \hat{P} :

$$\hat{P}(a_{j+1}, t_{j+1} | a_j, t_j) = \exp[-Q(a_j s_j) \Delta s_j] P(a_{j+1}, t_{j+1} | a_j, t_j). \quad (5.8.6)$$

Для малых интервалов времени Δs_j имеем

$$\hat{P}(a_{j+1}, s_{j+1} | a_j s_j) \approx [1 - Q(a_j s_j) \Delta s_j] P(a_{j+1} s_{j+1} | a_j, s_j). \quad (5.8.7)$$

Величину $P(a_{j+1} | a_j)$ можно рассматривать как вероятность перехода для нового марковского процесса. Она обладает обычными свойствами вероятностей перехода, за исключением условия нормировки, которое в первом порядке по Δt имеет вид

$$\int \hat{P}(a', t + \Delta t | a, t) da' = 1 - Q(a, t) \Delta t. \quad (5.8.8)$$

Если предположить, что $P(a, t)$ — плотность систем, то $Q(a, t)$ можно рассматривать как скорость диссипации в этих системах. Высшие моменты величины $\hat{P}(a' | a)$ в первом порядке по Δt совпадают с вычисленными в (5.4.3) моментами для $P(a' | a)$:

$$\int \hat{P}(a', t + \Delta t | a, t) (a' - a)^n da' = n! D_n(a, t) \Delta t. \quad (5.8.9)$$

Возвратимся к выводу уравнения движения для общего оператора (разд. 5.4) или уравнения Фоккера — Планка (разд. 5.5). Поскольку изменяется лишь нулевой момент, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \hat{P}(a, t)}{\partial t} = -Q(a, t) \hat{P}(a, t) - L(y_{op}, a, t) \hat{P}(a, t). \quad (5.8.10)$$

Таким образом, в правой части равенства (5.8.10) стоит оператор Фоккера — Планка и слагаемое, ответственное за потери. В предыдущих рассуждениях мы нигде, за исключением расчета нулевых моментов, не использовали нормировку вероятностей. Поэтому, обобщая (5.3.7), получаем

$$\hat{P}(a_n | a_0) = \int da_{n-1} \dots da_1 \hat{P}(a_n | a_{n-1}) \dots \hat{P}(a_2 | a_1) \hat{P}(a_1 | a_0). \quad (5.8.11)$$

Тогда выражение (5.8.5) примет вид

$$M_0 = \int \hat{P}(a_n | a_0) da_n,$$

или, в более полных обозначениях,

$$M_0 = \int \hat{P}(a_1, t | a_0, t_0) da. \quad (5.8.12)$$

Таким образом, в условиях нормировки для величин \hat{P} затухание входит лишь в показатели экспоненты [см. (5.8.1)]. Заметим, что величина Q может быть как положительной, так и отрицательной.

Введем теперь характеристическую функцию $\hat{\phi}$, которая представляет собой фурье-компоненту функции \hat{P} подобно тому, как ϕ является фурье-компонентой функции P :

$$\hat{\phi}(y, t | a_0, t_0) = \langle e^{iy a} \rangle |_{a(a_0)} = \quad (5.8.13)$$

$$\int e^{iy a} da \hat{P}(a, t | a_0, t_0). \quad (5.8.14)$$

Сравнивая (5.8.14) и (5.8.12), находим

$$M_0 = \hat{\phi}(0, t | a_0, t_0). \quad (5.8.15)$$

Итак, если бы удалось записать уравнение для характеристической функции $\hat{\phi}$, мы тем самым получили бы решение задачи, сформулированной в начале этого раздела. Найдем уравнение движения для характеристической функции $\hat{\phi}$ аналогично выводу уравнения (5.8.10):

$$\frac{\partial \hat{\phi}(y, t)}{\partial t} = -Q(a_{op}, t) \hat{\phi}(y, t) - L(y, a_{op}, t) \hat{\phi}(y, t). \quad (5.8.16)$$

В это уравнение, так же как и в уравнение движения для \hat{P} , входит лишнее слагаемое по сравнению с уравнением (5.6.9) для функции ϕ .

5.9. ЛИНЕЙНОЕ ЗАТУХАНИЕ И ОДНОРОДНЫЙ ШУМ

Применим теперь полученные результаты к случаю линейного затухания и однородного шума. В наших обозначениях линейному затуханию соответствует

$$D_1(a) = A(a) = -\Lambda a, \quad (5.9.1)$$

а однородному шуму

$$D_n(a, t) = D_n(t) \quad \text{при } n \geq 2, \quad (5.9.2)$$

т. е. все $D_n(a)$ для $n \geq 2$ не зависят от a , но могут быть функциями времени. В этом случае оператор L имеет следующий вид:

$$L(y, a, t) = iy\Lambda a + K(y, t), \quad (5.9.3)$$

где

$$-K(y, t) = \sum_{n=2}^{\infty} (iy)^n D_n(t). \quad (5.9.4)$$

Решим теперь уравнения (5.8.10) и (5.8.16) для функций \hat{P} и $\hat{\phi}$. Нас интересует величина M_0 :

$$M_0 = \hat{\phi}(0, t) = \left\langle \exp i \int q(s) a(s) ds \right\rangle \Big|_{a(0)=a_0}. \quad (5.9.5)$$

Уравнение для $\hat{\phi}(y, t)$ решается сравнительно просто, так как величина $L(y, a, t)$ в уравнении (5.9.13) линейна по a . Поэтому уравнение движения для $\hat{\phi}$ (5.8.16) является дифференциальным уравнением первого порядка по y и решается обычными методами. Для случая когда Λ не зависит от времени, получаем (см. разд. 7 работы [3])

$$M_0 = \exp \left[i \int_0^t ds q(s) \langle a(s) \rangle \Big|_{a(0)=a_0} \right] \times \\ \times \exp \left[- \int_0^t K \left(\int_s^t du q(u) e^{(s-u)\Lambda}, s \right) ds \right], \quad (5.9.6)$$

где функция K определена в (5.9.4). Отметим, что при нашем методе решения задачи функция $g(s)$ остается совершенно произвольной. Мы воспользуемся произвольностью этой функции в разд. 6.1 для сравнения с соответствующей задачей Ланжевена. Одинаковость функции для $g(s)$ будет гарантией полной эквивалентности этих двух задач.

5.10. ОБРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение движения (5.8.10) определяет вероятность перехода в последующие моменты времени. Теперь мы хотим получить аналогичное уравнение движения, определяющее вероятности в предыдущие моменты времени. Для этого, используя функцию \hat{P} вместо P (см. разд. 5.8), перепишем уравнение Чепмена — Колмогорова (5.3.7), (5.4.1) в следующем виде

$$\hat{P}(a, t | a_0, t_0 - \Delta t) = \int \hat{P}(a, t | a', t_0) da' \hat{P}(a', t_0 | a_0, t_0 - \Delta t). \quad (5.10.1)$$

Разлагая функцию $\hat{P}(a, t | a', t_0)$ в ряд Тэйлора в окрестности точки a_0 :

$$\begin{aligned} \hat{P}(a, t | a', t_0) = & \hat{P}(a, t | a_0, t_0) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a' - a_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial a_0} \right)^n \hat{P}(a, t | a_0, t_0) \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

и принимая во внимание выражения (5.8.8) и (5.8.9), получим обратное (по времени) уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}(a, t | a_0, t_0)}{\partial t} = & Q(a_0, t_0) \hat{P}(a, t | a_0, t_0) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} D_n(a_0, t_0) \left(\frac{\partial}{\partial a_0} \right)^n \hat{P}(a, t | a_0, t_0). \end{aligned} \quad (5.10.3)$$

Это обратное уравнение полезно при расчетах многовременных средних, когда требуется вычисление интегралов от функций \hat{P} . Так как уравнение (5.10.3) содержит производные по a , его можно проинтегрировать по a и, учтя (5.8.12), получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0(a_0, t, t_0)}{\partial t_0} = & Q(a_0, t_0) M_0(a_0, t, t_0) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} D_n(a_0, t_0) \left(\frac{\partial}{\partial a_0} \right)^n M_0(a_0, t, t_0). \end{aligned} \quad (5.10.4)$$

Таким образом, развит метод исследования задач, сформулированных в начале разд. 5.8.

6. ЛАНЖЕВЕНОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В этой главе будет рассмотрен метод Ланжевена, показана его эквивалентность и преимущество по сравнению с марковской техникой, о которой шла речь в предыдущей главе. Для простоты снова будем иметь дело только с одной переменной a , помня, что уравнения могут быть легко обобщены, если a представляет собой совокупность переменных $a = \{a_1, \dots, a_n\}$.

6.1. ОДНОРОДНЫЙ ШУМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАТУХАНИЕМ

Покажем сначала эквивалентность метода Ланжевена и марковской техники, использованной в разд. 5.9. Определим ланжевенровский процесс с помощью уравнения

$$\frac{da}{dt} + \Lambda(t)a = F(a, t), \quad (6.1.1)$$

где случайный характер переменной a обусловлен случайным источником шума F . Для однородного шума

$$F(a, t) = F(t), \quad (6.1.2)$$

поэтому уравнение (6.1.1) можно переписать в виде

$$\frac{da}{dt} + \Lambda(t)a = F(t). \quad (6.1.3)$$

Статистика источников шума определяется следующими равенствами:

$$\langle F(t) \rangle \equiv 0, \quad (6.1.4)$$

$$\langle F(t_1) F(t_2) \rangle \equiv 2D_2(t_1) \delta(t_1 - t_2) = 2D(t_1) \delta(t_1 - t_2), \quad (6.1.5)$$

$$\langle F(t_1) \dots F(t_n) \rangle^L \equiv n! D_n(t_1) \prod_{i=1}^{n-1} \delta(t_i - t_{i+1}), \quad (6.1.6)$$

где L — связанное среднее, определяемое выражением (5.7.8) или, в более явной форме, равенством

$$\langle \exp i \int y(s) F(s) ds \rangle = \exp \left\{ \langle \exp [i \int y(s) F(s) ds] - 1 \rangle^L \right\}, \quad (6.1.7)$$

а $y(s)$ — произвольная функция s . Заметим, что поскольку функции F зависят лишь от времени t , то D также являются лишь функциями t и поэтому представляют собой однородные функции. Разлагая правую часть равенства (6.1.7) в ряд, получаем

$$\langle \exp i \int y(s) F(s) ds \rangle = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int ds_1 \dots \dots ds_n y(s_1) \dots y(s_n) \langle F(s_1) \dots F(s_n) \rangle^L \right\}. \quad (6.1.8)$$

Поскольку $y(s)$ не зависит от a , то, используя формулы (6.1.4) — (6.1.6), можно переписать уравнение (6.1.8) в виде

$$\langle \exp i \int y(s) F(s) ds \rangle = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int ds [y(s)]^n D_n(s) \right\}. \quad (6.1.9)$$

Введем теперь функцию $K[y(s), s]$, определив ее аналогично выражению (5.9.4):

$$K(y, t) = \sum_{n=2}^{\infty} (iy)^n D_n(t). \quad (6.1.10)$$

Тогда (6.1.9) преобразуется в

$$\langle \exp i \int y(s) F(s) ds \rangle = \exp \left\{ - \int ds K[y(s), s] \right\}. \quad (6.1.11)$$

Если для простоты положить $\Lambda(t) = \Lambda$, ланжевеновское уравнение движения (6.1.3) для функции $a(t)$ примет вид

$$\frac{da}{dt} + \Lambda a = F(t). \quad (6.1.12)$$

Более общий случай $\Lambda = \Lambda(t)$ рассмотрен в разд. 2 работы [4]. Решением уравнения (6.1.12) является

$$a(u) = e^{-\Lambda u} a(0) + \int_0^u e^{-\Lambda(u-s)} F(s) ds. \quad (6.1.13)$$

Оценим величину (5.9.5):

$$M_0 = \left\langle \exp i \int_0^t q(s) a(s) ds \right\rangle \Big|_{a(0)=a_0}. \quad (6.1.14)$$

Подставляя (6.1.13) в (6.1.14) и повторяя рассуждения, приведенные в первой части этого раздела, получаем

$$M_0 = \exp \left[i \int_0^t q(u) \langle a(u) \rangle \Big|_{a(0)=a_0} du \right] \times \\ \times \left\langle \exp \left[i \int_0^t ds h(s, t) F(s) \right] \right\rangle \Big|_{a(0)=a_0}, \quad (6.1.15)$$

где

$$h(s, t) = \int_0^t du q(u) e^{-\Lambda(u-s)}. \quad (6.1.16)$$

Последний множитель в (6.1.15) такого же типа, как и выражение (6.1.11), только $y(s)$ заменено на $h(s, t)$. Используя формулу (6.1.11), имеем

$$M_0 = \exp \left[i \int_0^t q(u) \langle a(u) \rangle \Big|_{a_0} du \right] \exp \left[- \int_0^t K[h(s, t), t] ds \right], \quad (6.1.17)$$

где функция $K(y, t)$ определена в (6.1.10). Подставляя (6.1.16) в (6.1.17) и замечая, что в рассматриваемом случае $K(y, t)$ не зависит от a , находим

$$M_0 = \exp \left[i \int_0^t q(u) \langle a(u) \rangle \Big|_{a_0} du \right] \times \\ \times \exp \left[- \int_0^t ds K \left(\int_0^t du q(u) e^{-\Lambda(u-s)}, s \right) \right], \quad (6.1.18)$$

что совпадает с формулой (5.9.6), полученной при исследовании соответствующего марковского процесса.

Таким образом, можно утверждать, что из-за произвольности $q(u)$ полученное решение ланжевенковской задачи настолько произвольно, что оно приводит к тем же результатам, как и рассмотренные в гл. 5 марковские процессы. Можно получить дополнительные сведения о свойствах функции M_0 . Пусть, например, мы хотим рассчитать функцию $\phi(y, t)$ при условии $a(0) = a_0$. Тогда

$$\phi(y, t | a_0, 0) = \langle e^{iy a(t)} \rangle_{|a(0)=a_0}. \quad (6.1.19)$$

Положим

$$q(u) = y\delta(u - t). \quad (6.1.20)$$

Из формул (6.1.14) и (6.1.18) найдем

$$\begin{aligned} M_0 = \phi(y, t | a_0, 0) = \\ = \exp[iy \langle a(t) \rangle_{|a(0)=a_0}] \exp\left[-\int_0^t K(ye^{-\Lambda(t-s)}, s) ds\right]. \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

Функция $\phi(y, t | a_0, 0)$, является фурье-компонентой от плотности вероятности $P(a, t | a_0, 0)$. Поэтому

$$P(a, t | a_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iy a} \phi(y, t | a_0, 0) dy = \quad (6.1.22)$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2\pi} \int dy \exp[iy(a - \langle a(t) \rangle_{|a(0)=a_0})] \times \\ \times \exp\left[-\int_0^t K(ye^{-\Lambda(t-s)}, s) ds\right]. \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

Это выражение представляет собой записанную в интегральной форме функции Грина для дифференциального уравнения в частных производных (5.5.2). Простота получения этого решения является одним из преимуществ ланжевенковского метода.

6.2. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ ДРОБОВОГО ШУМА

Развитый выше метод можно использовать при исследовании дробового шума, для чего в уравнении (6.1.3) необходимо положить $\Lambda(t) = 0$, т. е. уравнение

движения для случайной переменной a зависит только от шума:

$$\frac{da}{dt} = G(t). \quad (6.2.1)$$

Будем рассматривать шум как сумму случайных импульсов — дробинкок дробового шума:

$$G(t) = \sum_k \eta_k \delta(t - t_k). \quad (6.2.2)$$

Подстановка (6.2.2) в (6.2.1) дает

$$\frac{da}{dt} = \sum_k \eta_k \delta(t - t_k), \quad (6.2.3)$$

т. е. каждый раз, когда импульс воздействует на систему, a увеличивается на величину η_k . Если, например, $\eta_k = \pm 1$, то при воздействии каждого импульса на систему a увеличивается или уменьшается на единицу.

Допустим теперь, что скачки η_k не зависят друг от друга и происходят со средней скоростью ν , а распределение положительных скачков $g(\eta)$ нормировано:

$$\int g(\eta) d\eta = 1 \quad (6.2.4)$$

и однородно по времени, т. е. $g(\eta)$ явно не зависит от t . В дальнейшем будет предполагаться, что t_k , так же как и η_k , однородно распределены по времени и не зависят друг от друга, т. е. отдельные импульсы некоррелированы. Моменты D_n определяются выражением (6.1.9). Нам

необходимо вычислить величину $\left\langle \exp i \int_0^T y(s) G(s) ds \right\rangle$.

Учтя (6.2.2), находим

$$\left\langle \exp i \int_0^T y(s) G(s) ds \right\rangle = \prod_{k=1}^N \langle \exp i \eta_k y(t_k) \rangle. \quad (6.2.5)$$

Вычитая и добавляя единицу к экспоненте в формуле (6.2.5), получим

$$\begin{aligned} \left\langle \exp i \int_0^T y(s) G(s) ds \right\rangle &= \\ &= \prod_{k=1}^N \int g(\eta_k) d\eta_k \{1 + \langle \exp i\eta_k y(t_k) \rangle - 1\}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

По предположению, распределение t_k однородно, т. е. операцию усреднения $\langle \dots \rangle$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T [\dots] dt_k. \text{ Поэтому} \\ \left\langle \exp i \int_0^T y(s) G(s) ds \right\rangle &= \\ &= \prod_{k=1}^N \int g(\eta_k) d\eta_k \left\{ 1 + \frac{1}{T} \int_0^T \{ \exp [i\eta_k y(t_k)] - 1 \} dt_k \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Но мы, кроме того, предположили, что все N усреднения тождественны между собой, т. е.

$$\begin{aligned} \left\langle \exp i \int_0^T y(s) G(s) ds \right\rangle &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{T} \int g(\eta) d\eta \int_0^T \{ \exp [i\eta y(\tau)] - 1 \} d\tau \right)^N. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Пусть теперь N и T возрастают, а функция $y(\tau)$ велика вблизи точки $\tau = t$ и достаточно быстро убывает с удалением от этой точки, чтобы интеграл по τ сходил-ся. Используя также соотношение

$$\left(1 + \frac{x}{T} \right)^N \approx \exp \left(\frac{N}{T} x \right) = \exp (vx), \quad (6.2.9)$$

получаем

$$\left\langle \exp i \int_0^T y(s) G(s) ds \right\rangle = \\ = \exp \left(\nu \int g(\eta) d\eta \int_0^T \{ \exp [i\eta y(\tau)] - 1 \} d\tau \right). \quad (6.2.10)$$

Если разложить это выражение в ряд по y и сравнить полученный результат с формулой (6.1.9), то окажется, что

$$n! D_n = \nu \int g(\eta) d\eta \eta^n \equiv \nu \langle \eta^n \rangle. \quad (6.2.11)$$

Таким образом, из (6.1.4) — (6.1.6) следует, что связанные моменты функции G равны

$$\langle G(t_1) \dots G(t_n) \rangle^L = \nu \langle \eta^n \rangle \prod_{i=1}^{n-1} \delta(t_i - t_{i+1}). \quad (6.2.12)$$

Если η может принимать лишь значение $+1$:

$$g(\eta) = \delta(\eta - 1), \quad (6.2.13)$$

то a может лишь скачкообразно возрастать на $+1$, и тогда из формулы (6.2.11) вытекает полученное выше соотношение (5.1.14) для моментов элементарного дробового шума

$$D_n = \frac{\nu}{n!}. \quad (6.2.14)$$

Если $\eta = \pm 1$, т. е.

$$g(\eta) = P_{\text{приход}} \delta(\eta - 1) + P_{\text{уход}} \delta(\eta + 1), \quad (6.2.15)$$

то a может скачкообразно увеличиваться или уменьшаться на единицу. Тогда из формулы (6.2.11) получается выражение (5.2.4) для моментов процесса генерации — рекомбинации

$$D_n = \frac{\nu}{n!} [P_{\text{приход}} + (-1)^n P_{\text{уход}}] = \frac{1}{n!} [\nu_{\text{приход}} + (-1)^n \nu_{\text{уход}}], \quad (6.2.16)$$

где $\nu_{\text{приход}}$ и $\nu_{\text{уход}}$ — скорости генерации и поглощения. Заметим, что элементарный дробовой шум представляет

собой однородный процесс, поэтому величины D_n не зависят от случайной переменной, в то время как процесс генерации — рекомбинации не однороден. Это обстоятельство отнюдь не тривиально.

6.3. ПРОЦЕСС ФОККЕРА — ПЛАНКА

Рассмотрим теперь такой ланжевеновский процесс, который сводится к обычному уравнению Фоккера — Планка, т. е. к обобщенному уравнению Фоккера — Планка, в котором оставлены лишь вторые производные. Позже мы увидим, что классическая функция распределения для лазера, соответствующая его матрице плотности, удовлетворяет обычному уравнению Фоккера — Планка.

Рассмотрим нелинейный Ланжевеновский процесс, описываемый уравнением

$$\frac{da}{dt} = B(a) + G[a(t), f(t)]. \quad (6.3.1)$$

В общем случае на функцию G не накладываются никакие ограничения. Однако мы часто будем пользоваться функцией G вида

$$G[a(t), f(t)] = \sigma(a)f(t). \quad (6.3.2)$$

Коэффициенты B и σ могут оказаться явными функциями времени, но мы нигде не будем выписывать эту зависимость. Предположим, что

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad (6.3.3)$$

$$\langle f(t)f(u) \rangle = 2\delta(t-u), \quad (6.3.4)$$

$$\langle f(t_1) \dots f(t_n) \rangle^L = 0 \quad \text{при } n > 2. \quad (6.3.5)$$

Для процесса Фоккера — Планка сила $f(t)$ должна иметь гауссовский характер, т. е. удовлетворять условию (6.3.5). Для любого процесса Фоккера — Планка можно сконструировать соответствующий ланжевеновский процесс, и наоборот. (Существует, однако, множество ланжевеновских процессов, которые сводятся к одному и тому же процессу Фоккера — Планка.) Кроме приведенных выше равенств, предположим, что при

фиксированном a

$$\langle G[a, f(t)] \rangle = 0. \quad (6.3.6)$$

Усреднение в (6.3.6) проводится при учете статистических свойств функции f . В тех случаях, когда переменная $a(t)$ фиксируется, будем обозначать ее просто a , во всех других случаях $a(t)$. Заметим, что при выборе функции G в виде $G = \sigma(a)f(t)$ условие $\langle \sigma(a)f(t) \rangle = 0$ при фиксированном a означает $\langle f(t) \rangle = 0$. Процесс, определяемый уравнением (6.3.1) при дополнительном условии (6.3.2), является марковским, так как величину $a(t + \Delta t)$ можно выразить через $a(t)$, причем результат не будет содержать информации о функции $a(u)$ для $u < t$. [Согласно (6.3.3) — (6.2.5), значения функции f в произвольный момент времени t не зависят от значений f в любой другой момент времени t' , а так как f не является функцией a , то $f(t)$ не зависит также от значений a в любой предшествующий момент времени.] Теперь, исходя из формулы (5.7.10) для марковских процессов, можно рассчитать моменты

$$D_n(a, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{([a(t + \Delta t) - a(t)]^n)}{\Delta t}. \quad (6.3.7)$$

Таким образом, нам необходимо найти значение функции

$$\Delta a(t) = a(t + \Delta t) - a(t) \quad (6.3.8)$$

в первом порядке по Δt . Перепишем уравнение (6.2.1) в интегральной форме

$$\Delta a(t) = \int_t^{t+\Delta t} B[a(s)] ds + \int_t^{t+\Delta t} G[a(s), f(s)] ds. \quad (6.3.9)$$

Будем решать это уравнение методом итераций. В нулевом порядке $a(s) = a(t) = a$. При усреднении эта величина вообще не должна рассматриваться как случайная благодаря условию $a(t) = a$. В первом приближении

$$(\Delta a)_1 = B(a) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} G[a, f(s)] ds \quad (6.3.10)$$

или

$$a(s) = a(t) + B(a)(s-t) + \int_t^s G[a, f(s')] ds'. \quad (6.3.11)$$

Подставляя (6.3.11) в (6.3.9) и удерживая лишь слагаемые порядка Δt , получим

$$\begin{aligned} \Delta a = (\Delta a)_2 = & B(a) \Delta t \int_t^{t+\Delta t} G[a, f(s)] ds + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial G[a, f(s)]}{\partial a} ds \int_t^s G[a, f(s')] ds'. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Найдем теперь моменты D_n для функции G , определяемой выражением (6.3.2). Используя условие (6.3.5), имеем для $n > 2$ в первом порядке по Δt

$$\langle (\Delta a)^n \rangle^L = 0. \quad (6.3.13)$$

Тогда из (6.3.7) следует, что для $n > 2$ все $D_n = 0$, и мы имеем дело с процессом Фоккера — Планка. Для $n = 2$ выражения (6.3.3) — (6.3.7) приводят к

$$D_2(a, t) = \frac{1}{2} \frac{\langle (\Delta a)^2 \rangle^L}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(a)}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} du \langle f(s) f(u) \rangle, \quad (6.3.14)$$

$$D_2(a, t) = \sigma^2(a) = D(a, t), \quad (6.3.15)$$

а при $n = 1$

$$\begin{aligned} D_1(a, t) &= \frac{\langle \Delta a \rangle}{\Delta t} = \\ &= B(a) + \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^s \left\langle \frac{\partial G[a, f(s)]}{\partial a} G[a, f(s')] \right\rangle ds', \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

$$= B(a) + \frac{1}{\Delta t} \sigma(a) \frac{\partial \sigma(a)}{\partial a} + \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^s ds' \langle f(s) f(s') \rangle, \quad (6.3.17)$$

$$D_1(a, t) = B(a) + \sigma(a) \frac{\partial \sigma(a)}{\partial a} \equiv A(a, t). \quad (6.3.18)$$

Итак, мы показали, что, задав процесс Фоккера — Планка, характеризуемый величинами A и D , можно сконструировать ланжевеновский процесс

$$\frac{da}{dt} = B(a) + \sigma(a) f(t), \quad (6.3.19)$$

если положить

$$\sigma = \sqrt{D}, \quad (6.3.20)$$

$$B = A - \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial a}, \quad (6.3.21)$$

и, наоборот, из уравнений (6.3.20), (6.3.21) можно определить A и D .

Рассмотрим следующий пример:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\lambda a + f(t) a. \quad (6.3.22)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$a(t) = a(0) \exp \left[-\lambda t + \int_0^t f(s) ds \right]. \quad (6.3.23)$$

Поэтому

$$\langle a(t) \rangle = a(0) \left\langle \exp \left[-\lambda t + \int_0^t f(s) ds \right] \right\rangle. \quad (6.3.24)$$

Используя соотношение (5.7.8), находим

$$\langle a(t) \rangle |_{a(0)} = a(0) \exp \left\{ \left\langle \exp \left[-\lambda t + \int_0^t f(s) ds \right] - 1 \right\rangle \right\} \quad (6.3.25)$$

или, поскольку все связанные средние от функции f , за исключением выражения $\langle f(s) f(u) \rangle$, обращаются в нуль,

$$\langle a(t) \rangle |_{a(0)} = a(0) e^{-\lambda t} \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^t ds' \langle f(s) f(s') \rangle \right]. \quad (6.3.26)$$

Преобразуем формулу (6.3.23):

$$x = \ln \frac{ae^{\lambda t}}{a(0)} = \int_0^t f(s) ds \equiv H \quad (6.3.27)$$

и получим уравнение движения для x :

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \quad (6.3.28)$$

Предположим теперь, что функция $f(t)$ — гауссова, но не обязательно дельта-скоррелирована (что означало бы марковость процесса). Тогда вероятность значения x в момент времени t $P(x, t)$ обязательно гауссова и поэтому может быть записана в нормированном виде следующим образом:

$$P(x, t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\langle H^2 \rangle}\right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\langle H^2 \rangle}}, \quad (6.3.29)$$

где, согласно уравнению (6.3.28), второй момент $\langle H^2 \rangle$ равен

$$\langle H^2 \rangle = \int_0^t ds \int_0^t ds' \langle f(s)f(s') \rangle. \quad (6.3.30)$$

Согласно (6.3.27),

$$dx = \frac{da}{a}. \quad (6.3.31)$$

Возвращаясь к случайной переменной a , перепишем выражение (6.3.29) в форме

$$P(a, t | a_0, t_0) da = \frac{da}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle H^2 \rangle} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\ln^2 \left(\frac{ae^{\lambda t}}{a(0)} \right)}{\langle H^2 \rangle} \right]. \quad (6.3.32)$$

6.4. СРЕДНИЕ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИСТОЧНИКОВ ШУМА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ФОККЕРА — ПЛАНКА

В разд. 6.3 мы ограничились случаем одной переменной. Обратимся теперь к случаю многих переменных и рассмотрим произвольную функцию $M(a)$ совокупности

случайных переменных $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$, которые удовлетворяют обычному уравнению Ланжевена

$$\frac{da_i}{dt} = A_i(\mathbf{a}) + F_i(\mathbf{a}, t),$$

$$\langle F_j(s) F_j(t) \rangle = 2D_{ij}(\mathbf{a}, t) \delta(s - t); \quad F_i(s) \equiv F_i[\mathbf{a}(s), s]. \quad (6.4.1)$$

Заметим, что это уравнение, вообще говоря, описывает нелинейный процесс. Мы хотим рассчитать величину $\langle M[\mathbf{a}(t), t] F_j(t) \rangle$. Предположим, что

$$\langle M[\mathbf{a}(s), s] F_j(t) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad s < t, \quad (6.4.2)$$

т. е. источники шума в момент времени t не зависят от переменных \mathbf{a} в моменты времени $s < t$. Приводимый ниже расчет будет проще, чем метод итераций, использованный в предыдущем разделе. Положим

$$t_c = t - \varepsilon,$$

а в конце расчета совершим предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$.

Введем обозначение $M(t) \equiv M[\mathbf{a}(t), t]$ и преобразуем выражение $\langle M(t) F_j(t) \rangle$, используя условие (6.4.2):

$$\langle M(t) F_j(t) \rangle = \langle [M(t_c) + M(t) - M(t_c)] F_j(t) \rangle = \quad (6.4.3)$$

$$= \left\langle \int_{t_c}^t ds \frac{dM(s)}{ds} F_j(t) \right\rangle = \quad (6.4.4)$$

$$= \left\langle \int_{t_c}^t ds \left[\frac{\partial M}{\partial s} + \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} \frac{da_i}{ds} \right] F_j(t) \right\rangle \quad (6.4.5)$$

или принимая во внимание (6.4.1):

$$\begin{aligned} \langle M(t) F_j(t) \rangle &= \left\langle \int_{t_c}^t ds \frac{\partial M}{\partial s} F_j(t) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \int_{t_c}^t ds \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} A_i(\mathbf{a}) F_j(t) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \int_{t_c}^t ds \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} F_i(s) F_j(t) \right\rangle. \quad (6.4.6) \end{aligned}$$

В правой части соотношения (6.4.6) только последнее слагаемое обладает настолько сильной сингулярностью, что оно остается конечным при $t - t_c = \varepsilon \rightarrow 0$.

В наинизшем порядке по ε $\left(\frac{\partial M}{\partial a_i}\right)_s \approx \left(\frac{\partial M}{\partial a_i}\right)_{t_c}$, так что

$$\langle M(t) F_j(t) \rangle = \sum_i \left(\frac{\partial M}{\partial a_i}\right)_{t_c} \int_{t_c}^t ds \langle F_i(s) F_j(t) \rangle. \quad (6.4.7)$$

Используя выражения для корреляторов (6.4.1) и опуская множитель 2, проведем интегрирование в (6.4.7) лишь по половине области определения δ -функции, что дает

$$\langle M(t) F_j(t) \rangle = \sum_i \left[\frac{\partial M(\mathbf{a})}{\partial a_i} D_{ij}(\mathbf{a}) \right]_{t_c}. \quad (6.4.8)$$

В правой части равенства (6.4.8) следует сначала взять переменную \mathbf{a} при фиксированном t_c , а затем рассматривать флуктуации \mathbf{a} в момент времени t , т. е. $\mathbf{a}(t_c) +$ флуктуации. Иначе говоря, мы вычислили корреляции компонент этой флуктуации с функцией $F_j(t)$. После перехода к пределу $t_c \rightarrow t$ выражение (6.4.8) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle M(t) F_j(t) \rangle|_{\mathbf{a}} &= \left\langle \sum_i \frac{\partial M[\mathbf{a}(t)]}{\partial a_i} D_{ij}[\mathbf{a}(t)] \right\rangle|_{\mathbf{a}} = \\ &= \sum_i \frac{\partial M(\mathbf{a})}{\partial a_i} D_{ij}(\mathbf{a}), \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

т. е. среднее значение находится при условии $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}$ в момент времени t . Мы могли бы также усреднить обе части равенства (6.4.9) при условии, что переменная \mathbf{a} фиксирована в гораздо более ранний момент времени, что дает

$$\langle M(t) F_j(t) \rangle|_{\mathbf{a}(0)} = \left\langle \sum_i \frac{\partial M[\mathbf{a}(t)]}{\partial a_i} D_{ij}[\mathbf{a}(t)] \right\rangle|_{\mathbf{a}(0)}. \quad (6.4.10)$$

Для расчета коэффициента диффузии (6.3.14) достаточно было определить величину Δa в первом порядке по Δt . Покажем теперь, что вторые моменты для

ланжевенского процесса также можно оценить, используя наименьшее приближение для сил. Так, например,

$$\sigma[a(t)]f(t) = \sigma(a_c)f(t) + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}\right)_c (a - a_c)f(t) \approx \quad (6.4.11)$$

$$\approx \sigma(a_c)f(t) + \frac{\partial\sigma}{\partial a_c} \langle (a - a_c)f(t) \rangle. \quad (6.4.12)$$

Опущенные в формуле (6.4.12) слагаемые содержат произведение двух или более величин f и не дают вклада в связанные моменты второго и высших порядков. Таким образом, для процессов Фоккера — Планка можно написать

$$\sigma[a(t)]f(t) = \langle \sigma[a(t)]f(t) \rangle + \sigma(a_c)f(t), \quad (6.4.13)$$

$$\langle \sigma[a(t)]f(t) \mu[a(t)]f(u) \rangle^L = \sigma(a_c) \mu(a_c) \langle f(t)f(u) \rangle^L. \quad (6.4.14)$$

6.5. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Усредненное уравнение движения для случайной функции $M(\mathbf{a})$ имеет следующий вид:

$$\left\langle \frac{dM}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial M}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} \right\rangle. \quad (6.5.1)$$

Используя (6.4.1), получаем

$$\left\langle \frac{dM}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial M}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} A_i \right\rangle + \left\langle \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} F_i \right\rangle, \quad (6.5.2)$$

откуда, учитывая (6.4.10), находим

$$\left\langle \frac{d}{dt} M[\mathbf{a}(t), t] \right\rangle = \left\langle \frac{\partial M}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \sum_i \frac{\partial M}{\partial a_i} A_i \right\rangle + \left\langle \sum_{ij} \frac{\partial^2 M}{\partial a_i \partial a_j} D_{ij} \right\rangle. \quad (6.5.3)$$

Выписав явный вид этого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int M(\mathbf{a}, t) P(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} &= \int \frac{\partial M}{\partial t} P(\mathbf{a}, t) d\mathbf{a} + \\ &+ \sum_i \int \frac{\partial M}{\partial a_i} A_i P d\mathbf{a} + \sum_{ij} \int \frac{\partial^2 M}{\partial a_i \partial a_j} D_{ij} P d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

и проинтегрировав по частям два последних слагаемых, имеем

$$M(\mathbf{a}, t) \left[\frac{\partial P}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial (A_i P)}{\partial a_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 (D_{ij} P)}{\partial a_i \partial a_j} \right] = 0. \quad (6.5.5)$$

Так как функция M произвольна, то из (6.5.5) следует обычное уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial P(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial (A_i P)}{\partial a_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 [D_{ij}(\mathbf{a}) P]}{\partial a_i \partial a_j}. \quad (6.5.6)$$

Отсюда можно заключить, что вектор смещения A_i и коэффициенты диффузии D_{ij} ланжевеновского процесса (6.4.1) должны иметь точно такой же вид, как и соответствующие величины для марковского процесса:

$$A_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta a_i \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (a'_i - a_i) P(\mathbf{a}', t + \Delta t | \mathbf{a}, t) d\mathbf{a}', \quad (6.5.7)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta a_i \Delta a_j \rangle}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \int (a'_i - a_i)(a'_j - a_j) P(\mathbf{a}', t + \Delta t | \mathbf{a}, t) d\mathbf{a}'. \quad (6.5.8)$$

Метод, использованный в этом разделе для получения уравнения Фоккера — Планка из усредненного уравнения движения для случайной функции, окажется полезным и в квантовомеханическом случае. Уравнение движения для произвольного оператора сведется к уравнению Фоккера — Планка для функции распределения, являющейся s -числом и связанной с оператором плотности условием антинормального упорядочения.

6.6. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССОВ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Произведя замену переменных $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}'$, где

$$a'_i = a'_i(\mathbf{a}, t), \quad (6.6.1)$$

получим из уравнения Ланжевена (6.4.1) совместно с условием (6.3.3) выражение для трансформированного

вектора смещения

$$\langle A_i \rangle = \left\langle \frac{da'_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a'_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \sum_k \frac{\partial a'_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} \right\rangle. \quad (6.6.2)$$

Воспользовавшись теперь равенством (6.5.3), имеем

$$\begin{aligned} \langle A_i \rangle = \left\langle \frac{da'_i}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a'_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \sum_k \frac{\partial a'_i}{\partial a_k} A_k \right\rangle + \\ + \left\langle \sum_{k, l} \frac{\partial^2 a'_i}{\partial a_k \partial a_l} D_{kl} \right\rangle + \dots \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

Аналогично получим трансформированные коэффициенты диффузии D'_{ij} , комбинируя уравнения (6.4.1), (6.3.3) и (6.6.2):

$$\frac{da'_i}{dt} - \left\langle \frac{da'_i}{dt} \right\rangle = F'_m = \sum_k \frac{\partial a'_i}{\partial a_k} F_k, \quad (6.6.4)$$

откуда

$$D'_{ij} = \frac{\partial a'_i}{\partial a_k} \frac{\partial a'_j}{\partial a_l} D_{kl}. \quad (6.6.5)$$

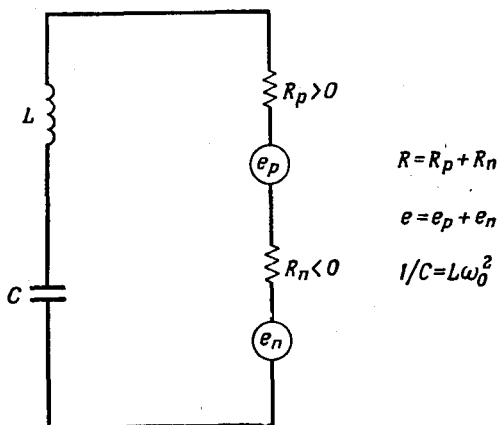
Из выражения (6.6.3) видно, что величина A_i не преобразуется как вектор благодаря наличию диффузионного слагаемого. Рабочая точка, как это следует из уравнения (6.4.1), определяется условием $A_i(\mathbf{a}_0) = 0$. Если бы величина A_i преобразовывалась как вектор, то выбор координатной системы, в которой реализуется это условие, был бы несуществен. Но A_i не преобразуется как вектор, поэтому следует точно определить систему координат. В предположении о малости коэффициентов диффузии D_{ij} результат не должен сильно меняться при переходе от одной координатной системы к другой. Однако если мы рассчитываем среднее число фотонов для лазера в системах координат b и $|b|^2$, то при генерации значительно ниже порога возбуждения результаты расчета во второй координатной системе оказываются значительно более последовательными, чем в первой. Таким

образом, хотя рассматриваемый эффект и мал, но он может оказаться весьма существенным. Заметим также, что с помощью неравенств Коши — Шварца для коэффициентов диффузии можно показать, что уравнение Фоккера — Планка может быть лишь первого, второго или бесконечного порядка, а не третьего, четвертого и т. д. Рассмотренный в разд. 6.2 дробовой шум является единственным простым примером уравнения бесконечного порядка. По этой причине мы остановимся лишь на изучении процессов второго порядка.

7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВОЛН ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

7.1. ОСЦИЛЛЯТОР С НЕЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Рассмотрим резонансный контур, в который последовательно включены положительное и отрицательное сопротивления (фиг. 7.1). Более общий случай изучался в работе [5].



Фиг. 7.1.

Допустим, что уравнение, описывающее колебания резонансного контура, содержит, кроме стандартных слагаемых $L \frac{dI}{dt} + L\omega_0^2 Q$, также член, связанный с сопротивлением $R(\rho)I$. Поэтому уравнение движения имеет следующий вид:

$$L \frac{dI}{dt} + L\omega_0^2 Q + R(\rho)I = e(t) = e_p(t) + e_n(t), \quad (7.1.1)$$

где $e(t)$ — вещественная часть гауссовой случайной силы:

$$R = R_p + R_n; \quad R_n < 0, \quad (7.1.2)$$

а ρ задается равенством

$$\rho = |a|^2 = |A|^2 = I^2 + \omega_0^2 Q^2, \quad (7.1.3)$$

где

$$I - i\omega Q \equiv a \equiv Ae^{-i\omega_0 t}. \quad (7.1.4)$$

Здесь ρ — энергия, накопленная в контуре; A — некоторая комплексная величина. Предполагая, что нелинейное сопротивление $R(\rho)$ является функцией, накопленной в контуре энергии, а не тока или заряда, мы опустим слагаемые, осциллирующие как $\exp(2i\omega_0 t)$, и т. д., то есть используем приближение волн вращающейся поляризации. По определению

$$\frac{dQ}{dt} = I. \quad (7.1.5)$$

Комбинируя уравнение (7.1.1), (7.1.4), (7.1.5), получаем

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2L} R(\rho) A + \frac{1}{2L} R(\rho) A^* e^{2i\omega_0 t} + \frac{1}{L} e_-(t), \quad (7.1.6)$$

где

$$e_-(t) = e(t) e^{i\omega_0 t}. \quad (7.1.7)$$

В приближении волн вращающейся поляризации в этом уравнении надо удерживать лишь медленно меняющиеся части величин A и A^* , поэтому слагаемое $A^* \exp(2i\omega_0 t)$ следует опустить, т. е.

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2L} R(\rho) A + \frac{1}{L} e_-(t). \quad (7.1.8)$$

Для нахождения рабочей точки

$$\frac{d(A)}{dt} = 0 \quad (7.1.9)$$

воспользуемся уравнениями для A и A^* . Тогда рабочая точка, согласно (7.1.8), определяется равенством

$$R(\rho_{00}) = 0 \quad (7.1.10)$$

или, учитывая (7.1.2),

$$R_p(\rho_{00}) = R_n(\rho_{00}). \quad (7.1.11)$$

Мы обозначили рабочую точку через ρ_{00} в отличие от более точного значения ρ_0 , которое мы получим несколько позже другим методом. Из (7.1.8) следует уравнение

движения для величины A^* :

$$\frac{dA^*}{dt} = -\frac{1}{2L} R(\rho) A^* + \frac{1}{L} e_+(t), \quad (7.1.12)$$

где

$$e_+(t) = e(t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (7.1.13)$$

Мы так подробно рассматриваем эту задачу, так как в трудной для изучения области вблизи порога классический случайный процесс, соответствующий квантовомеханической задаче, сводится к уравнению Фоккера — Планка для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации, рассмотренном ниже в этой главе.

7.2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИФФУЗИИ

Рассчитаем теперь коэффициенты диффузии $D_{-+} = D_{+-}$, определяемые равенством

$$\langle e_-(s) e_+(s') \rangle = 2D_{-+} \delta(s - s'). \quad (7.2.1)$$

Отсюда

$$2D_{+-} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} ds' \langle e^{i\omega_0 s} e(s) e^{-i\omega_0 s'} e(s') \rangle. \quad (7.2.2)$$

Определение (7.2.2) удобно для процессов, которые для интервалов времени $\Delta t \gg \omega_0^{-1}$ являются марковскими¹⁾. Это соотношение можно переписать в следующем виде:

$$2D_{+-} = \frac{1}{\Delta t} \left\langle \left| \int_t^{t+\Delta t} e^{-i\omega_0 s} e(s) ds \right|^2 \right\rangle. \quad (7.2.3)$$

В предельном случае $\Delta t \rightarrow \infty$, используя выражение (4.1.2), находим

$$2D_{+-} = \frac{1}{2} G(e, \omega_0) = \quad (7.2.4)$$

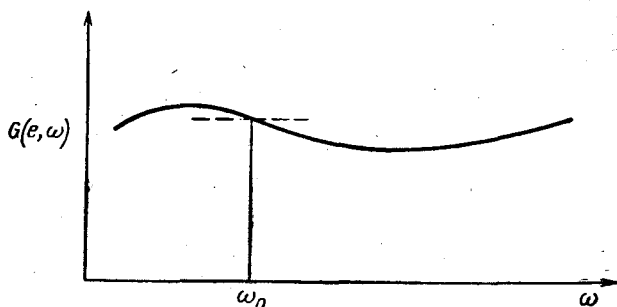
$$= (e^2)_{\omega_0}. \quad (7.2.5)$$

¹⁾ Более подробное рассмотрение процессов с малыми, но отличными от нуля корреляционными временами содержится в гл. 5 работы [6].

В случае

$$\langle e(s) e(s') \rangle \sim \delta(s - s') \quad (7.2.6)$$

рассматриваемый спектр соответствует белому шуму, т. е. не зависит от частоты. Для не строго марковских процессов предполагаем, что вблизи частоты ω_0 его спектр изменяется не слишком быстро, и поэтому вблизи ω_0 его можно аппроксимировать спектром белого шума (фиг. 72).



Фиг. 72.

Условие применимости такого приближения имеет вид

$$(\delta\omega)^{-1} \ll \Delta t \ll \Lambda^{-1}, \quad (7.2.7)$$

где Λ^{-1} — время релаксации в системе, а $\delta\omega$ — частотный интервал

$$\delta\omega \approx (e^2)_{\omega_0} / \frac{\partial (e^2)_{\omega_0}}{\partial \omega_0}, \quad (7.2.8)$$

на котором уже заметно отличие шума от чисто белого.

В работе [5] показано, что с точностью до слагаемых $\sim (\omega_0 \Delta t)^{-1}$

$$\langle e_-(t) e_-(u) \rangle = \langle e_+(t) e_+(u) \rangle = 0. \quad (7.2.9)$$

Таким образом, в действительности требуется выполнение двух условий: (7.2.7) и менее жесткого условия

$$(\omega_0 \Delta t)^{-1} \ll 1. \quad (7.2.10)$$

7.3. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

Выше рассмотрен осциллятор Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации, причем в уравнение (7.1.8) входит произвольная нелинейная функция $R(\rho)$. Разложим функцию $R(\rho)$ относительно рабочей точки, выделяя линейную функцию ρ :

$$R(\rho) = R_0\rho - \Pi. \quad (7.3.1)$$

Позже будут рассмотрены условия применимости этого приближения. Совершим теперь преобразования

$$A = \xi A' \quad (7.3.2)$$

и

$$t = Tt', \quad (7.3.3)$$

где

$$\xi^4 = (e^2)_{\omega_0} / (2LR_0) \quad (7.3.4)$$

и

$$T = (2L)^2 \xi^2 / (e^2)_{\omega_0}. \quad (7.3.5)$$

В новых переменных уравнениях (7.1.8) запишется следующим образом:

$$\frac{dA'}{dt'} = (p - |A'|^2) A' + h(t), \quad (7.3.6)$$

где

$$\langle h^*(t') h(u') \rangle = \langle h(t') h^*(u') \rangle = 4\delta(t' - u), \quad (7.3.7)$$

$$\langle h(t') h(u') \rangle = \langle h^*(t') h^*(u') \rangle = 0, \quad (7.3.8)$$

$$p = \Pi / (\xi^2 R_0). \quad (7.3.9)$$

Коэффициенты ξ и T определялись из условия, чтобы величины A' и h удовлетворяли выражениям (7.3.6) и (7.3.7). При разложении функции $R(\rho)$ относительно рабочей точки слагаемыми высшего порядка можно пренебречь, если

$$R''\xi^2/R' \ll 1, \quad (7.3.10)$$

где $R'' = R''(\rho_0)$, $R' = R'(\rho_0) = R_0$. После подстановки (7.3.4) условие (7.3.10) сводится к следующему:

$$\Delta\rho \equiv \left[\frac{(e^2)_{\omega_0}}{2LR'} \right]^{1/2} \ll \frac{R'}{R''} \equiv \delta\rho. \quad (7.3.11)$$

Если, как это обычно бывает, шум $(e^2)_{\omega_0}$ слаб, то характерная ширина спектра шума $\Delta\rho = \xi^2$ будет мала по сравнению с той областью $\delta\rho$, где функция $R(\rho)$ меняется существенным образом. Во всех физически интересных случаях ширина спектра флуктуаций величины ρ мала по сравнению с областью $\delta\rho$, характеризующей нелинейность. Поэтому можно считать, что линейное приближение для функции $R(\rho)$, приводящее к уравнению для осциллятора Ван дер Поля, справедливо во всей области ρ .

7.4. ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Из выражения (7.1.10) видно, что рабочая точка осциллятора соответствует отсутствию сопротивления, а следовательно, и ширины линии. Наличие шума в устойчивой нелинейной системе приводит к дельтаобразному спектру, но не уширяет линию. К счастью, саморегулируемый¹⁾ осциллятор не чувствителен к сдвигу начала отсчета времени и поэтому нестабилен относительно флуктуаций фазы. Эти нестабильные флуктуации фазы уширяют линии, в то время как флуктуации амплитуды лишь создают фон. Поэтому при изучении фазового уширения можно провести линеаризацию по флуктуациям амплитуды. Действительно, для затухающего в квазилинейном приближении осциллятора флуктуации амплитуды не связаны с флуктуациями фазы. Поэтому по крайней мере в области значительно выше порога возбуждения, когда флуктуации амплитуды малы, можно вообще пренебречь флуктуациями амплитуды при изучении флуктуаций фазы.

Если подставить в уравнение (7.1.8) следующее выражение:

$$A = i(\rho_0)^{1/2} \exp(u - i\phi), \quad (7.4.1)$$

¹⁾ Описываемый дифференциальным уравнением, коэффициенты которого не зависят от времени,

то фаза будет удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{A^*} \frac{dA^*}{dt} - \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{2L} (\rho_0)^{-1/2} e^{-u} (e^{-i\phi} e_+ + i\phi e_-), \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

в котором не содержится $R(\rho)$. Пренебрежение флуктуациями амплитуды соответствует случаю $u = 0$. Зависимость от функции $R(\rho)$ проявляется лишь через величину ρ_0 , которую при более строгом рассмотрении следует заменить на $\rho = \langle \rho \rangle$.

Поскольку уравнение не содержит функции $R(\rho)$ явным образом, можно, не теряя общности, работать с безразмерными переменными, введенными в разд. 7.3 для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации. Опуская штрихи в уравнении (7.3.6) и подставляя в выражение (7.4.2) $u = 0$, приходим к безразмерному уравнению

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} (\bar{\rho})^{-1/2} [e^{i\phi} h(t) + e^{i\phi} h^*(t)], \quad (7.4.3)$$

которое представляет собой уравнение Ланжевена для фазы ϕ .

Так как по предположению $e(t)$, а значит, и $h(t)$ — гауссовы функции, у которых все связанные моменты с $n > 2$ обращаются в нуль, то уравнение (7.4.3), как показано в гл. 6, сводится к уравнению Фоккера — Планка. Коэффициент диффузии определяется выражением (5.4.4):

$$D(\phi) \equiv D_2(\phi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (\Delta\phi)^2 \rangle. \quad (7.4.4)$$

Используя (7.4.3), находим

$$\begin{aligned} D(\phi) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{8\bar{\rho}\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left\langle [e^{i\phi(s)} h(s) + e^{-i\phi(s)} h^*(s)] ds \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_t^{t+\Delta t} [e^{i\phi(s')} h(s') + e^{-i\phi(s')} h^*(s')] ds' \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

В формулу (7.4.5) входят произведения двух величин h , с которыми мы уже имели дело, поэтому, следуя схеме разд. 6.4, т. е. полагая $\phi(s) = \phi(t) + \Delta\phi$ и т. д., мы можем заменить $\phi(s)$ и $\phi(s')$ на $\phi(t)$. При этом, учитывая также (7.3.7) и (7.3.8), получим

$$D(\phi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{4\bar{\rho}\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} ds' \langle h(s) h^*(s') \rangle = \frac{1}{\bar{\rho}}. \quad (7.4.6)$$

Таким образом, $D(\phi)$ не зависит от ϕ .

Рассчитаем теперь первый момент, или вектор смещения. Эта величина, согласно уравнению (7.4.3), определяется следующим выражением:

$$\frac{d\langle\phi\rangle}{dt} = \frac{1}{2}(\bar{\rho})^{-1/2} [\langle e^{i\phi(t)} h(t) \rangle + \text{К. С.}]. \quad (7.4.7)$$

Аналогично расчету, проведенному в разд. 6.4, находим

$$\langle e^{i\phi(t)} h(t) \rangle = \left\langle \left[e^{i\phi_c} + \int_{t_c}^t \frac{de^{i\phi(s)}}{ds} ds \right] h(t) \right\rangle. \quad (7.4.8)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (7.4.8) обращается в нуль, а для второго имеем

$$\begin{aligned} \langle e^{i\phi} h \rangle &= ie^{i\phi_c} \int_{t_c}^t ds \left\langle \frac{d\phi(s)}{ds} h(t) \right\rangle = \\ &= ie^{i\phi_c} \int_{t_c}^t ds \left\langle \frac{1}{2}(\bar{\rho})^{-1/2} [e^{i\phi_c} h(s) + e^{i\phi_c} h^*(s)] h(t) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} i(\bar{\rho})^{-1/2} \int_{t_c}^t ds \langle h^*(s) h(t) \rangle = i(\bar{\rho})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

При выводе (7.4.9) учтено условие (7.3.7), а интегрирование проведено по половине области определения дельта-функции. Подставляя в (7.4.7) выражение (7.4.9) и комплексно-сопряженное к нему, находим

$$\frac{d\langle\phi\rangle}{dt} = 0. \quad (7.4.10)$$

Если положить $e^{i\phi} = 1$, то получаются те же выражения для коэффициентов диффузии и вектора смещения, что и выше [см. формулы (7.4.6) и (7.4.10)]. Этот пример служит иллюстрацией к высказанному в разд. 6.3 утверждению, что одному и тому же марковскому процессу могут соответствовать различные ланжевенские процессы.

Используя выражение (5.5.2), получим уравнение Фоккера — Планка для этого процесса

$$\frac{\partial P(\phi, t)}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 P(\phi, t)}{\partial \phi^2} \quad (7.4.11)$$

Отсюда, как и в случае (6.3.31) и (6.3.32), следует

$$P(\phi, t | \phi_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t/\bar{\rho}}} e^{-\frac{|\phi - \phi_0|^2}{4\pi t/\bar{\rho}}}. \quad (7.4.12)$$

Теперь можно рассчитать ширину спектра флуктуаций фазы, которая, согласно формуле (4.1.3), определяется фурье-компонентой выражения $\langle a^*(t) a(0) \rangle$. Из (7.1.4) следует, что

$$\langle a^*(t) a(0) \rangle = e^{i\omega_0 t} \langle A^*(t) A(0) \rangle. \quad (7.4.13)$$

Подставляя сюда (7.4.1) и пренебрегая флуктуациями амплитуды, имеем

$$\langle a^*(t) a(0) \rangle = \bar{\rho} e^{i\omega_0 t} \langle e^{i[\phi(t) - \phi(0)]} \rangle. \quad (7.4.14)$$

Привлекая еще выражение (5.7.8), получим из (7.4.14)

$$\langle a^*(t) a(0) \rangle = \bar{\rho} e^{i\omega_0 t} \exp[\langle e^{i[\phi(t) - \phi(0)]} - 1 \rangle^L], \quad (7.4.15)$$

что при учете (5.7.15) и гауссового характера переменной ϕ сводится к

$$\langle a^*(t) a(0) \rangle = \bar{\rho} e^{i\omega_0 t} \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle [\phi(t) - \phi(0)]^2 \rangle\right\}. \quad (7.4.16)$$

Отсюда, согласно (7.4.4) — (7.4.6), следует

$$\langle a^*(t) a(0) \rangle = \bar{\rho} e^{i\omega_0 t} e^{-\Lambda_\phi |t|}, \quad (7.4.17)$$

где

$$\Lambda_\phi = \frac{1}{\bar{\rho}}. \quad (7.4.18)$$

(Индекс „ ϕ “ означает „фаза“.)

Из (4.1.3) и (7.4.17) находим спектр шума

$$\begin{aligned} (a^2)_\omega &\equiv a_\omega^* a_\omega \equiv \frac{1}{2} G(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \langle a^*(t) a(0) \rangle dt = \\ &= \bar{\rho} \frac{\Lambda_\Phi}{(\omega - \omega_0)^2 + \Lambda_\Phi^2}. \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

Итак, спектр шума лазера имеет лоренцеву форму с шириной линии $\Lambda_\Phi = \frac{1}{\bar{\rho}}$. Эта величина служит дополнительной характеристикой системы, помимо среднего числа фотонов. Вернемся теперь к нашим прежним единицам, восстановив у соответствующих величин штрихи, которые мы временно опустили. Тогда

$$\Lambda_\Phi \rightarrow \Lambda'_\Phi = \Lambda_\Phi T \quad (7.4.20)$$

или

$$\Lambda_\Phi = \frac{\xi^2}{T\bar{\rho}}. \quad (7.4.21)$$

Подстановка в (7.4.21) выражений (7.3.5) и (7.4.1) дает

$$\Lambda_\Phi = \frac{(e^2)_{\omega_0}}{(2L)^2 \langle |A_0|^2 \rangle}. \quad (7.4.22)$$

Мощность, теряемая при наличии положительного сопротивления, равна

$$P = R_p \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} R_p |A_0|^2. \quad (7.4.23)$$

Поэтому (7.4.22) переходит в

$$2\Lambda_\Phi = \left(\frac{R_p}{L}\right)^2 \frac{(e^2)_{\omega_0}}{4R_p P}. \quad (7.4.24)$$

Положим теперь

$$\frac{R_p}{L} = \Delta\omega, \quad (7.4.25)$$

где $\Delta\omega$ — ширина резонансной линии при наличии положительного сопротивления R_p . Согласно уравнению (7.1.1),

$$(e^2)_{\omega_0} = (e_p^2)_{\omega_0} + (e_n^2)_{\omega_0}, \quad (7.4.26)$$

где индексы p и n относятся соответственно к положительному и отрицательному сопротивлению. Используя определение величины $(e^2)_{\omega_0}$, формулы (7.2.4), (7.2.5), (4.1.3), получим

$$(e^2)_{\omega_0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \langle e_p(t) e_p(0) \rangle. \quad (7.4.27)$$

По теореме Найквиста для рассматриваемого типа шума [62, 8]

$$(e^2)_{\omega_0} = 2kT_p R_p(\omega) C(\omega, T_p), \quad (7.4.28)$$

где

$$C(\omega, T) = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{kT} \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right). \quad (7.4.29)$$

T_p — положительная температура, а множитель $C(\omega, T)$ представляет собой квантовую поправку, которая стремится к единице при $T \rightarrow \infty$ и при низких температурах определяет квантовые поправки. Точно так же

$$(e^2)_{\omega_0} = 2kT_n R_n(\omega) C(\omega, T_n), \quad (7.4.30)$$

где T_n — отрицательная температура. Так как обе величины T_n и R_n отрицательны, то выражение (7.4.30) может быть переписано в виде

$$(e^2)_{\omega_0} = 2k |T_n| |R_n(\omega)| C(\omega, T_n), \quad (7.4.31)$$

Напомним, что в соответствии с (7.1.11) рабочая точка ρ_{00} определялась условием

$$|R_n| = \hat{R}_p. \quad (7.4.32)$$

Поэтому из (7.4.24) находим

$$W \equiv 2\Lambda_\Phi = (\Delta\omega)^2 \frac{kT_p C(\omega_0, T_p) + k |T_n| C(\omega_0, T_n)}{2P}, \quad (7.4.33)$$

где W — полная ширина. Перепишем далее выражение (7.4.29) в виде

$$C(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{kT} \left[\bar{n}(\omega) + \frac{1}{2} \right], \quad (7.4.34)$$

где

$$n(\omega, T) = \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \quad (7.4.35)$$

Тогда (7.4.33) сводится к

$$W = (\Delta\omega)^2 \frac{\hbar\omega_0}{2P} [\bar{n}(\omega_0, T_p) + \bar{n}(\omega_0, |T_n|) + 1], \quad (7.4.36)$$

что представляет собой формулу Шавлова — Таунса [63]¹⁾ с правильным дополнительным множителем 2 в знаменателе. Заметим, что при переходе к классическому пределу следует в формуле (7.4.33) положить $C_p, C_n \rightarrow 1$, в то время как в квантовом случае в выражении (7.4.36) необходимо совершить предельный переход $n_p, n_n \rightarrow 0$.

Покажем теперь, что ширина линии W очень мала. Так как в системе имеется много фотонов, то мощность P много больше энергии одного фотона, умноженной на ширину линии $\Delta\omega$: $R \gg \hbar\omega_0\Delta\omega$. Поэтому полная ширина линии W много меньше ширины линии $\Delta\omega$, полученной без учета отрицательного сопротивления: $W \ll \Delta\omega$. Подчеркнем, что это рассуждение справедливо только тогда, когда мощность излучения настолько велика, что можно пренебречь флуктуациями амплитуды. Условием применимости выражений (7.4.28) и (7.4.30) является независимое тепловое равновесие сопротивлений R_n и R_p , поскольку для этих источников шума использовалась теорема Найквиста. В более общем неравновесном случае для исследования источников шума необходимо детальное знание природы сопротивлений R_n и R_p .

7.5. ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ

Запишем полученное ранее уравнение (7.3.6), опустив в нем штрихи:

$$\frac{dA}{dt} = (\rho - |A|^2)A + h(t), \quad (7.5.1)$$

где

$$\rho = |A|^2. \quad (7.5.2)$$

¹⁾ В наших обозначениях формула Шавлова — Таунса имеет вид

$$W = (\Delta\omega)^2 \hbar\omega_0/P.$$

Тогда уравнение движения для ρ имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dA}{dt} A^* + A \frac{dA^*}{dt} = 2(\rho - \rho) \rho + h(t) A^* + Ah^*(t). \quad (7.5.3)$$

Рассмотрим теперь среднее значение $\langle A(t)h^*(t) \rangle$. Из соотношений (6.4.7) и (7.3.7), получаем после интегрирования по половине области определения δ -функции

$$\langle A(t)h^*(t) \rangle = \int_{t_c}^t \langle h(s)h^*(t) \rangle ds = 2. \quad (7.5.4)$$

Тогда уравнение (7.5.3) сведется к

$$\frac{d\rho}{dt} = 2(\rho - \rho) \rho + 4 + F_\rho, \quad (7.5.5)$$

где, как уже отмечалось в разд. 6.4,

$$F_\rho = h(t) A^*(t) + A(t) h^*(t) - \langle h(t) A^*(t) \rangle - \langle A(t) h^*(t) \rangle = A_c^* h(t) + A_c h^*(t). \quad (7.5.6)$$

Для коэффициента диффузии D имеем

$$2D(\rho) \delta(t-u) = \langle F_\rho(t) F_\rho(u) \rangle. \quad (7.5.7)$$

Из проведенного в разд. 6.4 анализа и уравнений (7.3.7), (7.3.8) следует, что

$$2D(\rho) \delta(t-u) = \langle [A_c^* h(t) + A_c h^*(t)] [A_c^* h(u) + A_c h^*(u)] \rangle \quad (7.5.8)$$

$$= |A|^2 [\langle h^*(t) h(u) \rangle + \langle h(t) h^*(u) \rangle], \quad (7.5.9)$$

$$= 8\rho \delta(t-u), \quad (7.5.10)$$

откуда коэффициент диффузии D равен

$$D(\rho) = 4\rho. \quad (7.5.11)$$

ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Приведем пример, подтверждающий справедливость сделанного в конце разд. 6.6 вывода об изменении рабочей точки при переходе от одной координатной системы

к другой. Согласно (7.5.1), положение рабочей точки определяется из условия равенства нулю вектора смещения A :

$$A_A(\rho_{00}) = 2(\rho - \rho_{00})\rho_{00} = 0 \quad (7.5.12)$$

или

$$\rho_{00} = \begin{cases} \rho; & \rho > 0, \\ 0; & \rho \leq 0. \end{cases} \quad (7.5.13)$$

В то же время, согласно уравнению (7.5.5), для переменной $\rho = |A|^2$ рабочая точка определяется из равенства

$$A_\rho(\rho_0) = 2(\rho - \rho_0)\rho_0 + 4 = 0, \quad (7.5.14)$$

и поскольку $\rho_0 > 0$, то

$$\rho_0 = \frac{1}{2} [\rho + \sqrt{\rho^2 + 8}]. \quad (7.5.15)$$

Преимущество величины ρ_0 по сравнению с ρ_{00} состоит в том, что в области ниже порога возбуждения ρ_0 положительна и нигде не обращается в нуль.

Рассчитаем теперь флуктуации амплитуды. В квазилинейном приближении постоянная затухания для флуктуаций амплитуды равна

$$\Lambda_a = - \left. \frac{\partial A}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}. \quad (7.5.16)$$

Учитывая (7.5.15) и (7.5.16), получаем

$$\Lambda_a = - \frac{\partial}{\partial \rho} [2(\rho - \rho)\rho + 4]_{\rho_0} = 2 \sqrt{\rho^2 + 8} \equiv (\Lambda_a)_{\text{кл}}, \quad (7.5.17)$$

$$= 2\rho_0 + \frac{4}{\rho_0}, \quad (7.5.18)$$

где символом кл обозначено квазилинейное приближение.

Более точное, так называемое улучшенное квазилинейное приближение (у. кл), получается при замене ρ_0 на точное (или найденное из эксперимента) среднее значение $\bar{\rho}$:

$$(\Lambda_a)_{\text{у. кл}} = 2\bar{\rho} + \frac{4}{\bar{\rho}}. \quad (7.5.19)$$

Заметим, что нет необходимости применять квазилинейное приближение, если можно точно решить уравнение

Фоккера — Планка, используя выражения для вектора смещения (7.5.15) и для коэффициента диффузии (7.5.12):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} [(2\rho^2 - 2\rho\rho - 4)P] + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (4\rho P). \quad (7.5.20)$$

7.6. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Полное уравнение Фоккера — Планка, включающее флуктуации амплитуды и фазы, можно получить из уравнения (7.3.6), опустив в нем штрихи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(A, A^*, t)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial A} [A(|A|^2 - \rho)P] + \\ & + \frac{\partial}{\partial A^*} [A^*(|A^*|^2 - \rho)P] + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial A \partial A^*}. \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Последнее слагаемое соответствует выражению

$D_{AA^*} \frac{\partial^2 P}{\partial A \partial A^*} + D_{A^*A} \frac{\partial^2 P}{\partial A^* \partial A}$, в которое подставлены значения $D_{AA^*} = D_{A^*A} = 2$, вытекающие из соотношения (7.3.7). Для перехода к вещественным переменным положим в (7.3.6)

$$A = x - iy; \quad h(t) = F_x - iF_y \quad (7.6.2)$$

и получим два уравнения Ланжевена для вещественных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [p - (x^2 + y^2)]x + F_x, \\ \frac{dy}{dt} &= [p - (x^2 + y^2)]y + F_y, \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

где

$$D_{xx} = D_{yy} = 1; \quad D_{xy} = D_{yx} = 0. \quad (7.6.4)$$

Соответствующее уравнение Фоккера — Планка имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [(\rho - p)xP] + \frac{\partial}{\partial y} [(\rho - p)yP] + \nabla^2 P, \quad (7.6.5)$$

где

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \rho \equiv x^2 + y^2 = |A|^2. \quad (7.6.6)$$

Если вместо (7.6.2) использовать другую запись комплексной величины $A = re^{-i\phi}$, то уравнение Фоккера —

Планка можно с помощью формул (3.27) и (3.28) работы [4] свести к

$$\frac{\partial P}{\partial t} = H_r P + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}, \quad (7.6.7)$$

$$H_r P = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(r^3 - \rho r - \frac{1}{r} \right) P \right] + \frac{\partial^2}{\partial r^2} P. \quad (7.6.8)$$

Переходя к переменным ρ и ϕ , получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} [(2\rho^2 - 2\rho\rho - 4)P] + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (4\rho P) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2}. \quad (7.6.9)$$

Если ограничиться рассмотрением лишь радиальных флуктуаций, то результат не будет зависеть от ϕ и, следовательно, последнее слагаемое в правой части формулы (7.6.9) обращается в нуль. Теперь можно понять смысл приближений, сделанных при вычислении флуктуаций фазы в разд. (7.4). Если в последнем слагаемом в (7.6.9) заменить переменную ρ^{-1} числом $\langle \rho \rangle^{-1}$, то уравнение (7.6.9) распадается на два (7.4.11) и (7.5.20), описывающие соответственно фазовое радиальное движение. Следовательно, в области значительно выше порога возбуждения, где флуктуации амплитуды малы, можно приближенно считать, что флуктуации амплитуды и фазы почти не коррелируют друг с другом.

7.7. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ФОККЕРА — ПЛАНКА

Найдем теперь точные выражения для собственных функций уравнения Фоккера — Планка. Будем искать решение уравнения

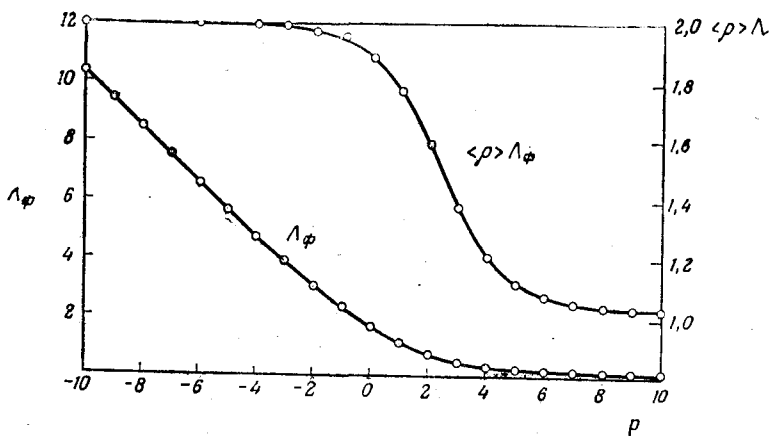
$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\Lambda_{\lambda, n} P \quad (7.7.1)$$

в виде

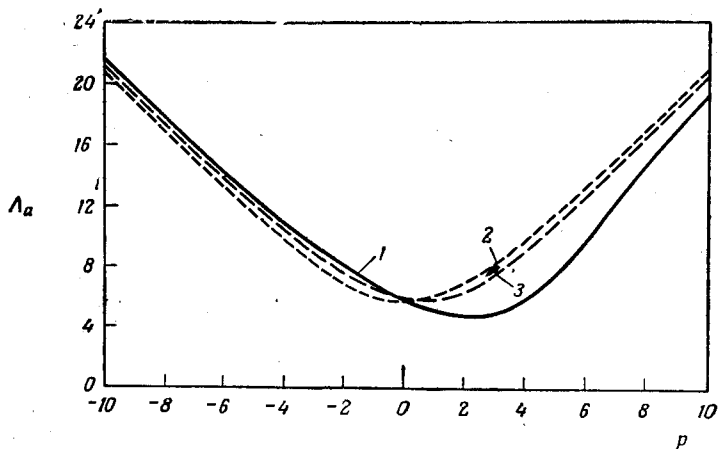
$$P_{\lambda, n}(r, \phi) = e^{i\lambda\phi} R_{\lambda, n}(r), \quad (7.7.2)$$

где λ — целое число, что обеспечивает правильную зависимость решения от фазы. Согласно (7.6.8) уравнение для амплитуды имеет вид

$$\left(H_r - \frac{\lambda^2}{r^2} \right) R_{\lambda, n}(r) = -\Lambda_{\lambda, n} R_{\lambda, n}(r). \quad (7.7.3)$$



Фиг. 7.3. Полуширина спектра флуктуации как функция параметра накачки.



Фиг. 7.4. Полуширина спектра амплитуды как функция параметра накачки.

1—точный расчет, 2—классическое, 3—улучшенное классическое приближение.

Таким образом, возникает задача о нахождении собственных значений дифференциального уравнения второго порядка. При $\lambda = 0$ решение не зависит от фазы, и мы должны исследовать только радиальные флуктуации. Величина $\Lambda_{0,0} = 0$ соответствует стационарному состоянию. Обозначим через Λ_a наименьшее, не обращающееся в нуль (при $\lambda = 0$) собственное значение

$$\Lambda_{0,1} = \Lambda_a, \quad (7.7.4)$$

которое соответствует амплитудному шуму. С другой стороны, при $\lambda = 1$ решение пропорционально $e^{i\phi}$, что существенно при нахождении среднего значения $\langle e^{i[\phi(t) - \phi(0)]} \rangle$ (см. разд. 7.4), поэтому естественно обозначить

$$\Lambda_{1,0} = \Lambda_\phi. \quad (7.7.5)$$

В работе [6] приведено численное решение уравнения (7.7.3) и найдены функции $\Lambda_a(\rho)$ и $\Lambda_\phi(\rho)$.

Сравнивая уравнение (7.7.2) с (7.4.11), (7.4.18) и (7.4.19), можно увидеть, что Λ_ϕ представляет собой полуширину спектра. На фиг. 7.3 изображена зависимость полуширины спектра Λ_ϕ от безразмерного параметра накачки ρ . Согласно (7.4.18), $\Lambda_\phi(\rho) = 1$. Из графика следует, что выше порога возбуждения это равенство приближенно выполняется. Однако ниже порога возбуждения $\Lambda_\phi(\rho) \rightarrow 2$. Причины такого поведения $\Lambda_\phi(\rho)$ обсуждаются в работах [5, 6]. В формуле Шавлова — Таунса наличие множителя 2 ошибочно, поскольку их результат получен в линейной теории, которая справедлива ниже, и не справедлива выше порога возбуждения. На фиг. 7.4 показана зависимость полуширины линии амплитудного спектра Λ_a в функции от безразмерного параметра накачки ρ ¹⁾. Из графика видно, что при $\rho > > 10$ или при $\rho < -10$, т. е. далеко от порога возбуждения, результаты расчета в квазилинейном приближении очень близки к точным.

¹⁾ Смысл квазилинейного и улучшенного квазилинейного приближения обсуждался в разд. 7.5.

8. ДРУГИЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА ФОККЕРА—ПЛАНКА

Прежде чем приступить к нахождению точного решения для основного состояния, рассмотрим другие свойства уравнения Фоккера — Планка.

8.1. ДЕТАЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Уравнение Фоккера — Планка для многих переменных можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial a_i} [A_i P] + \frac{\partial}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial}{\partial a_j} [D_{ij}, P] \equiv - \frac{\partial}{\partial a_i} J_i, \quad (8.1.1)$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование; A_i и D_{ij} могут быть функциями a ; величина J_i определена следующим равенством:

$$J_i \equiv A_i P - \frac{\partial}{\partial a_j} [D_{ij} P]. \quad (8.1.2)$$

Если рассматривать J_i как поток вероятности, то уравнение (8.1.1) представляет собой закон сохранения вероятности. Перейдем теперь к определению детального равновесия. Для обычного уравнения Паули детальное равновесие соответствует равенству скоростей потока частиц, идущих от a к b и от b к a . На нашем языке это означает отсутствие потока

$$J_i = 0 \quad (8.1.3)$$

или, согласно (8.1.2),

$$D_{ij} \frac{\partial P}{\partial a_j} = \left(A_i - \frac{\partial D_{ij}}{\partial a_j} \right) P. \quad (8.1.4)$$

Уравнение (8.1.4) первого порядка, и его, вообще говоря, легче решить, чем уравнение второго порядка (8.1.1). Согласно (8.1.1), условие детального равновесия (8.1.3)

определяет решение, соответствующее стационарному состоянию, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0. \quad (8.1.5)$$

Разделив обе части равенства (8.1.4) на $D_{ij}P$ и изменяя значок суммирования j на k , получим

$$\frac{\partial \ln P}{\partial a_k} = (D^{-1})_{kl} \left(A_l - \frac{\partial D_{lj}}{\partial a_j} \right) \equiv U_k. \quad (8.1.6)$$

В общем случае

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial a_k \partial a_l} = \frac{\partial^2 \ln P}{\partial a_l \partial a_k}. \quad (8.1.7)$$

Поэтому решение, удовлетворяющее условию детального равновесия, возможно лишь в том случае, когда коэффициенты уравнения Фоккера — Планка подчиняются условию

$$\frac{\partial U_k}{\partial a_l} = \frac{\partial U_l}{\partial a_k}. \quad (8.1.8)$$

В качестве примера рассмотрим приближение волн вращающейся поляризации для осциллятора Ван дер Поля с координатами x , y . Согласно соотношениям (7.6.3) — (7.6.6),

$$A_x = [p - (x^2 + y^2)] x, \quad (8.1.9)$$

$$A_y = [p - (x^2 + y^2)] y \quad (8.1.10)$$

и

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.1.11)$$

Поэтому из (8.1.6) находим:

$$U_x = A_x = [p - (x^2 + y^2)] x, \quad (8.1.12)$$

$$U_y = A_y = [p - (x^2 + y^2)] y, \quad (8.1.13)$$

откуда

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial U_y}{\partial x}, \quad (8.1.14)$$

т. е. выполнено условие детального равновесия. Существуют, однако, случаи, когда это условие не выполняется. В приближении волн вращающейся поляризации для

осциллятора Ван дер Поля с расстройкой уравнение (7.5.1) для $\frac{\partial A}{\partial t}$ содержит лишний множитель $(1 - i\alpha)$ в правой части. Тогда в переменных x, y имеем

$$U_x = A_x = [\rho - (x^2 + y^2)](x - \alpha y), \quad (8.1.15)$$

$$U_y = A_y = [\rho - (x^2 + y^2)](y - \alpha x) \quad (8.1.16)$$

и

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} \neq \frac{\partial U_y}{\partial x}. \quad (8.1.17)$$

Итак, при наличии расстройки нарушается условие детального равновесия, т. е. отличный от нуля поток существует даже в стационарном состоянии. Поэтому для лазера детальное равновесие имеет место лишь при наличии резонанса. Сама по себе стационарность состояния означает лишь сохранение потока J , т. е. $\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0$, а не $J_i = 0$. При этом возможны циркуляционные токи.

При выполнении условия интегрируемости (8.1.8) можно выразить решение уравнения (8.1.6) в виде интеграла по траектории:

$$\ln P = \int_{a_0}^a U_k da_k + C, \quad (8.1.18)$$

где C — константа. Если справедливо (8.1.8), то $\text{rot } U = 0$, и этот интеграл по траектории не зависит от пути интегрирования.

Для случая одной переменной можно при $J = 0$ заменить в уравнении (8.1.18) P на W , что приводит к

$$W(a) = C \exp \int_{a_0}^a \frac{1}{D(b)} \left[A(b) - \frac{\partial D(b)}{\partial b} \right] db. \quad (8.1.19)$$

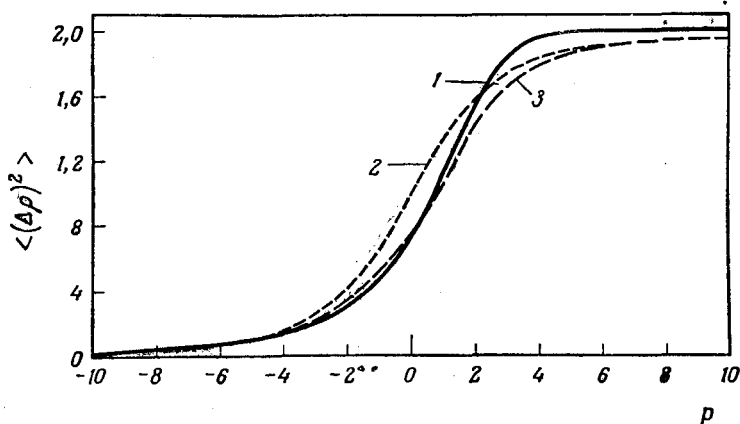
Заметим, что для задачи о стационарных состояниях в случае одной переменной условие $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$ означает, что $J = \text{const}$ и ток J может течь только в одном направлении. В этом случае решение (8.1.2), соответствующее стационарному или основному состоянию уравнения

(8.1.1), сводится к виду

$$P_0(a) = -\frac{J}{D(a)} \int_{a_0}^a da' \exp \int_{a'}^a \frac{A(b)}{D(b)} db + W(a), \quad (8.1.20)$$

где функция $W(a)$ определяется выражением (8.1.19).

В приближении волн вращающейся поляризации для осциллятора Ван дер Поля функции A и D — линейные



Фиг. 8.1. Второй момент для флуктуации амплитуды как функция параметра накачки.

1 — точный расчет, 2 — классическое, 3 — улучшенное классическое приближение.

полиномы, определяемые соответственно формулами (7.5.14) и (7.5.11). Подставляя эти формулы в (8.1.19), получим

$$W(\rho) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \rho \rho - \frac{1}{4} \rho^2\right)}{\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \rho \rho - \frac{1}{4} \rho^2\right) d\rho}. \quad (8.1.21)$$

Знаменатель в (8.1.21) представляет собой константу нормировки. В случае лазера пределы 0 и ∞ пропорциональны числу имеющихся фотонов. Из (8.1.21), видно, что функция $W(\rho)$ — гауссова по переменной ρ , т. е.

является полиномом четвертой степени по нашим исходным переменным A и A^* . Для больших отрицательных ρ , т. е. в области значительно ниже порога возбуждения, $\frac{1}{2}\rho\rho - \frac{1}{4}\rho^2 \approx \frac{1}{2}\rho\rho$ и $w(\rho) \sim e^{-\rho}$ представляет собой гауссову функцию по переменным A и A^* . График функции $W(\rho)$ для трех значений параметра ρ был изображен на фиг. 2.3 (см. стр. 29). Ширина гауссовой линии для всех ρ определяется величиной $1/4\rho^2$, но с ростом ρ характерные ρ растут и линия сужается, т. е. флуктуации стабилизируются при увеличении ρ .

Зная функцию $W(\rho)$ (8.1.21), можно найти моменты $\langle \rho^n \rangle$, определяемые равенством

$$\langle \rho^n \rangle = \frac{\int \rho^n W(\rho) d\rho}{\int W(\rho) d\rho}. \quad (8.1.22)$$

На фиг. 2.4 (см. стр. 29) и 8.1 изображены соответственно графики первого $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ и второго $\langle (\Delta\rho)^2 \rangle$ моментов для флуктуаций амплитуды в функции от ρ .

8.2. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Для более явного выяснения соответствия квантового и классического подходов необходимо знать некоторые свойства собственных функций. Прежде всего имеется сложность, связанная с неэрмитовостью оператора Фоккера — Планка. Нас интересует задача о нахождении собственных значений неэрмитового оператора L :

$$LP_j = -\Lambda_j P_j. \quad (8.2.1)$$

Пусть ψ_μ — совокупность базисных функций. Тогда собственные векторы определяются из условия

$$\det(L_{\mu\nu} - \Lambda\delta_{\mu\nu}) = 0. \quad (8.2.2)$$

Для точного определения всех собственных функций приходится, вообще говоря, иметь дело с бесконечным базисом, но в некотором приближении можно использовать конечное число базисных функций. Рассмотрим соб-

ственные функции сопряженного оператора

$$L^+ \phi_j = -\Gamma_j \phi_j. \quad (8.2.3)$$

Так как $(L^+)_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}^*$, то секулярное уравнение имеет следующий вид:

$$\det(L_{\nu\mu} - \Gamma \delta_{\mu\nu}) = 0. \quad (8.2.4)$$

Переставляя в этом детерминанте столбцы и колонки и переходя затем к комплексно-сопряженным величинам, получим

$$\det(L_{\mu\nu} - \Gamma^* \delta_{\mu\nu}) = 0. \quad (8.2.5)$$

Из сравнения (8.2.5) и (8.2.2) видно, что

$$\Lambda = \Gamma^*, \quad (8.2.6)$$

т. е. собственные значения сопряженного и исходного операторов являются комплексно-сопряженными величинами. Поэтому можно следующим образом записать уравнение (8.2.3):

$$L^+ \phi_j = -\Lambda_j^* \phi_j. \quad (8.2.7)$$

Из сравнения этого уравнения с (8.2.1) вытекает наличие биортогонального соответствия между двумя наборами собственных векторов:

$$(\phi_i, LP_j) = -\Lambda_j (\phi_i, P_j). \quad (8.2.8)$$

Однако выражение (ϕ_i, LP_j) может быть переписано в виде

$$(\phi_i, LP_j) = (L^+ \phi_i, P_j), \quad (8.2.9)$$

а при учете (8.2.8)

$$(\phi_i, LP_j) = (-\Lambda_i^* \phi_i, P_j), \quad (8.2.10)$$

$$= -L_i (\phi_i, P_j). \quad (8.2.11)$$

Окончательно получаем, сравнивая (8.2.11) и (8.2.8):

$$(\Lambda_i - \Lambda_j) (\phi_i, P_j) = 0. \quad (8.2.12)$$

Таким образом, функции ϕ_i и P_j взаимно ортогональны, если только собственные значения невырождены. При наличии случайного вырождения все рассуждения

были бы такими же, как для эрмитовых операторов, и можно было бы установить биортогональность собственных функций.

8.3. ПОЛНОТА

Если оператор ограничен снизу (т. е. имеет наименьшее собственное значение), обладает бесконечным числом собственных значений и удовлетворяет вариационному уравнению, существует полный набор собственных функций [64].

В нашей задаче операторы наверняка имеют полный набор собственных функций. Можно выразить δ -функцию в следующем виде:

$$\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \sum_I P_I(\mathbf{a}) C_I. \quad (8.3.1)$$

Используя условие ортогональности, получим

$$\phi_j^*(\mathbf{a}') = (\phi_j(\mathbf{a})), \quad \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = C_j. \quad (8.3.2)$$

Тогда выражение (8.3.1) сведется к следующему:

$$\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \sum_I P_I(\mathbf{a}) \phi_j^*(\mathbf{a}'). \quad (8.3.3)$$

Мы рассматривали следующее уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -LP. \quad (8.3.4)$$

Решением этого уравнения [при начальном условии $P = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)$] для $t = t_0$ является условная вероятность $P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0)$:

$$P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) = e^{-L(t-t_0)} \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0). \quad (8.3.5)$$

Подставляя (8.3.3) в (8.3.5), находим

$$P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) = e^{-L(t-t_0)} \sum_I P_I(\mathbf{a}) \phi_j^*(\mathbf{a}_0). \quad (8.3.6)$$

Так как оператор L действует только на \mathbf{a} , то, используя также уравнение (8.2.1), имеем

$$P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) = \sum_I e^{-\Lambda_I(t-t_0)} P_I(\mathbf{a}) \phi_j^*(\mathbf{a}_0). \quad (8.3.7)$$

Определенная выше функция $P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0)$ почти совпадает с функцией Грина. Если ввести следующее определение:

$$P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) = \begin{cases} \sum_I e^{-\Lambda_I(t-t_0)} P_I(\mathbf{a}) \phi_I^*(\mathbf{a}), & t > t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases} \quad (8.3.8)$$

то выражение (8.3.5) сведется к такому:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \delta(t - t_0) \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) - LP \quad (8.3.9)$$

и величина $P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0)$ (8.3.8) будет функцией Грина для уравнения (8.3.9). Таким образом, мы выразили условную вероятность $P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0)$ через собственные функции $P_j(\mathbf{a})$ и $\phi_j(\mathbf{a})$.

8.4. ДЕТАЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ, ОБРАТИМОСТЬ ВО ВРЕМЕНИ И ЭРМИТОВОСТЬ

Покажем, что для стационарного состояния обратимость во времени означает существование детального равновесия и эрмитовости. Кроме того, мы увидим, что собственная функция P_j уравнения (8.2.1) представляет собой произведение собственной функции основного состояния и собственной функции ϕ_j , определяемой уравнением (8.2.3).

Докажем сначала первое утверждение [65]. Из требования стационарности вытекает, что для произвольного τ

$$\langle X(t) Y(t_0) \rangle = \langle X(t - \tau) Y(t_0 - t) \rangle = \langle X(-t_0) Y(-t) \rangle, \quad (8.4.1)$$

где при переходе к последнему равенству в (8.4.1) τ выбрано в виде $\tau = t_0 + t$. Входящие в (8.4.1) величины X и Y являются произвольными функциями \mathbf{a} :

$$X(t) = X[\mathbf{a}(t)]; \quad Y(t) = Y[\mathbf{a}(t)]. \quad (8.4.2)$$

Предположим теперь, что $\mathbf{a}(t)$ — «четная» функция времени, т. е. скорее координата, а не скорость. Тогда при замене $t \rightarrow -t$ выражение (8.4.1) заменится на

$$\langle X(-t_0) Y(-t) \rangle = \langle X(t_0) Y(t) \rangle. \quad (8.4.3)$$

Поэтому, комбинируя условие стационарности и обратимости во времени, получим

$$\langle X(t)Y(t_0) \rangle = \langle X(t_0)Y(t) \rangle, \quad (8.4.4)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int \int X(\mathbf{a})Y(\mathbf{a})P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) d\mathbf{a} d\mathbf{a}_0 = \\ = \int \int X(\mathbf{a}_0)Y(\mathbf{a})P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) d\mathbf{a} d\mathbf{a}_0. \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

Выберем функции $X(\mathbf{a})$ и $Y(\mathbf{a})$ в виде

$$X(\mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{b}); \quad Y(\mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{c}). \quad (8.4.6)$$

Подставляя (8.4.6) в (8.4.5), находим

$$P(\mathbf{b}, t | \mathbf{c}, t_0) = P(\mathbf{c}, t | \mathbf{b}, t_0), \quad (8.4.7)$$

из чего следует, что $P(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0)$ должна быть симметричной функцией относительно \mathbf{a} и \mathbf{a}_0 . Используя формулы (5.3.2) и (5.3.10), можно ввести в выражение (8.4.7) условные вероятности:

$$P(\mathbf{b}, t | \mathbf{c}, t_0)P(\mathbf{c}) = P(\mathbf{c}, t | \mathbf{b}, t_0)P(\mathbf{b}). \quad (8.4.8)$$

Пусть теперь $t - t_0$ очень мало. Тогда $P(\mathbf{b}, t | \mathbf{c}, t_0) \rightarrow W(\mathbf{b}, \mathbf{c})(t - t_0)$, где $W(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ — вероятность перехода от \mathbf{b} к \mathbf{c} за единицу времени¹⁾. Таким образом, в выражении (8.4.8) содержится условие

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{c})P(\mathbf{c}, t) = W(\mathbf{c}, \mathbf{b})P(\mathbf{b}, t), \quad (8.4.9)$$

которое представляет собой обычное определение детального равновесия (отсутствие потока между \mathbf{b} и \mathbf{c}).

В случае уравнения Фоккера — Планка функция $P(\mathbf{b}, t | \mathbf{c}, t_0)$ не разложима в ряд по $t - t_0$, но при подстановке в выражение (8.4.8) $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$ из него следует (при $\Delta a_i \neq 0$) отсутствие потока от \mathbf{a} к $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$, т. е. $J_i = 0$.

Докажем теперь, что из детального равновесия вытекает эрмитовость (в смысле Штурма — Лиувилля). Нас интересует уравнение Фоккера — Планка

$$LP_i(a_i) = \Lambda_i P_i(a_i), \quad (8.4.10)$$

¹⁾ Заметим, что из условия стационарности следует независимость этих вероятностей перехода от времени.

где, согласно (8.1.1),

$$-L = \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial a_l} D_{ll} - \frac{\partial}{\partial a_l} A_l, \quad (8.4.11)$$

а из (8.1.5) следует, что стационарному состоянию соответствует собственное значение $\Lambda_l = 0$. Сведем уравнение (8.4.10) к эрмитовскому виду с помощью подстановки:

$$P_l(a_l) = e^{\chi(a_l)} Q_l(a_l), \quad (8.4.12)$$

где функция χ определена таким образом, чтобы обеспечить эрмитовость (в смысле Штурма—Лиувилля) оператора

$$L' = e^{-\chi} L e^{\chi}. \quad (8.4.13)$$

Для выполнения условия эрмитовости необходимо, согласно приложению А к работе [16], чтобы

$$2D_{ll} \frac{\partial \chi}{\partial a_l} = - \left[\frac{\partial D_{ll}}{\partial a_l} - A_l \right] \quad (8.4.14)$$

или, используя также выражение (8.1.6),

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_k} = - \frac{1}{2} D_{kl}^{-1} \left(\frac{\partial D_{ll}}{\partial a_l} - A_l \right) \equiv \frac{1}{2} U_k. \quad (8.4.15)$$

Отсюда видно, что χ выражается в виде интеграла по траектории

$$\chi = \frac{1}{2} \int_{a_k^0}^{a_k} U_k da_k. \quad (8.4.16)$$

Этот интеграл имеет смысл и не зависит от пути тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial a_k \partial a_l} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial a_l \partial a_k} \quad \text{или} \quad \frac{\partial U_k}{\partial a_l} = \frac{\partial U_l}{\partial a_k}. \quad (8.4.17)$$

Это условие, согласно (8.1.8), и означает существование детального равновесия.

Собственные функции возбужденных состояний для некоторой типичной задачи представляют собой полиномы,

умноженные на собственную функцию основного состояния:

$$P_j(\mathbf{a}) = \Pi_j(\mathbf{a}) W(\mathbf{a}), \quad (8.4.18)$$

где $\Pi_j(\mathbf{a})$ — некоторые полиномы, а

$$W(\mathbf{a}) = P_0(\mathbf{a}) \quad (8.4.19)$$

— основное состояние.

Двумя примерами являются линейный гармонический осциллятор и атом водорода, собственные функции которых представляют собой соответственно произведения полиномов Эрмита и гауссовых функций, полиномов Лагерра и экспонент. Кроме того, как правило, можно показать, что эти полиномы ортогональны друг другу с весовым множителем $W(\mathbf{a})$:

$$\int \Pi_i(\mathbf{a}) \Pi_j(\mathbf{a}) W(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = \delta_{ij}. \quad (8.4.20)$$

Применяя это рассуждение к нашему случаю и используя (8.3.7), положим

$$P_j = \phi_j^* P_0. \quad (8.4.21)$$

Докажем справедливость формулы (8.4.21). Из (8.1.2), (8.1.3) и (8.4.14) видно, что

$$W(a_i) = P_0(a_i) = e^{2\chi(a_i)}. \quad (8.4.22)$$

Из выражения (8.4.12) вытекает связь собственных функций операторов L и L' :

$$P_l(\mathbf{a}) = [W(\mathbf{a})]^{1/2} Q_l(\mathbf{a}). \quad (8.4.23)$$

Поскольку оператор L' — эрмитов, функции Q_l являются также собственными функциями оператора $(L')^+$ с теми же собственными значениями Λ_l :

$$(L')^+ Q_l = (W^{-1/2} L W^{1/2})^+ Q_l = \Lambda_l Q_l. \quad (8.4.24)$$

Но функция W , согласно (8.4.16) — (8.4.22), вещественна, поэтому

$$(W^{-1/2} L W^{1/2})^+ = W^{1/2} L^+ W^{-1/2}. \quad (8.4.25)$$

Следовательно,

$$L^+ (W^{-1/2} Q_l) = \Lambda_l (W^{-1/2} Q_l), \quad (8.4.26)$$

так что собственные функции оператора L^+ равны

$$\phi_i(\mathbf{a}) = W^{-1/2} Q_i(\mathbf{a}) = P_i(\mathbf{a})/W(\mathbf{a}), \quad (8.4.27)$$

что и требовалось доказать¹⁾. Условия ортонормировки и полноты функций Q_i , выраженные через функции ϕ_i и P_i , имеют следующий вид:

$$\int \phi_i^* P_j(\mathbf{a}) d\mathbf{a} = \delta_{ij}, \quad (8.4.28)$$

$$\sum_j \phi_j^*(\mathbf{a}) P_j(\mathbf{a}) = \sum_j P_j(\mathbf{a}) \phi_j^*(\mathbf{a}') = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}'). \quad (8.4.29)$$

Две суммы в (8.4.29) отличаются на множитель $W(\mathbf{a})/W(\mathbf{a}')$, который обращается в единицу при умножении на $\delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}')$.

Заметим, что условия ортогональности (8.2.12) и полноты (8.3.3) получены без предположения о детальном равновесии.

¹⁾ Этот результат совпадает с (8.4.21) для вещественных функций $P_i(\mathbf{a})$. Так как оператор L' веществен и эрмитов, то можно выбрать вещественные функции $Q_i(\mathbf{a})$, а значит, и $P_i(\mathbf{a})$.

9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

9.1. КОГЕРЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ

Определим когерентное состояние $|\beta\rangle$ как собственную функцию оператора уничтожения b , действующего справа на электромагнитное поле:

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle. \quad (9.1.1)$$

Такие состояния впервые рассматривались Шредингером [66] для характеристики минимальной неопределенности волновых пакетов. Глаубер и Сударшан [29] изучали различные свойства когерентных состояний и подчеркивали полезность их использования в качестве базиса. Для определения состояния $|\beta\rangle$ рассмотрим оператор $be^{\beta b^+}$. Используя перестановочные соотношения $[b, e^{\beta b^+}] = \frac{\partial \exp(\beta b^+)}{\partial b^+} = \beta e^{\beta b^+}$, получим

$$be^{\beta b^+} = e^{\beta b^+} (b + \beta). \quad (9.1.2)$$

Так как

$$be^{\beta b^+} |0\rangle = e^{\beta b^+} (b + \beta) |0\rangle = \beta e^{\beta b^+} |0\rangle, \quad (9.1.3)$$

то $e^{\beta b^+} |0\rangle$ является собственным вектором оператора b . Добавляя нормировочный множитель $\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right)$, определим состояние $|\beta\rangle$ следующим образом:

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta b^+} |0\rangle. \quad (9.1.4)$$

9.2. НОРМИРОВКА И НЕОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Собственная функция $|n\rangle$ оператора числа фотонов удовлетворяет уравнениям

$$b^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (9.2.1)$$

$$|n+1\rangle = (n+1)^{-1/2} b^+ |n\rangle. \quad (9.2.2)$$

Проводя итерацию от $n = 0$, находим

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (b^+)^n |0\rangle. \quad (9.2.3)$$

С помощью разложения экспоненты в (9.1.4), содержащей оператор b^+ , можно представить когерентное состояние $|\beta\rangle$ в виде

$$|\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (b^+)^n}{n!} |0\rangle \quad (9.2.4)$$

Учитывая (9.2.3), выразим когерентное состояние $|\beta\rangle$ в n -представлении

$$|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \beta^n e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} (n!)^{-1/2} \quad (9.2.5)$$

или

$$|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\beta\rangle, \quad (9.2.6)$$

где

$$\langle n|\beta\rangle = (n!)^{-1/2} \beta^n \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right). \quad (9.2.7)$$

Применим к выражению (9.2.5) операцию эрмитового сопряжения:

$$\langle\beta| = \sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{-1/2} \langle m| e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} (\beta^*)^m. \quad (9.2.8)$$

Из (9.2.5) и (9.2.8) находим

$$\langle\beta|\beta'\rangle = \sum_{m, n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\beta'|^2)} \frac{(\beta^*)^m (\beta')^n}{(m!)^{1/2} (n!)^{1/2}} \langle m|n\rangle \quad (9.2.9)$$

Используя нормировку и ортогональность собственных функций оператора числа фотонов, имеем

$$\begin{aligned} \langle\beta|\beta'\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\beta'|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^* \beta')^n}{n!} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\beta'|^2)} e^{\beta^* \beta'} \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

или

$$|\langle\beta|\beta'\rangle|^2 = e^{-|\beta - \beta'|^2}.$$

Таким образом, для $\beta = \beta'$

$$\langle \beta | \beta \rangle = 1. \quad (9.2.11)$$

Нормированный множитель $\exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right)$ в выражении (9.1.4) выбран так, чтобы получить (9.2.11). В то же время из (9.2.10) следует неортогональность двух различных состояний β, β' в этом базисе. Итак, мы пришли к непрерывному представлению полностью неортогональных состояний.

Состояния β и β' могут рассматриваться как почти ортогональные только в пределе больших $|\beta - \beta'|$, который, например, соответствует классическому пределу больших амплитуд β .

9.3. ПОЛНОТА [67]

В отличие от условия ортогональности, условие полноты есть важное свойство совокупности базисных векторов. Мы хотим показать, что

$$\int |\beta\rangle \frac{d^2\beta}{\pi} \langle \beta| = 1, \quad (9.3.1)$$

где

$$d^2\beta \equiv d(\operatorname{Re} \beta) d(\operatorname{Im} \beta). \quad (9.3.2)$$

Подставляя

$$\beta \equiv |\beta| e^{-i\phi}, \quad I \equiv |\beta|^2 \quad (9.3.3)$$

в формулу (9.3.2), получим

$$d^2\beta = |\beta| d|\beta| d\phi, \quad (9.3.4)$$

$$d^2\beta = \frac{1}{2} dI d\phi. \quad (9.3.5)$$

Умножая левую часть равенства (9.3.1) слева на $|m\rangle$ и справа на $\langle n|$ и используя выражение (9.2.7), имеем

$$\int \langle m | \beta \rangle \frac{d^2\beta}{\pi} \langle \beta | n \rangle = \int \frac{\beta^m (\beta^*)^n e^{-|\beta|^2}}{(m!)^{1/2} (n!)^{1/2}} \frac{d^2\beta}{\pi}. \quad (9.3.6)$$

Подстановка (9.3.3) и (9.3.5) в (9.3.6) приводит к

$$\int \langle m | \beta \rangle \frac{d^2\beta}{\pi} \langle \beta | n \rangle = \\ = \frac{1}{2\pi (m!)^{1/2} (n!)^{1/2}} \int_0^\infty I^{\frac{m+n}{2}} e^{-I} dI \int_0^{2\pi} e^{-I(m-n)\phi} d\phi. \quad (9.3.7)$$

Интеграл по ϕ в (9.3.7) равен нулю при $m \neq n$ и единице при $m = n$. Поэтому

$$\int \langle m | \beta \rangle \frac{d^2\beta}{\pi} \langle \beta | n \rangle = \delta_{m,n} = \langle m | n \rangle, \quad (9.3.8)$$

что и требовалось доказать.

9.4. ШПУР ОПЕРАТОРА

Теорема о шпуре оператора

$$\text{Sp} | u \rangle \langle v | = \langle v | u \rangle \quad (9.4.1)$$

легко доказывается с помощью суммирования по всем состояниям в n -представлении

$$\text{Sp} | u \rangle \langle v | = \sum_n \langle n | u \rangle \langle v | n \rangle = \sum_n \langle v | n \rangle \langle n | u \rangle, \quad (9.4.2)$$

используя условия полноты собственных состояний оператора числа фотонов

$$\sum_n | n \rangle \langle n | = 1. \quad (9.4.3)$$

С учетом тождества (9.3.1) можно получить для шпура произвольного оператора

$$\text{Sp} M(b, b^+) = \text{Sp} M(b, b^+) \int \frac{d^2\beta}{\pi} | \beta \rangle \langle \beta | = \\ = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle \beta | M(b, b^+) | \beta \rangle, \quad (9.4.4)$$

где использована также теорема (9.4.1).

Заметим, что взятие шпура требует полноты, но не ортогональности набора собственных функций.

9.5. ШПУР НОРМАЛЬНО УПОРЯДОЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Определим нормально упорядоченный оператор $M^{(n)}(b, b^+)$ так, чтобы все операторы уничтожения в нем стояли справа от операторов рождения. Каждый оператор $M(b, b^+)$ может в принципе быть записан в нормальной форме, так что

$$M(b, b^+) = M^{(n)}(b, b^+), \quad (9.5.1)$$

где правая и левая части равны, но не совпадают по форме. Например, если $M = bb^+$, то $M^{(n)} = b^+b + 1$.

Шпур нормально упорядоченного оператора обладает некоторыми интересными свойствами. Рассмотрим шпур оператора $e^{i\mu b^+} e^{i\nu b}$. Используя равенство (9.4.4), имеем

$$\text{Sp } e^{i\mu b^+} e^{i\nu b} = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle \beta | e^{i\mu b^+} e^{i\nu b} | \beta \rangle. \quad (9.5.2)$$

Учитывая также уравнение для собственных значений (9.1.1) и условие нормировки когерентных состояний $|\beta\rangle$ (9.2.11), получим

$$\text{Sp } e^{i\mu b^+} e^{i\nu b} = \int \frac{d^2\beta}{\pi} e^{i\mu\beta^*} e^{i\nu\beta}. \quad (9.5.3)$$

Произвольный нормально упорядоченный оператор $M^{(n)}(b, b^+)$ может быть представлен в виде суперпозиции таких операторов:

$$M^{(n)}(b, b^+) = \int m(\mu, \nu) e^{i\mu b^+} e^{i\nu b} d\mu d\nu. \quad (9.5.4)$$

Следовательно, соотношение типа (9.5.2) справедливо для любых μ и ν , а также для произвольного оператора

$$\text{Sp } M^{(n)}(b, b^+) = \int \frac{d^2\beta}{\pi} M^{(n)}(\beta, \beta^*). \quad (9.5.5)$$

Так как $M = M^{(n)}$, то можно записать более общее выражение

$$\text{Sp } M(b, b^+) = \int \frac{d^2\beta}{\pi} M^{(n)}(\beta, \beta^*). \quad (9.5.6)$$

Для получения из оператора $M(b, b^+)$ классической функции $M^n(\beta, \beta^*)$ надо сначала записать оператор в нормально упорядоченном виде, а затем совершить замену $b \rightarrow \beta$, $b^+ \rightarrow \beta^*$. Это соответствие (в обратную сто-

рону) установлено Луисселом [68]:

$$M(b, b^+) = M^{(n)}(b, b^+) = \mathcal{N} M^{(n)}(\beta, \beta^*), \quad (9.5.7)$$

где оператор \mathcal{N} означает замену β на b и β^* на b^+ и переход к нормально упорядоченному оператору¹⁾. Справедливо и другое соответствие:

$$N(b, b^+) = N^{(a)}(b, b^+) = AN^{(a)}(\beta, \beta^*), \quad (9.5.8)$$

где проведены замены $\beta \rightarrow b$ и $\beta^* \rightarrow b^+$, а все операторы расположены в антинормально упорядоченном виде, т. е. все операторы рождения стоят справа от операторов уничтожения. Можно теперь обобщить нашу теорему (9.5.6) о шпуре оператора, записав ее в виде

$$\text{Sp } M(b, b^+) N(b, b^+) = \int \frac{d^2\beta}{\pi} M^{(n)}(\beta, \beta^*) N^{(a)}(\beta, \beta^*). \quad (9.5.9)$$

Чтобы доказать формулу (9.5.9), используем равенство $MN = M^{(n)}N^{(a)}$, а также свойства цикличности шпуров

$$\text{Sp } e^{i\mu b^+} e^{i\nu b} e^{i\lambda b} e^{i\tau b^+} = \text{Sp } e^{i\tau b^+} e^{i\mu b^+} e^{i\nu b} e^{i\lambda b}$$

для приведения произведения нормального и антинормального операторов к нормально упорядоченному виду. Применяя затем (9.5.5), получим требуемый результат (9.5.9).

В следующей главе мы увидим, что любая наблюдаемая величина может быть записана в виде

$$\langle M \rangle = \text{Sp}(M\rho),$$

где ρ — оператор плотности системы. Так как измерения с помощью счетчиков, поглощающих фотоны, дают нулевой отсчет в случае вакуума, то мы будем всегда полагать, что операторы M измеряемых величин уже нормально упорядочены. При этом для оператора ρ , согласно теореме о шпуре (9.5.5), следует употреблять антинормальное упорядочение. Если же пользоваться квантовыми счетчиками (см., например, [48]), работающими на вынужденном излучении, то M будет антинормальным оператором и необходимо использовать нормально упорядоченный оператор ρ .

¹⁾ Чтобы подчеркнуть классический характер функции, мы будем иногда писать ее в виде $\bar{M}^{(n)}(\beta, \beta^*)$ вместо $M^{(n)}(\beta, \beta^*)$.

10. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЛОТНОСТИ

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Операторы плотности используются при изучении совокупности систем, а не отдельной системы. Рассмотрим большое число N систем, каждая из которых J находится в определенном состоянии с волновой функцией Ψ^J ($J = 1, 2, \dots, N$). Любая наблюдаемая в этой совокупности величина равна

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^N (\Psi^J, M \Psi^J), \quad (10.1.1)$$

где N — число систем, а не атомов. Можно переписать выражение (10.1.1) в следующем виде:

$$\langle M \rangle = \sum_J P_J (\Psi^J, M \Psi^J), \quad (10.1.2)$$

где суммирование проводится по всем состояниям J . Величина P_J является «вероятностью» нахождения систем в состоянии J , т. е. числом систем в состоянии J , деленным на полное число систем N . Введем теперь произвольный набор базисных функций ϕ_μ . Волновая функция ϕ_μ данного состояния может быть разложена в ряд по этому базису:

$$\Psi^J = \sum_{\mu} \phi_{\mu} (\phi_{\mu}, \Psi^J). \quad (10.1.3)$$

Подстановка (10.1.3) в (10.1.2) дает

$$\langle M \rangle = \sum_J P_J \left(\sum_{\mu} \phi_{\mu} (\phi_{\mu}, \Psi^J), M \sum_{\nu} \phi_{\nu} (\phi_{\nu}, \Psi^J) \right), \quad (10.1.4)$$

$$\langle M \rangle = \sum_{J, \mu, \nu} P_J (\phi_{\mu}, \Psi^J)^* (\phi_{\nu}, \Psi^J) M_{\mu\nu}, \quad (10.1.5)$$

$$\langle M \rangle = \sum_{\mu, \nu} M_{\mu\nu} \rho_{\nu\mu}, \quad (10.1.6)$$

$$\langle M \rangle = \text{Sp} [M \rho], \quad (10.1.7)$$

где матрица плотности $\rho_{\nu\mu}$ определена следующим равенством:

$$\rho_{\nu\mu} = \sum_J (\phi_\nu, \Psi^J) P(\Psi^J, \phi_\mu). \quad (10.1.8)$$

Можно переписать равенство (10.1.8) в виде

$$\rho_{\nu\mu} = \left(\phi_\nu, \sum_J |\Psi^J\rangle P_J \langle\Psi^J| \phi_\mu \right), \quad (10.1.9)$$

$$= (\phi_\nu, \rho \phi_\mu), \quad (10.1.10)$$

где введен оператор плотности

$$\rho \equiv \sum_J |\Psi^J\rangle P_J \langle\Psi^J|, \quad (10.1.11)$$

который имеет правильные матричные элементы $\rho_{\nu\mu}$ для любой системы базисных векторов.

10.2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

В шредингеровской квантовой механике изменение во времени волновой функции Ψ^J замкнутой физической системы определяется следующим образом:

$$\Psi^J(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \Psi^J(0), \quad (10.2.1)$$

где H — полный гамильтониан системы. Подставляя (10.2.1) в (10.1.11), получим

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_J e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\Psi^J(0)\rangle P_J \langle\Psi^J(0)| e^{\frac{iHt}{\hbar}} = \\ &= e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Уравнения движения для оператора плотности получаются с помощью дифференцирования равенства (10.2.2) по t :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = H e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}} - e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{iHt}{\hbar}} H, \quad (10.2.3)$$

$$= [H, \rho(t)] \quad (10.2.4)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (H, \rho(t)), \quad (10.2.5)$$

где

$$(A, B) = \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \quad (10.2.6)$$

Вывод флуктуационно-диссипативной теоремы является интересным примером применения уравнений для оператора плотности. Мы не будем здесь останавливаться на этом выводе, который принадлежит Кубо [69] и автору (см. [8]; более простой вывод содержится в работе [10]).

11. ДИНАМИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ КЛАССИЧЕСКОГО И КВАНТОВОГО ПОДХОДОВ

11.1. УСРЕДНЕНИЕ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ ВЕЛИЧИН

Будем рассматривать счетчики, поглощающие фотоны и, следовательно, измеряющие величины, операторы которых нормально упорядочены¹⁾. Из формул (10.1.7) и (9.5.9) получим

$$\langle M(t) \rangle = \text{Sp} [M(b, b^+) \rho(b, b^+, t)], \quad (11.1.1)$$

$$\langle M(t) \rangle = \int \bar{M}^{(n)}(\beta, \beta^*) P(\beta, \beta^*, t) d^2\beta, \quad (11.1.2)$$

где

$$M(b, b^+) = \mathcal{N} \bar{M}^{(n)}(\beta, \beta^*), \quad (11.1.3)$$

и

$$\rho(b, b^+, t) = \mathcal{A} \bar{\rho}^{(a)}(\beta, \beta^*, t) \quad (11.1.4)$$

или

$$\rho(b, b^+, t) = \pi \mathcal{A} P(\beta, \beta^*, t). \quad (11.1.5)$$

В этих формулах обозначения \mathcal{A} и \mathcal{N} относятся к операторам антинормального и нормального упорядочений, в которых операторы рождения стоят соответственно справа или слева от операторов уничтожения, а $\bar{M}^{(n)}(\beta, \beta^*)$ и $\bar{\rho}^{(a)}(\beta, \beta^*, t) = \pi P(\beta, \beta^*, t)$ — классические функции, полученные из операторов $M(b, b^+)$ и $\rho(b, b^+, t)$ путем расположения операторов b и b^+ соответственно в нормальном и антинормальном порядке и последующей замены $b \rightarrow \beta$, $b^+ \rightarrow \beta^*$. Заметим, что операторы M и ρ могут быть функциями других коммутирующих операторов, кроме b и b^+ , но операторы \mathcal{N} и \mathcal{A} относятся только к b и b^+ . В выражении (11.1.5) содержится

¹⁾ В случае счетчиков Манделя вынужденного излучения [48], которые измеряют величины, соответствующие антинормально упорядоченным операторам, необходимо просто заменить в последующих уравнениях нормальное упорядочение на антинормальное.

дополнительный множитель для того, чтобы

$$\text{Sp } P = \int P(\beta, \beta^*) d^2\beta \quad (11.1.6)$$

согласовался с обозначениями Глаубера [54, 29] и Сударшана [30, 71]. Заметим, что, по Глауберу,

$$\rho(b, b^+) = \int |\beta\rangle d^2\beta \langle\beta| P(\beta), \quad (11.1.7)$$

где $P(\beta)$ — числовая функция. Далее, Глаубер доказывает, что

$$\text{Sp}[M^{(n)}\rho] = \int M^{(n)}(\beta, \beta^*) d^2\beta P(\beta). \quad (11.1.8)$$

Из сравнения (11.1.8) и (11.1.2) и произвольности функции $M^{(n)}$ следует, что должно выполняться равенство

$$P(\beta, \beta^*) = P(\beta). \quad (11.1.9)$$

Наш метод отличается от работ Глаубера [54, 29, 70], Сударшана [30, 71], Манделя и Вольфа [31] тем, что наша функция $P(\beta, \beta^*, t)$ зависит от времени. Это обстоятельство связано с тем, что поле не является изолированной системой, а взаимодействует с резервуарами, вызывающими стохастические изменения в системе. Для краткости опустим вторую переменную β^* , так что, например, выражение (11.1.2) может быть записано в более простом виде

$$\langle M(t) \rangle = \int \bar{M}^{(n)}(\beta) P(\beta) d^2\beta. \quad (11.1.10)$$

Предположим, что величина $P(\beta, \beta^*, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных, решение которого, выраженное через функцию Грина, имеет вид

$$P(\beta, t) = \int P(\beta, t | \beta', t') P(\beta', t') d^2\beta'. \quad (11.1.11)$$

Согласно (8.3.7), функция Грина $P(\beta, t | \beta', t')$ может быть следующим образом разложена в ряд по замкнутой системе биортогональных функций $P_j(\beta)$ и $\phi_j(\beta')$:

$$P(\beta, t | \beta', t') = \sum_j e^{-\Lambda_j(t-t')} P_j(\beta) \phi_j(\beta')^*. \quad (11.1.12)$$

Введем теперь операторы

$$P_j(b, b^+) = \mathcal{L} \mathcal{A} P_j(\beta) \quad (11.1.13)$$

и

$$\phi_j(b, b^+) = \mathcal{L} \phi_j(\beta)^* \equiv \mathcal{L} \bar{\phi}_j^*. \quad (11.1.14)$$

Для матрицы плотности $\rho(b, b^+, t)$, согласно (11.1.11) — (11.1.14), получим

$$\begin{aligned} \rho(b, b^+, t) &= \sum_j e^{-\Lambda_j(t-t')} P_j(b, b^+) \int \phi_j^*(\beta') P(\beta', t') d^2\beta' = \\ &= \sum_j e^{-\Lambda_j(t-t')} P_j(b, b^+) \langle \phi_j(t') \rangle, \end{aligned} \quad (11.1.15)$$

$$(11.1.16)$$

где

$$\langle \phi_j(t') \rangle \equiv \text{Sp} [\phi_j(b, b^+) \rho(b, b^+, t)]. \quad (11.1.17)$$

Итак, мы получили точное операторное представление зависящей от времени матрицы плотности. Получим теперь выражение для среднего от произвольного нормально упорядоченного оператора $M^{(n)}(t)$. Из равенств (11.1.1), (11.1.2), используя такие (11.1.16), имеем

$$\langle M^{(n)}(t) \rangle = \sum_j e^{-\Lambda_j(t-t')} \int \bar{M}(\beta) d\beta P_j(\beta) \langle \phi_j(t') \rangle. \quad (11.1.18)$$

11.2. УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим теперь усреднение величин, относящихся к двум моментам времени. Перепишем (11.1.18) в другой форме:

$$\langle M^{(n)}(t) \rangle = \sum_j O_j(t, t') \langle \phi_j(t') \rangle. \quad (11.2.1)$$

Мы хотим доказать, что

$$\begin{aligned} \langle Q(t') M^{(n)}(t) N(t') \rangle &= \\ &= \sum_j O_j(t, t') \langle Q(t') \phi_j(t') N(t') \rangle. \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Пусть произвольная система находится в i -м состоянии. Запишем уравнение Ланжевена

$$\frac{d(a_i^+, a_j)}{dt} = A_{ij} + F_{ij}, \quad (11.2.3)$$

где a_i^+ — оператор рождения в i -м состоянии, а a_j — оператор уничтожения в j -м состоянии. В нашем доказательстве состояние может относиться не только к одному атому, но и ко всему лазеру (поле, взаимодействующее с атомами). Поскольку рассматривается только одна система, то

$$\sum_i a_i^+ a_i = 1. \quad (11.2.4)$$

В уравнение (11.2.3) входит произведение двух операторов, поэтому можно разложить A_{ij} в ряд по этим операторам:

$$A_{ij} = \sum_{m,n} B_{ijmn} a_m^+ a_n, \quad (11.2.5)$$

где B_{ijmn} — некоторая совокупность чисел. Как и в гл. 6, можно так записать уравнение (11.2.3), чтобы

$$\langle F_{ij} \rangle = 0 \quad (11.2.6)$$

и, следовательно,

$$\frac{d \langle a_i^+ a_j \rangle}{dt} = \sum_{m,n} B_{ijmn} \langle a_m^+ a_n \rangle. \quad (11.2.7)$$

Предположение о марковости системы можно сформулировать в следующем виде:

$F_{ij}(s)$ не зависит от всех $a_m^+(t)$ и $a_n(t)$ для $s > t$, (11.2.8)

т. е. случайные силы не зависят от операторов, действующих в предыдущие моменты времени. Иначе говоря, система не обладает памятью. Если какой-либо оператор $C(t)$ имеет следующий вид:

$$C = \sum_{m,n} C_{mn} a_m^+ a_n, \quad (11.2.9)$$

то, используя условие (11.2.6), получим для $t > t'$

$$\langle F_{ij}(t) C(t') \rangle = \langle F_{ij}(t) \rangle \langle C(t') \rangle = 0. \quad (11.2.10)$$

Точно так же

$$\langle C(t') F_{ij}(t) \rangle = 0. \quad (11.2.11)$$

Заметим, что выражения (11.2.10), (11.2.11) дают более слабые ограничения, чем (11.2.8), так как они означают

лишь отсутствие корреляции, а не полную независимость. В дальнейшем мы будем пользоваться лишь более слабым условием. Из выражений (11.2.10) и (11.2.3) находим

$$\left\langle \left[\frac{d}{dt} (a_i^+ a_j) - A_{ij} \right]_t a_k^+ (t') a_l (t') \right\rangle = 0 \quad \text{при } t > t'. \quad (11.2.12)$$

Подстановка (11.2.5) в (11.2.12) дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a_i^+ (t) a_j (t) a_k^+ (t') a_l (t') \rangle - \\ - \sum B_{ijmn} \langle a_m^+ (t) a_n^+ (t) a_k^+ (t') a_l (t') \rangle = 0. \end{aligned} \quad (11.2.13)$$

Сравнение (11.2.13) и (11.2.7) показывает, что уравнения движения для величин $\langle a_i^+ (t) a_j (t) a_k^+ (t') a_l (t') \rangle$ и $\langle a_i^+ (t) a_j (t) \rangle$ совпадают. Определим теперь числовую функцию $Q_{qp}^{ij}(t, t')$:

$$\frac{d}{dt} O_{qp}^{ij}(t, t') = \sum_{m, n} B_{ijmn} O_{qp}^{nm}(t, t') \quad (11.2.14)$$

при начальном условии

$$O_{qp}^{ij}(t, t) = \delta_{ip} \delta_{jq}. \quad (12.2.15)$$

Отсюда видно, что уравнению (11.2.7) удовлетворяет следующая величина:

$$\langle a_i^+ (t) a_j (t) \rangle = \sum_{q, p} O_{qp}^{ij}(t, t') \langle a_p^+ (t') a_q (t') \rangle. \quad (11.2.16)$$

Точно так же легко проверить, что

$$\begin{aligned} \langle a_i^+ (t) a_j (t) a_k^+ (t') a_l (t') \rangle = \\ = \sum_{q, p} O_{qp}^{ij}(t, t') \langle a_p^+ (t') a_q (t') a_k^+ (t') a_l (t') \rangle \end{aligned} \quad (11.2.17)$$

удовлетворяет уравнению (11.2.13).

Таким образом, мы видим, что двухвременная функция (11.2.17) обладает той же зависимостью от времени, что и одновременная функция (11.2.16). Это утверждение составляет содержание гипотезы Онсагера о регрессии флуктуаций, которая установлена здесь для квантовомеханической системы, не находящейся ни в равновесном, ни даже в стационарном состоянии. Таким

образом, если произвольный билинейный, т. е. представляющий собой линейную комбинацию операторов $a_j^\dagger a_j$, оператор $M(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\langle M(t) \rangle = \sum_{\mu} O_{\mu}(t, t') \langle M_{\mu}(t') \rangle, \quad (11.2.18)$$

а $N(t')$ — другой билинейный оператор, то, согласно равенствам (11.2.16) и (11.2.17),

$$\langle M(t) N(t') \rangle = \sum_{\mu} O_{\mu}(t, t') \langle M_{\mu}(t') N(t') \rangle. \quad (11.2.19)$$

Случайная сила F может стоять справа в корреляторе (11.2.10) и слева в корреляторе (11.2.11), поэтому если $Q(t')$ — третий билинейный оператор, то в предположении о марковости процесса можно показать, что

$$\langle Q(t') M(t) N(t') \rangle = \sum_j O_j(t, t') \langle Q(t') M(t') N(t') \rangle. \quad (11.2.20)$$

Формулы (11.2.19) и (11.2.20), выражающие уравнения регрессии, непосредственно вытекают из уравнения (11.2.18) и предположения о марковости процесса. Тем самым доказано соотношение (11.2.2).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ТРЕХ И БОЛЕЕ ВРЕМЕН

Наше основное предположение (11.2.8) о марковости процесса $F_{ij}(t)$ не зависит от состояния системы в предшествующие моменты времени и позволяет ввести обобщение выражения (11.2.10):

$$\langle F_{ij}(t_3) N(t_2) R(t_1) \rangle = 0, \quad t_3 > t_2 \geq t_1. \quad (11.2.21)$$

Повторяя использованные выше рассуждения, обобщим формулы (11.2.19) и (11.2.20) соответственно на

$$\begin{aligned} \langle M(t_3) N(t_2) R(t_1) \rangle &= \\ &= \sum_{\mu} O_{\mu}(t_3, t_2) \langle M_{\mu}(t_2) N(t_2) R(t_1) \rangle, \end{aligned} \quad (11.2.22)$$

$$\begin{aligned} \langle S(t_1) Q(t_2) M(t_3) N(t_2) R(t_1) \rangle &= \\ &= \sum_{\mu} O_{\mu}(t_3, t_2) \langle S(t_1) Q(t_2) M_{\mu}(t_2) N(t_2) R(t_1) \rangle, \end{aligned} \quad (11.2.23)$$

т. е. под знак среднего в равенстве (11.2.18) можно вводить справа и слева операторы, относящиеся к предыдущим моментам времени. Обобщение на случай произвольного числа таких операторов тривиально.

11.3. УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ДВУМ РАЗЛИЧНЫМ МОМЕНТАМ ВРЕМЕНИ

Выражение (11.1.15), относящееся к одному моменту времени, приведенное к виду (11.2.18), удобно для приложений к теореме регрессии (11.2.20). Окружая оператор, входящий в (11.1.15), слева оператором $Q(t')$, а справа оператором $N(t')$, получим

$$\begin{aligned} \langle Q(t') M^{(n)}(t) N(t') \rangle &= \\ &= \sum_I e^{-\Lambda_I(t-t')} \int \bar{M}(\beta) d\beta P_I(\beta) \langle Q(t') \phi_I(t') N(t') \rangle, \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

где, как и в (11.1.14),

$$\begin{aligned} \langle Q(t') \phi_I(t') N(t') \rangle &= \\ &= \mathcal{N} [Q(b, b^+) \phi_I(b, b^+) N(b, b^+) \rho(b, b^+, t')]. \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

Если оператор $Q\phi_I N$ нормально упорядочен, то, используя теорему о шпуре (9.5.9), можно, как и в (11.1.2), переписать полученный результат в виде классического интеграла

$$\begin{aligned} \langle Q(t') \phi_I(t') N(t') \rangle &= \\ &= \int \bar{Q}(\beta') \phi_I(\beta')^* \bar{N}(\beta') P(\beta', t) d^2\beta'. \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

При этом выражение (11.3.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle Q(t') M^{(n)}(t) N(t') \rangle &= \\ &= \int \bar{Q}(\beta') \bar{M}(\beta) \bar{N}(\beta') d^2\beta d^2\beta' P(\beta, t | \beta', t') P(\beta', t'), \end{aligned} \quad (11.3.4)$$

где величина

$$P(\beta, t | \beta', t') = \sum_I e^{-\Lambda_I(t-t')} P_I(\beta) \phi_I(\beta')^* \quad (11.3.5)$$

представляет собой условную вероятность, обсуждавшуюся в разд. 8.3. Из (11.3.4) следует, что для квантовомеханического вычисления, среднего от двух

нормально упорядоченных операторов, относящихся к двум различным моментам времени, надо, используя соответствующие классические случайные процессы, дважды провести усреднение во времени. Это утверждение справедливо, несмотря на то что соответствующий классический процесс, введенный, согласно (11.1.5), относился к одному моменту времени.

11.4. УСРЕДНЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ОТНОСЯЩИХСЯ К ТРЕМ РАЗЛИЧНЫМ МОМЕНТАМ ВРЕМЕНИ

Определим нормально упорядоченный оператор M_j , относящийся к моменту времени t_j :

$$M_j = M[b(t_j), b^+(t_j)] \equiv A[b^+(t_j)] B[b(t_j)] \equiv A_j B_j. \quad (11.4.1)$$

Рассчитаем величину $\langle T_{\mathcal{N}}(M_1 M_2 M_3) \rangle$, где $T_{\mathcal{N}}$ — оператор нормального и хронологического упорядочения, т. е.

$$\langle T_{\mathcal{N}}(M_1 M_2 M_3) \rangle = \langle A_1 A_2 A_3 B_3 B_2 B_1 \rangle, \quad (11.4.2)$$

где $t_1 < t_2 < t_3$. Вычислим сначала величину $\langle A_3 B_3 \rangle$, для которой, согласно (11.1.18), имеем

$$\langle A_3 B_3 \rangle = \sum e^{-\Lambda_{j_3}(t_3 - t_2)} \int \bar{A}_3 \bar{B}_3 d^3 P_{j_3}(3) \langle \phi_{j_3}(2) \rangle, \quad (11.4.3)$$

где

$$\bar{A}_n = A(\beta_n^*); \quad \bar{B}_n = B(\beta_n); \quad dn \equiv d^2 \beta_n. \quad (11.4.4)$$

Здесь вместо индекса j_3 использовано более удобное обозначение j_3 . Применяя к выражению (11.4.3) нашу теорему (11.2.23) о введении под знак среднего справа и слева операторов, относящихся к предыдущим моментам времени, получим

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 A_3 B_3 B_2 B_1 \rangle &= \\ &= \sum_{j_3} e^{-\Lambda_{j_3}(t_3 - t_2)} \int \bar{A}_3 \bar{B}_3 d^3 P_{j_3}(3) \langle A_1 A_2 \phi_{j_3}(2) B_2 B_1 \rangle. \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

Правая часть этого равенства содержит операторы, относящиеся к моментам времени 1 и 2. Используем формулу (11.1.18) для

$$\begin{aligned} \langle A_2 \phi_{j_3}(2) B_2 \rangle &= \\ &= \sum_{j_2} e^{-\Lambda_{j_2}(t_2 - t_1)} \int \bar{\phi}_{j_3}(2)^* \bar{A}_2 \bar{B}_2 P_{j_2}(2) d^2 \langle \phi_{j_2}(1) \rangle. \end{aligned} \quad (11.4.6)$$

Над ϕ_{j3} в отличие от ϕ_{j2} имеется черта, показывающая, что ϕ_{j3} является числом, а ϕ_{j2} — оператором. Применим теперь к выражению (11.4.6) уравнение регрессии (11.2.2), вставляя в (11.4.6) слева и справа операторы, чтобы получить среднее от операторов, относящихся к двум различным моментам времени:

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 \phi_j(2) B_2 B_1 \rangle &= \\ &= \sum_{j2} e^{-\Lambda_{j2}(t_2-t_1)} \int \bar{\phi}_{j3}(2)^* \bar{A}_2 \bar{B}_2 P_{j2}(2) d2 \langle A_1 \phi_{j2}(1) B_1 \rangle. \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

Это выражение нам понадобится при вычислении (11.4.5), которое перепишем сначала в более удобной форме:

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 A_3 B_3 B_2 B_1 \rangle &= \sum_{j3} e^{-\Lambda_{j3}(t_3-t_2)} \int \bar{A}_3 \bar{B}_3 d3 P_{j3} \times \\ &\times \sum_{j2} e^{-\Lambda_{j2}(t_2-t_1)} \int \bar{\phi}_{j3}(2)^* \bar{A}_2 \bar{B}_2 d2 P_{j2}(2) \langle A_1 \phi_{j2}(1) B_1 \rangle. \end{aligned} \quad (11.4.8)$$

Сюда входят нормально упорядоченные операторы $A_1 \phi_{j2} B_1$, которые, согласно (11.1.8), можно записать в виде

$$\langle A_1 \phi_{j2}(1) B_1 \rangle = \int \bar{\phi}_{j2}(1)^* \bar{A}_1 \bar{B}_1 P(1) d1, \quad (11.4.9)$$

где $t_1 \leq t_2 \leq t_3$. Этот результат — вполне классический, что очевидно из такой формы записи:

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 A_3 B_3 B_2 B_1 \rangle &= \\ &= \int d3 \int d2 \int d1 \bar{A}_3 \bar{B}_3 \sum_{j3} e^{-\Lambda_{j3}(t_3-t_2)} P_{j3}(3) \bar{\phi}_{j2}(2) \times \\ &\times \bar{A}_2 \bar{B}_2 \sum_{j2} e^{-\Lambda_{j2}(t_2-t_1)} P_{j2}(2) \bar{\phi}_{j2}(1)^* \bar{A}_1 \bar{B}_1 P(1) = \\ &= \int \int \int d3 d2 d1 \bar{A}_3 \bar{B}_3 P(\beta_3 t_3 | \beta_2 t_2) \bar{A}_2 \bar{B}_2 P(\beta_2 t_2 | \beta_1 t_1) \bar{A}_1 \bar{B}_1 P(\beta_1, t_1). \end{aligned} \quad (11.4.10)$$

Окончательное выражение (11.4.10) в точности совпадает с процедурой усреднения, характерной для соответствующих «классических» марковских процессов.

11.5. УСРЕДНЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ОТНОСЯЩИХСЯ К МНОГИМ РАЗЛИЧНЫМ МОМЕНТАМ ВРЕМЕНИ

Метод, развитый в предыдущем разделе, может быть использован при расчете любого числа произвольных операторов, относящихся к различным моментам времени, что дает

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 \dots A_n B_n \dots B_2 B_1 \rangle = & \\ = \sum_{j_n, \dots, j_2} \langle 0 | \bar{M}_n | j_n \rangle e^{-\Lambda j_n (t_n - t_{n-1})} \times & \\ \times \langle j_n | \bar{M}_{n-1} | j(n-1) \rangle e^{-\Lambda j(n-1) (t_{n-1} - t_{n-2})} \dots & \\ \dots \langle j_3 | \bar{M}_2 | j_2 \rangle e^{-\Lambda j_2 (t_2 - t_1)} \langle j_2 | \bar{M}_1 | j_1 \rangle, & \quad (11.5.1) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \langle j(s+1) | \bar{M}_s | j_s \rangle = & \\ = \int \bar{\phi}_{j(s+1)}(\beta_s)^* A_{j_s}(\beta_s^*) B_j(\beta_s) P_{j_s}(\beta_s) d^2 \beta_s, & \quad (11.5.2) \end{aligned}$$

$$\langle 0 | = \phi_0 = 1 \quad (11.5.3)$$

и

$$| j_1 \rangle = P(\beta, \beta^*, t_1). \quad (11.5.4)$$

Другая возможность состоит в том, чтобы, используя выражение (11.1.12) для условной вероятности, переписать (11.5.1) через условные вероятности, подобно (11.4.10):

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 \dots A_n B_n \dots B_2 B_1 \rangle = \langle T_{\mathcal{A}} [M(t_1) \dots M(t_n)] \rangle = & \\ = \left\{ \prod_{s=1}^n \int d^2 \beta_s \right\} \bar{M}_n P(\beta_n, t_n | \beta_{n-1}, t_{n-1}) \times & \\ \times \bar{M}_{n-1} P(\beta_{n-1}, t_{n-1} | \beta_{n-2}, t_{n-2}) \dots & \\ \dots \bar{M}_2 P(\beta_2, t_2 | \beta_1, t_1) \bar{M}_1 P(\beta_1, t_1). & \quad (11.5.5) \end{aligned}$$

Но правая часть этого равенства представляет собой среднее от классических функций $\bar{M}_1 \dots \bar{M}_n$, т. е.

$$\langle T_{\mathcal{A}} [M(t_1) \dots M(t_n)] \rangle = \langle \bar{M}(t_n) \dots M(t_1) \rangle_{\text{кл.}} \quad (11.5.6)$$

Можно обобщить выражение (11.5.6) на случай произвольной суперпозиции операторов. Таким образом, существует полное динамическое соответствие между сред-

ним значением нормально и хронологически упорядоченных квантовомеханических операторов $M_1 \dots M_n$, относящихся к различным моментам времени, и классическим средним значением от классических функций $\bar{M}_1 \dots \bar{M}_n$, соответствующих этим операторам.

11.6. ФЛУКТУАЦИИ ПРИ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИИ

В работах Мандела [72, 31], Глаубера [54, 29, 70], Келли и Клейнера [53] рассматривался идеальный фотодетектор, который приходит в равновесное состояние сразу после каждого акта поглощения, так что не происходит насыщения, а следующие друг за другом акты поглощения независимы.

Если такой детектор помещен в свободное электромагнитное поле, число m фотоэлектронов, появившихся за время T , по-видимому, будет задаваться распределением Пуассона. Среднее значение этого распределения определяется полной интенсивностью соударений с детектором за время T . При наличии флуктуаций интенсивности следует ожидать усреднений по распределениям Пуассона, соответствующим каждой интенсивности.

Детектор срабатывает при поглощении фотонов и не работает в отсутствие фотонов, поэтому измеряемым величинам соответствуют нормально упорядоченные операторы. Использование временной теории возмущений автоматически приводит к упорядоченным во времени операторам. Поэтому естественно полагать, что вероятность появления фотоэлектронов за время T определяется как

$$p(m, T) = \left\langle T_{\mathcal{M}} \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega} \right\rangle, \quad (11.6.1)$$

где $T_{\mathcal{M}}$ — оператор нормального и хронологического упорядочения, а

$$\Omega = \varepsilon \int_0^T b^+(s) b(s) ds \quad (11.6.2)$$

с некоторым эффективным коэффициентом ε .

Выражение вида (11.6.1) было получено указанными выше авторами с помощью весьма формальных

соображений, основанных на идеальных свойствах фотодетектора, а не на основе приближения. В их формулах величина Ω , пропорциональная полной интенсивности, относится к свободному полю. Предположим, не приводя здесь доказательств, что такое же выражение справедливо, когда $b(s)$ относится к квантовому марковскому процессу, а зависимость от времени определяется взаимодействием с резервуаром. В этом разделе и в гл. 18 будет лишь показано, как рассчитывать выражения типа (11.6.1).

Используя соотношение (11.5.6), можно заменить правую часть формулы (11.6.1) следующим выражением:

$$p(m, T) = \left\langle \frac{\Omega'^m}{m!} e^{-\Omega'} \right\rangle_{\text{кл}}, \quad (11.6.3)$$

где

$$\Omega' = e \int_0^T \rho(s) ds, \quad (11.6.4)$$

$$\rho = |\beta(s)|^2, \quad (11.6.5)$$

а $\beta^*(s)$ и $\beta(s)$ — классические функции, связанные с операторами $b^+(s)$ и $b(s)$. Заметим, что величина ρ (11.6.5) с точностью до нормировки совпадает с выражением (7.1.3) для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации. Опуская штрихи, можно переписать формулу (11.6.3) в виде

$$p(m, T) = \frac{1}{m!} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^m \langle e^{-\lambda \Omega} \rangle_{\text{кл}} \right]_{\lambda=1} = \quad (11.6.6)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\langle e^{-\lambda \Omega} \rangle}{(1 + \lambda)^{m+1}} d\lambda. \quad (11.6.7)$$

Но в разд. 6.1 было показано, как, используя метод и обозначения разд. 5.5—5.8, свести расчет величины

$\langle e^{-\lambda e \int_0^T \rho(s) ds} \rangle$ к решению модифицированного уравнения

Фоккера — Планка. Таким образом, у нас есть строгий метод расчета функции $P(m, T)$, который для лазерного излучения ниже порога возбуждения использован в гл. 8 работы [3] и у нас в гл. 18.

12. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ

12.1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПЛОТНОСТИ СИСТЕМЫ

Здесь мы резюмируем результаты расчета, изложенные в приложении А к работе [11]. Рассмотрим теорию матрицы плотности для системы, взаимодействующей с резервуаром. Будем исходить из полного гамильтониана

$$H_T = H + R + V, \quad (12.1.1)$$

где H и R — гамильтонианы системы и резервуара, а V — гамильтониан взаимодействия

$$V = - \sum_j Q_j F_j \quad (12.1.2)$$

входят операторы Q_j и F_j , относящиеся соответственно к системе и резервуару. Предположим, что резервуар находится в состоянии теплового равновесия, т. е. его матрица плотности f_0 равна

$$f_0 = \frac{\exp(-\beta R)}{\text{Sp} \exp(-\beta R)}. \quad (12.1.3)$$

Кроме того, предположим, что полный гамильтониан не зависит от времени и обладает следующим свойством¹⁾:

$$\langle F_j \rangle_R = \text{Sp}_R (F_j f_0) = 0, \quad (12.1.4)$$

где $\langle \dots \rangle_R$ и Sp_R означают соответственно среднее и взятие шпура по переменным, относящимся к резервуару. [В выражении (12.1.4) использовано условие (10.1.7).] Уравнение движения для матрицы плотности системы и резервуара имеет вид

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} = (H + R + V, \rho), \quad (12.1.5)$$

¹⁾ Если какое-нибудь слагаемое в исходном гамильтониане взаимодействия $V_{\text{всх}}$ имеет ненулевое среднее (по резервуару) значение, то его можно включить в гамильтониан системы H с помощью преобразований $H = H_{\text{всх}} + \langle V_R \rangle$, $V = V_{\text{всх}} - \langle V_R \rangle$.

где

$$(\dots, \dots) \equiv \frac{1}{i\hbar} [\dots, \dots]. \quad (12.1.6)$$

Представим матрицу плотности в виде

$$\rho = \sigma f_0 + \Delta\rho, \quad (12.1.7)$$

где

$$\sigma = \text{Sp}_R \rho \quad (12.1.8)$$

представляет собой матрицу плотности системы.

Взяв в уравнении (12.1.5) шпур по переменным, относящимся к резервуару, и используя (12.1.4), получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (H, \sigma) + \text{Sp}_R (V, \Delta\rho) + \text{Sp}_R (R, \rho). \quad (12.1.9)$$

Любой оператор может быть записан в виде произведения операторов R и S , относящихся соответственно к резервуару и системе. В частности, для ρ имеем

$$\rho = \sum_i R_i S_i. \quad (12.1.10)$$

Но шпур по R от коммутатора двух операторов, относящихся к резервуару, равен нулю, т. е.

$$\text{Sp}_R (R, \rho) = \text{Sp}_R \left(R, \sum_i R_i \right) S_i = 0. \quad (12.1.11)$$

Тогда уравнение (12.1.9) сведется к следующему виду:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (H, \sigma) + \text{Sp}_R (V, \Delta\rho). \quad (12.1.12)$$

Умножая (12.1.12) на f_0 и используя (12.1.5), (12.1.7), получим уравнение движения для величины $\Delta\rho$:

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = (H + R, \Delta\rho) + (V, \sigma f_0) + C(\Delta\rho), \quad (12.1.13)$$

где

$$C(\Delta\rho) \equiv (V, \Delta\rho) - f_0 \text{Sp}_R (V, \Delta\rho). \quad (12.1.14)$$

Пренебрегая величиной $C(\Delta\rho)$, можно из уравнения (12.1.13) выразить $\Delta\rho$ через σ , затем подставить $\Delta\rho$ в (12.1.12) и получить замкнутое уравнение для σ . Но $\Delta\rho$, согласно (12.1.13), линейно по V . Поэтому функция

$C(\Delta\rho)$ [по (12.1.14)] — второго порядка по V , а значит, согласно (12.1.12), вклад $C(\Delta\rho)$ — третьего порядка по V . Поэтому, ограничиваясь в σ слагаемыми второго порядка по V , надо найти $\Delta\rho$ в первом порядке по V , т. е. можно положить $C(\Delta\rho) = 0$. Вообще говоря, можно построить итерационную процедуру расчета σ по степеням V , исходя из $C = 0$.

Найдем уравнение движения для σ с точностью до величин второго порядка по V . Решение уравнения (12.1.13) в первом порядке по V имеет вид

$$\Delta\rho \approx \Delta\rho_1 = \int_{-\infty}^t (V(t', t), \sigma(t, t') f_0) dt', \quad (12.1.15)$$

где

$$V(t', t) = e^{-i(H+R)(t-t')} V e^{i(H+R)(t-t')}. \quad (12.1.16)$$

По определению величины σ (12.1.8) она коммутирует с гамильтонианом резервуара R . Поэтому

$$\sigma(t, t') = e^{-iH(t-t')} \sigma(t') e^{iH(t-t')}. \quad (12.1.17)$$

Подстановка (12.1.15) в (12.1.12) приводит к уравнению движения для σ во втором порядке по V :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (H_1, \sigma) + \int_{-\infty}^t dt' \text{Sp}_R(V, (V[t', t], \sigma[t, t'] f_0)). \quad (12.1.18)$$

Выражение (12.1.16) при учете (12.1.2) может быть записано в виде

$$V(t', t) = - \sum_j Q_j(t' - t) F_j(t' - t), \quad (12.1.19)$$

где, поскольку Q_j не зависят от переменных, относящихся к резервуару, а F_j — от переменных, относящихся к системе:

$$Q_j(u) = e^{iH_u} Q_j e^{-iH_u} \quad (12.1.20)$$

и

$$F_j(u) = e^{iR_u} F_j e^{-iR_u}. \quad (12.1.21)$$

Преобразовывая подинтегральное выражение в (12.1.18) и выполняя длинные, но простые алгебраические

преобразования (см. разд. 3 работы [10]), получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (H, \sigma) + \sum_{i, l} \int_{-\infty}^t dt' \{ (Q_i, Q_l(t-t')) \sigma(t) \times \\ \times \langle F_i(0) F_l(t'-t) \rangle - (Q_i, \sigma(t) Q_l(t'-t)) \langle F_l(t'-t) F_i(0) \rangle \}, \quad (12.1.22)$$

где, согласно (10.1.7),

$$\langle F_i F_l(t'-t) \rangle = \text{Sp}_R [F_i F_l(t'-t) f_0], \quad (12.1.23)$$

а величина $\sigma(t, t')$ приближенно заменена на $\sigma(t)$. Оценим законность этого приближения. Выражение (12.1.17) представляет собой уравнение для сдвигки величины σ во времени, если в течение интервала времени $t - t'$ пренебречь гамильтонианом взаимодействия V . Но, согласно (12.1.22), это приближение справедливо, если время корреляции τ_c для величины $\langle F_i(0) F_j(t'-t) \rangle$ настолько мало, что в течение τ_c можно пренебречь диссипативными процессами, связанными со взаимодействием¹⁾. Подставляя

$$t - t' = u, \quad (12.1.24)$$

используя условие стационарности

$$\langle F_i(0) F_j(-u) \rangle = \langle F_i(u) F_j(0) \rangle \quad (12.1.25)$$

и возвращаясь к обычному определению коммутаторов (12.1.6), перепишем уравнение (12.1.22) в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = (H, \sigma) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{\infty} du \sum_{i, l} \{ \langle F_i(u) F_l(0) \rangle [Q_i, Q_l(-u) \sigma(t)] - \\ - \langle F_l(0) F_i(u) \rangle [Q_i, \sigma(t) Q_l(-u)] \}. \quad (12.1.26)$$

Выражение (12.1.26) представляет собой уравнение для оператора плотности системы в случае марковского процесса. Подчеркнем, что из-за условия $\sigma(t, t') = \sigma(t)$ в (12.1.26) не входит интеграл по предшествующим моментам времени. Взяв теперь шпур (10.1.7) от коммута-

¹⁾ В предельном случае марковского процесса $\langle F_i(0) F_j(t'-t) \rangle \sim \delta(t'-t)$, т. е. $\tau_c = 0$ и выражение (2.1.22) становится точным.

тора произвольного оператора M и оператора σ , можно получить уравнение движения для среднего значения $\langle M \rangle$. Используя лемму

$$\text{Sp } M[A, B] = \text{Sp}[A, B] M, \quad (12.1.27)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = & \langle (M, H) \rangle - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty du \sum_{i,j} \{ \langle F_i(u) F_j(0) \rangle \langle [M, Q_i] Q_j(-u) \rangle - \\ & - \langle F_j(0) F_i(u) \rangle \langle Q_j(-u) [M, Q_i] \rangle \}. \end{aligned} \quad (12.1.28)$$

Заметим, что вся информация о свойствах резервуара содержится в корреляционных функциях.

12.2 УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В приложении В к работе [11] получено уравнение движения для произвольного оператора M , исходя из гейзенберговского подхода и расчета величины $\frac{dM}{dt} = \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t}$, а не $\frac{dM}{dt}$, т. е. рассматривался конечный интервал времени Δt , который затем считался малым по сравнению с временами релаксации, но большим по сравнению с обратными, характерными для нашей системы частотами. Заметим, что в рассмотренном в гл. 5 классическом случайном процессе мы также имели дело с $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t}$. Полученный в приложении В к работе [11] результат

$$\begin{aligned} \frac{d \langle M \rangle}{dt} = & \langle (M, H) \rangle - \frac{1}{\hbar^2 \Delta t} \int_0^{\Delta t} dv \int_0^\infty du \sum_{ij} \{ \langle F_i(u) F_j(0) \rangle \times \\ & \times \langle [M, Q_i(-v)] Q_j(-v-u) \rangle - \\ & - \langle F_j(0) F_i(u) \rangle \langle Q_j(-v-u) [M, Q_i(-v)] \rangle \} \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

очень похож на уравнение (12.1.28). Если сначала перейти к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, а затем $V \rightarrow 0$, то (12.2.1)

переходит в (12.1.28). Однако уравнение (12.1.28) содержит быстро осциллирующие слагаемые, которые, как будет сейчас показано [см. (12.2.3) — (12.2.4)], представляют собой величины второго порядка малости для медленных движений. Для достаточно больших Δt эти слагаемые автоматически исчезнут. Так как зависимость от времени операторов, характеризующих систему, должна представлять собой сумму экспонент, то

$$Q_j(t) = \sum_{\alpha} Q_{j\alpha} e^{i\omega_j^{\alpha} t}. \quad (12.2.2)$$

Тогда интеграл по V в (12.2.1) будет содержать слагаемое

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \exp(i\omega_i^{\alpha} t + i\omega_j^{\beta} t) dt. \quad (12.2.3)$$

Если теперь выбрать величину Δt в соответствии с условием

$$(\omega_i^{\alpha} + \omega_j^{\beta}) \Delta t \gg 1, \quad (12.2.4)$$

то интеграл (12.2.3) будет малым во всех случаях, кроме

$$\omega_i^{\alpha} + \omega_j^{\beta} = 0, \quad (12.2.5)$$

т. е. мы будем удерживать лишь секулярные слагаемые. При этом интеграл, входящий в формулу (12.2.1), не зависит от Δt и можно совершить предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$. Поэтому эффект усреднения по v в выражении (12.2.1) или в (12.1.28) состоит лишь в удержании секулярных слагаемых. Уравнение (12.2.1) переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} \approx \langle (M, H) \rangle - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i\alpha, j\beta} \delta(\omega_i^{\alpha} - \omega_j^{\beta}) \times \\ \times \int_0^{\infty} du e^{-i\omega_j^{\beta} u} \{ \langle F_i(u) F_j(0) \rangle \langle [M, Q_{i\alpha}] Q_{j\beta} \rangle - \\ - \langle F(0) F_i(u) \rangle \langle Q_{j\beta} [M, Q_{i\alpha}] \rangle \}. \quad (12.2.6) \end{aligned}$$

Интегралы по u от произведения экспонент и корреляторов, относящихся к резервуару, представляют собой диссипативные коэффициенты, характеризующие взаимодействие системы и резервуара. Заметим, что выражение $\langle F_i(u)F_j(0) \rangle$ не пропорционально δ -функции, т. е. не делается предположения о белом шуме. Экспоненциальный множитель определяет величину шума, связанного с этими корреляциями, на частоте ω_j^B (см. разд. 6.1). Таким образом, марковость процесса по существу означает, что для каждой моды шум является белым, в то время как в действительности шум относится к соответствующей частоте. Уравнение (12.2.6) представляет собой исходное уравнение, которое будет часто использоваться в дальнейшем.

12.3. ПОЛУЧЕНИЕ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ С ПОМОЩЬЮ СООТНОШЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Рассчитаем теперь коэффициент диффузии D_{MN} для любой пары операторов M и N , относящихся к системе. Из соотношения Эйнштейна (2.5.5) имеем

$$2D_{MN} = \frac{d(MN)}{dt} - \left\langle \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} N \right\rangle - \left\langle M \left\{ \frac{dN}{dt} \right\} \right\rangle. \quad (12.3.1)$$

Оценим сначала вклад в это выражение слагаемого $\langle (M, H) \rangle$ из (12.2.6). Справедлива следующая формула:

$$[MN, H] - [M, H]N - M[N, H] = 0, \quad (12.3.2)$$

т. е. все слагаемые с H в уравнении движения, не содержащие случайных величин, автоматически удовлетворяют правилу дифференцирования сложных функций и поэтому не дают вклада в D_{MN} . Перейдем теперь к нахождению вклада в D_{MN} первого интегрального слагаемого в (12.2.6). Используем следующую формулу:

$$[MN, Q_i]Q_j - [M, Q_i]Q_jN - M[N, Q_i]Q_j = [M, Q_i]NQ_j - [M, Q_i]Q_jN = [M, Q_i][N, Q_j]. \quad (12.3.3)$$

Учет второго интегрального слагаемого в (12.2.6) дает после замены $u \rightarrow (-u)$ и перестановки значков

суммирования $i\alpha \rightleftharpoons j\beta$, тот же результат (12.3.3). Окончательно получаем следующую важную формулу:

$$2D_{MN} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i\alpha, j\beta} \delta(\omega_i^\alpha - \omega_j^\beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_j^\beta u} du \langle F_i(u) F_j(0) \rangle \times \\ \times \langle [M, Q_{i\alpha}] [N, Q_{j\beta}] \rangle. \quad (12.3.4)$$

Это выражение представляет собой моменты источников шума, а (12.2.6) — вектор смещения для системы, взаимодействующей с резервуарами. Мы используем эти формулы для атомов и для гармонического осциллятора поля при построении модели лазера. Заметим, что такой подход может быть применен и к другим системам со слабой связью, например к сверхпроводникам.

При рассмотрении практических задач, например лазеров, мы будем использовать уравнение (12.2.6) для определения вида уравнений движения. Для появляющихся в теории параметров (вероятностей перехода, коэффициентов затухания) будут использованы их экспериментальные значения, а не те величины, что входят в уравнение (12.2.6) (которые получены с помощью теории возмущений). Для марковских процессов соотношение Эйнштейна (12.3.1) не зависит от теории возмущений и дает выражение для источников шума через диссипативные параметры без предположения о слабой связи.

13. ЗАТУХАЮЩИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Перейдем сейчас к построению модели лазера, применяя выражения (12.2.6) и (12.3.4) сначала к гармоническому осциллятору, моделирующему поле фотонов, затем к атомам и, наконец, к обеим системам, взаимодействующим друг с другом, которые представляют собой модель лазера.

13.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН

Для описания гармонического осциллятора введем переменные b и b^+ . Эти переменные относятся к определенной частоте, т. е. разложение (12.2.2) выполнено. Гамильтониан системы равен

$$H = \hbar\omega_c b^+ b, \quad (13.1.1)$$

а гамильтониан взаимодействия

$$V = i\hbar (b^+ g - b g^+). \quad (13.1.2)$$

Тогда, согласно (12.2.6), уравнение движения для среднего значения от произвольного оператора M , относящегося к системе, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = & \langle (M, H) \rangle + \alpha \langle b^+ [M, b] \rangle - \beta \langle [M, b] b^+ \rangle - \\ & - \alpha^* \langle [M, b^+] b \rangle + \beta^* \langle b [M, b^+] \rangle, \end{aligned} \quad (13.1.3)$$

где коэффициенты α и β — интегралы от средних величин, относящихся к резервуару:

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{\infty} du e^{-i\omega_c u} \langle g g^+(u) \rangle, \\ \beta &= \int_0^{\infty} du e^{-i\omega_c u} \langle g^+(u) g \rangle, \end{aligned} \quad (13.1.4)$$

причем $g \equiv g(0)$. Используя соотношения

$$[M, b^+] = \frac{\partial M}{\partial b}, \quad [b, M] = \frac{\partial M}{\partial b^+} \quad (13.1.5)$$

и переписав формулу (13.1.3) в нормально упорядоченном виде с помощью известных правил коммутации, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = & \langle (M, H) \rangle - (\alpha - \beta) b^+ \frac{\partial M}{\partial b^+} - (\alpha^* - \beta^*) \frac{\partial M}{\partial b} b + \\ & + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial M}{\partial b^+} \right) + \beta^* \frac{\partial}{\partial b^+} \left(\frac{\partial M}{\partial b} \right). \end{aligned} \quad (13.1.6)$$

Две входящие в (13.1.6) вторые производные равны друг другу, что следует из тождества

$$[[b, M], b^+] = [b, [M, b^+]]. \quad (13.1.7)$$

Наше уравнение содержит только три параметра: $\text{Re}(\alpha - \beta)$, $\text{Im}(\alpha - \beta)$ и $\text{Re} \beta$. Значения этих параметров можно получить, подставляя соответственно в (13.1.6) вместо M b^+ и b^+b . В первом случае получим

$$\frac{\partial \langle b^+ \rangle}{\partial t} = i\omega_c \langle b^+ \rangle - (\alpha - \beta) \langle b^+ \rangle. \quad (13.1.8)$$

Введем в это уравнение специальное обозначение для частоты и коэффициентов затухания:

$$\frac{\partial \langle b^+ \rangle}{\partial t} = \left(i\omega_0 - \frac{1}{2} \gamma \right) \langle b^+ \rangle, \quad (13.1.9)$$

где частота ω_0 включает в себя сдвиг $\Delta\omega$, обусловленный резервуаром

$$\omega_0 = \omega_c + \Delta\omega. \quad (13.1.10)$$

Поэтому можно отождествить следующие величины:

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2} \gamma - i \Delta\omega. \quad (13.1.11)$$

Уравнение для второго момента имеет вид

$$\frac{\partial \langle b^+b \rangle}{\partial t} = 2 \text{Re} \beta - \gamma \langle b^+b \rangle. \quad (13.1.12)$$

Обозначим через \bar{n} среднее число фотонов данной моды, индуцируемых резервуаром за время $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$2 \text{Re} \beta = \gamma \bar{n}. \quad (13.1.13)$$

Подставляя (13.1.11) и (13.1.13) в (13.1.6), получим

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = \left\langle \left\{ (M, \hbar\omega_0 b^+ b) - \frac{1}{2} \gamma b^+ [b, M] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \gamma [M, b^+] b + \gamma \bar{n} [b, [M, b^+]] \right\} \right\rangle. \quad (13.1.14)$$

Уравнение (13.1.14) является точным для гармонического осциллятора, связанного с резервуаром, состоящим из гармонических осцилляторов, с помощью приближения волн вращающейся поляризации (13.1.2). При этом предполагается, что плотность осцилляторов в резервуаре и сила взаимодействия подобраны так, чтобы, вообще говоря, зависящий от частоты коэффициент затухания $\gamma(\omega)$ фактически от нее не зависел. Справедливость этого предположения может быть проверена сравнением точного решения уравнения для матрицы плотности, найденного в приложении D к работе [11] и эквивалентного соотношению (13.1.14):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \hbar\omega_0 (b^+ b, \sigma) + \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{\partial (b\sigma)}{\partial b} \right] + \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{\partial (\sigma b^+)}{\partial b^+} \right] + \gamma \bar{n} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial b \partial b^+} \quad (13.1.15)$$

с (марковской) формой Вайскопфа — Вигнера точного решения, найденной Луисселом и Валкером [28] (см. также в [73] расчеты для гармонического осциллятора, связанного с гармоническими осцилляторами специально подобранной плотности).

13.2. ИСТОЧНИКИ ШУМА

Легко найти коэффициенты диффузии, зная уравнения движения (13.1.8), (13.1.9) и (13.1.12) для b^+ и $b^+ b$, (13.1.14) для b , bb^+ и т. д.

Эти уравнения движения вместе с соотношением Эйнштейна (2.5.5) дают

$$2D_{b^+ b} = \frac{\partial \langle b^+ b \rangle}{\partial t} - \left\langle \left\{ \frac{db^+}{dt} \right\} b \right\rangle - \left\langle b^+ \left\{ \frac{db}{dt} \right\} \right\rangle = \\ = \gamma \bar{n} - \gamma \langle b^+ b \rangle - \left\langle \left[\left(i\omega_0 - \frac{1}{2} \gamma \right) b^+ \right] b \right\rangle - \\ - \left\langle b^+ \left[\left(-i\omega_0 - \frac{1}{2} \gamma \right) b \right] \right\rangle \quad (13.2.1)$$

или

$$2D_{b+b} = \gamma \bar{n}. \quad (13.2.2)$$

Таким же образом найдем

$$2D_{bb+} = \gamma (\bar{n} + 1) \quad (13.2.3)$$

и

$$2D_{bb} = 2D_{b+b+} = 0. \quad (13.2.4)$$

Применив к уравнению (13.1.9) операцию эрмитового сопряжения и убирая значки усреднения по резервуару, получим

$$\frac{db}{dt} = -i\omega_0 b - \frac{1}{2} \gamma b + f(t), \quad (13.2.5)$$

где $f(t)$ — источник случайного шума. Из (6.1.5) и (13.2.2) найдем, что

$$\langle f^+(t) f(u) \rangle = \gamma \bar{n} \delta(t - u). \quad (13.2.6)$$

Как и в разд. 3.11, исключим теперь зависимость наших полевых переменных b от высоких частот с помощью подстановки

$$b' = be^{i\omega_0 t}, \quad (13.2.7)$$

получая тем самым новые, медленно меняющиеся во времени переменные, для которых

$$\frac{db'}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma b' + F(t), \quad (13.2.8)$$

где

$$F(t) = e^{i\omega_0 t} f(t). \quad (13.2.9)$$

Согласно (13.2.6), корреляционная функция для новых источников шума $F(t)$ такая же, как и для исходных $f(t)$, т. е.

$$\langle F^+(t) F(u) \rangle = \gamma \bar{n} \delta(t - u). \quad (13.2.10)$$

Из выражений (13.2.10), (13.2.2), (13.2.3) и определения (6.1.5) найдем перестановочные соотношения для наших источников шума:

$$\langle [F(t), F^+(u)] \rangle = \gamma \delta(t - u). \quad (13.2.11)$$

Если резервуар для нашего гармонического осциллятора представляет собой набор гармонических осцилляторов, коммутаторы случайных сил будут c -числами. С другой стороны, если $F^+(t)$ и $F(t)$ — гауссовы случайные переменные, то можно показать, что все коммутаторы — c -числа. Поэтому будем в дальнейшем полагать, что

$$[F(t), F^+(u)] = \gamma \delta(t - u). \quad (13.2.12)$$

13.3. ПРИМЕНИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ И ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Покажем сейчас справедливость уравнений для фотонного оператора, убедившись в том, что коммутатор $[b', b'^+]$ сохраняется во времени, т. е. $\frac{d[b', b'^+]}{dt} = 0$. Для простоты обозначений опустим штрихи.

Рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt} \langle b^+ b \rangle = \langle b^+ \frac{db}{dt} \rangle + \langle \frac{db^+}{dt} b \rangle. \quad (13.3.1)$$

С помощью уравнения (13.2.8) и эрмитово сопряженного к нему преобразуем (13.3.1) к следующему виду:

$$\frac{d}{dt} \langle b^+ b \rangle = -\gamma \langle b^+ b \rangle + \langle F^+(t) b \rangle + \langle b^+ F(t) \rangle. \quad (13.3.2)$$

Используя результат разд. 6.4 и выражение (13.2.10), получим

$$\begin{aligned} \langle F^+(t) b(t) \rangle &= \left\langle F^+(t) \left\{ b_c + \int_{t_c}^t \left[-\frac{1}{2} \gamma b(s) + F(s) \right] ds \right\} \right\rangle = \\ &= \int_{t_c}^t \langle F^+(t) F(s) \rangle ds = \frac{1}{2} \gamma \bar{n}. \end{aligned} \quad (13.3.3)$$

В последнем равенстве (13.3.3) использовано интегрирование по половине области определения δ -функции. Эрмитово сопряженное к (13.3.3) выражение $\langle b^+ F(t) \rangle$ тоже равно $\frac{1}{2} \gamma \bar{n}$. Поэтому (13.3.1) сведется к виду

$$\frac{d}{dt} \langle b^+ b \rangle = \gamma \bar{n} - \gamma \langle b^+ b \rangle. \quad (13.3.4)$$

Таким образом, используя ланжевенский метод, мы получили такой же результат (13.3.4), как и полученный ранее с помощью метода уравнения движения результат (13.1.12). Точно так же

$$\frac{d}{dt} \langle bb^+ \rangle = \gamma (\bar{n} + 1) - \gamma \langle bb^+ \rangle. \quad (13.3.5)$$

Из (13.3.4) и (13.3.5) получим уравнение движения для среднего от коммутаторов b и b^+ :

$$\frac{d}{dt} \langle [b, b^+] \rangle = \gamma - \gamma \langle [b, b^+] \rangle. \quad (13.3.6)$$

Поэтому если $[b, b^+] = 1$, то

$$\frac{d}{dt} \langle [b, b^+] \rangle = 0. \quad (13.3.7)$$

Для гармонического осциллятора

$$\frac{d}{dt} [b, b^+] = -\gamma [b, b^+] + [F, b^+] + [b, F^+]. \quad (13.3.8)$$

Как и разд. 6.4 можно получить

$$[b, F^+] = [b_c, F^+] + \int_{t_c}^t [F(s), F^+(t)] ds, \quad (13.3.9)$$

что после использования предположения (13.2.12) сводится к равенству

$$[b, F^+] = \frac{1}{2} \gamma. \quad (13.3.10)$$

Эрмитово сопряженное к (13.3.10) выражение $[F, b^+]$ тоже равно $\frac{1}{2} \gamma$. Поэтому выражение (13.3.8) сводится к

$$\frac{d}{dt} [b, b^+] = -\gamma [b, b^+] + \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \gamma \quad (13.3.11)$$

или

$$\frac{d}{dt} [b, b^+] = 0. \quad (13.3.12)$$

Итак, мы показали, что коммутатор $[b, b^+]$ сохраняется во времени ¹⁾.

¹⁾ В приложении к работе [17] автор не вводил предположения (13.2.12), но получил тот же результат, показав, что для произвольного оператора M $d \langle M [b, b^+] \rangle / dt = 0$.

14. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АТОМА

14.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

В этом разделе будут резюмированы результаты, полученные в работе [11], особенно в приложении А к этой работе.

Применим уравнение (12.2.6) к атому. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_i \omega_i a_i^+ a_i. \quad (14.1.1)$$

Предположим, что взаимодействие описывается следующим образом:

$$V = \hbar \sum_{m,n} a_m^+ a_n f_{mn}, \quad (14.1.2)$$

где a_m^+ — оператор рождения атома в m -м состоянии, a_n — оператор уничтожения атома в n -м состоянии, f_{mn} — операторы, относящиеся к резервуару. Эрмитовость означает, что

$$V^+ = V, \quad f_{mn}^+ = f_{nm}. \quad (14.1.3)$$

Введем соответствие переменных:

$$Q_i \rightarrow a_k^+ a_l, \quad Q_j(-u) \rightarrow a_m^+ a_n \exp(-i\omega_{mn}u), \quad M \rightarrow a_i^+ a_j, \\ F_i \rightarrow \hbar f_{kl}, \quad F_j \rightarrow \hbar f_{mn}. \quad (14.1.4)$$

Тогда, используя (14.1.4), получим из (12.2.6) уравнение движения для среднего значения атомного оператора $a_i^+ a_j$:

$$\frac{d}{dt} \langle a_i^+ a_j \rangle = i\omega_{ij} \langle a_i^+ a_j \rangle - \sum_{k,l,m,n} \omega_{kl,mn}^+ \langle [a_i^+ a_j, a_k^+ a_l] a_m^+ a_n \rangle + \\ + \sum_{k,l,m,n} \omega_{mnkl}^- \langle a_m^+ a_n [a_i^+ a_j, a_k^+ a_l] \rangle. \quad (14.1.5)$$

Коэффициентами уравнения являются невозмущенные разности частоты

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j, \quad (14.1.6)$$

а также величины

$$\omega_{klmn}^+ = \int_0^\infty du \exp(-i\omega_{mn}u) \langle f_{kl}(u) f_{mn}(0) \rangle, \quad (14.1.7)$$

$$\omega_{mnki}^- = \int_0^\infty du \exp(-i\omega_{mn}u) \langle f_{mn}(0) f_{ki}(u) \rangle. \quad (14.1.8)$$

Из (14.1.7) и (14.1.8) видно, что величины ω_{klmn}^+ и ω_{mnki}^- удовлетворяют условию эрмитовости

$$(\omega_{mnki}^-)^* = \omega_{iknm}^+. \quad (14.1.9)$$

Так как мы рассматриваем лишь один атом, взаимодействующий с резервуаром, то для операторов a , a^+ справедлива лемма (2.2.6), т. е.

$$a_i^+ a_j a_k^+ a_l = \delta_{jk} a_i^+ a_l. \quad (14.1.10)$$

Из (14.1.10) получим

$$a_i^+ a_j a_k^+ a_l a_m^+ a_n = \delta_{jk} \delta_{lm} a_i^+ a_n. \quad (14.1.11)$$

Поэтому уравнение (14.1.5) сводится к

$$\frac{d \langle a_i^+ a_j \rangle}{dt} = i\omega_{ij} \langle a_i^+ a_j \rangle + \sum [-\langle a_i^+ a_n \rangle \omega_{jmmn}^+ + \langle a_k^+ a_n \rangle \omega_{kijm}^+ + \langle a_m^+ a_l \rangle \omega_{mijl}^- - \langle a_m^+ a_j \rangle \omega_{mnni}^-]. \quad (14.1.12)$$

Оставим теперь лишь секулярные слагаемые, т. е. только такие ω_{klmn}^\pm , для которых [ср. (12.2.5)]

$$\omega_{kl} + \omega_{mn} = 0. \quad (14.1.13)$$

Заметим, что до этого места все результаты одинаково справедливы и для случая гармонического осциллятора, причем a_j представляет собой оператор рождения для j -го возбужденного состояния.

Для гармонического осциллятора существует из-за эквидистантности уровней много возможностей, чтобы

удовлетворить секулярным условиям (14.1.13). Полное исследование гармонического осциллятора было проведено в гл. 13. Здесь мы рассмотрим случай, когда расстояния между различными уровнями не одинаковы. Тогда ввиду (14.1.6) можно удовлетворить условию (14.1.13) лишь при

$$k = n, \quad l = m \quad \text{или} \quad k = l, \quad m = n. \quad (14.1.14)$$

Для случая $k = l, m = n$ коэффициенты представляют собой вклад «фазового шума». Если оставить лишь секулярные слагаемые, уравнение (14.1.2) сведется к виду

$$\frac{d \langle a_i^+ a_j \rangle}{dt} = (i\omega_{ij} - \Gamma_{ij}^c) \langle a_i^+ a_j \rangle + \delta_{ij} \sum_{m \neq i} \omega_{im} \langle a_m^+ a_m \rangle, \quad (14.1.15)$$

где вероятности перехода W_{im} определяются равенством

$$\begin{aligned} \omega_{im} &= \omega_{mitm}^+ + \omega_{mitm}^- = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-i\omega_{im}u) \langle f_{mi}(u) f_{im}(0) \rangle, \end{aligned} \quad (14.1.16)$$

а комплексные параметры Γ_{ij}^c равны

$$\Gamma_{ij}^c = -[\omega_{iijj}^+ + \omega_{iijj}^-] + \sum_m (\omega_{jmmi}^+ + \omega_{jmmi}^-). \quad (14.1.17)$$

Для $j = i$ уравнение (14.1.15) имеет обычную форму: населенность i -го уровня растет за счет переходов на него с уровней j и падает из-за переходов с i -го уровня. Мы знаем, что для $j \neq i$ величина $\langle a_i^+ a_j \rangle$ убывает, осциллируя по простому экспоненциальному закону, из-за разности частот ω_{ij} и вызванных Γ^c возмущений разности частот $\Delta\omega_{ij}$. Представим Γ_{ij}^c в виде

$$\Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ij} - i\Delta\omega_{ij}, \quad (14.1.18)$$

а затем перепишем оба слагаемых в (14.1.18) следующим образом:

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma_i + \Gamma_j) + \Gamma_{ij}^\phi, \quad (14.1.19)$$

$$\Delta\omega_{ij} = -\text{Im} \left[\sum_{m \neq j} \omega_{jmmi}^+ + \sum_{m \neq i} \omega_{jmmi}^- \right] + \Delta\omega_{ij}^\phi, \quad (14.1.20)$$

где

$$\Gamma_i = \sum_{k \neq i} \omega_{ki}, \quad (14.1.21)$$

$$\Gamma_{ij}^\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty du \langle [f_{ii}(0) - f_{jj}(0), f_{ii}(u) - f_{jj}(u)]_+ \rangle, \quad (14.1.22)$$

$$-i \Delta\omega_{ij}^\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty du \langle [f_{ii}(0), f_{jj}(u)] \rangle. \quad (14.1.23)$$

Мнимая часть Γ_{ij} названа $\Delta\omega_{ij}$, поскольку она представляет собой сдвиг частоты, а Γ_{ij}^Φ содержит все оставшиеся слагаемые в Γ_{ij} после учета затухания (14.1.21). Точно так же $\Delta\omega_{ij}^\Phi$ содержит все остальные слагаемые в (14.1.21), кроме первого, представляющего собой сдвиг во втором порядке теории возмущения (лэмбовский сдвиг), обусловленный взаимодействиями с резервуаром. Величины Γ_{ij}^Φ и ω_{ij}^Φ связаны с вкладом флуктуаций фазы. Так как они зависят лишь от нулевой частоты, т. е. не зависят от частоты, то они представляют собой вклады нулевых фононов в твердых телах [74]. Можно представить $\Delta\omega_{ij}^\Phi$ в следующем виде:

$$\Delta\omega_{ij}^\Phi = \Delta\omega_i^\Phi - \Delta\omega_j^\Phi + \Delta\omega_{ij}^d, \quad (14.1.24)$$

где

$$\Delta\omega_i^\Phi = \frac{i}{2} \int_0^\infty du \langle [f_{ii}(0), f_{ii}(u)] \rangle, \quad (14.1.25)$$

$$\Delta\omega_{ij}^d = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^\infty du \langle [f_{jj}(0), f_{ii}(u)] \rangle. \quad (14.1.26)$$

Здесь сдвиг частоты $\Delta\omega_{ij}^\Phi$, вызванный флуктуацией фазы, представлен в виде сдвига частоты i -го уровня минус сдвиг частоты j -го уровня и добавочного слагаемого $\Delta\omega_{ij}^d$, отражающего неаддитивность. Это слагаемое нарушает комбинационный принцип Ритца, состоящий в том, что для трех уровней должно быть

$$\omega_{12} + \omega_{23} + \omega_{31} = 0, \quad (14.1.27)$$

где ω_{mn} — разность частот m -го и n -го уровней. Однако можно показать, что в большинстве случаев (см. приложение А к работе [11]) $\Delta\omega_{ij}^{\pm}$ равно нулю или мало.

14.2. АТОМНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИФФУЗИИ

Начнем с изложения результатов, полученных в гл. 1 и 4 работы [11]. С помощью соотношения (14.1.10) можно из (14.1.15) легко найти коэффициенты диффузии. Перепишем уравнение (14.1.15) в следующем виде:

$$\frac{d(a_i^{\pm} a_j)}{dt} = (i\omega_{ij} - \Gamma_{ij}) a_i^{\pm} a_j + \delta_{ij} \sum_{p=i} \omega_{ip} a_p^{\pm} a_p + F_{ij}, \quad (14.2.1)$$

где F_{ij} — случайный источник шума. Согласно (6.1.5), определением коэффициентов диффузии служит равенство

$$\langle F_{ij}(t) F_{kl}(u) \rangle = 2 \langle D_{ijkl} \rangle \delta(t - u). \quad (14.2.2)$$

Соотношение Эйнштейна (2.6.5) можно представить в виде

$$2 \langle D_{ijkl} \rangle = \frac{d}{dt} \langle a_i^{\pm} a_j a_k^{\pm} a_l \rangle - \langle \left\{ \frac{d}{dt} (a_i^{\pm} a_j) \right\} a_k^{\pm} a_l \rangle - \langle a_i^{\pm} a_j \left\{ \frac{d}{dt} (a_k^{\pm} a_l) \right\} \rangle. \quad (14.2.3)$$

Выражение (14.2.3) сводится к билинейному разложению с помощью леммы (14.1.10) и уравнения (14.2.1):

$$2 \langle D_{ijkl} \rangle = \delta_{jk} \delta_{il} \sum_{p \neq i} \omega_{ip} \langle a_p^{\pm} a_p \rangle - \delta_{ij} \omega_{jk} \langle a_k^{\pm} a_i \rangle - \\ - \delta_{kl} \omega_{kj} \langle a_i^{\pm} a_j \rangle + \langle a_i^{\pm} a_l \rangle \delta_{jk} [(\Gamma_{ij} + \Gamma_{kl} - \Gamma_{il}) - \\ - i(\omega_{ij} + \omega_{kl} - \omega_{il})], \quad (14.2.4)$$

где, согласно (14.1.6), (14.1.19) и (14.1.22), величины Γ_{ij} и ω_{ij} обладают следующими свойствами:

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \quad (14.2.5)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи в (14.2.4). Для $k = i, l = j$

$$\langle D_{ijij} \rangle = 0. \quad (14.2.6)$$

Коэффициенты диффузии, соответствующие дробовому шуму (см. разд. 6.2, 5.1 и 5.2), $\langle D_{iiii} \rangle$ и $\langle D_{ijjj} \rangle$ определяются равенствами

$$2\langle D_{iiii} \rangle = \sum_{q \neq i} \omega_{iq} \langle a_q^+ a_q \rangle + \Gamma_i \langle a_i^+ a_i \rangle, \quad (14.2.7)$$

$$2\langle D_{ijjj} \rangle = -\omega_{ji} \langle a_i^+ a_i \rangle - \omega_{ij} \langle a_j^+ a_j \rangle. \quad (14.2.8)$$

Два слагаемых в правой части равенства (14.2.7) определяют соответственно приход в данное состояние атома и уход из него. Коэффициенты диффузии, соответствующие недиагональным элементам матрицы плотности атома, определены равенством

$$2\langle D_{ijji} \rangle = (\Gamma_j + 2\Gamma_{ij}^\phi) \langle a_i^+ a_j \rangle + \sum_{q \neq i} \omega_{iq} \langle a_q^+ a_q \rangle. \quad (14.2.9)$$

Единственный коэффициент диффузии, который зависит от аномального¹⁾ сдвига частоты $\Delta\omega_{ij}^\pi$, нарушающего комбинационный принцип Ритца, равен

$$2\langle D_{ijii} \rangle = (\Gamma_j + \Gamma_{ij}^\phi + \Gamma_{ii}^\phi + \Gamma_{ji}^\phi) \langle a_i^+ a_i \rangle - i(\omega_{ij} + \omega_{ji} - \omega_{ii}) \langle a_i^+ a_i \rangle. \quad (14.2.10)$$

В заключение приведем некоторые коэффициенты диффузии, связанные с корреляцией населенностей и флуктуаций фазы:

$$2\langle D_{ijkk} \rangle = -\omega_{kj} \langle a_i^+ a_j \rangle, \quad (14.2.11)$$

$$2\langle D_{iikk} \rangle = -\omega_{ik} \langle a_k^+ a_l \rangle, \quad (14.2.12)$$

$$2\langle D_{iiii} \rangle = \Gamma_i \langle a_i^+ a_j \rangle, \quad (14.2.13)$$

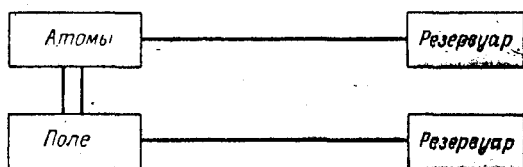
$$2\langle D_{ijjj} \rangle = \Gamma_j \langle a_i^+ a_j \rangle. \quad (14.2.14)$$

В выражениях (14.2.11) и (14.2.12) индекс i может равняться соответственно k или l .

¹⁾ То есть не сводящегося к разности между сдвигами частот i -го и j -го уровня.

15. СВЯЗАННЫЕ СИСТЕМЫ: НЕЗАВИСИМЫЕ РЕЗЕРВУАРЫ

В этой главе будет изложен материал, содержащийся в разделе 5 работы [11]. Предлагаемая модель лазера представляет собой две связанные системы: атомы и электромагнитное поле, но каждая из них связана со своим собственным резервуаром (фиг. 15.1). Прежде



Фиг. 15.1.

всего покажем, что ланжевеновские случайные силы для двух связанных систем с независимыми резервуарами нескоррелированы. Независимость резервуаров означает нескоррелированность операторов, относящихся к этим резервуарам. Однако ланжевеновские силы не сводятся к силам, относящимся к резервуару, а представляют собой, вообще говоря, произведение этих сил и операторов системы. Сравним, например, ланжевеновскую силу F_{ij} в уравнении (14.2.1) с силой f_{ij} в (14.1.2), относящейся к резервуару. Ланжевеновские силы представляют собой просто операторы, обеспечивающие правильные выражения для моментов данной системы. Для марковской системы δ -функционные корреляции приводят к универсальности динамики для всех систем и нескоррелированность ланжевеновских сил вытекает из нескоррелированности сил, относящихся к резервуару. Мы, однако, рассматриваем системы с корреляционными временами, не сводящимися к нулевому, как в случае δ -функционных

корреляторов, но малыми по сравнению с характерными частотами системы. Поэтому возможно, что ланжевенковские силы могли бы быть связаны с динамическими свойствами системы за эти интервалы времени. В действительности же, как сейчас будет показано, ланжевенковские силы в некотором приближении нескоррелированы.

Рассмотрим две системы 1 и 2 с гамильтонианами H_1 и H_2 , связанные между собой гамильтонианом $H_{12} = V_1 + V_2$, т. е. полный гамильтониан равен

$$H = H_1 + H_2 + H_{12}. \quad (15.1)$$

Как это мы уже делали раньше [см. (13.1.2) и (14.1.2)], положим

$$V_1 = - \sum_I Q_I F_I, \quad (15.2)$$

$$V_2 = - \sum_i q_i f_i, \quad (15.3)$$

где Q_j и F_j — некоторые функции операторов, относящихся соответственно к системе 1 и резервуару 1, а g_i и f_i — то же для системы 2 и резервуару 2. Пусть M и m — произвольные операторы, относящиеся соответственно к системам 1 и 2.

Согласно (12.1.28), уравнение движения для произведения mM имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d \langle mM \rangle}{dt} &= \langle (mM, H) \rangle - \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \sum_{ij} \int_0^\infty du \left\{ \langle F_i(u) F_j \rangle \langle [mM, Q_i] Q_j(-u) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle F_j F_i(u) \rangle \langle Q_j(-u) [mM, Q_i] \rangle \right\} - \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \sum_{ij} \int_0^\infty du \left\{ \langle f_i(u) f_j \rangle \langle [mM, q_i] q_j(-u) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle f_j f_i(u) \rangle \langle q_j(-u) [mM, q_i] \rangle \right\}, \quad (15.4) \end{aligned}$$

где опущены корреляторы $\langle f_i F_j \rangle$ между силами, относящимися к двум резервуарам, поскольку эти резервуары по определению нескоррелированы.

Предположим теперь, что время корреляции τ_c , в течение которого величина $\langle F_i(u)F_j \rangle$ отлична от нуля, настолько мало, что за это время несущественно влияние взаимодействия между системами, скажем, на такой оператор, как $Q_j(-u)$. Это эквивалентно, например, пренебрежению влиянием радиационного взаимодействия за время соударения между атомами в газовом лазере. Поэтому мы можем записать оператор $Q_j(-u)$ в виде

$$\exp(iH_1 u) Q_j \exp(-iH_1 u).$$

Следовательно, m коммутирует с Q_i и $Q_j(-u)$, а M — с q_i и $q_j(-u)$. Тогда уравнение (15.4) существенно упрощается и примет вид

$$\frac{d \langle mM \rangle}{dt} = \langle m \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} \rangle + \left\langle \left\{ \frac{dm}{dt} \right\} M \right\rangle. \quad (15.5)$$

Из (15.5) и соотношения Эйнштейна (2.5.5) видно, что коэффициент диффузии

$$2D_{mM} = 0. \quad (15.6)$$

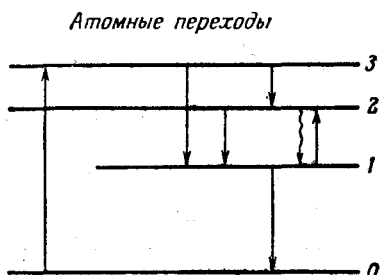
Поэтому ланжевеновские силы для двух связанных систем с независимыми резервуарами по существу нескоррелированы.

Отсюда следует, что диссипативные коэффициенты для системы 1 не зависят от наличия системы 2, и наоборот. Более того, если m и M представляют собой операторы, относящиеся к системе 1, то (в этом же приближении) выражение для D_{mM} не зависит от факта наличия или отсутствия системы 2.

Итак, гамильтониан взаимодействия в нашем рассмотрении не изменяет диссипативные коэффициенты или источники шума, однако непосредственное влияние взаимодействия проявляется, скажем, в таких коммутаторах, как (m, H_{12}) или (M, H_{12}) .

16. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЗЕРА

На фиг. 2.1 (стр. 22) и фиг. 16.1 схематически показана используемая нами модель мазера или лазера, которая была введена в разд. 6 работы [11].



Фиг. 16.1.

Волнистыми стрелками на фиг. 16.1 показаны излучательные переходы, вызванные взаимодействием атома с полем, а сплошными — безызлучательные переходы, обусловленные взаимодействием с резервуарами. В этой главе мы будем предполагать настолько быстрые переходы из состояния 3 в состояние 2, что эффективно происходит накачка непосредственно в состояние 2. Электромагнитное поле будем описывать одной резонансной модой, хотя легко провести обобщение на случай нескольких мод.

Рассмотрим совокупность N атомов, обозначаемых индексом M . Две рассматриваемые системы — атомы и поле — связаны и взаимодействуют между собой:

$$H_{\text{п-а}} = i\hbar\mu \sum_{M=1}^N [b^+ (a_1^+ a_2)_M - b (a_2^+ a_1)_M]. \quad (16.1)$$

Гамильтониан такого же вида использовался выше (гл. 3) при классическом описании. Будем предполагать, что каждый атом связан также со своим собственным резервуаром; соответствующая ланжевеновская сила будет тоже снабжаться индексом M . Ланжевеновское уравнение движения для гармонического осциллятора, моделирующего наше одномодовое электромагнитное поле, имеет, согласно (12.1.28), (13.2.5) и (16.1), следующий вид:

$$\frac{db}{dt} = -\left(i\omega_c + \frac{1}{2}\gamma\right)b + \mu \sum_M (a_1^+ a_2)_M + f. \quad (16.2)$$

Точно так же, используя (12.1.28), (14.1.15) и (16.1), получим ланжевеновские уравнения движения для M -го атома

$$\begin{aligned} \frac{d(a_1^+ a_2)_M}{dt} = & -(\Gamma_{12}^M + i\omega^M)(a_1^+ a_2)_M + \\ & + \mu b (a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1)_M + F_{12}^M, \end{aligned} \quad (16.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(a_2^+ a_2)_M}{dt} = & \omega_{20}(a_0^+ a_0)_M + \omega_{21}(a_1^+ a_1)_M - \\ & - \Gamma_2(a_2^+ a_2)_M - B^M + F_{22}^M, \end{aligned} \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(a_1^+ a_1)_M}{dt} = & \omega_{10}(a_0^+ a_0)_M + \omega_{12}(a_2^+ a_2)_M - \\ & - \Gamma_1(a_1^+ a_1)_M + B^M + F_{11}^M, \end{aligned} \quad (16.5)$$

где

$$\omega^M \equiv \omega_2^M - \omega_1^M \quad (16.6)$$

и

$$B^M = \mu [b^+(a_1^+ a_2)_M + (a_2^+ a_1)_M b]. \quad (16.7)$$

Как и в гл. 3, все слагаемые в уравнениях (16.2) — (16.5), пропорциональные μ , возникли из-за учета в гейзенберговских уравнениях движения гамильтониана $H_{п-а}$. Величина B^M имеет смысл скоростей излучения при переходе атома из состояния 2 в состояние 1. Уравнение для величины $(a_0^+ a_0)_M$ можно не писать, так как

эта величина определяется из закона сохранения

$$(a_0^+ a_0 + a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2)_M = 1. \quad (16.8)$$

Скорости ω_{20} и ω_{10} характеризуют накачку из состояния O , соответственно в состояние 2 или 1 , а остальные обозначения вводились в гл. 13 и 14.

Напомним (это уже говорилось в конце гл. 15), что в течение коротких времен безызлучательных переходов мы пренебрегаем влиянием взаимодействий $H_{\pi-a}$ на операторы a_1 , a_1^+ , a_2 , a_2^+ .

Для простоты мы предположили одинаковость взаимодействия атом — поле для всех атомов ¹⁾. Поэтому можно следующим образом определить операции усреднения:

$$\sigma_{11} \equiv \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N (a_1^+ a_1)_M, \quad (16.9)$$

$$D = \sigma_{22} - \sigma_{11}, \quad (16.10)$$

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N (a_1^+ a_2)_M e^{i\omega_0 t}. \quad (16.11)$$

Как и в (3.11.7), введем новые операторы поля:

$$b' = b e^{i\omega_0 t}. \quad (16.12)$$

Из (16.11) и (16.12) видно, что величины σ и b' определены таким образом, чтобы уничтожить высокочастотные осцилляции мазера. Остается лишь достаточно медленное движение, так как оно вызывается ланжевеновскими силами. Для упрощения обозначений в дальнейшем будет опускаться штрих у оператора b . Средняя скорость излучения B , отнесенная к одному атому, определяется как

$$B = \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N B^M = \mu (b^+ \sigma + \sigma^+ b), \quad (16.13)$$

¹⁾ Более общий случай рассматривался в гл. 3.

а средние случайные силы, действующие на атом, равны

$$F_{11} = \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N F_{11}^M, \quad (16.14)$$

$$F_{12} = \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N F_{12}^M e^{i\omega_0 t}. \quad (16.15)$$

Предположим, что спектр величины F_{12} существенно не меняется из-за малого отличия частот ω_0 и ω_{21} .

Тогда выражение (16.15) примет вид

$$F_{12} \approx \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N F_{12}^M e^{i\omega_{21} t}, \quad (16.16)$$

а связанные уравнения для атома и поля (16.4) — (16.6) сведутся к

$$\frac{d\sigma_{22}}{dt} = \omega_{20}\sigma_{00} + \omega_{21}\sigma_{11} - \Gamma_2\sigma_{22} - B + F_{22}, \quad (16.17)$$

$$\frac{d\sigma_{11}}{dt} = \omega_{10}\sigma_{00} + \omega_{12}\sigma_{22} - \Gamma_1\sigma_{11} + B + F_{11}, \quad (16.18)$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma (1 - i\alpha) b + N\mu\sigma + F, \quad (16.19)$$

где, согласно (16.8),

$$\sigma_{00} = 1 - \sigma_{11} - \sigma_{22}, \quad (16.20)$$

а из (3.3.6)

$$\alpha \equiv (\omega_a - \omega_c) / \left(\frac{1}{2} \gamma + \Gamma \right). \quad (16.21)$$

Сила F определяется равенством

$$F \equiv f e^{i\omega_0 t}. \quad (16.22)$$

В случае неоднородного уширения линии уравнение (16.3) не может быть записано только через введенные выше средние величины. Классический подход к неоднородному случаю был развит в гл. 3. Для простоты здесь будет рассмотрен лишь случай однородного уширения

$$\omega^M = \omega_a, \quad \Gamma_{12}^M = \Gamma. \quad (16.23)$$

Тогда уравнение (16.3) запишется в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\Gamma(1 + i\alpha)\sigma + \mu bD + F_{12}. \quad (16.24)$$

Ограничиваясь случаем однородного уширения, мы свели число уравнений движения от $\sim 10^{18}$, уравнения (16.2) — (16.6) для b , b^+ $(a_1^+ a_2)_M$, $(a_2^+ a_1)_M$ и $(a_2^+ a_2)_M$ для всех M ($\approx 10^{18}$ атомов), к 6 — уравнения движения (16.17) — (16.19), (16.24) для b , b^+ , σ , σ^+ , σ_{11} и σ_{22} .

Из-за нашего предположения о том, что каждый атом имеет свой резервуар, не зависящий от резервуаров остальных атомов, случайные силы F_{ij} мало проявляются в уравнениях (16.17), (16.18) и (16.24). Кроме того, F_{ij} усредняется по большому набору F_{ij}^M одинаково распределенных переменных, поэтому в соответствии с центральной предельной теоремой они могут в хорошем приближении считаться гауссовыми случайными переменными. Точность этого приближения будет в дальнейшем оценена с помощью рассмотрения слагаемых, опускаемых в гауссовом приближении.

Рассмотрим теперь электромагнитный шум $F(t)$. В оптической области $F(t)$ вызывается вакуумными флуктуациями электромагнитного поля и потому является гауссовой переменной. В микроволновой области источником электромагнитного шума являются стенки резонатора. Так как вклад в это излучение «черного тела» дают множество атомов, то мы снова будем считать $F(t)$ гауссовой переменной. Моменты ланжевеновских сил определяются равенствами

$$\langle F(t) F_{ij}^M(u) \rangle = \langle F_{ij}^M(u) F(t) \rangle = 0, \quad (16.25)$$

$$\langle F_{ij}^{M'}(t) F_{kl}^M(u) \rangle = 0 \quad \text{при } M' \neq M, \quad (16.26)$$

$$\langle F^+(t) F(u) \rangle = \gamma \bar{n} \delta(t - u), \quad (16.27)$$

$$\langle F(u) F^+(t) \rangle = \gamma (\bar{n} + 1) \delta(t - u), \quad (16.28)$$

$$\langle F_{ij}^M(t) F_{kl}^M(u) \rangle = 2 \langle D_{ijkl}^M \rangle \delta(t - u), \quad (16.29)$$

$$\langle F_{ij}(t) F_{kl}(u) \rangle = \frac{1}{N} 2 \langle D_{ijkl} \rangle \delta(t - u), \quad (16.30)$$

$$\langle D_{ijkl} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{M=1}^N \langle D_{ijkl}^M \rangle, \quad (16.31)$$

где $\bar{n} = \bar{n}(\omega_0)$ — среднее число фотонов на рабочей частоте лазера ω_0 . Как уже говорилось в гл. 15, атомные и полевые силы не связаны между собой. Множитель $1/N$ в формуле (16.30) по существу отражает предполагаемое отсутствие корреляции между отдельными величинами F^M . Атомные коэффициенты диффузии оказались такими же, как и величины, полученные в разд. 14.2. Приведем те из них, которые наиболее важны при изучении фазового шума лазера выше порога возбуждения:

$$2 \langle D_{1221}^M \rangle = \langle (a_1^+ a_1)_M \rangle (\Gamma_2 + 2\Gamma_{12}^\Phi) + \sum_{p \neq 1} \omega_{1p} \langle (a_p^+ a_p)_M \rangle, \quad (16.32)$$

$$2 \langle D_{1221} \rangle = \langle \sigma_{11} \rangle (\Gamma_2 + 2\Gamma_{12}^\Phi) + \sum_{p \neq 1} \omega_{1p} \langle \sigma_{pp} \rangle, \quad (16.33)$$

$$2 \langle D_{2112}^M \rangle = \langle (a_2^+ a_2)_M \rangle (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^\Phi) + \sum_{p \neq 2} \omega_{2p} \langle (a_p^+ a_p)_M \rangle, \quad (16.34)$$

$$2 \langle D_{2112} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^\Phi) + \sum_{p \neq 2} \omega_{2p} \langle \sigma_{pp} \rangle. \quad (16.35)$$

Кроме того, интересны следующие коэффициенты диффузии:

$$2 \langle D_{1111} \rangle = \sum_{p \neq 1} \omega_{1p} \langle \sigma_{pp} \rangle + \Gamma_1 \langle \sigma_{11} \rangle, \quad (16.36)$$

$$2 \langle D_{2222} \rangle = \sum_{p \neq 2} \omega_{2p} \langle \sigma_{pp} \rangle + \Gamma_2 \langle \sigma_{22} \rangle, \quad (16.37)$$

$$2 \langle D_{1122} \rangle = 2 \langle D_{2211} \rangle = -(\omega_{12} \langle \sigma_{22} \rangle + \omega_{21} \langle \sigma_{11} \rangle), \quad (16.38)$$

$$2 \langle D_{1222} \rangle = \Gamma_2 \langle \sigma \rangle, \quad (16.39)$$

$$2 \langle D_{2212} \rangle = -\omega_{21} \langle \sigma \rangle, \quad (16.40)$$

$$2 \langle D_{2122} \rangle = -\omega_{21} \langle \sigma^+ \rangle, \quad (16.41)$$

$$2 \langle D_{2221} \rangle = \Gamma_2 \langle \sigma^+ \rangle. \quad (16.42)$$

Правые части равенств (16.36) и (16.37) имеют смысл скоростей прихода из состояний 1 и 2 атома, а (16.38) — скоростей перехода между состояниями 1 и 2. Все приведенные выше коэффициенты диффузии связаны условием

$$D_{ijkl} = (D_{ikjl})^*. \quad (16.43)$$

В разд 7 работы [11] автором было показано, что полученные в этой главе уравнения движения соответствуют сохраняющимся во времени перестановочным соотношениям.

Заметим, что уравнения движения для мазера (16.17) — (16.19) и (16.24) похожи на классические уравнения (3.2.10) — (3.2.12) и (3.2.14). Теперь мы проведем такие же преобразования наших уравнений, какие были проведены ранее (гл. 3), с классическими уравнениями. Различие состоит лишь в том, что здесь мы имеем добавочные (случайные) слагаемые в правых частях уравнений и, кроме того, существен порядок, в котором располагаются операторы.

17. СЛУЧАЙ ШИРОКОЙ АТОМНОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим теперь случай широкой атомной линии, предположив, что Γ , т. е. Γ_{12} [см. (16.23)], велико по сравнению с остальными характерными скоростями:

$$\Gamma \gg \gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \omega_{12}, \omega_{21}. \quad (17.1)$$

17.1. ИСКЛЮЧЕНИЕ ОПЕРАТОРА ПЕРЕХОДА σ С ПОМОЩЬЮ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Условие (17.1) позволяет сделать единственное в этой главе адиабатическое приближение $\frac{d\sigma}{dt} \Gamma \ll \sigma$. Поэтому можно пренебречь величиной $\frac{d\sigma}{dt}$ в уравнении (16.24), что дает

$$0 = \frac{d\sigma}{dt} = -\Gamma(1 + i\alpha)\sigma + \mu bD + F_{12} \quad (17.1.1)$$

или

$$\sigma = \frac{\mu bD + F_{12}}{\Gamma(1 + i\alpha)}. \quad (17.1.2)$$

Соотношение (17.1.2) представляет собой не что иное, как классическую формулу (3.5.1) с добавочным слагаемым F_{12} в выражении для шума. Подставляя (17.1.2) в (16.19), получим уравнение движения для b :

$$\frac{db}{dt} = -\frac{1}{2} b(1 - i\alpha)[\gamma - \pi(N_2 - N_1)] + G_b, \quad (17.1.3)$$

где

$$N_i = N\sigma_{ii}. \quad (17.1.4)$$

Новая случайная сила G_b равна

$$G_b = F + \frac{N\mu F_{12}}{\Gamma(1 + i\alpha)} \quad (17.1.5)$$

и, как и в случае (3.5.3),

$$\pi = \frac{2\mu^2}{\Gamma(1 + \alpha^2)}. \quad (17.1.6)$$

Уравнение (17.1.3) может быть также записано в виде

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \gamma (1 - i\alpha) b \frac{\Delta D}{D_0} + G_b, \quad (17.1.7)$$

где, как и в (3.4.13),

$$\Delta D = D - D_0 \quad (17.1.8)$$

и аналогично (3.3.8)

$$D_0 = \frac{1}{2} \frac{\gamma \Gamma}{N\mu^2} (1 + \alpha^2). \quad (17.1.9)$$

Уравнение (17.1.7) представляет собой классическое уравнение движения (3.5.2) с добавочным слагаемым G в выражении для шума. Как видно из уравнений (16.17) — (16.19), (16.24) и (16.13) скорость излучения B является единственной величиной, зависящей от переменной σ , а именно

$$B = \mu (b^+ \sigma + \sigma^+ b). \quad (17.1.10)$$

Исключая σ с помощью адиабатического приближения, получим

$$B = \pi b^+ b D + \frac{\mu}{\Gamma} \left(\frac{b^+ F_{12}}{1 + i\alpha} + \frac{F_{12}^+ b}{1 - i\alpha} \right). \quad (17.1.11)$$

Первое слагаемое $\pi b^+ b D$ представляет собой величину скорости излучения B в классическом случае (см. 3.5.3). При этом B пропорционально числу фотонов, умноженному на разность населенностей. Можно ожидать, что B пропорционально величине $(b^+ b + 1)$, т. е. числу фотонов плюс единица. Мы потребуем, чтобы эти спонтанные эффекты содержались в шуме, т. е. в среднем от стоящего в квадратных скобках слагаемого в выражении (17.1.11). Рассмотрим $\langle F_{12}^+(t) b(t) \rangle$. Как и в разд. 6.4, можно записать

$$b(t) = bc + \int_{t_c}^t \frac{db}{ds} ds, \quad (17.1.12)$$

где величина $\epsilon = t - t_c$ будет в конце расчета устремлена к нулю. Тогда, поскольку величина $F_{12}(t)$ нескоррелирована с $b_c = b(t - \epsilon)$, имеем

$$\langle F_{12}^+(t) b(t) \rangle = \int_{t_c}^t ds \langle F_{12}^+(t) \frac{db}{ds} \rangle. \quad (17.1.13)$$

Подставляя (17.1.3) в (17.1.13), получим

$$\langle F_{12}^+(t) b(t) \rangle \approx \frac{N\mu}{\Gamma(1+i\alpha)} \int_{t_c}^t ds \langle F_{12}^+(t) F_{12}(s) \rangle. \quad (17.1.14)$$

Но $F_{12}^+ = F_{21}$, поэтому, используя (16.30) и интегрируя по половине области определения δ -функции, сведем уравнение (17.1.14) к виду

$$\langle F_{12}^+(t) b(t) \rangle = \frac{\mu}{\Gamma(1+i\alpha)} \langle D_{2112} \rangle. \quad (17.1.15)$$

Точно так же получим

$$\langle b^+(t) F_{12}(t) \rangle = \frac{\mu}{\Gamma(1-i\alpha)} \langle D_{2112} \rangle. \quad (17.1.16)$$

Усредним теперь равенство (17.1.11) и подставим в него выражения (17.1.15), (17.1.16) и (17.1.6). В результате имеем

$$\langle B \rangle = \pi \langle b^+ b D \rangle + \frac{\pi}{\Gamma} \langle D_{2112} \rangle. \quad (17.1.17)$$

Подстановка (16.35) в (17.1.17) дает

$$\langle B \rangle = \pi \langle b^+ b D \rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\Gamma} \left[\langle \sigma_{22} \rangle (\Gamma_1 + 2\Gamma_{12}^\Phi) + \sum_{p \neq 2} \omega_{2p} \langle \sigma_{pp} \rangle \right]. \quad (17.1.18)$$

Если теперь $\Gamma \rightarrow \infty$, то из (14.1.19) и нашего предположения (17.1) действительно следует $\Gamma^\Phi \rightarrow \infty$. В соответствии с физикой задачи мы должны предположить, что электрический дипольный момент растет настолько, чтобы сохранялась постоянная величина (17.1.6). В этом

пределе выражение (17.1.18) сводится к

$$\langle B \rangle = \pi \langle b^+ b D \rangle + \pi \langle \sigma_{22} \rangle. \quad (17.1.19)$$

Используя (17.1.19), (16.10) и перестановочные соотношения для оператора b , можно переписать выражение для $\langle B \rangle$ в виде

$$\langle B \rangle = \pi \langle b b^+ \sigma_{22} \rangle - \langle b^+ b \sigma_{11} \rangle \quad (17.1.20)$$

или

$$\langle B \rangle = \pi \langle (b^+ b + 1) \sigma_{22} \rangle - \langle b^+ b \sigma_{11} \rangle. \quad (17.1.21)$$

Из уравнений (16.17), (16.18) видно, что величина $\langle B \rangle$ представляет собой скорость излучательных переходов между уровнями 2 и 1. Из выражения (17.1.21) следует, что $\langle B \rangle$ равно числу фотонов плюс единица, умноженному на населенность верхнего уровня, минус число фотонов, умноженное на населенность нижнего уровня. При классическом расчете величина $B = \langle B \rangle$, согласно (3.5.3), была равна числу фотонов, умноженному на разность населенностей. Заметим, что если бы мы определили B иначе, а именно $B = \mu (\sigma b^+ + b \sigma^+)$, то ответ для $\langle B \rangle$ не изменился бы. Из (17.1.11), (17.1.12) и (17.1.19) видно, что скорость перехода B может быть записана в виде

$$B = \pi \langle b^+ b D \rangle + \pi \langle \sigma_{22} \rangle + F_B, \quad (17.1.22)$$

где для новой случайной силы F_B , используя равенство $F_{12}^+ = F_{21}$, находим

$$F_B = \frac{\mu}{\Gamma} \left(\frac{b_c^+ F_{12}}{1 + ia} + \frac{F_{21} b_c}{1 - ia} \right). \quad (17.1.23)$$

17.2. ВЕКТОРЫ СМЕЩЕНИЯ И НОВЫЕ ЛАНЖЕВЕНОВСКИЕ СИЛЫ

После исключения σ в нашей задаче остались переменные b , b^+ , N_1 и N_2 . Для простоты сделаем несущественное, но в достаточно общем случае справедливое предположение о том, что можно пренебречь истощением наинизшего нулевого уровня, т. е. положим в вы-

ражении (16.20) $\sigma_{00} \approx 1$. Тогда наши уравнения с учетом (17.1.3), (16.17) (16.18), (17.1.4), (17.1.22) примут вид

$$\frac{db}{dt} = A_b + G_b, \quad (17.2.1)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 + [\omega_{12} + \pi(b^+b + 1)] N_2 - (\Gamma_1 + \pi b^+b) N_1 + G_1, \quad (17.2.2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 + (\omega_{21} + \pi b^+b) N_1 - [\Gamma_2 + \pi(b^+b + 1)] N_2 + G_2, \quad (17.2.3)$$

где

$$A_b = -\frac{1}{2} b(1 - i\alpha)[\gamma - \pi(N_2 - N_1)], \quad (17.2.4)$$

$$R_i = N\omega_{i0}, \quad (17.2.5)$$

$$G_b = F + \frac{N\mu F_2}{\Gamma(1 + i\alpha)}, \quad (17.2.6)$$

$$G_1 = NF_{11} + NF_B, \quad (17.2.7)$$

$$G_2 = NF_{22} - NF_B. \quad (17.2.8)$$

Мы привели наши уравнения к нормально упорядоченному виду, подставляя $(b^+b + 1)$ вместо bb^+ . Это облегчит проводимое в разд. 17.11 построение соответствующей классической задачи, используя технику нормального упорядочения.

В работе [16] до перехода к классическому рассмотрению с помощью адиабатического приближения были исключены все переменные, кроме b и b^+ , а в работе [17] — кроме b , b^+ и N_2 . Здесь же переход к классическому случаю осуществляется с большим числом переменных — b , b^+ , N_2 и N_1 . Использование адиабатического приближения для исключения N_1 и N_2 может быть осуществлено уже в классической задаче. Преимущество подхода работы [17] по сравнению с [16] состоит в том, что не требуется выполнения условия $\Gamma_2 \gg \gamma$, хотя должно быть $\Gamma_1 \gg \gamma$. При этом исключение N_2 с помощью адиабатического приближения проводится в классическом случае и не требует расположения слагаемых типа $(\text{const} + b^+b)^{-1}$ в нормально упорядоченном виде, как это нужно в [16] при исключении N_2 в квантовой задаче. Преимущество развиваемого здесь подхода перед [17]

и [16] состоит в том, что не требуется выполнения специальных соотношений между величинами Γ_2 , Γ_1 и γ . Если же, как в случае газового лазера, $\Gamma_2 \gg \gamma$ и $\Gamma_1 \ll \gamma$, то можно исключить N_2 и N_1 , не предполагая существования какого-либо соотношения между Γ_1 и Γ_2 .

Поскольку N_1 и N_2 коммутируют с b и b^+ (и между собой), то их можно считать c -числами. В этой главе мы хотим получить уравнения для матрицы плотности $\rho(b, b^+, N_1, N_2, t)$ и связанной с ней классической функции распределения $P(\beta, \beta^*, N_1, N_2, t)$.

17.3. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ

Случайные силы для лазера, состоящего из многих атомов, являются в хорошем приближении гауссовыми переменными, поэтому свойства этих случайных сил полностью характеризуются обращением в нуль их первых моментов и коэффициентами диффузии, определяющими их (дельта-функционно коррелированные) вторые моменты.

Используя выражения (17.1.5), (17.2.6) и (17.2.7) для случайных сил G_b , G_1 и G_2 , рассчитаем коэффициенты диффузии тем же методом, который применялся в классическом случае в разд. 6.3, за исключением необходимости сохранения порядка следования всех операторов. Рассчитаем, например,

$$\begin{aligned} 2D_{11} &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle G_1(s) G_1(u) \rangle ds du = \\ &= \frac{N^2}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} du \langle [F_{11}(s) + F_B(s)][F_{11}(u) + F_B(u)] \rangle. \end{aligned} \quad (17.3.1)$$

Заметим, что величина D_{11} стоит без значка среднего значения. В разд. 6.4 говорилось, что если операция усреднения относится к величине, поддерживаемой постоянной в момент времени t , то значок среднего можно опустить. Если, однако, величины были постоянны в более ранние моменты времени, то надо оставить значок

среднего. В дальнейшем мы будем опускать этот значок для величин, постоянных в момент времени t . Расчет D_{11} требует вычисления всех средних, входящих в правую часть равенства (17.3.1). Из (16.30) и (16.36) получим

$$\langle F_{11}(s) F_{11}(u) \rangle = \frac{2\langle D_{1111} \rangle}{N} \delta(s - u), \quad (17.3.2)$$

где величина $2\langle D_{1111} \rangle$ определяет скорость ухода и прихода в состояние 1 атома. Согласно (17.1.23), находим

$$\begin{aligned} \langle F_B(s) F_B(u) \rangle &= \\ &= \frac{\mu^2}{\Gamma^2} \left\langle \left[\frac{b_c^+ F_{12}(s)}{1 + i\alpha} + \frac{F_{21}(s) b_c}{1 - i\alpha} \right] \left[\frac{b_c^+ F_{12}(u)}{1 + i\alpha} + \frac{F_{21}(u) b_c}{1 - i\alpha} \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (17.3.3)$$

Так как по (16.30) и (14.2.4) $\langle F_{12}(s) F_{12}(u) \rangle = 0$, то выражение (17.3.3) примет вид

$$\begin{aligned} \langle F_B(s) F_B(u) \rangle &= \frac{\mu^2}{\Gamma^2(1 + \alpha^2)} \left[b_c^+ \langle F_{12}(s) F_{21}(u) \rangle b_c + \right. \\ &\quad \left. + b_c \langle F_{21}(s) F_{12}(u) \rangle b_c^+ \right] \end{aligned} \quad (17.3.4)$$

или, используя также (16.30) и (17.1.6),

$$\begin{aligned} \langle F_B(s) F_B(u) \rangle &= \\ &= \frac{\pi}{\Gamma N} \left[b^+ \langle D_{1221} \rangle b + b \langle D_{2112} \rangle b^+ \right] \delta(s - u). \end{aligned} \quad (17.3.5)$$

Для учета вклада в интеграл (17.3.1) слагаемых, содержащих F_B , используем равенство

$$2D_{BB} = \frac{\pi}{\Gamma N} \left[b^+ D_{1221} b + b D_{2112} b^+ \right], \quad (17.3.6)$$

где опущен значок усреднения, поскольку все средние — условные (по отношению к моменту времени t). При переходе к адиабатическому пределу $\Gamma \rightarrow \infty$ имеем $\bar{\Gamma} \gg \Gamma_1, \Gamma_2, \omega_{12}$ и $\pi = \text{const}$. Тогда из (16.33) и (16.35) получим

$$\frac{2D_{1221}}{\Gamma} \rightarrow 2\sigma_{11}; \quad \frac{2D_{2112}}{\Gamma} \rightarrow 2\sigma_{22}. \quad (17.3.7)$$

Используя также (17.1.4), определим вклад фотонов в дробовой шум:

$$2D_{N.B NB} \equiv 2N^2 D_{BB} \rightarrow N^2 \frac{\pi}{N} (b^+ \sigma_{11} b + b \sigma_{22} b^+) = \\ = \pi b^+ b N_1 + \pi (b^+ b + 1) N_2. \quad (17.3.8)$$

Рассмотрим теперь перекрестные слагаемые в (17.3.1). Необходимо рассчитать величину

$$\langle F_{11}(s) F_B(u) \rangle = 2D_{11B} \delta(s - u). \quad (17.3.9)$$

Тем же методом, как и в (17.3.3) — (17.3.6), найдем

$$2D_{11B} = \frac{2\mu}{\Gamma(1+i\alpha)} b_c^+ \frac{D_{1112}}{N} + \frac{2\mu}{\Gamma(1+i\alpha)} \frac{D_{1121}}{N} b_c \quad (17.3.10)$$

или, используя выражения, эквивалентные (16.40) и (16.42):

$$2D_{11B} = \frac{\mu}{\Gamma(1+i\alpha)} b_c^+ \Gamma_1 \sigma + \frac{\mu}{\Gamma(1-i\alpha)} \omega_{12} \sigma^+ b_c. \quad (17.3.11)$$

Преобразуем уравнение (17.3.10), учитывая адиабатическое приближение для σ (17.1.2):

$$2D_{11B} = \frac{\mu^2 \Gamma_1}{\Gamma^2(1+i\alpha)^2} \cdot \frac{b^+ b D}{N} - \frac{\mu^2}{\Gamma^2(1-i\alpha)^2} \omega_{12} \frac{b^+ b D}{N}. \quad (17.3.12)$$

При переходе к адиабатическому пределу ($\Gamma \rightarrow \infty$)

$$2D_{11B} \rightarrow 0. \quad (17.3.13)$$

Остальные перекрестные слагаемые в (17.3.1) пропорциональны величине D_{B11} , отличной от D_{11B} , но также стремящейся к нулю в адиабатическом пределе

$$2D_{B11} \rightarrow 0. \quad (17.3.14)$$

Следовательно, в адиабатическом пределе можно вычислить все слагаемые в (17.3.1) и получить для атомного и фотонного вклада в дробовой шум следующее выражение:

$$2D_{11} = R_1 + \omega_{12} N_2 + \Gamma_1 N_1 + (\pi b^+ b + 1) N_2 + \pi b^+ b N_1. \quad (17.3.15)$$

Рассчитаем теперь величину D_{2b} . Из (6.3.14), (17.1.5), (17.3.7) и (17.1.23) находим

$$2D_{2b} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} du \langle G_2(s) G_b(u) \rangle \quad (17.3.16)$$

или

$$2D_{2b} = -\frac{N^2\mu^2}{\Gamma^2(1+\alpha^2)} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} du \langle F_{21}(s) b_c F_{12}(u) \rangle. \quad (17.3.17)$$

При этом опущены некоторые средние величины, обращаемые в нуль. Так как b_c коммутирует с $F_{21}(s)$, то

$$2D_{2b} = -\frac{\pi}{\Gamma} N b_c D_{2112}. \quad (17.3.18)$$

Это выражение в адиабатическом пределе с учетом (17.3.7) сводится к следующему:

$$2D_{2b} = -\pi b_c \sigma_{22} N = -\pi b_c N_2. \quad (17.3.19)$$

Подобными же методами можно рассчитать остальные коэффициенты диффузии. В результате получим

$$2D_{11} = R_1 + \omega_{12} N_2 + \Gamma_1 N_1 + \pi(b^+ b + 1) N_2 + \pi b^+ b N_1, \quad (17.3.20)$$

$$2D_{22} = R_2 + \omega_{21} N_1 + \Gamma_2 N_2 + \pi(b^+ b + 1) N_2 + \pi b^+ b N_1, \quad (17.3.21)$$

$$2D_{12} = 2D_{21} = -[\omega_{12} + \pi(b^+ b + 1)] N_2 - (\omega_{21} + \pi b^+ b) N_1, \quad (17.3.22)$$

$$2D_{bb} = 2D_{b^+ b^+} = 0, \quad (17.3.23)$$

$$2D_{bb^+} = \gamma(\bar{n} + 1) + \pi N_1, \quad (17.3.24)$$

$$2D_{b^+ b} = \gamma \bar{n} + \pi N_2, \quad (17.3.25)$$

$$2D_{1b} = \pi b N_2, \quad (17.3.26)$$

$$2D_{2b} = -\pi b N_2, \quad (17.3.27)$$

$$2D_{b^+ 1} = \pi b^+ N_2 = 2(D_{1b})^+, \quad (17.3.28)$$

$$2D_{b^+ 2} = -\pi b^+ N_2 = 2(D_{2b})^+. \quad (17.3.29)$$

Величины D_{11} , D_{22} , D_{12} и D_{21} определяют атомный и фотонный вклад в дробовой шум. Обратим внимание на

то, что N входит в формулы (17.3.26) — (17.3.29). Такая асимметрия связана с порядком следования операторов, поскольку мы вычисляли D_{b_2} , а не D_{2b} . Для дальнейших расчетов нам понадобятся лишь рассмотренные выше «нормально упорядоченные» диффузионные коэффициенты, в которых b^+ стоит слева, а b — справа. Заметим, что в работах Хакена и его школы [75] после выбора переменных рассчитаны (квантовые) коэффициенты диффузии, которые затем подставлены в классическое уравнение Фоккера — Планка. Но из-за симметрии вторых производных при такой процедуре в уравнениях автоматически остается лишь симметричная часть $\frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji})$ коэффициентов диффузии. В то же время в нашем методе в уравнении для антинормально упорядоченной матрицы плотности содержатся нормально упорядоченные коэффициенты диффузии и наоборот. Для высоких рабочих уровней оба метода мало отличаются друг от друга, за исключением тех случаев, когда рассчитываются величины, чувствительные к порядку следования операторов, как, например, флуктуации интенсивности $\langle b^+(0)b^+(t)b(t)b(0) \rangle - \langle b^+b \rangle^2$ (см. разд. 4.5) в отличие от флуктуаций числа фотонов $\langle b^+(t)b(t)b^+(0)b(0) \rangle - \langle b^+b \rangle^2$. Это различие обсуждается в работе [14].

17.4. ФЛУКТУАЦИИ ЧИСЛА ФОТОНОВ

Рассмотрим теперь флуктуации числа фотонов

$$P = b^+b. \quad (17.4.1)$$

Уравнение движения для величины P имеет вид

$$\frac{dP}{dt} = b^+ \frac{db}{dt} + \frac{db^+}{dt} b \quad (17.4.2)$$

или, используя (16.9) и (17.1.10),

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma b^+b + NB + b^+F + F^+b. \quad (17.4.3)$$

Для расчета слагаемых со случайными силами в (17.4.3) применим метод, использованный в (17.1.12) — (17.1.14), (16.25). Подставляя также выражение (17.1.22) для ве-

личины B , получим

$$\frac{dP}{dt} = \gamma\bar{n} - \gamma P + \pi(P+1)N_2 - \pi P N_1 + G_p, \quad (17.4.4)$$

где

$$G_p = NF_B + b_c^+ F + F^+ b_c. \quad (17.4.5)$$

Уравнение (17.4.4) имеет ясный физический смысл: величина $\gamma\bar{n}$ относится к фотонам, получаемым из резервуара: $\gamma b^+ b$ — к затуханию фотонов; $\pi(P+1)N_2$ и $\pi P N_1$ — к числам фотонов, соответственно излученным с верхнего и поглощенным на нижнем уровне, а G_p — новая случайная сила. Это уравнение можно рассматривать вместе с уравнениями (17.2.2) и (17.2.3).

Рассчитаем теперь вторые моменты $2D_{1p}$, $2D_{2p}$ и $2D_{pp}$. Из определения (17.4.5) величины G_p и выражений (17.3.8), (16.27) и (16.28) находим

$$2D_{pp} = \pi b^+ b N_1 + \pi(b^+ b + 1)N_2 + b^+ b(\bar{n} + 1) + (b^+ b + 1)\bar{n}. \quad (17.4.6)$$

Первые два слагаемых описывают поглощение и излучение фотонов атомами, а остальные — тепловым резервуаром. Таким образом, дробовой шум содержится непосредственно в уравнении для фотонов.

Обратимся теперь к величине D_{p1} . Из определений (17.4.5), и (17.2.6) величин G_p и G_1 получим в адиабатическом пределе ($\Gamma \rightarrow \infty$)

$$2D_{p1} = 2D_{NB, NB} = \pi b^+ b N_1 + \pi(b^+ b + 1)N_2. \quad (17.4.7)$$

Здесь учтено, что ввиду (16.23) и (17.1.23) величина F не коррелирована с другими случайными силами F_{11} и F_p и что, согласно (17.3.10) и (17.3.14), $\langle F_{11} F_B \rangle \rightarrow 0$ при $\Gamma \rightarrow \infty$. Точно так же из определений (17.4.5) и (17.2.7) величин G_p и G_2 получим

$$2D_{p2} = -2D_{NB, NB} = -\pi b^+ b N_1 - \pi(b^+ b + 1)N_2. \quad (17.4.8)$$

Чтобы закончить расчет коэффициентов диффузии для рассматриваемой задачи, надо еще вычислить D_{12} , для которого, пользуясь (17.3.22) и (17.4.8), находим

$$2D_{12} = -2D_{NB, NB} - \omega_{12} N_2 - \omega_{21} N_1. \quad (17.4.9)$$

Заметим, что с этого момента наша задача уже стала классической, поскольку P, N_1, N_2 — коммутирующие переменные, т. е. $D_{1P} = D_{P1}$ и т. д. Можно поэтому использовать классическое уравнение Фоккера — Планка.

17.5. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Диагональные элементы матрицы плотности $\rho_{mn}(N_1, N_2, t)$ имеют смысл вероятности для $m = n = P$ фотонов, когда имеется N_1 атомов в нижнем и N_2 в верхнем состоянии. Индексы m, n относятся к состояниям, описываемым в представлении чисел фотонов. Поэтому

$$\rho_{mn}(N_1, N_2, t) |_{m=n=P} = \mu(P, N_1, N_2, t), \quad (17.5.1)$$

где функция μ определяет классическое распределение вероятности¹⁾ и удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера — Планка, в котором слагаемые с первыми производными должны быть согласованы с величиной вектора смещения (17.4.4), (17.2.2) и (17.2.3), а коэффициентами при вторых производных должны быть коэффициенты диффузии (18.4.6) — (18.4.8) и (17.3.22). — (17.3.26).

Симметричность нашей матрицы коэффициентов диффузии подтверждает предположение о законности непосредственного использования классического уравнения Фоккера — Планка. Это предположение будет доказано в разд. 17.9, где приведен квантовомеханический вывод уравнений для ρ_{mn} и ρ_{nn} .

Вектора смещения и элементы матрицы коэффициентов диффузии являются, согласно (5.2.4) и разд. 9 работы [4], четными и нечетными комбинациями скоростей поглощения и излучения для процесса дробового шума. Другими словами, мы думаем, что P, N_1, N_2 — целые числа, а уравнение для μ должно быть разностным, причем его дифференциальная форма должна содержать первые производные с правильными векторами смещения, а коэффициентами при вторых производных должны

¹⁾ Здесь распределение вероятности обозначено через μ , а не P , так как P уже использовано для чисел фотонов.

быть правильные коэффициенты диффузии. Эта связь видна из сравнения уравнений (5.2.2), (5.2.3) и (5.2.4).

Для иллюстрации рассмотрим слагаемое $w_{21}N_1$ в уравнении (17.2.3) для $\frac{dN_2}{dt}$, которое описывает скорость перехода из состояния 1 в состояние 2. Такой переход должен описываться выражением

$$\frac{\partial \mu(P, N_1, N_2, t)}{\partial t} = w_{21}(N_1 + 1)\mu(P, N_2 - 1, N_1 + 1, t) - w_{21}N_1\mu(P, N_2, N_1, t) \quad (17.5.2)$$

в уравнении движения, где в правой части (17.5.2) первое слагаемое соответствует приходу, а второе — уходу из состояния P, N_1, N_2 . В дифференциальной форме уравнение (17.5.2) может быть записано как

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] w_{21}N_1\mu. \quad (17.5.3)$$

С помощью разложения в ряд легко убедиться в том, что слагаемые с первыми и вторыми производными в (17.5.3) согласуются с вкладом члена w_{21} в (17.2.2), (17.2.3) соответственно в векторе смещения и в D_{11}, D_{22}, D_{12} . Точно так же можно записать полное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} = & \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] R_2\mu + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] (\Gamma_2 - w_{12})N_2\mu + \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial N_1}\right) - 1 \right] R_1\mu + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_1}\right) - 1 \right] (\Gamma_1 - w_{21})N_1\mu + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] w_{21}N_1\mu + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1}\right) - 1 \right] w_{12}N_2\mu + \\ & + \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial P}\right) - 1 \right] \gamma \bar{n}(P+1)\mu + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial P} - 1\right) \right] \gamma(\bar{n}+1)P\mu + \\ & + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial P} + \frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] \pi PN_1\mu + \\ & + \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial P} - \frac{\partial}{\partial N_1} + \frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] \pi(P+1)N_2\mu. \quad (17.5.4) \end{aligned}$$

Первые четыре, седьмое и восьмое слагаемые имеют типичный для дробового шума вид (5.2.3) и ответственны за приход и уход из некоторого состояния в бесконечный резервуар. Слагаемое с ω_{21} , как уже объяснялось в (17.5.2), определяет переходы, при которых меняются как N_1 , так и N_2 . Комбинация $(\Gamma_2 - \omega_{12})$ позволяет избежать повторного учета ω_{12} (см. также разд. 9 работы [4]). Последние два слагаемых описывают одновременное изменение P , N_1 и N_2 , т. е. процессы

$$N_2 \rightarrow N_2 - 1, \quad N_1 \rightarrow N_1 + 1, \quad P \rightarrow P + 1.$$

Для того чтобы сделать результаты более наглядными, мы в этом разделе не только исключали σ , но и не рассматривали фазу электромагнитного поля. Перейдем теперь к более общему случаю переменных b , b^+ , N_1 и N_2 .

17.6. СОХРАНЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Поскольку используемое нами исключение σ с помощью адиабатического приближения сводит наши эффективные уравнения движения к новым ланжевеновским уравнениям (17.2.1) — (17.2.8), возникает необходимость убедиться в сохранении перестановочных соотношений $[b, b^+] - 1 = 0$; $[b, N_1] = 0$ и др. Пусть одно из таких соотношений имеет вид

$$N \equiv N(b, b^+, N_1, N_2) = 0. \quad (17.6.1)$$

Покажем теперь, что если $N = 0$ в момент времени t , то $N = 0$ и во все последующие моменты времени. Для этого убедимся в том, что для произвольного оператора M

$$\frac{d \langle MN \rangle}{dt} = 0. \quad (17.6.2)$$

Обратимся к соотношению Эйнштейна (2.4.5):

$$\frac{d \langle MN \rangle}{dt} = \langle M \left\{ \frac{dN}{dt} \right\} \rangle + \left\langle \left\{ \frac{dM}{dt} \right\} N \right\rangle + 2D_{MN}. \quad (17.6.3)$$

Так как в момент времени t $N = 0$, второе слагаемое обращается в нуль. Но в (12.3.4) было показано, что величина D_{MN} является суммой следующих слагаемых:

$$D_{MN} \sim \sum [M, Q_i][N, Q_j], \quad (17.6.4)$$

каждое из которых обращается в нуль при $N = 0$. Таким образом, обращается в нуль третье слагаемое в правой части уравнения (17.5.3) и осталось доказать тоже самое для первого слагаемого. В действительности нам необходимо доказать более слабое утверждение

$$\frac{d \langle N \rangle}{dt} = 0, \quad (17.6.5)$$

а не $\frac{dN}{dt} = 0$. Но доказать справедливость равенства (17.6.5) можно лишь, используя явный вид функции $N(b, b^+, N_1, N_2)$. Если, например, положить

$$N = [b, b^+] = 1 \quad (17.6.6)$$

и использовать равенство

$$\left\langle \frac{d[R, S]}{dt} \right\rangle = \langle [A_R, S] \rangle + \langle [R_1 A_S] \rangle + 2 \langle D_{RS} - D_{SR} \rangle, \quad (17.6.7)$$

то

$$\left\langle \frac{d[b, b^+]}{dt} \right\rangle = \langle [A_b, b^+] \rangle + \langle [b, A_b^+] \rangle + 2 \langle D_{bb^+} - D_{b^+b} \rangle. \quad (17.6.8)$$

Но

$$A_b = \frac{1}{2} b (1 - i\alpha) [\pi(N_2 - N_1) - \gamma], \quad (17.6.9)$$

$$D_{bb^+} = \gamma(\bar{n} + 1) + \pi N_1, \quad D_{b^+b} = \gamma\bar{n} + \pi N_2, \quad (17.6.10)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d[b, b^+]}{dt} \right\rangle = & \left\langle \left[\pi(N_2 - N_1) - \gamma \right] \{ [b, b^+] - 1 \} + \right. \\ & + \frac{1}{2} (1 - i\alpha) \pi b [N_2 - N_1, b^+] + \\ & \left. + \frac{1}{2} (1 + i\alpha) \pi [b, N_2 - N_1] b^+ \right\rangle. \quad (17.6.11) \end{aligned}$$

Итак, мы получили, что если все перестановочные соотношения

$$[b, b^+] = 1; \quad [b, N_i] = [N_i, b^+] = [N_1, N_2] = 0, \quad (17.6.12)$$

$$i = 1, 2,$$

выполнены в момент времени t , то равенство $[b, b^+] = 1$ сохраняется и в последующие моменты времени. Написав выражения, подобные (17.6.11) для оператора $[b, N_1]$ и др., убедимся в том, что все перестановочные соотношения (17.6.12) сохраняются во времени.

В разд. 17.7 нам понадобятся такие средние от перестановочных соотношений:

$$\langle [N, \Delta N] \rangle = 0; \quad N \equiv N(t); \quad \Delta N = N(t + \Delta t) - N(t), \quad (17.6.13)$$

где

$$N = b, \quad \text{или } b^+, \quad \text{или } N_1, \quad \text{или } N_2.$$

В выражении (17.6.13) $N(t) = N_c$ — значение переменной в момент времени, соответствующий началу временного интервала, а

$$\Delta N = A_N \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} F_N(s) ds \quad (17.6.14)$$

— изменение этой величины за время Δt , включая флуктуации, связанные с наличием резервуара. Используя уравнения (17.2.1) — (17.2.3), легко убедиться, что

$$[N, A_N] = 0. \quad (17.6.15)$$

Считая справедливым для марковского процесса предположение (11.2.8) о том, что случайная сила в момент времени s не зависит от ее значений в предшествующие моменты времени, т. е. в частности коммутирует с ней, получим

$$[N(t), F_N(s)] = 0. \quad (17.6.16)$$

Отсюда следует, что

$$[N, \Delta N] = 0. \quad (17.6.17)$$

Более слабый результат (17.5.13) следует из более слабого предположения

$$\langle [N(t), F_N(s)] \rangle = 0. \quad (17.6.18)$$

Действительно, это означает в соответствии с (11.2.11) независимое обращение в нуль каждого слагаемого в среднем значении коммутатора (17.6.18).

Можно думать, что после исключения σ не только справедливы перестановочные соотношения (17.6.12), но величины N_1 и N_2 вообще ведут себя как классические случайные переменные, так что, например, для всех t и u

$$[b(t), N_1(u)] = [N_1(t), N_2(u)] = 0. \quad (17.6.19)$$

Мы не можем доказать справедливость формул (17.6.19), но, к счастью, они нам не понадобятся в дальнейшем.

17.7. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Изложим общую схему расчета. Мы используем методы матрицы плотности и соотношения Эйнштейна для получения нашего «черного ящика», т. е. совокупности операторных уравнений со случайными силами, из которых для всех переменных определяются векторы смещений и коэффициенты диффузии. Для классических систем записывается уравнение Фоккера — Планка, определяемое полученными векторами смещения и коэффициентами диффузии. Мы, однако, имеем дело с квантовомеханической задачей, поэтому существен порядок расположения операторов.

Рассмотрим произвольный оператор $M(b, b^+, N_1, N_2)$, в котором проведено нормальное упорядочение, и с помощью ланжевеновских уравнений получим уравнение движения для среднего значения от этого оператора.

Используя представление когерентных состояний, можно, как это было сделано в (11.1.2), записать $\langle M \rangle$ в виде интеграла по «функциям распределения» $P(\beta, \beta^*, N_1, N_2)$. Подобно получению в разд. 5.4 и 5.5 классического уравнения Фоккера — Планка, можно с помощью интегрирования по частям превратить уравнение движения для $\langle M \rangle$ в уравнение для функции распределения P . Как было показано в гл. 11, эта функция распределения непосредственно связана с матрицей плотности, в которой проведено антинормальное упорядочение.

Для наших целей достаточно общей является следующая форма нормально упорядоченного оператора:

$$M = e^{\lambda b^+} e^{\kappa N_1} e^{\eta N_2} e^{\mu b} = M^{(n)}. \quad (17.7.1)$$

Действительно, произвольный оператор может быть записан в виде (17.7.1) как суперпозиция операторов с различными значениями параметров λ , κ , η , μ . В принципе множители, содержащие N_1 и N_2 , можно расположить в любом месте, поскольку N_1 и N_2 коммутируют как друг с другом, так и с b и b^+ . Практически, однако, детали расчета зависят от выбранного порядка, хотя ответ с точностью до величин второго порядка малости по λ , κ , η , μ оказывается тем же самым¹⁾.

Уравнение движения для среднего значения от оператора M (17.7.1) имеет вид

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \langle \frac{\Delta M}{\Delta t} \rangle; \quad \Delta M \equiv M(t + \Delta t) - M(t), \quad (17.7.2)$$

$$M(t + \Delta t) = e^{\lambda(b^+ + \Delta b^+)} e^{\kappa(N_1 + \Delta N_1)} e^{\eta(N_2 + \Delta N_2)} e^{\mu(b + \Delta b)}, \quad (17.7.3)$$

где, например,

$$\Delta b \equiv b(t + \Delta t) - b(t) = (A^b) \Delta t + \int_{t+0}^{t+\Delta t} G_b(s) ds. \quad (17.7.4)$$

Используя условие (17.6.17), можно провести факторизацию по всем переменным, например для b :

$$e^{\mu(b + \Delta b)} = e^{\mu \Delta b} e^{\mu b}. \quad (17.7.5)$$

Если использовать более слабое (и наверняка верное) условие (17.6.13), то, согласно формуле Бэйкера — Хаусдорфа [76], имеем с точностью до величин порядка μ^2

$$e^{\mu(b + \Delta b)} = e^{\mu \Delta b} e^{\mu b} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \mu^2 [b, \Delta b] + \dots \right\}. \quad (17.7.6)$$

Поправочный член, пропорциональный $[b, \Delta b]$, обращается в нуль после усреднения. Опуская с самого на-

¹⁾ Имеется, однако, различие в величинах третьего порядка малости, которое, по-видимому, исчезает при учете малого негауссового вклада в случайные силы. Чтобы увидеть это различие, нужно сравнить приведенный здесь расчет (с $N_1 = 0$) с соответствующим расчетом в работе [17].

чала поправочные члены такого типа, получим

$$M(t + \Delta t) = e^{\lambda b^+} e^{\lambda \Delta b^+} e^{\kappa N_1} e^{\kappa \Delta N_1} e^{\eta \Delta N_2} e^{\eta N_2} e^{\mu \Delta b} e^{\mu b}. \quad (17.7.7)$$

Желательно собрать все случайные силы вместе до усреднения. Поместим поэтому множители, содержащие Δb и Δb^+ , в середину формулы

$$\Delta M = e^{\lambda b^+} e^{\kappa N_1} (e^{\lambda \Delta b^+} e^{\kappa \Delta N_1} e^{\eta \Delta N_2} e^{\mu \Delta b} - 1) e^{\eta N_2} e^{\mu b}. \quad (17.7.8)$$

Такая перестановка возможна, поскольку Δb коммутирует с N_2 . Действительно, A_b и [благодаря (17.6.16) и условию $s > t$] $G_b(s)$ коммутируют с $N_2 = N_2(t)$. То же самое относится к перестановке Δb^+ и N_1).

Поскольку мы хотим вычислить величину $\langle \Delta M \rangle$ лишь с точностью до слагаемых порядка Δt , то в (заведомо хорошем) предположении о гауссовости случайных сил необходимо разложить выражение (17.7.8) с точностью до величин второго порядка. Типичные слагаемые первого порядка имеют вид

$$\langle e^{\lambda b^+} e^{\kappa N_1} \kappa \Delta N_1 e^{\eta N_2} e^{\mu b} \rangle = \kappa \langle e^{\lambda b^+} e^{\kappa N_1} \langle \Delta N_1 \rangle_t e^{\eta N_2} e^{\mu b} \rangle, \quad (17.7.9)$$

где для упрощения средних от величин, относящихся к двум моментам времени (ΔN зависит от $t + \Delta t$, а остальные оператора — от t), использовано квантовое уравнение регрессии (см. гл. 11), с помощью которого среднее от оператора в более поздний момент времени выражено через среднее от оператора в более ранний момент времени.

На классическом языке величина $\langle \Delta N_1 \rangle_t$ представляет собой условие, среднее от ΔN_1 , в предположении, что в момент времени t фиксированы величины N_1 , N_2 , b и b^+ . В квантовом случае мы не можем задавать одновременно величины b и b^+ , но можно так выбрать момент времени t , чтобы отождествить гейзенберговские и шредингеровские операторы; при этом $b(t) = b$ и $b^+(t) = b^+$

1) Заметим, что порядок множителей, выбранный в (17.7.1), не позволяет перебросить ΔN_2 через b . При этом должны возникать дополнительные слагаемые, поскольку $[A_{N_2}, b] \neq 0$. В работе [17] порядок множителей был выбран менее удачно, что привело к появлению поправочных членов [см. (5.13) в работе [11]].

перестанут быть случайными величинами. Это, однако, слова, в расчет при учете (17.2.2) тривиален:

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_1 \rangle_t &= \Delta t A_1 = \\ &= \Delta t \{ R_1 + [\omega_{12} + \pi(b^+ b + 1)] N_2 - (\Gamma_1 + \pi b^+ b) N_1 \}. \end{aligned} \quad (17.7.10)$$

В типичные слагаемые второго порядка будут входить средние вида

$$\lambda \kappa \langle \Delta b^+ \Delta N_1 \rangle_t = 2\lambda \kappa \Delta t D_{b+1}, \quad (17.7.11)$$

$$\frac{1}{2} \kappa^2 \langle (\Delta N_1)^2 \rangle_t = \kappa^2 \Delta t D_{11}, \quad (17.7.12)$$

причем диффузионные операторы D_{b+1} , D_{11} и др. были определены в разд. 17.3. Правые части выражений (17.7.10) — (17.7.12) не содержат операций усреднения, так как операторы берутся в момент времени t . Применяя уравнение о регрессии в форме (17.6.9) ко всем слагаемым, получим следующее уравнение для $\langle M \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle M \rangle}{dt} &= \langle e^{\lambda b^+} e^{\kappa N_1} [\lambda A_{b^+} + \kappa A_1 + \eta A_2 + \mu A_b + 2\lambda \kappa D_{b+1}] + \\ &+ 2\lambda \eta D_{b+2} + 2\lambda \mu D_{b+b} + 2\kappa \eta D_{12} + 2\eta \mu D_{2b} + 2\kappa \mu D_{1b} + \\ &+ \kappa^2 D_{11} + \eta^2 D_{22} \rangle e^{\eta N_2} e^{\mu b}. \end{aligned} \quad (17.7.13)$$

Одно из преимуществ выбора упорядочения операторов в виде (17.7.1) и перемещения случайных величин в середину формулы состоит в том, что если векторы смещения и коэффициенты диффузии нормально упорядочены (как это было сделано в разд. 17.2 и 17.3), то операторы в выражении (17.7.13) нормально упорядочены. Это позволяет нам записать первое слагаемое в форме, не зависящей от явного вида параметров λ , κ , η , μ :

$$e^{\lambda b^+} e^{\kappa N_1} \kappa A_1 e^{\eta N_2} e^{\mu b} = \left[\frac{\partial M}{\partial N_1} A_1 \right]_{n, y}. \quad (17.7.14)$$

Преимущество выражения (17.7.14), не зависящего от параметров, состоит в его применимости для любого произведения, содержащего операторы в показателях экспонент, и, следовательно, для произвольного опера-

тора. Используя процедуру нормального упорядочения (9.4.7), имеем

$$M(b, b^+, N_1, N_2) = \mathcal{N} [M^{(n)}(\beta, \beta^*, N_1, N_2)] \equiv \mathcal{N} \bar{M},$$

$$A_1(b, b^+, N_1, N_2) = \mathcal{N} [A_1^{(n)}(\beta, \beta^*, N_1, N_2)] \equiv \mathcal{N} \bar{A}_1, \quad (17.7.15)$$

где $M^{(n)}$ и $A_1^{(n)}$ — такие же функции своих аргументов, что и M и A_1 , но с нормально упорядоченными операторами. В этих обозначениях

$$\left[\frac{\partial M}{\partial N_1} A_1 \right]_{\text{н. у.}} = \mathcal{N} \left[\frac{\partial \bar{M}}{\partial N_1} \bar{A}_1 \right], \quad (17.7.16)$$

где черта сверху указывает, что аргументами функций являются β и β^* , а не b и b^+ . Можно теперь написать уравнение движения в не зависящем от параметров виде

$$\frac{d \langle M \rangle}{dt} = \langle Q \rangle = \langle \mathcal{N} \bar{Q} \rangle, \quad (17.7.17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{Q} \equiv & \bar{A}_{b^-} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta} + \bar{A}_{b^+} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta^*} + \bar{A}_1 \frac{\partial \bar{M}}{\partial N_1} + \bar{A}_2 \frac{\partial \bar{M}}{\partial N_2} + 2\bar{D}_{b^+1} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \beta^* \partial N_1} + \\ & + 2\bar{D}_{b^+2} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \beta^* \partial N_2} + 2\bar{D}_{b^+b} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \beta^* \partial \beta} + 2\bar{D}_{12} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial N_1 \partial N_2} + \\ & + 2\bar{D}_{1b} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial N_1 \partial \beta} + 2\bar{D}_{2b} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial N_2 \partial \beta} + \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial N_1^2} + \\ & + \bar{D}_{22} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial N_2^2} \equiv -L^+ \bar{M}. \end{aligned} \quad (17.7.18)$$

Последнее равенство в (17.7.18) служит определением дифференциального оператора L^+ .

Сравнение уравнения (17.7.17) с соответствующим классическим уравнением (6.4.3) показывает, что в квантовом случае результат содержит лишь некоторые, но не все нормально упорядоченные коэффициенты диффузии. Так, имеется слагаемое

$$2\bar{D}_{b^+b} \frac{\partial^2 M}{\partial \beta^* \partial \beta}, \quad (17.7.19)$$

а не $(\bar{D}_{b^+b} + \bar{D}_{bb^+}) \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \beta^* \partial \beta}$, которое появляется в классическом случае из-за вклада двух смешанных производных.

17.8. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА ДЛЯ ВЕЛИЧИН b, b^+, N_1, N_2

Легко обобщить формулу (11.1.5), определяющую переход от оператора плотности к классическим величинам — в нее надо лишь в качестве классических параметров включить величины N_1 и N_2 :

$$\rho(b, b^+, N_1, N_2, t) = \pi \mathcal{A} P(\beta, \beta^*, N_1, N_2, t). \quad (17.8.1)$$

Уравнение (11.1.2) заменится на

$$\langle M(t) \rangle = \text{Sp}(M\rho) = \int d\tau \bar{M}(\beta, \beta^*, N_1, N_2) P(\beta, \beta^*, N_1, N_2, t), \quad (17.8.2)$$

где

$$d\tau = d^2\beta dN_1 dN_2 \quad (17.8.3)$$

Из (17.8.2) следует, что

$$\frac{d\langle M(t) \rangle}{dt} = \int d\tau \bar{M} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (17.8.4)$$

а из (17.7.17) и (9.4.9)

$$\frac{d\langle M \rangle}{dt} = \langle Q \rangle = \text{Sp}(Q\rho) = \int d\tau \bar{Q}^{(n)} P = - \int d\tau P L^+ \bar{M}, \quad (17.8.5)$$

где оператор $L^+ \bar{M}$ определен в (17.6.18). Проинтегрируем по частям первое слагаемое в (17.8.5):

$$\int d\tau \left[\bar{A}_b \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta} P \right] = - \int d\tau \bar{M} \frac{\partial (\bar{A}_b P)}{\partial \beta}. \quad (17.8.6)$$

Сравнивая (17.8.4) с (17.8.5) и интегрируя все слагаемые по частям, находим

$$\int d\tau \bar{M} \frac{\partial P}{\partial \tau} = - \int d\tau \bar{M} L P \quad (17.8.7)$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - L P, \quad (17.8.8)$$

где L — оператор, сопряженный к определенному в (17.7.18) оператору L^+ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & \frac{\partial(\bar{A}_b P)}{\partial \beta} - \frac{\partial(\bar{A}_b^* P)}{\partial \beta^*} - \frac{\partial(\bar{A}_1 P)}{\partial N_1} - \frac{\partial(\bar{A}_2 P)}{\partial N_2} + 2 \frac{\partial^2(\bar{D}_{b+1} P)}{\partial \beta^* \partial N_1} + \\ & + 2 \frac{\partial^2(\bar{D}_{b+2} P)}{\partial \beta^* \partial N_2} + 2 \frac{\partial^2(\bar{D}_{b+b} P)}{\partial \beta \partial \beta^*} + 2 \frac{\partial^2(\bar{D}_{12} P)}{\partial N_1 \partial N_2} + \\ & + 2 \frac{\partial^2(\bar{D}_{1b} P)}{\partial N_1 \partial \beta} + 2 \frac{\partial^2(\bar{D}_{2b} P)}{\partial N_2 \partial \beta} + \frac{\partial^2(\bar{D}_{11} P)}{\partial N_1^2} + \frac{\partial^2(\bar{D}_{22} P)}{\partial N_2^2}. \end{aligned} \quad (17.8.9)$$

В разд. 17.2 и 17.3 мы уже записывали векторы смещения A_i и коэффициенты диффузии D_{ij} в нормально упорядоченном виде. Соответствующие классические функции \bar{A}_i и \bar{D}_{ij} имеют тот же вид, лишь b и b^* заменены соответственно на β и β^* . Поэтому полное уравнение Фоккера — Планка имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{1}{2}(1-i\alpha) \frac{\partial}{\partial \beta} \{[\pi(N_2 - N_1) - \gamma] \beta P\} - \\ & -\frac{1}{2}(1+i\alpha) \frac{\partial}{\partial \beta^*} \{[\pi(N_2 - N_1) - \gamma] \beta^* P\} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \beta^* \partial \beta} [(\gamma \bar{n} + \pi N_2) P] - \\ & - \frac{\partial}{\partial N_1} \{[R_1 + (\omega_{12} + \pi) N_2 - \Gamma_1 N_1] P + \pi(N_2 - N_1) \beta P \beta^*\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial N_2} \{[R_2 + \omega_{21} N_1 - (\Gamma_2 + \pi) N_2] P - \pi(N_2 - N_1) \beta P \beta^*\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N_1^2} \{[R_1 + (\omega_{12} + \pi) N_2 + \Gamma_1 N_1] P + \pi(N_2 + N_1) \beta P \beta^*\} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial N_2^2} \{[R_2 + \omega_{21} N_1 + (\Gamma_2 + \pi) N_2] P + \pi(N_2 + N_1) \beta P \beta^*\} - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial N_1 \partial N_2} \{(\omega_{12} N_2 - \omega_{21} N_1 + \pi N_2) P + \pi(N_2 + N_1) \beta P \beta^*\} + \\ & + \frac{\partial^2(\pi N_2 \beta P)}{\partial N_1 \partial \beta} + \frac{\partial^2(\pi N_2 \beta^* P)}{\partial \beta^* \partial N_1} - \frac{\partial^2(\pi N_2 \beta P)}{\partial N_2 \partial \beta} - \frac{\partial^2(\pi N_2 \beta^* P)}{\partial \beta^* \partial N_2}. \end{aligned} \quad (17.8.10)$$

17.9. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ρ В ОПЕРАТОРНОЙ ФОРМЕ

Несмотря на то что (17.8.10) представляет собой уравнение для c -чисел, входящие в него множители расположены в антинормальном порядке. Поэтому если использовать введенное в (11.1.5) определение $\pi\mathcal{A}$ для оператора антинормального упорядочения, то остается лишь заменить β на b и β^* на b^+ . Например,

$$\pi\mathcal{A} \left[\frac{\partial(\beta P)}{\partial\beta} \right] = \frac{\partial(b\rho^{(a)})}{\partial b} = [b\rho, b^+], \quad (17.9.1)$$

так как $\rho^{(a)}$ представляет собой ρ , записанное в антинормально упорядоченном виде. Тогда после замены $P \rightarrow \rho$, $\beta \rightarrow b$, $\beta^* \rightarrow b^+$ (17.8.10) будет являться правильным операторным уравнением.

Перегруппируем теперь слагаемые в уравнении (17.8.10), чтобы отделить выражения, пропорциональные $i\alpha$, γ , $\gamma\bar{n}$, N_2 и N_1 . В операторной форме имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} = & i \left(\frac{1}{2} \alpha\gamma \right) \left[1 - \frac{\pi}{\gamma} (N_2 - N_1) \right] \left[\frac{\partial(\rho b^+)}{\partial b^+} - \frac{\partial(b\rho)}{\partial b} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \gamma \left[\frac{\partial(\rho b^+)}{\partial b^+} + \frac{\partial(b\rho)}{\partial b} \right] + \gamma\bar{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial b \partial b^+} + \\ & + \frac{1}{2} \pi N_2 \left[2 \frac{\partial^2\rho}{\partial b \partial b^+} - \frac{\partial(b\rho)}{\partial b} - \frac{\partial(\rho b^+)}{\partial b^+} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \pi N_1 \left[\frac{\partial(b\rho)}{\partial b} + \frac{\partial(\rho b^+)}{\partial b^+} \right] + \text{С. П. Н.}, \quad (17.9.2) \end{aligned}$$

где символ (С.П.Н.) означает слагаемые, содержащие производные от населенностей. Используя равенство (3.3.6) $\frac{1}{2} \alpha\gamma = \omega_0 - \omega_c$ и заменяя все производные коммутаторами, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} = & i(\omega_0 - \omega_c) \left[1 - \frac{\pi}{\gamma} (N_2 - N_1) \right] [b^+ b, \rho] + \\ & + \frac{1}{2} \gamma [2b\rho b^+ - b^+ b\rho - \rho b^+ b] + \\ & + \gamma\bar{n} (b\rho b^+ + b^+ \rho b - \rho b^+ b - b b^+ \rho) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \pi N_2 (2b^+ \rho b - b b^+ \rho - \rho b b^+) + \\
& + \frac{1}{2} \pi N_1 (2b \rho b^+ + b^+ b \rho - \rho b^+ b) + \text{С. П. Н.} \quad (17.9.3)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} = & i(\omega_0 - \omega_c) \left[1 - \frac{\pi}{\gamma} (N_2 - N_1) \right] [b^+ b, \rho] + \\
& + \frac{1}{2} (\pi N_2 + \gamma \bar{n}) (2b^+ \rho b - b b^+ \rho - \rho b b^+) + \\
& + \frac{1}{2} [\pi N_1 + \gamma (\bar{n} + 1)] (2b \rho b^+ - b^+ b \rho - \rho b^+ b) + \text{С. П. Н.} \quad (17.9.4)
\end{aligned}$$

Слагаемые с производными от населенностей могут быть записаны через $\exp\left(\pm \frac{\partial}{\partial N_1}\right)$ и $\exp\left(\pm \frac{\partial}{\partial N_2}\right)$, правильно передающие все слагаемые с первыми и вторыми производными:

$$\begin{aligned}
\text{С. П. Н.} = & \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] R_2 \rho + \\
& + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] [(\Gamma_2 - \omega_{12}) N_2 \rho] + \\
& + \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial N_1}\right) - 1 \right] R_1 \rho + \\
& + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_1}\right) - 1 \right] [(\Gamma_1 - \omega_{21}) N_1 \rho] + \\
& + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2}\right) - 1 \right] (\omega_{21} N_1 \rho + \pi N_1 b \rho b^+) + \\
& + \left[\exp\left(\frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1}\right) - 1 \right] (\omega_{12} N_2 \rho + \pi N_2 b^+ \rho b). \quad (17.9.5)
\end{aligned}$$

Разность $(\Gamma_2 - \omega_{12})$ введена для того, чтобы не учитывать дважды слагаемые типа ω_2 (один раз в ω_{12} , а другой как часть от Γ_2). Совокупность антинормально упорядоченных слагаемых объединена в следующее выражение:

$$b \rho b^+ + \rho - \frac{\partial (b \rho)}{\partial b} - \frac{\partial (\rho b^+)}{\partial b^+} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial b \partial b^+} \equiv b^+ \rho b, \quad (17.9.6)$$

которое входит в последнее (не упорядоченное антинормально) слагаемое в (17.9.5). Обратим внимание на симметрию выражений (17.9.4) и (17.9.5) относительно преобразований $N_1 \leftrightarrow N_2$, $b \leftrightarrow b^+$, $\bar{n} \leftrightarrow (\bar{n} + 1)$, которые меняют местами верхнее и нижнее состояния (для атомов и резервуара), а также процессы поглощения и излучения.

17.10. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ В n -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Для некоторых задач полезнее представление чисел фотонов, поэтому перепишем уравнение (17.9.4) в виде уравнения для m, n -элемента матрицы плотности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = & i(\omega_0 - \omega_c) \left[1 - \frac{\pi}{\gamma} (N_2 - N_1) \right] (m - n) \rho_{mn} + \\ & + \frac{1}{2} (\pi N_2 + \gamma \bar{n}) \left[2(mn)^{1/2} \rho_{m-1, n-1} - (m + n + 2) \rho_{m, n} \right] + \\ & + \frac{1}{2} [\pi N_1 + \gamma (\bar{n} + 1)] \times \\ & \times \left[2(m + 1)^{1/2} (n + 1)^{1/2} \rho_{m+1, n+1} - (m + n) \rho_{mn} \right] + \\ & + \left[\exp \left(-\frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] R_2 \rho_{mn} + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] (\Gamma_2 - \omega_{12}) N_2 \rho_{mn} + \\ & + \left[\exp \left(-\frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] R_1 \rho_{mn} + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] (\Gamma_1 - \omega_{12}) N_1 \rho_{mn} + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] \omega_{21} N_1 \rho_{mn} + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] \omega_{12} N_2 \rho_{mn} + \\ & + \pi \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] N_2 (mn)^{1/2} \rho_{m-1, n-1} + \\ & + \pi \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] N_1 (m + 1)^{1/2} (n + 1)^{1/2} \rho_{m+1, n+1}. \end{aligned} \quad (17.10.1)$$

Для вычисления флуктуаций числа фотонов достаточно рассмотреть лишь диагональные элементы. Подставляя в (17.10.1) $m = n$ и обозначая ρ_{nn} через ρ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} = & (\pi N_2 + \gamma \bar{n}) [n \rho_{n-1} - (n+1) \rho_n] + \\ & + [\pi N_1 + \gamma (\bar{n} + 1)] [(n+1) \rho_{n+1} - n \rho_n] + \\ & + \left[\exp \left(-\frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] R_2 \rho_n + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] (\Gamma_2 - \omega_{12}) N_2 \rho_n + \left[\exp \left(-\frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] R_1 \rho_n + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] (\Gamma_1 - \omega_{21}) N_1 \rho_n + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] \omega_{21} N_1 \rho_n + \\ & + \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] \omega_{12} N_2 \rho_n + \\ & + \pi \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1} \right) - 1 \right] N_2 n \rho_{n-1} + \\ & + \pi \left[\exp \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) - 1 \right] N_1 (n+1) \rho_{n+1}. \end{aligned} \quad (17.10.2)$$

Этот результат подтверждает правильность проведенного выше полуклассического вывода уравнения (17.4.4) для функции $\mu(P, N_1, N_2, t)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести замену $\rho \rightarrow \mu$ $n \rightarrow p$.

17.11. ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ И НАСЕЛЕННОСТЕЙ: СООТВЕТСТВУЮЩИЙ «КЛАССИЧЕСКИЙ» СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Для удобства исключения в следующем разделе переменных N_1 и N_2 с помощью адиабатического приближения удобно свести процесс Фоккера — Планка (17.8.10) в переменных β, β^*, N_1 и N_2 к ланжевеновскому процессу. Как указывалось в разд. 6.4, можно непосредственно получить векторы смещения A_i и коэффициенты диффузии D_{ij} для ланжевеновского процесса из коэффициентов соответствующего уравнения Фоккера — Планка (6.4.6). Взяв эти коэффициенты из уравнения (17.8.10),

получим для интересующего нас ланжевенковского процесса

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} (1 - i\alpha) \beta [\pi (N_2 - N_1) - \gamma] + \bar{G}_\beta, \quad (17.11.1)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1 + [\omega_{12} + \pi (I + 1)] N_2 - (\Gamma_1 + \pi I) N_1 + \bar{G}_1, \quad (17.11.2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2 + (\omega_{21} + \pi I) N_1 - [\Gamma_2 + \pi (I + 1)] N_2 + \bar{G}_2, \quad (17.11.3)$$

где

$$I \equiv |\beta|^2. \quad (17.11.4)$$

Черточки над G напоминают, что мы имеем дело со случайными силами, являющимися c -числами, причем их вторые моменты не зависят от порядка, в котором написаны величины G .

Приведем некоторые типичные коэффициенты диффузии, полученные из уравнения (17.8.10):

$$\langle \bar{G}_\beta(t)^* \bar{G}_\beta(u) \rangle = \langle \bar{G}_\beta(u) \bar{G}_\beta^*(t)^* \rangle = 2\bar{D}_{\beta^*\beta} \delta(t - u),$$

$$\langle \bar{G}_1(t) \bar{G}_1(u) \rangle = \langle \bar{G}_1(u) \bar{G}_1(t) \rangle = 2\bar{D}_{11} \delta(t - u), \quad (17.11.5)$$

где

$$2\bar{D}_{\beta^*\beta} = \gamma \bar{n} + \pi N_2, \quad 2\bar{D}_{\beta\beta} = 2\bar{D}_{\beta^*\beta^*} = 0, \quad (17.11.6)$$

$$2\bar{D}_{11} = R_1 + \bar{\omega}_{12} N_2 + \Gamma_1 N_1 + \pi (I + 1) N_2 + \pi I N_1.$$

Нет необходимости выписывать все коэффициенты диффузии, так как они сразу получаются из операторных выражений (17.3.20) — (17.3.29), если заменить b на β и b^+ на β^* . Такая простота перехода связана с тем, что диффузионные операторы в (17.3.20) — (17.3.29) уже записаны в нормально упорядоченном виде. Поэтому существенны лишь те операторы коэффициентов диффузии, которые имеют индексы, расположенные в следующем порядке: b^+ , 1, 2, b . В частности, справедливы следующие соотношения для нормально упорядоченных величин:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \mathcal{N} \bar{D}_{11}, & D_{b^+b} &= \mathcal{N} \bar{D}_{\beta^*\beta} = \mathcal{N} \bar{D}_{\beta\beta^*}, \\ D_{1b} &= \mathcal{N} \bar{D}_{1\beta} = \mathcal{N} \bar{D}_{\beta 1}. \end{aligned} \quad (17.11.7)$$

В заключение заметим, что величина \bar{D}_{ij} симметрична относительно перестановки индексов, поэтому когда индексы записаны в порядке, соответствующем нормальному упорядочению, то они связаны с оператором D_{ij} , к которому применен оператор \mathcal{N} нормального упорядочения.

17.12. ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ: ИСКЛЮЧЕНИЕ ВЕЛИЧИН N_1 И N_2 С ПОМОЩЬЮ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Если населенности приходят в равновесие быстрее, чем происходят флуктуации поля, то можно с помощью адиабатического приближения исключить N_1 и N_2 из классических уравнений движения (17.11.1) — (17.11.3), сводя тем самым задачу лишь к полевым переменным. Адиабатическое исключение переменных означает выполнение условий $\frac{dN_1}{dt} = 0$ и $\frac{dN_2}{dt} = 0$, что эквивалентно пренебрежению производными d/dt по сравнению с Γ_1 или Γ_2 . Тогда уравнения (17.11.1) и (17.11.3) сведутся к

$$\Gamma'_1 N_1 - \omega'_{12} N_2 = R_1 + \bar{G}_1, \quad (17.12.1)$$

$$-\omega'_{21} N_1 + \Gamma'_2 N_2 = R_2 + \bar{G}_2, \quad (17.12.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= \Gamma_1 + \pi I; & \omega'_{21} &= \omega_{21} + \pi I, \\ \Gamma'_2 &= \Gamma_2 + \pi(I + 1); & \omega'_{12} &= \omega_{12} + \pi(I + 1). \end{aligned} \quad (17.12.3)$$

Адиабатические значения величин N_1 и N_2 , полученные из решения уравнений (17.12.1) и (17.12.2), равны

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 + \bar{G}_1 & -\omega'_{12} \\ R_2 + \bar{G}_2 & \Gamma'_2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} [(R_1 + \bar{G}_1) \Gamma'_2 + \omega'_{12} (R_2 + \bar{G}_2)] \end{aligned} \quad (17.12.4)$$

и

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Gamma'_1 & R_1 + \bar{G}_1 \\ -\omega'_{21} & R_2 + \bar{G}_2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} [(R_2 + \bar{G}_2) \Gamma'_1 + \omega'_{21} (R_1 + \bar{G}_1)], \end{aligned} \quad (17.12.5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Gamma'_2 & -\omega'_{12} \\ -\omega'_{21} & \Gamma'_2 \end{vmatrix} = \Gamma'_2 \Gamma'_2 - \omega'_{12} \omega'_{21} = \quad (17.12.6)$$

$$= \Gamma_1 \Gamma_2 + \pi [(\Gamma_1 - \omega_{21})(l+1) + (\Gamma_2 - \omega_{12})l] - \omega_{12} \omega_{21}. \quad (17.12.7)$$

Тогда для разности населенностей получим

$$N_2 - N_1 = (R_2 + \bar{G}_2) J_2 - (R_1 + \bar{G}_1) J_1, \quad (17.12.8)$$

где

$$J_2 = \frac{\Gamma'_1 - \omega'_{12}}{\Delta} = \frac{\Gamma_1 - \omega_{12} - \pi}{\Delta}, \quad (17.12.9)$$

$$J_1 = \frac{\Gamma'_2 - \omega'_{21}}{\Delta} = \frac{\Gamma_2 - \omega_{21} + \pi}{\Delta}. \quad (17.12.10)$$

Так как число фотонов l значительно больше единицы, а $\frac{\pi}{\omega_{12}}$, $\frac{\pi}{\omega_{21}}$, $\frac{\pi}{\Gamma_1}$, $\frac{\pi}{\Gamma_2}$ — величины порядка 10^{-8} , то уравнения (17.12.7), (17.12.9) и (17.12.10) сводятся к виду

$$J_2 \approx \frac{\Gamma_1 - \omega_{12}}{\Delta}, \quad (17.12.11)$$

$$J_1 \approx \frac{\Gamma_2 - \omega_{21}}{\Delta}, \quad (17.12.12)$$

где

$$\Delta \approx \Gamma_1 \Gamma_2 + \pi l (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{21} - \omega_{12}) - \omega_{12} \omega_{21}. \quad (17.12.13)$$

Из выражений (17.12.4) и (17.12.5) можно найти среднее число атомов, находящихся на уровне 1 и на уровне 2 (при данном числе фотонов l):

$$\bar{N}_2 \equiv \langle N_2 \rangle \approx \frac{1}{\Delta} [R_2 (\Gamma_1 + \pi l) + (\omega_{21} + \pi l) R_1], \quad (17.12.14)$$

$$N_1 \equiv \langle N_1 \rangle \approx \frac{1}{\Delta} [R_1 (\Gamma_2 + \pi l) + (\omega_{12} + \pi l) R_2]. \quad (17.12.15)$$

17.13. ЛАНЖЕВЕНОВСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РАБОЧИХ УРОВНЯХ

Подставляя выражение для $N_2 - N_1$ (17.11.8) в уравнение (17.11.1), получим ланжевеновское уравнение для поля

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} (1 - i\alpha) \beta [-\gamma + \pi (R_2 J_2 - R_1 J_1) + \pi (J_2 \bar{G}_2 - J_1 \bar{G}_1)] + \bar{G}_\beta. \quad (17.13.1)$$

Удобнее записать это уравнение в следующем виде:

$$\frac{d\beta}{dt} = A_\beta + F_\beta, \quad (17.13.2)$$

где A_β — вектор смещения, а F_β — случайная сила. Итак, нам нужно вычислять выражения вида $\langle \beta J_2 \bar{G}_2 \rangle$. С помощью развитого в разд. 6.4 метода получим

$$\begin{aligned} \langle \beta J_2(t) \bar{G}_2 \rangle &= \left\langle \int_{t_c}^t \frac{d(\beta J_2)}{ds} ds \bar{G}_2(t) \right\rangle = \\ &= \left(J_2 + \beta \frac{dJ_2}{d\beta} \right)_c \int_{t_c}^t ds \langle \bar{G}_\beta(s) \bar{G}_2(t) \rangle + \left(\beta \frac{dJ_2}{d\beta} \right)_c \int_{t_c}^t ds \langle \bar{G}_\beta(s)^* \bar{G}_2(t) \rangle = \\ &= \left(J_2 + I \frac{\partial J_2}{\partial I} \right) \bar{D}_{\beta 2} + \beta^2 \frac{\partial J_2}{\partial I} \bar{D}_{\beta^* 2} = -\pi N_2 \beta \left[J_2 + 2I \frac{\partial J_2}{\partial I} \right], \end{aligned} \quad (17.13.3)$$

где использована формула (17.12.14) для N_2 .

Сравнивая (17.13.3) с соответствующим типичным слагаемым в выражении для вектора смещения, видим, что выражение (17.13.3) включает добавочный множитель, $\pi/\Gamma \sim 10^{-8}$, где Γ порядка Γ_1 или Γ_2 . Поэтому можно опустить малый поправочный член в формуле (17.13.3), что дает

$$A_\beta = \frac{1}{2} (1 - i\alpha) \beta [-\gamma + \pi (R_2 J_2 - R_1 J_1)]. \quad (17.13.4)$$

Для случайной силы F_β в уравнении (17.13.2) получим

$$F_\beta = \bar{G}_\beta + \frac{1}{2} (1 - i\alpha) \pi \beta_c (J_{2c} \bar{G}_2 - J_{1c} \bar{G}_1), \quad (17.13.5)$$

где индекс s , как и формула (6.4.13), означает, что используется значение случайной переменной в несколько более ранний момент времени $t - \varepsilon$. Рассмотрим коррелятор случайных сил

$$\langle F_\beta(t^*) F_\beta(u) \rangle = 2D_{\beta^*\beta}^F \delta(t - u). \quad (17.13.6)$$

Коэффициенты диффузии для величин F_β и \bar{G}_β оказываются, согласно (17.13.5), связанными друг с другом:

$$2D_{\beta^*\beta}^F = 2\bar{D}_{\beta^*\beta} + \frac{1}{2}(1 + \alpha^2)\pi^2|\beta|^2 K + \frac{1}{2}(1 + i\alpha)\pi\beta^* L + \frac{1}{2}(1 - i\alpha)\pi\beta L^*, \quad (17.13.7)$$

$$2D_{\beta\beta}^F = \frac{1}{2}(1 - i\alpha)^2\pi^2\beta^2 K + (1 - i\alpha)\pi\beta L, \quad (17.13.8)$$

$$2D_{\beta^*\beta^*}^F = 2(D_{\beta\beta}^F)^*, \quad (17.13.9)$$

где

$$2\bar{D}_{\beta^*\beta} = \gamma\bar{n} + \pi\bar{N}_2, \quad (17.13.10)$$

$$2K = J_2^2 2\bar{D}_{22} + J_1^2 2\bar{D}_{11} - 2J_1 J_2 2\bar{D}_{12} = \\ = J_2^2 \{ (R_2 + \omega_{21}\bar{N}_1 + \pi I \bar{N}_1) + [\Gamma_2 \bar{N}_2 + \pi(I + 1)\bar{N}_2] \} + \\ + J_1^2 \{ [R_1 + \omega_{12}\bar{N}_2 + \pi(I + 1)\bar{N}_2] + [\Gamma_1 \bar{N}_1 + \pi I \bar{N}_1] \} + \\ + 2J_1 J_2 \{ [\omega_{12}\bar{N}_2 + \pi(I + 1)\bar{N}_2] + [\omega_{21}\bar{N}_1 + \pi I \bar{N}_1] \}, \quad (17.13.11)$$

$$L = J_2(2\bar{D}_{2\beta}) - J_1(2\bar{D}_{1\beta}) = -\pi\beta N_2(J_2 + J_1). \quad (17.13.12)$$

Входящие в приведенную выше формулу (17.13.11) для K переменные \bar{N}_1 и \bar{N}_2 являются стационарными адиабатическими величинами, определяемыми соотношениями (17.12.4), (17.12.5). В случае стационарных состояний можно упростить приведенные формулы, если учесть равенство скоростей прихода и ухода:

$$R_2 + \omega_{21}\bar{N}_1 + \pi I \bar{N}_1 = \Gamma_2 \bar{N}_2 + \pi(I + 1)\bar{N}_2,$$

$$R_1 + \omega_{12}\bar{N}_2 + \pi(I + 1)\bar{N}_2 = \Gamma_1 \bar{N}_1 + \pi I \bar{N}_1. \quad (17.13.13)$$

Стохастические процессы (17.13.4) — (17.13.9) правильно описывают все рабочие уровни лазера. Мы пренебрегли слагаемыми порядка π/Γ_2 , но сохраняли величины порядка $\pi I/\Gamma_2$, так что полученные результаты справедливы даже для очень высоких рабочих уровней.

17.14. ОБЛАСТЬ ВБЛИЗИ ПОРОГА

Изученные в прошлом разделе ланжевеновские процессы могут быть сильно упрощены в области

$$I \ll \frac{\Gamma_2}{\pi}, \frac{\Gamma_1}{\pi}. \quad (17.14.1)$$

Эта область начинается с полного отсутствия фотонов и простирается до чисел фотонов, соответствующих области значительно выше порога возбуждения, поскольку Γ_i/π порядка 10^8 , а порог $I \sim \sqrt{\Gamma/\pi}$.

Учитывая неравенство (17.14.1), можно записать приближенные выражения для равенств (17.12.11) и (17.12.12):

$$J_2 \approx \frac{\Gamma_1 - \omega_{12}}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} \left[1 - \frac{\pi (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{21} - \omega_{12})}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} I \right], \quad (17.14.2)$$

$$J_1 \approx \frac{\Gamma_2 - \omega_{21}}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} \left[1 - \frac{\pi (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{21} - \omega_{12})}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} I \right]. \quad (17.14.3)$$

Здесь использовано условие малости вероятностей перехода ω_{ki} по сравнению со всей величиной Γ_i . В рассматриваемой области можно приближенно записать ланжевеновское уравнение для поля β в следующей простой форме:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} (1 - i\alpha) \beta \gamma [\Pi - R_0 |\beta|^2] + F_\beta, \quad (17.14.4)$$

где

$$\Pi = \frac{\pi}{\gamma} \frac{R_2 (\Gamma_1 - \omega_{12}) - R_1 (\Gamma_2 - \omega_{21})}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} - 1, \quad (17.14.5)$$

$$R_0 = \frac{\pi}{\gamma} \frac{R_2 (\Gamma_1 - \omega_{12}) - R_1 (\Gamma_2 - \omega_{21})}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} \cdot \frac{\pi (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{12} - \omega_{21})}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}}. \quad (17.14.6)$$

Из (17.13.5) следует, что

$$F_\beta \approx \bar{G}_\beta. \quad (17.14.7)$$

Коэффициенты диффузии для ланжевеновского процесса (17.14.4) определяются теперь выражением

(17.11.6):

$$2D_{\beta\beta}^F = 2D_{\beta^*\beta^*}^F = 0, \quad (17.14.8)$$

$$2D_{\beta^*\beta}^F = 2D_{\beta\beta^*}^F = \gamma\bar{n} + \pi\bar{N}_2 \quad (17.14.9)$$

или при учете (17.12.15) и (17.14.1)

$$2D_{\beta^*\beta}^F = 2D_{\beta\beta^*}^F \approx \gamma\bar{n} + \frac{\pi(R_2\Gamma_1 + \omega_{21}R_1)}{\Gamma_1\Gamma_2 - \omega_{12}\omega_{22}}. \quad (17.14.10)$$

17.15. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ**ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ****В ПРИБЛИЖЕНИИ ВОЛН ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ**

Уравнение Ланжевена (17.14.4) приближенно сводится при сохранении нелинейности к уравнению для осциллятора Ван дер Поля, упрощенному с помощью приближения волн вращающейся поляризации. Как и в разд. 7.3, сведем это уравнение к канонической форме с помощью обезразмеривания поля β и времени t :

$$\beta = \xi a, \quad (17.15.1)$$

$$t = T\tau. \quad (17.15.2)$$

Параметры ξ и T выбраны так, чтобы новые безразмерные переменные a и τ удовлетворяли уравнению Ланжевена

$$\frac{da}{d\tau} = (1 - ia)(p - |a|^2)a + h(\tau) \quad (17.15.3)$$

с простым коэффициентом диффузии

$$\langle h(\tau)^* h(\tau') \rangle = 4\delta(\tau - \tau'). \quad (17.15.4)$$

Условие $|a^2| = 1$ приводит к следующим равенствам:

$$\frac{1}{2} \gamma TR_0 \xi^2 = 1, \quad p = \frac{1}{2} \gamma T \Pi, \quad (17.15.5)$$

а из выражения (17.15.4) для коэффициента диффузии находим

$$\left(\frac{T}{\xi}\right)^2 (2D_{\beta^*\beta}) \frac{1}{T} = 4. \quad (17.15.6)$$

Из уравнений (17.15.5) и (17.15.6) можно найти параметры ξ и T , с помощью которых проводится обезразмеривание:

$$\xi^2 = \left(\frac{D_{\beta\beta}^F}{\gamma R_0} \right)^{1/2}, \quad (17.15.7)$$

$$T = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{R_0 D_{\beta\beta}^F} \right)^{1/2}. \quad (17.15.8)$$

Подставляя формулы (17.14.10), (17.14.6) для величин $D_{\beta\beta}^F \approx \bar{D}_{\beta\beta}$ и R_0 в (17.15.7), получаем для области вблизи и выше, но не слишком далеко от порога возбуждения

$$\xi^2 = \left\{ \frac{\left[\frac{1}{2} \gamma \bar{n} + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R_2 \Gamma_1 + \omega_{21} R_1}{\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21}} \right) \right] (\Gamma_1 \Gamma_2 - \omega_{12} \omega_{21})^2}{\pi [R_2 (\Gamma_1 - \omega_{12}) - R_1 (\Gamma_2 - \omega_{21})] \pi (\Gamma_1 + \Gamma_2 - \omega_{21} - \omega_{12})} \right\}^{1/2}. \quad (17.15.9)$$

В предположении об отсутствии прямых безызлучательных переходов между уровнями 1 и 2, т. е.

$$\omega_{12} \approx \omega_{21} \approx 0, \quad (17.15.10)$$

упрощается выражение для параметра

$$\xi^2 \approx \left[\frac{\frac{1}{2} \left(\gamma \bar{n} + \pi \frac{R_2}{\Gamma_2} \right) (\Gamma_1 \Gamma_2)^2}{\pi (R_2 \Gamma_1 - R_1 \Gamma_2) \pi (\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right]^{1/2} = \quad (17.15.11)$$

$$= \left[\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi (\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right]^{1/2} \left[\frac{R_2/\Gamma_2 + \gamma \bar{n}/\pi}{R_2/\Gamma_2 - R_1/\Gamma_1} \right]^{1/2}. \quad (17.15.12)$$

Из выражения (17.14.5) в приближении (17.15.10) находим

$$\Pi = \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{R_2}{\Gamma_2} - \frac{R_1}{\Gamma_1} \right) - 1. \quad (17.15.13)$$

При достижении порога возбуждения $\Pi = 0$ и

$$\left(\frac{R_2}{\Gamma_2} - \frac{R_1}{\Gamma_1} \right)_{\substack{\text{порог} \\ \rho = \Pi = 0}} = \frac{\gamma}{\pi}. \quad (17.15.14)$$

Для простого случая

$$R_1 \approx 0 \quad (17.15.15)$$

из выражения (17.15.4) видно, что порог достигается при

$$(R_2)_{\text{порог}} \sim \frac{\gamma \Gamma_2}{\pi}. \quad (17.15.16)$$

Тогда из (17.14.14) — (17.14.16) находим

$$\xi^2 \approx \left[\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right]^{1/2} \left[1 + \frac{\bar{n} (R_2)_{\text{порог}}}{R_2} \right]^{1/2}. \quad (17.15.17)$$

В области вблизи порога возбуждения (17.15.17) сводится к

$$\xi^2 \approx \left[\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right]^{1/2} (1 + \bar{n})^{1/2}. \quad (17.15.18)$$

Для другого обезразмеривающего параметра T в области вблизи порога возбуждения имеем, согласно (17.15.5), (17.14.6), (17.15.15), (17.15.16), (17.15.18),

$$\frac{1}{2} \gamma T = \left[\frac{2\Gamma_1 \Gamma_2}{\pi(\Gamma_1 + \Gamma_2)} \right]^{1/2} (1 + \bar{n})^{-1/2}. \quad (17.15.19)$$

Здесь, в гл. 7 и в работе [5] проводилось подробное изучение обезразмеренного уравнения (17.15.3) для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации. Численные решения уравнения Фоккера — Планка (7.6.9), (7.7.3), приведенные в работе [6], позволили точно рассчитать спектры амплитудного и фазового шума лазера вблизи порога возбуждения.

18. ФЛУКТУАЦИИ ПРИ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИИ

Теперь мы можем продолжить начатое в разд. 11.4 обсуждение проблемы фотодетектирования.

18.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Напомним прежде всего содержание разд. 11.4.

Как было выяснено в разд. 11.4, вероятность $p(m, T)$ отсчета m фотонов за интервал времени T равна

$$p(m, T) = \langle T_{\mathcal{N}} \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega} \rangle. \quad (18.1.1)$$

Здесь $T_{\mathcal{N}}$ — оператор хронологического и нормального упорядочения, а

$$\Omega = \varepsilon \int_0^T b^+(s) b(s) ds, \quad (18.1.2)$$

где ε — эффективный множитель. Из определения величины $p(m, T)$ следует, что среднее число отсчетов $\langle m \rangle$ определяется равенством

$$\langle m \rangle = \sum_m m p(m, T). \quad (18.1.3)$$

Согласно формуле (18.1.2), величина $\langle m \rangle$ может быть записана в виде

$$\langle m \rangle = \langle \Omega \rangle. \quad (18.1.4)$$

В предположении о постоянстве в течение интервала T среднего числа отсчетов за единицу времени можно свести выражение (18.1.4) к виду

$$\langle m \rangle = \varepsilon \langle b^+ b \rangle T, \quad (18.1.5)$$

$$= \omega T. \quad (18.1.6)$$

Равенство (18.1.6) является определением средней скорости отсчета ω . Как показано в разд. 11.4, если определить величину Ω' равенством

$$\Omega' = \varepsilon \int_0^T |\beta(s)|^2 ds, \quad (18.1.7)$$

то выражение (18.1.1) для $p(m, T)$ может быть записано в виде «классического» среднего значения

$$p(m, T) = \left\langle \frac{(\Omega')^m}{m!} e^{-\Omega'} \right\rangle = \quad (18.1.8)$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!} \left[\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^m M(\lambda, T) \right]_{\lambda=1} = \quad (18.1.9)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{M(\lambda, T)}{(1-\lambda)^{m+1}} d\lambda, \quad (18.1.10)$$

где производящая функция

$$M(\lambda, T) = \langle e^{-\lambda Q'} \rangle = \left\langle e^{-\lambda \varepsilon \int_0^T |\beta(s)|^2 ds} \right\rangle \quad (18.1.11)$$

обозначалась Глаубером [54, 77] через $Q(\lambda, T)$. Обозначение $M(\lambda, T)$ согласуется с обозначениями, введенными в разделе 5.8, и не создает путаницы в связи с используемыми нами различными значениями величины Q .

Проведенное нами в (18.1.8) — (18.1.11) сведение проблемы счета фотонов к изучению статистики соответствующего «классического» случайного процесса несколько более общее, чем аналогичная процедура Глаубера [54, 77] и Манделя и Вольфа [31]. Эти исследователи предположили, что операторы b и b^+ либо являются свободными полевыми переменными, либо могут быть представлены в виде суперпозиции таких переменных. Наши величины b и b^+ (или β и β^*) удовлетворяют связанным нелинейным уравнениям, в которых содержатся также стохастические величины, обусловленные взаимодействием с резервуаром. Несмотря на это различие, можно ожидать совпадения наших результатов для лазера ниже порога возбуждения с результатами указанных выше авторов, поскольку: 1) ниже порога наши

уравнения в хорошем приближении становятся линейными; 2) в линейной области ширина (однородно-уширенной) линии Λ_a рассматриваемого нами осциллятора может в смысле счета фотонов оказаться похожей на случай неоднородного уширения. С этой целью оператор b представляется в виде линейной комбинации осцилляторов с таким распределением лоренцевых ширин линий, чтобы обеспечить согласование с Λ_a ; 3) в области значительно ниже порога рассматриваемые нами и другими авторами процессы являются гауссовыми, т. е. совпадают высшие моменты, так как вторые моменты (спектры) уже согласованы.

Заметим, что

$$\langle | \beta |^{2n} \rangle = \langle T_{\mathcal{J}} (b^+ b)^n \rangle = \quad (18.1.12)$$

$$= \langle (b^+)^n (b)^n \rangle. \quad (18.1.13)$$

Это выражение представляет собой хорошо известное факторизованное произведение

$$\begin{aligned} \langle | \beta |^{2n} \rangle = \\ = (b^+ b) (b^+ b - 1) (b^+ b - 2) \dots (b^+ b - n + 1). \end{aligned} \quad (18.1.14)$$

Таким образом, моменты для классической задачи представляют собой хронологически и нормально упорядоченные моменты для квантовомеханической задачи. Они представляют собой как раз те факторизованные моменты, которые обычно измеряются экспериментаторами ¹⁾.

18.2. ПРЕДЕЛ МАЛЫХ ВРЕМЕН

Рассмотрим эксперименты, в которых

$$\Lambda_a T \ll 1, \quad (18.2.1)$$

где Λ_a^{-1} время затухания флуктуаций амплитуды, а T — время измерения. Можно думать, что в этом предельном

¹⁾ Эксперименты по счету фотонов с помощью изучения их поглощения должны давать нулевые отсчеты в случае вакуума, поэтому в этих экспериментах измеряются нормально упорядоченные операторы, которые автоматически приводят к нулевому отсчету в случае вакуума.

случае

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\beta(s)|^2 ds \approx |\beta|^2. \quad (18.2.2)$$

Тогда с помощью (18.1.11) и (11.1.2) находим для производящей функции $M(\lambda, T)$:

$$M(\lambda, T) = \int e^{-\lambda T e^{|\beta|^2}} P(\beta) d^2\beta, \quad (18.2.3)$$

где, как и в разд. 11.1, величина

$$P(\beta, \beta^*) \equiv P(\beta) \quad (18.2.4)$$

представляет собой диагональную весовую функцию Глаубера — Сударшана. Используя (18.1.5), перепишем выражение (18.2.3) в виде

$$M(\lambda, T) = \int e^{-\lambda \langle m \rangle \frac{|\beta|^2}{\langle b^+ b \rangle}} P(\beta) d^2\beta. \quad (18.2.5)$$

Тогда, согласно (18.1.9) и (18.1.13), вероятность $P(m, T)$ отсчета m частиц, за интервал времени T равна

$$p(m, T) = \int P(\beta) d^2\beta \frac{[\langle m \rangle |\beta|^2 / \langle |\beta|^2 \rangle]^m}{m!} e^{-\frac{\langle m \rangle |\beta|^2}{\langle |\beta|^2 \rangle}}. \quad (18.2.6)$$

Таким образом, выбирая произвольное стационарное распределение $P(\beta)$, можно из формулы (18.2.6) найти функцию $p(m, T)$. Ниже будут рассмотрены четыре примера.

А. КОГЕРЕНТНОЕ СОСТОЯНИЕ

В этом случае

$$P(\beta) = \delta(\beta - \beta_0). \quad (18.2.7)$$

Подставляя (18.2.7) в (18.2.6), получим

$$p(m, T) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}, \quad (18.2.8)$$

что представляет собой формулу Пуассона.

Б. ГАУССОВА СТАТИСТИКА

Пусть

$$P(\beta) \sim e^{-\text{const}|\beta|^2}. \quad (18.2.9)$$

Если теперь определить ρ с помощью равенства

$$\rho \equiv |\beta|^2 / \langle |\beta|^2 \rangle, \quad (18.2.10)$$

то функция распределения $W(\rho)$, рассмотренная в разд. 8.1 и 8.4, равна

$$W(\rho) = e^{-\rho}, \quad (18.2.11)$$

причем $W(\rho)$ нормирована условием

$$\int_0^{\infty} W(\rho) d\rho = 1. \quad (18.2.12)$$

Используя выражение (18.2.5), получаем для производящей функции

$$M(\lambda, T) = \langle e^{-\lambda \langle m \rangle \rho} \rangle = \int d\rho W(\rho) e^{-\lambda \langle m \rangle \rho}. \quad (18.2.13)$$

Подстановка (18.2.11) в (18.2.13) дает

$$M(\lambda, T) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda \langle m \rangle + 1)\rho} d\rho, \quad (18.2.14)$$

$$= (1 + \lambda \langle m \rangle)^{-1}. \quad (18.2.15)$$

Наконец, из (18.2.11) получим функцию

$$\rho(m, T) = \frac{1}{m!} \left[\left(-\frac{d}{d\lambda} \right)^m M(\lambda, T) \right]_{\lambda=1}, \quad (18.2.16)$$

$$= \frac{\langle m \rangle^m}{(1 + \langle m \rangle)^{m+1}}, \quad (18.2.17)$$

которая представляет собой функцию распределения Бозе — Эйнштейна.

В. СУПЕРПОЗИЦИЯ КОГЕРЕНТНОГО СИГНАЛА И ФОНОВОГО ШУМА [78, 79]

В этом случае

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi \langle n \rangle} e^{-\frac{|\beta - \beta_0|^2}{\langle n \rangle}}, \quad (18.2.18)$$

где β_0 — амплитуда волны, модулированной шумом, а $\langle n \rangle$ — среднее число шумовых (тепловых) фотонов. Подстановка (18.2.18) в (18.2.5) дает

$$M(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \lambda \langle n \rangle} \exp\left(\frac{-\lambda |\beta_0|^2}{1 + \lambda \langle n \rangle}\right), \quad (18.2.19)$$

что представляет собой выражение (18.2.15), умноженное на экспоненциальный множитель. Используя (18.1.9), находим

$$\begin{aligned} p(m, T) = & \{(\langle n \rangle)^m / [1 + \langle n \rangle]^{m+1}\} \times \\ & \times L_m \left[\frac{-|\beta_0|^2}{\langle n \rangle (1 + \langle n \rangle)} \right] \exp \left[\frac{-|\beta_0|^2}{1 + \langle n \rangle} \right], \end{aligned} \quad (18.2.20)$$

где L_m — полином Лагерра m -го порядка. Таким образом, величина $p(m, T)$ представляет собой функцию распределения Бозе — Эйнштейна, умноженную на полином Лагерра и на экспоненциальный множитель.

Заметим, что при $\langle n \rangle \rightarrow 0$ функция $P(\beta)$ (18.2.18) стремится к δ -функции, т. е. к когерентному состоянию, а $p(m, T)$ (18.2.20) — к выражению (18.2.8), т. е. к формуле Пуассона. Формула (18.2.20) может быть получена из решения хорошо известной классической задачи, если положить электрическое поле E равным

$$E = E_0 \cos(\omega t + \phi) + \alpha(t), \quad (18.2.21)$$

где $\alpha(t)$ — гауссов источник шума. В работах [80, 81] показано, что распределение интенсивности амплитуды равно

$$P(I) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{E_0^2 + I}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{E_0}{\sigma^2} \sqrt{I}\right), \quad (18.2.22)$$

где σ^2 — дисперсия шумового сигнала, а I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Если теперь считать величину (18.2.22) функцией распределе-

ния $W(\rho)$ и найти $M(\lambda, T)$ и $\rho(m, T)$, как это было сделано в прошлом примере, то получится та же величина $\rho(m, T)$, что и в (18.2.20), а E_0 соответствует β_0 [81].

Г. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВОЛН ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ

В разд. 8.1 было найдено, что функция распределения $W(\rho)$ для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации определяется выражением (8.1.21):

$$W(\rho) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \rho \rho - \frac{1}{4} \rho^2\right)}{\int_0^{\infty} d\rho \exp\left(\frac{1}{2} \rho \rho - \frac{1}{4} \rho^2\right)}. \quad (18.2.23)$$

Этот результат был также получен Рисkenом [82]. В разд. 7.3 величина A преобразовывалась в A' , а следовательно, и ρ — в ρ' с помощью обезразмеривающего множителя ξ^2 (7.3.2). Согласно разд. 7.5, величина ρ в формуле (18.2.23) является в действительности безразмерной переменной ρ' , введенной в 7.3. Связь ρ и ρ' определяется соотношением

$$\xi^2 \rho' = \rho = |\beta|^2. \quad (18.2.24)$$

Но $\rho = \langle b^+ b \rangle$, поэтому

$$\langle b^+ b \rangle = \xi^2 \langle \rho' \rangle. \quad (18.2.25)$$

Опуская штрихи, т. е. переходя к тем же обозначениям, что и в (18.2.23), получим

$$\langle b^+ b \rangle = \xi^2 \langle \rho \rangle. \quad (18.2.26)$$

Выражение (18.2.26) справедливо для всех величин $\langle \rho \rangle$, поэтому

$$\xi^2 = \frac{\langle b^+ b \rangle}{\langle \rho \rangle} = \frac{(\langle b^+ b \rangle)_{\text{порог}}}{(\langle \rho \rangle)_{\text{порог}}}, \quad (18.2.27)$$

где, согласно фиг. 2.4 или табл. 18.1, работы [6] $(\langle \rho \rangle)_{\text{порог}} = 1,128$. С помощью соотношения (18.2.3) можно, зная функцию распределения $W(\rho)$, найти

производящую функцию $M(\lambda, T)$. Используя те же единицы измерения, что и в (18.2.23), находим

$$M(\lambda, T) = \int W(\rho) \exp\left(-\lambda T \epsilon \rho \frac{\langle b^+ b \rangle}{\langle \rho \rangle}\right) d\rho. \quad (18.2.28)$$

Преобразуя выражение (18.2.28) таким же образом, как и (18.2.13), имеем

$$M(\lambda, T) = \int W(\rho) \exp\left(-\lambda \langle m \rangle \frac{\rho}{\langle \rho \rangle}\right) d\rho. \quad (18.2.29)$$

Наконец, согласно (18.1.9), получаем для вероятности $p(m, T) =$

$$= \frac{1}{m!} \left(\frac{\langle m \rangle}{\langle \rho \rangle}\right)^m \int_0^\infty W(\rho) \rho^m \exp\left(-\frac{\langle m \rangle}{\langle \rho \rangle} \rho\right) d\rho. \quad (18.2.30)$$

Смит и Армстронг [83] с помощью разложения по неполным γ -функциям рассчитали входящий в (18.2.30) интеграл с функцией $W(\rho)$ из (18.2.23).

Посмотрим теперь, насколько рассмотренные выше примеры соответствуют экспериментальным данным. Из-за трудностей, связанных со стабилизацией лазера в области порога возбуждения, многие эксперименты проводились не в области порога, а несколько ниже [84—86] или выше [81, 86, 87]¹⁾. Армстронг и Смит [85] проводили эксперименты в области вдвое выше и на 20% ниже порога возбуждения. При сравнении эксперимента с теорией они использовали гауссову модель, т. е. статистику Бозе — Эйнштейна, для области ниже порога (пример Б) и суперпозицию когерентного сигнала и гауссового фонового шума (пример В), приводящую к гипергеометрическому распределению, для области выше порога возбуждения. Кроме того, в обеих областях использовалось приближение волн вращающейся поляризации для осциллятора Ван дер Поля (пример Г), чтобы проверить, обладает ли оно преимуществом по сравнению с указанными выше моделями. Конечно, в области значительно ниже порога модель осциллятора Ван дер Поля сводится к

¹⁾ Исключением является работа [88], в которой измерялись спектр и полные флуктуации (а не $p(m, T)$), в непосредственной близости от порога возбуждения.

гауссовой модели, а значительно выше порога квазилинейное приближение для осциллятора Ван дер Поля похоже на гипергеометрическое распределение. Поэтому неудивительно, что, как это видно из табл. 18.1, по мере приближения к порогу возбуждения все более сказывается преимущество модели Ван дер Поля перед другими моделями, хорошо работающими в области вдали от порога.

Таблица 18.1

Критерий χ^2 для распределений отсчета фотонов выше порога

$\langle \rho \rangle / \langle \rho \rangle$ порог	Пуассон	Гипергеометрическое деление	Осциллятор Ван дер Поля
2,1	26 000	760	168
2,7	17 300	500	70
3,3	6 100	245	60
4,6	1 600	50	28
7,7	380	32	27
13,7	63	14	13

В табл. 18.1, взятой из работы Армстронга и Смита, лучшее приближение соответствует меньшим значениям χ^2 . В этой таблице показана лишь область выше порога возбуждения. Ясно, что простая модель Пуассона (пример А) хуже гипергеометрического распределения, которое в свою очередь хуже модели Ван дер Поля.

Уже после завершения работы над этими лекциями появились измерения Аречи, Родари и Сопа [89] нескольких моментов распределения счета фотонов непосредственно в области порога возбуждения. Результаты этих экспериментов согласуются с моделью Ван дер Поля.

18.3. ФЛУКТУАЦИИ ПРИ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИИ НИЖЕ ПОРОГА ВОЗБУЖДЕНИЯ

В прошлом разделе рассматривался предельный случай малых времен. Однако в области промежуточных и больших времен, где нельзя использовать статическое

распределение, возникают сложные стохастические задачи. В этом разделе будет рассмотрена задача о статистике величины $|\beta(s)|$ за большие временные интервалы. Эта задача включает в себя изучение многовременных корреляторов, поэтому надо прежде всего выбрать определенную модель. В духе прошлого раздела было бы использование приближения волн вращающейся поляризации для осциллятора Ван дер Поля в областях выше, ниже и вблизи порога возбуждения. Однако такая задача очень сложна. Начнем поэтому с нетривиальной гауссовой модели лазера в области ниже порога, поскольку, как мы убедились в прошлом разделе, гауссова модель является очень хорошим приближением для лазера ниже порога возбуждения.

Итак, примем классическую модель Гаусса для лазера в области ниже порога. Положим

$$\beta = x - iy \quad (18.3.1)$$

и предположим, что имеется простой двумерный случайный процесс с затуханием, причем отсутствует связь между движениями в x - и y -направлениях. Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\Lambda x + F_x(t), \quad (18.3.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\Lambda y + F_y(t), \quad (18.3.3)$$

а коэффициенты диффузии равны

$$\langle F_x(t) F_x(u) \rangle = 2D\delta(t-u) = \langle F_y(t) F_y(u) \rangle, \quad (18.3.4)$$

$$\langle F_x(t) F_y(u) \rangle = \langle F_y(t) F_x(u) \rangle = 0. \quad (18.3.5)$$

Согласно соотношению Эйнштейна (2.5.5), получим

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{D}{\Lambda}. \quad (18.3.6)$$

Из выражений (18.3.1) и (18.3.6) находим

$$\langle |\beta|^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{2D}{\Lambda}. \quad (18.3.7)$$

Таким образом, коэффициент диффузии D в нашей модели равен

$$D = \frac{1}{2} \Lambda \langle |\beta|^2 \rangle = \frac{1}{2} \Lambda \langle b^+ b \rangle. \quad (18.3.8)$$

Из (18.3.2) и (18.3.3) видно, что величина 2Λ является экспериментально наблюдаемым коэффициентом затухания амплитуды (в соответствии с формулой (8.24) работы [5]). Согласно формулам (18.1.10) и (18.1.11), нас интересует величина

$$M(\lambda, T) = \left\langle \exp \left\{ -\lambda \int_0^T [x(s)^2 + y(s)^2] ds \right\} \right\rangle, \quad (18.3.9)$$

где изменены обозначения, а именно

$$\lambda = \lambda \varepsilon. \quad (18.3.10)$$

Поскольку координаты x и y независимы и удовлетворяют одинаковым уравнениям движения, то выражение (18.3.9) может быть переписано в виде

$$M(\lambda, T) = \left\{ \left\langle \exp \left[-\lambda \int_0^T x(s)^2 ds \right] \right\rangle \right\}^2. \quad (18.3.11)$$

Заметим, что сравнение (18.3.11) с (5.8.1) дает

$$\left\langle \exp \left[-\lambda \int_0^T x(s)^2 ds \right] \right\rangle \Big|_x = M_0, \quad (18.3.12)$$

где величина $Q(x, s)$ в выражении (5.8.2) определяется равенством

$$Q(x, s) = \lambda x(s)^2. \quad (18.3.13)$$

Найденное в работе [3] решение [см. формулу (8.6.3) работы [3]] имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\langle e^{-\lambda \int_0^T x(s)^2 ds} \right\rangle \Big|_x = \\ & = [Y(T)]^{-1/2} \exp \left\{ -\lambda x_0^2 \frac{\Gamma}{4\lambda D} [\text{th}(\Gamma T + \theta) - \text{th} \theta] \right\}, \end{aligned} \quad (18.3.14)$$

$$= [Y(T)]^{-1/2} \exp \left(-\frac{x_0^2 A}{2D/\Lambda} \right) \quad (18.3.15)$$

или, используя также (18.3.6),

$$\left\langle \exp \left[-\lambda \int_0^T x(s)^2 ds \right] \right\rangle_{x_0} = [Y(T)]^{-1/2} \exp \left(-\frac{x_0^2 A}{\langle x^2 \rangle} \right), \quad (18.3.16)$$

где

$$\Gamma = (\Lambda^2 + 4\lambda D)^{1/2}, \quad (18.3.17)$$

$$\text{th } \theta = \Lambda/\Gamma, \quad (18.3.18)$$

$$Y(u) = \frac{(4\lambda D)^{1/2}}{\Gamma} \exp(-\Lambda u) \text{ch}(\Gamma u + \theta), \quad (18.3.19)$$

$$A = \frac{\Gamma}{2\Lambda} [\text{th}(\Gamma T + \theta) - \text{th } \theta]. \quad (18.3.20)$$

Заметим, что в работах [90] было проведено подробное исследование распределения $\frac{1}{T} \int_0^T x(s)^2 ds$. Выражение (18.3.14) дает решение при условии $x(0) = x_0$. Но величина $M(\lambda, T)$ (18.3.11) не является условной средней, поэтому надо проинтегрировать по x_0 . Так как переменная x гауссова,

$$\left\langle \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\langle x^2 \rangle} A \right) \right\rangle = \frac{\int \exp \left[-\frac{x_0^2}{2\langle x^2 \rangle} (1+A) \right] dx_0}{\int \exp \left(-\frac{x_0^2}{2\langle x^2 \rangle} \right) dx_0}, \quad (18.3.21)$$

$$= (1+A)^{-1/2}. \quad (18.3.22)$$

Используя теперь (18.3.22), (18.3.16), (18.3.18) — (18.3.20), сведем выражение (18.3.11) для $M(\lambda, T)$ к виду

$$M(\lambda, T) = \frac{\exp(\Lambda T)}{\text{ch}(\Gamma T + \theta)} \frac{\Gamma}{\sqrt{4\lambda D}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Gamma}{2\Lambda} \left[\text{th}(\Gamma T + \theta) - \frac{\Gamma}{\Lambda} \right]}. \quad (18.3.23)$$

Приведем выражение для $M(\lambda, T)$ к более удобной форме. Положим

$$s = \Lambda T \quad (18.3.24)$$

$$\text{и} \quad s' = \Gamma T = z s, \quad (18.3.25)$$

где

$$z = \frac{\Gamma}{\Lambda} = \operatorname{cth} \theta. \quad (18.3.26)$$

Величина s представляет собой ширину линии, умноженную на время, поэтому $s \ll 1$ и $s \gg 1$ соответствуют случаям малых и больших времен. Из (18.3.17) и (18.3.18) имеем

$$\frac{\Gamma}{\sqrt{4\lambda D}} = \frac{\Gamma}{(\Gamma^2 - \Lambda^2)^{1/2}} = \operatorname{ch} \theta. \quad (18.3.27)$$

Поэтому выражение (18.3.23) для $M(\lambda, T)$ может быть переписано в виде

$$M(\lambda, T) = \frac{\exp(s) \operatorname{ch} \theta}{\frac{1}{2} [\operatorname{ch}(s' + \theta) + \operatorname{sh}(s' + \theta) \operatorname{cth} \theta]}. \quad (18.3.28)$$

Используя известные соотношения между гиперболическими функциями, находим

$$M(\lambda, T) = \frac{\exp(s) \operatorname{sh} 2\theta}{\operatorname{sh}(2\theta + s')}, \quad (18.3.29)$$

$$= \frac{\exp(s)}{\operatorname{ch} s' + \operatorname{sh} s' \operatorname{cth} 2\theta} \quad (18.3.30)$$

или, учитывая также (18.3.26),

$$M(\lambda, T) = \frac{\exp(s)}{\operatorname{ch}(zs) + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \operatorname{sh}(zs)}, \quad (18.3.31)$$

Из формул (18.3.26) и (18.3.17)

$$z = \frac{\Gamma}{\Lambda} = \frac{(\Lambda^2 + 4\lambda D)^{1/2}}{\Lambda}. \quad (18.3.32)$$

В (18.3.10) был введен эффективный множитель ε . Возвращаясь теперь к нашему исходному определению величины λ , находим

$$z = \Lambda^{-1} \left(\Lambda^2 + 4\lambda \varepsilon \frac{\Lambda}{2} \langle b^+ b \rangle \right)^{1/2}, \quad (18.3.33)$$

$$= \Lambda^{-1} (\Lambda^2 + 2\lambda \Lambda w)^{1/2}, \quad (18.3.34)$$

где введена величина w , определяющая скорость отсчета фотонов:

$$w = \varepsilon \langle b^+ b \rangle. \quad (18.3.35)$$

Итак, мы получили формулу (18.3.34) для z , которую легко сравнить с экспериментом. Используем теперь величину μ , впервые введенную Глаубером [78] и определяющую число отсчетов за время корреляции:

$$\mu = \frac{\omega}{\Lambda}. \quad (18.3.36)$$

Подставляя (18.3.36) в (18.3.34), находим

$$z = (1 + 2\mu\lambda)^{1/2}. \quad (18.3.37)$$

Из (18.3.31) и (18.3.36) видно, что вся зависимость функции $M(\lambda, T)$ от λ содержится в z .

Приближение малых времен рассматривалось в разд. 18.2; перейдем теперь к приближению больших времен. Заменяя в (18.3.31) гиперболические функции экспонентами и учитывая неравенство $s \gg 1$, получим

$$M(\lambda, T) = \frac{2 \exp[-(z-1)s]}{1 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}. \quad (18.3.38)$$

Заметим, что Глаубер [78] использовал следующий приближенный вид функции $M(\lambda, T)$:

$$M(\lambda, T) \approx \exp[-(z-1)s]. \quad (18.3.39)$$

Подставляя (18.3.31) в (18.3.10), вычислим вероятность $p(m, T)$ отсчета m фотонов за интервал времени T . С помощью замены переменной λ на z и используя (18.3.37), найдем

$$\begin{aligned} p(m, T) &= \\ &= 2(2\mu)^m \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \oint \frac{\exp(s) z dz}{(1+2\mu-z^2)^{m+1} \left[\operatorname{ch}(zs) + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \operatorname{sh}(zs) \right]}. \end{aligned} \quad (18.3.40)$$

В приближении больших времен $s \gg 1$ используем выражение (18.3.38) для $M(\lambda, T)$, что дает

$$p(m, T) \approx 2(2\mu)^m \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \oint \frac{z dz}{(1+2\mu-z^2)^{m+1}} \cdot \frac{2 \exp[s(1-z)]}{1 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)}. \quad (18.3.41)$$

Рассмотрим теперь случай, когда, кроме $s \gg 1$, имеется большое число отсчетов за время корреляции, т. е. $\mu \gg 1$. Далее будет показано, что z порядка единицы, поэтому

$$(1 + 2\mu - z^2)^{-(m+1)} = (1 + 2\mu)^{-(m+1)} \left(1 - \frac{z^2}{2\mu + 1}\right)^{-(m+1)} \approx \\ \approx (1 + 2\mu)^{-(m+1)} \exp\left[\frac{(m+1)z^2}{2\mu + 1}\right]. \quad (18.3.42)$$

Подставляя (18.3.42) в (18.3.41), получим

$$p(m, T) \approx \frac{2(2\mu)^m}{(1 + 2\mu)^{m+1}} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \oint \frac{2z dz}{1 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \times \\ \times \exp\left[s(1 - z) + \frac{m+1}{2\mu + 1} z^2\right]. \quad (18.3.43)$$

Для того чтобы взять интеграл в (18.3.43), используем так называемый метод быстрого спуска или метод перевала. Экспонента является определяющим множителем, поэтому потребуем, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{m+1}{2\mu + 1} z^2 - sz + s\right) \equiv \frac{\partial}{\partial z} f(z) = 0 \quad (18.3.44)$$

или

$$z = \frac{s}{2} \frac{2\mu + 1}{m + 1}. \quad (18.3.45)$$

Из (18.3.24), (18.1.6) и (18.3.36) находим

$$\langle m \rangle = \omega T = s\mu. \quad (18.3.46)$$

Заметим, что из $s \gg 1$ и $\mu \gg 1$ следует $\langle m \rangle \gg 1$. Подставляя (18.3.46) в (18.3.45), получим

$$z = \frac{\langle m \rangle}{\mu} \cdot \frac{2\mu + 1}{2(m + 1)} \quad (18.3.47)$$

или, так как $\mu \gg 1$,

$$z = z_0 \approx \frac{\langle m \rangle}{m}. \quad (18.3.48)$$

Нас интересует функция распределения для величины m вблизи $\langle m \rangle$, поэтому z порядка единицы и справедливо предположение, использованное при получении выражения (18.3.42). Подставляя выражение (18.3.48) для z_0 в уравнение (18.3.44) для $f(z)$ и учитывая, что $\mu \gg 1$, а m порядка $\langle m \rangle \gg 1$, найдем

$$f(z_0) \approx \frac{m}{2\mu} \left(\frac{\langle m \rangle}{m} \right)^2 - \frac{1}{\mu} \frac{\langle m \rangle \langle m \rangle}{m} + \frac{1}{\mu} \langle m \rangle, \quad (18.3.49)$$

$$\approx \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\langle m \rangle^2}{m} + 2\langle m \rangle \right). \quad (18.3.50)$$

Проводя интегрирование в (18.3.43) с помощью метода перевала, получим

$$\begin{aligned} \rho(m, T) &= \frac{2(2\mu)^m}{(1+2\mu)^{m+1}} \cdot \frac{2z_0 \exp[f(z_0)]}{1 + \frac{1}{2} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)} \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \times \\ &\times \int dz \exp \left[\frac{m+1}{2\mu+1} (z-z_0)^2 \right]. \quad (18.3.51) \end{aligned}$$

Положим $z - z_0 = iy$, тогда для $\mu \gg 1$ и $m \gg 1$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int dz \exp \left[\frac{m+1}{2\mu+1} (z-z_0)^2 \right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\mu+1}{m+1} \right)^{1/2}, \quad (18.3.52)$$

$$\approx -\left(\frac{\mu}{2\pi m} \right)^{1/2}. \quad (18.3.53)$$

Кроме того, в предельном случае $\mu \gg 1$

$$\frac{2(2\mu)^m}{(1+2\mu)^{m+1}} \approx \frac{1}{1+2\mu} \exp \left(-\frac{m}{2\mu} \right). \quad (18.3.54)$$

Таким образом, используя (18.3.53), (18.3.54), (18.3.48) и (18.3.50), окончательно найдем

$$\begin{aligned} \rho(m, T) &\approx \frac{2 \exp \left(-\frac{m}{2\mu} \right)}{2\mu+1} \cdot \frac{2 \langle m \rangle / m}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle m \rangle}{m} + \frac{m}{\langle m \rangle} \right)} \times \\ &\times \frac{\sqrt{\mu/m}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\langle m \rangle^2}{m} + 2\langle m \rangle \right)}, \quad (18.3.55) \end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{\mu} \exp \left[-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\langle m \rangle^2}{m} - 2\langle m \rangle + m \right) \right] \frac{2\langle m \rangle/m}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle m \rangle}{m} + \frac{m}{\langle m \rangle} \right)} \frac{\sqrt{\mu/m}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (18.3.56)$$

$$\approx \frac{\langle m \rangle}{\sqrt{2\pi\mu} m^{3/2}} \times \left[\frac{2}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle m \rangle}{m} + \frac{m}{\langle m \rangle} \right)} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\langle m \rangle}{\sqrt{m}} - \sqrt{m} \right)^2 \right]. \quad (18.3.57)$$

Заметим, что Глаубер [78] получил такое же выражение для $\rho(m, T)$, но без множителя в квадратных скобках. При $m = \langle m \rangle$ этот множитель обращается в единицу и оба результата совпадают. В области m вблизи $\langle m \rangle$ этот множитель представляет собой малую поправку к формуле Глаубера.

18.4. ПРОСТАЯ РЕЛАКСАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Мы видели в (18.3.10), что распределение вероятности отсчета фотонов $\rho(m, T)$ получается из производящей функции

$$M(\lambda, T) = \left\langle \exp \left[-\lambda \int_0^T \rho(s) ds \right] \right\rangle, \quad (18.4.1)$$

где λe обозначено через λ . Согласно (5.8.10) и (5.8.12), для произвольного марковского процесса

$$M(\lambda, T) = \int \hat{P}(\rho, T) d\rho, \quad (18.4.2)$$

где функция \hat{P} является решением следующего уравнения:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = -\lambda \rho \hat{P}(\rho, t) - L \left(-i \frac{\partial}{\partial \rho}, \rho \right) \hat{P}(\rho, t), \quad (18.4.3)$$

а оператор L , определенный в (5.5.9), описывает изменения функции ρ .

Модель, в которой затухание всех собственных функций оператора L , за исключением основного состояния $W(\rho)$, характеризуется одним и тем же собственным

значением Λ_a , является простейшей релаксационной моделью. При этом оператор L определяет релаксацию функции \hat{P} к величине $W(\rho)$, или, точнее, к $M(\lambda, t) W(\rho)$, поскольку при изменении во времени основного состояния оператора \hat{P} сохраняется условие нормировки (18.4.2), а для всех остальных состояний условие нормировки имеет вид (8.2.12), где $\phi_0 = 1$. Поэтому

$$\frac{\partial \hat{P}(\rho, t)}{\partial t} = -\lambda \rho \hat{P} - \Lambda_a [\hat{P} - M(t) W(\rho)]. \quad (18.4.4)$$

Будем считать, что функция $W(\rho)$ определяется выражением (8.1.21), полученным для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации:

$$W(\rho) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \rho \rho - \frac{1}{4} \rho^2\right)}{\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \rho \rho - \frac{1}{4} \rho^2\right) d\rho}. \quad (18.4.5)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (18.4.4) определяет затухание собственных функций возбужденных состояний, а первое — всех собственных функций. Если считать функцию $M(t)$ известной, решение уравнения (18.4.4) имеет вид

$$\hat{P}(\rho, t) = e^{-(\lambda \rho + \Lambda_a) t} \hat{P}(\rho, 0) + \Lambda_a W(\rho) \int_0^t e^{-(\lambda \rho + \Lambda_a) (t-s)} M(s) ds. \quad (18.4.6)$$

При нахождении условных средних величин $M_0(\lambda, T)$, как это уже было сделано в разд. 5.8, следует положить $\hat{P}(\rho, 0) = \delta(\rho - \rho_0)$. Однако при нахождении абсолютных средних $M(\lambda, T)$ следует считать, что

$$\hat{P}(\rho, 0) = W(\rho). \quad (18.4.7)$$

С помощью интегрирования выражения (18.4.6) по ρ получим интегральное уравнение для функции $M(t)$:

$$M(t) = e^{-\Lambda_a t} H(\lambda t) + \Lambda_a \int_0^t e^{-\Lambda_a (t-s)} M(s) H[\lambda(t-s)] ds, \quad (18.4.8)$$

где

$$H(\mu) \equiv \int e^{-\mu\rho} W(\rho) d\rho \equiv \langle e^{-\mu\rho} \rangle. \quad (18.4.9)$$

Уравнение (18.4.8) относится к уравнениям типа свертки, которые допускают точное решение при применении преобразований Лапласа. Если

$$m(p) = \mathcal{L}M(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} M(t) dt, \quad (18.4.10)$$

$$h(p) = \mathcal{L}H(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-p\mu} H(\mu) d\mu, \quad (18.4.11)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{p+\rho} W(\rho) d\rho = \left\langle \frac{1}{p+\rho} \right\rangle,$$

то

$$\mathcal{L}e^{-\Lambda_a t} H(\lambda t) = \frac{1}{\lambda} h\left(\frac{p+\Lambda_a}{\lambda}\right) \quad (18.4.12)$$

и решение уравнения (18.4.8) имеет вид

$$m(p) = \frac{\frac{1}{\lambda} h\left(\frac{p+\Lambda_a}{\lambda}\right)}{1 - \frac{\Lambda_a}{\lambda} h\left(\frac{p+\Lambda_a}{\lambda}\right)}. \quad (18.4.13)$$

С помощью обратного преобразования Лапласа получим

$$M(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} m(p) e^{pt} dp, \quad (18.4.14)$$

причем все сингулярности должны оставаться слева от контура интегрирования. Вводя новые переменные интегрирования, находим

$$M(t) = e^{-\Lambda_a t} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{q\lambda t} \left[1 + \frac{\Lambda_a h(q)}{\lambda - \Lambda_a h(q)} \right] dq. \quad (18.4.15)$$

Легко теперь взять m -ю производную от этого выражения по λ с тем, чтобы, согласно (18.1.9), получить функцию распределения для отсчета фотонов $\rho(m, T)$. Мы

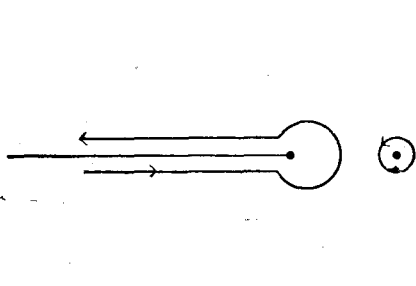
ограничимся здесь простейшей задачей нахождения функции $M(t)$.

Подынтегральное выражение в (18.4.15) имеет полюс при вещественных положительных величинах q_0 , когда

$$h(q_0) = \left\langle \frac{1}{q_0 + \rho} \right\rangle = \frac{\lambda}{\Lambda_a}. \quad (18.4.16)$$

Из определения (18.4.11) функции $h(q)$ видно, что эта функция, а следовательно, и подынтегральное выражение в (18.4.15) имеют связанный с ветвлением разрез от $q = 0$ до $q = -\infty$.

Все сингулярности в (18.4.15) лежат слева от пути интегрирования, поэтому можно деформировать контур



Фиг. 18.1.

интегрирования, как это показано на фиг. 18.1, обходя полюс и линию разреза против часовой стрелки. Обход линии разреза сводит интеграл к скачку подынтегральной функции по обе стороны разреза. Окончательно получим

$$M(\lambda, t) = e^{-\Lambda_a t} e^{q_0 \lambda t} \frac{\langle (q_0 + \rho)^{-1} \rangle^2}{\langle (q_0 + \rho)^{-2} \rangle} + \int_0^{\infty} d\rho \exp(-\lambda \rho t) \frac{W(\rho)}{\left[1 - \frac{\Lambda_a}{\lambda} \frac{\rho(\rho)}{\rho}\right]^2 + \left[\frac{\pi \Lambda_a W(\rho)}{\lambda}\right]^2}, \quad (18.4.17)$$

где

$$\rho(\rho) \equiv P \int \frac{W(\rho') d\rho'}{\rho' - \rho}, \quad (18.4.18)$$

а символ P означает главное значение Коши. Можно показать, что для малых времен $\Lambda_a t \ll 1$ величина q_0

мала. При этом

$$\left\langle \frac{1}{q_0 + \rho} \right\rangle \approx W(0) \ln \left(\frac{1}{q_0} \right) + \text{const}, \quad (18.4.19)$$

$$\left\langle \frac{1}{(q_0 + \rho)^2} \right\rangle \approx \frac{W(0)}{q_0}, \quad (18.4.20)$$

так что становится пренебрежимо малым коэффициент при первом слагаемом, определяющий вклад полюса. Чтобы учесть влияние условия $\Lambda_a t \ll 1$ на второе слагаемое, надо перейти к пределу $\Lambda_a \rightarrow 0$, оставляя t фиксированным. Тогда второе слагаемое дает для малых времен результат, предсказываемый выражением (18.2.3):

$$M(\lambda, t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \rho t} W(\rho) d\rho. \quad (18.4.21)$$

Формула (18.4.1) несколько упрощена. В действительности производящая функция равна $\langle \exp(-\lambda \Omega) \rangle$, где

$$\Omega = \varepsilon \int_0^t |\beta(s)|^2 ds = \varepsilon \langle |\beta|^2 \rangle \int_0^t \frac{|\beta(s)|^2}{\langle |\beta|^2 \rangle} ds = \omega \int_0^t \frac{\rho(s)}{\langle \rho \rangle} ds. \quad (18.4.22)$$

Здесь использованы соотношения (18.1.2) и (18.1.6). Таким образом, правильный результат (в абсолютных единицах) получится при следующей замене λ :

$$\lambda \rightarrow \lambda \frac{\omega}{\langle \rho \rangle}, \quad (18.4.23)$$

где ω — средняя скорость отсчета фотонов: $\omega = \frac{\langle m \rangle}{t}$.

18.5. ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЙСА—МАНДЕЛЯ

Опуская штрихи в формуле (18.1.8), можно записать функцию распределения для отсчета фотонов в виде

$$p(m, T) = \int \frac{\Omega^m}{m!} e^{-\Omega} W(\Omega) d\Omega, \quad (18.5.1)$$

где $\Omega = \varepsilon \int_0^T |\beta(t)|^2 dt$, а $W(\Omega)$ — функция распределения для классической случайной переменной Ω , пропорциональная полной интенсивности фотонов за время T . Можно думать, что за большие времена T функция $W(\Omega)$ гауссова как сумма совокупности почти независимых случайных переменных. Но $\Omega > 0$, поэтому желательно использовать функцию $W(\Omega)$, обращающуюся в нуль при $\Omega < 0$. Райс [91] предложил функцию распределения вида

$$W(\Omega) = \frac{a^s}{\Gamma(s)} \Omega^{s-1} \exp(-a\Omega). \quad (18.5.2)$$

Это выражение представляет собой хорошо известное в математической статистике [92] χ^2 -распределение для суммы $\sum_{j=1}^s x_j^2$ квадратов одинаково распределенных гауссовых случайных переменных. Параметры a и s можно выбрать так, чтобы распределение (18.5.2) согласовалось с правильной величиной первых и вторых моментов:

$$a = \frac{s}{\langle \Omega \rangle} = \frac{s}{\langle m \rangle}, \quad (18.5.3)$$

$$s = \frac{(\langle \Omega \rangle)^2}{\langle (\Delta \Omega)^2 \rangle}. \quad (18.5.4)$$

Подставляя (18.5.2) в (18.5.1) найдем

$$p(m, T) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\langle m \rangle}{s}\right)^s} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\langle m \rangle}\right)^m} \frac{\Gamma(m+s)}{m! \Gamma(s)}. \quad (18.5.5)$$

Выражение (18.5.5) точно совпадает с результатом проведенного Манделем [72] расчета вероятности нахождения m бозонов в s ячейках фазового пространства.

Можно несколько обобщить приближение Райса и Манделя, потребовав, чтобы выражение (18.5.2) представляло собой правильное двухпараметрическое распределение, даже если случайная переменная $\beta(t)$ не гауссова. Параметр s по-прежнему определяется выражением (18.5.4). Вводя безразмерную переменную

$\rho = |\beta|^2/\xi^2$, получим

$$\Omega = e\xi^2 \int_0^T \rho(t) dt, \quad (18.5.6)$$

$$\langle \Delta\rho(t) \Delta\rho(u) \rangle \equiv \langle (\Delta\rho)^2 \rangle R(t-u), \quad (18.5.7)$$

$$s = \frac{\langle \rho \rangle^2}{\langle (\Delta\rho)^2 \rangle} \left[\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T dt du R(t-u) \right]^{-1} \quad (18.5.8)$$

или

$$s = \frac{\langle \rho \rangle^2}{\langle (\Delta\rho)^2 \rangle} \left[\frac{2}{T^2} \int_0^T (T-t) R(t) dt \right]^{-1}. \quad (18.5.9)$$

В пределе больших времен

$$s \rightarrow \frac{\langle \rho \rangle^2}{\langle (\Delta\rho)^2 \rangle} \frac{T}{T_c}, \quad (18.5.10)$$

где время корреляции T_c определено равенством

$$T_c = 2 \int_0^\infty R(t) dt. \quad (18.5.11)$$

Из проведенного в гл. 7 анализа приближения волн вращающейся поляризации для осциллятора можно заключить, что для различных типов осцилляторов основной вклад в функцию $R(t)$ вносит экспонента:

$$R(t) \approx \exp(-\Lambda_a |t|), \quad (18.5.12)$$

где Λ_a — определяемое выражением (7.7.4) затухание амплитуды собственного значения¹⁾. Тогда

$$T_c \approx \frac{2}{\Lambda_a}, \quad (18.5.13)$$

и для гауссового случая, т. е. ниже порога, $\langle (\Delta\rho)^2 \rangle \approx \approx \langle \rho \rangle^2$. Тогда $s = \frac{1}{2} \Lambda_a T$, и интеграл $\int_0^T |\beta(t)|^2 dt$ можно разбить на s слагаемых с областью интегрирования

¹⁾ Более подробное обсуждение проведено в работе [6].

$2/\Lambda_a$, причем все эти интегралы приближенно нескоррелированы.

Для самовозбуждающегося осциллятора в области значительно выше порога флуктуации амплитуды подавлены, а величины $\frac{\langle \rho \rangle^2}{\langle (\Delta \rho)^2 \rangle}$ и s становятся большими. Для осциллятора Ван дер Поля в области значительно выше порога для большой накачки $p\bar{\rho} = \langle \rho \rangle \rightarrow p$ (см. 7.5.16), в то время как для улучшенного квазилинейного приближения, согласно (7.5.20), $\langle (\Delta \rho)^2 \rangle \approx \frac{D(\bar{\rho})}{\Lambda_a} \approx \frac{4\bar{\rho}}{2\bar{\rho} + 4/\bar{\rho}} \rightarrow 2$. Такое поведение величин $\langle \rho \rangle$ и $\langle (\Delta \rho)^2 \rangle$ показано на фиг. 2.4 и 8.1.

Можно провести численный расчет величины s в области порога, используя для $\langle \rho \rangle$, $\langle (\Delta \rho)^2 \rangle$ и Λ_a соответственно формулу (18.5.10) и фиг. 2.4; 8.1; 7.4. Однако качественно верные результаты можно получить, используя значения $\langle (\Delta \rho)^2 \rangle$ и Λ_a , даваемые улучшенным квазилинейным приближением. При этом

$$s \approx \frac{1}{8} \bar{\rho} T \left(2\bar{\rho} + \frac{4}{\bar{\rho}} \right)^2 \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{2} p^3 T & \text{при } p \gg 0, \\ \rightarrow |p| T & \text{при } p \ll 0. \end{cases} \quad (18.5.14)$$

Таким образом, параметр s нашего распределения (18.5.5) велик значительно выше и значительно ниже порога возбуждения и имеет минимум в области порога. Заметим, что использованное в этом разделе время T безразмерное, а единицы измерения приведены в (7.3.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lax M., Rev. Mod. Phys., **32**, 25 (1960).
2. Lax M., Journ. Phys. Chem. Solids, **14**, 248 (1960).
3. Lax M., Rev. Mod. Phys., **38**, 359 (1966).
4. Lax M., Rev. Mod. Phys., **38**, 541 (1966).
5. Lax M., Bull. Amer. Phys. Soc., **11**, 111 (1966); Phys. Rev., **160**, 290 (1967).
6. Lax M., Hempstead R. D., Bull. Amer. Phys. Soc., **11**, 111 (1966); Phys. Rev., **161**, 350 (1967); Hempstead R. D., E. E. thesis, M. I. T., 1965.
7. Lax M., Fredkin D. R., 1963, не опубликовано.
8. Lax M. Phys. Rev., **109**, 1921 (1958).
9. Lax M., Phys. Rev., **129**, 2342 (1963).

10. Lax M., Journ. Phys. Chem. Solids., 25, 487 (1964).
11. Lax M., Phys. Rev., 145, 110 (1966).
12. Lax M., в книге «Physics of Quantum Electronics», eds Kelley P. L., Lax B., Tannenwald P. E., McGraw-Hill, N.-Y., 1966, p. 735.
13. Lax M., Fredkin D. R., не опубликовано.
14. Lax M., IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-3, 37 (1967).
15. Cheng H., Lax M., в книге «Quantum Theory of the Solid State», ed. Löwdin P. O., Acad. Press, N.-Y., 1966.
16. Lax M., Louisell W. H., IEEE Journal of Quantum Electronics, QE-3, 47 (1967).
17. Lax M., Phys. Rev., 157, 213 (1967).
18. Lax M., Phys. Rev., 172, 350 (1968).
19. Lax M., Louisell W. H., Phys. Rev., 185, 568 (1969).
20. Lax M., 1966 Tokyo Summer Lectures in Theor. Phys., Pt. 1, eds. Kubo R., Kamimura H., Syokabo Tokyo and Benjamin W. A., Inc., N.-Y., 1967.
21. Clauber R. J., Phys. Rev., 130, 2529 (1963).
22. Winocur J., Suman M. C., Durrett R. H., Jacobs E. D., Hutchings T. J., Singery W. L., Bull. Amer. Phys. Soc., 10, 129 (1965); Phys. Rev., 152, 467 (1967).
23. Shimoda K., Takahasi H., Townes C. H., Journ. Phys. Soc. Japan., 12, 686 (1957).
24. Lamb W. E., Jr., Phys. Rev., 134, 1429 (1964).
25. Schawlow A. L., Townes C. H., Phys. Rev., 112, 1940 (1958); Wagner W. G., Birnbaum G., Journ. Appl. Phys., 32, 1185 (1961).
26. Edson W. A., Proc. IRE, 48, 1454 (1960).
27. Louisell W. H., Radiation and Noise in Quantum Electronics, N. Y., 1964.
28. Louisell W. H., Walker L. R., Phys. Rev., B137, 204 (1965).
29. Glauber R. L., Phys. Rev., 131, 2766 (1963).
30. Sudarshan E. C. G., Phys. Rev. Lett., 110, 277 (1963); «Proc. the Symposium on Opt. Masees», Polytechn. Brooklyn, and John Wiley, N.-Y., 1963.
31. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., 37, 231 (1965). Есть русский перевод УФН 87, 491 (1965), 88, 347, 319 (1966).
32. См. ссылку [6], а также Risken M., Zs. f. Physik, 189, 1 (1966); Haken H., Zs. f. Physik, 190, 327 (1966).
33. Scully M., Lamb W. E., Jr., Phys. Rev. Lett., 16, 853 (1966); Phys. Rev., 159, 208 (1967).
34. Haken H., Weidlich W., Zs. f. Physik, 189, 1 (1966); Haken H., Zs. f. Physik, 190, 327 (1966).
35. Risken H., Schmid C., Weidlich W., Zs. f. Physik, 193, 37; 194, 337 (1966); Phys. Lett., 20, 489 (1966).
36. Risken H., Zs. f. Physik, 191, 302 (1966).
37. Senitzky I. R., Phys. Rev., 119, 670 (1960); 124, 642 (1961). См. также Schwinger J., Journ. Math. Phys., 2, 407 (1961).
38. McCumber D. E., Phys. Rev., 141, 306 (1966).
39. Kleinman D. A., Bell Syst. Tech. Journ., 43, 1505 (1964).
40. McFarlane R. A., Bennett W. R., Lamb W. E., Jr., Appl. Phys. Lett., 2, 189 (1963).

41. Szoke A., Javan A., Phys. Rev. Lett., 10, 521 (1963).
42. Sargent M., Lamb W. E., Jr.
43. Middleton D., Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill, N.-Y., 1960.
44. Schiff L. I., Quantum Mechanics, McGraw-Hill, N.-Y., 1955 (имеется русский перевод: Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, 1957).
45. Wigner E. P., Phys. Rev., 40, 749 (1932).
46. Ekstein H., Rostoker N., Phys. Rev., 100, 1023 (1955).
47. McCumber D. E., Phys. Rev., 130, 675 (1963).
48. Mandel L., Phys. Rev., 152, 438 (1966).
49. Hanbary Brown R., Twiss R. K., Proc. Roy. Soc. (London), A242, 300 (1957); A243, 291 (1958).
50. Dyson F. J., Phys. Rev., 75, 486 (1949); Messiah A., Quantum Mechanics, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962, Ch. 17.
51. Goldberger M. L., Lewis H. W., Watson K. M., Phys. Rev., 142, 25 (1966); 132, 2764 (1963).
52. Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., B137, 1396; B140, 500 (1965).
53. Kelley P. L., Kleiner W. H., Phys. Rev., A136, 316 (1964).
54. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett., 10, 84 (1963); Quantum Optics and Electronics, eds. de-Witt C., Blandin A., Cohen. Iannoudji C., Gordon and Breach Sc. Publ., Inc., N.-Y., 1965 (имеется русский перевод в книге: «Квантовая оптика и радиофизика», изд-во «Мир», 1966).
55. Mandel L., Proc. Phys. Soc. (London), 72, 1037 (1958).
56. Cramer H., «Mathematical Methods of Statistics», Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946, Sec. 15.8; Kendall M. G., Stuart A., «The Advanced Theory of Statistics», Charles Griffin and Co., Ltd., London, 1958, Ch. 3.
57. Kubo R., Journ. Phys. Soc. Japan, 17, 1100 (1962).
58. Deutsch R., «Non-linear Transformations of Random Processes», Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
59. Стратанович Р. Л., Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, «Советское радио», М., 1961.
60. «Fluctuation Phenomena in Solids», ed. Burgess R. E., Acad. Press, Inc., N.-Y., 1965.
61. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., 20, 367 (1948). См. также Montroll E., Comm. Pure Appl. Math., 5, 415 (1952).
62. Kubo R., Canad. Journ. Phys., 34, 1274 (1956); Journ. Phys. Soc. Japan, 12, 570 (1957); Ekstein H., Rostoker N., Phys. Rev., 100, 1023 (1955); Mori H., Journ. Phys. Soc. Japan, 11, 1029 (1956); Weber J., Phys. Rev., 101, 1619 (1956); Callen H. B., Phys. Rev., 111, 367 (1958); Bernard W., Callen H. B., Rev. Mod. Phys. 31, 1017 (1959).
63. Schawlow A. L., Townes C. H., Phys. Rev., 112, 1940 (1958).
64. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, Vol. 1, McGraw-Hill, N.-Y., 1953 (имеется русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, том 1, ИЛ, 1958).
65. De Groot S. R., Mazur P., Non-Equilibrium Thermodynamics, In-

- ters. Publ., N.-Y., 1962 (имеется русский перевод: *Де Гроот С., Мазур П.*, Неравновесная термодинамика, изд-во «Мир», 1964).
66. *Schrödinger E.*, *Naturwiss.*, **14**, 654 (1926).
 67. *Klauder J. R.*, *Journ. Math. Phys.*, **4**, 1055 (1963); **5**, 177 (1964); *Mc Kenna J., Klauder J. R.*, *Journ. Math. Phys.*, **5**, 878 (1964).
 68. *Louisell W. H.*, *Radiation and Noise in Quantum Electronics*, McGraw-Hill, N.-Y., 1964.
 69. *Kubo R.*, *Journ. Phys. Soc. Japan.*, **12**, 570 (1957).
 70. *Glauber R. J.*, *Phys. Rev.*, **130**, 2529 (1963).
 71. *Metha C. L., Sudarshan E. C. G.*, *Phys. Rev.*, **B138**, 274 (1965).
 72. *Mandel L.*, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **74**, 233 (1959).
 73. *Glassgold A. E., Holiday D.*, *Phys. Rev.*, **A139**, 1717 (1965).
 74. *McCumber D. E.*, *Phys. Rev.*, **A135**, 1676 (1964); *Journ. Math. Phys.*, **5**, 221, 508 (1964).
 75. *Haken H.*, *Zs. f. Physik*, **190**, 327 (1966); *Sauerman H.*, *Zs. f. Physik*, **188**, 480 (1965); **189**, 312 (1966); *Risken H., Schmid C., Weidlich W.*, *Phys. Lett.*, **20**, 489 (1966).
 76. *Weiss G., Maradudin A. A.*, *Journ. Math. Phys.*, **3**, 771 (1962); *Engelman B., Levi P.*, *Journ. Math. Phys.*, **4**, 105 (1963); *Maganus W.*, *Comm. Pure Appl. Math.*, **7**, 649 (1954).
 77. *Klauder J. R., Sudarshan E. G. G.* *Fundamentals of Quantum Optics*, W. A. Benjamin, Inc., N.-Y., 1968 (имеется русский перевод: *Клаудер И. Р., Сударшан Е. Г. Г.*, Основы квантовой оптики, изд-во «Мир», 1970).
 78. *Glauber R. J.*, в книге «*Physics of Quantum Electronics*», eds. Kelley P. L., Lax V., Tannenwald P. E., McGraw-Hill, Inc., N.-Y., 1966, p. 808.
 79. *Lachs G.*, *Phys. Rev.*, **B138**, 1012 (1965). См. также *Morawitz H.*, *Phys. Rev.*, **A139**, 1072 (1965).
 80. *Freeman J. J.*, *Principles of Noise*, J. Wiley and Sons, N.-Y., 1958, p. 81.
 81. *Magill P. J., Soti R. P.*, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 911 (1966).
 82. *Risken H.*, *Zs. f. Physik*, **186**, 85 (1965).
 83. *Smith A. W., Armstrong J. A.*, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 1169 (1966).
 84. *Freed C., Haus H. A.*, *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 943 (1965).
 85. *Smith A. W., Armstrong J. A.*, *Phys. Lett.*, **19**, 650 (1966).
 86. *Freed C., Haus H. A.*, *IREE Journ. Quantum Electronics*, **QE-2**, 190 (1966).
 87. *Arecci F. T., Berne A., Burlamacchi P.*, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 32 (1966).
 88. *Camo H., Grace R. E., Walter T. J.*, *Proc. of the 1966 Rochester Conf. on Coherence and Quantum Optics*, не опубликовано.
 89. *Arecci F. T., Rodari G. S., Sona A.*, *Phys. Lett.*, **A25**, 59 (1967).
 90. *Slepian D.*, *Bell Syst. Tech. Journ.*, **37**, 163 (1958); *Grenander U., Pollack H. J., Slepian D.*, *Journ. Soc. Ind. Appl. Math.*, **7**, 374 (1959).
 91. *Rice S. O.*, *Bell Syst. Tech. Journ.*, **24**, 46 (1945).
 92. *Hald A.*, *Statistical Theory with Engineering Applications*, J. Wiley and Sons, N.-Y., 1952, Ch. 10.

Приложения

ТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ СЧЕТА ФОТОНОВ ДЛЯ ЛАЗЕРА ВБЛИЗИ ПОРОГА

*М. Лэкс, М. Цванцигер*¹⁾

Задача о флуктуациях отсчета фотонов, исследованная ранее лишь для гауссовой статистики и предельного случая малых времен измерения, решена для произвольного соотношения между временем измерения и характерным временем корреляций интенсивности, а также для произвольных марковских процессов. В частности, рассчитана функция распределения для полной интенсивности лазера вблизи порога возбуждения.

Экспериментальное изучение статистического распределения $W(\Omega)$ интенсивности света Ω за интервал времени T проводится с помощью измерения вероятности $p(m, T)$ отсчета m фотонов за интервал времени T [1]:

$$p(m, T) = \int \frac{\Omega^m}{m!} e^{-2W(\Omega)} d\Omega. \quad (1)$$

Знание функций распределения даже для малых m очень важно, однако их расчет весьма сложен, поскольку эти функции содержат информацию о многовременных корреляциях флуктуаций интенсивности. Для малых (по сравнению с временем корреляций интенсивности) времен плотность вероятности $W(\Omega)$ рассчитывается с помощью стационарного распределения интенсивности света. Это, однако, сравнительно неинтересный случай.

Для больших времен рассчитан лишь случай гауссова распределения амплитуды света [2—4], что применимо к случаю лазера в области значительно ниже порога возбуждения. В настоящей работе заполняется существующий в теории пробел для расчета поведения лазера вблизи порога, где эта задача, очевидно, является нелинейной. Наш метод справедлив для произвольных мар-

¹⁾ *Lax M., Zwanziger M., Phys. Rev. Lett., 24, No. 17, 937 (1970).*

ковских процессов, а лазер является лишь одним из частных случаев.

Функция распределения $p(m, T)$ зависит от трех параметров: $s = \Lambda_a T$, где Λ_a — ширина линии спектра флуктуаций интенсивности, а T — время измерения; p — скорость накачки, определяющая положение рабочей точки лазера; $\langle m \rangle$ — среднее число отсчетов, которое зависит от эффективности счета и геометрии установки. Расчет плотности вероятности $W(\Omega)$ более удобен, поскольку с помощью соответствующего обезразмеривания можно исключить зависимость от $\langle m \rangle = \langle \Omega \rangle$:

$$W(\Omega, s, p, \langle \Omega \rangle) = \frac{V(\omega, s, p)}{\langle \Omega \rangle}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\langle \Omega \rangle}. \quad (2)$$

Мы будем рассчитывать лаплас-компоненту выражения (2), а затем совершим обратное преобразование Лапласа.

Келли и Клейнер [5] показали, что в легко реализуемых экспериментально условиях на поглощающем детекторе вероятность $p(m, T)$ отсчета m фотонов за интервал времени T определяется многовременным квантовомеханическим средним:

$$p(m, T) = \left\langle T_N \frac{\Omega_{op}^m}{m!} e^{-\Omega_{op}} \right\rangle, \\ \Omega_{op} = \varepsilon \int_0^T b^+(t) b(t) dt, \quad (3)$$

где T_N — оператор хронологического и нормального упорядочения [6]; $b^+(t)$ и $b(t)$ — операторы рождения и уничтожения одномодового электромагнитного поля, а коэффициент ε определяет эффективность детектора и геометрию установки.

Согласно Лэксу и Луизиллу [7], для лазера, у которого атомные скорости велики по сравнению со скоростями затухания фотонов, операторы b^+ и b являются марковскими случайными переменными и удовлетворяют уравнениям движения для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации, причем случайные квантовые источники шума в этих уравнениях могут быть найдены из «первых принципов».

Было установлено [6] также динамическое соответствие между средними по времени от нормально упорядоченных многовременных квантовомеханических марковских операторов и классическими средними значениями от классических случайных переменных, соответствующих этим операторам. Если $\beta(t)$ и комплексно сопряженная к ней величина $\beta^*(t)$ — классические переменные, соответствующие $b(t)$ и $b^+(t)$, то сложное выражение (3) сводится к похожему на формулу Манделя [1] соотношению (1), в котором под $W(\Omega)$ следует теперь понимать величину

$$W(\Omega) = \left\langle \delta \left(\Omega - \varepsilon \int_0^T \rho(t) dt \right) \right\rangle, \quad \rho(t) = |\beta(t)|^2. \quad (4)$$

Вместо $W(\Omega)$ оказалось более удобным рассчитывать величину

$$M(\lambda') = \int e^{-\lambda' \Omega} W(\Omega) d\Omega, \quad (5)$$

а затем совершить обратное преобразование Лапласа. Обезразмеривая функцию $W(\Omega)$ по формуле (2) и вводя обозначение $\Lambda' = \lambda T \langle \rho \rangle$, получим

$$\begin{aligned} M(\lambda, s, \rho) &= \int V(\omega, s, \rho) \exp(-\lambda T \langle \rho \rangle \omega) d\omega = \\ &= \left\langle \exp \left[-\lambda \int_0^T \rho(t) dt \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (1) легко преобразуется к следующему виду:

$$\rho(m, T) = \int \frac{(\langle m \rangle \omega)^m}{m!} V(\omega, s, \rho) \exp(-\langle m \rangle \omega) d\omega. \quad (7)$$

Следуя методу Каца и Зигерта [8], Лэкс [9] показал, что для набора случайных марковских переменных $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots\}$ и произвольной функции ρ от переменных \mathbf{a} можно записать выражение (6) в следующем виде:

$$M(\lambda, s, \rho) = \int d\mathbf{a}_0 P_0(\mathbf{a}_0) \int d\mathbf{a} \hat{P}(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0), \quad (8)$$

где P_0 и \hat{P} удовлетворяют уравнениям

$$LP_0 = 0, \quad \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = -(L + \lambda\rho) \hat{P} \quad (9)$$

при условии

$$\hat{P}(\mathbf{a}, t_0 | \mathbf{a}_0, t_0) = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0). \quad (10)$$

Здесь L — обобщенный дифференциальный оператор Фоккера — Планка для исходного случайного процесса, а \hat{P} — условная вероятность для модифицированного процесса, когда «частицы» исчезают со скоростью $\lambda\rho$. В нашем случае осциллятора Ван дер Поля $a_1 = \beta$; $a_2 = \beta^*$ и $\beta = \sqrt{\rho} \exp(-i\varphi)$. Предположим, что L в общем случае не является эрмитовским оператором (в смысле Штурм — Лиувилля), а сопряженный к нему оператор L^+ (и оператор, сопряженный к $L + \lambda\rho$) имеет полный набор биортогональных собственных функций

$$LP_j = \Lambda_j P_j, \quad L^+ \Phi_j = \Lambda_j^* \Phi_j, \\ (L + \lambda\rho) \hat{P}_j = \hat{\Lambda}_j \hat{P}_j, \quad (L^+ + \lambda^* \rho^*) \hat{\Phi}_j = \hat{\Lambda}_j^* \hat{\Phi}_j. \quad (11)$$

Функция Грина для уравнений (9) и (10) имеет вид [10]

$$\hat{P}(\mathbf{a}, t | \mathbf{a}_0, t_0) = \sum_n e^{-\hat{\Lambda}_n T} \hat{P}_n(\mathbf{a}) \hat{\Phi}_n^*(\mathbf{a}_0), \quad t - t_0 = T \geq 0. \quad (12)$$

Для обычного процесса Фоккера — Планка, включающего рассматриваемый нами случай осциллятора Ван дер Поля, было показано [7], что из факта обратимости во времени, выраженного в форме детального равновесия, следует, что ¹⁾

$$\Phi_n^* = \frac{P_n}{P_0}, \quad \hat{\Phi}_n^* = \frac{\hat{P}_n}{P_0}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (8), получим

$$M(\lambda, s, \rho) = \sum_n \exp\left(-\frac{\hat{\Lambda}_n s}{\Lambda_n}\right) \left[\int P_n(\mathbf{a}) d\mathbf{a} \right]^2. \quad (14)$$

¹⁾ В действительности можно показать [11], что и для обобщенного процесса Фоккера — Планка выполнимость условия детального равновесия необходима и достаточна для справедливости соотношений (13).

Наш оператор Фоккера — Планка может быть записан в виде [7]

$$-L = \frac{\partial}{\partial \rho} (2\rho^2 - 2\rho\varphi - 4) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (4\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (15)$$

Хотя в операторе L переменные не разделяются, его собственные функции равны $f(\rho)\exp(i\ell\varphi)$. Интегрирование по φ в выражении (14) приводит к тому, что ненулевой вклад в $\rho(m, T)$ возникает лишь при $\ell = 0$, т. е. для чисто амплитудных флуктуаций. Обозначим через $P_j(\rho)$ собственные функции оператора L , соответствующие $\ell = 0$, и введем функцию $P_n(\rho) = \sum_j P_j(\rho) C_{jn}$. Можно теперь получить секулярное уравнение для C_{jn} и соответствующих собственных значений Λ_n :

$$\sum_i (\Lambda_i - \Lambda_n) \delta_{ij} + \lambda \rho_{ij}] C_{jn} = 0, \quad (16)$$

$$\rho_{ij} = \int d\rho \frac{P_i(\rho) \rho P_j(\rho)}{P_0(\rho)}. \quad (17)$$

Используя условие биортогональности функций $P_j(\rho)$ и $\varphi_0(\rho) = 1$, сведем выражение (14) к более простому виду

$$M(\lambda, s, \rho) = \sum_n \exp\left[-\frac{s\hat{\Lambda}_n(\lambda, \rho)}{\Lambda_n(\rho)}\right] |C_{0n}(\lambda, \rho)|^2. \quad (18)$$

Величины $\{\Lambda_i\}$ и Λ_a вычислялись Рисkenом и Волмером [12], а также Хемпстедом и Лэксом [13]. Последние авторы рассчитывали также ρ_{ij} для $i, j = 0, 1, \dots, 10$ [14].

Обычная инверсия преобразования Лапласа требует знания функции $M(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \pm i\infty$; кроме того, для больших λ неверна процедура получения матрицы Π порядка (16). Поэтому мы используем технику «вещественных осей» Беллмана и др. [15], в которой интеграл Лапласа заменяется суммированием величин $V(\omega_i)$, ($i = 1, 2, \dots$). При этом расчет $M(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots$) сводится к решению n совместных уравнений для $V(\omega_i)$. Поскольку наша процедура «негладкая», обратная матрица достаточно «плоха» (т. е. она не передает существенные свойства прямой матрицы) всюду, кроме разумно выбранных точек λ_j и ω_j . Оказалось, что

при (наилучшем) однородном расположении λ_j хорошо работает формула интегрирования Гаусса — Лагерра.

Для получения непрерывной функции $V(\omega)$, вместо того чтобы использовать набор дискретных значений $V(\omega_i)$, представим $V(\omega)$ в виде разумно подобранной функции, умноженной на полином. Необходимые n коэффициентов полинома найдем из условий совпадения с величинами соответствующих лаплас-компонент. Непрерывная функция $V(\omega)$, согласующаяся с полученным ранее дискретным набором чисел, имеет в области $(-10) \leq \rho \leq 1$ вид

$$V(\omega, s, \rho) = \frac{a^\alpha \omega^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\alpha\omega) \sum_n b_n \omega^n, \quad (19)$$

а при $1 < \rho \leq 10$

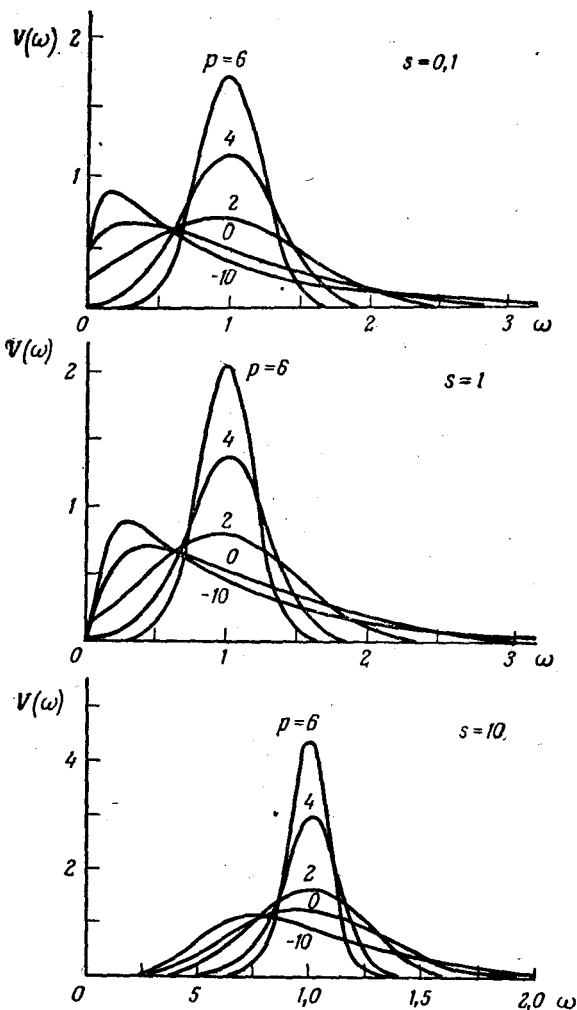
$$V(\omega, s, \rho) = N \frac{\alpha}{\beta} \exp\left[\alpha\omega - \left(\frac{\beta\omega}{2}\right)^2\right] \sum_n d_n \omega^n. \quad (20)$$

Функции в формулах (19) и (20), на которые умножаются полиномы, нормированы на единицу, а их вторые моменты почти совпадают со вторыми моментами функции $V(\omega)$ ¹⁾. Как правило, используется полином пятой степени. Таким образом, выражение (7) представляется в виде суммы простых функций с соответствующими коэффициентами.

На фиг. 1 изображена функция $V(\omega, s, \rho)$ для различных величин s и ρ . Порогу возбуждения лазера соответствует $\rho = 0$.

Ранее был подробно изучен частный случай гауссовой случайной переменной β для марковского процесса. Слепян [2] для вещественных, а Якеман и Пайк [4] для комплексных β точно рассчитали функцию $W(\Omega)$. Бедард [3] и Якеман и Пайк [4] получили точное значение функции $p(m, T)$ для комплексных β . Мы использовали эти расчеты для проверки точности нашего метода расчета $V(\omega)$. Во-первых, мы опустили слагаемое ρ^2 в (15), по-

¹⁾ Зная Λ_{0n} и ρ_{0n} (см. [10]), можно рассчитать величину $\frac{\langle(\Omega - \langle\Omega\rangle)^2\rangle}{\langle\Omega\rangle^2}$.



Фиг. 1. Плотность вероятности $V(\omega, s, p)$ как функция ω . Полная нормированная интенсивность света лазера вблизи порога

$$\omega = \int_0^T \rho(t) dt / T \langle \rho \rangle. \text{ Здесь } s = \Lambda_a T, \Lambda_a = \langle (\Delta \rho)^2 \rangle \int_0^\infty \langle \Delta \rho(t) \Delta \rho(0) \rangle dt -$$

ширина линии спектра флуктуаций интенсивности, а p_0 определяет рабочую точку осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации, принятого в качестве модели лазера. Порогу возбуждения соответствует $p = 0$.

лучили в замкнутом виде величины P_n , Λ_n и ρ_{ij} и применили развитый в настоящей работе метод, пользуясь функцией (19). Во-вторых, мы исходили из замкнутого выражения для $M(\lambda)$ (см. формулу (8.63) работы [9] и работу [4]) и проводили обратное преобразование Лапласа обычным методом вычетов. В обоих случаях согласие было не хуже одного процента.

Эксперименты [16] подтверждают справедливость модели осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации для лазера вблизи порога возбуждения. Было измерено [17] несколько факториальных моментов функции $p(m, T)$ для конечных T , $p \approx -10$ и $p \approx -3,5$. Авторам не известны функции $p(m, T)$ в области порога возбуждения¹⁾.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandel L., Proc. Phys. Soc. (London), 72, 1037 (1958).
2. Stepan D., Bell Syst. Tech. Journ., 37, 163 (1958).
3. Bédard G., Phys. Rev., 151, 1038 (1966); Bédard G., Chang J. C., Mandel L., Phys. Rev., 160, 1496 (1967).
4. Jakeman E., Pike E. R., Journ. Phys. Am. Proc. Phys. Soc., 1, 128 (1968).
5. Kelley P. L., Kleiner W. H., Phys. Rev., 136, 316 (1964).
6. Lax M., Phys. Rev., 172, 350 (1968).
7. Lax M., Louisell W. H., IRE Journ. Quant. Electr., 3, 47 (1967).
8. Кас М., Trans. Amer. Math. Soc., 59, 401 (1946); Berkley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability, Univ. Calif., Berkley, 1951, p. 189; Siegert A. A., IRE Trans. Inform. Theory, 3, 38 (1957); 4, 4 (1958).
9. Lax M., Rev. Mod. Phys., 38, 359 (1966).
10. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, N.-Y., 1953 (имеется русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958).
11. О связи обратимости во времени, детального равновесия и эрмитовости см. Lax M., Brandeis Univ. Summer Institute Lectures in Theor. Physics: Statistical Physics, Phase Transitions and Superfluidity, eds. Chretien M., Gross E. P., Desser S., Gordon and Breach, N.-Y., 1968 (настоящая книга, гл. 8).

¹⁾ В следующей работе Лэкса и др. [Journ. of Phys. A3, L52, (1970)] приведены данные по измерению функции счета фотонов для лазера вблизи порога возбуждения при $T = 3 \div 300$ мс. Рассчитанные с помощью этой функции второй, третий и четвертый факториальные моменты согласуются с результатами данной теоретической работы с точностью порядка нескольких процентов. — Прим. ред.

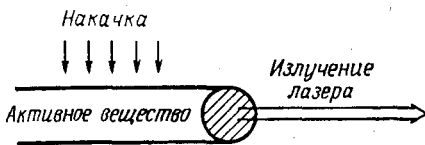
12. *Risken H., Vollmer H. D.*, Zs. f. Phys., **201**, 323 (1967).
13. *Hempstead R. D., Lax M.*, Phys. Rev., **161**, 350 (1967).
14. *Hempstead R. D., Lax M.*, не опубликовано.
15. *Bellman R. E., Kalaba R. E., Lockett J. A.*, Numerical Inversion of the Laplace Transform, American Elsevier Publ. Co, N.-Y., 1966.
16. *Arecchi F. T., Rodari G. S., Sona A.*, Phys. Lett., **A25**, 59 (1967); *Chang R. F., Detenbeck R. W., Korenman V., Alley C. O., Hochuli V.*, Phys. Lett., **A25**, 272 (1967); *Arecchi F. T., Giglio M., Sona A.*, Phys. Lett., **A25**, 341 (1967); *Davidson F., Mandel L.*, Phys. Lett., **A25**, 700 (1967).
17. *Chang R. F., Korenman V., Detenbeck R. W.*, Phys. Lett., **A26**, 417 (1968).

ИЗЛУЧЕНИЕ ЛАЗЕРА — НОВЫЙ ПРИМЕР ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Г. Хакен¹⁾

Хотя излучение лазера представляет собой систему, далекую от теплового равновесия, порог возбуждения лазера обладает всеми особенностями, характерными для фазового перехода: изменение симметрии, нестабильность «жесткой моды», критические флуктуации, восстанавливающие симметрию возбуждения, недиагональный дальний порядок, наличие параметра порядка. Распределение вероятности для напряженности электрического поля излучения лазера имеет такой же вид, как и распределение вероятности для волновой функции пары в теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау. Тем самым доказано, что излучение лазера испытывает переход второго рода при достижении порога возбуждения.

Всем хорошо известен принцип работы лазера [1]. Лазер состоит из активного вещества, атомы которого возбуждены под влиянием внешней накачки. Специальные геометрические приспособления, например ограниченное зеркало, заставляют световые лучи двигаться преимущественно в одном направлении. Индуцированное излучение также направляет лучи в этом выделенном направлении (фиг. 1).



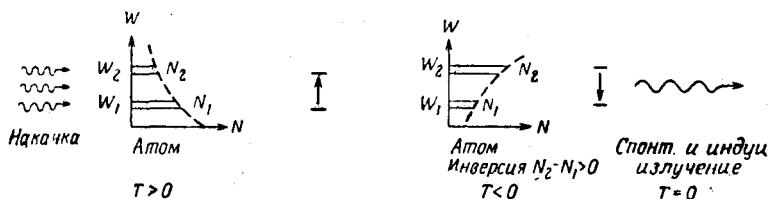
Фиг. 1.

Рассмотрим этот процесс несколько подробнее на языке одного атома. Предположим, что этот атом может находиться на одном из двух уровней с энергиями W_1 и W_2 . В состоянии теплового равновесия атом с подавляющей вероятностью находится в нижнем состоянии; верхний уровень практически свободен. Соответствующе-

¹⁾ *Haken H., Ferstkörperprobleme, X (1970), S. 351.*

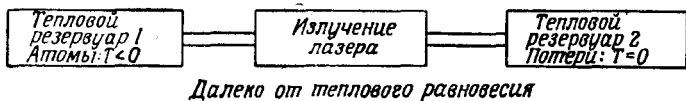
щие средние числа размещений атомов по уровням (населенности) N_1 и N_2 показаны на фиг. 2 двойными линиями.

Под воздействием накачки атом переходит из нижнего состояния в верхнее и возникает положительная инверсия населенности $N_2 - N_1$. Распределение, показанное в левой части фиг. 2, описывается формулой Больцмана с положительной температурой. Можно формально описать правый график фиг. 2 распределением



Фиг. 2.


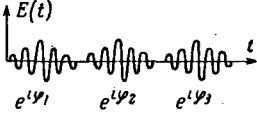
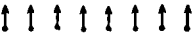

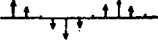
Больцмана с отрицательной температурой. Возбужденный атом может перейти в нижнее состояние путем спонтанного излучения или, если уже есть кванты света данной частоты, путем индуцированного излучения. Затем лазерный луч в конце концов опять поглотится веществом, причем температуру вещества можно считать равной нулю благодаря высокой энергии светового кванта ($kT \ll \hbar\omega$).



Фиг. 3.

С точки зрения термодинамики излучение лазера связано с двумя тепловыми резервуарами. Тепловым резервуаром 1 являются атомы с отрицательной температурой, а тепловой резервуар 2 (с $T = 0$) ответствен за потери. Совершенно ясно, что лазерное излучение представляет собой систему, находящуюся далеко от состояния теплового равновесия (фиг. 3). С другой стороны,

когда мы говорим о фазовых переходах как о физических явлениях [2], то мы обычно говорим о термически равновесных системах, например о переходе твердое тело — жидкость, ферромагнитном переходе, сверхпроводимости или сверхтекучести. Поэтому на первый взгляд можно прийти к ошибочному представлению о невозможности фазового перехода для излучения лазера.

Термодинамическая фаза	Ферромагнетик	Лазер
Неупорядоченное состояние		
Упорядоченное состояние		
Изменение симметрии	Выделено одно направление	Выделена одна оптическая фаза
Восстановление симметрии	Спиновые волны 	Диффузия фазы $\varphi(t)$

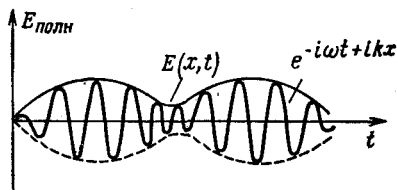
Фиг. 4.

Однако на фиг. 4 показано, что даже при поверхностном рассмотрении можно увидеть определенные аналогии [3]. Спины в ферромагнетике при температурах выше температуры Кюри статистическим образом распределены в пространстве, т. е. мы имеем дело с неупорядоченной термодинамической фазой. Если на лазер действует слабая накачка, т. е. он является обычным источником света, то излучение состоит из спонтанно возбужденных цугов волн, причем отдельные цуги характеризуются статистическим распределением оптических фаз. Наоборот, при сильной накачке лазер обладает весьма резко выраженной когерентностью. Это указывает на высокую стабильность рассматриваемой фазы излучения. Таким образом, мы можем, сначала несколь-

ко искусственно, сформулировать следующую аналогию: в неупорядоченном состоянии отдельные фазы излучения лазера статистически распределены, а в упорядоченном состоянии все они должны иметь вполне определенное значение.

В ферромагнетике, как и в лазере, при фазовом переходе происходит изменение симметрии. В то время как в неупорядоченном состоянии все направления в ферромагнетике (т. е. все фазы в лазере) равноправны, в упорядоченном состоянии одно направление (одна оптическая фаза) предполагается выделенным. Известно, что для ферромагнетика симметрия восстанавливается благодаря возбужденным состояниям, например спиновым волнам. Соответственно можно представить себе медленное изменение фазы лазерного излучения как диффузию фазы.

Рассмотрим теперь, как меняются свойства лазерного излучения при приближении от неупорядоченной



Фиг. 5.

фазы к упорядоченной. Для этого введем напряженность электрического поля и рассмотрим его составляющую, медленно меняющуюся в пространстве и во времени:

$$E_{\text{полн}}(x, t) = E(x, t) e^{-i\omega t + lkx} + \text{К. С.} \quad (1)$$

Амплитуда $E(x, t)$ — медленно меняющаяся величина (фиг. 5), для которой легко получить уравнение, допускающее вполне наглядную интерпретацию [4]:

$$\dot{E} - c \frac{dE}{dx} = - \underset{\text{Потери}}{\kappa E} + \underset{\text{Рост}}{gE} + \sum_{\substack{I \\ F(x, t) \text{ — спонтанное} \\ \text{излучение}}} \text{const } p_I e^{i\varphi_I}. \quad (2)$$

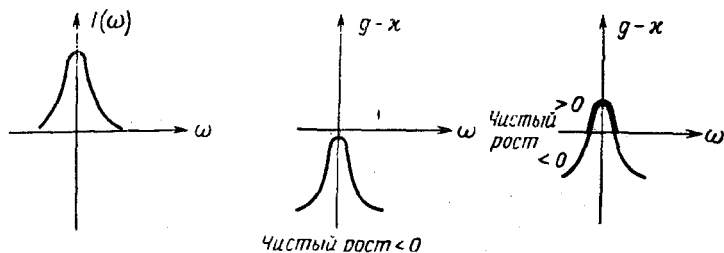
Если пока не рассматривать слагаемое $\left(-c \frac{dE}{dx}\right)$ в левой части уравнения (1), то уравнение имеет следующую

ший смысл: амплитуда поля меняется во времени как из-за потерь ($-\kappa E$), так и благодаря росту gE , вызванному вынужденным излучением, которое представляет собой когерентный процесс. Наконец, последнее слагаемое в правой части ответственно за статистическое распределение фазы, связанное со спонтанным излучением.

Обсудим несколько подробнее смысл коэффициента усиления g . Интенсивность излучения отдельных атомов I в функции от частоты ω практически представляет собой лоренцеву функцию. Ясно, что атом в основном будет усиливать частоты, совпадающие с его резонансной частотой. Чем дальше частота от резонансной, тем меньше она будет усиливаться. Рост напряженности поля пропорционален $I(\omega)$, а также инверсии $N_2 - N_1$, т. е. разности числа атомов, находящихся в возбужденном и в основном состояниях:

$$g \sim I(\omega)(N_2 - N_1). \quad (3)$$

Кривая чистого роста (фиг. 6) получится, если из кривой роста вычесть кривую потерь, практически не

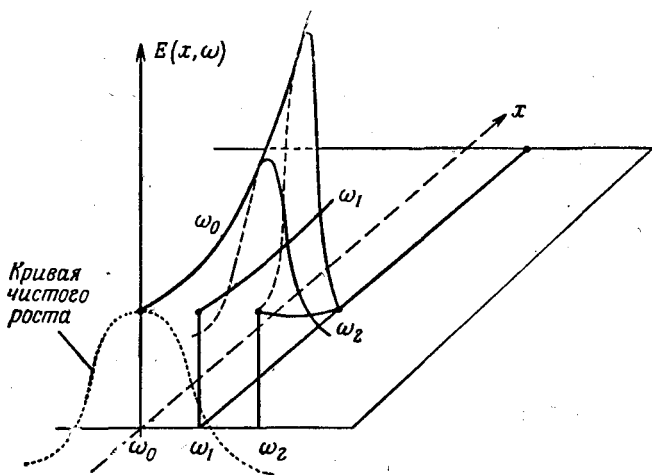


Ф и г. 6.

зависящую от частоты. При слабой накачке результирующая кривая лежит ниже оси абсцисс, т. е. спонтанно возникшее излучение экспоненциально затухает. Если эта кривая лежит выше оси абсцисс, то амплитуда поля будет возрастать со временем. На фиг. 7 пунктиром показана кривая чистого роста.

Пусть амплитуда зависит от координаты x (также можно было бы ввести временную ось). Рассмотрим, как

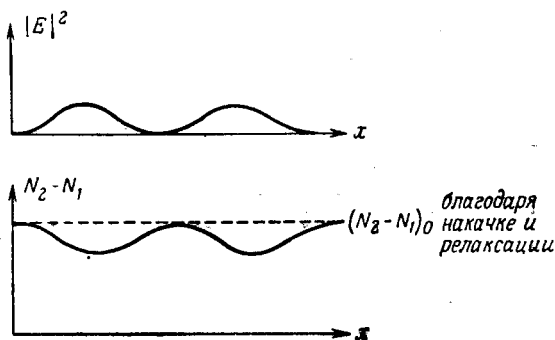
будут возрастать волны различных частот. Предположим, что вначале волны с разными частотами (ω_0 , ω_1 , ω_2) имели одинаковую амплитуду. Максимальное усиление на частоте ω_0 , и, кроме того, эта волна в наибольшей степени возбуждена. Усиление на частоте ω_1 заметно меньше, однако эта волна еще возбуждена. Кривая чистого роста в области частоты ω_2 лежит ниже оси



Фиг. 7.

абсцисс, т. е. такая волна будет затухать. Таким образом, мы получаем все более узкий профиль интенсивности. Экспоненциальный рост можно интерпретировать как появление неустойчивости. Такая неустойчивость моды хорошо известна в теории фазовых переходов. Однако для фазовых переходов в состоянии теплового равновесия неустойчивой становится мода с нулевой частотой, так называемая «мягкая мода». Здесь же неустойчивой становится мода с атомной частотой ω_0 , т. е. мы имеем пример «твердой моды». При достижении порога возбуждения лазера $\kappa = g$ эта «твердая мода» обычно становится макроскопической, образуя конденсат. При этом особенно возрастают спонтанные флуктуации, описываемые последним слагаемым в правой части

уравнения (2). Так появляются критические флуктуации, хорошо известные из теории фазовых переходов. Благодаря селективному усилению волн с различными частотами происходит все более ярко выраженное сужение линии. Разумеется, амплитуда нестабильной моды не может расти до бесконечности. Для решения этого вопроса необходимо уточнить уравнение для лазера выше точки перехода. Вместе с ростом интенсивности света, излучаемого атомами, в такой же степени меняется инверсия населенности уровней. Можно поэтому думать, что инверсия будет понижаться, как это показано на фиг. 8. В первом приближении можно считать, что



Ф и г. 8.

уменьшение инверсии пропорционально квадрату напряженности поля:

$$N_2 - N_1 = (N_2 - N_1)_0 - C_1 |E(x, t)|^2 \quad (4)$$

Подставляя (4) в функцию роста $g(\omega)$:

$$g(\omega) = g_0(\omega) - g_1(\omega) |E(x, t)|^2, \quad (5)$$

приходим к уравнению для лазера, которое теперь является нелинейным:

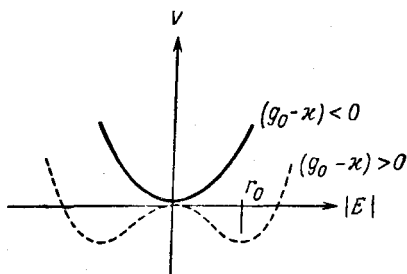
$$E - c \frac{dE}{dx} = (g_0 - \kappa) E - g_1 E |E|^2 + F(x, t). \quad (6)$$

В пренебрежении флуктуациями $F(x, t)$ решение уравнения (6) имеет вид $E = \text{const}$. Для кривой чистого роста, лежащей ниже оси абсцисс, $E = 0$, а выше $E =$

$$= r_0 \exp(i\varphi_0):$$

$$F(x, t) \equiv 0: \quad \begin{array}{l} \text{при } g_0 - \kappa < 0 \quad E = 0, \\ \text{при } g_0 - \kappa > 0 \quad E = r_0 \exp(i\varphi_0). \end{array} \quad (7)$$

Термодинамик сразу скажет, что напряженность электрического поля E играет роль параметра порядка, равного нулю в неупорядоченной фазе ниже точки фазового перехода и отличного от нуля в упорядоченной фазе выше точки перехода. Оптическая фаза φ_0 в (7) характеризует изменение симметрии. Кратко остановимся на тех изменениях, которые произойдут при учете флуктуаций, описывающих спонтанное излучение. Для



Ф и г. 9.

этого в левой части уравнения (6) чисто формально добавим слагаемое $m\ddot{E}$ и опустим производную по координате $\frac{dE}{dx}$. Если понимать под E двумерную координату частицы $g = \xi + i\eta$, то уравнение

$$m\ddot{E} + \dot{E} = (g_0 - \kappa)E + g_1 E |E|^2 + F \quad (8)$$

представляет собой уравнение движения в потенциальном поле (фиг. 9)

$$V(|E|) = \frac{1}{2}(\kappa - g_0)|E|^2 + \frac{1}{4}g_1|E|^4 \quad (8a)$$

и в поле флуктуаций F . Ниже порога возбуждения лазера частица всегда возвращается в начало координат, а выше порога она флуктуирует относительно стабильной координаты r_0 , так что

$$|E| = r_0 + \rho(x, t),$$

где $\rho(x, t)$ описывает малые колебания. Так как потенциал зависит только от модуля амплитуды, на фазу не действуют никакие силы, и под влиянием связанной с флуктуациями силы F фаза не будет диффундировать. Тогда

$$E = [r_0 + \rho(x, t)] e^{i\varphi(x, t)}. \quad (9)$$

Из нашего рассмотрения критической моды видно принципиальное различие статистических свойств лазерного излучения выше и ниже порога возбуждения. Однако фаза меняется в пространстве и во времени, и такая пространственная и временная диффузия фазы приводят к восстановлению симметрии.

Остановимся на одном существенном моменте. До сих пор напряженность электрического поля всюду считалась классической величиной. Однако спонтанная эмиссия является квантовомеханическим процессом, так что надо считать величину E оператором. Можно тем не менее представлять себе, что во всех предыдущих рассуждениях подразумевается, что E и флуктуации F являются не операторами, а c -числами. Вместе с E операторами являются также величины ρ и φ . Существенно, однако, что стабильная амплитуда r_0 по-прежнему остается c -числом. Это приводит к важным следствиям. Рассмотрим среднее значение величины E : $\langle E \rangle = \text{Sp}(\rho E)$. $\text{Sp}(\rho E)$ обращается в нуль, когда матрица ρ диагональна. Если, с другой стороны, вычислить с помощью (9) среднее значение

$$\langle E(x, t) E(x', t') \rangle \approx \langle E(x, t) \rangle \langle E(x', t') \rangle \neq 0, \quad (10)$$

то получается величина, отличная от нуля. Отсюда следует, что матрица плотности ρ обязательно должна иметь недиагональные матричные элементы, тогда $\text{Sp}(\rho E) \neq 0$. Таким образом, мы имеем дело с «недиагональным дальним порядком», который уже давно постулировался в теориях сверхпроводимости и сверхтекучести [5].

Итак, существует тесная аналогия между переходом излучения лазера из неупорядоченной термодинамической фазы в упорядоченную и обычными фазовыми переходами. Возникает вопрос, насколько далеко распро-

страняется эта аналогия и не является ли она также и количественной. Как мы видели, изменение величины E описывается уравнением (6). С точки зрения квантовой механики естественно выяснить, каким должен быть оператор Гамильтона H , чтобы из равенства $\dot{E} = \frac{i}{\hbar} [H, E]$ следовало известное уравнение движения для E :

$$\dot{E} = (g_0 - \kappa) E - g_1 | E \rangle \langle E | \leftrightarrow \frac{i}{\hbar} [H, E]. \quad (11)$$

Грэхем и автор [4] получили следующее выражение для H :

$$H = C_1 i \int E^+ E dx - \\ - C_2 i \int E^+(x) E^+(x') E(x) E(x') dx dx' + \dots \quad (12)$$

Билинейное слагаемое E^+E в (12) приводит к линейным членам в уравнении движения, а слагаемое четвертого порядка по E — к кубическим членам в уравнении движения.

Для бозе-газа с дельтообразным взаимодействием гамильтониан в переменных ψ^+ и ψ имеет такой же вид:

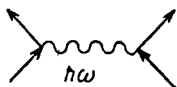
$$H = \dots + C_3 \int \psi^+(x) \psi^+(x') \psi(x) \psi(x') dx dx' + \dots \quad (13)$$

с той лишь разницей, что в случае лазера константы перед интегралом мнимые, а в случае бозе-газа вещественные. Возникает, таким образом, вопрос, сохраняется ли аналогия со сверхтекучестью и сверхпроводимостью, несмотря на появление указанного различия. В обоих случаях появление прямого взаимодействия между величинами E (или ψ) связано с взаимодействием с другими системами: в случае сверхпроводника с электрон-фононным взаимодействием, в случае излучения с взаимодействием с атомами. При исключении соответствующей подсистемы во втором порядке теории возмущений возникает эффективное взаимодействие, определяемое квадратом матричного элемента, деленным на разность энергий, причем при виртуальных переходах, как это имеет место в сверхпроводниках, не выполняется закон

сохранения энергии. Как правило, можно пренебречь малым затуханием $i\gamma$, что приводит к вещественному эффективному взаимодействию.

При излучении квантов света происходят реальные переходы, так что закон сохранения энергии выполняется и остаются лишь члены с затуханием, которые приводят к мнимому коэффициенту в операторе Гамильтона (фиг. 10). Таким образом, мы выяснили, что на языке оператора Гамильтона не существует полной аналогии с теорией сверхпроводимости или сверхтекучести.

Виртуальное
взаимодействие



$$\sim \frac{|M|^2}{\Delta E - \hbar\omega + i\gamma}$$

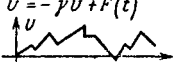
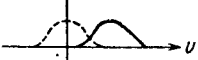
Реальное
взаимодействие

$$\sim \frac{|M|^2}{0 + i\gamma}$$

Фиг. 10.

Далее речь будет идти о полученных Грэхемом и автором результатах изучения такого типа фазовых переходов. Мы использовали имеющиеся и разработали новые методы, в известном смысле аналогичные аппарату статистической механики. На фиг. 11 показаны два метода изучения броуновского движения. При рассмотрении броуновского движения исследуются изменения во времени скоростей v отдельных частиц. Из-за внешних воздействий (со стороны окружающей жидкости) частицы тормозятся, причем сила торможения характеризуется константой затухания γ . Частицы жидкости статистически воздействуют на броуновские частицы, что описывается, согласно Ланжевону, флуктуационной силой $F(t)$. Учет этих сил позволяет получить скорость v как функцию времени. Аналогичный вид имеют уравнения (2) — (6) для лазера с тем лишь отличием, что здесь равенства квантовомеханические, а не классические. Величина g соответствует силе трения; она может быть отрицательной и может зависеть от E . Флуктуационная сила $F(t)$ описывает спонтанное излучение.

Наряду с методом Ланжевена в статистической механике хорошо известен метод уравнений Фоккера — Планка. При этом исследуется изменение во времени распределения f скорости v . Эта функция распределения позволяет найти все статистические величины, и с ее помощью можно вычислить соответствующие средние

Метод	Проблема	
	Классическое броуновское движение	Лазер (квантовая теория поля)
Уравнение Ланжевена	$\dot{v} = -\gamma v + F(t)$ 	$\dot{E} - c \frac{dE}{dx} = -gE + F(t)$
Уравнение Фоккера — Планка	$\frac{df}{dt} = \gamma \frac{d}{dv}(vf) + g \frac{d^2 f}{dv^2}$ 	$E(x)$ Оператор! Непрерывная функция x $f(E)??$
Уравнение для матрицы плотности	X	$\dot{\rho} = L\rho$ Например, $\dot{\rho} = g[E_{\omega}^+, E_{\omega}\rho] + \dots$ (одно колебание)

Фиг. 11.

значения. Какая же величина аналогична функции распределения в случае лазера, описываемого квантовомеханически? Прежде всего заметим, что не возникает трудностей с функцией распределения для операторов E . В случае квантовомеханических систем существует уравнение для матрицы плотности $\dot{\rho} = L\rho$. Например, для отдельного колебания, характеризуемого операторами E^+ , E , типичные слагаемые в уравнении $\dot{\rho} = L\rho$ имеют вид

$$\dot{\rho} = g([E^+, \rho E] + [E^+ \rho, E]) + \dots \quad (14)$$

Возникает вопрос о том как перейти от этого уравнения для матрицы плотности к уравнению, содержащему классические функции распределения. Такой пере-

ход осуществляется с помощью введения распределения квазивероятностей. Подобное распределение было впервые введено Вигнером [7], а затем исследовалось разными способами [8]. При этом операторам E и E^+ сопоставляются классические величины u и u^* . Затем с помощью матрицы плотности строят среднее значение некоторой экспоненциальной функции и переходят к ее фурье-компоненте, являющейся, естественно, функцией классических величин u и u^* . Для одной степени свободы

$$\begin{aligned} u &\leftrightarrow E \\ u^* &\leftrightarrow E^+ \text{ оператор } \left(\sim x, \frac{d}{dx} \right) \end{aligned}$$

$$f(u, u^*, t) = \int e^{-i\xi u} e^{-i\xi^* u^*} \text{Sp} (e^{i\xi E} e^{-i\xi^* E^+} \rho) d\xi d\xi^*, \quad (15)$$

где ρ — матрица плотности. Вейдлик и Хааке [6] показали, что для такой функции распределения можно получить уравнение Фоккера — Планка.

Грэхем [9] выполнил аналогичный расчет для непрерывного случая, т. е. многих степеней свободы. В этом случае функция распределения f заменяется функционалом, удовлетворяющим некоторому уравнению, в которое входят функциональные производные и нелинейные по u слагаемые:

$$\begin{aligned} \text{непрерывный случай} \quad u(x) &\leftrightarrow E(x), \\ \text{много степеней свободы} \quad u^*(x) &\leftrightarrow E^+(x), \\ \text{функционал} \quad f[u(x), u^*(x)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение Фоккера — Планка

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \int dx \frac{\delta}{\delta u(x)} (u(x), f) + \dots \\ \dots + \iint Q(x, x') \frac{\delta^2 f}{\delta u(x) \delta u^*(x')} dx dx'. \end{aligned}$$

В уравнение (16) входят нелинейные по $u(x)$ слагаемые.

Для стационарного случая вблизи порога возбуждения лазера практически точно применимо уравнение (16), т. е. [10] для лазера

$$f(u, u^*) = N \exp \left[-\frac{B(u, u^*)}{Q} \right],$$

$$B = \int \left[\tilde{\alpha} |u(x)|^2 + \tilde{\beta} |u(x)|^4 + \tilde{\gamma} \left| \left(\frac{d}{dx} - i \frac{\omega_0}{c} \right) u(x) \right|^2 \right] dx, \quad (17)$$

где $u(x)$ — напряженность поля; $N_2 - N_1$ — инверсная населенность уровней; $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(d_{\pi} - d)$, $d_{\pi} = (N_2 - N_1)_{\pi}$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} > 0$; индекс « π » означает, что соответствующая величина относится к порогу возбуждения лазера.

Функционал f является простым экспонентом и зависит от характеристик поля в одной точке x . Эта величина определяет вероятность данной конфигурации с данным распределением световых волн. Как уже говорилось, в случае теплового равновесия Q должно быть пропорционально kT .

Обратим внимание на то, что в (17) рядом с квадратичным по u членом стоит слагаемое $|u|^4$, а также входят производные по координате. В (17) входит также резонансная частота излучения ω_0 .

Величина $\tilde{\alpha}$ пропорциональна разности инверсий населенностей атомов на пороге возбуждения и при большей мощности накачки; при пороговом значении $d = d_{\pi}$ величина $\tilde{\alpha}$ меняет знак.

Когда Грэхем и автор внимательно посмотрели на выражение (17), то увидели много общего с теорией сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау. В теории сверхпроводимости, как и вообще в термодинамике, можно с помощью свободной энергии записать вероятность данной конфигурации, зависящую от волновой функции пары. В выражении Гинзбурга — Ландау содержатся квадратичный член, слагаемое четвертого порядка и слагаемое, содержащее пространственные производные:

$$f(\psi, \psi^*) = N \exp \left[- \frac{F(\psi, \psi^*)}{kT} \right],$$

$$F = \int \left\{ \alpha |\psi(x)|^2 + \beta |\psi(x)|^4 + \right. \quad (18)$$

$$\left. + \frac{1}{2m} |[\nabla - i2eA(x)]\psi(x)|^2 \right\} d^3x.$$

Видна полная аналогия выражений (17) для лазера и (18) для теории Гинзбурга — Ландау. Вместо константы ω_0 входит одномерный векторный потенциал $A(x)$. Итак, мы установили, что вблизи точки фазового перехода лазер должен иметь такие же статистические свойства, как и сверхпроводник.

Обсудим теперь вопрос о наиболее вероятных конфигурациях. Последнее слагаемое в (18) всегда положительно, и так как в показателе экспоненты, определяющей распределение вероятностей, стоит знак минус, то чем меньше это слагаемое, тем данная конфигурация вероятнее. Рассматриваемое слагаемое обращается в нуль, когда $u(x)$ равно

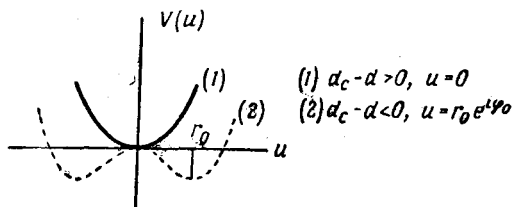
$$u(x) = ue^{ik_0x} \frac{1}{\sqrt{V}}, \quad (19)$$

где $k_0 = \omega/c$, а V — объем системы. Так мы опять пришли к «твердой моде».

Ограничимся теперь рассмотрением амплитуды этой моды и исследуем зависимость первого слагаемого в (20), обозначенного через $V(u)$, от инверсии населенностей:

$$N \exp \left\{ - \int \left[\frac{\tilde{\alpha}(d_{\pi} - d) |u(x)|^2 + \tilde{\beta} |u(x)|^4 + \tilde{\gamma} \left| \left(\frac{d}{dx} - \frac{i\omega_0}{c} \right) u(x) \right|^2 \right] dx \right\}. \quad (20)$$

Второе слагаемое в (20) обращается в нуль при подстановке в него (19). При малых величинах инверсии



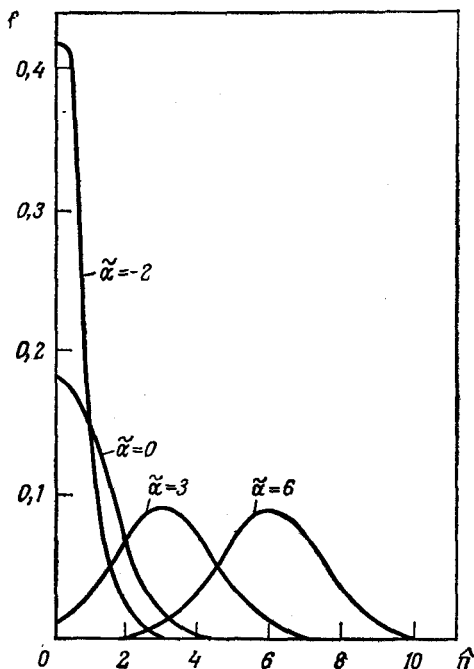
Фиг. 12.

$V(u)$ положительно и представляет собой параболическую функцию. Но вероятность максимальна при минимальных значениях $V(u)$, поэтому мы немедленно получаем, что стабильной или наиболее вероятной является конфигурация с $u = 0$. Когда инверсия населенностей превышает критическую, функция $V(u)$ ведет себя иначе. Стабильным состояниям соответствует $|u|^2 = \text{const}$ или $u = r_0 e^{i\varphi}$ (фиг. 12).

Для удобства приведем выражение f для одной единственной моды (фиг. 13):

$$f = N \exp \left[-\frac{\tilde{\alpha} (d_{\text{п}} - d) |u|^2 + \tilde{\beta} |u|^4}{Q} \right]. \quad (21)$$

Эта функция была впервые найдена Рискенем [11], а затем подробно изучена многими экспериментаторами, подтвердившими правильность формулы (21).



Фиг. 13.

Таким образом, как в случае одной моды, так и в непрерывном случае многих мод лазер хорошо описывается теорией Ландау фазовых переходов второго рода [12].

Как мы видели, можно представить свободную энергию F в таком же виде, как и введенную выше функцию V . В теории Ландау F является функцией параметра по-

рядка и разлагается по этому параметру (табл. 1). Этому соответствует разложение нашей величины B по степеням u .

Таблица 1

Ландау: $e^{-F/kT}$
 Свободная энергия
 $F(T, \psi) = F_0(T) + \alpha(T)\psi^2 + \beta(T)\psi^4$
 $\alpha(T) = a(T - T_c)$

Лазер: $e^{-B/Q}$
 $B(d, u) = B_0(d) + \bar{\alpha}(d)u^2 + \bar{\beta}u^4$
 $\bar{\alpha}(d) = \bar{a}(d_c - d)$

Температура $T \leftrightarrow -d$ Параметр накачки
 $T_c \leftrightarrow -d_c$
 Параметр порядка
 $\psi \leftrightarrow u$
 Состояния

Энтропия

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T} \qquad \tilde{S} = + \frac{\partial B}{\partial d}$$

$$S = S_0 \qquad \text{Неупорядоченное} \qquad \tilde{S} = \tilde{S}_0$$

$$S = S_0 + \frac{a^2}{2\beta} (T - T_c) \underbrace{\text{Упорядоченное}}_{\text{Непрерывно}} \qquad \tilde{S} = \tilde{S}_0 + \frac{\bar{a}^2}{2\bar{\beta}} (d_c - d)$$

Теплоемкость

$$C = T (\partial S / \partial T) = \begin{cases} T \partial S_0 / \partial T & \text{Неупорядоченное} \\ T \partial S_0 / \partial T + \frac{a^2 T_c}{2\beta} & \text{Упорядоченное} \end{cases} \qquad \tilde{C} = d \frac{\partial \tilde{S}}{\partial d} = \begin{cases} d \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial d} \\ d \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial d} - \frac{\bar{a}^2}{2\bar{\beta}} d_c \end{cases}$$

Разрывно

Для случая термодинамического равновесия в точке фазового перехода T_c меняет знак величина α , т. е. $\alpha = a(T - T_c)$. Точно так же в нашем случае знак параметра накачки меняется, и этот параметр из отрицательного становится положительным. Сравнение правого

и левого столбцов табл. 1 показывает, что температура T соответствует параметру накачки d . Приняв эту аналогию, можно перенести на наш случай все термодинамические соотношения. Определим величину типа энтропии. Для этого нужно было F дифференцировать по T ; здесь этому соответствует производная от B по d . Как и в теории Ландау, энтропия в рассматриваемом случае непрерывно меняется при переходе из упорядоченной фазы в неупорядоченную. Производная от энтропии по температуре дает, как известно, теплоемкость, которая в данном случае имеет разрыв в точке перехода. Это как раз и является характерной чертой фазовых переходов второго рода.

Итак, резюмируем: лазер представляет собой пример системы, далекой от состояния теплового равновесия, но находящейся в своеобразном равновесии, которое можно назвать «потокосым» равновесием (Fließ-Gleichgewicht). В зависимости от величины накачки возможны различные состояния равновесия. При переходе из одной равновесной фазы в другую происходят такие же явления, как при фазовом переходе второго рода в термодинамически равновесных системах.

В заключение я хочу остановиться на вопросе о том, является ли лазер единственным примером фазового перехода в системах, далеких от состояния теплового равновесия, или существуют другие похожие явления. Соответствующие примеры имеются в нелинейной оптике, например параметрический осциллятор. Поэтому мы надеемся, что наши методы применимы и к другим задачам, например к исследованию эффекта Гана. Томас [2] показал, что плазменные колебания могут быть той мягкой модой, которая ответственна за неустойчивость.

Наконец, можно сослаться совсем на другую область — биологию. Фрёлх [13] недавно заметил, что в биологических системах важную роль играют определенные коллективные колебания, возбужденные гораздо выше порога теплового равновесия, причем опять выделена «оптическая фаза». Из проведенного рассмотрения следует, что при увеличении подвода энергии некоторые системы не только количественно меняют свои свойства,

но могут претерпевать большие качественные изменения. Возможно поэтому, что распространение наших исследований на биологические системы может оказаться небезынтересным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Введение в теорию лазеров дано в статье *Haken H.*, Handbuch der Physik, Bd XXV, 2 с, Springer Verlag, Heidelberg, 1970.
2. Прекрасный обзор современного состояния проблемы фазовых переходов был сделан Томасом на пленарном заседании 34-го физического съезда в Зальцбурге в 1969 г. Томас кратко остановился на фазовых переходах в системах, далеких от состояния теплового равновесия. Настоящая работа представляет собой ответ на некоторые вопросы, поставленные Томасом в конце своего доклада.
3. На существование такой аналогии было указано, например, в работе *Haken H., Weidlich W.*, Proc. der Varenna Sommerschule 1967 über Quantenoptik.
4. Строгая теория для непрерывного спектра содержится в работе *Graham R., Haken H.*, Zs. f. Physik, 213, 420 (1968). Случай дискретных колебаний рассматривается в [1].
5. *Penrose O.*, Phil. Mag., 42, 1373 (1951); *Penrose O., Onsager L.*, Phys. Rev., 104, 576 (1956).
Обобщение этого рассмотрения для случая сверхпроводников приведено в работе *Yang C. N.*, Rev. Mod. Phys., 34, 694 (1962).
6. *Weidlich W., Haake F.*, Zs. f. Physik, 185, 30; 186, 203 (1965). В этих работах используется недиагональное представление. Лэкс и Лунзлль, как и Глаубер [8], работали в диагональном представлении. Детали изложены в [1]. Вывод точного обобщенного уравнения Фоккера — Планка для произвольной квантовой системы содержится в работе *Haken H.*, Zs. f. Physik, 219, 411 (1969).
7. *Wigner E.*, Phys. Rev., 40, 749 (1932).
8. *Glauber R. J.*, Phys. Rev., 130, 2529 (1963); 131, 2766 (1965).
9. *Graham R.*, Dissertation, Stuttgart, 1969; *Graham R., Haken H.*, Zs. f. Physik, 234, 193; 235, 166 (1970).
10. *Graham R., Haken H.*, Phys. Lett., A29, 530 (1969). В отличие от выражения (1) здесь при замене $E(x)$ на $u(x)$ не отщепляется множитель $\exp(ikx)$. О спаренных дискретных модах см. *Haken H.*, Zs. f. Physik, 219, 246 (1969).
11. *Risken H.*, Zs. f. Physik, 186, 85 (1965).
12. *Graham R., Haken H.*, Zs. f. Physik, 237, 31 (1970).
13. *Fröhlich H.*, Доклад на открытии конференции «От теоретической физики к биологии», Париж, 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства	5
Литература	6
1. Введение	7
1.1. Какие величины нас интересуют?	7
1.2. Качественные результаты	8
2. Обзор применяемых математических методов	14
2.1. Связь квантовых и классических величин	14
2.2. Переменные, используемые в рассматриваемой задаче	16
2.3. Векторы смещения и диффузионные постоянные	18
2.4. Диссипативное уравнение движения для атомов и поля, не взаимодействующих между собой	19
2.5. Ланжевеновский подход к изучению марковских про- цессов	20
2.6. Модель мазера	22
2.7. Уравнение Фоккера — Планка для марковских про- цессов	24
2.8. Исключение переменных с помощью адиабатического приближения	25
2.9. Осциллятор Ван дер Поля	26
2.10. Спектр обезразмеренного уравнения для осциллято- ра Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации	27
2.11. Сравнение с результатами, полученными другими ис- следователями	30
3. Средние характеристики мазеров и лазеров	32
3.1. Взаимодействие между атомом и полем излучения	32
3.2. Модель мазера без источников шума	33
3.3. Условия стационарности	37
3.4. Устойчивость	42
3.5. Широкие атомные линии	48
3.6. Газовый лазер	48
3.7. Уравнение для скоростей	50
3.8. Пики фазы	50
3.9. Эффект Доплера в случае бегущих волн	54
3.10. Неоднородное уширение; стационарное состояние	56
3.11. Эффект Доплера в случае стоячих волн	62

4. Спектральные измерения и корреляции	74
4.1. Обычное определение шума	74
4.2. Классический фильтр	77
4.3. Обобщение на случай многих переменных	80
4.4. Квантовые измерения	81
4.5. Измерения корреляции интенсивности	83
4.6. Статистика фототока	85
5. Марковские процессы	83
5.1. Элементарный дробовой шум (процесс Пуассона)	86
5.2. Процесс генерации — рекомбинации	88
5.3. Определение и свойства марковских процессов	89
5.4. Уравнение движения для произвольной случайной переменной	91
5.5. Обобщенное уравнение Фоккера — Планка	95
5.6. Характеристическая функция	96
5.7. Связанные средние	98
5.8. Усреднение интегралов по траекториям	100
5.9. Линейное затухание и однородный шум	103
5.10. Обратное уравнение	105
6. Ланжевеновские процессы	106
6.1. Однородный шум с линейным затуханием	106
6.2. Общее рассмотрение дробового шума	109
6.3. Процесс Фоккера — Планка	113
6.4. Средние от произведений случайных переменных и источников шума для процессов Фоккера — Планка	117
6.5. Уравнение движения для произвольной функции случайных переменных для процессов Фоккера — Планка	120
6.6. Трансформационные свойства процессов Фоккера — Планка	121
7. Приближение волн вращающейся поляризации для осциллятора Ван дер Поля	124
7.1. Осциллятор с нелинейным сопротивлением	124
7.2. Коэффициенты диффузии	126
7.3. Каноническая форма осциллятора Ван дер Поля	128
7.4. Флуктуации фазы в осцилляторе с сопротивлением	129
7.5. Флуктуации амплитуды	135
7.6. Уравнение Фоккера — Планка	138
7.7. Собственные функции оператора Фоккера — Планка	139
8. Другие свойства процесса Фоккера — Планка	142
8.1. Детальное равновесие	142
8.2. Ортогональность	146
8.3. Полнота	148
8.4. Детальное равновесие, обратимость во времени и эрмитовость	149

9. Представление когерентных состояний	154
9.1. Когерентное состояние	154
9.2. Нормировка и неортогональность	154
9.3. Полнота [67]	156
9.4. Шпур оператора	157
9.5. Шпур нормально упорядоченного оператора	158
10. Уравнения для оператора плотности	160
10.1. Определение	160
10.2. Уравнение движения для матрицы плотности	161
11. Динамическое соответствие классического и квантового подходов	163
11.1. Усреднение зависящих от времени величин	163
11.2. Уравнение регрессии	165
11.3. Усреднение операторов, относящихся к двум различным моментам времени	169
11.4. Усреднение величин, относящихся к трем различным моментам времени	170
11.5. Усреднение величин, относящихся к многим различным моментам времени	172
11.6. Флуктуации при фотодетектировании	173
12. Квантовая теория поглощения	175
12.1. Уравнение для оператора плотности системы	175
12.2. Уравнение движения для произвольного оператора	179
12.3. Получение матрицы коэффициентов диффузии с помощью соотношения Эйнштейна	181
13. Затухающий гармонический осциллятор	183
13.1. Уравнения движения для средних величин	183
13.2. Источники шума	185
13.3. Применимость уравнений для операторов и перестановочных соотношений	187
14. Уравнения движения для атома	189
14.1. Уравнения движения для средних значений	189
14.2. Атомные коэффициенты диффузии	193
15. Связанные системы: независимые резервуары	195
16. Стохастическая модель лазера	198
17. Случай широкой атомной линии	205
17.1. Исключение оператора перехода σ с помощью адiabатического приближения	205
17.2. Векторы смещения и новые ланжевенновские силы	208

17.3. Коэффициент диффузии	210
17.4. Флуктуации числа фотонов	214
17.5. Уравнение Фоккера — Планка для диагональных элементов матрицы плотности	216
17.6. Сохранение перестановочных соотношений	218
17.7. Уравнение движения для произвольного оператора	221
17.8. Уравнение Фоккера — Планка для величин b, b^+, N_1, N_2	226
17.9. Уравнение для ρ в операторной форме	228
17.10. Матрица плотности в n -представлении	230
17.11. Флуктуации поля в населенностей: соответствующий «классический» случайный процесс	231
17.12. Флуктуации поля: исключение величин N_1 и N_2 с помощью адиабатического приближения	233
17.13. Ланжевеновское уравнение для поля при произвольных рабочих уровнях	235
17.14. Область вблизи порога	237
17.15. Безразмерная форма уравнения для осциллятора Ван дер Поля в приближении волн вращающейся поляризации	239
18. Флуктуации при фотодетектировании	241
18.1. Общие замечания	241
18.2. Предел малых времен	243
18.3. Флуктуации при фотодетектировании ниже порога возбуждения	249
18.4. Простая релаксационная модель	257
18.5. Приближение Райса — Манделя	261
Литература	264

ПРИЛОЖЕНИЯ

М. Лэкс, М. Цванцигер. Точная функция счета фотонов для лазера вблизи порога	268
Литература	275
Г. Хакен. Излучение лазера — новый пример фазового перехода	277
Литература	295