[redacted]

ИЗДАТЕЛЬСТВО

«МИР»

INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLD

SERGE LANG

Columbia University, New York

NEW YORK, LONDON
1962

С. ЛЕНГ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Перевод с английского

И. М. ДЕКТЯРЕВА

Под редакцией

М. Я. АНТОНОВСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1967

УДК 51383

С. Ленг знаком советскому читателю по переводу его работы «Алгебраические числа», выпущенному в начале этого года (изд-во «Мир»). Настоящая его книга вводит читателя в круг вопросов современной дифференциальной топологии, которые в последние годы вызывают активный интерес математиков самых различных специальностей. Она посвящена основам теории бесконечномерных дифференцируемых многообразий и векторных расслоений над такими многообразиями. Понятия и факты, изложенные здесь, находят применение в различных областях математики. Терминология и стиль изложения весьма современны.

Автор любезно прислал специально для этого издания ряд исправлений и дополнений.

В качестве приложения в русское издание включен перевод лекций С. Смейла по дифференциальной топологии, записанных Р. Абрахамом.

Книга представляет интерес для математиков всех специальностей и для физиков-теоретиков. Эта работа будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов и педагогических институтов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ

Между математическим анализом и тремя большими дифференциальными теориями (дифференциальная топология, дифференциальная геометрия и обыкновенные дифференциальные уравнения) лежит ничья земля, для которой не существует систематического описания. Цель книги состоит в том, чтобы заполнить этот пробел.

Три дифференциальные теории ни в каком смысле не зависят друг от друга и действуют сообразно собственному вкусу. В дифференциальной топологии изучают, например, гомотопические классы отображений и возможность найти подходящие дифференцируемые отображения в них (иммерсии, вложения, изоморфизмы и т. д.). Можно применять дифференцируемые структуры на топологических многообразиях для определения топологической структуры многообразия (например, как это сделано у Смейла [17]). В дифференциальной геометрии на дифференцируемом многообразии вводят дополнительную структуру (векторное поле, пульверизацию, 2-форму, риманову метрику—на выбор) и изучают свойства, связанные специально с этими объектами. Формально можно сказать, что изучаются свойства, инвариантные относительно группы дифференцируемых автоморфизмов, сохраняющих дополнительную структуру. В дифференциальных уравнениях изучаются векторные поля и их интегральные кривые, особые точки, устойчивые и неустойчивые многообразия и т. д. Некоторые основные и элементарные понятия настолько существенны для всех трех дисциплин, что стоит собрать их вместе, так чтобы дальнейшее изложение могло проводиться без необходимости отправляться от самого начала. Я надеюсь, что настоящая книга послужит этой цели.

Возможно изложить «не за слишком высокую цену» основания (и даже много больше, чем основания) теории многообразий, моделями для которых являются банаховы и гильбертовы пространства. Такие многообразия предпочтительнее, чем конечномерные. Действительно, оказывается, что изложение ощутимо выигрывает от систематического изгнания беспорядочного употребления локальных координат. Они заменяются тем, для чего они нужны, а именно изоморфизмом открытого подмножества многообразия на открытое подмножество банахова пространства (локальная карта) и локальным анализом, который более силен и так же легок в формальном использовании. В большинстве случаев конечномерные доказательства с самого начала распространяются на бесконечномерный случай. Более того, при изучении дифференциальных форм нужно знать только определение полилинейного непрерывного отображения. Оргия полилинейной алгебры в стандартном изложении происходит от ненужной двойной дуализации и злоупотребления тензорным произведением.

О бесконечномерных многообразиях говорят много лет. В последние годы большой удачей для топологии было введение бесконечномерных топологических пространств, и по всем признакам их систематическое введение в теорию дифференцируемых многообразий будет столь же удачным. Уже сейчас, например, ясно, что надлежащей областью для построения части теории Морса, относящейся к геодезическим, является пространство луп, рассматриваемое как бесконечномерное многообразие. Сведение к конечномерному случаю является, конечно, очень интересным аспектом теории, из которого можно вывести глубокие результаты, касающиеся самих конечномерных многообразий, однако это сведение сразу получается из полного анализа пространства луп (см. Ботт [2]).

Кроме этого, для данных конечномерных многообразий X, Y полезно ввести в множество всех дифференцируемых отображений многообразия X в Y структуру бесконечномерного многообразия. (Илс [6]—[8].) В этом направлении сверх формального перенесения конечномерных результатов можно получить результаты существенно новые, которые в свою очередь затрагивают конечномерный случай.

В направлении дифференциальных уравнений можно попытаться распространить теоремы об устойчивых и не-устойчивых многообразиях на невырожденные критические точки векторных полей, локальный автоморфизм которых, или точнее его производная, удовлетворяет определенным условиям (скажем, его спектр находится вне единичного круга).

Общеизвестно, что C^∞-функции на открытом подмножестве евклидова пространства не образуют банахова пространства. Они образуют пространство Фреше (счетное множество норм вместо одной). С другой стороны, теоремы о неявных функциях и о локальном существовании решения дифференциального уравнения не верны в более общем случае. Для возмещения отсутствия этих результатов нужна гораздо более изощренная теория, которая только начала развиваться (см. статью Нэша [15] о римановых метриках и дальнейшие статьи Шварца [16] и Мозера [14]). В частности, необходимо введение дополнительной структуры (сглаживающие операторы). Это далеко выходит за рамки настоящей книги и является предметом активного исследования.

При написании этой книги я в значительной степени использовал следующие четыре источника.

Во-первых, «Основы современного анализа» Дьедонне [19]. Моя книга по своему содержанию начинается с гл. 8 книги Дьедонне (дифференциальное исчисление), которая вполне элементарна и должна быть введена во все учебные программы повышенного типа для старших курсов. Таким образом, гл. 8 книги Дьедонне и эта книга могут составлять семестровый курс для аспирантов первого года и способных старшекурсников.

Во-вторых, «Сводка результатов» Бурбаки [4] по основаниям дифференцируемых многообразий. Эта книга вскоре выйдет из печати и явится хорошим пособием по данной тематике. Я не вполне придерживался этой книги, поскольку я постоянно подчеркиваю дифференциальную точку зрения (отличную от аналитической). Я опустил некоторые понятия и добавил другие, однако в целом она оказалась весьма полезной.

В-третьих, неоценимыми оказались заметки Милнора [11] — [13]. Хотя направлением этих работ является дифференциальная топология, они по необходимости содержат основания теории дифференцируемых многообразий (или, по крайней мере, часть этих оснований). В частности, я использовал его толкование операций в векторных расслоениях (гл. III, § 4) и его элегантное изложение единственности трубчатой окрестности (гл. IV, § 6 и гл. VII, § 4).

В-четвертых, я очень обязан Пале за сотрудничество в написании гл. IV и за предоставленное в мое распоряжение изложение теории пульверизаций (гл. IV, § 3). Как он указал мне, их можно использовать (вместо геодезических) для построения трубчатых окрестностей. Что касается соотношения понятий «пульверизация» и «аффинная связность», см. [1]. Пале мне также указал, как в случае римановых многообразий заменить пульверизации и геодезические прямым использованием фундаментальной 2-формы и метрики (гл. VII, § 5). Это значительно улучшает дальнейшее изложение. Можно надеяться, что изложение высших разделов дифференциальной геометрии будет дано в этом духе. Но поскольку такого изложения еще не существует и читатель будет обращаться к литературе, написанной на языке локальных координат, я включил в книгу приложение, которое показывает в двух случаях, как для конечномерных пространств геометрические утверждения переводятся на язык базисов. Это поможет обращенным в нашу веру в ознакомлении с литературой и, я надеюсь, убедит знатоков, что в изложении геометрических мыслей ничто не упущено и много приобретено без затемнения их не относящимся к делу формализмом.

Серж Ленг

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Мы коротко напомним понятие производной и некоторые ее полезные свойства. Как упоминалось во введении, гл. 8 книги Дьедонне [19] содержит замкнутое в себе и полное изложение дифференциального исчисления в случае банаховых пространств. Там имеются также указания на то, что эти элементарные утверждения могут оказаться верными и для более общих топологических векторных пространств (например, пространств Фреше). Однако, чтобы не усложнять изложение, мы ограничимся только банаховыми пространствами. Мы рассмотрим некоторые свойства таких пространств, как топологических векторных пространств, и затем построим дифференциальное исчисление. Читатель может пропустить эту главу и начать сразу с гл. II, если он привык представлять себе производную отображения как линейное преобразование. (В конечномерном случае, когда выбран базис, элементами матрицы этого преобразования являются частные производные отображения.)

Изложение удобно вести на языке категорий. Понятия категории и морфизма (определения мы напоминаем в § 1) вводятся для того, чтобы выделить некоторые общие свойства определенного множества объектов и их отображений. Примерами могут служить топологические векторные пространства и непрерывные линейные отображения, открытые подмножества банахова пространства и дифференцируемые отображения, дифференцируемые многообразия и дифференцируемые отображения, векторные расслоения и отображения расслоений, топологические пространства и непрерывные отображения, множества и просто отображения.

В произвольной категории отображения называются морфизмами, но категория дифференцируемых многообразий настолько важна в этой книге, что, начиная с гл. II, мы используем термин «морфизм» как синоним дифференцируемого отображения (или точнее p раз дифференцируемого отображения). Все другие морфизмы в других категориях будут снабжены приставкой, показывающей к какой категории они принадлежат.

§ 1. Категории

Категорией называется такой набор объектов $\{X, Y, \ldots\}$, что для двух объектов X, Y задано множество $\operatorname{Mor}(X, Y)$, а для трех объектов X, Y, Z — отображение (закон композиции)

$$\operatorname{Mor}(X, Y) \times \operatorname{Mor}(Y, Z) \to \operatorname{Mor}(X, Z),$$

удовлетворяющие следующим аксиомам.

КАТ. 1. Множества $\operatorname{Mor}(X, Y)$ и $\operatorname{Mor}(X', Y')$ пересекаются только тогда, когда $X = X'$ и $Y = Y'$; в этом случае они совпадают.

КАТ. 2. В каждом множестве $\operatorname{Mor}(X, X)$ содержится элемент id_X, который действует как левая и правая единица относительно композиции.

КАТ. 3. Закон композиции ассоциативен.

Элементы множества $\operatorname{Mor}(X, Y)$ называются *морфизмами*; такие морфизмы мы будем обычно записывать в виде $f: X \to Y$. Композиция двух морфизмов f и g обозначается через fg или $f \circ g$.

Функтор $\lambda: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ из категории $\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{A}'$ есть отображение, ставящее в соответствие каждому объекту X из $\mathfrak{A}$ объект $\lambda(X)$ из $\mathfrak{A}'$ и каждому морфизму $f: X \to Y$ морфизм $\lambda(f): \lambda(X) \to \lambda(Y)$ таким образом, что если для морфизмов f и g определена композиция, то $\lambda(fg) = \lambda(f)\lambda(g)$ и для всех X выполнено равенство $\lambda(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\lambda(X)}$. Тем самым мы определили ковариантный функтор; контравариантный функтор определяется обращением стрелок (так что $\lambda(f): \lambda(Y) \to \lambda(X)$ и $\lambda(fg) = \lambda(g)\lambda(f)$).

Таким же образом определяется функтор от многих переменных, который может быть ковариантным по одним переменным и контравариантным по другим. Мы встретимся с такими функторами при изучении полилинейных отображений, дифференциальных форм и т. д.

Функторы одного типа из категории $\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{A}'$ сами являются объектами категории Fun ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$). Морфизмы этой категории будут иногда называться *естественными преобразованиями*, а не морфизмами функторов. Они определяются следующим образом. Если λ и μ—два (скажем ковариантных) функтора из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, то естественное преобразование $t : \lambda \to \mu$ состоит из такого набора морфизмов

$$t_X : \lambda(X) \to \mu(X),$$

где X пробегает $\mathfrak{A}$, что для любого морфизма $f : X \to Y$ из $\mathfrak{A}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} \lambda(X) \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "\lambda(f)"'] & \mu(X) \arrow[d, "\mu(f)"] \\ \lambda(Y) \arrow[r, "t_Y"'] & \mu(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Морфизм $f : X \to Y$, заданный в любой категории $\mathfrak{A}$, мы назовем *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $g : Y \to X$, что $fg = \mathrm{id}_X$ и $gf = \mathrm{id}_X$. Например, изоморфизм в категории топологических пространств называется топологическим изоморфизмом, или гомеоморфизмом. В общем случае мы будем указывать категорию, которой принадлежит изоморфизм, соответствующей приставкой. В категории множеств изоморфизм называется также биективным отображением.

Если $f : X \to Y$ — морфизм, то *сечением* f называется такой морфизм $g : Y \to X$, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

§ 2. Топологические векторные пространства

За исключением теоремы о замкнутом графике и теоремы Хана—Банаха, все утверждения этого параграфа относятся к топологическим векторным пространствам; доказательства их для случая банаховых пространств можно найти в книге Дьедонне [19]. В указанном случае они по существу тривиальны. Что же касается упомянутых выше двух теорем, то о них см. Люмис [9] (в случае банаховых пространств) и Бурбаки [5] (в общем случае).

Топологическое векторное пространство $\mathbf{E}$ (над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$)—это векторное пространство с такой топологией, что операции сложения и умножения на скаляр непрерывны. Удобно включить в это определение также условия, что пространство *хаусдорфово* и *локально выпукло*. Последнее означает, что каждая окрестность нуля содержит выпуклую окрестность нуля, т. е. такую открытую окрестность U, что если x, $y \in U$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $tx+(1-t)y$ лежит в U.

Топологические векторные пространства с непрерывными линейными отображениями в качестве морфизмов образуют категорию. (Под линейностью мы везде подразумеваем линейность относительно умножения на вещественное число.) Эту категорию обозначим ТВП. Множество непрерывных линейных отображений топологического векторного пространства $\mathbf{E}$ в пространство $\mathbf{F}$ обозначается через $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Множество всех непрерывных r-линейных отображений

$$\psi : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \ldots \times \mathbf{E} \to \mathbf{F}$$

обозначается через $L^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Симметрические (соответственно кососимметрические) отображения образуют пространства, обозначаемые соответственно через $L_s^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ и $L_a^r(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Изоморфизмы в категории ТВП называются *топлинейными* изоморфизмами; мы будем обозначать через $\mathrm{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ и $\mathrm{Laut}(\mathbf{E})$ соответственно множества топлинейных изоморфизмов пространства $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$ и топлинейных автоморфизмов пространства $\mathbf{E}$.

Удобно обозначать через $L(\mathbf{E})$, $L^r(\mathbf{E})$, $L_s^r(\mathbf{E})$ и $L_a^r(\mathbf{E})$ соответственно пространства всех непрерывных линейных, r-линейных, симметрических и кососимметрических отображений пространства $\mathbf{E}$ в $\mathbf{R}$. Следуя классической терминологии, условимся называть эти отображения *формами* (соответствующего типа). Если $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_r$ и $\mathbf{F}$ — топологические векторные пространства, то через $L(\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_r; \mathbf{F})$ обозначим пространство непрерывных полилинейных отображений произведения $\mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_r$ в $\mathbf{F}$.

Наиболее важным для нас типом топологических векторных пространств являются *полные нормируемые* пространства. Если норма введена, то эти пространства называются *банаховыми*. Разумеется, существует много норм, превращающих полное нормируемое пространство в банахово, но обычно, допуская неточность, называют полные нормируемые пространства банаховыми (за исключением тех случаев, когда абсолютно необходимо подчеркнуть различие).

В этой книге всюду все топологические векторные пространства считаются банаховыми. Иногда наше изложение сопровождается замечаниями о возможности обобщения некоторых результатов на более общие пространства. Банаховы пространства мы будем обозначать буквами $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, ...

Следующие два предложения представляют собой два вида теоремы, известной под названием *теоремы о замкнутом графике.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каждое непрерывное биективное линейное отображение пространства* $\mathbf{E}$ *на* $\mathbf{F}$ *является топлинейным изоморфизмом.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если* $\mathbf{E}$ — *банахово пространство и* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ — *взаимно дополнительные замкнутые подпространства (т. е.* $\mathbf{E}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2 = 0$), *то отображение произведения* $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ *на* $\mathbf{E}$, *определяемое сложением, является топлинейным изоморфизмом.*

Разложение, описанное в предложении 2, будет часто встречаться в дальнейшем. Если $\mathbf{F}$ — замкнутое подпространство в $\mathbf{E}$, для которого существует замкнутое дополнение $\mathbf{F}_1$, такое, что $\mathbf{E}$ топлинейно изоморфно произведению $\mathbf{F} \times \mathbf{F}_1$ при естественном отображении, то мы скажем, что $\mathbf{F}$ *разлагает* $\mathbf{E}$.

Приведем теперь слабую форму теоремы Хана—Банаха.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* $\mathbf{E}$ — *топологическое векторное пространство и* $x \neq 0$ — *элемент из* $\mathbf{E}$. *Тогда существует такое линейное непрерывное отображение* λ *пространства* $\mathbf{E}$ *в* $\mathbf{R}$, *что* $\lambda(x) \neq 0$.

Если $\mathbf{E}$ — банахово пространство, то отображение λ можно построить при помощи леммы Цорна, считая, что оно определено на некотором подпространстве и имеет конечную норму. Затем λ продолжают на подпространство, порожденное одним дополнительным элементом так, чтобы норма не увеличилась. В случае произвольного локально выпуклого пространства доказательство аналогично; его можно найти в книге Бурбаки [5].

Из предложения 3, в частности, следует, что каждое конечномерное подпространство полного пространства $\mathbf{E}$ разлагает его. Еще более тривиально утверждение, что замкнутое подпространство конечной коразмерности также разлагает $\mathbf{E}$.

Теперь нам необходимо ввести топологию в $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$—банаховы пространства, и пусть

$$A:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$$

— непрерывное линейное отображение (называемое также ограниченным линейным отображением).

Мы можем определить *норму* отображения A как точную нижнюю грань таких чисел K, что выполнено для всех $x\in\mathbf{E}$ неравенство

$$|Ax|\leqslant K|x|.$$

Эта норма превращает $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ в банахово пространство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для более общих топологических векторных пространств можно ввести топологию равномерной сходимости на ограниченных подмножествах.

Аналогично мы введем топологию в пространство $L(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_r;\ \mathbf{F})$, которое станет банаховым пространством, если определить норму полилинейного отображения

$$A:\mathbf{E}_1\times\dots\times\mathbf{E}_r\to\mathbf{F}$$

как точную нижнюю грань таких чисел K, что

$$|A(x_1,\dots,x_r)|\leqslant K|x_1|\dots|x_r|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если* $\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_r,\mathbf{F}$ — *банаховы пространства, то каноническое отображение*

$$L(\mathbf{E}_1,\ L(\mathbf{E}_2,\ \dots,\ L(\mathbf{E}_r,\mathbf{F})\dots))\to L^r(\mathbf{E}_1,\dots,\mathbf{E}_r;\ \mathbf{F})$$

итерированного пространства непрерывных линейных отображений в пространство непрерывных полилинейных отображений является сохраняющим норму топлинейным изоморфизмом, т. е. изоморфизмом банаховых пространств.

Предыдущие предложения можно было бы обобщить на более широкий класс топологических векторных пространств. Ниже приведенное свойство присуще только банаховым пространствам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть* **E** *и* **F**—*банаховы пространства. Тогда множество топлинейных изоморфизмов* Lis(**E**, **F**) *открыто в* L(**E**, **F**).

Доказательство чрезвычайно просто. Если множество Lis(**E**, **F**) не пусто, то необходимо только показать, что множество Laut(**E**) открыто в L(**E**, **E**). Для этого обозначим символом 1 тождественный изоморфизм и заметим, что если $u \in L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ и $|u| < 1$, то ряд $1+u+u^2+\ldots$ сходится. Для любого данного топлинейного автоморфизма w пространства **E** можно найти его открытую окрестность, перенося в w открытый единичный шар с центром 1.

Только для банаховых пространств справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если* **E**, **F**, **G**—*банаховы пространства, то билинейные отображения*

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \to L(\mathbf{E}, \mathbf{G}),$$

$$L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \times \mathbf{E} \to \mathbf{F},$$

полученные композицией отображений, непрерывны. Аналогичное утверждение справедливо для полилинейных отображений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это предложение не верно для пространств более общего типа, чем банаховы пространства, например для пространств Фреше. Можно надеяться, что верно следующее утверждение. Пусть U — открытое подмножество пространства Фреше, и пусть отображения

$$f : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F}),$$

$$g : U \to L(\mathbf{F}, \mathbf{G})$$

непрерывны. Тогда отображение, переводящее x в $g(x)f(x)$, также непрерывно. Вопросы такого типа возникнут позднее для дифференцируемых отображений, и, конечно, очень важно знать на них ответ.

§ 3. Производные и композиция отображений

Мы будем говорить, что вещественная функция $\psi(t)$ вещественной переменной, заданная в некоторой окрестности нуля, есть $o(t)$, если

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=0.$$

Пусть $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — два топологических векторных пространства и φ — отображение окрестности нуля в пространстве $\mathbf{E}$ в пространство $\mathbf{F}$. Мы будем называть φ *касательным к* 0, если для любой заданной окрестности W нуля в пространстве $\mathbf{F}$ существует такая окрестность V нуля в пространстве $\mathbf{E}$, что

$$\varphi(tV)\subset o(t)W$$

для некоторой функции $o(t)$. Если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{E}$ нормированы, то это равносильно обычному условию

$$|\varphi(x)|\leqslant|x|\psi(x),$$

где $\lim\psi(x)=0$ при $|x|\to 0$.

Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ — топологические векторные пространства и множество U открыто в $\mathbf{E}$. В том случае, когда $f: U\to\mathbf{F}$ — непрерывное отображение, мы скажем, что f *дифференцируемо* в точке $x_0\in U$, если существует такое линейное непрерывное отображение λ пространства $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$, что отображение

$$\varphi(y)=f(x_0+y)-f(x_0)-\lambda y,$$

определенное для малых y, касательно к 0. Из определения тривиально следует, что λ определено однозначно; мы назовем λ *производной* отображения f в точке x_0. Обозначим производную через $Df(x_0)$ или $f'(x_0)$. Она является элементом пространства $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Если f дифференцируемо в каждой точке множества U, то f' есть отображение

$$f': U\to L(\mathbf{E}, \mathbf{F}).$$

Легко проверить, что выполняется следующее правило дифференцирования сложной функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если отображение $f: U \to V$ дифференцируемо в точке x_0, а $g: V \to W$ — в точке $f(x_0)$, то $g \circ f$ дифференцируемо в точке x_0 и*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

Доказательство мы предоставляем читателю в качестве легкого (и классического) упражнения.

Остальная часть этого параграфа посвящена построению дифференциального исчисления. Все топологические пространства предполагаются банаховыми. Тогда $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ также является банаховым пространством.

Пусть U открыто в $\mathbf{E}$ и $f: U \to \mathbf{F}$ дифференцируемо в каждой точке множества U. Если f' непрерывно, то мы скажем, что f—отображение *класса* C^1. Отображения класса C^p определяются по индукции: p-я производная $D^p f$ определяется как $D(D^{p-1}f)$ и является отображением множества U в пространство

$$L(\mathbf{E}, L(\mathbf{E}, \ldots, L(\mathbf{E}, \mathbf{F})\ldots)),$$

которое, согласно предложению 4, можно отождествить с $L^p(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть U, V — открытые подмножества банаховых пространств. Если $f: U \to V$ и $g: V \to \mathbf{F}$ — отображения класса C^p, то $g \circ f$ — отображение того же класса.*

В силу предложения 8, открытые подмножества банаховых пространств можно рассматривать как объекты категории, морфизмы которой—непрерывные отображения класса C^p. Мы будем называть их C^p-морфизмами. Мы скажем, что f—*отображение класса* C^∞, если это отображение класса C^p для всех целых $p \geqslant 1$. В дальнейшем p будет обозначать целое неотрицательное число или ∞ (отображениями класса C^0 назовем непрерывные отображения). Далее мы будем опускать символ C^p, если p остается фиксированным. Таким образом, всюду в дальнейшем под морфизмом мы будем понимать C^p-морфизм, где $p \leqslant \infty$. Мы будем употреблять термин «морфизм» также для C^p-морфизмов многообразий (которые будут определены в следующей главе), *но морфизмы в любой другой категории всегда будут сопровождаться словами, указывающими, какой категории они принадлежат* (например, морфизм расслоений, непрерывный линейный морфизм и т. д.).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть множество* U *открыто в банаховом пространстве* $\mathbf{E}$, *и пусть* $f : U \to \mathbf{F}$ *является* C^p*-морфизмом. Тогда отображение* $D^p f$ *(рассматриваемое как элемент пространства* $L^p(\mathbf{E}, \mathbf{F})$*) симметрично.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Пусть множество* U *открыто в* $\mathbf{E}$, *и пусть* $f_i \colon U \to \mathbf{F}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ *— непрерывные отображения в пространства* $\mathbf{F}_i$. *Если* $f = (f_1, \ldots, f_n)$*—отображение множества* U *в произведение пространств* $\mathbf{F}_i$, f *есть отображение класса* C^p *в том и только в том случае, когда все* f_i *— отображения этого класса; при этом*

$$D^p f = (D^p f_1, \ldots, D^p f_n).$$

Пусть U и V — открытые множества в пространствах $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, и пусть

$$f : U \times V \to \mathbf{F}$$

есть непрерывное отображение в банахово пространство. Как обычно, можно ввести понятие *частной производной.* Если (x, y) принадлежит $U \times V$, то, считая y фиксированным, мы получим отображение U в $\mathbf{F}$, для которого производная уже определена. Обозначим эту производную через $D_1 f(x, y)$. Таким образом,

$$D_1 f : U \times V \to L(\mathbf{E}_1, \mathbf{F})$$

является отображением множества $U \times V$ в пространство $L(\mathbf{E}_1, \mathbf{F})$. Мы назовем это отображение *частной производной* по первой переменной. Аналогично получаем $D_2 f$; кроме того, можно взять n сомножителей вместо двух. Полная производная и частные производные связаны следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Пусть* $U_1, \ldots, U_n$ *— открытые множества в* $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ *соответственно, и пусть* $f : U_1 \times \ldots \times U_n \to \mathbf{F}$ *— непрерывное отображение;* f *принадлежит классу* C^p *тогда и только тогда, когда каждая частная производная*

$$D_i f : U_1 \times \ldots \times U_n \to L(\mathbf{E}_i, \mathbf{F})$$

существует и является отображением класса C^{p-1}. *В этом случае для*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ и } v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_n$$

мы имеем

$$Df(x) \cdot (v_1, \ldots, v_n) = \sum D_i f(x) \cdot v_i.$$

Следующие четыре предложения касаются непрерывных линейных и полилинейных отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Пусть* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — *банаховы пространства и* $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ — *непрерывное линейное отображение. Тогда для каждого* $x \in \mathbf{E}$ *мы имеем*

$$f'(x) = f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Пусть* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ — *банаховы пространства и* U *открыто* в $\mathbf{E}$. *Если* $f : U \to \mathbf{F}$ — *отображение класса* C^p *и* $g : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ — *линейное непрерывное отображение, то* $g \circ f$ — *отображение класса* C^p *и*

$$D^p(g \circ f) = g \circ D^p f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Если* $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_r$ *и* $\mathbf{F}$ — *банаховы пространства и*

$$f : \mathbf{E}_1 \times \ldots \times \mathbf{E}_r \to \mathbf{F}$$

— *непрерывное полилинейное отображение, то* f — *отображение класса* C^∞ *и его* $(r+1)$-*я производная равна нулю. Если* $r = 2$, *то* Df *вычисляется по обычному правилу дифференцирования произведения (первый сомножитель, умноженный на производную от второго, плюс производная от первого сомножителя, умноженная на второй).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Пусть* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{F}$ — *топлинейно изоморфные банаховы пространства. Если* $u : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ — *топлинейный изоморфизм, обозначим через* u^{-1} *обратное отображение. Тогда отображение*

$$u \to u^{-1}$$

из $\mathrm{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *в* $\mathrm{Lis}(\mathbf{F}, \mathbf{E})$ *является* C^∞-*изоморфизмом. Его производной в некоторой точке* u_0 *является ли-*

'йным отображением пространства $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *в* $L(\mathbf{F}, \mathbf{E})$, *даваемым формулой*

$$v - u_0^{-1} v u_0^{-1}.$$

Приведем, наконец, несколько утверждений, которые)надобятся нам в теории векторных расслоений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Пусть* U *— открытое подмножество ıнахова пространства* $\mathbf{E}$, *и пусть* $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ *— банаховы)остранства.*

(I) *Если* $f : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *есть* C^p*-морфизм, то ото-)ажение множества* $U \times \mathbf{E}$ *в* $\mathbf{F}$, *задаваемое формулой*

$$(x, v) \to f(x) \cdot v,$$

зляется морфизмом.

(II) *Если* $f : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *и* $g : U \to L(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *— морфиз- ы, то и отображение* $x \to g(x) f(x)$ *является морфизмом.*

(III) *Если* $f : U \to \mathbf{R}$ *и* $g : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *— морфизмы, то орфизмом является и* fg *(*fg *принимает на* x *значение* $x) g(x)$*; здесь имеется в виду обычное умножение на каляр).*

(IV) *Если* $f, g : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *— морфизмы, то* $f + g$ *— акже морфизм.*

§ 4. Интегрирование и формула Тейлора

Пусть $\mathbf{E}$ — полное ТВП, I — вещественный замкнутый нтервал $a \leqslant t \leqslant b$. *Ступенчатой функцией* называется тображение

$$f : I \to \mathbf{E},$$

ля которого существует такой конечный набор непере- ;кающихся подинтервалов $I_1, \ldots, I_n$, покрывающий I, го на каждом интервале I_j отображение f принимает)стоянное значение, скажем v_j. Интервалы I_j не предпо- згаются замкнутыми. Они могут быть открытыми, замкнутыми и полуоткрытыми.

Мы будем говорить, что данная последовательность ункций f_n, отображающих I в $\mathbf{E}$, сходится равномерно, :ли для любой данной окрестности W нуля в $\mathbf{E}$ сущест- ует такое целое n_0, что для всех $m, n > n_0$ и всех $t \in I$ азность $f_n(t) - f_m(t)$ лежит в W. Последовательность f_n)гда сходится к отображению f интервала I в $\mathbf{E}$.

Регулярным отображением называется равномерный предел ступенчатых функций. Мы предоставляем читателю показать, что каждое непрерывное отображение регулярно.

Если f — определенная выше ступенчатая функция, мы определим для нее интеграл

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt = \sum \mu(I_j)\,v_j,$$

где $\mu(I_j)$ — длина интервала I_j (его обычная мера Лебега). Этот интеграл не зависит от выбора интервалов, на которых функция постоянна.

Если отображение f регулярно и $f = \operatorname{limu} f_n$ (limu означает равномерный предел), то последовательность

$$\int_a^b f_n$$

сходится в $\mathbf{E}$ к некоторому элементу, не зависящему от последовательности f_n, использованной для равномерной аппроксимации функции f. Мы обозначим этот предел через

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt$$

и назовем его *интегралом* функции f. Интеграл линейно зависит от f и удовлетворяет обычным правилам, касающимся изменения интервалов. (Если $b < a$, то мы определим $\int_a^b$ как минус интеграл от b до a.)

Из этого определения немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Пусть $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ — непрерывное линейное отображение, и пусть функция $f : I \to \mathbf{E}$ регулярна. Тогда функция $\lambda f = \lambda \circ f$ регулярна и*

$$\lambda \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lambda f(t)\,dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f_n — последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к f, то λf_n — последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к λf. Отсюда сразу получается наша формула.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. *Пусть* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — *банаховы пространства.* ~~*Пусть*~~ U *открыто в* $\mathbf{E}$. *Пусть* x *и* y — *такие две точки из* $\mathbf{E}$, *что сегмент* $x+ty$ *лежит в* U *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Пусть отображение*

$$f: U \to \mathbf{F}$$

является C^p*-морфизмом; обозначим через* $y^{(p)}$ *«вектор»* $(y, \ldots, y)$ (p раз). *Тогда функция* $D^p f(x+ty) \cdot y^{(p)}$ *непрерывна по* t *и мы имеем*

$$f(x+y) = f(x) + \frac{Df(x)\,y}{1!} + \ldots + \frac{D^{p-1}f(x)\,y^{(p-1)}}{(p-1)!} + \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(x+ty)\, y^{(p)}\,dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Хана—Банаха, достаточно показать, что любой функционал (т. е. непрерывное линейное отображение в $\mathbf{R}$) принимает на обеих частях равенства одно и то же значение. А это сразу следует из предложений 13 и 17 и известного частного случая нашей формулы при $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. В этом частном случае доказательство проводится индукцией по p и интегрированием по частям; исходное равенство имеет вид

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 Df(x+ty)\, y\,dt.$$

Приведенные ниже два следствия известны как *теоремы о среднем значении.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — *два банаховых пространства, множество* U *открыто в* $\mathbf{E}$ *и* x, z — *две такие различные точки из* U, *что сегмент* $x + t(z-x)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ *лежит в* U. *Если* $f: U \to \mathbf{F}$ — *непрерывное отображение класса* C^1, *то*

$$|f(z) - f(x)| \leqslant |z - x| \sup |f'(\xi)|,$$

где верхняя грань берется по всем ξ из указанного сегмента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из обычных оценок для интеграла. Действительно, для любого непрерывного отображения $g: I \to \mathbf{F}$ мы имеем

$$\left| \int_a^b g(t)\,dt \right| \leqslant K(b-a),$$

где K — верхняя грань $|g|$ на I и $a \leqslant b$. Эта оценка очевидна для ступенчатых функций, а потому верна и для непрерывных функций.

Часто применяется другой вариант теоремы о среднем.

СЛЕДСТВИЕ 2. *При тех же предположениях, что и в следствии* 1, *пусть x_0 — точка сегмента, лежащая между x и z. Тогда*

$$|f(z)-f(x)-f'(x_0)(z-x)| \leqslant |z-x| \sup |f'(\xi)-f'(x_0)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить следствие 1 к отображению

$$g(x)=f(x)-f'(x_0)\,x.$$

Сделаем, наконец, несколько замечаний об оценке остаточного члена формулы Тейлора. Мы предположили, что отображение $D^p f$ непрерывно. Поэтому $D^p f(x+ty)$ можно записать в виде

$$D^p f(x+ty)=D^p f(x)+\psi(y,\ t),$$

где ψ зависит от y и t (и, конечно, от x) и при фиксированном x мы имеем

$$\lim_{|y| \to 0} |\psi(y,\ t)| = 0.$$

Таким образом, мы получили

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — два банаховых пространства, множество U открыто в $\mathbf{E}$ и x — точка из U. Пусть $f: U \to \mathbf{F}$ — отображение класса C^p, $p \geqslant 1$. Тогда для всех таких y, что сегмент $x+ty$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ лежит в U, мы имеем*

$$f(x+y)=f(x)+\frac{Df(x)\,y}{1!}+\ldots+\frac{D^p f(x)\,y^{(p)}}{p!}+\theta(y),$$

где погрешность $\theta(y)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{y \to 0} \frac{\theta(y)}{|y|^p} = 0.$$

§ 5. Теорема об обратной функции

Теорема об обратной функции и теорема существования для дифференциальных уравнений (гл. IV) основываются на следующем результате.

ЛЕММА О СЖАТИИ. *Пусть* M *— полное метрическое пространство с метрикой* d, *и пусть* $f: M \to M$ *— некоторое отображение* M *в себя. Предположим, что существует такая постоянная* K, $0 < K < 1$, *что для любых двух точек* x, y *из* M *мы имеем*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant Kd(x, y).$$

Тогда f *имеет единственную неподвижную точку (для которой* $f(x) = x$*). Для любой точки* x_0 *из* M *неподвижная точка является пределом последовательности* $f^n(x_0)$ *(*n *раз повторенное отображение* f*) при* n, *стремящемся к бесконечности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это тривиальное упражнение на сходимость геометрической прогрессии, которое мы предоставляем читателю.

Под *локальным* C^p*-изоморфизмом в точке* x_0 мы понимаем отображение f, для которого существует такая окрестность V точки x_0, что ограничение f на V устанавливает C^p-изоморфизм между V и открытым подмножеством пространства $\mathbf{F}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ *— банаховы пространства,* U *— открытое подмножество в* $\mathbf{E}$ *и отображение* $f: U \to \mathbf{F}$ *является* C^p*-морфизмом, где* $p \geqslant 1$. *Предположим, что для некоторой точки* $x_0 \in U$ *производная* $f'(x_0): \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *является топлинейным изоморфизмом. Тогда* f *— локальный* C^p*-изоморфизм в точке* x_0.

диффеоморфизм

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку топлинейный изоморфизм является C^∞-изоморфизмом, можно без ограничения общности предположить, что $\mathbf{E} = \mathbf{F}$ и $f'(x_0)$ — тождественное отображение. (Для этого нужно просто рассматривать

$[f'(x_0)]^{-1}\circ f$ вместо f.) Выполнив соответствующие переносы, можно также предположить, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$.

Положим $g(x) = x - f(x)$. Тогда $g'(0) = 0$ и, в силу непрерывности, существует такое $r > 0$, что при $|x| < 2r$ имеем

$$|g'(x)| < \frac{1}{2}.$$

Из теоремы о среднем значении мы видим, что $|g(x)| \leqslant \frac{1}{2}|x|$, и потому g отображает замкнутый шар $\bar{B}_r(0)$ радиуса r в $\bar{B}_{r/2}(0)$.

Мы утверждаем, что если $y \in \bar{B}_{r/2}(0)$, то найдется единственный элемент $x \in \bar{B}_r(0)$, для которого $f(x) = y$. Чтобы доказать это, рассмотрим отображение

$$g_y(x) = y + x - f(x).$$

Если $|y| \leqslant r/2$ и $|x| \leqslant r$, то $|g_y(x)| \leqslant r$, и поэтому g_y можно рассматривать как отображение полного метрического пространства $\bar{B}_r(0)$ в себя. Оценка 1/2 для производной и теорема о среднем значении показывают, что g_y — сжатое отображение, т. е. что

$$|g_y(x_1) - g_y(x_2)| = |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|,$$

если $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(0)$. Из леммы о сжатии следует, что g_y имеет единственную неподвижную точку. Но неподвижная точка отображения g_y является решением уравнения $f(x) = y$. Это доказывает наше утверждение.

Мы получили локально обратное отображение $\varphi = f^{-1}$. Это отображение непрерывно, поскольку

$$|x_1 - x_2| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)|,$$

откуда

$$|x_1 - x_2| \leqslant 2|f(x_1) - f(x_2)|.$$

Кроме того, φ дифференцируемо в шаре $B_{r/2}(0)$. Действительно, пусть $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, где $y_1, y_2 \in B_{r/2}(0)$, а $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(0)$. Тогда

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2) - [f'(x_2)]^{-1}(y_1 - y_2)| =$$
$$= |x_1 - x_2 - [f'(x_2)]^{-1}(f(x_1) - f(x_2))|.$$

Применим к выражению под знаком нормы тождественный оператор

$$\mathrm{id} = [f'(x_2)]^{-1} f'(x_2).$$

Принимая во внимание непрерывность f', мы видим, что предыдущее выражение ограничено величиной

$$A\,|f'(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)|$$

для некоторой постоянной A. Из дифференцируемости отображения f мы заключаем, что это выражение есть $o(x_1 - x_2)$, а следовательно, в силу доказанной ранее непрерывности отображения φ, $o(y_1 - y_2)$. Тем самым показано, что φ дифференцируемо и его производная, как и должно было быть, равна

$$\varphi'(y) = [f'(\varphi(y))]^{-1}$$

для $y \in B_{r/2}(0)$. Поскольку отображения φ, f' и «переход к обратному» непрерывны, отображение φ' непрерывно, и, таким образом, φ — отображение класса C^1. Поскольку «переход к обратному» есть отображение класса C^∞, а f' — класса C^{p-1}, то по индукции можно показать, что φ — отображение класса C^p, что и требовалось доказать.

Заметим, что последние рассуждения доказывают также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Если $f: U \to V$ — гомеоморфизм класса C^p, где $p \geqslant 1$, и если f есть C^1-изоморфизм, то f есть C^p-изоморфизм.*

Докажем теперь несколько полезных следствий, которые будут использованы в дальнейшем при изучении иммерсий и субмерсий. *Условимся, что термин «морфизм» означает C^p-морфизм, где $p \geqslant 1$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbf{E}$ и $f: U \to \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ — морфизм множества U в произведение банаховых пространств. Предположим, что $f(x_0) = (0, 0)$, $x_0 \in U$, и что $f'(x_0)$ индуцирует топлинейный изоморфизм между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1 \times 0$. Тогда существует такой локальный изоморфизм g пространства $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ в точке $(0, 0)$, что*

$$g \circ f: U \to \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$$

отображает открытое подмножество U_1 множества U

в $\mathbf{F}_1 \times 0$ *и индуцирует локальный изоморфизм множества* U_1 *в точке* x_0 *на открытую окрестность нуля в* $\mathbf{F}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предположить, что $\mathbf{F}_1 = \mathbf{E}$ (отождествление, определяемое отображением $f'(x_0)$) и что $x_0 = 0$. Определим

$$\varphi : U \times \mathbf{F}_2 \to \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$$

формулой

$$\varphi(x, y_2) = f(x) + (0, y_2)$$

для $x \in U$ и $y_2 \in \mathbf{F}_2$. Тогда $\varphi(x, 0) = f(x)$ и

$$\varphi'(0, 0) = f'(0) + (0, \mathrm{id}_2).$$

Поскольку мы предположили, что $f'(0)$ — топлинейный изоморфизм на $\mathbf{F}_1 \times 0$, то $\varphi'(0, 0)$ — также топлинейный изоморфизм. Тогда, согласно доказанной теореме, φ локально имеет обратное отображение (обозначим его g), которое очевидно удовлетворяет нашим требованиям.

СЛЕДСТВИЕ 1s. *Пусть* $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — *банаховы пространства,* U *открыто в* $\mathbf{E}$ *и* $f : U \to \mathbf{F}$ *есть* C^p-*морфизм, где* $p \geqslant 1$. *Предположим, что* $f(x_0) = 0$, $x_0 \in U$ *и* $f'(x_0)$ *есть топлинейный изоморфизм пространства* $\mathbf{E}$ *на замкнутое подпространство* $\mathbf{F}_1$ *пространства* $\mathbf{F}$, *разлагающее* $\mathbf{F}$. *Тогда существует такой локальный изоморфизм* $g : \mathbf{F} \to \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ *в точке* 0 *и такое открытое в* U *подмножество* U_1, *содержащее* x_0, *что отображение* $g \circ f$ *индуцирует изоморфизм множества* U_1 *на открытое подмножество в* $\mathbf{F}_1$.

Так как по предположению $\mathbf{F}_1$ разлагает $\mathbf{F}$, это просто переформулировка следствия 1.

Удобно ввести понятие разлагающего вложения. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ — топологические векторные пространства и $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ — непрерывное инъективное линейное отображение; тогда мы скажем, что λ *разлагает* $\mathbf{F}$, если существует такой топлинейный изоморфизм $\alpha : \mathbf{F} \to \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$, что $\alpha \circ \lambda$ индуцирует топлинейный изоморфизм пространства $\mathbf{E}$ на $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1 \times 0$. В нашем следствии мы могли бы перефразировать предположение, сказав, что $f'(x_0)$ есть разлагающее вложение.

Чтобы сформулировать следующее утверждение, двойственное предыдущему, введем понятие *локального про-*

ектирования. Пусть заданы произведение $V_1 \times V_2$ двух открытых подмножеств банаховых пространств и морфизм $f: V_1 \times V_2 \to \mathbf{F}$; тогда мы скажем, что f — *проектирование* (на первый сомножитель), если f можно представить как суперпозицию обычного проектирования и изоморфизма множества V_2 на открытое подмножество в $\mathbf{F}$:

$$V_1 \times V_2 \to V_2 \to \mathbf{F}.$$

Мы скажем, что f есть локальное проектирование в точке (a_1, a_2), если существует такая открытая окрестность $U_1 \times U_2$ этой точки, что ограничение f на эту окрестность является проектированием.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть U — открытое подмножество произведения $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ банаховых пространств и (a_1, a_2) — точка из U. Пусть также $f: U \to \mathbf{F}$ — морфизм в банахово пространство* F *и $f(a_1, a_2) = 0$. Предположим, что частная производная*

$$D_2 f(a_1, a_2): \mathbf{E}_2 \to \mathbf{F}$$

есть топлинейный изоморфизм. Тогда существует такой локальный изоморфизм h произведения $V_1 \times V_2$ на открытую окрестность точки (a_1, a_2), содержащуюся в U, что композиция отображений

$$V_1 \times V_2 \xrightarrow{h} U \xrightarrow{f} \mathbf{F}$$

является проектированием (на второй сомножитель).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что $(a_1, a_2) = (0, 0)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{F}$. Определим

$$\varphi: \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$$

равенством

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1, x_2))$$

в окрестности точки (a_1, a_2). Тогда φ' представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_1 & 0 \\ D_1 f & D_2 f \end{pmatrix}$$

и потому является топлинейным изоморфизмом в (a_1, a_2). Согласно доказанной теореме, отображение φ имеет локально обратное h, которое, очевидно, удовлетворяет нашим требованиям.

СЛЕДСТВИЕ 2s. *Пусть U — открытое подмножество банахова пространства $\mathbf{E}$ и $f : U \to \mathbf{F}$ — морфизм в банахово пространство $\mathbf{F}$. Предположим, что $f'(x_0)$ $(x_0 \in U)$ сюръективно и что его ядро разлагает $\mathbf{E}$. Тогда существуют такое открытое в U подмножество U', содержащее x_0, и такой изоморфизм*

$$h : V_1 \times V_2 \to U',$$

что композиция отображений $f \circ h$

$$V_1 \times V_2 \to V_1 \to \mathbf{F}$$

является проектированием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По существу мы опять имеем переформулировку предыдущего следствия, если принять во внимание, что ядро $f'(x_0)$ разлагает $\mathbf{F}$.

Глава II

МНОГООБРАЗИЯ

Открытые подмножества банаховых пространств можно склеивать друг с другом при помощи C^p-изоморфизмов. В результате получается многообразие. Начав с формального определения, мы рассмотрим совокупность многообразий как категорию и обсудим специальные типы морфизмов. Мы определим касательное пространство в каждой точке, а затем, применяя критерии, следующие из теоремы об обратной функции, получим локальное разложение многообразия в том случае, когда разложено касательное пространство в точке.

Введение структуры многообразия в объединении всех касательных пространств мы отложим до следующей главы.

§ 1. Атласы, карты, морфизмы

Пусть X — некоторое множество. *Атласом класса* C^p $(p \geqslant 0)$ на X называется совокупность пар (U_i, φ_i) (i пробегает некоторое множество индексов), удовлетворяющая следующим условиям.

АТ 1. Каждое U_i — подмножество в X, и $\{U_i\}$ — покрытие множества X.

АТ 2. Каждое φ_i — биективное отображение множества U_i на открытое подмножество $\varphi_i U_i$ некоторого банахова пространства $\mathbf{E}_i$, и для любых i, j множество $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ открыто в $\mathbf{E}_i$.

АТ 3. Отображение

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

есть C^p-изоморфизм для каждой пары индексов i, j.

Доказательство того, что в X можно единственным образом ввести такую топологию, что каждое U_i открыто и φ_i являются топологическими изоморфизмами, было бы тривиальным упражнением по теоретико-множественной топологии. Мы не видим смысла считать X хаусдорфовым; для этого нам пришлось бы наложить на покрытие условие отделимости. Формально это никак не сказывается на изложение в гл. II и III. Однако следует иметь в виду, что любое построение, которое мы выполняем (произведения, касательные расслоения и т. д.), приводит к хаусдорфовым пространствам, если исходные пространства были хаусдорфовыми.

Каждая пара (U_i, φ_i) называется *картой* атласа. Если точка $x \in X$ лежит в U_i, то мы будем говорить, что (U_i, φ_i) — *карта в* x.

В условии **АТ 2** мы не требовали, чтобы векторное пространство было одним и тем же для разных индексов i, и даже не требовали, чтобы эти пространства были топлинейно изоморфны. Если же все они совпадают с одним и тем же пространством **E**, то мы назовем рассматриваемый атлас **E**-атласом. Если две карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) таковы, что пересечение множеств U_i и U_j не пусто, и если $p \geqslant 1$, то, взяв производную отображения $\varphi_j \varphi_i^{-1}$, мы увидим, что $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{E}_j$ топлинейно изоморфны. Кроме того, множество точек $x \in X$, для которых существует такая карта (U_i, φ_i) в x, что $\mathbf{E}_i$ топлинейно изоморфно заданному пространству **E**, одновременно открыто и замкнуто. Следовательно, можно считать, что на каждой связной компоненте пространства X мы имеем дело с **E**-атласом для некоторого фиксированного **E**.

Пусть задано подмножество U множества X и топологический изоморфизм $\varphi : U \to U'$ на открытое подмножество некоторого банахова пространства **E**. Мы будем говорить, что пара (U, φ) *совместима* с атласом $\{(U_i, \varphi_i)\}$, если каждое отображение $\varphi_i \varphi^{-1}$ (определенное на соответствующем пересечении, как в **АТ 3**) является C^p-изоморфизмом. Два атласа назовем *совместимыми*, если каждая карта одного из них совместима с другим. Легко проверить, что совместимость атласов является отношением эквивалентности. Совокупность эквивалентных атласов класса C^p на множестве X задает структуру *C^p-многообразия* (или многообразия класса C^p). Если все векторные пространства $\mathbf{E}_i$ в некотором атласе топлинейно изоморфны, то всегда можно найти эквивалентный атлас, для которого все они совпадают с некоторым векторным пространством $\mathbf{E}$. Мы скажем в этом случае, что X является $\mathbf{E}$-*многообразием*, или что $\mathbf{E}$ — *модель* для X. Если $\mathbf{E}$ есть n-мерное пространство, то мы будем называть X n-мерным многообразием или n-многообразием.

Если значение p (натуральное число или ∞) подразумевается фиксированным, то X будем называть просто многообразием.

Совокупность C^p-многообразий обозначим через Man^p. Если мы будем рассматривать только те многообразия, моделями для которых являются пространства из категории $\mathfrak{A}$, то будем писать $\mathrm{Man}^p(\mathfrak{A})$. Совокупность многообразий, моделью для которых является фиксированное $\mathbf{E}$, обозначим через $\mathrm{Man}^p(\mathbf{E})$. Мы введем в эти совокупности структуру категории, определив морфизмы так, как это сделано ниже.

Пусть X — многообразие и U — его открытое подмножество. Тогда в U естественным образом вводится структура многообразия, если взять в качестве атласа набор пересечений

$$(U_i \cap U, \ \varphi_i | (U_i \cap U)).$$

Если X — топологическое пространство, покрытое открытыми множествами V_j, и если на каждом V_j таким образом задана структура C^p-многообразия, что для каждой пары j и j' индуцированные структуры на $V_j \cap V_{j'}$ совпадают, то ясно, что на X можно единственным образом задать структуру многообразия, индуцирующую данную структуру на каждом из V_j.

ПРИМЕР. Пусть X — вещественная прямая, и для каждого открытого интервала U_i задана функция $\varphi_i(t) = t^3$. Тогда $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ есть тождественное отображение. Таким образом мы определили на $\mathbf{R}$ структуру C^∞-многообразия.

Если X, Y — два многообразия, то можно следующим образом задать структуру многообразия на произведении $X \times Y$: если $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и $\{(V_j, \psi_j)\}$ — атласы соответственно для X и Y, то совокупность пар

$$\{(U_i \times V, \ \varphi_i \times \psi_j)\}$$

образует атлас для произведения. При этом произведения совместимых атласов образуют совместимые атласы, так что полученная структура определена корректно.

Пусть X и Y — два многообразия. Рассмотрим отображение $f: X \to Y$. Мы скажем, что f является *C^p-морфизмом*, если для любого $x \in X$ существуют такие карты (U, φ) в x и (V, ψ) в $f(x)$, что $f(U) \subset V$ и отображение

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

является C^p-морфизмом в смысле гл. 1 § 3. Очевидно, что это же условие выполнено для любого другого выбора карт (U, φ) в x и (V, ψ) в $f(x)$, такого, что $f(U) \subset V$.

Ясно, что композиция двух C^p-морфизмов является C^p-морфизмом (поскольку это верно для открытых подмножеств векторных пространств). C^p-многообразия и C^p-морфизмы образуют категорию. Поэтому определено понятие изоморфизма. В рассмотренном выше примере отображение $t \to t^3$ задает изоморфизм между необычной и обычной структурами дифференцируемого многообразия на вещественной прямой.

Если $f: X \to Y$ — морфизм, (U, φ) — карта в $x \in X$, а (V, ψ) — карта в $f(x)$, то отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ мы будем обозначать

$$f_{V,U} : \varphi U \to \psi V.$$

§ 2. Подмногообразия, иммерсии, субмерсии

Пусть X — топологическое пространство и Y — подмножество в X. Скажем, что Y локально замкнуто в X, если у каждой точки $y \in Y$ имеется такая открытая в X окрестность U, что $Y \cap U$ замкнуто в U. Легко проверить, что локально замкнутое множество является пересечением открытого и замкнутого множеств. Например, любое открытое подмножество пространства локально замкнуто, любой открытый интервал локально замкнут в плоскости.

Пусть X — многообразие (класса C^p, где $p \geqslant 0$), Y — подмножество в X. Предположим, что для каждой точки $y \in Y$ существует такая карта (V, ψ) в y, что ψ задает изоморфизм множества V на произведение $V_1 \times V_2$ открытых подмножеств соответственно в пространствах $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Если для некоторого $a_2 \in V_2$ (можно считать, что $a_2 = 0$) выполнено равенство

$$\psi(Y \cap V) = V_1 \times a_2,$$

то ясно, что Y локально замкнуто в X. Кроме того, отображение ψ индуцирует биективное отображение

$$\psi_1 : Y \cap V \to V_1.$$

Совокупность пар $(Y \cap V, \psi_1)$, *полученных указанным способом, образует атлас класса* C^p *для пространства* Y. Проверка этого утверждения, формальные детали которого мы оставляем читателю, опирается на следующий очевидный факт.

ЛЕММА 1. *Пусть* U_1, U_2, V_1, V_2 — *открытые подмножества банаховых пространств, а* $g : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$ *есть* C^p-*морфизм. Предположим, что* g *отображает* $U_1 \times a_2$, $a_2 \in U_2$, *в* $V_1 \times b_2$, $b_2 \in V_2$. *Тогда индуцированное отображение*

$$g_1 : U_1 \to V_1$$

также является морфизмом.

Действительно, индуцированное отображение является композицией отображений

$$U_1 \to U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2 \to V_1,$$

где первое отображение — включение, а третье — проектирование.

Таким образом, мы определили C^p-структуру на пространстве Y, которое назовем *подмногообразием* многообразия X. Эта структура обладает свойством универсальности для отображения, которое характеризует ее, а именно:

Пусть дано любое такое отображение $f : Z \to X$ *многообразия* Z *в* X, *что* $f(Z)$ *содержится в* Y, *и* $f_Y : Z \to Y$ — *индуцированное отображение. В этом случае* f *является морфизмом тогда и только тогда, когда* f_Y — *морфизм.*

Доказательство этого утверждения, основанное на лемме 1, тривиально.

Заметим, наконец, что включение Y в X оказывается морфизмом.

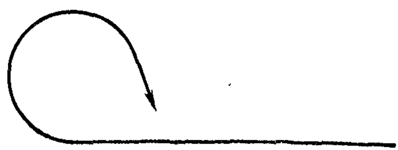
Если Y является замкнутым подпространством в X, то мы назовем его *замкнутым подмногообразием.*

Пусть $f: Z \to X$ — морфизм. Мы скажем, что f *есть иммерсия в точке* $z \in Z$, если существуют подмногообразие Y многообразия X, открытая окрестность U точки z и открытая окрестность V точки $f(z)$, такие, что $f(U) \subset \subset V \cap Y$ и индуцированное отображение

$$f_Y : U \to V \cap Y$$

есть изоморфизм. Морфизм f назовем *иммерсией*, если он будет иммерсией в каждой точке.

Отметим, что существуют инъективные иммерсии, которые не являются изоморфизмом на подмногообразие. Это видно из следующего примера:



(стрелка означает, что кривая приближается, не прикасаясь, к самой себе). Иммерсия, которая задает изоморфизм на подмногообразие, называется *вложением*, и называется *замкнутым вложением*, если подмногообразие замкнуто.

Морфизм $f: X \to Y$ называется *субмерсией в точке* $x \in X$, если существуют такие карты (U, φ) в x и (V, ψ) в $f(x)$, что φ задает изоморфизм множества U на произведение $U_1 \times U_2$ (U_1 и U_2 — открытые подмножества некоторых банаховых пространств), и отображение

$$\psi f \varphi^{-1} = f_{V,U} : U_1 \times U_2 \to V$$

есть проекция. Морфизм f назовем *субмерсией*, если он будет субмерсией в каждой точке. Легко видеть, что образом при субмерсии является открытое множество (в самом деле, субмерсия есть открытое отображение).

Для многообразий, моделями для которых являются банаховы пространства, имеются обычные критерии иммерсии и субмерсии в терминах производной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть X и Y — многообразия класса C^p ($p \geqslant 1$), и моделями для них являются банаховы пространства. Рассмотрим C^p-морфизм $f: X \to Y$. Тогда для $x \in X$*

1) *f является иммерсией в x тогда и только тогда, когда существуют такие карты (U, φ) в x и (V, ψ) в $f(x)$, что $f'_{V, U}(\varphi x)$ есть инъективное отображение, разлагающее пространство — модель для Y.*

2) *f является субмерсией в x тогда и только тогда, когда существуют такие карты (U, φ) в x и (V, ψ) в $f(x)$, что $f'_{V,U}(\varphi x)$ есть сюръективное отображение, и его ядро разлагает пространство — модель для X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это предложение немедленно вытекает из следствий 1 и 2 теоремы об обратной функции.

Условия, сформулированные в обоих заключениях предложения 1, наложены только на производную, и если они выполнены для некоторого выбора карт (U, φ) и (V, ψ), то они выполнены для любого выбора этих карт. Поэтому удобно ввести соответствующую терминологию.

Пусть X — многообразие класса C^p $(p \geqslant 1)$ и x — точка многообразия X. Рассмотрим тройку (U, φ, v), где (U, φ) — карта в x и v — элемент того векторного пространства, в котором лежит φU. Скажем, что две такие тройки (U, φ, v) и (V, ψ, w) эквивалентны, если производная отображения $\psi\varphi^{-1}$ в точке φx отображает v в w. Иначе говоря,

$$(\psi\varphi^{-1})'(\varphi x)\, v = w$$

(из правила дифференцирования сложной функции следует, что это действительно соотношение эквивалентности). Класс эквивалентных троек называется *касательным вектором к X в точке x*.

Множество всех касательных векторов в точке x называется касательным пространством к X в точке x и обозначается $T_x(X)$. Каждая карта определяет биективное отображение пространства $T_x(X)$ на банахово пространство, сопоставляя классу эквивалентности тройки (U, φ, v) вектор v. С помощью этого биективного отображения на $T_x(X)$ можно ввести структуру топологического векторного пространства, задаваемую рассматриваемой картой. Ясно, что эта структура не зависит от выбора карты.

Каждому морфизму f класса C^p $(p \geqslant 1)$ одного открытого множества в банаховом пространстве в другое такое же множество можно поставить в соответствие его производную Df. Рассмотрим теперь морфизм $f: X \to Y$ одного многообразия в другое. При помощи карт можно интерпретировать производную отображения f в точке $x \in X$ как отображение

$$T_x f : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y).$$

Это отображение непрерывно и линейно относительно установленных в $T_x(X)$ и $T_{f(x)}(Y)$ структур топологических векторных пространств.

Что касается обозначений, то мы будем иногда писать $f_{*,x}$ вместо $T_x f$.

Оператор T обладает очевидными функториальными свойствами. Именно, если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — морфизмы, то

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f),$$

$$T_x(\mathrm{id}) = \mathrm{id}.$$

Мы можем переформулировать предложение 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть X, Y — многообразия класса C^p ($p \geqslant 1$), моделями для которых служат банаховы пространства. Рассмотрим C^p-морфизм $f: X \to Y$. Тогда*

1) *f является иммерсией в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда отображение $T_x f$ инъективно и разлагает пространство, являющееся моделью для Y;*

2) *f является субмерсией в точке x тогда и только тогда, когда отображение $T_x f$ сюръективно и его ядро разлагает пространство, являющееся моделью для X.*

ПРИМЕР. Пусть $\mathbf{E}$ — вещественное гильбертово пространство, и пусть $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}$ — скалярное произведение в нем. Квадрат нормы $f(x) = \langle x, x \rangle$, очевидно, является функцией класса C^∞. Ее производная $f'(x)$ задается формулой

$$f'(x)y = 2\langle x, y \rangle,$$

и, следовательно, для любого $x \neq 0$ есть сюръективное отображение. Кроме того, его ядром является подпространство, ортогональное к x и потому разлагающее пространство $\mathbf{E}$. Отсюда следует, что единичная сфера в гильбертовом пространстве является подмногообразием.

Если W — подмногообразие многообразия Y класса C^p $(p \geqslant 1)$, то включение

$$i : W \to Y$$

индуцирует отображение

$$T_w i : T_w(W) \to T_w(Y),$$

которое тоже является включением. Из определения подмногообразия немедленно видно, что образ отображения $T_w i$ разлагает $T_w(Y)$. Будет удобно отождествлять $T_w(W)$ и $T_w i(T_w(W))$, если это не приведет к недоразумениям.

Морфизм $f : X \to Y$ назовем *трансверсальным* вдоль подмногообразия W многообразия Y, если выполнено следующее условие.

Пусть $x \in X$ таково, что $f(x) \in W$, и пусть (V, ψ) — такая карта в $f(x)$, что $\psi : V \to V_1 \times V_2$ есть изоморфизм на произведение, причем $\psi(f(x)) = (0, 0)$ и $\psi(W \cap V) = V_1 \times 0$. Тогда существует такая открытая окрестность U точки x, что композиция отображений

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} V_1 \times V_2 \xrightarrow{\text{пр}} V_2$$

есть субмерсия.

В частности, если f трансверсально вдоль W, то $f^{-1}(W)$ есть подмногообразие многообразия X, поскольку прообраз нуля относительно нашей локальной композиции отображений $(\text{пр} \circ \psi \circ f)$ совпадает с прообразом множества $W \cap V$ относительно отображения f.

Так же как иммерсию и субмерсию, трансверсальное отображение можно охарактеризовать в терминах касательных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть моделями для многообразий X и Y класса C^p $(p \geqslant 1)$ являются банаховы пространства, и пусть W — подмногообразие в Y. Морфизм $f: X \to Y$ тогда и только тогда трансверсален вдоль W, когда для каждой точки $x \in X$, такой, что $w = f(x) \in W$ — композиция отображений*

$$T_x(X) \xrightarrow{T_x(f)} T_w(Y) \longrightarrow T_w(Y)/T_w(W)$$

сюръективна и ее ядро разлагает $T_x(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f трансверсально вдоль W, то для каждой точки $x \in X$, такой, что $f(x) \in W$, выберем карты, о которых говорится в определении, и сведем вопрос к отображению открытых подмножеств банаховых пространств. В этом случае утверждение о касательных пространствах следует из предполагаемого разложения в прямое произведение. Обратно, предположим, что касательное отображение удовлетворяет нашим условиям. Поскольку вопрос локален, мы можем предположить, что $Y = V_1 \times V_2$ — такое произведение открытых подмножеств банаховых пространств, что $W = V_1 \times 0$. Мы можем предположить также, что $X = U$ открыто в некотором банаховом пространстве и $x = 0$. Тогда обозначим через g отображение $\pi \circ f : U \to V_2$, где π — проектирование, и заметим, что наше предположение означает, что $g'(0)$ — сюръективное отображение и его ядро разлагает пространство, содержащее U. Кроме того, $g^{-1}(0) = f^{-1}(W)$. Мы можем поэтому применить следствие 2 теоремы об обратной функции и тем закончить доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве нашего утверждения мы замечаем, что свойство композиции отображений быть эпиморфизмом эквивалентно тому, что $T_w(Y)$ разлагается в сумму пространства $T_w(W)$ и образа отображения $T_x(f)$, т. е.

$$T_w(Y) = \operatorname{Im} T_x(f) + \operatorname{Im} T_w(i),$$

где i: $W \to Y$ — включение. В конечномерном случае другие условия излишни.

Если $\mathbf{E}$ — банахово пространство, то в пространстве $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ диагональ Δ является замкнутым разлагающим подпространством. $\mathbf{E} \times 0$ либо $0 \times \mathbf{E}$ является замкнутым дополнением. Следовательно, диагональ является замкнутым подмногообразием в $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$. Поэтому, если X — многообразие класса C^p ($p \geqslant 1$), то диагональ является подмногообразием (разумеется, тогда и только тогда замкнутым, когда пространство X хаусдорфово).

Рассмотрим два C^p-морфизма ($p \geqslant 1$) f: $X \to Z$ и g: $Y \to Z$. Мы скажем, что они *трансверсальны*, если морфизм

$$f \times g : X \times Y \to Z \times Z$$

трансверсален вдоль диагонали. Отметим сразу же, что свойство отображения в предложении 3 быть сюръективным можно выразить двумя способами. Для таких точек $x \in X$ и $y \in Y$, что $f(x) = g(y) = z$, условие

$$\operatorname{Im} T_x(f) + \operatorname{Im} T_y(g) = T_z(Z)$$

эквивалентно условию

$$\operatorname{Im} T_{(x,y)}\ (f \times g) + T_{(z,z)}(\Delta) = T_{(z,z)}(Z \times Z).$$

Поэтому в конечномерном случае можно любое из них принять за определение трансверсальности.

Мы используем трансверсальность в качестве достаточного условия того, что существует расслоенное произведение двух морфизмов. Напомним определение для любой категории. Расслоенное произведение двух морфизмов $f: X \to Z$ и $g: Y \to Z$ над Z состоит из такого объекта P и двух морфизмов

$$g_1: P \to X \text{ и } g_2: P \to Y,$$

что $f \circ g_1 = g \circ g_2$ и выполнено следующее свойство универсальности: для данного объекта S и двух морфизмов $u_1: S \to X$ и $u_2: S \to Y$, удовлетворяющих условию $fu_1 = gu_2$, существует единственный такой морфизм $u: S \to P$, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "u_2"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[l, "g_1"] \arrow[r, "g_2"'] & Y \arrow[dl, "g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Тройка (P, g_1, g_2) определена однозначно, с точностью до единственного (в очевидном смысле) изоморфизма, и P обозначается через $X \times_Z Y$.

В расслоенном произведении можно считать сомножители неравноправными. Предположим, что для двух морфизмов в следующей диаграмме

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

существует расслоенное произведение, так что диаграмму можно дополнить до следующей

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Назовем g_1 *обратным образом* отображения g относительно f и обозначим его через $f^*(g)$ Точно так же будем писать $f^*(Y)$ вместо $X \times_Z Y$.

В категории многообразий мы будем встречаться только со случаями, когда в качестве расслоенного произведения можно взять теоретико-множественное расслоенное произведение, на котором можно ввести структуру многообразия. (Теоретико-множественное расслоенное произведение есть совокупность пар точек, проектирующихся в одну и ту же точку.) Этим расслоенное произведение определено однозначно, а не только с точностью до изоморфизма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть* $f: X \to Z$ *и* $g: Y \to Z$ — *два* C^p*-морфизма и* $p \geqslant 1$. *Если они трансверсальны, то*

$$(f \times g)^{-1}\ (\Delta_Z)$$

вместе с естественными морфизмами в X *и* Y, *которые индуцируются проектированиями, определяет расслоенное произведение над* Z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Для построения расслоенного произведения достаточно построить его локально. Действительно, пусть $f: X \to Z$ и $g: Y \to Z$ — два морфизма. Пусть $\{V_i\}$ — открытое покрытие многообразия Z, и пусть

$$f_i: f^{-1}(V_i) \to V_i \text{ и } g_i: g^{-1}(V_i) \to V_i$$

— ограничения отображений f и g на соответствующих прообразах множеств V_i. Положим $P = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$. Тогда P состоит из таких точек (x, y) $(x \in X, \ y \in Y)$, что $f(x) = g(y)$. Будем рассматривать P как подпространство пространства $X \times Y$ (т. е. в топологии, индуцированной топологией пространства $X \times Y$). Точно так же построим при помощи f_i и g_i множества P_i. Тогда P_i открыты в P. Проектирования на первой и второй сомножитель дают естественные отображения множеств P_i в $f^{-1}(V_i)$ и $g^{-1}(V_i)$ и множества P в X и Y.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Предположим, что каждое множество P_i допускает такую структуру многообразия (совместимую с топологией), что указанные отображения являются морфизмами, превращающими P_i в расслоенное произведение отображений f_i и g_i. Тогда P вместе с естественными проектированиями образует расслоенное произведение отображений f и g.*

Для доказательства этого утверждения заметим, что P_i образуют покрытие множества P. Кроме того, структуры многообразия на пересечении $P_i \cap P_j$, индуцированные структурами на P_i и P_j, должны совпадать, поскольку над $V_i \cap V_j$ существует единственная структура расслоенного произведения отображений f_{ij} и g_{ij} (определенных соответственно на $f^{-1}(V_i \cap V_j)$ и $g^{-1}(V_i \cap V_j)$). Таким образом, на P можно так задать структуру многообразия, что проектирования в X и Y будут морфизмами и P будет расслоенным произведением отображений f и g.

Мы применим все эти рассуждения в следующей главе к векторным расслоениям. Нам будет полезен следующий локальный критерий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *У морфизма $f: X \to Z$ и проектирования на первый сомножитель $g: Z \times W \to Z$ существует* *расслоенное произведение, а именно прямое произведение* $X \times W$ *совместно с морфизмами следующей диаграммы*

$$\begin{tikzcd} X \times W \arrow[r, "f\times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\text{пр}_1"'] & Z \times W \arrow[d, "\text{пр}_2"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

§ 3. Разбиение единицы

Рассмотрим многообразие X класса C^p. *Функцией* на X называется морфизм многообразия X в $\mathbf{R}$ (класса C^p, если нет других уточнений). Функции образуют кольцо $\mathfrak{F}^p(X)$. *Носителем* функции f будем называть замыкание множества таких точек x, что $f(x) \neq 0$.

Пусть X — топологическое пространство. Покрытие пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки имеется окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия. *Измельчение* покрытия пространства X — это другое покрытие, каждый элемент которого содержится в элементе первого покрытия. Топологическое пространство называется *паракомпактным*, если оно хаусдорфово и для каждого его открытого покрытия существует локально конечное открытое измельчение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если* $\{U_i\}$ — *открытое покрытие паракомпактного пространства* X, *то существует такое локально конечное открытое покрытие* $\{V_i\}$, *что* $V_i \subset U_i$ *для всех* i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_k\}$ — локально конечное открытое измельчение покрытия $\{U_i\}$. Для каждого k найдется такой индекс $i(k)$, что $V_k \subset U_{i(k)}$. Обозначим W_i объединение всех тех V_k, для которых $i(k) = i$. Тогда множества W_i образуют локально конечное открытое покрытие, поскольку каждая окрестность, пересекающаяся с бесконечным числом множеств W_i, обязана пересекаться с бесконечным числом множеств V_k.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если X паракомпактно, то оно нормально. Кроме того, если* $\{U_i\}$ — *локально конечное от-*

крытое покрытие пространства X, то существует такое локально конечное открытое покрытие $\{V_i\}$, что $\overline{V}_i \subset U_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. книгу Бурбаки [3].

Отметим, что из предложения 7 следует, что легко достичь того, чтобы у измельчения было нужное множество ~~индексов~~.

Разбиение единицы (класса C^p) на многообразии X состоит из открытого покрытия $\{U_i\}$ многообразия X и системы функций

$$\psi_i : X \to \mathbf{R},$$

удовлетворяющих следующим условиям.

РЕ 1. Для всех $x \in X$ выполнено неравенство $\psi_i(x) \geqslant 0$.

РЕ 2. Носитель функции ψ_i содержится в U_i.

РЕ 3. Покрытие $\{U_i\}$ локально конечно.

РЕ 4. Для каждой точки $x \in X$ выполнено равенство

$$\sum \psi_i(x) = 1.$$

Суммирование ведется по всем i, но фактически, в силу **РЕ 3**, для каждой точки x — это конечная сумма.

Мы будем иногда обозначать разбиение единицы символом $\{(U_i, \psi_i)\}$.

Говорят, что многообразие X *допускает разбиение единицы*, если оно паракомпактно и для каждого локально конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ существует такое разбиение единицы $\{\psi_i\}$, что носитель функции ψ_i содержится в U_i.

Покрытие $\{V_k\}$ пространства X *подчинено* покрытию $\{U_i\}$, если каждое V_k содержится в некотором U_i.

Было бы желательно дать достаточные условия того, что многообразие допускает разбиение единицы. Топологический аспект этой проблемы несложен. Известно (см. Бурбаки [3]), что каждое метрическое пространство паракомпактно и что на каждом паракомпактном пространстве существует непрерывное разбиение единицы. Однако в случае бесконечномерных многообразий возникают трудности при построении дифференцируемых разбиений единицы, ибо существуют банаховы пространства, на которых дифференцируемая функция, равная нулю вне сферы радиуса $r > 0$, тождественно равна нулю[1]. Следовательно, разбиение единицы существует не всегда. В конечномерном случае существование разбиения единицы следует из приводимой ниже теоремы.

В банаховом пространстве **E** обозначим через $B_r(a)$ открытый шар радиуса r с центром в a, а через $\overline{B_r}(a)$ — его замыкание. Если $a = 0$, то будем писать соответственно B_r и $\overline{B}_r$. Два открытых шара (конечного радиуса), очевидно, C^∞-изоморфны. Пусть X — многообразие и (V, φ) — карта в $x \in X$; тогда мы скажем, что (V, φ) (или просто V) шар радиуса r, если φV будет шаром радиуса r в банаховом пространстве.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть многообразие X является локально компактным хаусдорфовым пространством со счетной базой. Для каждого открытого покрытия $\mathfrak{A}$ пространства X существует такой атлас $\{(V_k, \varphi_k)\}$, что покрытие $\{V_k\}$ локально конечно и подчинено данному покрытию, множество $\varphi_k V_k$ есть открытый шар B_3 и открытые множества $W_k = \varphi_k^{-1}(B_1)$ покрывают X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U_1, U_2, \ldots$ — такой базис открытых множеств пространства X, что каждое $\overline{U}_i$ компактно. Построим по индукции последовательность $A_1, A_2, \ldots$ таких компактных множеств, что их объединение есть все X и каждое A_i содержится в открытом ядре множества A_{i+1}. Положим $A_1 = \overline{U}_1$. Предположим, что уже построено A_i, и пусть j — наименьшее из таких целых чисел, что A_i содержится в $U_1 \cup \ldots \cup U_j$. Положим A_{i+1} равным компактному множеству

$$\overline{U}_1 \cup \ldots \cup \overline{U}_j \cup \overline{U}_{j+1}.$$

В каждой точке $x \in X$ можно найти такую карту (V_x, φ_x), что $\varphi_x V_x$ есть шар радиуса 3 и V_x содержится в некотором элементе покрытия $\mathfrak{A}$.

Обозначим $W_x = \varphi_x^{-1}(B_1)$ шар радиуса 1 в этой карте. Мы можем покрыть множество $A_{i+1} - \operatorname{Int}(A_i)$ (это,

---

[1] См. по этому поводу R. Bonic, J. Frampton, Differentiable functions on certain Banach spaces., *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 71 (1965), № 2, 393—395; Smooth functions on Banach manifolds. *J. of Math. and Mech.*, (1966), № 5, 877—898.— *Прим. ред.*

так сказать, замкнутое кольцо) конечным числом этих шаров радиуса 1 (скажем, шарами $W_1, \ldots, W_n$) таким образом, чтобы соответствующие $V_1, \ldots, V_n$ содержались в открытом множестве $\operatorname{Int} A_{i+2} - A_{i-1}$ (так сказать, открытом кольце ближайшего большего размера). Пусть $\mathfrak{B}_i$ означает набор $V_1, \ldots, V_n$, и пусть $\mathfrak{B}$ — объединение этих наборов. Тогда покрытие $\mathfrak{B}_i$ локально конечно и доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть многообразие X является локально компактным хаусдорфовым пространством со счетной базой. Тогда X допускает разбиение единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим построенный в теореме атлас (V_k, φ_k) и $W_k = \varphi_k^{-1}(B_1)$. Можно найти такую функцию ψ_k класса C^p, что $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$, $\psi_k(x) = 1$ для $x \in W_k$ и $\psi_k(x) = 0$ для $x \notin V_k$. (Ниже мы напомним доказательство.) Положим теперь

$$\psi = \sum \psi_k$$

(сумма конечна в каждой точке) и обозначим $\gamma_k = \psi_k/\psi$. Тогда $\{(V_k, \gamma_k)\}$ — требуемое разбиение единицы.

Напомним теперь доказательство существования функций ψ_k. Для вещественных чисел r, s $(0 \leqslant r < s)$ функция, равная

$$\exp\left\{\frac{-1}{(t-r)(s-t)}\right\}$$

в открытом интервале $r < t < s$ и равная 0 вне этого интервала, есть колоколообразная функция класса C^∞ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Интеграл от нее в пределах от $-\infty$ до t, деленный на площадь, находящуюся под колоколом, приводит к функции, заключенной строго между 0 и 1 при $r < t < s$, равной нулю при $t \leqslant r$ и равной 1 при $t \geqslant s$. (Эта функция даже монотонно возрастает.)

Поэтому можно построить такую функцию $\eta(t)$ из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, что $\eta(t) = 1$ при $|t| < 1$ и $\eta(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1 + \delta$, где δ мало, и такую, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Если $\mathbf{E}$ — гильбертово пространство, то $\eta(|x|^2) = \psi(x)$ дает нам функцию, равную единице в шаре радиуса 1 и равную нулю вне шара радиуса $1 + \delta$. Эту функцию можно затем перенести на многообразие при помощи карты, образ которой есть шар радиуса 3. Тем же спо-

обом можно построить функцию, большую нуля в за-
анном шаре и равную нулю вне него.

Разбиение единицы является единственным известным редством для склеивания локальных отображений в бъектах со сложением, а именно векторных расслоениях, которых будет идти речь в следующей главе. Поэтому ак для банаховых, так и для гильбертовых многообразий важно определить условия, при которых сущестует разбиение единицы. В случае банаховых многообазий дело осложняется тем, что не всегда существует ифференцируемая функция, равная 1 на B_1 и 0 вне B_3.

Несмотря на то, что неизвестно, верна ли теорема 1 ля гильбертовых многообразий, для них все же можно остроить разбиение единицы. Как сообщил мне Илс, для этой цели можно использовать метод, примененный Дьедонне для доказательства того, что метрические протранства паракомпактны (см. ниже лемму 1). В оставшейся части параграфа я следую идее Илса.

Нам понадобится несколько лемм. Будем использоать символ ${}^cA$ для обозначения дополнения к множетву A.

Рассмотрим метрическое пространство M с метрикой d. В M мы можем говорить об открытых и замкнуых шарах. Например, $\bar{B}_a(x)$ означает замкнутый шар адиуса a с центром в x. Он состоит из всех точек y, удовлетворяющих условию $d(y, x) \leqslant a$. Открытое подмножество V в M назовем *зубчатым*, если для некоторых открытых шаров $U, U_1, \ldots, U_m$ имеем

$$V = U \cap {}^c\bar{U}_1 \cap \ldots \cap {}^c\bar{U}_m.$$

Покрытие $\{V_i\}$ подмножества W множества M называется локально конечным (относительно W), если у каждой точки $x \in W$ есть окрестность, пересекающаяся олько с конечным числом элементов покрытия.

ЛЕММА 1. *Пусть M — метрическое пространство и $\{U_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) — счетное покрытие подмножества W открытыми шарами. Тогда существует такое открытое локально конечное покрытие $\{V_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) подмножества W, что $V_i \subset U_i$ для всех i и множества V_i являются зубчатыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим V_i по индукции следующим образом. Каждое U_i есть шар, скажем $B_{a_i}(x_i)$. Пусть $V_1 = U_1$. Если V_{i-1} определено, то положим

$$r_{1,i} = a_1 - \frac{1}{i}, \ \ldots, r_{i-1,i} = a_{i-1} - \frac{1}{i}$$

и

$$V_i = U_i \cap {}^c\overline{B_{r_{1,i}}(x_1)} \cap \ldots \cap {}^c\overline{B_{r_{i-1,i}}(x_{i-1})},$$

где под шаром отрицательного радиуса понимается пустое множество. Тогда каждое V_i является зубчатым и содержится в U_i. Мы утверждаем, что множества V_i покрывают W. Действительно рассмотрим элемент x множества W. Пусть j — наименьший индекс, для которого $x \in U_j$. Тогда $x \in V_j$, ибо в противном случае x содержалось бы в дополнении к V_j, которое состоит из объединения

$${}^cU_j \cup \overline{B_{r_{1,j}}(x_1)} \cup \ldots \cup \overline{B_{r_{j-1,j}}(x_{j-1})}.$$

Значит, x содержалось бы в одном из U_i, где $i < j$. Получено противоречие.

Осталось показать, что покрытие $\{V_i\}$ локально конечно. Рассмотрим $x \in W$. Эта точка x лежит в одном из U_n. Пусть s — настолько малое положительное число, что $B_s(x)$ содержится в U_n, и пусть $t = s/2$. Для всех достаточно больших i шар $B_t(x)$ содержится в $\overline{B_{a_n - 1/i}(x_n)} = \overline{B_{r_{n,i}}(x_n)}$ и поэтому этот шар не пересекается с V_i. Мы нашли окрестность точки x, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов покрытия, а это и означает, что покрытие локально конечно (относительно W).

ЛЕММА 2. *Если U — открытый шар в гильбертовом пространстве* $\mathbf{E}$ *и*

$$V = U \cap {}^c\overline{U_1} \cap \ldots \cap {}^c\overline{U_m}$$

— зубчатое открытое подмножество. Тогда существует такая C^∞-функция $\omega: \mathbf{E} \to \mathbf{R}$, что $\omega(x) > 0$ при $x \in V$ и $\omega(x) = 0$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого U_i обозначим через φ_i такую функцию из $\mathbf{E}$ в $\mathbf{R}$, что

$$0 \leqslant \varphi_i(x) < 1 \text{ при } x \in {}^c\bar{U}_i,$$

$$\varphi_i(x) = 1 \text{ при } x \in \bar{U}_i.$$

Пусть $\varphi(x)$ — такая функция, что $\varphi(x) > 0$ на U и $\varphi(x) = 0$ вне U. Обозначим $\omega(x) = \varphi(x) \prod (1 - \varphi_i(x))$. Тогда $\omega(x)$ удовлетворяет нашим требованиям.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A_1, A_2 — непустые замкнутые непересекающиеся подмножества гильбертова пространства $\mathbf{E}$ со счетной базой. Тогда существует такая C^∞-функция $\psi: \mathbf{E} \to \mathbf{R}$, что $\psi(x) = 0$ при $x \in A_1$, $\psi(x) = 1$ при $x \in A_2$ и $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ при всех x.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Линделёфа можно покрыть A_2 таким счетным набором открытых шаров $\{U_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что каждый шар U_i содержится в дополнении к A_1. Обозначим W объединение всех U_i. По лемме 1 построим локально конечное измельчение $\{V_i\}$. Используя лемму 2, построим функции ω_i, которые положительны на V_i и равны нулю вне V_i. Положим $\omega = \sum \omega_i$ (сумма конечна в каждой точке множества W). Тогда $\omega(x) > 0$ при $x \in A_2$ и $\omega(x) = 0$ при $x \in A_1$.

Рассмотрим открытую окрестность U множества A_2, в которой $\omega > 0$. Тогда A_2 и ${}^cU$ — замкнутые непересекающиеся множества, и мы можем, применяя предыдущую конструкцию, построить функцию $\sigma: \mathbf{E} \to \mathbf{R}$, положительную на ${}^cU$ и равную нулю на A_2. Функция $\psi = \omega/(\sigma + \omega)$ удовлетворяет нашим требованиям.

СЛЕДСТВИЕ. *Паракомпактное многообразие X класса C^p, моделью для которого является гильбертово пространство $\mathbf{E}$, допускает разбиение единицы (класса C^p).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тривиально проверяется, что открытый шар конечного радиуса в $\mathbf{E}$ C^∞-изоморфен пространству $\mathbf{E}$. (Мы приведем формулу в гл. VII.) Поэтому для любой точки $x \in X$ и ее окрестности N можно всегда найти такую карту (G, γ) в x, что $\gamma G = \mathbf{E}$ и $G \subset N$. Следовательно, для любого открытого покрытия многообразия X можно найти такой подчиненный данному покрытию атлас $(G_\alpha, \gamma_\alpha)$, что $\gamma_\alpha G_\alpha = \mathbf{E}$. В силу паракомпактности можно найти локально конечное измельчение $\{U_i\}$ покрытия $\{G_\alpha\}$. Каждое U_i содержится в некотором $G_{\alpha(i)}$, и мы обозначим через φ_i ограничение отображения $\gamma_{\alpha(i)}$ на U_i. Найдем теперь открытые измельчения $\{V_i\}$ и $\{W_i\}$, такие, что

$$\overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i,$$

где черта означает замыкание в X. Поскольку каждое $\overline{V}_i$ замкнуто в X, из нашего построения следует, что $\varphi_i\overline{V}_i$ и $\varphi_i\overline{W}_i$ замкнуты в $\mathbf{E}$. Применяя теорему и перенося посредством φ_i функции, заданные на $\mathbf{E}$, на многообразие X, мы найдем C^p-функции $\psi_i: X \to \mathbf{R}$, которые равны единице на $\overline{W}_i$ и нулю вне $X - V_i$. Положим $\psi = \sum \psi_i$ и $\theta_i = \psi_i/\psi$. Тогда $\{\theta_i\}$ образует требуемое разбиение единицы.

Приложение

Многообразия с краем

Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{E}$ и его непрерывное линейное отображение в $\mathbf{R}$ $\lambda: \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ (называемое также *функционалом* на $\mathbf{E}$). Обозначим через $\mathbf{E}_\lambda^0$ ядро отображения λ и через $\mathbf{E}_\lambda^+$(соответственно $\mathbf{E}^-$) — множество таких точек $x \in \mathbf{E}$, что $\lambda(x) \geqslant 0$ (соответственно $\lambda(x) \leqslant 0$). Назовем $\mathbf{E}_\lambda^0$ *гиперплоскостью, а* $\mathbf{E}_\lambda^+$ и $\mathbf{E}_\lambda^-$ *полупространствами*.

Если μ *— другой функционал и* $\mathbf{E}_\lambda^+ = \mathbf{E}_\mu^+$, *то существует такое число* $c > 0$, *что* $\lambda = c\mu$. Это легко доказать. Действительно, сразу видно, что ядра у λ и μ совпадают. Предположим, что $\lambda \neq 0$. Пусть для вектора x_0 $\lambda(x_0) > 0$. Тогда $\mu(x_0) > 0$. Функционал $\lambda - (\lambda(x_0)/\mu(x_0))\mu$ обращается в нуль на ядре функционала λ (или μ) и на векторе x_0. Поэтому он равен нулю тождественно и $c = \lambda(x_0)/\mu(x_0)$.

Пусть **E**, **F** — банаховы пространства, и пусть $\mathbf{E}_\lambda^+$ и $\mathbf{F}_\mu^+$ — два полупространства соответственнно в **E** и **F**. Отображение

$$f : U \to V$$

открытого подмножества $U \subset \mathbf{E}_\lambda^+$ в открытое подмножество $V \subset \mathbf{F}_\mu^+$ назовем морфизмом класса C^p, если выполнено следующее условие. Для каждой точки $x \in U$ найдется такая открытая в **E** окрестность U_1 точки x, открытая в **F** окрестность V_1 точки $f(x)$ и морфизм $f_1 : U_1 \to V_1$ (в смысле гл. I), что ограничение f_1 на $U_1 \cap U$ совпадает с f. (Мы предполагаем, что все морфизмы принадлежат классу C^p, где $p \geqslant 1$.)

Когда наши полупространства являются полными пространствами (т. е. совпадают с векторными пространствами), наше определение совпадает с употреблявшимся ранее.

Если взять в качестве объектов открытые подмножества банаховых полупространств и в качестве морфизмов C^p-морфизмы, то мы получим категорию. Тогда определено понятие изоморфизма и можно, как и ранее, при помощи карт и атласов определить многообразия. Многообразия из § 1 было бы лучше называть многообразиями без края, оставив термин «многообразие» для наших новых более общих объектов.

Однако в оставшейся части книги мы будем для простоты иметь дело исключительно с многообразиями без края.

Следующие замечания дадут читателю средство перенести нужные ему результаты (если это возможно) с многообразий без края на многообразия с краем.

Во-первых, относительно понятия производной мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $f : U \to \mathbf{F}$ и $g : U \to \mathbf{F}$ — два морфизма класса C^p $(p \geqslant 1)$, определенные на открытых подмножествах пространства* **E**. *Предположим, что ограничения отображений f и g на $U \cap \mathbf{E}_\lambda^+$ для некоторого полупространства $\mathbf{E}_\lambda^+$ совпадают, и пусть $x \in U \cap \mathbf{E}_\lambda^+$. Тогда $f'(x) = g'(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая, если нужно, разность $f-g$, можно предположить без ограничения общности, что ограничение f на $U \cap \mathbf{E}_\lambda^+$ равно нулю. Тогда ясно, что $f'(x)=0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть U открыто в $\mathbf{E}$, μ — ненулевой функционал на $\mathbf{F}$ и $f: U \to \mathbf{F}_\mu^+$ — морфизм класса C^p $(p \geqslant 1)$. Если x — такая точка из U, что $f(x) \in \mathbf{F}_\mu^0$, то $f'(x)$ отображает $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}_\mu^0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $x=0$ и $f(x)=0$. Рассмотрим в $\mathbf{F}$ окрестность нуля W. Предположим, что можно найти такой элемент $v \in \mathbf{E}$, что $\mu(f'(0)v) \neq 0$. Для малых t можно написать

$$f(tv) = tf'(0)v + o(t)w_t,$$

где $w_t \in W$. По предположению $f(tv)$ лежит в $\mathbf{F}_\mu^+$. Применяя μ, получаем

$$t\mu(f'(0)v) + o(t)\mu(w_t) \geqslant 0,$$

или после деления на t

$$\mu(f'(0)\ v) \geqslant \frac{o(t)}{t}\mu(w_t).$$

Заменяя t на $-t$, можно таким же образом вывести противоположное неравенство. Устремляя t к нулю, получаем $\mu(f'(0)v)=0$, что противоречит предположению.

Пусть U открыто в некотором полупространстве $\mathbf{E}_\lambda^+$. Определим *границу* множества U (обозначается ∂U) как пересечение $U \cap \mathbf{E}_\lambda^0$ и *внутренность* множества U (обозначается $\operatorname{Int} U$) как дополнение в U к ∂U. Тогда $\operatorname{Int} U$ открыто в $\mathbf{E}$.

Из нашего определения дифференцируемости немедленно следует, что при $\lambda \neq 0$ полупространство $\mathbf{E}_\lambda^+$ C^∞-изоморфно прямому произведению

$$\mathbf{E}_\lambda^+ \approx \mathbf{E}_\lambda^0 \times \mathbf{R}^+,$$

где $\mathbf{R}^+$ — множество неотрицательных вещественных чисел. Границей множества $\mathbf{E}_\lambda^+$ в этом случае является $\mathbf{E}_\lambda^0 \times 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим функционалы λ и μ соответственно на* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{F}$, *множество* U, *открытое в* $\mathbf{E}_\lambda^+$, *и множество* V, *открытое в* $\mathbf{F}_\mu^+$, *причем пересечение* $V \cap \mathbf{F}_\mu^0$ *не пусто. Пусть задан изоморфизм* $f : U \to V$ *класса* C^p $(p \geqslant 1)$. *В этом случае* $\lambda \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mu \neq 0$. *Если* $\lambda \neq 0$, *то* f *индуцирует* C^p*-изоморфизмы:* $\operatorname{Int} U \to \operatorname{Int} V$ *и* $\partial U \to \partial V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из функториальности производной следует, что $f'(x)$ для каждого $x \in U$ является топлинейным изоморфизмом. Наше первое утверждение следует из предыдущего предложения. Мы видим также, что ни одна внутренняя точка из U не переходит в граничную точку множества V и наоборот. Поэтому f индуцирует биективные отображения $\partial U \to \partial V$ и $\operatorname{Int} U \to \operatorname{Int} V$. Поскольку $\operatorname{Int} U$ и $\operatorname{Int} V$ открыты в соответствующих пространствах, определение производной показывает, что f индуцирует изоморфизм между ними. Что же касается границ, то они являются подмногообразиями в полных пространствах, и локально из определения производной и структуры прямого произведения следует, что ограничение отображения f на ∂U является изоморфизмом на ∂V.

Последнее предложение показывает, что граница является дифференцируемым инвариантом и поэтому можно говорить о границе многообразия.

Сделаем два замечания об осторожности в отношении многообразий с краем. Во-первых, в этой категории не определено произведение. Действительно, для взятия произведения мы должны определить многообразия с углами, что завело бы нас слишком далеко.

Во-вторых, в определении иммерсии и субмерсии имеются различия в зависимости от того, рассматриваем ли мы многообразия, вложенные в многообразие без края, или многообразия, вложенные в другие многообразия с краем. Рассмотрим замкнутый интервал, вложенный в обычную полуплоскость. Возникают две возможности. Случай, когда интервал лежит во внутренней части полуплоскости, существенно отличается от случая, когда одна точка интервала принадлежит граничной прямой. (Например, если даны два вложения первого типа, то существует автоморфизм полуплоскости, переводящий одно вложение в другое, однако не может существовать автоморфизма, переводящего вложение первого во вложение второго типа.)

Оставим читателю систематическое исследование понятий касательного пространства, иммерсии, вложения (и позднее, касательного расслоения, векторного поля и т. д.) для произвольных многообразий (с краем). Например, он может функториально определить касательное пространство, исходя из предложения 1.

Глава III

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Склеив между собой все касательные к многообразию пространства, можно получить многообразие с естественной проекцией. Это приводит к понятию касательного расслоения. Общий процесс склеивания приводит к построению более общих объектов — векторных расслоений, которые являются сильным инвариантом данного многообразия. (См. интересную теорему Мазура [10].) В этой главе мы проведем чисто формально некоторые функториальные построения, относящиеся к векторным расслоениям. В главах о дифференциальных формах и римановой метрике мы более детально изучим построения, относящиеся к полилинейным альтернированным и симметрическим положительно определенным формам.

Разбиения единицы являются важным инструментом в исследовании векторных расслоений. Их можно применить для объединения произвольного набора морфизмов в векторные расслоения. Мы приведем несколько примеров (касающихся точных последовательностей расслоений), показывающих, как это делается.

§ 1. Определение, обратные образы

Рассмотрим многообразие X класса C^p ($p \geqslant 0$) и морфизм $\pi: E \to X$. Предположим, что

ВР 1. Для каждого $x \in X$ в слой $\pi^{-1}(x) = E_x$ введена структура банахова пространства.

Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия X. Предположим, что для каждого i задано банахово пространство $\mathbf{E}_i$ и отображение

$$\tau_i: \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{E}_i,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

ВР 2. Отображение τ_i — изоморфизм, коммутирующий с проектированием на U_i, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\tau_i"] \arrow[dr] & & U_i \times \mathbf{E}_i \arrow[dl] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

коммутативна, и для каждого $x \in U_i$ индуцированное отображение на слое (обозначаемое через $\tau_i(x)$ или τ_{ix})

$$\tau_{ix} : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{E}_i$$

является топлинейным изоморфизмом.

ВР 3. Если U_i и U_j — два элемента покрытия, то отображение множества $U_i \cap U_j$ в $L(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$, задаваемое формулой

$$x \to (\tau_j \tau_i^{-1})_x,$$

является морфизмом.

Если все эти условия выполнены, мы скажем, что $\{(U_i, \tau_i)\}$ — *тривиализующее покрытие* для π (или, допуская неточность в выражении, для E) и что $\{\tau_i\}$ — *тривиализующие отображения*. Если $x \in U_i$, то мы скажем, что τ_i (или U_i) тривиализует в x. Два тривиализующих покрытия для π называются ВР-*эквивалентными*, если, взятые совместно, они удовлетворяют условиям **ВР 2** и **ВР 3**.

Класс эквивалентных тривиализующих покрытий по определению задает структуру *векторного расслоения* на π (или, не точно говоря, на E). E называется *тотальным пространством* расслоения, а X — его базой. Если педантично придерживаться функториального языка, то нужно бы обозначать эти пространства соответственно через E_π и X_π. Слой $\pi^{-1}(x)$ будем обозначать через E_x или π_x.

Если все $\mathbf{E}_i$ топлинейно изоморфны, то их можно отождествить с одним пространством $\mathbf{E}$. В этом случае мы скажем, что π (или, допуская неточность, E) есть *векторное расслоение со слоем* $\mathbf{E}$. Все $\mathbf{E}_i$ необходимо изоморфны, если многообразие X связно, поскольку множество тех $x \in X$, для которых существует тривиализующее отображение

$$\tau_{ix} : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{E}$$

при данном пространстве $\mathbf{E}$, одновременно открыто и замкнуто.

В конечномерном случае условие **ВР 3** следует из **ВР 2**.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим конечномерные векторные пространства* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{F}$ *и открытое множество* U *в некотором банаховом пространстве. Пусть*

$$f : U \times \mathbf{E} \to \mathbf{F}$$

такой морфизм, что для каждого $x \in U$ *отображение*

$$f_x : \mathbf{E} \to \mathbf{F},$$

задаваемое формулой $f_x(v) = f(x, v)$, *есть линейное отображение. Тогда отображение множества* U *в* $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, *задаваемое формулой* $x \to f_x$, *является морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно записать $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \times \ldots \times \mathbf{R}_n$ (n экземпляров прямой $\mathbf{R}$). Из того, что $L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = L(\mathbf{E}, \mathbf{R}_1) \times \ldots \times L(\mathbf{E}, \mathbf{R}_n)$, следует, что достаточно доказать наше утверждение для случая $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Аналогично можно предположить, что и $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Но в этом случае функцию $f(x, v)$ можно записать как $g(x) \cdot v$, где g — некоторое отображение $g : U \to \mathbf{R}$. Поскольку функция f — морфизм, то она является морфизмом и как функция по каждому из аргументов x и v. Полагая $v = 1$, получаем, что g есть морфизм, что заканчивает доказательство.

Как и в случае многообразий, для построения векторных расслоений нам нужно меньше, чем выполнение наших трех условий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Рассмотрим многообразие* X *и отображение* $(\pi : E \to X)$ *некоторого множества* E *в* X. *Обозначим* $\{U_i\}$ *некоторое открытое покрытие многообразия* X. *Предположим, что для каждого* i *задано банахово пространство* $\mathbf{E}_i$ *и такое коммутирующее с проектированием на* U_i *биективное отображение*

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{E}_i,$$

что для каждой пары i, j *и точки* $x \in U_i \cap U_j$ *отобра-*

жение $\left(\tau_j\, \tau_i^{-1}\right)_x$ *является топлинейным изоморфизмом и выполнено условие* **ВР 3**. *Тогда на* E *существует единственная такая структура многообразия, что* π *есть морфизм,* τ_i — *изоморфизмы, превращающие* π *в векторное расслоение, а* $\{(U_i, \tau_i)\}$ — *в тривиализующее покрытие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 16 гл. I, § 3 и нашего условия **ВР 3** заключаем, что отображение

$$\tau_j \tau_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbf{E}_i \to (U_i \cap U_j) \times \mathbf{E}_j$$

является морфизмом и, поскольку у него существует обратный морфизм, изоморфизмом. Из определения атласа следует, что в E можно единственным образом ввести такую структуру многообразия, что τ_i будут изоморфизмами. Поскольку π локально получено как композиция морфизмов (а именно τ_i и проектирования произведения $U_i \times \mathbf{E}_i$ на первый сомножитель), то оно является морфизмом. Если $x \in U_i$, то на слой $\pi^{-1}(x)$ можно перенести при помощи τ_{ix} структуру топологического векторного пространства с $\mathbf{E}_i$. Результат не зависит от выбора U_i, поскольку $\left(\tau_j\, \tau_i^{-1}\right)_x$ есть топлинейный изоморфизм. Наше предложение доказано.

Превратим теперь множество векторных расслоений в категорию.

Рассмотрим два векторных расслоения $\pi : E \to X$ и $\pi' : E' \to X'$.

ВР-*морфизм* $\pi \to \pi'$ состоит из пары морфизмов

$$f_0 : X \to X' \text{ и } f : E \to E',$$

удовлетворяющих следующим условиям:

ВР Мор 1. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f_0"'] & X' \end{tikzcd}$$

коммутативна, и в каждой точке $x \in X$ индуцированное отображение

$$f_x : E_x \to E'_{f(x)}$$

является непрерывным линейным отображением.

ВР Мор 2. Для каждого $x_0 \in X$ существуют такие тривиализующие отображения

$$\tau : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{E}$$

и

$$\tau' : \pi'^{-1}(U') \to U' \times \mathbf{E}'$$

в точках x_0 и $f(x_0)$ соответственно, что $f_0(U) \subset U'$ и отображение множества U в $L(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$, задаваемое формулой

$$x \to \tau'_{f_0(x)} \circ f_x \circ \tau_x^{-1},$$

является морфизмом.

Что касается обозначений, мы будем употреблять символ f для обозначения ВР-морфизма и писать $f : \pi \to \pi'$. В большинстве приложений f_0 будет тождественным отображением. Отметим, что, в силу предложения 1, условие **ВР Мор 2** в конечномерном случае излишне.

Следующее предложение является аналогом предложения 2 для ВР-морфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим два векторных расслоения π и π' соответственно над многообразиями X и X' и морфизм $f_0 : X \to X'$. Предположим, что для каждого $x \in X$ задано такое непрерывное линейное отображение*

$$f_x : \pi_x \to \pi'_{f_0(x)},$$

что для каждого x_0 выполнено условие **ВР Мор 2**. *Тогда отображение $f : \pi \to \pi'$, определенное на каждом слое при помощи f_x, является* ВР-*морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что f — морфизм. При этом можно предположить, что π и π' тривиальны и, например, равны (в обозначениях условия **ВР Мор 2**) соответственно $U \times \mathbf{E}$ и $U' \times \mathbf{E}'$, а также, что тривиализующее отображение равно тождественному. В этом случае отображение f задается формулой

$$(x, v) \to (f_0 x, f_x v).$$

Из предложения 16 гл. I § 3 заключаем, что f является морфизмом. Следовательно, (f_0, f) есть ВР-морфизм.

Теоретико-множественная композиция двух ВР-морфизмов строится очевидным образом. В действительности,

4*

композиция двух ВР-морфизмов является ВР-морфизмом. Нетрудно проверить условия **ВР Мор 1** и **ВР Мор 2**, если рассматривать ситуацию локально. При этом мы встречаемся с коммутативной диаграммой следующего типа:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"] & \pi'^{-1}(U') \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau'"] & \pi''^{-1}(U'') \arrow[d, "\tau''"] \\ U \times \mathbf{E} \arrow[r] & U' \times \mathbf{E}' \arrow[r] & U'' \times \mathbf{E}'' \end{tikzcd}$$

и, применяя предложение 16 гл. I, § 3, показываем, что $g \circ f$ есть ВР-морфизм.

Таким образом, векторные расслоения образуют категорию, которую обозначим через ВР или ВР^p, если необходимо уточнить порядок дифференцируемости.

Векторные расслоения над X образуют подкатегорию ВР(X) = ВР$^p(X)$ (если брать только ВР-морфизмы, для которых f_0 — тождественное отображение). Если $\mathfrak{A}$ — категория банаховых пространств (например, конечномерных пространств), то через ВР$(X, \mathfrak{A})$ обозначается множество тех векторных расслоений над X, для которых слои лежат в $\mathfrak{A}$.

Морфизм одного векторного расслоения в другое можно задать локально. Более точно, рассмотрим открытое подмножество U в X и векторное расслоение $\pi : E \to X$ над X. Обозначим $E_U = \pi^{-1}(U)$ и

$$\pi_U = \pi \mid E_U$$

— ограничение отображения π на E_U. Тогда π_U будет векторным расслоением над U. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия X, и пусть π, π' — два векторных расслоения над X. Предположим, что для каждого i задан такой ВР-морфизм

$$f_i : \pi_{U_i} \to \pi'_{U_i},$$

что f_i и f_j согласованы на $U_i \cap U_j$ для каждой пары индексов i, j. Тогда существует единственный согласованный с f_i на каждом U_i ВР-морфизм $f : \pi \to \pi'$. Доказательство тривиально, и мы будем в дальнейшем часто пользоваться этим замечанием.

Используя рассуждения конца § 2 гл. II и предложение 6 той же главы, немедленно получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Рассмотрим векторное расслоение* $\pi: E \to Y$ *и морфизм* $f: X \to Y$. *Тогда*

$$f^*(\pi): f^*(E) \to X$$

есть векторное расслоение, а пара $(f, \pi^*(f))$ *является* ВР-*морфизмом*

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\pi^*(f)} & E \\ {\scriptstyle f^*(\pi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

В предложении 4 в качестве f можно взять включение подмногообразия. В этом случае обратным образом будет просто ограничение. Как и в случае открытого множества, можно употреблять обычные обозначения:

$$E_X = \pi^{-1}(X) \text{ и } \pi_X = \pi|E_X .$$

Таким образом, в этом случае $\pi_X = f^*(\pi)$.

Если X окажется точкой y многообразия Y, то мы получим постоянное отображение

$$\pi_y: E_y \to y,$$

которое иногда будем отождествлять с E_y.

Если каждый слой $(f^* E)_x$ отождествлять с $E_{f(x)}$ (что возможно, поскольку элемент слоя в x есть просто пара (x, e), где $e \in E_{f(x)}$), то обратный образ f^* векторного расслоения $\pi: E \to Y$ можно описать так. Это векторное расслоение $f^* \pi: f^* E \to X$, удовлетворяющее следующим условиям.

ОО 1. Для каждого $x \in X$ мы имеем $(f^* E)_x = E_{f(x)}$.

ОО 2. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^* E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle f^*\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

в которой верхнее горизонтальное отображение тождественно на каждом слое.

ОО 3. Если E тривиально и равно $Y \times \mathbf{E}$, то $f^*E = X \times \mathbf{E}$ и $f^*\pi$ — проектирование.

ОО 4. Если V — открытое подмножество в Y и $U = f^{-1}(V)$, то

$$f^*(E_V) = (f^*E)_U$$

и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& f^*E_V \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, dashed] & & E_V \arrow[dl] \arrow[dd] \\
f^*E \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & E & \\
& U \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, dashed] & & V \arrow[dl] \\
X \arrow[rr] & & Y \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}$$

§ 2. Касательное расслоение

Рассмотрим категорию многообразий класса C^p $(p \geqslant 1)$ и определим функтор T из этой категории в категорию векторных расслоений класса C^{p-1}.

Для каждого многообразия X класса C^p положим $T(X)$ равным объединению всех касательных к нему пространств $T_x(X)$. (Касательные пространства предполагаются непересекающимися.) Мы имеем естественное проектирование

$$\pi : T(X) \to X,$$

отображающее $T_x(X)$ в x. Нам нужно сделать из него векторное расслоение. Если (U, φ) — такая карта многообразия X, что φU открыто в банаховом пространстве $\mathbf{E}$, то из определения касательного пространства как совокупности классов эквивалентных троек (U, φ, v) немедленно получаем взаимно однозначное отображение

$$\tau_U : \pi^{-1}(U) = T(U) \to U \times \mathbf{E},$$

которое коммутирует с проектированием на U, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\tau_U"] \arrow[dr] & & U \times \mathbf{E} \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Кроме того, если (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) — две карты и если через φ_{ji} обозначено (определенное на $\varphi_i(U_i \cap U_j)$) отображение $\varphi_j \varphi_i^{-1}$, мы получим отображение перехода

$$\tau_{ji} = \left(\tau_j \tau_i^{-1}\right) : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbf{E} \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbf{E}$$

по формуле

$$\tau_{ji}(x, v) = (\varphi_{ji} x, \ D\varphi_{ji}(x) \cdot v),$$

где $x \in U_i \cap U_j$, а $v \in \mathbf{E}$. Поскольку производная $D\varphi_{ji} = \varphi_j'^{i}$ принадлежит классу C^{p-1} и для каждого x является изоморфизмом, мы (применяя предложение 16 гл. I, § 3) сразу видим, что выполнены все условия предложения 2. Поэтому $T(X)$ — векторное расслоение класса C^{p-1}.

Ясно, что указанное построение можно описать еще и следующим образом. Если многообразие X склеено из открытых подмножеств $\{U_i\}$ банахова пространства при помощи отображений перехода $\{\varphi_{ij}\}$, то при помощи отображений перехода $\{\varphi_{ij}, D\varphi_{ij}\}$, где производная $D\varphi_{ij}$ рассматривается как функция от двух переменных (x, v), можно склеить прямые произведения $U_i \times \mathbf{E}$. Таким образом локально, т. е. для открытого подмножества U банахова пространства, касательное расслоение можно отождествить с прямым произведением $U \times \mathbf{E}$. Легко заметить, что это определение совпадает с самым старым из определений, употреблявшихся геометрами: наш касательный вектор является вектором, преобразующимся по определенному закону (а именно при помощи производной).

Для C^p-морфизма $f: X \to X'$ можно определить

$$Tf : T(X) \to T(X')$$

просто как $T_x(f)$ в каждом слое $T_x(X)$. Чтобы проверить, что Tf является ВР-морфизмом, достаточно рассмотреть ситуацию локально, т. е. предположить, что X и X' являются открытыми подмножествами банаховых пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$ и что $T_x f = f'(x)$—просто производная. Тогда отображение Tf задается формулой

$$Tf(x, v) = (f(x), f'(x)v),$$

где $x \in X$ и $v \in \mathbf{E}$. Так как по определению f' принадлежит классу C^{p-1}, то, применяя предложение 16 гл. I, § 3, получаем, что Tf принадлежит классу C^{p-1}. Функториальные свойства тривиально выполнены. Таким образом, мы определили требуемый функтор T.

Договоримся иногда писать f_* вместо Tf и называть это отображение *касательным* отображением. Расслоение $T(X)$ будем называть *касательным расслоением* многообразия X.

§ 3. Точная последовательность расслоений

Рассмотрим многообразие X и два векторных расслоения над X $\pi : E \to X$ и $\pi' : E' \to X$. Пусть $f : \pi' \to \pi$ есть ВР-морфизм. Мы скажем, что последовательность

$$0 \longrightarrow \pi' \xrightarrow{f} \pi$$

точна, если существуют такое покрытие многообразия X открытыми множествами и для каждого элемента U этого покрытия такие тривиализации

$$\tau' : E'_U \to U \times \mathbf{E}' \quad \text{и} \quad \tau : E_U \to U \times \mathbf{E},$$

что $\mathbf{E}$ можно представить в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$ и при этом будет коммутативной следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} E'_U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau'"'] & E_U \arrow[d, "\tau"] \\ U \times \mathbf{E}' \arrow[r] & U \times \mathbf{E}' \times \mathbf{F} \end{tikzcd}$$

в которой нижнее отображение естественное: на U тождественное, а на $\mathbf{E}'$ — изоморфизм на $\mathbf{E}' \times 0$.

Рассмотрим еще одно векторное расслоение $\pi_1 : E_1 \to X$ и такой ВР-морфизм $g : \pi_1 \to \pi$, что $g(E_1)$ содержится в

$f(E')$. Поскольку f устанавливает биективное соответствие между E' и его образом $f(E')$ в E, то существует единственное такое отображение $g_1 : E_1 \to E'$, что $g = f \circ g_1$. Мы хотим показать, что g_1 есть ВР-морфизм. Действительно, доказательство можно проводить локально и, в силу определения, можно, как и выше, для открытого множества U написать

$$g_1 = \tau'^{-1} \circ \text{пр} \circ \tau \circ g,$$

где пр — проектирование произведения $U \times \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$ на $U \times \mathbf{E}'$. Все отображения в правой части равенства являются ВР-морфизмами. Этим доказано наше утверждение.

Пусть $\pi : E \to X$ — векторное расслоение. Подмножество S множества E назовем подрасслоением, если существует такая точная последовательность $0 \to \pi' \to \pi$, записываемая также в виде

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E,$$

что $f(E') = S$. Этим в S вводится структура векторного расслоения и предыдущие замечания показывают, что это делается однозначно. Действительно, пусть дана другая такая точная последовательность

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{g} E,$$

что $g(E_1) = S$. Тогда естественное отображение $f^{-1}g$ расслоения E_1 в E' является ВР-изоморфизмом.

Обозначим через E/E' объединение всех факторпространств E_x/E'_x. Если мы имеем дело с описанной выше точной последовательностью, то в E/E' можно ввести структуру векторного расслоения. Поступим для этого следующим образом. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие, а τ'_i и τ_i — тривиализующие отображения. Для каждого i можно определить биективное отображение

$$\tau''_i : E_{U_i}/E'_{U_i} \to U_i \times \mathbf{F},$$

которое естественным образом получается из написанной выше коммутативной диаграммы. (Без ограничения общности можно считать, что векторные пространства $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{F}$

дни и те же для всех i.) Надо показать, что это биек-
ивное отображение удовлетворяет условиям предложе-
ия 2.

Без ограничения общности можно считать, что f есть
включение (тотального пространства E' в E). Для каждой
пары i, j и $x \in U_i \cap U_j$ топлинейный изоморфизм $\left(\tau_j \tau_i^{-1}\right)_x$
можно представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{21}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix},$$

действующей справа на вектор $(v, w) \in \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$. Отображение
$\left(\tau_j'' \tau_i''^{-1}\right)_x$ индуцируется этой матрицей. Так как $\mathbf{E}' =$
$= \mathbf{E}' \times 0$ должно переводиться этой матрицей в себя, то
$h_{12}(x) = 0$. Кроме того, так как отображение $\left(\tau_j \tau_i^{-1}\right)_x$ обладает обратным, равным $\left(\tau_i \tau_j^{-1}\right)_x$, то $h_{22}(x)$ есть топлинейный автоморфизм пространства $\mathbf{F}$, совпадающий с
$\left(\tau_j'' \tau_i''^{-1}\right)_x$. Тем самым проверено условие **ВР 3** и доказано, что E/E' — векторное расслоение.

Каноническое отображение

$$E_U \to E_U/E'_U$$

является морфизмом, поскольку его можно выразить через
отображение τ, проектирование и $(\tau'')^{-1}$. Следовательно,
мы каноническим образом получили ВР-морфизм

$$g : \pi \to \pi''$$

(в тотальных пространствах — это факторизующее отображение пространства E на E/E'). Мы назовем π'' *факторрасслоением.*

~~Наше~~ отображение g удовлетворяет обычному свойству
универсальности отображения для коядра. Действительно,
предположим, что

$$\psi : E \to G$$

— такой ВР-морфизм, что $\psi \circ f = 0$ (т. е. $\psi_x \circ f_x = 0$ на
каждом слое E'_x). Тогда можно определить каноническое
теоретико-множественное отображение

$$\psi_* : E/E' \to G$$

и надо доказать, что оно ВР-морфизм. Достаточно это сделать локально. Употребляя введенные выше обозначения, можно предположить, что $E = U \times \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$ и что g — проектирование. В этом случае ψ_* — просто композиция канонического вложения произведения $U \times \mathbf{F}$ в $U \times \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$ и отображения ψ и потому является ВР-морфизмом.

Мы назовем g *коядром* ВР-морфизма f.

Введем двойственные понятия. Пусть дан ВР-морфизм $g: \pi \to \pi''$. Мы скажем, что последовательность

$$\pi \xrightarrow{g} \pi'' \longrightarrow 0$$

точна, если g сюръективно и если для каждого элемента U некоторого покрытия многообразия X существуют такие пространства $\mathbf{E}'$, $\mathbf{F}$ и тривиализации

$$\tau: E_U \to U \times \mathbf{E}' \times \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \tau'': E''_U \to U \times \mathbf{F},$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{g} & E''_U \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau''} \\ U \times \mathbf{E}' \times \mathbf{F} & \longrightarrow & U \times \mathbf{F} \end{array}$$

коммутативна. (Нижняя стрелка обозначает естественное отображение: тождественное на U и проектирование произведения $\mathbf{E}' \times \mathbf{F}$ на сомножитель $\mathbf{F}$.)

Так же как и выше, можно показать, что в «ядре» отображения f, т. е. в объединении ядер E'_x всех отображений g_x, можно ввести структуру векторного расслоения. Это объединение E' называется *ядром* отображения g и обладает обычным свойством универсальности относительно отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть X — многообразие, и пусть*

$$f: \pi' \to \pi$$

есть ВР-*морфизм векторных расслоений над X. Предпо-*

ложим, что для каждого $x \in X$ непрерывное линейное отображение

$$f_x : E'_x \to E_x$$

инъективно и разлагает E_x. Тогда последовательность

$$0 \to \pi' \xrightarrow{f} \pi$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что X связно и что слои расслоений E' и E не зависят от x и равны соответственно банаховым пространствам $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}$. Пусть $a \in X$. По определению разлагающего отображения f_a мы имеем такое разложение $\mathbf{E}$ в прямое произведение $\mathbf{E}' \times \mathbf{F}$, что для некоторой окрестности U точки a и тривиализующих отображений

$$\tau : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{E} \text{ и } \tau' : \pi'^{-1}(U) \to U \times \mathbf{E}'$$

композиция отображений

$$\mathbf{E}' \xrightarrow{\tau_a'^{-1}} E'_a \xrightarrow{f_a} E_a \xrightarrow{\tau_a} \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$$

переводит $\mathbf{E}'$ в $\mathbf{E}' \times 0$.

Для каждой точки $x \in U$ мы имеем отображение

$$(\tau f \tau'^{-1})_x : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}' \times \mathbf{F},$$

которое можно представить в виде пары непрерывных линейных отображений $(h_{11}(x), h_{21}(x))$. Определим отображение

$$h(x) : \mathbf{E}' \times \mathbf{F} \to \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$$

при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} h_{11}(x) & 0 \\ h_{21}(x) & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

действующей справа на вектор $(v, w) \in \mathbf{E}' \times \mathbf{F}$. Тогда ограничение $h(x)$ на $\mathbf{E}' \times 0$ действует так же, как $(\tau f \tau'^{-1})_x$.

Отображение $x \to h(x)$ является морфизмом множества U в $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ и потому непрерывно. Значит, h отображает достаточно малую окрестность U точки a в группу топлинейных автоморфизмов пространства $\mathbf{E}$. Этим наше предложение доказано.

Двойственным к предложению 5 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Рассмотрим* ВР-*морфизм*

$$g : \pi \to \pi''$$

векторных расслоений над многообразием X. Предположим, что для каждого $x \in X$ непрерывное линейное отображение

$$g_x : E_x \to E''_x$$

сюръективно и его ядро разлагает E_x. Тогда последовательность

$$\pi \xrightarrow{g} \pi'' \to 0$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно двойственно предыдущему доказательству, и мы оставляем его читателю.

В общем случае последовательность ВР-морфизмов

$$0 \longrightarrow \pi' \xrightarrow{\ f\ } \pi \xrightarrow{\ g\ } \pi'' \longrightarrow 0$$

называется *точной*, если точны оба ее конца и образ ВР-морфизма f совпадает с ядром ВР-морфизма g.

Существует важный пример точной последовательности. Пусть $f : X \to Y$ — иммерсия. По свойству универсальности относительно отображений для обратного образа имеем канонический ВР-морфизм

$$T^*f : T(X) \longrightarrow f^*T(Y)$$

расслоения $T(X)$ в обратный образ над X касательного расслоения многообразия Y. Более того, из способа локального построения обратного образа при помощи произведений и из определения иммерсии видно, что последовательность

$$0 \longrightarrow T(X) \xrightarrow{\ T^*f\ } f^*T(Y)$$

точна. Факторрасслоение

$$f^*T(Y)/\mathrm{Im}\,(T^*f)$$

называется *нормальным* расслоением иммерсии f. Его обозначают через $N(f)$, а его тотальное пространство — через $N_f(X)$, если хотят их различить. Мы будем иногда отождествлять $T(X)$ с его образом при отображении T^*f и писать

$$N(f) = f^*T(Y)/T(X).$$

Двойственно, пусть $f: X \to Y$ — субмерсия. Тогда мы имеем точную последовательность

$$T(X) \xrightarrow{T^*f} f^*T(Y) \longrightarrow 0,$$

ядро которой назовем *субрасслоением* субмерсии f или *расслоением вдоль слоя*.

Существует интересный случай, когда это ядро можно описать более точно. Рассмотрим векторное расслоение

$$\pi: E \to X.$$

Можно построить обратный образ расслоения E над самим собой, т. е. π^*E. Мы хотим показать, что получается точная последовательность

$$0 \to \pi^*E \to T(E) \to \pi^*T(X) \to 0.$$

Чтобы определить левое отображение, рассмотрим более подробно субрасслоение отображения π. Для каждого $x \in X$ имеется включение

$$E_x \to E$$

и, следовательно, естественное инъективное отображение

$$T(E_x) \to T(E).$$

Объединение всех $T(E_x)$, где x пробегает X, в теоретико-множественном смысле совпадает с субрасслоением, так как расслоение локально является прямым произведением. С другой стороны, тотальное пространство расслоения π^*E состоит из пар векторов v, w, лежащих над одной и той же базисной точкой x, т. е. слой над точкой x пространства π^*E это просто $E_x \times E_x$. Поскольку $T(E_x)$ естественным образом отождествляется с $E_x \times E_x$, мы получаем для каждого x биективное отображение

$$(\pi^*E)_x \to T(E_x),$$

которое определяет наше отображение расслоения π^*E в $T(E)$. Рассматривая это отображение в терминах локальной структуры прямого произведения, сразу заметим, что оно задает ВР-изоморфизм между π^*E и субрасслоением отображения π, что и требовалось.

§ 4. Операции в векторных расслоениях

Рассмотрим три подкатегории $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ категории банаховых пространств и функтор от двух аргументов $\lambda : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ для определенности контрвариантный по первому и ковариантный по второму аргументу. Все построения можно очевидным образом перенести на функторы от нескольких аргументов, считая элементами категорий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наборы из n пространств.

Согласно определению, имеем отображение

$$L(\mathbf{E}', \mathbf{E}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \to L(\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}), \lambda(\mathbf{E}', \mathbf{F}')),$$

относящее элемент $\lambda(f, g)$ паре непрерывных линейных отображений $f : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ и $g : \mathbf{F} \to \mathbf{F}'$, являющихся морфизмами соответственно в категориях $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Мы скажем, что λ принадлежит классу C^p, если для любого многообразия U и морфизмов

$$\varphi : U \to L(\mathbf{E}', \mathbf{E}) \text{ и } \psi : U \to L(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$$

композиция отображений

$$U \to L(\mathbf{E}', \mathbf{E}) \times L(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \to L(\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}), \lambda(\mathbf{E}', \mathbf{F}'))$$

является морфизмом. Можно сказать в этом случае, что λ — *дифференцируемый* функтор.

ТЕОРЕМА 1. *Если задан определенный выше функтор λ класса C^p, $p \geqslant 0$, то для каждого многообразия X определен функтор λ_X в векторных расслоениях* (класса C^p)

$$\lambda_X : \mathrm{BP}(X, \mathfrak{A}) \times \mathrm{BP}(X, \mathfrak{B}) \to \mathrm{BP}(X, \mathfrak{C}).$$

Этот функтор удовлетворяет следующим условиям для любых расслоений α, β, соответственно из ВР$(X, \mathfrak{A})$ *и* ВР$(X, \mathfrak{B})$, ВР-*морфизмов*

$$f : \alpha' \to \alpha \text{ и } g : \beta \to \beta'$$

из соответствующих категорий и любой точки $x \in X$:

ОП 1. $\lambda_X(\alpha, \beta)_x = \lambda(\alpha_x, \beta_x)$.

ОП 2. $\lambda_X(f, g)_x = \lambda(f_x, g_x)$.

ОП 3. *Если* α *есть тривиальное расслоение* $X \times \mathbf{E}$, *а* β *есть тривиальное расслоение* $X \times \mathbf{F}$, *то* $\lambda_X(\alpha, \beta)$ *есть тривиальное расслоение* $X \times \lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

ОП 4. *Если* $h: Y \to X$ *есть* C^p*-морфизм, то*

$$\lambda_Y(h^*\alpha, h^*\beta) = h^*\lambda_X(\alpha, \beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать X связным и, следовательно, все слои топлинейно изоморфными фиксированному пространству. Для каждого открытого подмножества U многообразия X определим тотальное пространство $\lambda_U(E_\alpha, E_\beta)$ расслоения $\lambda_U(\alpha, \beta)$ как объединение по всем $x \in U$ множеств $\{x\} \times \lambda(\alpha_x, \beta_x)$. Эти множества мы будем, не опасаясь недоразумений, всюду отождествлять с $\lambda(\alpha_x, \beta_x)$. Возьмем покрытие $\{U_i\}$ многообразия X, для которого существуют тривиализующие отображения $\{\tau_i\}$ для α и $\{\sigma_i\}$ для β

$$\tau_i: \alpha^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{E},$$
$$\sigma_i: \beta^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{F}.$$

Существует биективное отображение

$$\lambda(\tau_i^{-1}, \sigma_i): \lambda_{U_i}(E_\alpha, E_\beta) \to U_i \times \lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}),$$

которое получается из отображений

$$\lambda(\tau_{ix}^{-1}, \sigma_{ix}): \lambda(\alpha_x, \beta_x) \to \lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

на слоях. Надо проверить, выполнено ли условие **ВР 3**. Для этого рассмотрим отображение

$$x \to \lambda(\tau_{jx}^{-1}, \sigma_{jx}) \circ \lambda(\tau_{ix}^{-1}, \sigma_{ix})^{-1}.$$

Выражение в правой части равно

$$\lambda(\tau_{ix}\tau_{jx}^{-1}, \sigma_{jx}\sigma_{ix}^{-1}).$$

Так как λ — функтор класса C^p, полученное отображение

$$U_i \cap U_j \to L(\lambda(\mathbf{E}, \mathbf{F}), \lambda(\mathbf{E}', \mathbf{F}'))$$

является C^p-морфизмом. Кроме того, поскольку λ — функтор, отображения перехода являются топлинейными изоморфизмами. Тем самым проверены условия **ВР 2** и **ВР 3**.

Аналогично доказывается, что отображение $\lambda_X(f,g)$, определенное в **ОП 2**, является ВР-морфизмом. Здесь снова используется предположение, что λ принадлежит классу C^p. Условие **ОП 3** выполнено очевидным образом, а **ОП 4** получается из локализации. Теорема доказана.

Следующая теорема доказывает единственность операции λ_X.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим еще один функтор μ класса C^p с теми же переменными, что и λ, и естественное преобразование функторов $t: \lambda \to \mu$. Тогда для каждого X отображение*

$$t_X : \lambda_X \to \mu_X,$$

определенное на каждом слое при помощи отображения

$$t(\alpha_x, \beta_x) : \lambda(\alpha_x, \beta_x) \to \mu(\alpha_x, \beta_x),$$

является естественным преобразованием функторов (в ВР-*категории).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты обозначений предположим, что λ и μ — ковариантные функторы одного аргумента. Для каждого элемента $U = U_i$ тривиализующего покрытия для расслоения β имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U \times \lambda(\mathbf{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}\times t(\mathbf{E})"] & U \times \mu(\mathbf{E}) \\
\lambda_U(\beta) \arrow[u, "\lambda_U(\tau)"] \arrow[r, "t_U"'] & \mu_U(\beta) \arrow[u, "\mu_U(\tau)"']
\end{tikzcd}$$

Здесь вертикальные отображения—это тривиализующие ВР-морфизмы, а верхнее горизонтальное отображение— ВР-морфизм. Значит, t_U также ВР-морфизм и наше предложение доказано.

В частности, при $\lambda = \mu$ и $t = \mathrm{id}$ мы получаем единственность функтора λ_X. (В доказательстве теоремы 2 мы не использовали в явном виде предположения о том, что функторы λ и μ дифференцируемы.)

На практике мы будем опускать индекс X у λ и употреблять символ λ для функторов в векторных расслоениях.

Примером операции является *прямая сумма* (называемая также суммой *Уитни*) двух расслоений α, β над X. Ее обозначают через $\alpha\oplus\beta$, и слоем в точке x является

$$(\alpha\oplus\beta)_x = \alpha_x\oplus\beta_x.$$

Разумеется, конечную прямую сумму векторных пространств можно отождествить с их прямым произведением, но мы будем обозначать указанную выше операцию знаком прямой суммы, чтобы не путать ее с прямым произведением. Последнее определяется так.

Рассмотрим два векторных расслоения $\alpha: E_\alpha \to X$ и $\beta: E_\beta \to Y$ соответственно из $\mathrm{BP}(X)$ и $\mathrm{BP}(Y)$. Тогда отображение

$$\alpha\times\beta: E_\alpha\times E_\beta \to X\times Y$$

является векторным расслоением. Это расслоение мы назовем прямым произведением расслоений α и β.

Пусть на многообразии X задан функтор λ класса C^p, где $p\geqslant 1$. *Тензорное расслоение* типа λ над X определим как $\lambda_X(T(X))$ и будем обозначать также через $\lambda T(X)$ или $T_\lambda(X)$. Сечение этого расслоения называют *тензорным полем* типа λ, а множество таких сечений обозначают через $\Gamma_\lambda(X)$. Предположим, что задана тривиализация расслоения $T(X)$, скажем

$$T(X) = X\times \mathbf{E}.$$

Тогда $T_\lambda(X) = X\times\lambda(\mathbf{E})$. Сечение расслоения $T_\lambda(X)$ в этом случае полностью описывается проектированием на второй сомножитель, которое является морфизмом

$$f: X \to \lambda(\mathbf{E}).$$

Назовем его *главной частью* тензорного поля (в данной тривиализации). Если ξ — тензорное поле с главной частью f, то

$$\xi(x) = (x, f(x)).$$

Пусть $f: X\to Y$ — морфизм класса C^p $(p\geqslant 1)$, ω — тензорное поле типа L^r над Y, называемое также полилинейным тензорным полем. Для каждого $y \in Y$ определена на $T_y(Y)$ непрерывная полилинейная функция $\omega(y)$ (обозначаемая также ω_y)

$$\omega_y : T_y \times \ldots \times T_y \to \mathbf{R}.$$

Для каждого $x \in X$ при помощи композиции отображений $(T_x f)^r$ и $\omega_{f(x)}$

$$T_x \times \ldots \times T_x \to T_{f(x)} \times \ldots \times T_{f(x)} \to \mathbf{R}$$

определим непрерывное полилинейное отображение

$$f_x^*(\omega) : T_x \times \ldots \times T_x \to \mathbf{R}.$$

Мы хотим доказать, что отображение $x \to f_x^*(\omega)$ является тензорным полем над X того же типа, что и ω. Доказательство можно проводить локально (для главной части). Таким образом, можно предположить, что мы имеем дело с морфизмом

$$f : U \to V$$

открытого подмножества U банахова пространства $\mathbf{E}$ в открытое подмножество V банахова пространства $\mathbf{F}$ и что задан морфизм

$$\omega : V \to L^r(\mathbf{F}).$$

В этом случае $f^*(\omega)$, обозначающее теперь главную часть, становится отображением множества U в $L^r(\mathbf{E})$, задаваемым формулой

$$f_x^*(\omega) = L^r(f'(x)) \cdot \omega(f(x)).$$

Поскольку $L^r : L(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \to L(L^r(\mathbf{F}), L^r(\mathbf{E}))$ — отображение класса C^∞, $f^*(\omega)$ является морфизмом того же класса, что и ω. Этим наше утверждение доказано.

Разумеется, все сказанное верно и для функторов L_s^r и L_a^r (симметрические и альтернированные непрерывные полилинейные отображения). Специальные случаи будут рассмотрены в следующих главах. Если λ означает любой из трех рассматриваемых функторов, то мы получаем отображение, которое оказывается линейным:

$$f^* : \Gamma_\lambda(Y) \to \Gamma_\lambda(X).$$

Ясно, что оно функториально зависит от f. Мы будем употреблять символ f^* вместо более точных (но неуклюжих) обозначений f_λ или $\Gamma_\lambda f$. Никаких недоразумений это не вызовет.

§ 5. Разложение векторных расслоений

Следующее предложение выражает тот факт, что ВР-морфизмы одного расслоения в другое (при фиксированном морфизме баз) образуют модуль над кольцом функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Рассматриваются многообразия X и Y и морфизм $f_0 : X \to Y$. Пусть α, β — векторные расслоения соответственно над X, Y, а $f, g : \alpha \to \beta$ — два* ВР-*морфизма над f_0. Тогда отображение $f + g$, определенное формулой*

$$(f+g)_x = f_x + g_x,$$

является ВР-*морфизмом. Кроме того, если $\psi : Y \to \mathbf{R}$ — функция на Y, то отображение ψf, определенное формулой*

$$(\psi f)_x = \psi(f_0(x)) f_x,$$

является ВР-*морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения являются немедленным следствием предложения 16 гл. I, § 3.

Мы будем главным образом иметь дело со случаем, когда $X = Y$ и f_0 — тождественное отображение. Применим это предложение и разбиение единицы для склеивания ВР-морфизмов.

Рассмотрим векторные расслоения α, β над X и разбиение единицы $\{(U_i, \psi_i)\}$ на X. Предположим, что для каждого U_i задан ВР-морфизм

$$f_i : \alpha | U_i \to \beta | U_i.$$

Каждое отображение $\psi_i f_i$ (в силу предложения 7) является ВР-морфизмом. Более того, мы можем продолжить $\psi_i f_i$ до ВР-морфизма расслоения α в расслоение β, просто полагая

$$(\psi_i f_i)_x = 0$$

для всех $x \notin U_i$. Если теперь определить

$$f : \alpha \to \beta$$

при помощи формулы

$$f_x(v) = \sum \psi_i(x) f_{ix}(v)$$

для всех пар (x, v), то в каждой точке x сумма будет конечной и по предложению 7 отображение f будет ВР-морфизмом. Заметим, что $f = \sum \psi_i f_i$ будет тождественным морфизмом, если тождественным будет каждое f_i.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если многообразие X допускает разбиение единицы, а $0 \to \alpha \xrightarrow{f} \beta$ — точная последовательность векторных расслоений над X, то существует* ВР-*морфизм $g : \beta \to \alpha$, ядро которого разлагает β, и* $g \circ f = \mathrm{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению точной последовательности существует такое разбиение единицы $\{(U_i, \psi_i)\}$ на X, что для каждого i можно разложить последовательность над U_i. Другими словами, для каждого i существует ВР-морфизм

$$g_i : \beta | U_i \to \alpha | U_i,$$

ядро которого разлагает $\beta | U_i$, и $g_i \circ f_i = \mathrm{id}_i$. Положим $g = \sum \psi_i g_i$. Тогда, как мы только что видели, g является ВР-морфизмом расслоения β в расслоение α и

$$g \circ f = \sum \psi_i g_i f_i = \mathrm{id}\,.$$

Ядро отображения g_x для всех x разлагает β_x, поскольку у него есть замкнутое дополнение, а именно $f_x \alpha_x$. Этим заканчивается доказательство.

Если γ — ядро ВР-морфизма g, то $\beta \approx \alpha \oplus \gamma$.

Векторное расслоение π над X называется расслоением *конечного типа*, если для него существует конечная тривиализация (т. е. такая тривиализация $\{(U_i, \tau_i)\}$, что i пробегает конечное множество).

Если $k \geqslant 1$ — целое число и $\mathbf{E}$ — топологическое векторное пространство, то через $\mathbf{E}^k$ обозначим k-кратное прямое произведение $\mathbf{E}$ на себя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть многообразие X допускает разбиение единицы. Рассмотрим векторное расслоение π*

конечного типа из $\mathrm{BP}(X, \mathbf{E})$, *где* $\mathbf{E}$ — *банахово пространство. Тогда существуют такое целое число* $k > 0$ *и такое расслоение* α *из* $\mathrm{BP}(X, \mathbf{E}^k)$, *что расслоение* $\pi \oplus \alpha$ *тривиализуемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем, что существует такая точная последовательность

$$0 \to \pi \xrightarrow{\ \ f\ \ } \beta,$$

что $E_\beta = X \times \mathbf{E}^k$. Наше утверждение будет тогда следовать из предыдущего предложения.

Пусть $\{(U_i, \tau_i)\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ — конечная тривиализация расслоения π и $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — разбиение единицы. Определим

$$f: E_\pi \to X \times \mathbf{E}^k$$

следующим образом. Если $x \in X$ и v лежит в слое E_x расслоения E_π, то положим

$$f_x(v) = (x, \varphi_1(x)\tau_1(v), \ldots, \varphi_k(x)\tau_k(v)).$$

Выражение справа имеет смысл, поскольку из $x \notin U_i$ следует, что $\varphi_i(x) = 0$, и нам не надо заботиться о выражении $\tau_i(v)$. Если $x \in U_i$, то $\tau_i(v) = \tau_{ix}(v)$.

Для любой точки $x \in X$ найдется такой индекс i, что $\varphi_i(x) > 0$ и потому отображение f инъективно. Кроме того, для этого x и этого i отображение f_x переводит E_x в замкнутое подпространство пространства $\mathbf{E}^k$, допускающее замкнутое дополнение, а именно

$$\mathbf{E} \times \ldots \times 0 \times \ldots \times \mathbf{E},$$

где 0 стоит на i-м месте. Наше предложение доказано.

Глава IV

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе будут изложены некоторые результаты, использующие понятие дифференциального уравнения и его решений.

Векторное поле на многообразии X относит дифференцируемым образом каждой точке $x \in X$ касательный вектор. (Точное определение см. в § 2.) Тогда для данной точки $x_0 \in X$ можно построить единственную кривую $\alpha(t)$, начинающуюся в x_0 (т. е. такую, что $\alpha(0) = x_0$), производная которой в каждой точке равна данному вектору. Не всегда возможно построить эту кривую для всех значений t от $-\infty$ до $+\infty$, хотя это возможно, если X компактно.

Изучение структуры этих кривых составляет перспективную область исследований с нескольких точек зрения. Например, можно ставить вопросы о топологических свойствах этих кривых, т. е. свойствах, инвариантных при топологическом автоморфизме многообразия (является ли кривая замкнутой, является ли она спиралью, всюду плотным множеством и т. д.). В более общем случае можно ставить стандартные вопросы о свойствах, инвариантных относительно какой-нибудь заданной интересной группы автоморфизмов многообразия X (дискретных групп, групп Ли, алгебраических групп, римановых автоморфизмов — на выбор).

Мы не будем излагать всех этих теорий, каждая из которых развивается своими путями. Будут приведены только элементарные факты и определения, касающиеся векторных полей, и некоторые простые приложения теоремы существования упомянутых выше кривых.

В этой главе мы будем предполагать, что все встречающиеся многообразия хаусдорфовы и принадлежат классу C^p, где, начиная с § 2, $p \geqslant 2$ и, начиная с § 3, $p \geqslant 3$. Из этих условий следует, что касательные расслоения принадлежат классу C^{p-1}, где $p-1 \geqslant 1$ (или $p-1 \geqslant 2$).

Мы будем иметь дело с отображениями от нескольких переменных, первая из которых—вещественное число. В этой главе через $f'(t, x, y)$ будет обозначаться первая частная производная $D_1 f(t, x, y)$.

§ 1. Теорема существования для дифференциальных уравнений

Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{E}$ и открытое подмножество U в нем. В этом параграфе мы изучим векторные поля локально. Глобальные понятия будут введены позднее, а пока что мы определим на U главную часть *зависящего от времени векторного поля* как C^p-морфизм ($p \geqslant 0$)

$$f: J \times U \to \mathbf{E},$$

где J — открытый в $\mathbf{R}$ интервал, содержащий точку 0. Мы рассматриваем f как отображение, относящее каждой точке зависящий от времени t вектор $f(t, x) \in \mathbf{E}$.

Пусть x_0 — точка из U. *Интегральная кривая для* f с начальным условием x_0 — это такое отображение класса C^p ($p \geqslant 1$)

$$\alpha: J_0 \to U,$$

содержащего 0 открытого подинтервала J_0 интервала J в U, что $\alpha(0) = x_0$ и что

$$\alpha'(t) = f(t, \alpha(t)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть непрерывное отображение $\alpha: J_0 \to U$ удовлетворяет следующему условию:

$$\alpha(t) = x_0 + \int_0^t f(u, \alpha(u))\, du.$$

Тогда отображение α дифференцируемо и его производная равна $f(t, \alpha(t))$. Следовательно, α принадлежит классу C^1. Далее можно, рассуждая по индукции, показать, что если f принадлежит классу C^p, то α будет принадлежать тому же классу. Обратно, если α — интегральная кривая для f с начальным условием x_0, то она, очевидно, удовлетворяет нашему интегральному соотношению.

Пусть

$$f : J \times U \to \mathbf{E}$$

— определенное выше отображение и $x_0 \in U$. Под *локальным потоком* для f в x_0 мы понимаем такое отображение

$$\alpha : J_0 \times U_0 \to U$$

(J_0 обозначает содержащий точку 0 открытый подинтервал интервала J, а U_0 — открытое подмножество в U), что для каждого фиксированного x из U_0 отображение

$$\alpha_x(t) = \alpha(t, x)$$

является интегральной кривой для f с начальным условием x (т. е. выполнено условие $\alpha(0, x) = x$).

Сделаем замечание об обозначениях. Когда мы имеем отображение от двух аргументов, скажем $\varphi(t, x)$, то отображение от одного аргумента, получаемое, если второй аргумент фиксирован, будем обозначать через $\varphi_x(t)$ и $\varphi_t(x)$. Выбор букв при этом будем предохранять от неясностей.

Мы скажем, что f *равномерно* относительно J удовлетворяет *условию Липшица* на U, если существует такое число $K > 0$, что

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant K|x - y|$$

при всех $x, y \in U$ и $t \in J$. Число K назовем *константой Липшица*. Если f принадлежит классу C^1, то из теоремы о среднем значении следует, что отображение f удовлетворяет условию Липшица на некоторой окрестности $J_0 \times U_0$ данной точки $(0, x_0)$ и что оно ограничено в некоторой такой окрестности.

Докажем теперь, что при выполнении условия Липшица локальный поток существует и единственен. На самом деле мы докажем больше, а именно некоторое свойство равномерности для таких потоков. Если $b > 0$ — вещественное число, то через J_b обозначим открытый интервал $-b < t < b$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим открытый в* $\mathbf{R}$ *интервал* J, *содержащий точку* 0, *и открытое множество* U *в банаховом пространстве* $\mathbf{E}$. *Пусть* x_0 — *точка из* U, a — *такое вещественное число, что* $0 < a < 1$, *и замкнутый шар* $\overline{B}_{2a}(x_0)$ *содержится в* U.

Предположим, что задано непрерывное отображение

$$f : J \times U \to \mathbf{E},$$

которое ограничено на $J \times U$ *константой* $L \geqslant 1$ *и равномерно относительно* J *удовлетворяет на* U *условию Липшица с константой* $K \geqslant 1$. *Если* $b < a/LK$, *то для каждого* $x \in \overline{B_a(x_0)}$ *существует единственная интегральная кривая* $\alpha : J_b \times B(x_0) \to U$ *с начальным условием* x.

Если f *принадлежит классу* C^p $(p \geqslant 1)$, *то и каждая кривая* α_x *принадлежит тому же классу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим замкнутый интервал I_b $(-b \leqslant t \leqslant b)$ и фиксированную точку x из $\overline{B_a(x_0)}$. Пусть M — множество таких непрерывных отображений

$$\alpha : I_b \to \overline{B_{2a}(x_0)}$$

замкнутого интервала в замкнутый шар радиуса $2a$ с центром в x_0, что $\alpha(0) = x$. Тогда если определить, как обычно, расстояние между α и β формулой

$$\sup_{t \in I_b} |\alpha(t) - \beta(t)|,$$

то M будет полным метрическим пространством.

Определим теперь отображение

$$S : M \to M$$

множества M в себя. Для каждого $\alpha \in M$ зададим отображение $S\alpha$ формулой

$$(S\alpha)(t) = x + \int_0^t f(u, \alpha(u))\, du.$$

Отображение $S\alpha$ конечно, непрерывно, $(S\alpha)(0) = x$, и расстояние любой точки кривой $S\alpha$ от точки x ограничено нормой интеграла, которая в свою очередь ограничена величиной

$$b \sup |f(u, y)| \leqslant bL < a.$$

Таким образом, $S\alpha$ принадлежит M.

Покажем, что отображение S является сжатым отображением. Это следует из неравенств

$$|S\alpha - S\beta| \leqslant b \sup |f(u, \alpha(u)) - f(u, \beta(u))| \leqslant bK |\alpha - \beta|.$$

По лемме о сжатии (гл. I, § 5) отображение S имеет единственную неподвижную точку α, которая в силу определения удовлетворяет требуемому интегральному соотношению. Доказательство закончено.

Исследуем теперь поведение потока относительно второго аргумента, т. е. относительно точек из U. Рассмотрим открытый подинтервал J_0 интервала J, содержащий точку 0. Отображение

$$\varphi : J_0 \to U$$

класса C^1 назовем ε-*приближенным решением* для f на J_0, если

$$|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leqslant \varepsilon$$

для всех $t \in J_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть φ_1 и φ_2 соответственно ε_1- и ε_2-приближенные решения для f, и пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Предположим, что f равномерно относительно J_0 удовлетворяет на U условию Липшица с константой K или что $D_2 f$ существует и ограничено на $J \times U$ константой K. Выберем $t_0 \in J_0$. Тогда для каждого $t \in J_0$ выполнено неравенство*

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| e^{K|t - t_0|} + \frac{\varepsilon}{K} e^{K|t - t_0|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению имеем

$$|\varphi_1'(t) - f(t, \varphi_1(t))| \leqslant \varepsilon_1,$$

$$|\varphi_2'(t) - f(t, \varphi_2(t))| \leqslant \varepsilon_2.$$

Отсюда получаем

$$|\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) + f(t, \varphi_2(t)) - f(t, \varphi_1(t))| \leqslant \varepsilon.$$

Чтобы не писать знак модуля у $t-t_0$, положим $t \geqslant t_0$. Обозначим

$$\psi(t)=|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|,$$
$$\omega(t)=|f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))|.$$

Тогда, интегрируя от t_0 до t и используя неравенство треугольника, получаем

$$\psi(t)-\psi(t_0)|\leqslant \varepsilon(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\omega(u)\,du\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(t-t_0)+K\int_{t_0}^{t}\psi(u)\,du\leqslant K\int_{t_0}^{t}\left[\psi(u)+\frac{\varepsilon}{K}\right]du$$

и, наконец, рекуррентное соотношение

$$\psi(t)\leqslant\psi(t_0)+K\int_{t_0}^{t}\left[\psi(u)+\frac{\varepsilon}{K}\right]du.$$

На любом замкнутом подинтервале интервала J_0 наше отображение ψ ограничено. Если к обеим частям последнего неравенства прибавить ε/K, то доказательство будет закончено ссылкой на следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть заданная на интервале положительная вещественнозначная функция g ограничена константой L, точка t_0 принадлежит интервалу и $t \geqslant t_0$. Предположим, что существуют такие числа A, $K \geqslant 0$, что*

$$g(t)\leqslant A+K\int_{t_0}^{t}g(u)\,du.$$

Тогда для всех целых $n \geqslant 1$ имеем

$$g(t)\leqslant A\left[1+\frac{K(t-t_0)}{1!}+\ldots+\frac{K^{n-1}(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right]+$$
$$+\frac{LK^n(t-t_0)^n}{n!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно при $n=1$. Применим индукцию. Проинтегрируем от t_0 до t, умножим на K и применим рекуррентное соотношение. При этом мы получим из утверждения для n утверждение для $n+1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Допустим, что отображение $f: J \times U \to \mathbf{E}$ непрерывно и равномерно относительно J удовлетворяет на U условию Липшица. Выберем точку $x_0 \in U$. Тогда существует такой содержащий нуль открытый подинтервал J_0 интервала J и такое открытое в U подмножество U_0, содержащее точку x_0, что f имеет единственный поток*

$$\alpha: J_0 \times U_0 \to U.$$

Подинтервал J_0 и подмножество U_0 можно выбрать таким образом, чтобы α было непрерывным и удовлетворяло на $J_0 \times U_0$ условию Липшица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя предложение 1, найдем J_0 и U_0 и для данных $x, y \in U_0$, интегральные кривые $\alpha(t, x) = \varphi_1(t)$ и $\alpha(t, y) = \varphi_2(t)$. Тогда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Получаем для $s, t \in J_0$

$$\alpha(t, x) - \alpha(s, y) | \leqslant | \alpha(t, x) - \alpha(t, y) | + | \alpha(t, y) - \\ - \alpha(s, y) | \leqslant | x - y | e^K + | t - s | L.$$

Здесь J_0 выбран достаточно малым, L — верхняя грань для f. Член, содержащий $|x - y|$, обусловлен, разумеется, предложением 2, а член, содержащий $|t - s|$, — определением интегральной кривой посредством интеграла и оценкой L для функции f. Наше следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Рассмотрим открытый интервал J, содержащий 0, множество U, открытое в $\mathbf{E}$. Пусть непрерывное отображение $f: J \times U \to \mathbf{E}$ удовлетворяет на U условию Липшица равномерно относительно каждого компактного подинтервала интервала J. Выберем точку $t_0 \in J$. Если два C^1-морфизма φ_1, φ_2 удовлетворяют условиям*

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0),$$

$$\varphi_i'(t) = f(t, \varphi_i(t))$$

при всех $t \in J$, то $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить $\varepsilon = 0$ в предложении 2.

В доказательстве того, что поток α дифференцируемым образом зависит от второго аргумента, мы сталкиваемся с линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому полезно сделать следующее замечание.

Предположим, что дано отображение

$$\beta : B_a \to \mathbf{E}$$

открытого шара радиуса a в банахово пространство $\mathbf{E}$. Предположим, что это отображение локально линейно, т. е.

$$\beta(z + w) = \beta(z) + \beta(w),$$
$$\beta(cz) = c\beta(z)$$

для всех таких z, $w \in B_a$, что $z + w \in B_a$, и для всех $c \in \mathbf{R}$, $|c| < 1$. Тогда β естественным образом продолжается до линейного отображения $\mathbf{E}$ в себя. Действительно, если задан элемент $z \in \mathbf{E}$, то можно так выбрать c, что cz будет очень малым. Тогда имеет смысл выражение $c^{-1}\beta(cz)$, которое можно считать значением $\beta(z)$. Легко проверить, что это определение не зависит от выбора c и задает продолжение отображения β на все $\mathbf{E}$. Если отображение β непрерывно, то его продолжение будет также непрерывным.

Предыдущее следствие дает другое доказательство единственности интегральных кривых. Пусть дано отображение $f : J \times U \to \mathbf{E}$, удовлетворяющее условиям следствия 2. Можно определить на максимальном открытом подинтервале интервала J интегральную кривую α для f, принимающую заданное значение $\alpha(t_0)$ при фиксированном t_0. Обозначим через (a, b) интервал J, а через (a_0, b_0) — интервал, на котором определена интегральная кривая α. Приводимое ниже следствие дает условия, при которых $b_0 = b$ (или $a_0 = a$), т. е. интегральную кривую можно продолжить на весь интервал, на котором определено f.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Рассмотрим открытый интервал (a, b) и множество U, открытое в $\mathbf{E}$. Пусть непрерывное отображение $f : J \times U \to \mathbf{E}$ удовлетворяет на U условию*

Липшица равномерно относительно каждого компактного подмножества интервала (a, b). *Пусть* α — *интегральная кривая для* f, *определенная на максимальном открытом подинтервале* (a_0, b_0). *Если*

1) *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $\overline{\alpha((b_0-\varepsilon, b_0))}$ *содержится в* U,

2) *существует такое* $B > 0$, *что* $|f(t, \alpha(t))| < B$ *для всех* t *из* $(b_0-\varepsilon, b_0)$,

то $b_0 = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегрального соотношения для α

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u, \alpha(u))\,du$$

мы видим, что для точек t_1, t_2 из интервала $(b_0-\varepsilon, b_0)$ выполнено неравенство

$$|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \leqslant B\,|t_1 - t_2|.$$

Отсюда следует, что предел

$$\lim_{t \to b_0} \alpha(t)$$

существует и равен элементу x_0, лежащему в U по условию 1). Предположим, что $b_0 \neq b$. В силу локальной теоремы существования, существует такая интегральная кривая β, определенная на открытом интервале, содержащем b_0, что $\beta(b_0) = x_0$ и

$$\beta_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \beta(u))\,du.$$

Но слева от b_0 этому же соотношению удовлетворяет и $\alpha(t)$. В силу единственности неподвижной точки у отображения

$$\varphi(t) \to x_0 + \int_{b_0}^{t} f(u, \varphi(u))\,du,$$

где функции рассматриваются слева от b, α и β совпадают слева от b_0. Тем самым мы расширили область определения кривой α на больший интервал, что и требовалось.

Следующее предложение описывает решения линейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Обозначим через J открытый интервал, содержащий 0, а через V — открытое подмножество банахова пространства. Для непрерывного отображения*

$$g: J \times V \to L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$$

существует единственное отображение

$$\lambda: J \times V \to L(\mathbf{E}, \mathbf{E}),$$

которое для каждого $x \in V$ является решением дифференциального уравнения

$$\lambda'(t, x) = g(t, x)\lambda(t, x), \quad \lambda(0, x) = \mathrm{id}.$$

Это отображение λ непрерывно.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае линейных дифференциальных уравнений, которые мы рассматриваем, нет необходимости сужать область определения потока. Отметим, что мы рассматриваем дифференциальное уравнение на пространстве непрерывных линейных отображений. Соответствующие линейные уравнения на самом $\mathbf{E}$ будут получены как следствие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Фиксируем $x \in V$ и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\lambda'(t, x) = g(t, x)\lambda(t, x)$$

с начальным условием $\lambda(0, x) = \mathrm{id}$. Это дифференциальное уравнение в $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$, и на каждом компактном подинтервале в J отображение g_x ограничено. Первое условие следствия 3 из предложения 2 выполняется автоматически, поскольку открытым множеством U является все $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$. Следовательно, интегральная кривая определена на всем J.

Докажем теперь непрерывность отображения λ. Пусть $(t_0, x_0) \in J \times V$. Пусть I — компактный интервал, содержащийся в J и содержащий t_0 и 0. По переменной t функция $\lambda(t, x_0)$ непрерывна (даже дифференцируема). Обозначим через $C > 0$ такое число, что $|\lambda(t, x_0)| \leqslant C$ для всех $t \in I$, а через V_1 — такую открытую окрестность точки x_0 в V, что g ограничено на $I \times V_1$ константой $K > 0$.

Для каждого $u \in I$ отображение $(t, x) \to g(t, x) - g(t, x_0)$ непрерывно в окрестности точки (u, x_0). Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие открытые окрестности W_u и V_u точки u и точки x_0 соответственно, что для всех $t \in W_u$ и $x \in V_u$ мы имеем

$$|g(t, x) - g(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Интервал I можно покрыть конечным числом окрестностей $W_{u_1}, \ldots, W_{u_r}$, и поэтому для каждого ε можно найти такую окрестность V_0 точки x_0 (пересечение всех V_{u_i}), содержащуюся в V_1, что при всех $x \in V_0$ и $t \in I$ мы имеем

$$|g(t, x) - g(t, x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Мы применим предложение 2 к кривым $\varphi_0(t) = \lambda(t, x_0)$ и $\varphi_x(t) = \lambda(t, x)$ для каждого $x \in V_0$. Поскольку $\lambda'(t, x_0) - g(t, x_0)\lambda(t, x_0) = 0$, мы видим, что

$$|\lambda'(t, x_0) - g(t, x)\lambda(t, x_0)| < \varepsilon$$

для всех $t \in I$ и $x \in V_0$. Это означает, что $\lambda(t, x_0)$ является ε-приближенным решением уравнения для $\lambda(t, x)$. Взяв в предложении 2 $t_0 = 0$, воспользовавшись тем, что $\lambda(0, x) = \lambda(0, x_0) = \mathrm{id}$, получим неравенство

$$|\lambda(t, x) - \lambda(t, x_0)| < \varepsilon C_1$$

для некоторой константы $C_1 > 0$.

Для любого $t \in I$ и $x \in V_0$ мы имеем

$$|\lambda(t, x) - \lambda(t_0, x_0)| \leqslant |\lambda(t, x) - \lambda(t, x_0)| + \\ + |\lambda(t, x_0) - \lambda(t_0, x_0)|.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует непрерывность отображения λ в точке (t_0, x_0).

СЛЕДСТВИЕ. *В тех же обозначениях, что и в предложении* 3, *для каждого $x \in V$ и $z \in \mathbf{E}$ кривая*

$$\beta(t, x, z) = \lambda(t, x) z,$$

является решением дифференциального уравнения

$$\beta'(t, x, z) = g(t, x)\beta(t, x, z)$$

с начальным условием $\beta(0, x, z) = z$. Кроме того, отображение β непрерывно по всем трем переменным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ТЕОРЕМА 1. *Обозначим через J открытый в $\mathbf{R}$ интервал, содержащий нуль, а через U — множество, открытое в банаховом пространстве $\mathbf{E}$. Пусть*

$$f : J \times U \to \mathbf{E}$$

есть C^p-морфизм ($p \geqslant 1$). Тогда в точке $x_0 \in U$ существует локальный поток для f. Можно выбрать такой содержащий нуль открытый подинтервал J_0 интервала J и такое содержащее точку x_0 открытое подмножество U_0 множества U, что локальный поток

$$\alpha : J_0 \times U_0 \to U$$

принадлежит классу C^p и $D_2\alpha$ удовлетворяет на $J_0 \times U_0$ дифференциальному уравнению

$$D_1 D_2 \alpha(t, x) = D_2 f(t, \alpha(t, x)) D_2 \alpha(t, x)$$

с начальным условием $D_2\alpha(0, x) = \mathrm{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение

$$g : J \times U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$$

задано формулой $g(t, x) = D_2 f(t, \alpha(t, x))$. По следствию 1 из предложения 2 мы так выберем J_0 и U_0, что α ограничено и удовлетворяет условию Липшица на $J_0 \times U_0$ и g непрерывно и ограничено на $J_0 \times U_0$.

Пусть $\lambda(t, x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\lambda'(t, x) = g(t, x) \cdot \lambda(t, x), \quad \lambda(0, x) = \mathrm{id}$$

на $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$, о котором говорилось в предложении 3. Мы покажем, что $D_2\alpha$ существует и совпадает с λ на $J_0 \times U_0$. Этим будет показано, что $D_2\alpha$ непрерывно.

Фиксируем $x \in U_0$ и положим

$$\theta(t, h) = \alpha(t, x+h) - \alpha(t, x).$$

Используя то, что α удовлетворяет условию Липшица и что f принадлежит классу C^1, получаем в силу следствия 2 из теоремы о среднем значении

$$\begin{aligned} \theta'(t, h) &= \alpha'(t, x+h) - \alpha'(t, x) = \\ &= f(t, \alpha(t, x+h)) - f(t, \alpha(t, x)) = \\ &= D_2 f(t, \alpha(t, x))\,\theta(t, h) + |h|\,\psi(t, h), \end{aligned}$$

где $\psi(t, h)$ стремится к нулю вместе с h при любом t.

Пусть отображение $\beta: J_0 \times U_0 \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ является решением дифференциального уравнения на $\mathbf{E}$

$$\beta'(t, x, z) = g(t, x)\,\beta(t, x, z),$$

зависящего от параметра $x \in U_0$. Для каждого $z \in \mathbf{E}$ это линейное уравнение. Наложим начальное условие $\beta(0, x, z) = z$. Тогда $\lambda(t, x) z$ является решением. Из полученного выше выражения для $\theta'(t, h)$ видно, что $\theta(t, h)$ является приближенным решением такого уравнения для $\lambda(t, x) h$ с начальным условием h. Взяв в предложении 2 $t_0 = 0$, получим оценку

$$|\theta(t, h) - \lambda(t, x) h| \leqslant C_1 |h|\,|\psi(t, h)|.$$

По определению дифференцируемости, это означает, что $D_2\alpha$ существует в (t, x) и равно $\lambda(t, x)$. Этим доказано, что $D_2\alpha$ непрерывно на $J_0 \times U_0$.

Мы показали, что $D_1\alpha$ и $D_2\alpha$ существуют и непрерывны на $J_0 \times U_0$. Поэтому α принадлежит классу C^1 на $J_0 \times U_0$.

Кроме того, $D_2\alpha$ удовлетворяет на $J_0 \times U_0$ дифференциальному уравнению, приведенному в формулировке теоремы. Таким образом, теорема доказана для $p = 1$. О потоке, обладающем свойствами, сформулированными в теореме, будем говорить, что он *локально принадлежит классу C^p*.

Рассмотрим снова линейное уравнение из предложения 3. Перепишем его так, чтобы формально исключить параметры. А именно определим векторное поле

$$G: J \times V \times L(\mathbf{E}, \mathbf{E}) \to \mathbf{E} \times L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$$

равенством

$$G(t, x, \omega) = (0, g(t, x)\,\omega)$$

для $\omega \in L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$. Поток для этого векторного поля задается таким отображением Λ, что

$$\Lambda(t, x, \omega) = (x, \lambda(t, x)\,\omega).$$

Если G принадлежит классу C^1, то Λ локально принадлежит классу C^1 и, полагая $\omega = \mathrm{id}$, получаем, что λ локально принадлежит классу C^1.

Применим это в каждой точке $(0, x)$, $x \in U$, к случаю, когда $g(t, x) = D_2 f(t, \alpha(t, x))$, и к решению $D_2\alpha$ дифференциального уравнения

$$(D_2\alpha)'(t, x) = g(t, x) D_2\alpha(t, x).$$

Пусть $p \geqslant 2$. Предположим, что теорема доказана для $p-1$, так что можно считать, что α локально принадлежит классу C^{p-1}, а f — классу C^p. Тогда g локально принадлежит классу C^{p-1}. Значит, и $D_2\alpha$ локально принадлежит классу C^{p-1}. Из соотношения

$$D_1\alpha(t, x) = f(t, \alpha(t, x))$$

заключаем, что $D_1\alpha$ принадлежит классу C^{p-1} и, значит, α локально принадлежит классу C^p, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $p = \infty$ будет разобран в следующем параграфе в теореме 5.

§ 2. Векторные поля, кривые и потоки

Рассматривается многообразие X класса C^p, $p \geqslant 2$. Напомним, что X предполагается хаусдорфовым. Касательное расслоение $\pi: T(X) \to X$ принадлежит классу C^{p-1}, $p \geqslant 1$.

Под (не зависящим от времени) векторным полем мы понимаем сечение касательного расслоения, т. е. морфизм (класса C^{p-1})

$$\xi: X \to T(X),$$

удовлетворяющий условию $\xi(x) \in T_x(X)$ для каждого x или, другими словами, $\pi\xi = \mathrm{id}$.

Если $T(X)$ тривиально и X является, для определенности, $\mathbf{E}$-многообразием, так что существует ВР-изоморфизм между $T(X)$ и $X \times \mathbf{E}$, то морфизм ξ полностью определяется своей проекцией на второй сомножитель и по существу имеет место ситуация, описанная в предыдущем параграфе. Различие состоит только в том, что наше векторное поле не зависит от времени. В рассмотренном представлении в виде прямого произведения проекцию сечения на второй сомножитель назовем *главной частью* векторного поля ξ. Она является C^{p-1}-морфизмом

$$f: X \to \mathbf{E},$$

и $\xi(x)=(x, f(x))$. Мы скажем также, что ξ *локально представлено отображением* f, если выбрано открытое в X подмножество U, над которым векторное расслоение допускает тривиализацию.

Пусть J — открытый интервал в $\mathbf{R}$. Его касательное расслоение есть $J\times\mathbf{R}$, и мы имеем каноническое сечение ι, для которого $\iota(t)=1$ при всех $t\in J$. Мы иногда будем писать ι_t вместо $\iota(t)$.

Под кривой в X мы понимаем морфизм (класса C^p при $p\geqslant 1$, если не оговорено противное)

$$\alpha : J\to X,$$

открытого в $\mathbf{R}$ интервала J в многообразие X. Если $g: X\to Y$ — морфизм, то $g\alpha=g\circ\alpha$ — кривая в Y. Для данной кривой α получаем индуцированное отображение касательных расслоений

$$\begin{tikzcd} J\times\mathbf{R} \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d] & T(X) \arrow[d, "\pi"] \\ J \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}$$

$\alpha_*\circ\iota$ обозначим через α' или, если нас интересует значение в точке t, через $d\alpha/dt$. Таким образом, α' — кривая класса C^{p-1} в $T(X)$, если α — кривая класса C^p. Если не оговорено противное, в дальнейшем всегда будет подразумеваться, что мы имеем достаточно большую дифференцируемость, чтобы не прийти к отображениям класса <1. Так, например, чтобы свободно дифференцировать, мы должны брать X и α класса C^p, где $p\geqslant 2$.

Если $g: X\to Y$ — морфизм, то

$$(g\alpha)'(t)=g_*\alpha'(t).$$

Это сразу следует из определений и из функториальности касательного расслоения.

Предположим, что интервал J содержит 0, и будем рассматривать такие кривые, определенные на J, что $\alpha(0)$ совпадает с фиксированной точкой x_0. Мы скажем, что кривые α_1 и α_2 *касаются* в нуле, если $\alpha_1'(0)=\alpha_2'(0)$. Читатель может легко проверить, что существует биективное соответствие между классами касающихся кривых, для которых $\alpha(0)=x_0$, и касательным пространством $T_{x_0}(X)$. Поэтому касательное пространство можно определить, взяв классы касающихся в данной точке кривых.

Пусть ξ — векторное поле на X и $x_0 \in X$. *Интегральной кривой* для векторного поля ξ *с начальным условием* x_0 (или начинающейся в x_0) назовем кривую класса C^{p-1}

$$\alpha : J \to X,$$

которая отображает содержащий нуль и открытый в $\mathbf{R}$ интервал J в многообразие X, так что $\alpha(0)=x_0$ и

$$\alpha'(t)=\xi(\alpha(t))$$

для всех $t \in J$. При помощи локального представления векторного поля получаем из предыдущего параграфа, что интегральные кривые существуют локально. Следующая теорема дает нам их глобальное существование и единственность.

ТЕОРЕМА 2. *Две интегральные кривые $\alpha_1 : J_1 \to X$ и $\alpha_2 : J_2 \to X$ для векторного поля ξ на X с одним и тем же начальным условием x_0 совпадают на*

$$J_1 \cap J_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J^* — множество таких точек t, что $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)$. Тогда по локальной теореме единственности J^* содержит окрестность нуля. Кроме того, поскольку X хаусдорфово, мы видим, что множество J^* замкнуто. Мы должны показать, что оно открыто. Веберем точку $t^* \in J^*$ и определим в окрестности нуля β_1 и β_2 формулами

$$\beta_1(t)=\alpha_1(t^*+t),$$
$$\beta_2(t)=\alpha_2(t^*+t).$$

Тогда β_1 и β_2 — интегральные кривые для ξ с начальными условиями соответственно $\alpha_1(t^*)$ и $\alpha_2(t^*)$ и по локальной теореме единственности β_1 и β_2 совпадают в окрестности нуля. Следовательно, α_1 и α_2 совпадают в окрестности точки t^*, что доказывает теорему.

Из теоремы 2 следует, что объединение областей определения всех интегральных кривых для ξ с начальным условием x_0 есть открытый интервал, который мы обозначим через $J(x_0)$. Концы этого интервала (мы не исключаем $+\infty$ и $-\infty$) обозначим соответственно через $t^+(x_0)$ и $t^-(x_0)$.

Рассмотрим подмножество $\mathfrak{D}(\xi)$ в $\mathbf{R}\times X$, состоящее из всех точек (t, x), для которых

$$t^-(x) < t < t^+(x).$$

Потоком (глобальным) для ξ называется такое отображение

$$\alpha : \mathfrak{D}(\xi) \to X,$$

что для каждого $x \in X$ отображение $\alpha_x : J(x) \to X$, задаваемое на открытом интервале $J(x)$ формулой

$$\alpha_x(t) = \alpha(t, x),$$

является морфизмом и интегральной кривой для ξ с начальным условием x. Если выбрать карту многообразия X в точке x_0, то легко видеть, что наше определение потока совпадает для локального представления векторного поля с локальным определением предыдущего параграфа.

Пусть даны точка $x \in X$ и число t. Мы скажем, что *определено* tx, если (t, x) лежит в области определения отображения α. В этом случае обозначим $\alpha(t, x)$ через tx.

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим векторное поле ξ на X и его поток α. Пусть $x \in X$. Если $t_0 \in J(x)$, то*

$$J(t_0x) = J(x) - t_0$$

(*перенос интервала $J(x)$ на $-t_0$*) *и для всех $t \in J(x) - t_0$ имеем*

$$t(t_0x) = (t + t_0)x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше первое утверждение немедленно следует из предположения о максимальности области определения интегральной кривой. Второе эквивалентно утверждению, что кривые, задаваемые левой и правой частями последнего равенства, совпадают. Но они обе являются интегральными кривыми для нашего векторного поля с начальным условием t_0x и поэтому обязаны совпадать.

В частности, если для чисел t_1 и t_2 определены t_1x и $t_2(t_1x)$, то определено $(t_2 + t_1)x$, и оно совпадает с $t_2(t_1x)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть ξ — векторное поле на X и x — точки из X. Предположим, что $t^+ < \infty$. Тогда для каждого компактного множества $A \subset X$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $t > t^+(x) - \varepsilon$ точки tx не лежат в A. Аналогично для t^-.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такого ε не существует. Тогда можно выбрать такую сходящуюся к $t^+(x)$ снизу последовательность t_n, что все $t_n x$ лежат в A. Так как A компактно, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $t_n x$ сходится к точке y и A. По локальной теореме существования найдется такая окрестность U этой точки и такое число $\delta > 0$, что $t^+(z) > \delta$ для всех $z \in U$. При достаточно большом n мы имеем

$$t^+(x) < \delta + t_n,$$

и $t_n x$ лежит в U. Тогда по теореме 3 получаем противоречивое неравенство

$$t^+(x) = t^+(t_n x) + t_n > \delta + t_n > t^+(x).$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если многообразие X компактно и ξ — векторное поле на X, то $\mathfrak{D}(\xi) = \mathbf{R} \times X$.*

Приведем еще один полезный критерий того, что $\mathfrak{D}(\xi) = \mathbf{R} \times X$, пригодный и тогда, когда X не компактно. Для этого критерия нужно привлечь некую структуру, более сильную, чем дифференцируемая (по существу — специального вида метрику).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}$-многообразие X. Пусть ξ — векторное поле на X. Предположим, что существуют такие числа $a > 0$ и $K > 0$, что в каждой точке $x \in X$ существует карта (U, φ), удовлетворяющая следующим условиям:*

1) главная часть f локального представления векторного поля в этой карте ограничена константой K, и этой же константой ограничена и производная f';

2) φU содержит шар радиуса a с центром в φx; тогда $\mathfrak{D}(\xi) = \mathbf{R} \times X$.

Доказательство сразу следует из теоремы о глобальном продолжении и из утверждения о равномерности в предложении 1, § 1.

Докажем, наконец, что $\mathfrak{D}(\xi)$ открыто и что α-морфизм.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть ξ — векторное поле класса C^{p-1} на C^p-многообразии X $(2 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда $\mathfrak{D}(\xi)$ открыто в $\mathbf{R} \times X$ и поток α является C^{p-1}-морфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что p — целое число, не меньшее 2. Выберем $x_0 \in X$ и обозначим через J^* множество тех точек $t \in J(x_0)$, для которых существует такое число $b > 0$ и такая открытая окрестность U точки x_0, что произведение $(t-b, t+b) \times U$ содержится в $\mathfrak{D}(\xi)$ и что ограничение потока α на этом произведении есть морфизм. Множество J^* открыто в $J(x_0)$ и по локальной теореме существования и единственности содержит точку нуль. Поэтому остается доказать, что J^* замкнуто в $J(x_0)$.

Пусть s принадлежит замыканию множества J^*. По локальной теореме можно так выбрать такую окрестность V точки sx_0, что для некоторого $a > 0$ существует единственный локальный поток

$$\gamma: J_a \times V \to X,$$

который является морфизмом.

Зафиксируем точку x_0. Интегральная кривая с начальным условием x_0, разумеется, непрерывна на $J(x_0)$. Поэтому tx_0 стремится к sx_0 при t, стремящемся к s. Пусть дана окрестность V_1 точки sx_0, содержащаяся в V. В силу определения множества J^*, можно найти столь близкий к s элемент $t \in J^*$, такое малое (по сравнению с a) число b и такую малую окрестность U точки x_0, что α отображает произведение $(t-b, t+b) \times U$ в V_1. Теперь из определения потока γ ясно, что $s \in J^*$. Отсюда сразу видно, что $\mathfrak{D}(\xi)$ открыто в $\mathbf{R} \times X$ и что α принадлежит классу C^{p-1} во всей области $\mathfrak{D}(\xi)$. Если $p = \infty$, то мы можем теперь утверждать, что α принадлежит классу C^r при любом r и, следовательно, классу C^∞, что и требовалось. Заметим, что доказательство применимо и к векторному полю, зависящему от времени, и поэтому применимо к заключительной части доказательства теоремы 1 при $p = \infty$.

Мы имеем два очевидных следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для каждого $t \in \mathbf{R}$ множество таких $x \in X$, что (t, x) содержится в области $\mathfrak{D}(\xi)$, открыто в X.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Функции $t^+(x)$ и $t^-(x)$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу.*

ТЕОРЕМА 6. *Рассмотрим на многообразии X векторное поле ξ с потоком α. Пусть $\mathfrak{D}_t(\xi)$ — множество таких точек $x \in X$, что (t, x) лежит в $\mathfrak{D}(\xi)$. Тогда $\mathfrak{D}_t(\xi)$ открыто для каждого $t \in \mathbf{R}$ и α_t является изоморфизмом множества $\mathfrak{D}_t(\xi)$ на открытое подмножество в X. Более того,*

$$\alpha_t(\mathfrak{D}_t) = \mathfrak{D}_{-t} \text{ и } \alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение немедленно следует из предыдущей теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $x_0 \in X$ и $t \in J(x_0)$, то существует такая открытая окрестность U точки x_0, что t лежит в $J(x)$ при всех $x \in U$ и отображение*

$$x \to tx$$

есть изоморфизм окрестности U на открытую окрестность точки tx_0.

§ 3. Пульверизации

Если X — многообразие класса C^p, где $p \geqslant 3$, то его касательное расслоение $T(X)$ принадлежит классу C^{p-1}, а касательное расслоение $T(T(X))$ его касательного расслоения — классу C^{p-2}, причем $p-2 \geqslant 1$.

Рассмотрим кривую $\alpha : J \to X$ класса C^s $(s \leqslant p)$. *Поднятием* кривой α в $T(X)$ назовем такую кривую $\beta : J \to T(X)$, что $\pi\beta = \alpha$. Мы всегда будем предполагать $s \geqslant 2$, так что поднятие кривой принадлежит классу $s-1 \geqslant 1$. Такое поднятие всегда существует; им является, например, изученная в предыдущем параграфе кривая α', называемая *каноническим поднятием* кривой α.

Дифференциальное уравнение второго порядка на X — это такое векторное поле ξ (класса C^{p-2}) на касательном расслоении $T(X)$, что для всех $v \in T(X)$ выполнено равенство

$$\pi_* \xi(v) = v.$$

Здесь через π обозначено каноническое проектирование

$T(X) \to X$. Заметим, что здесь последовательность символов имеет смысл, поскольку

$$\pi_* : T(T(X)) \to T(X)$$

отображает касательное расслоение над $T(X)$ в само $T(X)$. Из определения немедленно следует, что ξ тогда и только тогда является дифференциальным уравнением второго порядка, когда выполнено следующее условие: каждая интегральная кривая β для ξ является каноническим поднятием кривой $\pi\beta$. Другими словами,

$$(\pi\beta)' = \beta,$$

где $\pi\beta$ — каноническая проекция кривой β на X. Если ввести аргумент t, то эта формула запишется в виде

$$(\pi\beta)'(t) = \beta(t)$$

для всех t из области определения кривой β. Примеры будут даны позднее.

Нас будут интересовать дифференциальные уравнения второго порядка специальных видов. Прежде чем рассматривать их, сделаем несколько технических замечаний.

Пусть s — вещественное число и $\pi: E \to X$ — векторное расслоение. Если $v \in E$, скажем $v \in E_x$ для некоторого $x \in X$, то sv также принадлежит E_x, поскольку E_x — векторное пространство. Мы будем отождествлять s с отображением E в себя, задаваемым умножением на скаляр s. Это отображение является ВР-морфизмом и даже, если $s \neq 0$, ВР-изоморфизмом. Тогда

$$s_* : T(E) \to T(E)$$

— обычное индуцированное отображение касательного расслоения над E.

Пусть теперь $E = T(X)$ само является касательным расслоением. Тогда наше отображение s обладает следующими свойствами.

Во-первых, как следует из линейности отображения s_* на каждом слое,

$$s_* s = s s_*.$$

Во-вторых, если $\alpha: J \to X$ — кривая и α_1 — кривая, определенная равенством $\alpha_1(t) = \alpha(st)$, то

$$\alpha_1'(t) = s\alpha'(st).$$

Это следует из правила дифференцирования сложной функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение ξ второго порядка на X. Если v — вектор из $T(X)$, то через β_v обозначим единственную интегральную кривую для ξ с начальным условием v (т. е. такую, что $\beta_v(0) = v$) и обозначим через $\mathfrak{D}$ множество таких векторов $v \in T(X)$, что β_v определена, по крайней мере на интервале $[0,1]$. Из следствия 1 теоремы 5 § 2 нам известно, что $\mathfrak{D}$ — открытое множество в $T(X)$, а из самой теоремы — что отображение

$$v \to \beta_v(1)$$

является морфизмом множества $\mathfrak{D}$ в $T(X)$. Определим *экспоненциальное* отображение

$$\exp: \mathfrak{D} \to X$$

формулой

$$\exp(v) = \pi\beta_v(1).$$

Отображение exp является C^{p-2}-морфизмом. Мы будем называть $\mathfrak{D}$ *областью определения экспоненциального отображения* (*ассоциированного с* ξ).

Пусть X — многообразие класса C^p $(p \geqslant 3)$ и ξ — дифференциальное уравнение второго порядка на X. Тогда следующие условия эквивалентны и определяют объект, который мы будем называть *пульверизацией* на X. (Первые три условия должны начинаться словами: «для каждого $v \in T(X)$».)

П 1. Число t тогда и только тогда принадлежит области определения интегральной кривой β_v, когда 1 принадлежит области определения кривой β_{tv}, и в этом случае

$$\pi\beta_v(t) = \pi\beta_{tv}(1).$$

П 2. Произведение st чисел s и t тогда и только тогда принадлежит области определения интегральной кривой β_v, когда s принадлежит области определения кривой β_{tv}, и в этом случае

$$\pi\beta_v(st) = \pi\beta_{tv}(s).$$

П 3. Число t тогда и только тогда принадлежит области определения кривой β_{sv}, когда st принадлежит области определения кривой β_v, и в этом случае

$$\beta_{sv}(t) = s\beta_v(st).$$

П 4. Для всех $s \in \mathbf{R}$ и $v \in T(X)$ выполнено равенство

$$\xi(sv) = s_* s\xi(v).$$

Докажем, что все эти условия эквивалентны.

Предположим, что выполнено **П 1.** В этом случае st тогда и только тогда принадлежит области определения кривой β_v, а s тогда и только тогда принадлежит области определения кривой β_{tv}, когда 1 принадлежит области определения кривой β_{stv}. Этим доказано первое утверждение условия **П 2.** Точно так же из равенства в условии **П 1** выводится равенство в условия **П 2.**

Аналогично доказывается, что из **П 2** следует **П 1.**

Предположим, что выполнено **П 2.** Чтобы доказать **П 3**, воспользуемся равенством

$$(\pi\beta_{sv})'(t) = \frac{d}{dt}\pi\beta_v(st) = s(\pi\beta_v)'(st) = s\beta_v(st).$$

Остается вспомнить, что $(\pi\beta_{sv})' = \beta_{sv}$. Очевидно, что из **П 3** следует **П 2.**

Предположим, что выполнено **П 3.** Поскольку β_v для каждого v является интегральной кривой для ξ с начальным условием v, мы имеем из ее определения

$$\beta'_{sv}(0) = \xi(sv).$$

Используя наше предположение, получаем также равенства

$$\beta'_{sv}(t) = \frac{d}{dt}(s\beta_v(st)) = s_* s\beta'_v(st).$$

Полагая $t = 0$ и используя предыдущее соотношение, получаем **П 4.**

Пусть, наконец, выполнено **П 4**. Зафиксируем s. Для всех таких t, что st принадлежит области определения кривой β_v, определено $\beta_v(st)$ и выполнены равенства

$$\frac{d}{dt}(s\beta_v(st)) = s_* s\beta_v'(st) = s_* s\,\xi(\beta_v(st)) = \xi(s\beta_v(st)).$$

Следовательно, $s\beta_v(st)$ является интегральной кривой для ξ с начальным условием $s\beta_v(0) = sv$. В силу теоремы единственности имеем

$$s\beta_v(st) = \beta_{sv}(t).$$

Этим доказано **П 3** и завершается доказательство эквивалентности.

Подведем итог: пульверизация — это векторное поле ξ на $T(X)$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\pi_*\xi(v) = v,$$

$$\xi(sv) = s_* s\xi(v).$$

Второе условие — это условие **П 4**, эквивалентное первым трем условиям **П 1** — **П 3**. Было бы очень полезно привести примеры пульверизаций. Из вышеприведенных условий следует, что пульверизации *образуют выпуклое множество*. Значит, если мы сможем построить пульверизации на открытом подмножестве банахова пространства, то сможем склеить их при помощи разбиения единицы. Тем самым мы сразу получаем глобальную теорему существования.

ТЕОРЕМА 7. *Если многообразие X (класса C^p $(p \geqslant 3)$) допускает разбиение единицы, то на нем существует пульверизация.*

Закончим этот параграф примером локальной пульверизации.

ПРИМЕР. Рассмотрим открытое множество U в банаховом пространстве $\mathbf{E}$. В этом случае $T(U) = U \times \mathbf{E}$ и

$$T(T(U)) = (U \times \mathbf{E}) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}).$$

Тогда $\pi : U \times \mathbf{E} \to U$ — просто проектирование, и мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(U \times \mathbf{E}) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d] & U \times \mathbf{E} \arrow[d] \\
U \times \mathbf{E} \arrow[r, "\pi"'] & U
\end{tikzcd}$$

Отображение π_* на каждом слое $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ одно и то же и является проектированием на первый сомножитель.

У любого векторного поля на $U \times \mathbf{E}$ главная часть

$$f : U \times \mathbf{E} \to \mathbf{E} \times \mathbf{E}$$

имеет две компоненты, $f = (f_1, f_2)$, каждая из которых отображает $U \times \mathbf{E}$ в $\mathbf{E}$. Следующее предложение локально описывает дифференциальные уравнения второго порядка и пульверизации в терминах их главных частей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Рассмотрим открытое множество U в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ и его касательное расслоение $T(U) = U \times \mathbf{E}$. Морфизм класса C^{p-2}*

$$f : U \times \mathbf{E} \to \mathbf{E} \times \mathbf{E}$$

тогда и только тогда является главной частью дифференциального уравнения второго порядка, когда

$$f(x, v) = (v, f_2(x, v)).$$

Это уравнение тогда и только тогда будет пульверизацией, когда дополнительно для всех вещественных s имеем равенство

$$f_2(x, sv) = s^2 f_2(x, v).$$

Доказательство немедленно следует из определений, и мы оставляем его читателю.

Теперь можно записать пульверизацию, полагая главную часть равной

$$f(x, v) = (v, 0).$$

Она удовлетворяет нашим условиям. В главе о римановых метриках мы увидим, как пульверизации строятся несколько менее тривиально.

В заключение более подробно рассмотрим интегральные кривые дифференциальных уравнений второго порядка и пульверизаций. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — интегральная кривая дифференциального уравнения ξ второго порядка. Рассматривая все локально и следуя обозначениям предложения 5, запишем нашу кривую в виде двух компонент

$$\varphi(t) = (y(t),\ z(t)) \in U \times \mathbf{E}.$$

Согласно определению, если f — главная часть уравнения ξ, то мы должны иметь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) = f(y, z) = (z, f_2(y, z)).$$

Следовательно, наше дифференциальное уравнение можно переписать в следующем более привычном виде:

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dz}{dt} = f_2\left(y,\ \frac{dy}{dt}\right).$$

Дополнительное условие на пульверизацию означает просто, что f_2 однородно степени 2 по переменной dy/dt. В гл. VII мы рассмотрим пример, когда f_2 является квадратичной формой.

§ 4. Экспоненциальное отображение

На многообразии X рассмотрим фиксированную пульверизацию ξ. Как и выше, обозначим через $\mathfrak{D}$ множество таких векторов $v \in T(X)$, что 1 принадлежит области определения кривой β_v. Мы знаем, что $\mathfrak{D}$ открыто и что экспоненциальное отображение

$$\exp : \mathfrak{D} \to X,$$

задаваемое формулой

$$\exp v = \pi\beta_v(1),$$

является C^{p-2}-морфизмом. Как обычно, мы предполагаем, что X — многообразие класса C^p, $p \geqslant 3$.

Если $x \in X$ и 0_x означает нулевой вектор в T_x, то, полагая $s = 0$ в **П 4**, получаем, что $\xi(0_x) = 0$. Отсюда

$$\exp(0_x) = x.$$

Таким образом, наше экспоненциальное отображение совпадает с π на нулевом сечении и поэтому индуцирует изоморфизм этого сечения на X. Условимся обозначать нулевое сечение векторного расслоения E над X через $\zeta_E(X)$ или просто через ζX, если ясно, какое E имеется в виду. В нашем случае E — касательное расслоение.

Обозначим через $\exp_x$ ограничение отображения $\exp$ на касательном пространстве T_x. Таким образом,

$$\exp_x : T_x \to X.$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть ξ — пульверизация на многообразии X. Тогда*

$$\exp_x : T_x \to X$$

индуцирует локальный изоморфизм в 0_x и, более того, $(\exp_x)_*$ в 0_x есть тождественное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала второе утверждение, так как первое следует из него по теореме об обратной функции. Более того, поскольку T_x — векторное пространство, то достаточно определить производную отображения $\exp_x$ вдоль лучей, иными словами определить производную по t кривой $\exp_x(tv)$. Находим ее из определения пульверизации

$$\frac{d}{dt}\pi\beta_{tv} = \beta_{tv}.$$

Полагая здесь $t = 0$ и принимая во внимание, что любое w является начальным условием для β_w, получаем

$$(\exp_x)_*(0_x) = \mathrm{id}.$$

§ 5. Существование трубчатой окрестности

Рассмотрим подмногообразие X многообразия Y. *Трубчатая окрестность* многообразия X в Y состоит из векторного расслоения $\pi : E \to X$ над X, открытой окрестности Z нулевого сечения $\zeta_E X$ и изоморфизма

$$f : Z \to U$$

множества Z в открытое множество $Y \subset U$, содержащее X. При этом требуется, чтобы f коммутировало с ς:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[u, "\varsigma"] \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Мы назовем f *трубчатым отображением*, а Z или его образ $f(Z)$—трубкой (соответственно в E или Y). Нижнее отображение в диаграмме — просто включение. Ясно, что можно рассматривать его как отображение вложения и тем самым определить трубчатую окрестность для вложений. Трубчатая окрестность называется *тотальной*, если $Z = E$. В этом параграфе будут исследованы условия, при которых существует такая окрестность. Проблему единственности мы рассмотрим в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть многообразие Y класса C^p $(p \geqslant 3)$ допускает разбиение единицы, и пусть X — его замкнутое подмногообразие. Тогда в Y существует трубчатая окрестность класса C^{p-2} многообразия X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность касательных расслоений

$$0 \to T(X) \to T(Y) \mid X \to N(X) \to 0.$$

Поскольку эта последовательность расщепляема, существует некое разложение

$$T(Y) \mid X = T(X) \oplus N(X),$$

в котором $N(X)$ можно считать подрасслоением расслоения $T(Y) \mid X$. Используя теорему 7, построим на $T(Y)$ пульверизацию ξ и получим экспоненциальное отображение. Обозначим ограничение этого отображения на $N(X)$ через $\exp \mid N$.

Таким образом,

$$\exp \mid N : \mathfrak{D} \cap N(X) \to Y.$$

Мы утверждаем, что это отображение — локальный изоморфизм. Доказательство можно проводить локально. Согласно определению подмногообразия, имеется такое разложение U в прямое произведение $U = U_1 \times U_2$, что $X = U_1 \times 0$. Если U открыто в $\mathbf{E}$, а U_1 и U_2 соответственно в $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, то инъективное отображение $N(X)$ в $T(Y)|X$ можно локально представить в виде точной последовательности

$$0 \to U_1 \times \mathbf{F}_2 \xrightarrow{\varphi} U_1 \times \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2.$$

Включение $T(Y)|X$ в $T(Y)$ — это просто включение

$$U_1 \times \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 \to U_1 \times U_2 \times \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2.$$

Нам нужно вычислить производную в точке $(x_1, 0)$ композиции отображений

$$U_1 \times \mathbf{F}_2 \xrightarrow{\overline{\varphi}} U_1 \times U_2 \times \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 \xrightarrow{\exp} Y.$$

Сделаем это, воспользовавшись формулой для частных производных. Поскольку экспоненциальное отображение на нулевом сечении совпадает с проектированием, его «горизонтальная» частная производная является тождественным отображением. Из теоремы 8 § 4 мы знаем, что «вертикальная» частная производная тоже есть тождественное отображение. Пусть $\psi = \exp \cdot \overline{\varphi}$ (где через $\overline{\varphi}$ обозначена композиция отображения φ и включения). Тогда для любого вектора $(w_1, w_2) \in \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ мы получаем

$$D\psi(x_1, 0) \cdot (w_1, w_2) = (w_1, 0) + \varphi_{x_1}(w_2),$$

где φ_{x_1} — линейное отображение, задаваемое в слое над x_1 отображением φ. Из наших предположений следует, что $\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2$ есть прямая сумма пространства $\mathbf{F}_1 \times 0$ и образа $\mathbf{F}_2$ при отображении φ_{x_1}. Этим доказано, что $D\psi(x_1, 0)$ является топлинейным изоморфизмом, и, значит, доказано, что *ограничение на нормальном расслоении экспоненциального отображения является локальным изоморфизмом на нулевом сечении.*

Таким образом, мы показали, что существуют векторное расслоение $E \to X$, открытая окрестность Z нулевого сечения в E и отображение $f\colon Z \to Y$, которое для каждого x из ζ_E есть локальный изоморфизм. Остается показать, что Z можно выбрать таким образом, что ограничение отображения f будет изоморфизмом. В доказательстве будем следовать Годеману [18]. Мы можем найти такое локально конечное открытое покрытие пространства

X открытыми в Y множествами U_i, что для каждого i определены взаимно обратные изоморфизмы

$$f_i : Z_i \to U_i, \qquad g_i : U_i \to Z_i.$$

Через Z_i обозначены открытые множества в Z, каждое из которых содержит точку $x \in X$. При этом f_i и g_i будут тождественными отображениями на X (рассматриваемом как подмножество одновременно в Z и Y), а f_i — ограничениями отображения f на Z_i. Выберем теперь такое локально конечное покрытие $\{V_i\}$ множества X открытыми в Y подмножествами, что $\overline{V_i} \subset U_i$, и положим $V = \bigcup V_i$. Обозначим через W подмножество в V, состоящее из таких точек y, что если y лежит в пересечении $\overline{V_i} \cap \overline{V_j}$, то $g_i(y) = g_j(y)$. Очевидно, что W содержит X. Мы утверждаем, что W содержит открытое множество, содержащее X.

Рассмотрим точку $x \in X$. Существует открытая в Y окрестность G_x точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств $\overline{V_i}$ скажем с $\overline{V_{i_1}}, \ldots, \overline{V_{i_r}}$. Взяв G_x достаточно малым, можно предположить, что x лежит в каждом из этих множеств и что G_x лежит в каждом из множеств $U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}$. Поскольку точка x лежит в каждом из множеств $\overline{V_{i_1}}, \ldots, \overline{V_{i_r}}$, она содержится в множествах $U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}$, и отображения $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ принимают на x одно и то же значение, а именно значение, равное самому x. Из того, что $f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}$ являются ограничениями отображения f, сразу получаем, что отображения $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ совпадают на G_x, если только G_x достаточно мало.

Пусть G — объединение всех G_x. Тогда G открыто и мы можем определить отображение

$$g : G \to g(G) \subset Z,$$

полагая g на $G \cap V_i$ равным g_i. Тогда $g(G)$ открыто в Z и ограничение отображения f на $g(G)$ обратно к g. Этим доказано, что f и g являются взаимно обратными изоморфизмами между G и $g(G)$. Доказательство теоремы закончено.

Векторное расслоение $E \to X$ называется *сжимаемым*, если для любой открытой окрестности Z нулевого сечения существует изоморфизм

$$\varphi : E \to Z_1$$

пространства E в открытое подмножество Z_1 множества Z, содержащее нулевое сечение, причем этот изоморфизм φ коммутирует с проектированием на X:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & Z_1 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ясно, что если расслоение сжимаемо и если задана трубчатая окрестность, определенная на Z, то можно построить тотальную трубчатую окрестность, определенную на E. В главе о римановых метриках мы увидим, что определенные типы векторных расслоений сжимаемы: сжимаемы гильбертовы расслоения при условии, что база допускает разбиение единицы.

§ 6. Единственность трубчатой окрестности

Рассмотрим два многообразия X и Y и морфизм F: $\mathbf{R} \times X \to Y$. Мы назовем F *изотопией* (вложений), если выполнены следующие условия. Во-первых, для каждого $t \in \mathbf{R}$ отображение $F_t(x)$, задаваемое формулой $F_t(x) = F(t, x)$, является вложением. Во-вторых, существуют такие числа t_0 и t_1 $(t_0 < t_1)$, что $F_t = F_{t_0}$ при $t \leqslant t_0$ и $F_t = F_{t_1}$ при $t \geqslant t_1$. Мы скажем тогда, что интервал $[t_0, t_1]$ есть *собственная область* изотопии, и обозначим постоянные вложения слева и справа от интервала соответственно через $F_{-\infty}$ и $F_{+\infty}$. Мы скажем, что два вложения $f: X \to Y$ и $g: X \to Y$ *изотопны*, если существует такая изотопия F_t, что $f = F_{t_0}$ и $g = F_{t_1}$ (обозначения те же, что и выше). Запись $f \approx g$ будет обозначать «f изотопно g».

Используя перенесение интервала и умножение на скаляр, можно преобразовать каждую изотопию в такую, собственная область которой содержится в интервале $(0, 1)$. Далее, отношение изотопии двух отображений есть отношение эквивалентности. Оно, очевидно, симметрично и рефлексивно. Для доказательства транзитивности предположим, что $f \approx g$ и $g \approx h$. Можно так выбрать области этих изотопий, что первая изотопия окончится и станет равной вложению g, прежде чем начнется вторая. Ясно, как в этом случае устроить композицию изотопий.

Если $s_0 < s_1$ — два числа и $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — такая функция (морфизм), что $\sigma(s) = t_0$ при $s \leqslant s_0$ и $\sigma(s) = t_1$ при $s \geqslant s_1$ и σ монотонно возрастает, то из одной изотопии можно получить другую, полагая $G_t = F_{\sigma(t)}$. Такую функцию σ можно использовать для сглаживания части изотопии, заданной только на замкнутом интервале.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы будем свободно пользоваться следующим тривиальным фактом: если $f_t : X \to Y$ — изотопия, а $g : X_1 \to X$ и $h : Y \to Y_1$ — два вложения, то композиция отображений

$$hf_tg : X_1 \to Y_1$$

является изотопией.

Рассмотрим подмногообразие X многообразия Y. Пусть $\pi : E \to X$ — векторное расслоение и Z — открытая окрестность нулевого сечения. Изотопия $f_t : Z \to Y$ открытых вложений, такая, что каждое f_t есть трубчатая окрестность подмногообразия X, *называется изотопией трубчатых окрестностей.*

В дальнейшем в качестве Z будем брать все E.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть* $\pi : E \to X$ и $\pi_1 : E_1 \to X$ — *два векторных расслоения над многообразием* X, и пусть

$$f : E \to E_1$$

— *трубчатая окрестность пространства* X *в* E_1 *(мы отождествляем* X *с нулевым сечением расслоения* E_1*). Тогда существует такая изотопия*

$$f_t : E \to E_1$$

с собственной областью $[0, 1]$, *что* $f_1 = f$, *а* f_0 *есть* VP-*морфизм.* (Если f, π, π_1 принадлежат классу C^p, то f_t можно выбрать из класса C^{p-1}.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение F формулой

$$F_t(e) = t^{-1}f(te)$$

при $t \neq 0$ и $e \in E$. Тогда отображение F_t — вложение, поскольку оно есть композиция вложений (умножения на скаляр t и t^{-1} являются ВР-морфизмами).

Исследуем, что происходит при $t = 0$.

Для данного $e \in E$ найдем такую открытую окрестность U_1 точки πe, что E_1 допускает над U_1 тривиализацию $U_1 \times \mathbf{E}_1$. Затем найдем такую меньшую окрестность U точки πe и такой открытый шар B с центром в нуле в типичном слое $\mathbf{E}$ расслоения E, что E допускает над U тривиализацию $U \times \mathbf{E}$ и представление $\bar{f}$ отображения f на $U \times B$ (содержащемся в $U \times \mathbf{E}$) отображает $U \times B$ в $U_1 \times \times \mathbf{E}_1$. Это возможно в силу непрерывности. На $U \times B$ отображение $\bar{f}$ можно представить двумя морфизмами

$$\bar{f}(x, v) = (\varphi(x, v), \psi(x, v)).$$

При этом $\varphi(x, 0) = x$, в то время как $\psi(x, 0) = 0$. Заметим, что при всех достаточно малых t точка $t\tilde{e}$ содержится в $U \times B$ (в локальном представлении). F_t локально на $U \times B$ можно представить в виде отображения

$$\bar{F}_t(x, v) = (\varphi(x, tv), t^{-1}\psi(x, tv)).$$

Отображение φ является в этом случае морфизмом от трех переменных x, v, t даже при $t = 0$. Вторую компоненту отображения $\bar{F}_t$ можно записать в виде

$$t^{-1}\psi(x, tv) = t^{-1}\int_0^1 D_2\psi(x, stv)\cdot(tv)ds,$$

или, сокращая t^{-1} с t, в виде

$$\int_0^1 D_2\psi(x, stv)\cdot v ds.$$

Это морфизм относительно t также при $t = 0$. Кроме того, при $t = 0$ получаем

$$\bar{F}_0(x, v) = (x, D_2\psi(x, 0)v).$$

Мы предположили, что само f — вложение. Отсюда следует, что $D_2\psi(x, 0)$ — топлинейный изоморфизм, и потому F_0 есть ВР-морфизм. Чтобы получить нашу изотопию в стандартной форме, можно использовать такую функцию

$\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $\sigma(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\sigma(t) = 1$ при $t \geqslant 1$, и σ монотонно возрастает. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 10. *Рассмотрим два векторных расслоения $\pi : E \to X$ и $\pi_1 : E_1 \to X$ над подмногообразием X в Y. Предположим, что E сжимаемо. Пусть $f : E \to Y$ и $g : E_1 \to Y$ — две трубчатые окрестности многообразия X в Y. Тогда существует такая C^{p-1}-изотопия*

$$f_t : E \to Y$$

трубчатой окрестности с собственной областью $[0, 1]$ *и такой* BP-*изоморфизм* $\lambda : E \to E_1$, *что* $f_1 = f$ *и* $f_0 = g\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $f(E)$ и $g(E_1)$ являются открытыми окрестностями множества X в Y. Пусть $U = f^{-1}(f(E) \cap g(E_1))$, и пусть $\varphi : E \to U$ — сжатие, а ψ — композиция отображений

$$E \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f|U} Y,$$

$\psi = (f|U) \circ \varphi$. Тогда ψ — трубчатая окрестность и $\psi(E)$ содержится в $g(E_1)$. Поэтому $g^{-1}\psi : E \to E_1$ является трубчатой окрестностью того же типа, что и рассмотренная в предыдущем предложении. Существует такая изотопия

$$G_t : E \to E_1$$

трубчатых окрестностей множества X, что $G_1 = g^{-1}\psi$, а G_0 есть BP-изоморфизм. Рассматривая изотопию gG_t, мы получаем такую изотопию трубчатых окрестностей

$$\psi_t : E \to Y,$$

что $\psi_1 = \psi$ и $\psi_0 = g\omega$, где $\omega : E \to E_1$ есть BP-изоморфизм. Мы показали таким образом, что ψ и $g\omega$ изотопны (как трубчатые окрестности). Аналогично проверяется, что ψ и $f\mu$ изотопны для некоторого BP-изоморфизма

$$\mu : E \to E.$$

Следовательно, выбирая подходящим образом собственные области наших изотопий, получаем изотопию (обозначим ее через F_t), переводящую $g\omega$ в $f\mu$. Тогда $F_t\mu^{-1}$ даст нам требуемую изотопию между $g\omega\mu^{-1}$ и f и для окончания доказательства остается положить $\lambda = \omega\mu^{-1}$.

Заметим, что в доказательстве единственности не используется теорема существования для дифференциальных уравнений.

Глава V

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Рассмотрим векторное расслоение $E \to X$. Существенный интерес представляет изучение операции, получающейся из функтора «полилинейные альтернированные формы». Применим эту операцию к касательному расслоению и назовем сечения полученного нового расслоения *дифференциальными формами*. Можно формально определить некоторые соотношения между функциями, векторными полями и дифференциальными формами, лежащие в основаниях дифференциальной и римановой геометрии. Мы приведем основные относящиеся сюда понятия. Чтобы иметь хотя бы одно приложение, мы изучим фундаментальную 2-форму и в следующей главе свяжем ее с римановой метрикой для канонического построения пульверизации, ассоциированной с этой метрикой.

Мы предполагаем, что наши многообразия хаусдорфовы и столько раз дифференцируемые, сколько необходимо для того, чтобы все наши утверждения имели смысл.

§ 1. Векторные поля, дифференциальные операторы, скобки

Пусть X — многообразие класса C^p, а φ — функция, определенная на открытом множестве U, т. е. морфизм

$$\varphi : U \to \mathbf{R}.$$

Пусть ξ — векторное поле класса C^{p-1}. Напомним, что отображение

$$T_x\varphi : T_xU \to T_{\varphi(x)}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

непрерывно и линейно. Вместе с тем определим новую функцию, которую обозначим $\xi\varphi$ или $\xi(\varphi)$. (Между этим обозначением и композицией отображений не будет путаницы.)

9 Заказ № 519

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *На U существует единственная та. функция $\xi\varphi$ класса C^{p-1}, что*

$$(\xi\varphi)(x) = (T_x\varphi)\xi(x).$$

Если U открыто в банаховом пространстве **E** *и ξ оз чает главную часть векторного поля на U, то*

$$(\xi\varphi)(x) = \varphi'(x)\xi(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая формула, очевидно, опреде ет отображение множества U в **R**. Локальная форм определяет C^{p-1}-морфизм на U. Из определений сразу с дует, что первая формула выражает инвариантно в т минах касательных расслоений то же отображение, чт вторая. Это позволяет нам определить $\xi\varphi$ как морфі глобально, что и требовалось.

Пусть $\mathfrak{F}^p$ означает кольцо функций (класса C^p). Т да наша операция $\varphi \to \xi\varphi$ задает линейное отображеі

$$\theta_{\mathfrak{F}}(\xi) : \mathfrak{F}^p(U) \to \mathfrak{F}^{p-1}(U),$$

если положить $\theta_{\mathfrak{F}}(\xi)\varphi = \xi\varphi$.

Отображение

$$\delta : R \to S$$

одного кольца в другое называется дифференцировани если оно линейно и действует на произведение по фор ле $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть U открыто в многообрази и ξ — векторное поле на X. Если $\theta_{\mathfrak{F}}(\xi) = 0$, то $\xi(x) =$ для всех $x \in U$. Каждое $\theta_{\mathfrak{F}}(\xi)$ есть дифференцирование $\mathfrak{F}^p(U)$ в $\mathfrak{F}^{p-1}(U)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\xi(x) \neq 0$ для не торого x. Действуя локально, рассмотрим главную ча поля ξ и возьмем (существующее по теореме Хана — I наха) линейное отображение φ: **E**$\to$**R**, при котор $\varphi(\xi(x)) \neq 0$. Тогда $\varphi'(y) = \varphi$ для всех $y \in U$. Мы виді что $\varphi'(x)\xi(x) \neq 0$. Этим доказано первое утверждение. В рое с очевидностью следует из локальной формулы.

Из предложения 2 следует, что совпадают два в торных поля, индуцирующие на пространстве функц один и тот же дифференциальный оператор.

Теперь для векторных полей ξ, η на X мы определим новое векторное поле $[\xi, \eta]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим два векторных поля ξ, η класса C^{p-1} на многообразии X. На X существует единственное векторное поле $[\xi, \eta]$ класса C^{p-2}, удовлетворяющее равенству*

$$[\xi, \eta]\varphi = \xi(\eta(\varphi)) - \eta(\xi(\varphi))$$

для каждого открытого множества U и функции φ на U. Если U открыто в банаховом пространстве $\mathbf{E}$, а ξ и η представляют главные части векторных полей, то $[\xi, \eta]$ локально задается формулой

$$[\xi, \eta]\varphi(x) = \varphi'(x)\ (\eta'(x)\xi(x) - \xi'(x)\eta(x)),$$

или

$$[\xi, \eta]\varphi = \varphi'(\eta'\xi - \xi'\eta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2 векторное поле, действующее на функции требуемым образом, определено однозначно. Проверим, что последняя формула действительно локально задает это действие. Формальным дифференцированием по формуле для дифференцирования произведения получаем

$$(\eta\varphi)'\xi - (\xi\varphi)'\eta = (\varphi'\eta)'\xi - (\varphi'\xi)'\eta =$$
$$= \varphi'\eta'\xi + \varphi''\eta\xi - \varphi'\xi'\eta - \varphi''\xi\eta.$$

Здесь нужно корректно определить значения членов, содержащих φ''. Вспомним, что φ'' — билинейное отображение и его можно применить к паре векторов $\eta(x)$ и $\xi(x)$. Значение, например, первого такого члена в точке x равно числу $\varphi''(x)(\eta(x), \xi(x))$. Однако, как мы знаем, φ'' симметрично и потому оба члена, содержащие вторую производную от φ, сокращаются. Это доказывает нашу формулу.

СЛЕДСТВИЕ. *Скобка $[\xi, \eta]$ билинейна по каждому аргументу. Кроме того, имеют место равенство $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ и тождество Якоби*

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения очевидны. Третье следует из определения скобок. Применим левую часть равенства к функции φ. Все члены сократятся (чи татель может проделать все эти выкладки не хуже автора)

Хотя в дальнейшем это и не понадобится, стоит сде лать некоторые замечания относительно обобщения поня тий, введенных в предложениях 1 и 3.

Пусть λ — дифференцируемый функтор на банахово пространстве. Для определенности будем считать λ кова риантным функтором одного аргумента. Все, что буде сказано в оставшейся части параграфа, в равной мере от носится к случаю, когда функтор λ зависит от несколь ких переменных и контравариантен по одним из них и ковариантен по другим. В этом случае будет лишь нес колько более запутана терминология.

Для данного многообразия X возьмем $\lambda(T(X))$. Эт векторное расслоение на X, которое мы обозначим, ка и в гл. III, через $T_\lambda(X)$. Его сечения $\Gamma_\lambda(X)$ образую тензорные поля типа λ.

Рассмотрим векторное поле ξ на X и множество U открытое в X. Полю ξ можно поставить в соответстви (с потерей двух порядков дифференцируемости) отобра жение

$$\theta_\lambda(\xi) : \Gamma_\lambda(U) \to \Gamma_\lambda(U).$$

Это делается следующим образом.

Для данной точки $x \in U$ и локального пóтока α дл поля ξ в точке x мы построим при каждом достаточн малом t локальный изоморфизм α_t, определенный в неко торой окрестности точки x. Если η — тензорное поле ти па λ, то составное отображение $\eta\alpha_t$ принимает значени в $T_\lambda(X)$. Наконец, мы можем применить касательное ото бражение $T(\alpha_{-t}) = (\alpha_{-t})_*$ и перейти к слою расслоени $T_\lambda(X)$ над точкой x. Таким образом, получено отображе ние

$$F(t, x) = (\alpha_{-t})_* \circ \eta \circ \alpha_t(x),$$

которое локально в точке x является морфизмом. Возь мем его производную по t в точке $t = 0$. При локаль ном исследовании, используя тривиализацию расслоени $T(X)$ и $T_\lambda(X)$ в точке x, мы видим, что полученное ото бражение задает сечение расслоения $T_\lambda(U)$, т. е. тензор ное поле типа λ на U. Это и есть наше отображение $\theta_\lambda(\xi)$. Окончательно

$$\theta_\lambda(\xi)\eta = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\alpha_{-t})_* \circ \eta \circ \alpha_t.$$

Легко проверить, что действие векторного поля на функцию и скобка от векторных полей являются частными случаями общей операции θ_λ. В первом случае в качестве λ надо взять константный функтор $\mathbf{R}$, а во втором случае — тождественный функтор.

§ 2. Внешнее дифференцирование

Рассмотрим многообразие X. Функтор $L_a^r(\mathbf{E})$ («r-линейные непрерывные альтернированные формы») переносится на любые векторные расслоения, в частности на касательные. *Дифференциальной формой* степени r, или просто *r-формой*, называется сечение расслоения $L_a^r(T(X))$, т. е. тензорное поле типа L_a^r. Если X принадлежит классу C^p, то формы мы будем считать принадлежащими некоторому классу C^s, где $1 \leqslant s \leqslant p-1$. Пространство форм обозначим через $\Omega^r(X)$. Если ω является r-формой, то $\omega(x)$ — элемент из $L_a^r(T_x(X))$ и потому является r-линейным альтернированным отображением пространства $T_x(X)$ в $\mathbf{R}$. Мы будем иногда обозначать $\omega(x)$ через ω_x.

Предположим, что U открыто в банаховом пространстве $\mathbf{E}$. Тогда $L_a^r(T(U))$ равно $U \times L_a^r(\mathbf{E})$ и дифференциальная форма полностью описывается своей проекцией на второй сомножитель, которую мы назовем, следуя нашим соглашениям (гл. III, § 4), главной частью этой формы. Таким образом, назовем главной частью формы морфизм

$$\omega : U \to L_a^r(\mathbf{E}).$$

Пусть $\omega \in L_a^r(\mathbf{E})$ и $v_1, \ldots, v_r$ — элементы из $\mathbf{E}$. Значение $\omega(v_1, \ldots, v_r)$ будем обозначать также через

$$\langle \omega, v_1 \times \ldots \times v_r \rangle.$$

Точно так же, если $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — векторные поля на открытом множестве U и на U задана r-форма ω, то через

$$\langle \omega, \xi_1 \times \ldots \times \xi_r \rangle$$

обозначим отображение множества U в $\mathbf{R}$, принимающе в точке $x \in U$ значение

$$\langle \omega(x), \ \xi_1(x) \times \ldots \times \xi_r(x) \rangle .$$

Локальные рассуждения на таком открытом множеств U, что $T(U)$ тривиально, сразу показывают, что это от бражение—морфизм (т. е. функция на U) того же класс что и ω и ξ_i.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Рассмотрим точку x_0 многообрази X и r-форму ω на X. Если*

$$\langle \omega, \ \xi_1 \times \ldots \times \xi_r \rangle (x_0) = 0$$

для всех векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_r$, определенных в окр стности точки x_0, то $\omega(x_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из локальных рассуждений в терм нах главных частей мы видим, что если $\omega(x_0) \neq 0$, то н равно нулю значение ω на некотором наборе $(v_1, \ldots, v_r)$ и r векторов. Мы можем так выбрать векторные поля окрестности точки x_0, чтобы их главные части приним ли в x_0 значения, равные этим векторам. Теперь наш утверждение очевидно.

Удобно считать, что функция представляет собой ди ференциальную форму степени нуль. В этом парагра мы опишем внешнее дифференцирование r-форм; при эт удобно случай функций рассмотреть отдельно.

Пусть $f : X \to \mathbf{R}$ — функция. Для каждого $x \in X$ кас тельное отображение

$$T_x f : T_x(X) \to T_{f(x)}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

непрерывно и линейно. Локальное исследование главны частей сразу показывает, что совокупность этих отобр жений образует 1-форму, которую мы обозначим через d Далее, из определения действия векторного поля на фу кцию ясно, что df — единственная 1-форма, которая н каждом векторном поле ξ принимает значение

$$\langle df, \ \xi \rangle = \xi f.$$

Чтобы распространить определение операции d на фо мы высшей степени, мы напомним, что если

$$\omega : U \to L_a^r(\mathbf{E})$$

— главная часть r-формы на открытом в $\mathbf{E}$ множестве U, то для каждого $x \in U$ отображение

$$\omega'(x) : \mathbf{E} \to L_a^r(\mathbf{E})$$

непрерывно и линейно. Значит, если мы применим его к вектору v, то получим r-форму на $\mathbf{E}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если на X задана r-форма ω класса C^{p-1}, то на X существует единственная $(r+1)$-форма $d\omega$ класса C^{p-2}, которая для любого открытого в X множества U на векторных полях $\xi_0,\ldots,\xi_r$ на U принимает значение*[1]

$$\langle d\omega,\ \xi_0 \times \ldots \times \xi_r \rangle = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \xi_i \langle \omega,\ \xi_0 \times \ldots \times \hat{\xi}_i \times \ldots \times \xi_r \rangle +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \langle \omega,\ [\xi_i, \xi_j] \times \xi_0 \times \ldots \hat{\xi}_i \times \ldots \times \hat{\xi}_j \times \ldots \times \xi_r \rangle .$$

Если, кроме того, U открыто в $\mathbf{E}$ и ω, $\xi_0,\ldots,\xi_r$ являются главными частями соответственно формы и векторных полей, то значение написанного выше выражения в точке x равно

$$\sum (-1)^i \langle \omega'(x), \xi_i(x),\ \xi_0(x) \times \ldots \times \widehat{\xi_i(x)} \times \ldots \times \xi_r(x) \rangle .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, замечаем, что локальная формула определяет дифференциальную форму. Если мы сможем доказать, что она определяет тот же объект, что и первая формула, которая записана инвариантно, то ее можно будет рассматривать глобально и предложение будет доказано. Обозначим через S_1 и S_2 две суммы, из которых состоит инвариантное выражение, а через L — локальное выражение. Нам надо показать, что $S_1 + S_2 = L$. Рассмотрим S_1 и применим определение локального действия поля ξ_i на функцию в точке x, введенное в предложении 1. Получаем

$$S_1 = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \langle \omega,\ \xi_0 \times \ldots \times \hat{\xi}_i \times \ldots \times \xi_r \rangle'(x)\, \xi_i(x).$$

Производную, по-видимому, лучше всего вычислять непосредственно, пользуясь ее определением. Применяя оп-

---

[1]) Здесь значок $\frown$ над множителем означает, что этот множитель пропускается. — *Прим. ред.*

ределение и отбрасывая члены второго порядка малости мы получим, что S_1 равно

$$\sum(-1)^i \langle \omega'(x)\xi_i(x), \xi_0(x)\times\ldots\times\widehat{\xi_i(x)}\times\ldots\times\xi_r(x)\rangle +$$
$$+\sum_i\sum_{j<i}(-1)^i \langle \omega(x),\ \xi_0(x)\times\ldots\times\xi_j'(x)\widehat{\xi_i(x)}\times\ldots\times\xi_i(x)\times\ldots$$
$$\ldots\times\xi_r(x)\rangle + \sum_i\sum_{j>i}(-1)^i \langle \omega(x),\ \xi_0(x)\times\ldots\times\widehat{\xi_i(x)}\times\ldots\times$$
$$\times\xi_j'(x)\xi_i(x)\times\ldots\times\xi_r(x)\rangle$$

Первая из этих трех сумм совпадает с локальной фо[р]мулой L. Что же касается остальных двух, то, меняя [в] последней сумме местами индексы i и j и переставля[я] член $\xi_j'(x)\xi_i(x)$ на первое место, мы видим, что они вме[с]те дают значение выражения

$$-\sum_i\sum_{j<i}(-1)^{i+j} \langle \omega, (\xi_j'\xi_i - \xi_i'\xi_j)\times\xi_0\times\ldots\times\widehat{\xi_j}\times\ldots\times\widehat{\xi_i}\times\ldots\times\xi_r$$

в точке x. Из предложения 3 следует, что эта сум[ма] совпадает с $-S_2$. Этим доказано, что $S_1 + S_2 = L$, как требовалось.

Мы назовем $d\omega$ *внешней производной* формы ω.

Пусть ω, ψ — непрерывные полилинейные формы ст[е]пени соответственно r и s на банаховом пространстве [...] В полилинейной алгебре определяют *внешнее произвед[е]ние* этих форм как непрерывную $(r+s)$-линейную ал[ь]тернированную форму, задаваемую равенством

$$(\omega\wedge\psi)(v_1, \ldots, v_{r+s}) =$$
$$= \sum\varepsilon(\sigma)\,\omega(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma r})\,\psi(v_{\sigma(r+1)}, \ldots, v_{\sigma(r+s)})$$

где суммирование ведется по всем таким перестановк[ам] σ чисел $(1, \ldots, r+s)$, что $\sigma 1 < \ldots < \sigma r$ и $\sigma(r+1) < \ldots < \sigma(r+s)$. Это определение сразу переносится на дифференциальн[ые] формы на многообразии, если его рассматривать как в[ы]ражение, задающее значение формы $\omega\wedge\psi$ в точке [...] В этом случае v_i — это элементы касательного про[ст]ранства T_x, и локальное исследование главных част[ей] сразу показывает, что так определенное внешнее про[из-]

ведение задает морфизм многообразия X в $L_a^{r+s}(T(X))$ и поэтому является дифференциальной формой.

Если считать функцию на X дифференциальной формой степени нуль, то обычное произведение функции на дифференциальную форму можно рассматривать как внешнее произведение. Таким образом, для функции f и дифференциальной формы ω

$$f\omega = f \wedge \omega.$$

(Форма в левой части равенства принимает на x значение $f(x)\,\omega(x)$.)

Следующее предложение дает нам свойства дифференциальных форм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть* ω, ψ — *дифференциальные формы на* X. *Тогда*

1) $d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^{\deg(\omega)}\,\omega \wedge d\psi$,

2) $dd\omega = 0$ (*при достаточной гладкости, скажем* $p \geqslant 4$).

Доказательство является простым формальным упражнением на применение локальной формулы для главной части внешней производной. Мы оставляем его читателю.

В заключение укажем несколько свойств обратного образа форм. Как мы видели в конце § 4 гл. III, если задан морфизм $f\colon X \to Y$ и дифференциальная форма ω на Y, то на X определена форма $f^*(\omega)$, которая задается в точке $x \in X$ формулой

$$f^*(\omega)_x = \omega_{f(x)} \circ (T_x f)^r,$$

где через r обозначена степень ω. Это верно в случае, когда $r \geqslant 1$. В случае же 0-форм, т. е. функций, обратный образ — это просто композиция функций. Другими словами, если φ — функция на Y, рассматриваемая как форма степени нуль, то $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Ясно, что обратный образ линейно зависит от формы. Доказательства следующих свойств тривиальны, и мы оставляем их читателю.

8 Заказ № 519

1. Если ω, ψ — две дифференциальные формы на Y, то

$$f^*(\omega \wedge \psi) = f^*(\omega) \wedge f^*(\psi).$$

2. Если ω — дифференциальная форма на Y, то

$$df^*(\omega) = f^*(d\omega).$$

3. Если $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — морфизмы и ω — дифференциальная форма на Z, то

$$f^*(g^*(\omega)) = (g \circ f)^*(\omega).$$

Наконец, в случае форм степени нуль имеем

4. Если $f: X \to Y$ — морфизм, а φ — функция на Y, то

$$d(\varphi \circ f) = f^*(d\varphi),$$

и значение этой 1-формы в точке $x \in X$ задается формулой

$$T_{f(x)} \varphi \circ T_x f = (d\varphi)_x \circ T_x f.$$

§ 3. Каноническая 2-форма

Рассмотрим функтор $L(\mathbf{E})$ (непрерывные линейные формы). Если $E \to X$ — линейное расслоение, то $L(E)$ назовем *дуальным расслоением* и будем обозначать его через E^*. Для каждого $x \in X$ слоем дуального расслоения будет $L(E_x)$.

Дуальное расслоение для касательного расслоения $E = T(X)$ обозначается $T^*(X)$ и называется *кокасательным расслоением*. Его элементы называются *кокасательными векторами*. Слой расслоения $T^*(X)$ над точкой x обозначается через $T^*_x(X)$. Для каждого $x \in X$ мы имеем отображение

$$T^*_x \times T_x \to \mathbf{R},$$

задаваемое формулой

$$\langle v, u \rangle$$

для $v \in T^*_x$ и $u \in T_x$ (линейной форме v и вектору u сопоставлено значение линейной формы v на u).

Покажем, как построить каноническую 1-форму на кокасательном расслоении $T^*(X)$. Для каждого v нам нужно определить 1-форму на $T_v(T^*(X))$.

Пусть $\pi : T^*(X) \to X$ — каноническое проектирование. Тогда к элементу $z \in T_v(T^*(X))$ можно применить индуцированное касательное отображение

$$T\pi = \pi_* : T(T^*(X)) \to T(X),$$

и легко видеть, что если v лежит в $T^*_x(X)$, то $\pi_* z$ лежит в $T_x(X)$. Поэтому можно определить линейное непрерывное отображение

$$\omega_v : T_v(T^*(X)) \to \mathbf{R}$$

формулой

$$\langle v, \pi_* z \rangle = \omega_v(z).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Это отображение определяет 1-форму на $T^*(X)$. Пусть $X = U$ открыто в* $\mathbf{E}$ *и*

$$T^*(U) = U \times \mathbf{E}^*, \quad T(T^*(U)) = (U \times \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*).$$

Если $(x, v) \in U \times \mathbf{E}^*$ и $(y, w) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$, то главная часть $\omega_{(x,v)}$ задается равенством

$$\langle \omega_{(x,v)}, (y, w) \rangle = \langle v, y \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что отображение $\pi : U \times \mathbf{E}^* \to U$ линейно, а потому его производная не зависит от точки и равна проектированию на первый множитель. Наша формула теперь немедленно следует из определения. Локальная формула показывает, что ω действительно является 1-формой локально, а значит, и глобально, поскольку ее можно записать в инвариантном виде.

Наша 1-форма называется *канонической 1-формой на кокасательном расслоении*. Ее внешняя производная $d\omega = \Omega$ называется *канонической 2-формой*. Следующее предложение локально описывает ее главную часть.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Рассмотрим множество U, открытое в $\mathbf{E}$, и главную часть Ω канонической 2-формы на $T(T^*(U))$. Если $(x, v) \in U \times \mathbf{E}^*$, а (y_1, w_1) и (y_2, w_2) — два элемента из $\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*$, то*

$$\langle \Omega_{(x,v)}, (y_1, w_1) \times (y_2, w_2) \rangle = \langle w_1, y_2 \rangle - \langle w_2, y_1 \rangle .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что форма ω линейна и поэтому ω' — постоянное отображение. Применим локальную формулу внешнего дифференцирования из предложения 5 настоящего параграфа и сразу получим наше утверждение.

§ 4. Лемма Пуанкаре

Если ω — такая форма, что $d\omega = 0$, то ее обычно называют *замкнутой*. Если существует такая форма ψ, что $\omega = d\psi$, то форму ω называют *точной*. Мы докажем, что локально всякая замкнутая форма точна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Рассмотрим в $\mathbf{E}$ открытый шар U и форму ω степени, не меньшей 1 на U. Если $d\omega = 0$, то существует такая дифференциальная форма ψ, что $d\psi = \omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы построим такое отображение k пространства r-форм в пространство $(r-1)$-форм $(r \geqslant 1)$, что

$$dk + kd = \mathrm{id}.$$

Из этого соотношения следует, что если $d\omega = 0$, то

$$dk\omega = \omega$$

и предложение будет доказано. Мы можем считать, что центр нашего шара находится в точке нуль. Для r-формы ω определим $k\omega$ формулой

$$\langle (k\omega)_x, v_1 \times \ldots \times v_{r-1} \rangle = \int_0^1 t^{r-1} \langle \omega(tx), x \times v_1 \times \ldots \times v_{r-1} \rangle \, dt.$$

Можно считать, что мы имеем дело с главными частями и что $v_i \in E$. Мы имеем

$$\langle (dk\omega)_x, v_1 \times \ldots \times v_r \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \langle (k\omega)'(x)\, v_i,\ v_1 \times \ldots \times \hat{v}_i \times \ldots \times v_r \rangle =$$

$$= \sum (-1)^{i+1} \int_0^1 t^{r-1} \langle \omega(tx),\ v_i \times v_1 \times \ldots \times \hat{v}_i \times \ldots \times v_r \rangle\, dt +$$

$$+ \sum (-1)^{i+1} \int_0^1 t^r \langle \omega'(tx)\, v_i, x \times v_1 \times \ldots \times \hat{v}_i \times \ldots \times v_r \rangle\, dt.$$

С другой стороны, мы имеем

$$\langle (kd\omega)(x), v_1 \times \ldots \times v_r \rangle = \int_0^1 t^r \langle d\omega(tx), x \times v_1 \times \ldots \times v_r \rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 t^r \langle \omega'(tx)\, x,\ v_1 \times \ldots \times v_r \rangle\, dt +$$

$$+ \sum (-1)^i \int_0^1 t^r \langle \omega'(tx)\, v_i, x \times v_1 \times \ldots \times \hat{v}_i \times \ldots \times v_r \rangle\, dt.$$

Заметим теперь, что вторые члены в выражениях для $kd\omega$ и $dk\omega$ отличаются лишь знаком и сокращаются при суммировании. Что же касается первых членов, то если мы в выражении для $dk\omega$ переместим v_i на i-е место, то получим добавочный коэффициент $(-1)^{i-1}$.

Таким образом,

$$dk\omega + kd\omega = \int_0^1 r t^{r-1} \langle \omega(tx), v_1 \times \ldots \times v_r \rangle\, dt +$$

$$+ \int_0^1 t^r \langle \omega'(tx)\, x,\ v_1 \times \ldots \times v_r \rangle\, dt.$$

Под знаком интеграла стоит производная по t от выражения

$$\langle t^r \omega(tx),\ v_1 \times \ldots \times v_r \rangle .$$

Взяв разность значений этого выражения при $t = 1$ и $t = 0$, получим

$$\langle \omega(x),\ v_1 \times \ldots \times v_r \rangle ,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что в качестве множества U можно было взять не только открытый шар, но и звездообразное множество.

Глава VI

ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

Овладев языком векторных полей, вернемся к дифференциальным уравнениям. Мы дадим обобщение локальной теореме существования, известное под названием теоремы Фробениуса. Доказательство будет сведено к стандартному случаю, изученному в гл. IV. Теорема будет сформулирована в § 1. Читатель заметит, что для понимания доказательства необходимо знать только определение скобки от двух векторных полей. Удобно также привести формулировки в терминах дифференциальных форм, для понимания которых необходимо знать лишь локальное определение внешнего дифференцирования. Однако мы с самого начала доказываем эквивалентность условий на дифференциальные формы и условий на векторные поля и в дальнейшем не возвращаемся к этому вопросу.

Мы в основном будем следовать доказательству, приведенному Дьедонне в «Основах современного анализа», учитывая, что мы свободно можем пользоваться геометрическим языком векторных расслоений, который легче воспринимается.

Для удобства в § 2 приведены утверждения относительно теорем существования для дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Они немедленно следуют из результатов гл. IV, но до сих пор не были нам нужны. Доказательство собственно теоремы Фробениуса дано в § 3.

Настоящая глава логически не связана со следующей главой о римановых метриках. В этой главе мы не даем приложений, но в более подробных руководствах по дифференциальной геометрии читатель сразу же встречается с ними. Например, теоремой Фробениуса естественно воспользоваться при доказательстве того, что подгруппа группы Ли соответствует подалгебре алгебры Ли.

§ 1. Формулировка теоремы

Рассмотрим многообразие X класса C^p ($p \geqslant 2$) и подрасслоение его касательного расслоения

$$0 \to E \xrightarrow{j} T(X).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что j — включение. Мы утверждаем, что следующие два утверждения о подрасслоениях эквивалентны.

ФР 1. Для каждой точки $z \in X$ и векторных полей ξ и η в z (т. е. заданных в некоторой окрестности точки z), лежащих в E (т. е. таких, что образ любой точки из X при отображениях ξ и η лежит в E), скобка $[\xi, \eta]$ также лежит в E.

ФР 2. Для каждой точки $z \in X$ и заданной в z дифференциальной 1-формы ω, обращающейся в нуль на E, форма $d\omega$ обращается в нуль на $\xi \times \eta$ для любых двух векторных полей ξ и η в z, лежащих в E.

Доказательство тривиально. Действительно, пусть выполнено условие **ФР 1**, и ω обращается в нуль на E. Тогда

$$\langle d\omega, \xi \times \eta \rangle = -\langle \omega, [\xi, \eta] \rangle - \eta \langle \omega, \xi \rangle + \xi \langle \omega, \eta \rangle.$$

По предположению, правая часть в точке z равна нулю. Наоборот, пусть выполнено условие **ФР 2**. Рассмотрим векторные поля ξ и η в z, лежащие в E. Если $[\xi, \eta](z)$ не лежит в E, то из локального представления в виде прямого произведения и теоремы Хана — Банаха сразу видим, что существует форма ω степени 1, определенная в окрестности точки z, которая равна нулю на E_z и не равна нулю на $[\xi, \eta](z)$, что противоречит написанной выше формуле.

Мы дадим сейчас третье условие, эквивалентное первым двум, и больше нигде не будем ссылаться на условие **ФР 2**. Заметим только, что, как легко доказать, если в конечномерном случае форма ω удовлетворяет условию **ФР 2**, то $d\omega$ можно локально в окрестности каждой точки представить в виде конечной суммы

$$d\omega = \sum \gamma_i \wedge \omega_i,$$

где γ_i и ω_i имеют степень 1 и все ω_i обращаются в нуль на E. Оставим это читателю в качестве упражнения.

Прежде чем формулировать третье условие, посмотрим, какая ситуация является типичной. Предположим, что наши рассуждения локальны и мы имеем прямое произведение $U \times V$ открытых подмножеств банаховых пространств $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$. Тогда касательное расслоение $T(U \times V)$ можно естественным образом записать в виде прямой суммы. Действительно, для каждой точки $(x, y) \in U \times V$ мы имеем

$$T_{(x, y)}(U \times V) = T_x(U) \times T_y(V).$$

Легко видеть, что совокупность слоев $T_x(U) \times 0$ (содержащихся в $T_x(U) \times T_y(V)$) образует подрасслоение, которое мы обозначим через $T_1(U \times V)$ и назовем *первым сомножителем* касательного расслоения. Аналогично определяется $T_2(U \times V)$, и тогда

$$T(U \times V) = T_1(U \times V) \oplus T_2(U \times V).$$

Мы скажем, что подрасслоение $j: E \to T(X)$ расслоения $T(X)$ *интегрируемо* в точке $z \in X$, если существуют открытая окрестность W точки z и такой изоморфизм

$$\varphi: U \times V \to W,$$

что композицию отображений

$$T_1(U \times V) \xrightarrow{\text{включ.}} T(U \times V) \xrightarrow{T\varphi} T(W)$$

индуцирует ВР-изоморфизм (над φ) расслоения $T_1(U \times V)$ на $E \mid W$. Мы скажем, что E *интегрируемо*, если оно интегрируемо в каждой точке. Обозначая через φ_y отображение множества U в W, задаваемое формулой $\varphi_y(x) = \varphi(x, y)$, мы можем выразить условие интегрируемости, сказав, что $T_x\varphi_y$ должно индуцировать для всех $(x, y) \in U \times V$ топлинейный изоморфизм пространства $\mathbf{E}$ на $E_{\varphi(x, y)}$. Заметим, что в терминах нашей локальной структуры прямого произведения $T_x\varphi_y$ есть не что иное, как частная производная $D_1\varphi(x, y)$.

Читатель легко проверит, что из интегрируемости подрасслоения касательного расслоения следует условие **ФР 1**. (Провести рассмотрение локально и применить локальное определение скобки.) Теорема Фробениуса утверждает обратное.

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим многообразие X класса C^p ($p \geqslant 2$) и подрасслоение его касательного расслоения $j: E \to T(X)$. Подрасслоение E удовлетворяет условию* **ФР 1** *тогда и только тогда, когда оно интегрируемо.*

Прежде чем доказывать теорему, проанализируем ее более подробно и сформулируем в терминах главных частей.

Из определения подрасслоения (при помощи локального разложения в произведение) нам известно, что для данного подрасслоения расслоения $T(X)$ и точки из X можно найти такую окрестность $U \times V$, что наша точка будет иметь координаты (x_0, y_0), а подрасслоение можно записать в виде точной последовательности

$$0 \to U \times V \times \mathbf{E} \xrightarrow{\tilde{f}} U \times V \times \mathbf{E} \times \mathbf{F},$$

в которой отображение

$$f(x_0, y_0): \mathbf{E} \to \mathbf{E} \times \mathbf{F}$$

есть каноническое вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E} \times 0$. Для точки $(x, y) \in U \times V$ отображение $f(x, y)$ имеет две компоненты $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, отображающие соответственно в $\mathbf{E}$ и в $\mathbf{F}$. Применив, если нужно, подходящий ВР-автоморфизм, мы можем без ограничения общности считать, что $f_1(x, y) = \mathrm{id}$. Теперь можно писать $f(x, y) = f_2(x, y)$. Тогда отображение

$$f: U \times V \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

является морфизмом (класса C^{p-1}), полностью описывающим наше подрасслоение.

Дадим интерпретацию условия **ФР 1** в этих терминах. Пусть

$$\xi: U \times V \to \mathbf{E} \times \mathbf{F}$$

— главная часть векторного поля на $U \times V$. Через ξ_1 и ξ_2 обозначим ее проекции соответственно на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$. Векторное поле ξ тогда и только тогда лежит в образе отображения $\tilde{f}$, когда

$$\xi_2(x, y) = f(x, y)\,\xi_1(x, y)$$

для всех $(x, y) \in U \times V$, другими словами, когда найдется такой морфизм (класса C^{p-1}),

$$\xi_1 : U \times V \to \mathbf{E},$$

что ξ можно представить в виде

$$\xi(x, y) = (\xi_1(x, y), f(x, y)\,\xi_1(x, y)).$$

Символически это условие записывается в виде

$$\xi = (\xi_1, f\xi_1). \tag{1}$$

Если ξ, η — главные части векторных полей на $U \times V$, то читатель легко проверит, пользуясь локальным определением скобки (предложение 3 гл. V, § 1), что $[\xi, \eta]$ тогда и только тогда лежит в образе отображения $\tilde{f}$, когда

$$Df(x, y) \cdot \xi(x, y) \cdot \eta_1(x, y) = Df(x, y) \cdot \eta(x, y) \cdot \xi_1(x, y),$$

или символически

$$Df \cdot \xi \cdot \eta_1 = Df \cdot \eta \cdot \xi_1. \tag{2}$$

Итак, мы выразили все предположения теоремы 1 в локальных терминах, и теперь суть доказательства состоит в установлении следующего результата.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть U, V — открытые подмножества в банаховых пространствах* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{F}$ *соответственно, и*

$$f : U \times V \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

— *C^r-морфизм* $(r \geqslant 1)$. *Предположим, что для двух любых морфизмов*

$$\xi_1, \eta_1 : U \times V \to \mathbf{E}$$

морфизмы

$$\xi = (\xi_1, f \cdot \xi_1) \quad и \quad \eta = (\eta_1, f \cdot \eta_1)$$

удовлетворяют условию (2). *Тогда существуют такие открытые окрестности $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ соответственно точек $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ и единственный морфизм $\alpha : U_0 \times V_0 \to V$, что*

$$D_1\alpha(x, y) = f(x, \alpha(x, y))$$

и $\alpha(x_0, y) = y$ для всех $(x, y) \in U_0 \times V_0$.

Теорему 2 мы докажем в § 3, а сейчас покажем, как из нее следует теорема 1.

Обозначим через α_y отображение $\alpha_y(x) = \alpha(x, y)$, рассматриваемое как отображение множества U_0 в V. Тогда наше дифференциальное соотношение можно записать в виде

$$D\alpha_y(x) = f(x, \alpha_y(x)).$$

Пусть

$$\varphi : U_0 \times V_0 \to U \times V$$

— отображение, задаваемое формулой $\varphi(x, y) = (x, \alpha_y(x))$. Очевидно, что $D\varphi(x_0, y_0)$ является топлинейным изоморфизмом, так что φ — локальный изоморфизм в точке (x_0, y_0). Кроме того, для $(u, v) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ мы имеем

$$D_1\varphi(x, y) \cdot (u, v) = (u, D\alpha_y(x) \cdot u) = (u, f(x, \alpha_y(x)) \cdot u),$$

что доказывает интегрируемость нашего подрасслоения.

§ 2. Дифференциальные уравнения, зависящие от параметра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим открытые подмножества U и V соответственно в банаховых пространствах $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$. Пусть J — содержащий нуль открытый интервал в $\mathbf{R}$ и*

$$g : J \times U \times V \to \mathbf{F}$$

— морфизм класса C^r $(r \geqslant 1)$. Тогда существуют такие открытые шары $J_0 \subset J$, $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset V$ с центрами соответственно в точках 0, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ и единственный такой морфизм класса C^r

$$\beta : J_0 \times U_0 \times V_0 \to V,$$

что выполнены условия $\beta(0, x, y) = y$ и

$$D_1\beta(t, x, y) = g(t, x, \beta(t, x, y))$$

для всех $(t, x, y) \in J_0 \times U_0 \times V_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы существования и единственности локального потока, если рассматривать обычное векторное поле (вернее, его главную часть) на $U \times V$

$$G : J \times U \times V \to \mathbf{E} \times \mathbf{F},$$

задаваемое условием $G(t, x, y) = (0, g(t, x, y))$. Если $B(t, x, y)$ — локальный поток для G, то в качестве

$\beta(t, x, y)$ можно взять проектирование потока $B(t, x, y)$ на второй сомножитель. Читатель легко проверит, что $\beta(t, x, y)$ удовлетворяет требуемым условиям. Единственность такого β очевидна.

Зафиксируем начальное условие y и положим

$$\beta(t, x) = \beta(t, x, y).$$

Из теоремы 1, § 1 гл. IV мы получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет производная от β по второму аргументу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть обозначения те же, что и в предложении* 1, y *фиксировано и* $\beta(t, x) = \beta(t, x, y)$. *Тогда для каждого* $v \in \mathbf{E}$ *отображение* $D_2\beta(t, x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$D_1 D_2 \beta(t, x) \cdot v = D_2 g(t, x, \beta(t, x)) \cdot v + \\ + D_2 g(t, x, \beta(t, x)) \cdot D_2 \beta(t, x) \cdot v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим то же векторное поле, что и в предложении 1, и применим к нему рассуждения из конца доказательства теоремы 1 § 1 гл. IV. Детали мы оставляем читателю.

§ 3. Доказательство теоремы

Для того чтобы применить предложение 1 к доказательству теоремы 2, мы предположим, что наш морфизм g имеет вид

$$g(t, z, y) = f(x_0 + tz, y) \cdot z,$$

причем z лежит в малом шаре $\mathbf{E}_0$ с центром в нуле в пространстве $\mathbf{E}$, а $y \in V$. Сделав, если нужно, параллельный перенос, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Тогда из предложения 1 мы получаем отображение

$$\beta: J_0 \times \mathbf{E}_0 \times V_0 \to V,$$

удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$D_1 \beta(t, z, y) = f(tz, \beta(t, z, y)) \cdot z$$

с начальным условием $\beta(0, z, y) = y$ для всех $z \in \mathbf{E}_0$. Делая замену переменных $t = as$ и $z = a^{-1}x$, где a — малое положительное число, можно считать, что J_0 содержит 1, если взять E_0 достаточно малым. Зафиксируем теперь y и будем писать вместо $\beta(t, z, y)$ просто $\beta(t, z)$. Тогда наше дифференциальное уравнение запишется в виде

$$D_1\beta(t,z) = f(tz, \beta(t,z)) \cdot z. \tag{3}$$

Если бы мы знали, что морфизм α из утверждения теоремы 2 существует, то, положив $\beta(t, z) = \alpha(x_0 + tz)$, мы получили бы решение нашего дифференциального уравнения. Отсюда следует единственность α. Для доказательства существования рассмотрим β и докажем, что отображение

$$\alpha(x) = \beta(1,x)$$

обладает требуемыми свойствами при достаточно малом $|x|$. Для этого достаточно доказать, что

$$D_2\beta(t,z) = tf(tz, \beta(t,z)), \tag{4}$$

поскольку отсюда следуют равенства

$$D\alpha(x) = D_2\beta(1,x) = f(x, \beta(1, x)) = f(x, \alpha(x)),$$

а это в точности то, что нам нужно.

Из предложения 2 для любого вектора $v \in \mathbf{E}$ получаем

$$D_1D_2\beta(t,z) \cdot v = tD_1f(tz, \beta(t,z)) \cdot v \cdot z +$$
$$+ D_2f(tz, \beta(t,z)) \cdot D_2\beta(t,z) \cdot v \cdot z + f(tz, \beta(t,x)) \cdot v.$$

Положим теперь $k(t) = D_2\beta(t,z) \cdot v - tf(tz, \beta(t,z)) \cdot v$. Тогда сразу видим, что $k(0) = 0$. Мы утверждаем, что

$$Dk(t) = D_2f(tz, \beta(t,z)) \cdot k(t) \cdot z. \tag{5}$$

Воспользуемся основным предположением нашей теоремы, а именно соотношением (2), в котором в качестве ξ_1 и η_1 возьмем соответственно векторные поля v и z. Вычислим Df, пользуясь формулой частных производных и применяя ее к нашему специальному случаю. Тогда немедленно получим (5). Функция $k(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (5), а из следствия 2 предложения 2, § 1 гл. IV мы знаем, что единственным его решением является нуль. Таким образом, $k(t) = 0$, и равенство (4) доказано. Доказана и теорема.

Глава VII

РИМАНОВЫ МЕТРИКИ

При изучении векторных расслоений мы не вводили в слои структур, отличных от структуры топологического векторного пространства (той же категории, что и применялась для построения многообразия). Если наложить более сильные условия, введя метрическую структуру, то мы придем к рассмотрению гильбертовых расслоений, слоем в которых является гильбертово пространство.

Кроме определений и основных свойств, мы рассмотрим две специальные темы. Во-первых, мы дополним теоремы о единственности трубчатой окрестности, показав, что если задана риманова метрика, то трубчатую окрестность можно сделать метрической. Во-вторых, мы покажем, как риманова метрика естественным образом порождает пульверизацию, и таким образом придем к понятию геодезической. Фундаментальная 2-форма будет использована для отождествления векторных полей с 1-формами на касательном расслоении, которое с помощью римановой метрики отождествляется с кокасательным расслоением.

Мы всюду предполагаем наши многообразия хаусдорфовыми и столько раз дифференцируемыми, сколько это необходимо для того, чтобы все наши утверждения имели смысл. (Например, когда мы будем рассматривать пульверизации, мы будем считать, что $p \geqslant 3$.)

По необходимости мы будем пользоваться обычной спектральной теоремой для (ограниченных) симметрических операторов. Ее доказательство, не требующее никаких дополнительных сведений, будет дано в приложении.

§ 1. Определение и функториальность

Пусть $\mathbf{E}$ — гильбертово пространство, т. е. топологическое векторное пространство, топология которого задается нормой, ассоциированной с симметричной положительно определенной билинейной формой. Все необходимые для дальнейшего факты, касающиеся гильбертовых пространств, можно найти в приложении.

Мы рассмотрим $L_s^2(\mathbf{E})$ — множество всех симметричных непрерывных билинейных форм

$$\lambda : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}.$$

Если x — фиксированный элемент из $\mathbf{E}$, то можно задать непрерывную линейную форму $\lambda_x(y) = \lambda(x, y)$ как скалярное произведение с элементом из $\mathbf{E}$, который мы обозначим через Ax, где A — непрерывное линейное отображение пространства $\mathbf{E}$ в себя. Из симметричности λ следует, что симметрично A, т. е.

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

для $x, y \in \mathbf{E}$. Наоборот, если дано симметричное непрерывное линейное отображение $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, мы можем определить по написанной формуле непрерывную билинейную форму на $\mathbf{E}$. Таким образом, $L_s^2(\mathbf{E})$ находится в биективном соответствии с множеством таких операторов и является банаховым пространством с обычной операторной нормой.

Подмножество в $L_s^2(\mathbf{E})$, состоящее из тех форм, которые соответствуют положительно определенным операторам (по определению, таким, что $A \geqslant \varepsilon$ для некоторого ε), назовем *римановым* подмножеством и обозначим через $\mathrm{Ri}(\mathbf{E})$. Формы λ из $\mathrm{Ri}(\mathbf{E})$ называются положительно определенными. Оператор A, ассоциированный с данной формой, обратим, поскольку его спектр не содержит нуля и непрерывная функция $1/t$ обратима на спектре.

С точки зрения операций на векторных расслоениях (гл. III, § 4) мы можем применить функтор L_s^2 к любому расслоению, в слои которого можно ввести гильбертову структуру. Если $\pi : E \to X$ — такое расслоение, то мы можем образовать $L_s^2(\pi)$. В этом случае *метрику* на π определим как сечение расслоения $L_s^2(\pi)$. Мы знаем, что слоем расслоения $L_s^2(\pi)$ является $L_s^2(\pi_x)$, которое содержит $\mathrm{Ri}(\pi_x)$. Метрика g называется *римановой метрикой*, если $g(x)$ содержится в $\mathrm{Ri}(\pi_x)$ для всех $x \in X$, иными словами, если $g(x)$ — билинейная симметричная положительно определенная форма на π_x.

Отметим, что сечения расслоения $L_s^2(\pi)$ образуют векторное пространство, чего нельзя сказать о римановых метриках. Они образуют выпуклый конус. Действительно, если числа a, $b > 0$ и g_1, g_2 — римановы метрики, то $ag_1 + bg_2$ — тоже риманова метрика.

Предположим, что на открытом подмножестве U многообразия X задана тривиализация расслоения π

$$\tau : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{E}.$$

Мы можем перенести заданную риманову метрику g (или, вернее, ее ограничение на $\pi^{-1}(U)$) на $U \times \mathbf{E}$. В локальном представлении это означает, что для каждого $x \in U$ мы можем отождествить $g(x)$ с симметричным положительно определенным оператором A_x, задающим метрику. Кроме того, отображение

$$x \to A_x$$

множества U в банахово пространство $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ есть морфизм.

Что касается обозначений, то мы будем иногда писать g_x вместо $g(x)$. Таким образом, если v, w — векторы из E_x, то $g_x(v, w)$ — число, которое мы будем писать вместо $g(x)(v, w)$. Мы будем писать также $\langle v, w \rangle_x$, если метрика g фиксирована раз и навсегда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть многообразие X допускает разбиение единицы, и в слои векторного расслоения $\pi : E \to X$ можно ввести структуру гильбертова пространства. Тогда π допускает риманову метрику.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем такое разбиение единицы $\{U_i, \varphi_i\}$, что $\pi \mid U_i$ тривиально, т. е. определена тривиализация

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{E}.$$

(Мы предполагаем, что имеем дело со связной компонентой многообразия X, так что все слои топлинейно изоморфны фиксированному гильбертову пространству $\mathbf{E}$.) В этом случае можно тривиальным образом определить на $U_i \times \mathbf{E}$ риманову метрику. Перенося ее на $\pi^{-1}(U_i)$, получаем метрику g_i на $\pi | U_i$. Сумма $g = \sum \varphi_i g_i$ является римановой метрикой на π.

Исследуем функториальность метрик.

Рассмотрим ВР-морфизм

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

векторных расслоений E' и E соответственно над X и Y, причем слои предполагаются допускающими гильбертову структуру. Пусть g — метрика на π, так что для каждого $y \in Y$ мы имеем непрерывное билинейное симметричное отображение

$$g(y): E_y \times E_y \to \mathbf{R}.$$

Тогда композиция отображений

$$E'_x \times E'_x \to E_y \times E_y \to \mathbf{R},$$

где $y = f(x)$ есть метрика на E'_x. Легко проверяется, что она порождает метрику на векторном расслоении π', которую мы обозначим через $f^*(g)$. Векторное пространство метрик на π обозначим через $\mathrm{Met}(\pi)$, а множество римановых метрик—через $\mathrm{Ri}(\pi)$. Тогда f индуцирует отображение

$$\mathrm{Met}(f) = f^*: \mathrm{Met}(\pi) \to \mathrm{Met}(\pi').$$

Кроме того, если отображение f_x для всех $x \in X$ инъективно и разлагает E_x, а метрика g — риманова, то, очевидно, метрика $f^*(g)$ также риманова и f^* можно рассматривать как отображение $\mathrm{Ri}(\pi) \to \mathrm{Ri}(\pi')$.

Рассмотрим многообразие X, моделью для которого является гильбертово пространство, и его касательное расслоение $T(X)$. Допуская вольность речи, мы будем называть метрику на $T(X)$ метрикой на X и писать $\mathrm{Met}(X)$ вместо $\mathrm{Met}(T(X))$ и $\mathrm{Ri}(X)$ вместо $\mathrm{Ri}(T(X))$.

Пусть задана иммерсия $f: X \to Y$. Тогда для каждого $x \in X$ линейное отображение

$$T_x(f): T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$$

инъективно и разлагает $T_{f(x)}(Y)$. Таким образом, мы получаем контравариантное отображение

$$f^* : \mathrm{Ri}(Y) \to \mathrm{Ri}(X).$$

Это означает, что каждая риманова метрика на Y индуцирует риманову метрику на X (и, конечно, каждая не обязательно риманова метрика на Y индуцирует метрику на X).

§ 2. Группа Гильберта

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{E}$. Группа его топлинейных автоморфизмов $\mathrm{Laut}(\mathbf{E})$ содержит группу $\mathrm{Hilb}(\mathbf{E})$ гильбертовых автоморфизмов, т. е. автоморфизмов, сохраняющих скалярное произведение

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$$

для всех $v, w \in \mathbf{E}$. Заметим, что A тогда и только тогда является гильбертовым автоморфизмом, когда $A^* A = I$.

Как обычно, мы будем говорить, что линейное непрерывное отображение $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *симметрично*, если $A^* = A$, и *кососимметрично*, если $A^* = -A$. Мы имеем разложение банахова пространства $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ в прямую сумму двух замкнутых подпространств, состоящих соответственно из симметрических и кососимметрических операторов

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*).$$

Эти подпространства обозначим соответственно через $\mathrm{Sym}(\mathbf{E})$ и $\mathrm{Sk}(\mathbf{E})$. Слово *оператор* всегда будет означать непрерывное линейное отображение пространства $\mathbf{E}$ в себя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для всех операторов A ряд*

$$\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

сходится. Если A коммутирует с B, то

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B.$$

Для всех достаточно близких к I операторов сходится ряд

$$\log A = \frac{A-I}{1} - \frac{(A-I)^2}{2} + \dots .$$

Если A коммутирует с B, то

$$\log AB = \log A + \log B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится обычным образом.

В качестве упражнения читатель может доказать, что функция exp задает C^∞-морфизм пространства $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ в себя. Точно так же любую функцию, разлагающуюся в степенной ряд в окрестности нуля, можно применить к оператору, норма которого меньше радиуса сходимости ряда. Полученное отображение задает C^∞-морфизм (и даже аналитический морфизм, если определить это понятие).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если A — симметрический (соответственно кососимметрический) оператор, то оператор* $\exp(A)$ *является симметрическим положительно определенным (соответственно гильбертовым). Если A — достаточно близкий к I симметрический положительно определенный (соответственно гильбертов) автоморфизм, то* $\log A$ *симметричен (соответственно кососимметричен).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства получаются непосредственной проверкой. В качестве примера приведем доказательство последнего утверждения. Предположим, что оператор A гильбертов и достаточно близок к I. Тогда $AA^* = I$ и $A^* = A^{-1}$. Следовательно,

$$(\log A)^* = \frac{(A^* - I)}{1} - \frac{(A^* - I)^2}{2} + \dots = \log A^{-1}.$$

Если A близко к I, то это же верно и относительно A^{-1}, так что это равенство имеет смысл. Наше утверждение следует теперь из того, что $\log A^{-1} = -\log A$. Доказательства остальных утверждений проводятся аналогичным образом почленным применением операции «звездочка» к ряду с учетом условий, обеспечивающих сходимость.

Экспоненциальная и логарифмическая функции являются взаимно обратными C^∞-отображениями между окрестностью нуля в $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ и окрестностью оператора I в $\mathrm{Laut}(\mathbf{E})$. Кроме того, разложение пространства $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ в прямую сумму подпространств симметрических и кососимметрических операторов локально в окрестности оператора I соответствует разложению $\mathrm{Laut}(\mathbf{E})$ в прямое произведение подпространства положительно определенных и подпространства гильбертовых автоморфизмов. Это разложение в прямое произведение можно мультипликативно продолжить на любой топлинейный автоморфизм, поскольку из того, что $A \in \mathrm{Laut}(\mathbf{E})$ и B близко к A, следует, что

$$B = AA^{-1}B = A(I - (I - A^{-1}B)),$$

где оператор $I - A^{-1}B$ мал. Этим доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Гильбертова группа автоморфизмов пространства* $\mathbf{E}$ *является замкнутым подмногообразием в* $\mathrm{Laut}(\mathbf{E})$.

В дополнение к этому локальному результату получаем также глобальный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Экспоненциальное отображение задает* C^∞*-изоморфизм между пространством* $\mathrm{Sym}(\mathbf{E})$ *симметрических эндоморфизмов и пространством* $\mathrm{Pos}(\mathbf{E})$ *положительно определенных симметрических автоморфизмов пространства* $\mathbf{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо построить обратное отображение. Применим для этой цели спектральную теорему. Пусть A — симметрический положительно определенный оператор. Аналитическая функция $\log t$ определена на его спектре, и поэтому оператор $\log A$ симметричен. Легко проверяется, что полученная функция обратна к экспоненте, которую можно определить таким же образом. Для этого достаточно разложить $\log t$ в окрестности большого положительного числа C в степенной ряд, абсолютно и равномерно сходящийся в интервале

$$0 < \varepsilon \leqslant t \leqslant 2c - \varepsilon.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Многообразие топлинейных автоморфизмов гильбертова пространства* $\mathbf{E}$ C^∞*-изоморфно произведению многообразий гильбертовых автоморфизмов и* *положительно определенных симметрических автоморфизмов. Отображение*

$$\mathrm{Hilb}(\mathbf{E}) \times \mathrm{Pos}(\mathbf{E}) \to \mathrm{Laut}(\mathbf{E})$$

задается формулой

$$(H, P) \to H \cdot P.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наше отображение индуцируется билинейным отображением произведения $L(\mathbf{E}, \mathbf{E}) \times L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ в $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ и потому принадлежит классу C^∞.

Нам нужно построить обратное отображение, иными словами, представить любой данный топлинейный автоморфизм A в виде однозначно определенного произведения $A = HP$, где H — гильбертов, а P — положительно определенный автоморфизм, причем зависимость H и P от A принадлежит классу C^∞. Это делается следующим образом. Сначала заметим, что A^*A — симметрический положительно определенный оператор (поскольку $\langle A^*Av, v \rangle = \langle Av, Av \rangle$ и, кроме того, A^*A является топлинейным автоморфизмом, так что 0 не принадлежит его спектру, и в силу замкнутости спектра $A^*A \geqslant \varepsilon > 0$). Положим

$$P = (A^*A)^{1/2}, \quad H = AP^{-1}.$$

Тогда автоморфизм H гильбертов, поскольку

$$H^*H = (P^{-1})^* A^*AP^{-1} = I.$$

Автоморфизмы P и H зависят от A дифференцируемым образом, так как все употреблявшиеся конструкции дифференцируемы.

Остается показать, что это представление в виде произведения единственно. Если $A = H_1 \cdot P_1$, где H_1 и P_1 — соответственно гильбертов и симметрический положительно определенный операторы, то

$$H^{-1}H_1 = PP_1^{-1},$$

и мы получаем для некоторого гильбертова автоморфизма H_2 равенство $H_2 = PP_1^{-1}$. По определению гильбертова автоморфизма имеем

$$I = H_2^* H_2 = (PP_1^{-1})^* PP_1^{-1}$$

и из того, что $P^* = P$ и $P_1^* = P_1$, получаем

$$P^2 = P_1^2.$$

Прологарифмировав последнее равенство, имеем $2\log P = 2\log P_1$. Если разделить обе части равенства на 2 и взять от обеих частей экспоненту, то получим $P = P_1$, а значит, $H = H_1$, что доказывает наше утверждение.

§ 3. Редукция к группе Гильберта

Определим новую категорию расслоений, а именно категорию *гильбертовых расслоений* над X, обозначаемую через ГР(X). Как и прежде, через ГР$(X, \mathbf{E})$ или ГР$(X, \mathfrak{A})$ мы будем обозначать множества расслоений, слой которых является гильбертовым пространством $\mathbf{E}$ или принадлежит категории $\mathfrak{A}$.

Пусть $\pi: E \to X$ — векторное расслоение над X. Предположим, что существует такая тривиализация $\{(U_i, \tau_i)\}$ с тривиализующими отображениями

$$\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — гильбертово пространство, что каждый топлинейный автоморфизм $(\tau_j \tau_i^{-1})_x$ является гильбертовым. Эквивалентным является требование, чтобы τ_{ix} было гильбертовым изоморфизмом. Рассмотренную тривиализацию назовем *гильбертовой тривиализацией*. Две такие тривиализации назовем *гильберт-согласованными*, если их объединение есть опять гильбертова тривиализация. Класс эквивалентности относительно такой согласованности образует объект, который мы назовем *гильбертовым расслоением* над X. Каждое гильбертово расслоение определяет единственное векторное расслоение, а именно класс ВР-эквивалентности, определяемый тривиализацией.

Для данной гильбертовой тривиализации $\{(U_i, \tau_i)\}$ векторного расслоения π над X мы можем определить на каждом слое π_x структуру гильбертова пространства. Действительно, для каждого x выберем U_i, содержащее x, и перенесем в π_x посредством τ_{ix} скалярное произведение из $\mathbf{E}$. По предположению, оно не зависит от выбора U_i.

Таким образом, можно считать, что слои в гильбертовом расслоении являются гильбертовыми пространствами.

Вполне возможно, что несколько различных гильбертовых расслоений определяют одно и то же векторное расслоение.

Каждое гильбертово расслоение, определяющее векторное расслоение π, называется *редукцией расслоения* π *к группе Гильберта.*

Из гильбертовых расслоений можно образовать категорию, если в качестве ГР-морфизмов брать инъективные и разлагающие в каждой точке ВР-морфизмы, сохраняющие метрику в каждом слое. Каждая редукция векторного расслоения к группе Гильберта определяет в расслоении риманову метрику. Действительно, определим для всех $x \in X$ и $v, w \in \pi_x$ скалярное произведение равенством

$$g_x(v, w) = \langle \tau_{ix}v, \tau_{ix}w \rangle,$$

где τ_{ix} — такая гильбертова тривиализация, что $x \in U_i$. Теперь мы получили морфизм

$$x \to g_x$$

многообразия X в положительно определенное сечение расслоения $L_s^2(\pi)$. Обратное утверждение тоже имеет место.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть π — векторное расслоение над многообразием X, все слои которого топлинейно изоморфны гильбертову пространству* $\mathbf{E}$. *Тогда построенное выше отображение редукций расслоения π к группе Гильберта в римановы метрики является биективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что задана обычная ВР-тривиализация $\{(U_i, \tau_i)\}$ расслоения π. Построим ГР-тривиализацию. Для каждого i через g_i обозначим риманову метрику на $U_i \times \mathbf{E}$, перенесенную из $\pi^{-1}(U_i)$ при помощи τ_i. Тогда для каждого $x \in U_i$ мы имеем положительно определенный оператор A_{ix}, для которого

$$g_{ix}(v, w) = \langle A_{ix}v, w \rangle$$

при всех $v, w \in \mathbf{E}$. Обозначим через B_{ix} квадратный корень из A_{ix} и определим тривиализацию σ_i формулой

$$\sigma_{ix} = B_{ix}\tau_{ix}.$$

Докажем, что $\{(U_i, \sigma_i)\}$ — гильбертова тривиализация Действительно, согласно определению метрики g_{ix}, достаточно проверить, что ВР-изоморфизм

$$B_i: U_i\times \mathbf{E}\to U_i\times \mathbf{E},$$

задаваемый на каждом слое оператором B_{ix}, переводит g_i в обычную метрику. Но для всех $v, w\in E$ мы имеем

$$\langle B_{ix}v, B_{ix}w\rangle = \langle A_{ix}v, w\rangle,$$

поскольку оператор B_{ix} симметричен и равен квадратному корню из A_{ix}. Этим все доказано.

В этом месте удобно сделать дополнительные замечания о нормальных расслоениях.

Рассмотрим два гильбертовых расслоения $f:\alpha\to\beta$ над многообразием X и ГР-морфизм $f:\alpha\to\beta$. Предположим, что последовательность

$$0\to\alpha\xrightarrow{f}\beta$$

точна. Тогда, используя риманову метрику, можно естественным образом построить разложение этой последовательности (см. гл. III, § 5).

Применяя теорему 1 приложения I, мы сразу видим, что если $\mathbf{F}$ — (замкнутое) подпространство гильбертова пространства $\mathbf{E}$, то $\mathbf{E}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}\oplus\mathbf{F}^{\perp}$$

пространства $\mathbf{F}$ и его ортогонального дополнения, состоящего из всех векторов, ортогональных к $\mathbf{F}$.

В нашей точной последовательности отображение f можно считать инъективным. Для каждого x мы обозначим через $\alpha_x^{\perp}$ ортогональное дополнение к α_x в β_x. Теперь мы построим точную последовательность ВР-морфизмов

$$\beta\xrightarrow{h}\alpha\to 0,$$

ядром которой (в теоретико-множественном смысле) будет $\alpha^{\perp}$. Таким образом, в набор пространств $\alpha_x^{\perp}$ можно ввести структуру гильбертова расслоения.

Для каждого x мы можем записать $\beta_x=\alpha_x\oplus\alpha_x^{\perp}$ и определить h_x как проектирование. Этим определено отображение $h:\beta\to\alpha$, и остается показать, что оно является

ВР-морфизмом. Достаточно сделать это локально. Поэтому, применив подходящий ВР-автоморфизм над малым открытым в X множеством U, мы можем предположить, что имеем дело со следующей ситуацией.

Наши векторные расслоения β и α совпадают соответственно с $U \times \mathbf{E}$ и $U \times \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — подпространство в $\mathbf{E}$, причем $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{F}^{\perp}$. Наш ГР-морфизм тогда представлен в каждой точке x некоторым инъективным отображением $f_x : \mathbf{F} \to \mathbf{E}$

$$U \times \mathbf{F} \xrightarrow{f} U \times \mathbf{E}.$$

По определению точной последовательности можно найти такие два ВР-изоморфизма τ и σ, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbf{F} & \xrightarrow{f} & U \times \mathbf{E} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ U \times \mathbf{F} & \longrightarrow & U \times \mathbf{E} \end{array}$$

коммутативна, причем нижнее отображение есть обычное включение $\mathbf{F} \to \mathbf{E}$. При помощи σ^{-1} и τ^{-1} можно перенести риманову структуру с верхних расслоений на нижние. Поэтому все свелось к случаю, когда f задается просто включением, а риманова метрика на $U \times \mathbf{E}$ задается семейством A_x $(x \in U)$ симметрических положительно определенных операторов на $\mathbf{E}$. В каждой точке x мы имеем $\langle v, w \rangle_x = \langle A_x v, w \rangle$. Заметим, что отображение

$$A : U \times \mathbf{E} \to U \times \mathbf{E},$$

задаваемое на слоях операторами A_x, является ВР-автоморфизмом расслоения $U \times \mathbf{E}$. Пусть $\text{пр}_{\mathbf{F}}$ — проектирование расслоения $U \times \mathbf{E}$ на $U \times \mathbf{F}$. Оно является ВР-морфизмом. Следовательно, композиция

$$h = \text{пр}_{\mathbf{F}} \circ A$$

задает ВР-морфизм расслоения $U \times \mathbf{E}$ на $U \times \mathbf{F}$ и последовательность

$$U \times \mathbf{E} \xrightarrow{h} U \times \mathbf{F} \longrightarrow 0$$

точна. Наконец, заметим, что ядро отображения h состоит в точности из ортогональных дополнений в каждом слое к $U \times \mathbf{F}$. Этим все доказано.

§ 4. Гильбертова трубчатая окрестность

Рассмотрим гильбертово пространство E. Отображение

$$v \to \frac{v}{(1-|v|^2)^{1/2}}$$

устанавливает изоморфизм открытого шара радиуса 1 на все пространство E. Обратным является отображение

$$w \to \frac{w}{(1+|w|^2)^{1/2}}.$$

Любой шар радиуса $a > 0$ изоморфно отображается на единичный шар путем умножения a^{-1}.

Пусть $\sigma: X \to \mathbf{R}$ — такая функция на многообразии X (морфизм), что $\sigma(x) > 0$ для всех $x \in X$. Пусть $\pi: E \to X$ — гильбертово расслоение над X. Обозначим через $E(\sigma)$ подмножество в E, состоящее из векторов v, для которых из $v \in E_x$ следует

$$|v|_x < \sigma(x).$$

Множество $E(\sigma)$ является открытой окрестностью нулевого сечения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть $\pi: E \to X$ — гильбертово расслоение над многообразием X и $\sigma: X \to \mathbf{R}$ — такой морфизм, что $\sigma(x) > 0$ при всех x. Тогда отображение*

$$w \to \frac{\sigma(\pi w)\, w}{(1+|w|^2)^{1/2}}$$

задает изоморфизм расслоения E на $E(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратное отображение легко построить.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть многообразие X допускает разбиение единицы, и пусть $\pi: E \to X$ — гильбертово расслоение над X. Тогда E сжимаемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим открытую окрестность Z нулевого сечения. Для каждого $x \in X$ существует такая открытая окрестность V_x и число $a_x > 0$, что векторы из $\pi^{-1}(V_x)$ длины, меньшей a_x, лежат в Z. Выберем такое разбиение единицы $\{(U_i, \varphi_i)\}$ на X, что каждое U_i содержится в некотором $V_{x(i)}$. Пусть функция σ равна

$$\sum a_{x(i)} \varphi_i .$$

Тогда $\mathbf{E}(\sigma)$ содержится в Z и наше утверждение следует из предложения 7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть* $\pi: E \to X$ *и* $\pi_1: E_1 \to X$ — *два гильбертова расслоения над многообразием* X. *Для каждого* BP-*изоморфизма*

$$\lambda: E \to E_1$$

существует такая изотопия BP-*изоморфизмов*

$$\lambda_t : E \to E_1$$

с собственной областью $[0,1]$, *что* $\lambda_1 = \lambda$, *а* λ_0 *есть* ГР-*изоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем редукции расслоений E и E_1 к группе Гильберта с тривиализациями $\{(U_i, \tau_i)\}$ для E и $\{(U_i, \rho_i)\}$ для E_1. Мы можем, как и в предложении 6, в § 2, разложить для каждого слоя отображение $\rho_i \lambda \tau_i^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
U_i \times \mathbf{E} \arrow[r] & U_i \times \mathbf{E} \arrow[r] & U_i \times \mathbf{E} \\
\pi^{-1}(U_i) \arrow[u, "\tau_i"] \arrow[r, "\lambda_P"'] & \pi^{-1}(U_i) \arrow[u, "\tau_i"] \arrow[r, "\lambda_H"'] & \pi_1^{-1}(U_i), \arrow[u, "\rho_i"]
\end{tikzcd}$$

и получить разложение $\lambda = \lambda_H \lambda_P$. Здесь λ_H есть ГР-изоморфизм, а λ_P — положительно определенный симметрический BP-автоморфизм. Последние образуют выпуклое множество, и наша изотопия задается формулой

$$\lambda_t = \lambda_H \circ (tI + (1-t)\,\lambda_P).$$

(Если угодно, то ее можно сгладить на концах.)

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим подмногообразие* X *в* Y *и два гильбертовых расслоения* $\pi: E \to X$ *и* $\pi_1: E_1 \to X$. *Предположим, что* E *сжимаемо. Пусть* $f: E \to Y$ *и* $g: E_1 \to Y$ — *две трубчатые окрестности многообразия* X *в* Y. *Тогда существуют такая изотопия*

$$f_t : E \to Y$$

трубчатой окрестности с собственной областью $[0,1]$ *и такой* ГР-*изоморфизм* $\mu: E \to E_1$, *что* $f_1 = f$, *а* $f_0 = g\mu$.

доказательство. Из теоремы 10 § 6 гл. IV мы уже знаем, что существует такой ВР-изоморфизм λ, что $f \approx \approx g\lambda$. Из предыдущего предложения мы получаем, что ВР-изоморфизм λ изотопен ГР-изоморфизму μ. Отсюда $g\lambda \approx g\mu$, и по транзитивности $f \approx g\mu$, что и требовалось.

замечание. В силу предложения 7 можно заменить условие сжимаемости расслоения E практически более удобным условием существования на X разбиения единицы.

§ 5. Невырожденные билинейные тензоры

Пусть $\mathbf{E}$ — гильбертово пространство и

$$\Omega : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$$

— непрерывное билинейное отображение. Существует такой однозначно определенный оператор A, что

$$\Omega(v, w) = \langle Av, w \rangle$$

для всех $v, w \in \mathbf{E}$. Если A — обратимый оператор (т. е. существует такой оператор A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$), то мы скажем, что отображение Ω *невырождено*.

Пусть $\pi : E \to Y$ — гильбертово расслоение над многообразием Y, а Ω — тензорное поле типа L^2 на E, т. е. сечение расслоения $L^2(E)$ (или $L^2(\pi)$). Тогда для каждого $y \in Y$ мы имеем на E_y непрерывное билинейное отображение Ω_y. Если отображение Ω_y невырождено для каждого $y \in Y$, то мы скажем, что поле Ω *невырождено*. Если π тривиально и задана тривиализация $Y \times \mathbf{E}$, то главная часть поля Ω описывается морфизмом многообразия Y в банахово пространство операторов. Если поле Ω невырождено, то образ многообразия Y при этом морфизме содержится в множестве обратимых операторов. Если Ω есть 2-форма, то образ содержится в подпространстве кососимметрических операторов.

Пусть Ω — невырожденное тензорное поле типа L^2 на E или, как мы будем говорить, невырожденное *билинейное тензорное поле* на E. Поле Ω можно следующим образом использовать для отождествления сечений расслоения E с 1-формами на E. Рассмотрим сечение ξ.

Для каждого $y \in Y$ определим непрерывное линейное отображение

$$(\Omega \circ \xi)_y : E_y \to \mathbf{R}$$

формулой

$$\langle (\Omega \circ \xi)_y, w \rangle = \langle \Omega (y), \xi (y) \times w \rangle = \Omega_y (\xi (y), w).$$

Рассматривая локальную тривиализацию расслоения π, мы сразу видим, что $\Omega \circ \xi$ есть 1-форма на E.

Обратно, пусть дана 1-форма ω на E. Для каждого $y \in Y$ ω_y будет 1-формой на E_y, и, поскольку Ω невырождено, существует единственный элемент $\xi (y) \in E_y$, удовлетворяющий равенству

$$\Omega_y (\xi (y), w) = \omega_y (w)$$

для всех $w \in E_y$. Таким образом, мы получили отображение ξ многообразия Y в E и утверждаем, что ξ есть морфизм (и потому сечение).

Для доказательства этого утверждения рассмотрим ситуацию локально, ограничиваясь главными частями. Для обозначения этих главных частей используем те же буквы Ω и ω. Взяв подходящее открытое множество U, получаем два таких морфизма

$$A : U \to \mathrm{Aut}\,(\mathbf{E}) \text{ и } \eta : U \to \mathbf{E},$$

что

$$\Omega_y (v, w) = \langle A_y v, \ w \rangle \quad \text{и} \quad \omega_y (w) = \langle \eta (y), w \rangle .$$

Отсюда видно, что

$$\xi (y) = A_y^{-1} \eta (y).$$

Из последнего равенства следует, что ξ — морфизм. Объединим все изложенное в следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть $\pi : E \to Y$ — гильбертово расслоение над многообразием Y, а Ω — невырожденное билинейное тензорное поле на E. Тогда Ω индуцирует взаимно однозначное соответствие между сечениями расслоения E и 1-формами на E. Сечение ξ тогда и только тогда соответствует 1-форме ω, когда*

$$\Omega \circ \xi = \omega.$$

Заметим, что наше взаимно однозначное соответствие является, очевидно, линейным изоморфизмом, если рассматривать и сечения и 1-формы как векторные пространства над полем констант.

Во многих приложениях рассматриваются дифференциальные формы вида df для некоторой функции f. Соответствующее форме df векторное поле называется градиентом функции f. В следующем параграфе мы будем рассматривать касательное расслоение в качестве базисного многообразия и таким образом получим векторное поле, порождающее геодезические.

§ 6. Римановы метрики и пульверизации

Рассмотрим риманово многообразие X, моделью для которого является гильбертово пространство $\mathbf{E}$. Скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle$ отождествляет $\mathbf{E}$ с двойственным ему пространством $\mathbf{E}^*$. Риманова метрика на X задает топлинейный изоморфизм каждого касательного пространства $T_x(X)$ с $T_x^*(X)$. Если действовать локально и считать $X=U$ открытым множеством в $\mathbf{E}$ и если отождествить $T(U)$ с $U\times\mathbf{E}$, а $T^*(U)$ с $U\times\mathbf{E}^*$, то метрика задает ВР-изоморфизм

$$\varphi: T(U)\to T^*(U)$$

при помощи морфизма

$$g: U\to L(\mathbf{E},\ \mathbf{E}^*)$$

по формуле $\varphi(x,\ v)=(x,\ g(x)v)$. Для каждого $x\in U$

скалярное произведение, задаваемое метрикой, обозначим через

$$\langle y,\ w\rangle_x=\langle y,\ g(x)w\rangle,\quad y,\ w\in\mathbf{E}.$$

Заметим, что для каждого $x\in U$ производная $Dg(x)$ отображает $\mathbf{E}$ в $L(\mathbf{E},\ \mathbf{E}^*)$, и для $x\in U$, $y\in\mathbf{E}$ мы запишем

$$Dg(x)\,y\cdot v=Dg_{x,y}(v).$$

Если при помощи φ перенести описанную в гл. V каноническую 2-форму с $T^*(U)$ на $T(U)$, то ее локальное выражение на $U \times E$ можно записать следующим образом:

$$\langle \Omega_{x,v}, (y_1, w_1)\times(y_2 w_2) \rangle = \langle y_2, w_1 \rangle_x - \langle y_1, w_2 \rangle_x + \\ + \langle Dg_{x,y_1}(v), y_2 \rangle - \langle Dg_{x,y_2}(v), y_1 \rangle .$$

Ясно, что форма Ω невырождена. Теперь, чтобы применить результаты предыдущего параграфа, построим 1-форму на $T(X)$. Мы имеем функцию

$$K : T(X) \to \mathbf{R},$$

задаваемую формулой $K(v) = {}^1/_2\,(v, v)_x$, если $v \in T_x$. Тогда dK есть 1-форма. По предложению 9 предыдущего параграфа ей соответствует векторное поле на $T(X)$. Мы утверждаем:

ТЕОРЕМА 3. *Векторное поле на $T(X)$, соответствующее форме $-dK$ относительно фундаментальной 2-формы, является пульверизацией на X (известной под названием геодезического потока).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать локально и применим критерий предложения 5 § 3 гл. IV. Возьмем открытое в $\mathbf{E}$ множество U и рассмотрим двойное касательное расслоение

$$\begin{array}{c} (U\times \mathbf{E})\times(\mathbf{E}\times\mathbf{E}) \\ \downarrow \\ U\times\mathbf{E} \\ \downarrow \\ U. \end{array}$$

Нашу функцию K можно записать в виде

$$K(x, v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_x = \frac{1}{2}\langle v, g(x)\, v \rangle,$$

и dK в точке (x, v) есть просто обычная производная

$$DK(x, v) : \mathbf{E}\times\mathbf{E} \to \mathbf{R}.$$

Производная DK полностью описывается двумя частными производными, и мы имеем

$$DK(x, v) \cdot (y,w) = D_1K(x,v) \cdot y + D_2K(x,v) \cdot w.$$

Из определения производной мы получаем

$$D_2K(x,v) \cdot w = \langle v,w \rangle_x.$$

Используем обозначения предложения 5 § 3 гл. IV. Векторное поле, соответствующее форме $-dK$ относительно канонической 2-формы Ω, представим в виде морфизма $f: U \times \mathbf{E} \to \mathbf{E} \times \mathbf{E}$, который мы запишем через две его компоненты

$$f(x,v) = (f_1(x,v),\ f_2(x,v)).$$

Согласно предыдущему параграфу, мы имеем для всех $(x,v) \in U \times \mathbf{E}$ и $(y,w) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ равенства

$$\Omega_{x,v} \langle (f_1(x,v),\ f_2(x,v)), (y\ w) \rangle = - \langle DK(x,v), (y,w) \rangle =$$
$$= -D_1K(x,v) \cdot y - \langle v,w \rangle_x.$$

В полученном выше выражении для $\Omega_{x,v}$ имеется только один член, зависящий от $w_2 = w$, а именно $-\langle y_1,w_2 \rangle_x$. Отсюда следует, что

$$-\langle f_1(x,v), w \rangle_x = - \langle v, w \rangle_x$$

для всех w и, следовательно, $f_1(x,v) = v$. Значит наше векторное поле есть дифференциальное уравнение второго порядка. Теперь можно записать вторую составляющую нашего векторного поля, снова используя выражение для $\Omega_{x,v}$. Мы получим

$$\langle y, f_2(x,v) \rangle_x = \langle Dg_{x,y}(v), v \rangle - \langle Dg_{x,v}(v), y \rangle -$$
$$- D_1K(x,v) \cdot y.$$

Отсюда видно, что отображение f_2 однородно 2-й степени по аргументу v, другими словами, что оно представляет пульверизацию.

Доказательство закончено.

Приложение I

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Ниже излагаются заметки семинара фон Неймана 1950 г.

§ 1. Гильбертово пространство

Рассмотрим векторное пространство **E** над полем комплексных чисел **C**. (Вещественный случай исследуется в точности таким же образом.)

Под скалярным произведением подразумевается такое отображение $\langle x,y \rangle$ произведения $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ в **C**, что

$\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$,

$\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$ при всех $\alpha \in \mathbf{C}$,

$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$,

$\langle x,x \rangle \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=0$.

Мы имеем *неравенство Шварца*

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leqslant \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle,$$

которое доказывается следующим образом.

При произвольных α и β имеют место соотношения

$$0 \leqslant \langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y \rangle = \alpha\overline{\alpha} \langle x,x \rangle + \beta\overline{\alpha}\, \overline{\langle x,y \rangle} + \alpha\overline{\beta} \langle x,y \rangle + \beta\overline{\beta} \langle y,y \rangle.$$

Положим $\alpha = \langle y,y \rangle$ и $\beta = -\langle x,y \rangle$ и получим нужное неравенство.

Определим *норму* вектора x как $\langle x,x \rangle^{1/2}$ и обозначим ее через $|x|$. Из неравенства Шварца видно, что $|x|$ определяет метрику на **E**, если в качестве расстояния между x и y взять $|x-y|$. Норма непрерывна.

Если $\langle x,y \rangle = 0$, то мы будем писать $x \perp y$ и говорить, что x *перпендикулярно* y.

Следующие тождества доказываются тривиально.

Правило параллелограмма. $|x+y|^2+|x-y|^2=2|x|^2+2|y|^2$.

Теорема Пифагора. Если $x\perp y$, то $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$.

Гильбертовым пространством называется пространство со скалярным произведением, полное относительно метрики $|x-y|$. В этом приложении слово подпространство всегда означает замкнутое подпространство с индуцированной структурой гильбертова пространства.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим подпространство* $\mathbf{F}$ *в* $\mathbf{E}$ *и вектор* $x\in\mathbf{E}$. *Пусть*

$$a=\inf_{y\in\mathbf{F}}|x-y|.$$

Тогда существует такой элемент $y_0\in\mathbf{F}$, *что* $a=|x-y_0|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y_n — такая последовательность элементов из $\mathbf{F}$, что $|y_n-x|\to a$. Покажем, что y_n образуют последовательность Коши. По правилу параллелограмма имеем

$$|y_n-y_m|^2=2|y_n-x|^2+2|y_m-x|^2-$$
$$-4\left|\frac{1}{2}(y_n+y_m)-x\right|^2\leqslant 2|y_n-x|^2+2|y_m-x|^2-4a^2.$$

Отсюда следует, что y_n образуют последовательность Коши, сходящуюся, скажем, к y_0. Лемма следует из непрерывности нормы.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого подпространства* $\mathbf{F}$ *в* $\mathbf{E}$ *существует не равный нулю вектор* $z\in\mathbf{E}$, *перпендикулярный к* $\mathbf{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in\mathbf{E}$ и $x\notin\mathbf{F}$. Пусть y_0 — элемент из $\mathbf{F}$, находящийся от x на минимальном расстоянии (см. лемму 1). Обозначим это расстояние через a и положим $z=x-y_0$. Сделав, если нужно, сдвиг, можно считать, что $z=x$, так что $|x|=a$. Для любого комплексного числа α и $y\in\mathbf{F}$ мы имеем $|x+\alpha y|\geqslant a$. Отсюда

$$\langle x+\alpha y,\ x+\alpha y\rangle=|x|^2+\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+\alpha\langle\overline{x,\ y}\rangle+$$
$$+\alpha\bar{\alpha}|y|^2\geqslant a^2.$$

Если в этом равенстве положить $\alpha = -t\overline{\langle x, y \rangle}$, то при малых t получаем противоречие, когда $\langle x, y \rangle \neq 0$.

§ 2. Функционалы и операторы

Линейное отображение A гильбертова пространства $\mathbf{E}$ в гильбертово пространство $\mathbf{H}$ называется ограниченным, если существует такое вещественное положительное число α, что

$$|Ax| \leqslant \alpha |x|$$

для всех $x \in \mathbf{E}$. *Нормой оператора* A называется точная нижняя грань всех таких α. Норма оператора обозначается через $|A|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Линейное отображение тогда и только тогда переводит единичную сферу в ограниченное множество, когда оно непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Функционалом назовем непрерывное линейное отображение в $\mathbf{C}$. Функционалы ограничены.

Имеет место фундаментальная

ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА. *Линейное отображение $\lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое $y \in \mathbf{E}$, что $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$ для всех $x \in \mathbf{E}$. Если такое y существует, то оно единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, то неравенство Шварца показывает, что λ ограничено величиной $|y|$. Единственность элемента y очевидна.

Обратно, пусть λ ограничено. Ядро $\mathbf{F}$ отображения λ является подпространством. Если $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, то все тривиально. Если $\mathbf{F} \neq \mathbf{E}$, то по теореме 1 существует перпендикулярный к $\mathbf{F}$ элемент $z \in \mathbf{E}$. Мы утверждаем, что нужное нам y равно αz при некотором α. Необходимо, чтобы α удовлетворяло равенству

$$\langle z, \alpha z \rangle = \bar{\alpha} |z|^2 = \lambda(z).$$

Это же равенство и достаточно. Действительно, $x - (\lambda(x)/\lambda(z))z$ лежит в $\mathbf{F}$. При $\alpha = \overline{\lambda(z)}/|z|^2$ получаем $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$, что и требовалось.

Под *оператором* мы всегда понимаем непрерывное линейное отображение пространства в себя.

Непосредственно проверяется, что операторы образуют банахово пространство и даже нормированное кольцо. Иными словами, в дополнение к свойствам банахова пространства, мы имеем неравенство

$$|AB| \leqslant |A|\ |B|$$

для любых операторов A и B.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если оператор A удовлетворяет условно $\langle Ax, x \rangle = 0$ для всех x, то $A = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из поляризационного тождества

$$\langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle = \\ = 2[\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle]$$

следует, что $\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = 0$.

Заменим x на ix. Тогда получим

$$i\langle Ax, y \rangle - i\langle Ay, x \rangle = 0$$

для всех x, y. Отсюда $\langle Ax, y \rangle = 0$, и $A = 0$. Это предложение верно только для комплексных пространств. Для вещественных пространств оно нам понадобится, только когда оператор A симметричен (см. ниже). Тогда оно доказывается столь же просто. Эти же замечания применимы и к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если d — такое число, что $|\langle Ax, x \rangle| \leqslant d|x|^2$ для всех x, то*

$$|\langle Ax, y \rangle| + |\langle x, Ay \rangle| \leqslant 2d|x||y|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из поляризационного тождества следует, что

$$2|\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle| \leqslant d|x+y|^2 + d|x-y|^2 = \\ = 2d(|x|^2 + |y|^2).$$

Таким образом,

$$|\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle| \leqslant d(|x|^2 + |y|^2).$$

Заменив x на $ae^{i\varphi}x$, а y на $(1/a)y$, получим

$$|e^{i\varphi}\langle Ax, y \rangle + e^{-i\varphi}\langle Ay, x \rangle| \leqslant d\left(a^2|x|^2 + \frac{1}{a^2}|y|^2\right).$$

Взяв справа inf по a, а слева sup по φ, мы получим то, что нам нужно. Для приложений нам понадобятся только самосопряженные (т. е. симметрические, см. ниже) операторы A. В этом случае доказательство даже проще.

При фиксированном y функция от x, задаваемая формулой $\langle Ax, y \rangle$, является функционалом (ограниченным в силу неравенства Шварца). В силу теоремы о представлении функционала, существует такой элемент y^*, что $\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ при всех x. Определим оператор A^*, сопряженный оператору A, полагая $A^*y = y^*$. Поскольку элемент y^* определен однозначно, мы видим, что A^* — единственный оператор, удовлетворяющий равенству

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

для всех x, $y \in \mathbf{E}$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место соотношения*

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad A^{**} = A,$$
$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \qquad |A^*| = |A|,$$
$$(AB)^* = B^*A^*, \qquad |AA^*| = |A|^2,$$

и отображение $A \to A^*$ непрерывно.

Доказательство представляет собой упражнение для читателя.

§ 3. Эрмитовы операторы

Оператор A назовем *симметрическим* (или *эрмитовым*), если $A = A^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оператор A тогда и только тогда эрмитов, когда $\langle Ax, x \rangle$ вещественно для всех x.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — эрмитов. Тогда $\overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle \overline{x, Ax} \rangle = \langle Ax, x \rangle$. Обратно, из $\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle \overline{x, Ax} \rangle = \langle A^*x, x \rangle$ следует, что $\langle (A - A^*)x, x \rangle = 0$. Отсюда $A = A^*$ по предложению 2.

Скажем, что эрмитов оператор *положителен*, если $\langle Ax, x \rangle \geqslant 0$ для всех x. Это будем записывать $A \geqslant 0$. Если A и B — эрмитовы операторы и оператор $A - B$ положителен, то будем писать $A \geqslant B$. Таким образом, эрмитовы операторы частично упорядочены. Если I — единичный оператор, и α вещественно, то для простоты будем писать α вместо αI.

Следующая теорема является основной.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть эрмитов оператор A удовлетворяет неравенствам $\alpha \leqslant A \leqslant \beta$ и вещественный полином $p(t)$ не отрицателен в интервале $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Тогда $p(A)$ — положительный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобятся следующие очевидные факты: если операторы A и B эрмитовы, A коммутирует с B и $A \geqslant 0$, то $AB^2 \geqslant 0$.

Если $p(t)$ — квадратичный полином $t^2 + at + b$ с комплексными корнями, то

$$p(t) = \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right).$$

есть сумма квадратов.

Сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, есть сумма квадратов (если входящие в них величины коммутируют).

Если многочлен $p(t)$ имеет в интервале (α, β) корень γ, то кратность этого корня четна.

Наша теорема теперь вытекает из следующего чисто алгебраического утверждения.

Пусть $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ — вещественный интервал и $p(t)$ — вещественный полином, неотрицательный в этом интервале. Тогда $p(t)$ можно записать в виде

$$p(t) = c\left[\sum Q^2 + \sum (t - \alpha) Q^2 + \sum (\beta - t) Q^2\right],$$

где Q^2 обозначает квадраты некоторых полиномов (не обязательно одних и тех же), а $c > 0$.

Для доказательства разложим $p(t)$ над полем вещественных чисел на линейные и квадратичные множители. Если γ — корень и $\gamma \leqslant \alpha$, то мы запишем

$$(t - \gamma) = (t - \alpha) + (\alpha - \gamma)$$

и заметим, что $\alpha - \gamma$ есть квадрат. Если же $\gamma \geqslant \beta$, то запишем

$$(\gamma - t) = (\gamma - \beta) + (\beta - t),$$

где $\gamma-\beta$ есть квадрат. Подставляя эти выражения в разложение для $p(t)$ и «раскрывая скобки», получаем

$$p(t)=c\left[\sum Q^2+\sum(t-\alpha)Q^2+\Sigma(\beta-t)Q^2+\sum(t-\alpha)(\beta-t)Q^2\right],$$

где c — некоторая константа, а через Q^2 обозначены квадраты некоторых полиномов (не обязательно одних и тех же). Заметим, что $c>0$, поскольку $p(t)$ положительно в рассматриваемом интервале. Используя теперь прием Бурбаки, приведем «плохой» последний член к нужному нам виду при помощи тождества

$$(t-\alpha)(\beta-t)=\frac{(t-\alpha)^2(\beta-t)+(t-\alpha)(\beta-t)^2}{\beta-\alpha}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если в рассматриваемом интервале выполнены неравенства* $a\leqslant p(t)\leqslant b$, *то*

$$a\leqslant p(A)\leqslant b.$$

Если $p(t)$ — вещественный полином, то, как обычно положим

$$|p|=\sup|p(t)|,$$

где t изменяется в рассматриваемом интервале.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* $\alpha\leqslant A\leqslant\beta$, *и пусть* $p(t)$ — *вещественный полином. Тогда* $|p(A)|\leqslant|p|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $q(t)=|p|\pm p(t)$. Тогда $q(t)\geqslant 0$ на нашем интервале. Значит $q(A)\geqslant 0$, и наше утверждение следует из предложения 3.

Как обычно, будем рассматривать множество непрерывных функций на интервале как банахово пространство. Если функция $f(t)$ непрерывна на этом интервале, то по теореме Вейерштрасса найдется последовательность полиномов $p_n(t)$, равномерно в интервале сходящаяся к $f(t)$. Определим $f(A)$ как предел $p_n(A)$. Из следствия 2 мы видим, что $p_n(A)$ является последовательностью Коши и что предел $f(A)$ не зависит от выбора последовательности. Кроме того, следствие 2 по непрерывности переносится на непрерывные функции, так что $|f(A)|\leqslant|f|$.

Мы видим, что отображение $f(t)\to f(A)$ представляет собой непрерывный гомоморфизм банаховой алгебры непрерывных функций на интервале в замыкание подалгебры, порожденной оператором A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *В замыкании подалгебры, порожденной положительным оператором A, существует такой оператор B, что $B^2 = A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывная функция $t^{1/2}$ отображается в $A^{1/2}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Произведение двух положительных коммутирующих эрмитовых операторов снова положительно.*

Ядро нашего гомоморфизма непрерывных функций в операторы образует замкнутый идеал. Нули этого идеала, т. е. общие нули функций, входящих в идеал, образуют замкнутое множество, называемое спектром оператора A и обозначаемое через $\sigma(A)$.

ЛЕММА 2. *Обозначим через X компактное множество, R — кольцо непрерывных функций на X и $\mathfrak{a}$ — замкнутый идеал в R, $\mathfrak{a} \neq R$. Пусть C — замкнутое подмножество нулей идеала $\mathfrak{a}$. Тогда C не пусто, и если функция $f \in R$ обращается в нуль на C, то $f \in \mathfrak{a}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного ε обозначим через U открытое множество, на котором $f < \varepsilon$. Тогда множество $X - U$ замкнуто. Для каждой точки $t_0 \in X - U$ найдется такая функция $g \in \mathfrak{a}$, что $g(t) \neq 0$ в окрестности точки t_0. Эти окрестности покрывают $X - U$ и можно выбрать конечное подпокрытие, соответствующее функциям $g_1, \ldots, g_r$. Функция $g = g_1^2 + \ldots + g_r^2$ обладает на $X - U$ положительным минимумом и принадлежит $\mathfrak{a}$.

При больших n функция

$$f \frac{ng}{1 + ng}$$

близка к f на $X - U$ и меньше ε на U. Этим все доказано, поскольку ng принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$.

Определим теперь иначе норму непрерывной функции f, положив

$$|f|_A = \sup_{t \in \sigma(A)} |f(t)|.$$

ТЕОРЕМА 4. *Отображение $f(t) \to f(A)$ индуцирует банахов (т. е. сохраняющий норму) изоморфизм банаховой алгебры непрерывных функций на $\sigma(A)$ на замыкание алгебры, порожденной оператором A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже показали, что наше отображение есть алгебраический изоморфизм и что $|f(A)| \leqslant \leqslant |f|_A$. Чтобы получить обратное неравенство, докажем следующее утверждение.

Если $f(A) \geqslant 0$, то $f(t) \geqslant 0$ на спектре оператора A.

Действительно, пусть $f(c) < 0$ для некоторого $c \in \sigma(A)$. Через $g(t)$ обозначим функцию, равную нулю вне малой окрестности точки c, неотрицательную всюду и положительную в точке c. Тогда по следствию из предложения 5 положительны операторы $g(A)$ и $g(A)f(A)$. Но из неравенства $-g(t)f(t) \geqslant 0$ следует, что $-g(A)f(A) \geqslant 0$, откуда $g(A)f(A) = 0$. Поскольку $g(t)f(t)$ не равно нулю на $\sigma(A)$, мы получаем противоречие.

Пусть теперь $s = |f(A)|$. Тогда $s - f(A) \geqslant 0$, и $s - f(t) \geqslant 0$, что доказывает теорему.

В дальнейшем норму непрерывной функции будем относить к спектру. Нам осталось отождествить наш спектр с *общим спектром*, т. е. таким множеством комплексных чисел ξ, что оператор $A - \xi$ необратим, т. е. не имеет обратного оператора.

ТЕОРЕМА 5. *Общий спектр компактен, и если ξ лежит в нем, то $|\xi| \leqslant |A|$. Если оператор A эрмитов, то общий спектр совпадает с $\sigma(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополнение к общему спектру открыто. Действительно, если оператор $A - \xi_0$ обратим и ξ близко к ξ_0, то оператор $(A - \xi_0)^{-1}(A - \xi)$ близок к I и значит обратим. Следовательно, обратим и $A - \xi$. Кроме того, если $|\xi| > |A|$, то $|A/\xi| < 1$, и оператор $I - A/\xi$ обратим (в силу сходимости степенного ряда). Поэтому обратим и $A - \xi$. Наконец предположим, что ξ лежит в общем спектре эрмитова оператора. Тогда ξ вещественно. В противном случае мы, положив $g(t) = (t - \xi)(t - \bar{\xi})$, имели бы $g(t) \neq 0$ на $\sigma(A)$. Функция $h(t) = 1/g(t)$ соответствовала бы обратному оператору, так что оператор $A - \xi$ был бы обратим.

Предположим, что ξ не лежит в $\sigma(A)$. Тогда $t - \xi$ — обратимая функция и оператор $A - \xi$ обратимый.

Предположим, что $\xi \in \sigma(A)$. Сделав, если надо, перенос, будем считать, что $\xi = 0$. Рассмотрим функцию $g(t)$, заданную равенством

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{|t|} & \text{при } |t|\geqslant\dfrac{1}{N},\\ N & \text{при } |t|\leqslant\dfrac{1}{N}.\end{cases}$$

Она положительна и имеет пик в нуле. Из $|tg(t)|\leqslant 1$ следует, что $|Ag(A)|\leqslant 1$. Поэтому, если оператор A обратим и $BA=I$, то $|g(A)|\leqslant|B|$. Но $|g(A)|$ можно сделать как угодно большим, выбрав достаточно большое N. Мы получили противоречие.

Приложение 1.

ЛОКАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Как упоминалась во введении, мы включили сюда два примера использования локальных координат. В конечномерном случае значение локальных координат для вычислений нельзя недооценивать. Однако, поскольку в других изложениях читатель встретит исключительно эту точку зрения, нам кажется бессмысленным останавливаться здесь на этом подробнее.

§ 1. Дифференциальные формы

Рассмотрим многообразие X класса C^p ($p \geqslant 1$), моделью для которого служит n-мерное евклидово пространство

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}_1 \times \ldots \times \mathbf{R}_n,$$

являющееся произведением n вещественных прямых. Пусть (U, φ) — карта на X. Тогда φ можно представить локальными координатами, и для любой точки $P \in U$ мы будем писать

$$\varphi(P) = (x_1(P), \ldots, x_n(P)),$$

где каждое x_i есть отображение множества U в $\mathbf{R}$ $(=\mathbf{R}_i)$. Поскольку φ — изоморфизм, касательное отображение

$$T_P(\varphi): T_P(X) \to \mathbf{E}$$

является линейным (и, в силу конечномерности, топлинейным) изоморфизмом. Из локального определения внешнего дифференцирования в простейшем случае форм степени 0 нам известно, что координатами отображения $T_P(\varphi)$ являются $(dx_1(P), \ldots, dx_n(P))$. Здесь $dx_i(P)$ обозначает значение дифференциальной формы dx_i в точке P. Поскольку $T_P(\varphi)$ есть линейный изоморфизм, функционалы $dx_1(P), \ldots, dx_n(P)$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис дуального пространства T_P^*.

Рассмотрим n линейно независимых элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из пространства $\mathbf{F}^*$, дуального для некоторого пространства $\mathbf{F}$. Внешние произведения

$$\lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_r} \qquad (i_1 < \ldots < i_r)$$

образуют базис в $L_a^r(\mathbf{F})$. (Это элементарный факт из полилинейной алгебры.) Следовательно, r-форму ω класса C^{p-1} на U можно единственным образом записать в виде суммы

$$\omega = \sum f_{i_1 \ldots i_r}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

с подходящими вещественнозначными функциями $f_{i_1 \ldots i_r}$, определенными на открытом множестве $\varphi(U)$ в $\mathbf{E}$. Ее значение $\omega(P)$ в данной точке P примет вид

$$\omega(P) = \sum f_{i_1 \ldots i_r}(x(P))\, dx_{i_1}(P) \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}(P).$$

Мы утверждаем, что $f_{i_1 \ldots i_r}$ — функции класса C^{p-1}. Для доказательства предположим сначала, что U открыто в евклидовом пространстве и потому $T(U) = U \times \mathbf{E}$. Предположим, что $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в каноническом разложении пространства $\mathbf{E}$ в произведение вещественных прямых. Тогда функции x_i линейны и dx_i — проекция на i-й сомножитель, т. е. $dx_1, \ldots, dx_n$ — дуальный базис к стандартному базису в евклидовом пространстве. Поэтому функции $f_{i_1, \ldots, i_r}$ представляют коэффициенты главной части формы ω относительно базиса

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

в $L_a^r(\mathbf{E})$. Легко видеть, что отображение множества U в конечномерное векторное пространство тогда и только тогда является морфизмом, когда каждое координатное отображение в $\mathbf{R}$ — морфизм того же класса. Итак, каждое $f_{i_1 \ldots i_r}$ принадлежит классу C^{p-1}.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $z_1 \ldots z_n$ суть n стандартных координатных функций на $\mathbf{E}$. Тогда можно записать

$$x_i = z_i \circ \varphi.$$

Как мы только что видели, нашу форму ω, перенесенную на $\varphi(U)$, можно представить в виде суммы

$$(\varphi^{-1})^*(\omega) = \sum g_{i_1 \dots i_r}(z)\, dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r},$$

где функции $g_{i_1 \dots i_r}$ принадлежат классу C^{p-1}. Взяв обратный образ φ^* на U, мы получим, применяя первые три свойства обратного образа, что

$$\omega = \sum g_{i_1 \dots i_r}(z \circ \varphi)\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

поскольку $\varphi^*(dz_i) = d(z_i \circ \varphi) = dx_i$. Таким образом, функции $f_{i_1 \dots i_r}$ — не что иное, как $g_{i_1 \dots i_r} \circ \varphi$, и поэтому принадлежат классу C^{p-1}. Это и требовалось доказать.

Используя формулу внешнего дифференцирования внешнего произведения (предложение 6 § 2 гл. V) и то, что $dd = 0$, мы видим, что $d\omega$ можно задать обычной формулой

$$d\omega = \sum df_{i_1 \dots i_r}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Пусть, как и выше, φ — карта, описываемая координатами $x_1, \dots, x_n$, а f — функция на открытом множестве U. Тогда существует такая функция ψ от n переменных, что

$$f(P) = \psi(x_1(P), \dots, x_n(P)).$$

Используя свойство 4 § 2 гл. V, относящееся к обратному образу дифференциальных форм и их внешних производных, мы получаем в нашем базисе

$$df = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n.$$

В частности, если $y_1, \dots y_n$ — другой набор локальных координат на U и $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$, то

$$dy_i = \sum_{\nu} \frac{d\psi_i}{\partial x_\nu} dx_\nu.$$

Отсюда сразу следует формула для преобразования внешнего произведения форм dy_i. В частности, для форм высшей степени, а именно $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ и $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, мы видим, что преобразование определяется умножением на определитель Якоби.

Сделаем замечание о векторных полях. В других книгах обычно через $\partial/\partial x_i$ обозначают векторное поле, дуальное дифференциальной форме dx_i в смысле предложения 9 § 5 гл. VII. Это согласуется с отождествлением векторных полей с дифференциальными операторами (предложение 1 § 1 гл. V).

§ 2. Символы Кристоффеля

Представим теперь в локальных координатах пульверизации, в частности риманову пульверизацию.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$—локальные координаты, представляющие точку открытого множества U в n-мерном пространстве. Тогда касательное расслоение допускает локальные координаты

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n),$$

где (y) — координаты вектора из $\mathbf{E}$, а (x, y) — координаты точки из $U \times \mathbf{E}$. Дифференциальное уравнение второго порядка представлено поэтому своей главной частью

$$f(x, y) = (y, f_2(x, y)) =$$
$$= (y_1, \ldots, y_n, f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)),$$

удовлетворяющей соотношению $dx/dt = y$, или (с использованием индексов)

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i.$$

Таким образом,

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_{2i}(x, y) = f_{2i}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right).$$

Характеристическое свойство пульверизации, согласно которому функция f_2 квадратична относительно y, переносится без изменений.

В случае римановой пульверизации, описанной в гл. VII, читатель легко проверит, что f_2 — просто квадратичная форма от y. Коэффициенты этой формы являются функциями от x, классическое обозначение для которых Γ^i_{jk}. Эти функции называются *символами Кристоффеля*. Итак, мы имеем по определению

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_k}{dt}.$$

Относительно базиса риманова метрика задается матрицей $g_{ij}(x)$. Обратную матрицу обозначим g^{ij}. Читатель легко проверит, что формула, связывающая риманову метрику с dK в доказательстве теоремы 3 § 6 гл. VII, приводит к равенству

$$-\Gamma^j_{kl} = \frac{1}{2} \sum_i g^{ij} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} \right).$$

Приложение III

ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ[1])

Р. АБРАХАМ

§ 1. Вертикальные касательные

В этом параграфе мы обобщаем понятие частной производной на отображения банаховых расслоений. Пусть $\pi: E \to X$ — расслоение класса C^r. Тогда (см. конец § 3 гл. III) имеется точная последовательность расслоений

$$TE \to \pi^*TX \to 0,$$

ядро которой мы обозначим через VTE.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C^{r-1}-расслоение $V\tau_E = \tau_E | VTE : VTE \to E$, где τ — касательное расслоение, называется *вертикальным касательным расслоением* на E; s-е *вертикальное касательное расслоение* определяется по индукции

$$V\tau_E^s = V\tau_{VT_E^{s-1}}.$$

Заметим, что вертикальное касательное расслоение на E состоит из тех подпространств в пространствах T_eE, которые касаются проходящего через e слоя E_e. Иначе говоря, $VT_eE = T_e(E_e) \subset T_eE$.

Рассмотрим C^r-многообразие F и отображение $f: E \to F$. Для каждой точки $e \in E$ обозначим через f_e ограничение отображения f на слой E_e, $f_e = f | E_e$. Предположим, что для каждого e отображение f_e принадлежит

---

[1]) Это приложение представляет собой перевод двух последних параграфов второй главы и третьей главы записанных и обработанных Р. Абрахамом лекций С. Смейла по дифференциальной топологии. (Abraham R., Lectures of Smale on differential topology, mimeogr.) Переводчик внес в изложение незначительные изменения и некоторые добавления с тем, чтобы согласовать приложение с основным текстом книги и избежать ссылок на непереведенную часть лекций Смейла. — *Прим. ред.*

классу C^s. Тогда можно определить s-е вертикально-касательное отображение $VT^s(f)$ как отображение

$$VT^s(f): VT^s(E) \to T^s(F),$$

которое переводит $\left(v_e^1, \ldots, v_e^s\right)$ в

$$T^s f_e\left(v_e^1, \ldots, v_e^s\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: E \to F$ принадлежит вертикально классу C^t, если отображение $VT^t(f)$ определено и непрерывно, а локальное представление отображения f в карте на E принадлежит классу C_2^t. (Здесь индекс 2 означает дифференцируемость вдоль слоя.) Отображение f принадлежит классу (C^s, VC^t), где $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \leqslant r$, если оно принадлежит классу C^s и вертикально классу C^t.

Следующая теорема очевидна.

ТЕОРЕМА 1. *Если $f: E \to F$ — отображение расслоений класса (C^s, VC^t), а $g: F \to G$ — отображение класса (C^s, VC^t), то отображение $g \circ f: E \to G$ принадлежит классу (C^s, VC^t), $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant r$.*

Пусть $\Gamma^s(\pi)$ и $\Gamma^s(\rho)$ — банаховы пространства C^s-сечений банаховых расслоений $\pi: E \to X$ и $\rho: F \to X$, где X компактно. Если $U \subset E$ такое открытое множество, что отображение $\pi | U$ сюръективно, то через $\Gamma^s(U) \subset \Gamma^s(\pi)$ обозначим открытое множество сечений, образ которых лежит в U. Если $f: U \to F$ — отображение расслоений класса C^s, то через Ω_f обозначим отображение

$$\Omega_f: \Gamma^s(U) \to \Gamma^s(\rho),$$

индуцированное отображением f:

$$\gamma \to f \circ \gamma.$$

ОМЕГА-ЛЕММА. *Если $f: U \to F$ принадлежит классу (C^s, VC^{s+t}), $0 \leqslant s \leqslant s+t$, а X компактно, то Ω_f принадлежит классу C^t.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = 0$. Тогда

$$|\Omega_f(\gamma) - \Omega_f(\gamma_0)|_s = \sup_{x \in X} \sum_{i=0}^{s} |D^i(f(\gamma(x)) - f(\gamma_0(x)))|.$$

Из того что f непрерывно дифференцируемо s раз, следует непрерывность Ω_f. Если теперь $t \neq 0$, то нетрудно получить по индукции, что

$$D^t \Omega_f = \Omega_{VT^t(f)}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим компактные C^r-многообразия X и Y и C^r-расслоение $\pi: E \to Y$. Если задано отображение класса C^r $f: X \to Y$, то мы имеем индуцированное отображение

$$A_f: \Gamma^r(\pi) \to \Gamma^r(f^*\pi),$$

определяемое формулой

$$A_f(\gamma) = \gamma \circ f.$$

АЛЬФА-ЛЕММА. *Если $f: X \to Y$ — отображение класса C^r, то $A_f: \Gamma^r(\pi) \to \Gamma^r(f^*\pi)$ — непрерывное линейное отображение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность очевидна. Докажем непрерывность

$$|A_f\gamma|_r = \sup_{x \in X} \sum_{i=0}^{r} |D^i\gamma(f(x))| \leqslant \sup_{x \in X} \sum_{i=0}^{r} |D^i \gamma_{f(x)}| \, |D^i f(x)|.$$

Отсюда и из того, что γ и f принадлежат классу C^r, следует наша лемма.

§ 2. Многообразия отображений

В этом параграфе в пространство $\mathscr{C}^r(X, Y)$ отображений класса C^r вводится структура банахова многообразия. Это многообразие и его подмногообразия являются наиболее важными нетривиальными примерами банаховых многообразий. Наше изложение близко к изложению Пале [20].

Рассмотрим компактное многообразие X класса C^r, $r \geqslant 1$, и многообразие Y класса C^{r+s+2}, допускающее разбиение единицы. Мы введем структуру многообразия класса C^s в $\mathscr{C}^r(X, Y)$. Построение нетрудно обобщить на случай, когда X — многообразие с краем.

Напомним, что если $\xi: TY \to T^2Y$ есть C^{r+s}-пульверизация на Y, то существуют такая окрестность D_ξ нулевого сечения и такая окрестность диагонали $J_\xi \subset Y \times Y$ что $\exp^\xi : D_\xi \to J_\xi$ представляет собой диффеоморфиз класса C^{r+s}.

Если $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, то мы имеем диффеоморфизм $\xi_f \equiv f^* \exp^\xi : f^* D_\xi \to G_{f,\xi}$, где $G_{f,\xi} \subset X \times Y$ — окрестность гр фика отображения f. Если $U_{f,\xi} \subset \mathscr{C}^r(X, Y)$ состоит и тех отображений g, график которых содержится $G_{f,\xi}$, то $(U_{f,\xi}, \Omega_{\xi_f}^{-1})$, очевидно, является картой дл $\mathscr{C}^r(X, Y)$. Здесь

$$\Omega_{\xi_f}^{-1} : U_{f,\xi} \to \Gamma^r(f^* \tau_Y)$$

— отображение, задаваемое формулой

$$\Omega_{\xi_f}^{-1}(g) = \xi_f^{-1} \circ g.$$

Такую карту назовем *естественной* картой для $\mathscr{C}^r(X, Y$ а совокупность таких карт назовем естественным атласо

ТЕОРЕМА 1. *Если X — компактное многообразие кла са C^r, а Y — допускающее разбиение единицы многоо разие класса C^{r+s+2}, то естественный атлас для $\mathscr{C}^r(X,$ принадлежит классу C^s.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественные карты $(U_{f,\xi}, \varphi_{f,\xi})$ и $(U_{f',\xi'}, \varphi_{f',\xi'})$. Мы предположим, что $U_{f,\xi} = U_{f',\xi'}$ Достаточно доказать, что $\varphi_{f',\xi'} \circ \varphi_{f,\xi}^{-1}$ является C^s-диффе морфизмом. Но ясно, что

$$\varphi_{f',\xi'} \circ \varphi_{f,\xi}^{-1}(\gamma) = \Omega_F(\gamma) = F \circ \gamma,$$

где

$$F = [f'^* \exp^{\xi'}]^{-1} \circ f^* \exp^\xi.$$

Однако ξ и ξ' являются C^{r+s}-пульверизациями, а f и принадлежат классу C^r. Поэтому F принадлежит кл су (C^r, VC^{r+s}). В силу омега-леммы и компактности мн гообразия X получаем, что Ω_F принадлежит классу (Ясно, что $(\Omega_F)^{-1} = \Omega_{F^{-1}}$ и поэтому Ω_F есть диффеом(физм класса C^s.

Начиная с этого места, если X — компактное C^r-мн гообразие, а Y — допускающее разбиение едини C^{r+s+2}-многообразие, то $\mathscr{C}^r(X, Y)$ будет обозначать многообразие, определенное естественным атласом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, то касательное пространство $T_f \mathscr{C}^r(X, Y)$ можно отождествить с $\Gamma^r(f^*TY)$.

Пусть X и Y — компактные многообразия класса C^r, а Z — допускающее разбиение единицы многообразие класса C^{r+s+2}. Если $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, то определено индуцированное отображение

$$\alpha_f : \mathscr{C}^r(Y, Z) \to \mathscr{C}^r(X, Z),$$

задаваемое формулой

$$\alpha_f(g) = g \circ f.$$

АЛЬФА-ТЕОРЕМА. *Если $0 \leqslant s \leqslant r$, то α_f принадлежит классу C^s.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (U_g, φ_g) — естественная карта в g и, таким образом,

$$\varphi_g : U_g \to \Gamma^r(D_g) \subset \Gamma^r(g^*TZ).$$

Тогда существует естественная карта $(U_{\alpha_f g}, \varphi_{\alpha_f g})$, где

$$\varphi_{\alpha_f g} : U_{\alpha_f g} \to \Gamma^r(D_{\alpha_f g}) \subset \Gamma^r(f^* g^* TZ),$$

определенная той же пульверизацией, что и (U_g, φ_g), причем $D_{\alpha_f g} = f^* D_g$, и $\alpha_f : U_g \to U_{\alpha_f g}$. Относительно этих карт локальным представлением отображения α_f является отображение

$$A_f : \Gamma^r(D_g) \to \Gamma^r(D_{\alpha_f g}),$$

действующее по формуле

$$A_f(\gamma) = \gamma \circ f.$$

Согласно альфа-лемме, A_f является непрерывным линейным отображением, и поэтому α_f принадлежит классу C^s.

Рассмотрим теперь компактное C^r-многообразие X и C^{r+s+2}-многообразия Y и Z, допускающие разбиение единицы. Пусть $g : Y \to Z$ — отображение класса C^r. Тогда формула

$$f \to g \circ f$$

задает отображение

$$\omega_g : \mathscr{C}^r(X, Y) \to \mathscr{C}^r(X, Z).$$

ОМЕГА-ТЕОРЕМА. *Если* $0 \leqslant s \leqslant r$ *и* g *принадлежит классу* C^{r+s}, *то* ω_g *принадлежит классу* C^s.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяется, что локальное представление отображения ω_g в естественных картах имеет вид

$$\Omega_G : \Gamma^r(D_f) \to \Gamma^r((\omega_g f)^* \; TZ),$$

$$\Omega_G(\gamma) = G \circ \gamma,$$

где $D_f \subset f^* \, TY$, а $G : D_f \to (\omega_g f)^* TZ$ — некоторое отображение класса (C^r, VC^{r+s}). Поэтому, в силу омега-леммы, ω_g принадлежит классу C^s.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $g : Y \to Z$ — *замкнутое вложение класса* C^{r+s}, $1 \leqslant s \leqslant r$, *то отображение* $\omega_g : \mathscr{C}^r(X, Y) \to \mathscr{C}^r(X, Z)$, *задаваемое формулой* $\omega_g f = g \circ f$, *является замкнутым вложением класса* C^s.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Z допускает разбиение единицы и принадлежит классу C^{r+s+2}, а подмногообразие $g(Y) \subset Z$ замкнуто, на Z существует такая пульверизация ξ, что $\xi \mid g(Y)$ является пульверизацией на $g(Y)$. Действительно, в силу изложенного в § 3 гл. IV, достаточно построить такую пульверизацию локально, и тогда с помощью разбиения единицы можно построить глобальную пульверизацию. Пусть (U, φ) — такая карта в точке $z \in g(Y)$, что $\varphi : U \to E_1 \times E_2$ и

$$\varphi \mid U \cap g(Y) : U \cap g(Y) \to E_1 \times 0.$$

Тогда локальную пульверизацию можно задать с помощью главной части

$$\xi(u, v) = (u, v; v, 0).$$

Очевидно, что она будет удовлетворять нужным условиям.

Теперь если $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, то

$$(\omega_g f)^* \; TZ = (g \circ f)^* TZ = f^* g^* TZ.$$

Но по предположению TY разлагает $g^* \, TZ$, и мы можем записать $g^* \, TZ = TY \oplus NY$, где NY — нормальное расслоение. Таким образом,

$$(\omega_g f)^* \; TZ = f^* \, TY \oplus f^* NY,$$

и

$$\Gamma^r((\omega_g f)^* \, TZ) = \Gamma^r(f^* \, TY) \times \Gamma^r(f^* NY).$$

Пусть $(U_{\omega_g f}, \varphi_{\omega_g f})$ — естественная карта в $\omega_g f \in \mathscr{C}^r(X, Z)$, построенная с помощью указанной выше пульверизации ξ. Тогда

$$\varphi_{\omega_g f} : U_{\omega_g f} \to \Gamma^r(f^* TY) \times \Gamma^r(f^* NY),$$

и, поскольку $\xi \,|\, g(Y)$ является пульверизацией на $g(Y)$,

$$\varphi_{\omega_g f} : U_{\omega_g f} \cap \omega_g[\mathscr{C}^r(X, Y)] \to \Gamma^r(f^* TY) \times 0.$$

Таким образом, ω_g является вложением. В силу омега-теоремы, оно принадлежит классу C^s. Так как $g(Y)$ замкнуто в Z, а X компактно, то очевидно, что $\omega_g[\mathscr{C}^r(X, Y)]$ замкнуто в $\mathscr{C}^r(X, Z)$.

Большое количество теорем такого же типа, описывающих замечательные подмногообразия в $\mathscr{C}^r(X, Z)$, получается в случае, когда X имеет границу. Некоторые из этих теорем были недавно доказаны Смейлом в связи с вариационным исчислением в целом.

Пусть Y — многообразие класса C^{r+s+2} со второй аксиомой счетности и моделью для Y является гильбертово пространство $\mathbf{H}$. Выбрав в Y такой счетный атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}$, что $\varphi_i(U_i)$ есть единичный шар D и прообразы относительно φ_i шаров радиуса $1/2$ покрывают Y, можно с помощью функции g, равной нулю вне единичного шара D и равной единице на замкнутом шаре радиуса $1/2$, построить отображение $\psi_0 = \{\psi_1, \ldots,\}$ многообразия Y в гильбертову сумму[1] $\mathscr{H}$ счетного числа пространств $\mathbf{H} \times \mathbf{R}$. Здесь $\psi_i : Y \to \mathbf{H} \times \mathbf{R}$ задается следующим образом:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{i/2} [g(\varphi_i(x) \cdot \varphi_i(x), g(\varphi_i(x))], & x \in U_i \\ 0, & x \notin U_i. \end{cases}$$

Ясно, что на $\varphi_i^{-1}\left(\frac{1}{2} D\right)$ $\left(\frac{1}{2} D\right.$ обозначает шар радиуса $\left.\frac{1}{2}\right)$ отображение ψ_i является вложением и поэтому ψ_0 является инъективной иммерсией. Заметим, кроме то-

[1]) См. Дьедонне [19].

го, что $\psi_0(Y)$ содержится в шаре радиуса 2 и не содержит нуля.

Пусть $r: \mathscr{H} - 0 \to \mathscr{H}$ — инверсия относительно единичной сферы и $\psi = r \circ \psi_0$. Тогда ψ является инъективной иммерсией в дополнение к шару радиуса 1/2. Покажем, что образ $\psi(Y)$ замкнут. Действительно, пусть $\psi(x_n)$ сходится к $h \in \mathscr{H}$. Тогда $\psi_0(x_n)$ сходится к $h_0 \in \mathscr{H} - 0$, и поэтому, хотя бы для одного i,

$$\psi_i(x_n) \to h_i \in \mathbf{H} \times \mathbf{R} - 0.$$

Значит, все x_n, начиная с некоторого, лежат в U_i. Но $\varphi_i: U_i \to D$ есть диффеоморфизм, и поэтому $\{x_n\}$ сходится к $x \in U_i$. Из изложенного следует, что ψ является вложением.

Из теоремы 2 вытекает теперь полезное следствие.

СЛЕДСТВИЕ. *Если X — компактное многообразие класса C^r, а Y — многообразие класса C^{r+s+2} со второй аксиомой счетности, моделью для которого служит гильбертово пространство, то $\mathscr{C}^r(X, Y)$ можно C^s-изоморфно отобразить на замкнутое подмногообразие банахова пространства.*

Для любой пары C^r-многообразий X и Y определен *отображение значений*

$$\mathrm{ev}: \mathscr{C}^r(X,Y) \times X \to Y$$

при помощи формулы

$$\mathrm{ev}(f, x) = f(x).$$

Исследуем дифференцируемость этого отображения.

ЛЕММА 1. *Если $\pi: E \to X$ — расслоение класса C^r н компактным многообразием X, то отображение знач ний*

$$\mathrm{Ev}: \Gamma^r(\pi) \times X \to E,$$

задаваемое формулой

$$\mathrm{Ev}(\gamma, x) = \gamma(x),$$

принадлежит классу C^r.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентное утвержден что Ev принадлежит классу (C_1^r, C_2^r) в смысле частн производных (см. предложение 14 § 3 гл. I). Во-перв очевидно, что Ev непрерывно. Далее, при фиксированном $x \in X$ имеем отображение

$$\mathrm{Ev}_x : \Gamma^r(\pi) \to E$$

по формуле

$$\mathrm{Ev}_x(\gamma) = \gamma(x),$$

которое является непрерывным линейным отображением в слой. Таким образом, $D_1^p \mathrm{Ev} = \mathrm{Ev}$ и Ev принадлежит классу C_1^r. С другой стороны, при фиксированном сечении $\gamma \in \Gamma^r(\pi)$ имеем отображение

$$\mathrm{Ev}_\gamma : X \to E,$$

при котором

$$\mathrm{Ev}_\gamma(x) = \gamma(x),$$

т. е. $\mathrm{Ev}_\gamma = \gamma$. Частной производной будет отображение

$$T_2^r \mathrm{Ev} : \Gamma^r(\pi) \times T^r X \to T^r(E),$$

такое, что

$$T_2^r \mathrm{Ev}(\gamma, v_x^r) = T^r \gamma(v_x^r).$$

Обозначим через

$$T^r \pi : T^r E \to T^r X$$

r-е касательное отображение расслоения π, а через T^r — отображение

$$T^r : \Gamma^r(\pi) \to \Gamma^0(T^r \pi),$$

переводящее γ в $T^r\gamma$. Мы видим, что $T_2^r \mathrm{Ev}$ является композицией отображения

$$\mathrm{Ev}^r : \Gamma^0(T^r \pi) \times T^r X \to T^r E;$$

$$\mathrm{Ev}^r(\xi, p) = \xi(p),$$

ограниченного на $T^r(\Gamma^r(\pi))$, и отображения

$$T^r \times \mathrm{id} : \Gamma^r(\pi) \times T^r(X) \to \Gamma^0(T^r \pi) \times T^r X,$$

т. е. $T_2^r \mathrm{Ev} = \mathrm{Ev}^r \circ (T^r \times \mathrm{id})$. Поскольку отображения T^r и Ev^r непрерывны, Ev принадлежит классу C_2^r и доказательство закончено.

Предположим теперь, что многообразие X класса C^r компактно, а многообразие Y класса C^{r+s+2} допускает разбиение единицы, так что $\mathscr{C}^r(X, Y)$ является многообразием класса C^s.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $0 \leqslant s \leqslant r$, *то отображение значений*

$$\mathrm{ev}: \mathscr{C}^r(X, Y) \times X \to Y,$$

определенное формулой

$$\mathrm{ev}(f, x) = f(x),$$

принадлежит классу C^s.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эквивалентное утверждение, что отображение

$$\mathrm{Ev}: \mathscr{C}^r(X, Y) \times X \to X \times Y,$$

$$\mathrm{Ev}(f, x) = (x, f(x))$$

принадлежит классу C^s. Если $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, а ξ — пульверизация на Y, то мы имеем естественные карты (U, φ) и (V, ψ) соответственно в $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$ и в графике f, содержащемся в $X \times Y$. Здесь

$$\varphi: U \to \Gamma^r(f^*TY), \quad \varphi(g) = \varphi_g,$$

$$\varphi_g(x) = (f^* \exp^\xi)^{-1}(g(x)),$$

$$\psi: V \to f^*TY, \quad \psi(x, y) = (f^* \exp^\xi)^{-1}(y).$$

В этих картах отображение Ev представляется ограничением отображения

$$\mathrm{Ev}': \Gamma^r(f^*TY) \times X \to f^*TY,$$

$$\mathrm{Ev}'(\gamma, x) = \gamma(x),$$

которое, согласно лемме 1, принадлежит классу C^r.

§ 3. Элементарные свойства трансверсальных отображений

Всюду в дальнейшем X означает многообразие с краем. Y — многообразие, $W \subset Y$ — подмногообразие (Y и W не имеют края). При этом предполагается, что X, Y, W принадлежат классу C^r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: X \to Y$ класса C^r называется *трансверсальным к* W *в точке* $x \in X$, если либо

$f(x) \notin W$, либо $f(x) = w \in W$ и существуют такая окрестность U точки x и такая локальная карта (V, ψ) в $w \in Y$, что

$$\psi : V \to \mathbf{E} \times \mathbf{F},$$
$$\psi | V \cap W : V \cap W \to \mathbf{E} \times 0,$$

$\pi_1 \circ \psi$ — диффеоморфизм множества $V \cap W$ на открытое множество в $\mathbf{E}$ и $\pi_2 \circ \psi \circ f | U$ есть субмерсия. (Здесь $\pi_1 : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ и $\pi_2 : \mathbf{E} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ — проектирования.)

Отображение f называется *трансверсальным к W на подмножестве $K \subset X$* (обозначается $f K \pitchfork W$), если f трансверсально к W в любой точке $x \in K$. Отображение f называется *трансверсальным к W* (обозначается $f \pitchfork W$), если $f X \pitchfork W$.

Если в предложении 3 § 2 гл. II заменить трансверсальность трансверсальностью в точке (оставляя без изменения доказательство), мы получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *C^r-отображение $f : X \to Y$ трансверсально к W в такой точке $x \in X$, что $f(x) = w \in W$ тогда и только тогда, когда композиция отображений*

$$T_x X \xrightarrow{T_x f} T_w Y \to T_w Y / T_w W$$

сюръективна и ее ядро разлагает $T_x X$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $W \subset Y$ имеет конечную коразмерность, то C^r-отображение $f : X \to Y$ трансверсально к W в такой точке x, что $f(x) = w \in W$, если*

$$T_x f (T_x X) + T_w W = T_w (Y).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если C^r-отображение $f : X \to Y$ трансверсально к W, то прообраз $f^{-1}(W)$ является подмногообразием в X. Если $W \subset Y$ имеет конечную коразмерность k, то $f^{-1}(W) \subset X$ имеет ту же коразмерность.*

§ 4. Открытость множества трансверсальных отображений

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое пространство отображений многообразия X в Y, K — подмножество в X, W — подмногообразие в Y, и пусть $\mathcal{A}_{K, W} = \{f \in \mathcal{A} : f | K \pitchfork W\}$. В приложениях возникает вопрос о том, когда $\mathcal{A}_{K,\,W} \subset \mathcal{A}$ открыто. В этом параграфе даются достаточные условия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. C^r-многообразием отображений многообразия X в Y называется такое подмножество $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^r(X, Y)$, что $\mathcal{A}$ есть C^r-многообразие и отображение

$$\operatorname{ev}: \mathcal{A} \times X \to X,$$
$$\operatorname{ev}(f, x) = f(x)$$

принадлежит классу C^r.

Из теорем 1 и 3 § 2 следует, что $\mathcal{C}^r(X, Y)$ является C^r-многообразием отображений, если Y принадлежит классу C^{2r+2}. Кроме того, в этом случае любое C^r-подмногообразие в $\mathcal{C}^r(X, Y)$ является C^r-многообразием отображений.

Нам понадобится одна фундаментальная лемма о линейных отображениях. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$—банаховы пространства и $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ — банахово пространство непрерывных линейных отображений пространства $\mathbf{E}$ в $\mathbf{F}$. Обозначим через $IL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ подмножество разлагающих инъективных отображений, $SL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ — подмножество сюръективных отображений с разлагающим ядром, а $\operatorname{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ — подмножество линейных автоморфизмов.

ЛЕММА 1. *Подмножества* $IL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, $SL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *и* $\operatorname{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *открыты в* $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Открытость множества $\operatorname{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ доказана в предложении 5 § 2 гл. I.

Предположим, что $T \in IL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ и $\mathbf{M} = \operatorname{Im} T$. Тогда, если $\mathbf{K}$ — дополнение к $\mathbf{M}$ в $\mathbf{F}$, то отображение

$$T': \mathbf{E} + \mathbf{K} \to \mathbf{M} + \mathbf{K},$$

$$T'(e, k) = (T(e), k)$$

принадлежит $\operatorname{Lis}(\mathbf{E} + \mathbf{K}, \mathbf{F})$. Но $\operatorname{Lis}(\mathbf{E} + \mathbf{K}, \mathbf{F})$ открыто в $L(\mathbf{E} + \mathbf{K}, \mathbf{F})$, и линейное отображение

$$\rho_{\mathbf{E}}: L(\mathbf{E} + \mathbf{K}, \mathbf{F}) \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F}),$$
$$\rho_{\mathbf{E}}(T') = T'|\mathbf{E}$$

является открытым, так что существует такая окрестность η отображения T' в $\operatorname{Lis}(\mathbf{E} + \mathbf{K}, \mathbf{F})$, что $\rho_{\mathbf{E}}(\eta) \subset IL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$

является окрестностью отображения T в $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$. Предположим, наконец, что $T \in SL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, и пусть $\mathbf{N} = \operatorname{Ker} T$ и $\mathbf{K}$ — дополнение к $\mathbf{N}$ в $\mathbf{E}$. Тогда мы имеем отображение $T' \in \operatorname{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{N} + \mathbf{F})$, определенное формулой

$$T' : \mathbf{N} + \mathbf{K} \to \mathbf{N} + \mathbf{F},$$
$$T'(n, k) = (n, T(k)).$$

Но $\operatorname{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{N} + \mathbf{F})$ открыто в $L(\mathbf{E}, \mathbf{N} + \mathbf{F})$, и линейное отображение

$$\pi_{\mathbf{F}} : L(\mathbf{E}, \mathbf{N} + \mathbf{F}) \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F}),$$
$$\pi_{\mathbf{F}}(T') = \pi \circ T',$$

где проектирование $\pi : \mathbf{N} + \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ является открытым. Таким образом, $SL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ открыто в $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Предостережение: $\operatorname{Lis}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ не является групповым многообразием.

ЛЕММА ОБ ОТКРЫТОСТИ. *Пусть* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{F}$ *— банаховы пространства,* $U \subset \mathbf{E}$ *— открытое множество,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^r(U, \mathbf{F})$ *есть* C^r*-многообразие отображений,* $K \subset U$ *— произвольное компактное множество и* $\mathcal{A}_{K/S} \subset \mathcal{A}$ *— подмножество таких отображений* $f : U \to \mathbf{F}$*, которые представляют собой субмерсии в любой точке* $x \in K$*. Тогда* $\mathcal{A}_{K/S}$ *открыто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение значений

$$\operatorname{ev} : \mathcal{A} \times U \to \mathbf{F},$$
$$\operatorname{ev}(f, x) = f(x).$$

Для каждого $f \in \mathcal{A}$ оно определяет отображение $\operatorname{ev}_f = \operatorname{ev}|\{f\} \times U$, совпадающее с f, и частную производную

$$D_2\operatorname{ev} : \mathcal{A} \times U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F}),$$

которая по предположению непрерывна. Так как $SL(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ открыто в $L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, множество $\mathcal{S} = (D_2\operatorname{ev})^{-1}(SL(\mathbf{E}, \mathbf{F}))$ открыто в $\mathcal{A} \times U$. Пусть теперь $f \in \mathcal{A}_{K/S}$. Тогда по определению $\{f\} \times K \subset \mathcal{S}$. В силу компактности множества K существует такая окрестность U_f отображения $f \in \mathcal{A}$, что $U_f \times K \subset \mathcal{S}$. Таким образом, $U_f \subset \mathcal{A}_{K/S}$, и $\mathcal{A}_{K/S}$ открыто.

ТЕОРЕМА ОБ ОТКРЫТОСТИ. *Если* K *— компактное множество в* X, W *— замкнутое подмногообразие в* Y *и*

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^r(X, Y)$ является C^r-многообразием отображений, то подмножество

$$\mathcal{A}_{K, W} = \{f \in \mathcal{A} : f \pitchfork_K W\}$$

открыто в $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $W \subset Y$ замкнуто, на Y существует такой атлас $\{(V_i, \psi_i)\}$, что при $V_i \cap W \neq \varnothing$ имеем

$$\psi_i : V_i \to \mathbf{E}_i \times \mathbf{F}_i, \quad \psi_i | V_i \cap W : V_i \cap W \to \mathbf{E}_i \times 0,$$

где второе отображение — диффеоморфизм на открытое подмножество. Обозначим через π_2^i проектирование $\pi_2^i : \mathbf{E}_i \times \mathbf{F}_i \to \mathbf{F}_i$ и рассмотрим $f \in \mathcal{A}_{K, W}$. Тогда для каждого такого $x \in K$, что $f(x) \in V_i \cap W$, существует окрестность U_x точки x в X, для которой отображение

$$\pi_2^i \circ \psi_i \circ f | U_x : U_x \to F_i$$

есть субмерсия. Если же $f(x) \notin W$, то существует такая окрестность U_x точки x, что $f(U_x) \cap W = \varnothing$, поскольку $W \subset Y$ замкнуто, а отображение f непрерывно.

В силу компактности K можно выбрать из этих U_x такое конечное покрытие $\{U_i\}$ множества K, что $f(U_i)$ будет содержаться в некотором элементе покрытия $\{V_i\}$. Обозначим $K_i = \overline{U_i \cap K}$. Тогда $\mathcal{A}_{K, W} = \bigcap_i \mathcal{A}_{K_i, W}$. Но $\mathcal{A}_{K_i, W}$ открыто в силу леммы об открытости, так что $\mathcal{A}_{K, W}$ есть пересечение конечного числа открытых множеств.

§ 5. Плотность множества трансверсальных отображений

В этом параграфе даются достаточные условия плотности множества трансверсальных отображений.

ЛЕММА О ПЛОТНОСТИ. *Если X имеет конечную размерность n, $W \subset Y$ имеет конечную коразмерность q, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^r(X, Y)$ является C^r-многообразием отображений, где $r \geqslant \max(n - q, 0)$, а отображение значений трансверсально к W в точке $(f, x) \in \mathcal{A} \times X$, то существует такая окрестность $\mathcal{U}$ отображения $f \in \mathcal{A}$ и такая* *окрестность V точки $x \in X$, что $\mathcal{U}_{V, W} \subset \mathcal{U}$ плотно в $\mathcal{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предположим сначала, что $f(x) \notin W$. В этом случае, поскольку W замкнуто и отображение значений непрерывно, существуют такие окрестности $\mathcal{U}$ отображения $f \in \mathcal{A}$ и V точки $x \in X$, что $\mathrm{ev}(\mathcal{U} \times V) \cap W = \varnothing$, так что $\mathcal{U}_{V, W} = \mathcal{U}$.

Предположим теперь, что $f(x) = w \in W$. В этом случае доказательство опирается на следующие три предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если отображение значений трансверсально к W в (f, x) и $f(x) = w \in W$, то существуют такие окрестности $\mathcal{U}$ отображения $f \in \mathcal{A}$ и V — точки $x \in X$, что каждое $g \in \mathcal{U}$ содержится в p-мерном подмногообразии Σ_g^p, на котором $\mathrm{ev}|\Sigma_g^p \times V \pitchfork W$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению § 3 существуют такие карты $(\mathcal{U}_0, \eta)$ в точке $f \in \mathcal{A}$, (V_0, φ) в точке $x \in X$ и (U_0, ψ) в $W \in Y$, что выполнены следующие условия:

а) $\eta : \mathcal{U}_0 \to \mathbf{E}, \quad \eta(\mathcal{U}_0) = \mathcal{U}_0'$,

б) $\varphi : V_0 \to \mathbf{R}^n, \quad \varphi(V_0) = V_0'$,

в) $\mathrm{ev} : \mathcal{U}_0 \times V_0 \to U_0$,

г) $\psi : U_0 \to \mathbf{F} \times \mathbf{R}^q$, $\psi : U_0 \cap W \to \mathbf{F} \times 0$. (Здесь второе отображение — диффеоморфизм на открытое множество в $\mathbf{F} \times 0$.)

д) Отображение $\alpha \equiv \pi \circ \psi \circ \mathrm{ev}|\, \mathcal{U}_0 \times V_0 : \mathcal{U}_0 \times V_0 \to \mathbf{R}^q$ является субмерсией. Здесь $\pi : \mathbf{F} \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$ — проектирование.

Положим по определению

$$\beta = \alpha \circ |\eta \times \varphi|^{-1} : \mathcal{U}_0' \times V_0' \to \mathbf{R}^q,$$

где $\mathcal{U}_0' \times V_0' \subset \mathbf{E} \times \mathbf{R}^n$. Тогда по предположению производная $D\beta(0, 0)$ сюръективна, так что существует конечномерное подпространство $\mathbf{R}^p \subset \mathbf{E}$, $0 \leqslant p \leqslant q$, для которого

$$D\beta(0, 0)(\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^q. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathbf{F}$ замкнутое дополнение к $\mathbf{R}^p \subset \mathbf{E}$ и отождествим $\mathbf{E}$ с $\mathbf{F} \times \mathbf{R}^p$. Тогда если $\mathscr{V}'_0$ и $\mathscr{W}'_0$ — окрестности нуля соответственно в $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}^p$ и $\mathscr{V}'_0 \times \mathscr{W}'_0 \subset \mathscr{U}'_0$, то $\beta : \mathscr{V}'_0 \times (\mathscr{W}'_0 \times V'_0) \to \mathbf{R}^q$, $\mathscr{V}'_0 \times (\mathscr{W}'_0 \times V'_0) \subset \mathbf{F} \times (\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n)$ и частная производная по $(\mathscr{W}'_0 \times V'_0)$ отображения β в точке $(0, 0)$ согласно (1) сюръективна,

$$D_2 \beta (0,\ 0) (\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^q. \tag{2}$$

Но отображение

$$D_2 \beta : \mathscr{V}'_0 \times (\mathscr{W}'_0 \times V'_0) \to L (\mathbf{R}^{p+n},\ \mathbf{R}^q)$$

непрерывно и $SL(\mathbf{R}^{p+n}, \mathbf{R}^q) \subset L(\mathbf{R}^{p+n}, \mathbf{R}^q)$ открыто, согласно лемме 1 § 4, так что в $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}^p$ и R^q существуют такие окрестности нуля $\mathscr{V}'_1$, $\mathscr{W}'_1$, V'_1, что

$$\mathscr{V}'_1 \times \mathscr{W}'_1 \times V'_1 \subset \mathscr{V}'_0 \times \mathscr{W}'_0 \times V'_0$$

и

$$D_2 \beta : \mathscr{V}'_1 \times (\mathscr{W}'_1 \times V_1) \to SL (\mathbf{R}^{p+n},\ \mathbf{R}^q). \tag{3}$$

Пусть теперь $\mathscr{U} = \eta^{-1} (\mathscr{V}'_1 \times \mathscr{W}'_1) \subset \mathscr{U}_0$ и $V = \varphi^{-1} (V'_1) \subset V_0$. Для каждого $g \in \mathscr{U}$, для которого $\eta(g) = (v, w) \in \mathbf{F} \times \mathbf{R}^p$, положим $\sum_g^p = \eta^{-1} (\{v\} \times \mathscr{W}'_1)$. Таким образом, $\sum_g^p$ есть p-мерное подмногообразие в $\mathscr{U}$ и из равенства (3) следует, что отображение

$$\mathrm{ev} | \textstyle\sum_g^p \times V : \sum_g^p \times V \to Y$$

трансверсально к W.

Для того чтобы сформулировать второе предложение, обозначим через $\sum^p$ p-мерное подмногообразие в $\mathscr{A}$, через V — открытое подмножество в X. Пусть $\xi = \mathrm{ev} | \sum^p \times V$ трансверсально к W. Тогда $W' = \xi^{-1}(W)$ — подмногообразие в $\sum^p \times V$ коразмерности q. Пусть $\sigma : W' \to \sum^p$ означает ограничение на W' проектирования $\sum^p \times V \to \sum^p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если σ трансверсально к точке $f \in \sum^p$, то f трансверсально на V к W.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если σ трансверсально к $\{f\}$, то для каждой такой точки $(f, x) \in \sum^p \times V$, что $f(x) = w \in W$ мы имеем, согласно следствию из теоремы 1 § 3,

$$T_{(f,\ x)} \sigma (T_{(f,\ x)} W') = T_f \textstyle\sum^p.$$

Таким образом, касательное пространство к $\Sigma^p\times V$ в точке $(f,\ x)$ разлагается в сумму

$$T_{(f,x)}(\Sigma^p\times V)=T_{(f,x)}W'+T_xV. \tag{4}$$

Но по предположению отображение ξ трансверсально к W, так что по тому же следствию из теоремы 1 § 3

$$T_{(f,x)}\xi[T_{(f,x)}(\Sigma^p\times V)]+T_wW=T_wY. \tag{5}$$

Подставляя (4) в (5), получаем

$$T_xf(T_xX)+T_wW=T_wY, \tag{6}$$

поскольку $T_{(f,x)}\xi(T_{(f,x)}W')\subset T_wW$ и

$$T_{(f,x)}\xi(T_xV)=T_xf(T_xX).$$

Итак, для каждого такого $x\in V$, что $f(x)=w\in W$, выполнено равенство (6). Отсюда следует $f\,|\,V\pitchfork W$.

Последнее предложение — известная теорема Сарда [21]. Пусть $f: X\to Y$ — произвольное C^1-отображение. Точка $y\in Y$ называется *критическим значением* отображения f, если неверно утверждение, что $f\pitchfork\{y\}$. Пусть $\chi_f\subset Y$ — множество всех критических значений отображения f.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (Сард). *Если отображение* $f: \mathbf{R}^s\to\mathbf{R}^t$ *принадлежит классу* C^r, *где* $r>\max\,(s-t,\ 0)$, *то* $\chi_f\subset\mathbf{R}^t$ *имеет внешнюю меру нуль.*

Теперь для доказательства леммы о плотности заметим, что $\dim\,(\Sigma^p\times V)=p+n$, $\operatorname{codim}\,(W')=q$, так что $s=\dim(W')=\max(p+n-q,-1)$ и локально $\sigma: \mathbf{R}^s\to\mathbf{R}^p$. Значит, $t=p$ и $\max(s-t,0)=\max(n-q,\ 0)$. Поэтому лемма следует из наших трех предложений.

Напомним, что *множество второй категории* в топологическом пространстве — это счетное пересечение открытых всюду плотных множеств. Пространство Бэра — это пространство, в котором всякое множество второй категории всюду плотно. Согласно теореме Бэра, банахово многообразие является пространством Бэра.

ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ. *Обозначим через* X n*-многообразие с краем,* K *— произвольное подмножество в* X, *являющееся объединением счетного числа компактов,* Y *— банахово многообразие (без края) и* W *— замкнутое подмногообразие (без края) в* Y *конечной коразмерности* q.

Предполагается, что все многообразия являются многообразиями класса C^r. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^r(X, Y)$ есть C^r-многообразие отображений, и $\mathcal{A}_{K,W} = \{f \in \mathcal{A} : f \mid K \pitchfork W\}$. Если отображение значений

$$\mathrm{ev} : \mathcal{A} \times X \to X,$$
$$\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$$

трансверсально к W на $\mathcal{A} \times K$ и $r > \max(n-q, 0)$, то $\mathcal{A}_{K,W}$ есть множество второй категории в $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $K \subset X$ компактно и $f \in \mathcal{A}$. Тогда по лемме о плотности существует такой конечный набор пар $\{(\mathcal{U}^i, V^i)\}_{i=1}^N$ окрестностей $\mathcal{U}^i$ отображения $f \in \mathcal{A}$ и открытых в X множеств V^i, что $\{V^i\}_{i=1}^N$ покрывает K, и для каждого i множество $\mathcal{U}^i_{V^i, W}$ плотно в $\mathcal{U}^i$. Пусть $\mathcal{U}^f = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}^i$ и $V = \bigcup_{i=1}^N V^i$. Тогда $\mathcal{U}^f_{V,W} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{U}^i_{V^i, W}$ плотно в $\mathcal{U}^f$, и $\mathcal{U}^f_{V,W} \subset \mathcal{A}_{K,W}$.

Поскольку каждое f обладает такой окрестностью $\mathcal{U}^f$, множество $\mathcal{A}_{K,W} \subset \mathcal{A}$ плотно. По теореме об открытости § 4 $\mathcal{A}_{K,W}$ открыто.

Пусть теперь $K = \bigcup K_i$, где K_i — компакты. В этом случае $\mathcal{A}_{K,W} = \bigcap \mathcal{A}_{K_i, W}$, и в силу только что доказанного $\mathcal{A}_{K,W}$ представляет собой множество второй категории, что и требовалось.

В теореме о плотности требование замкнутости подмногообразия $W \subset Y$ представляется стеснительным, но оно и не необходимо. В действительности вложение $e : W \to Y$ можно следующим образом заменить произвольным отображением $f : W \to Y$.

Пусть X — многообразие с краем, Y и Z — многообразия (без края), $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$ — дифференцируемые отображения. Через $\Delta \subset Y \times Y$ обозначим диагональ

$$\Delta = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y : y_1 = y_2\}.$$

Ясно, что Δ есть замкнутое подмногообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображения $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$ назовем *трансверсальными в точках $x \in X$ и $z \in Z$*, если $f \times g$:

$X\times Z\to Y\times Y$ трансверсально к Δ в точке (x, z) в смысле определения § 3. Отображения *трансверсальны на множествах* $K\subset X$ и $M\subset Z$ (обозначается $f\mid K\pitchfork g\mid M$), если $f\times g\mid K\times M\pitchfork\Delta$. Отображения *трансверсальны* ($f\pitchfork g$), если $f\times g\pitchfork\Delta$.

Это определение выявляет присущую понятию трансверсальности симметрию. Определение можно, очевидно, обобщить на случай более чем двух многообразий, отображаемых в одно и то же многообразие. Далее, чтобы сделать симметрию полной, нужно считать, что все отображаемые многообразия имеют край. В этом случае их произведение будет многообразием с углами. Все рассуждения этого параграфа могут быть обобщены в этих двух направлениях без существенных изменений, однако мы не будем останавливаться на этом, поскольку для приложений это нам не понадобится.

Чтобы сформулировать последний вариант теоремы о плотности, рассмотрим C^r-многообразия отображений $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}^r(X, Y)$ и $\mathcal{B}\subset\mathcal{C}^r(Z, Y)$, причем X — многообразие с краем, Y и Z — многообразия без края и все они конечномерны. Пусть K и M — подмножества соответственно в X и Z,

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B}_{K\times M}=\{(f, g)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B} : f\mid K\pitchfork g\mid M\}.$$

Через $\mathrm{ev}_{\mathcal{A}}$ и $\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}$ обозначим отображения значений многообразий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $\mathrm{ev}_{\mathcal{A}}\mid\mathcal{A}\times K\pitchfork\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}\mid\mathcal{B}\times M$ *и*

$$r>\max(\dim X+\dim Z-\dim Y,\ 0),$$

то $\mathcal{A}\times\mathcal{B}_{K\times M}\subset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ *— множество второй категории.*

Утверждение немедленно вытекает из определения и теоремы о плотности. В частности, если в нем предположить, что $\mathcal{B}$ состоит из единственного отображения g, и через $\mathcal{A}_{K,g}$ обозначить множество $\{f\in\mathcal{A} : f\mid K\pitchfork g\mid Z\}$, то мы получим

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $\mathrm{ev}_{\mathcal{A}}\mid\mathcal{A}\times K\pitchfork g$ *и*

$$r>\max(\dim X+\dim Z-\dim Y,\ 0),$$

то $\mathcal{A}_{K,g}\subset\mathcal{A}$ *есть множество второй категории.*

Если в этом следствии считать, что g — вложение и через W обозначить образ, то мы получим теорему о плотности без условия замкнутости на W.

§ 6. Струи

Мы дадим несколько приложений теоремы о плотности, но предварительно сделаем необходимое для первого из них отступление о струях. Рассмотрим C^r-многообразия без края X и Y и k-е итерированное касательное расслоение $T^kX = T(T^{k-1}X)$. Если $f: X \to Y$ — отображение класса C^k $0 \leqslant k \leqslant r$, то через $T^kf = T(T^{k-1}f)$ обозначим итерированное касательное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображения $f, g \in \mathscr{C}^k(X, Y)$ называются *k-эквивалентными в точке $x \in X$* (записывается $f \underset{x}{\overset{k}{}} g$), если $T^p_x f = T^p_x g$ для $p \leqslant k$.

Для k-эквивалентности имеется следующая локальная характеристика. Пусть (U, φ) и (V, ψ) — локальные карты в $x \in X$ и $y \in Y$, отображения $f, g \in \mathscr{C}^k(X, Y)$ таковы, что $f(x) = g(x) = y$, и $f, g: U \to V$. Обозначим через $f', g': U' \to V'$ локальные представления отображений f и g. Здесь $U' = \varphi U$, $V' = \psi V$.

ЛЕММА 1. *Отображения f и g являются k-эквивалентными в $x \in X$ тогда и только тогда, когда $D^p f'(x') = D^p g'(x')$, где $p = 0, 1, \ldots, k$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $f \in \mathscr{C}^k(X, Y)$ и $f(x) = y$, то через $[f]^k_{(x,y)}$ обозначим содержащий f класс отображений, k-эквивалентных в точке x. Множество $J^k(X, Y)$ всех классов эквивалентности $[f]^k_{(x,y)}$ при фиксированном k называется *k-струйным расслоением* на $X \times Y$. Естественное отображение

$$\pi^k: J^k(X, Y) \to X \times Y,$$

задаваемое формулой

$$\pi^k([f]^k_{(x,y)}) = (x, y),$$

называется *k-струйным проектированием.* Если $f \in \mathscr{C}^k(X, Y)$, то индуцированное отображение

$$j^kf: X \to J^k(X, Y),$$

задаваемое формулой

$$j^kf(x) = [f]^k_{(x, f(x))},$$

называется *k-струйным расширением отображения f.*

Предостережение. Струйное расслоение не является банаховым.

Опишем некоторые локальные карты для k-струйных расслоений.

Пусть (U, φ) и (V, ψ) — локальные карты соответственно в X и Y

$$\varphi : U \to \mathbf{E}, \ \psi : V \to \mathbf{F},$$

и пусть $f' \in \mathscr{C}^k(U', V')$ обозначает локальное представление отображения $f \in \mathscr{C}^k(X, Y)$. Обозначим $W = (\pi^k)^{-1}(U \times V)$, и

$$\tau_i : W \to U' \times V' \times L(\mathbf{E}, \ \mathbf{F}) \times \ldots \times L_s^k(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

отображение, задаваемое формулой

$$\tau_i([f]^k_{(x,y)}) = (x', \ y', \ Df'(x'), \ldots, D^k f'(x')),$$

где $(x, y) \in U \times V$, $y = f(x)$ $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$. Из леммы ясно, что это отображение биективно и $\tau_i(W)$ — открытое подмножество в банаховом пространстве

$$\mathbf{E} \times \mathbf{F} \times L(\mathbf{E}, \ \mathbf{F}) \times \ldots \times L_s^k(\mathbf{E}, \ \mathbf{F}).$$

Пара (W, τ_i) является *естественной локальной картой* для $J^k(X, Y)$. Если $\{(U^i, \varphi^i)\}$ и $\{(V^\alpha, \psi^\alpha)\}$ — атласы соответственно для X и Y, то ассоциированные естественные локальные карты $(W^{i\alpha}, \tau_i^{i\alpha})$, где $W^{i\alpha} = (\pi^k)^{-1}(U^i \times V^\alpha)$, образуют естественный атлас для $J^k(X, Y)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если X и Y принадлежат классу C^r и $k \leqslant r$, то каждый естественный атлас для $J^k(X, Y)$ принадлежит классу C^{r-k}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (U, φ_1) и (U, φ_2) — локальные карты на X, а (V, ψ_1) и (V, ψ_2) — локальные карты на Y, где $\varphi_i : U \to \mathbf{E}$, $\psi_i : V \to \mathbf{F}$, $i = 1, 2$. Пусть $W = (\pi^k)^{-1}(U \times V)$ и

$$\tau_{ii} : W \to U' \times V' \times L(\mathbf{E}, \ \mathbf{F}) \times \ldots \times L_s^k(\mathbf{E}, \ \mathbf{F}) \qquad (i = 1, \ 2)$$

— локальные отображения, определенные соответственно отображениями (φ_1, ψ_1) и (φ_2, ψ_2). Достаточно показать, что отображение $\xi = \tau_{i2} \circ \tau_{i1}^{-1}$ принадлежит классу C^{r-k}, если а) $\varphi_1 = \varphi_2$ и б) $\psi_1 = \psi_2$.

а) Пусть $f \in \mathscr{C}^r(X, \ Y)$, $\varphi_1(U) = U'$, $\psi_1(V) = V'$ и $\psi_2(V) = V''$. Обозначим через $f' : U' \to V'$ и $f_i'' : U' \to V''$ локальные представления отображения f, так что $f'' = \beta \circ f$, если $\beta = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$. Тогда если отображение

$$\xi: U'\times V'\times L(\mathbf{E},\ \mathbf{F})\times\ldots\times L_s^k(\mathbf{E},\ \mathbf{F})\to U'\times V''\times L(\mathbf{E},\ \mathbf{F})\times\ldots$$
$$\ldots\times L_s^k(\mathbf{E},\ \mathbf{F})$$

мы зададим формулой $\xi:(u',\ v',\ l_1,\ldots,l_k)\to(u',\ \xi_0,\ldots,\xi_k)$, и если $f'(u')=v'$ и $D^p f'(u')=l_p$, то получим $\xi_p=D^p f''(u')$. Учитывая формулу дифференцирования сложной функции (ее легко доказать по индукции, используя формулу Лейбница ([19], форм. (8,13,2)), получаем

$$\xi_p(u',\ v',\ l_1,\ldots,l_k)=\sum_{j=1}^{p} D^j\beta(v')\circ\sum_{i_1+\ldots+i_j=p}\sigma_j^p(i_1,\ldots,i_j)l_{i_1}\oplus\ldots\oplus l_{i_j},$$

где σ_j^p — некоторые положительные целые числа.

Таким образом, ξ_p принадлежат классу C^{r-p}, и, значит, ξ принадлежит классу C^{r-k}.

б) Пусть f то же, что и прежде, и $\varphi_1(U)=U'$, $\varphi_2(U)=U''$. Мы имеем $f': U'\to V'$, $f'': U''\to V'$ и $f''=f'\circ\circ\alpha^{-1}$, где $\alpha=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$. Полагая $D^p f'(u')=l_p$, мы получаем $\xi_p=D^p f''(u'')$, или, по формуле дифференцирования сложной функции,

$$\xi_p(u',\ v',\ l_1,\ldots,l_k)=$$
$$=\sum_{j=1}^{p} l_j\circ\Bigg(\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_j=p\\ 1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_j}}\sigma_j^p(i_1,\ldots,i_j)D^{i_1}\alpha^{-1}\oplus\ldots\oplus D^{i_j}\alpha^{-1}\Bigg)(\alpha u').$$

Отсюда следует, что ξ_p принадлежит классу C^{r-p}, а ξ — классу C^{r-k}.

Рассмотрим теперь k-струйное расширение. Если $f\in\mathscr{C}^r(X,Y)$ и $k\leqslant r$, то отображение $j^k f: X\to J^k(X,Y)$ имеет в естественных картах локальное представление вида $(u',\ f',(u'),\ Df'(u'),\ldots,D^k f'(u'))$. Таким образом, $j^k f\in\in\mathscr{C}^{r-k}(X,J^k,(X,Y))$, и мы можем рассматривать k-струйное расширение как отображение

$$j^k:\mathscr{C}^r(X,\ Y)\to\mathscr{C}^{r-k}(X,\ J^k(X,\ Y)).$$

Пусть X и Y — многообразия класса C^{2r+2}, допускающие разбиение единицы, и X компактно, так что по теореме 1 § 2 $\mathscr{C}^r(X,Y)$ и $\mathscr{C}^{r-k}(X,\ J^k(X,Y))$ принадлежат соответственно классу C^r и классу C^{r-k}.

ТЕОРЕМА 2. *k-струйное расширение является вложением многообразия $\mathscr{C}^r(X,\ Y)$ в $\mathscr{C}^{r-k}(X,\ J^k(X,\ Y))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда Y — банахово пространство. Тогда $J^k(X, Y)$, $\mathscr{C}^r(X, Y)$ и $C^{r-k}(X, J^k(X, Y))$ — банаховы пространства, а j^k — непрерывное линейное отображение. Мы имеем проектирования $\pi^k : J^k(X, Y) \to X \times Y$ и $\pi_Y : X \times Y \to Y$. Обозначив $\pi_Y^k = \pi^k \circ \pi_Y$, мы видим, что $\pi_Y^k \circ j^k(f) = f$, так что j^k инъективно. Наконец, отображение

$$\omega_{\pi_Y^k} : \mathscr{C}^{r-k}\left(X, J^k(X, Y)\right) \to \mathscr{C}^{r-k}(X, Y),$$

задаваемое формулой

$$\omega_{\pi_Y^k}(F) = \pi_Y^k \circ F,$$

очевидно, линейно непрерывно и сюръективно. Следовательно, если $F = j^k f$, $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, то $\omega_{\pi_Y^k}^{-1}(f)$ является замкнутым дополнением в точке F к $j^k(\mathscr{C}^r(X, Y))$.

Таким образом, j^k есть вложение.

Все изложенное выше легко обобщить на случай, когда X или Y (или оба вместе) являются многообразиями с краем.

§ 7. Приложения

Теперь перейдем к первому приложению теоремы о плотности: теореме Тома о трансверсальности. Рассмотрим C^r-многообразие X с краем и C^r-многообразие Y (без края). В множество $\mathscr{C}^r(X, Y)$ можно следующим образом ввести топологию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *C^r-топология компактной сходимости* на $\mathscr{C}^r(X, Y)$ — это топология, индуцированная открыто компактной топологией на $(\mathscr{C}^0(X, J^r(X, Y))$, при помощи отображения j^r.

Всюду в дальнейшем $\mathscr{C}^r(X, Y)$ обозначает пространство C^r-отображений с C^r-топологией компактной сходимости. Если многообразие X компактно, а многообразие Y принадлежит классу C^{2r+2}, то введенная ранее топология C^r-многообразия на $\mathscr{C}^r(X, Y)$ совпадает с новой топологией. Известно, что $\mathscr{C}^r(X, Y)$ есть пространство Бэра.

Предположим теперь, что X и Y — многообразия класса C^{2r+2}, а W — многообразие класса C^{r-k}. Пусть все они конечномерны, X — многообразие с краем, а Y и W — без края.

Если $F \in \mathscr{C}^{r-k}(W, J^k(X, Y))$, то через $\mathscr{C}^r_F(X, Y)$ обозначим подпространство отображений $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, для которых $j^k f \pitchfork F$.

ТЕОРЕМА ТОМА О ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ. *Если*

$$r > \max(\dim X + \dim W - \dim J^k(X, Y),\ 0),$$

то $\mathscr{C}^r_F(X, Y) \subset \mathscr{C}^r(X, Y)$ — *подпространство второй категории, каково бы ни было* C^{r-k}*-отображение*

$$F : W \to J^k(X, Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что X компактно, так что $\mathscr{C}^r(X, Y)$ является многообразием. Пусть $\mathscr{A} = j^k[\mathscr{C}^r(X, Y)]$. Из теоремы 2 § 5 ясно, что $\mathscr{A}$ является C^{r-k}-многообразием отображений в смысле определения § 4. Кроме того, стандартные рассуждения в локальных картах показывают, что для любой пары $(j^k f, x) \in \mathscr{A} \times X$ отображение $T(\mathrm{ev})(j^k f, x)$ сюръективно. Следовательно, отображение значений трансверсально к любому $F : W \to J^k(X, Y)$. Таким образом, если

$$r > \max(\dim X + \dim W - \dim J^k(X, Y),\ 0),$$

то из теоремы об открытости и следствия 2 из теоремы о плотности следует, что $\mathscr{A}_{X, F}$ открыто и плотно в $\mathscr{A}$.

Пусть теперь X некомпактно, $\{X^i\}$ — счетное покрытие пространства X компактными многообразиями с краем, и

$$\mathscr{A}^i = j^k(\mathscr{C}^r(X^i, J^k(X, Y))).$$

Тогда мы имеем отображение ограничения

$$\rho_i : \mathscr{A} \to \mathscr{A}_i,$$

задаваемое формулой

$$\rho_i(j^k f) = j^k f \mid X.$$

Ясно, что ρ_i непрерывно, и значит множества $\mathscr{A}_{X^i, F} = \rho_i^{-1}\left(\mathscr{A}^i_{X^i, F}\right)$ открыты и плотны в $\mathscr{A}$. Но $\mathscr{A}_{X, F} = \bigcap_i \mathscr{A}_{X^i, F}$, так что $\mathscr{A}_{X, F}$ — множество второй категории в $\mathscr{A}$.

В качестве приложения теоремы Тома мы покажем сейчас, что для многообразий соответствующих размерностей любое отображение можно аппроксимировать иммерсией. Рассмотрим C^{2r+2}-многообразие X с краем, имеющее конечную размерность s, C^{2r+2}-многообразие Y (без края) конечной размерности t и подпространство иммерсий $\mathrm{Im}^r(X, Y) \subset \mathscr{C}^r(X, Y)$ ($\mathscr{C}^r(X, Y)$ рассматривается в топологии компактной сходимости).

ТЕОРЕМА УИТНИ ОБ ИММЕРСИЯХ. *Если $r \geqslant 2$ и $t \geqslant 2s$, то $\mathrm{Im}^r(X, Y)$ — множество второй категории в $\mathscr{C}^r(X, Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W^k \subset J^1(X, Y)$ — множество таких струй $j^1f(x)$, что в естественной карте отображение $Df(x)$ имеет ранг k ($k = 0, 1, \ldots, s$). Это условие не зависит от выбора карты, и ясно, что W^k — подмногообразие коразмерности $q_k = st - k(s + t - k)$. Пусть $W = W^0 \cup W^1 \cup \ldots \cup W^{s-1}$. Отображение $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$ тогда и только тогда является иммерсией, когда $j^1f(X) \cap W \neq \varnothing$. Наименьшим из чисел $q_0, \ldots, q_{s-1}$, очевидно, является $q_{s-1} = t - s + 1$. Поскольку $r \geqslant 2$ и $t \geqslant 2s$, мы имеем $s - q_k \leqslant s - q_{s-1} = 2s - t - 1 \leqslant -1$, так что $r > s - q_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, s - 1$ и из $j^1f \pitchfork W^k$ следует, что $j^1f(X) \cap W^k = \varnothing$ при всех $k = 0, 1, \ldots, s - 1$. Из теоремы Тома о трансверсальности следует, что множество $\mathscr{C}^r_W(X, Y)$ таких отображений $f \in \mathscr{C}^r(X, Y)$, что $j^1f \pitchfork W^k$ при всех $k = 0, \ldots, s - 1$, имеет вторую категорию. Поскольку из $j^1f \pitchfork W^k$ следует, что $j^1f(X) \cap W^k = \varnothing$, мы видим, что $\mathscr{C}^r_W(X, Y) = \mathrm{Im}^r(X, Y)$.

Дадим теперь прямое приложение теоремы о плотности. Пусть X — компактное C^r-многообразие с краем, имеющее конечную размерность s, Y — многообразие класса C^{2r+2} (без края) конечной размерности t, так что $\mathscr{C}^r(X, Y)$ есть C^r-многообразие отображений. Обозначим через $\mathrm{Inj}^r(X, Y) \subset \mathscr{C}^r(X, Y)$ подпространство инъективных отображений.

ТЕОРЕМА 1. *Если X компактно и $t \geqslant 2s + 1$, то $\mathrm{Inj}^r(X, Y)$ является открытым и плотным подмногообразием в $\mathscr{C}^r(X, Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathscr{A}$ — диагональ в $\mathscr{C}^r(X, Y) \times \mathscr{C}^r(X, Y)$, Δ_X — диагональ в $X \times X$, $K = X \times X - \Delta_X$ и

Δ_Y — диагональ в $Y \times Y$. Тогда ясно, что биективное отображение

$$\delta : \mathscr{C}^r(X, Y) \to \mathscr{A}$$

по формуле

$$\delta(f) = (f, f)$$

задает на $\mathscr{A}$ структуру C^r-многообразия отображений. Поскольку $t \geqslant 2s + 1$, мы имеем

$$\dim X \times X - \operatorname{codim}(\Delta_Y) = 2s - t \leqslant -1.$$

Отсюда

1) $r > \dim(X \times X) - \operatorname{codim}(\Delta_Y)$ при любом r,

2) $\mathscr{A}_{K, \Delta_Y} = \delta[\operatorname{Inj}^r(X, Y)]$, поскольку из $(f, f) | K \pitchfork \Delta_Y$ следует, что $(f, f)(K) \cap \Delta Y = \varnothing$.

Из формулы (1), теоремы о плотности и теоремы об открытости следует, что $\mathscr{A}_{K, \Delta_Y}$ — открытое и плотное подмножество в $\mathscr{A}$. Поскольку $\delta : \mathscr{C}^r(X, Y) \to \mathscr{A}$ является по определению диффеоморфизмом, теорема следует из формулы (2).

Пусть X и Y — те же, что и выше, и $\operatorname{Em}^r(X, Y) \subset \subset \mathscr{C}^r(X, Y)$ — подмногообразие вложений. Поскольку инъективная иммерсия компактного многообразия является вложением, мы получаем немедленно из теоремы Уитни и теоремы 1

следствие. *Если* $r \geqslant 2$, $t \geqslant 2s + 1$ *и* X *компактно, то* $\operatorname{Em}^r(X, Y)$ — *открытое и плотное подмногообразие в* $\mathscr{C}^r(X, Y)$.

Этот результат можно обобщить на случай некомпактного X с помощью следующей леммы, легко вытекающей из теоремы Сарда.

лемма. *Если* X — *паракомпактное конечномерное* C^r-*многообразие без края и* $r > \dim X$, *то существует такое счетное множество* $\{X^i\}$ *компактных конечномерных* C^r-*многообразий с краем, что* $\dim X^i = \dim X$, $X^i \subset \operatorname{Int} X^{i+1}$ *и* $\bigcup_i X^i = X$.

доказательство. Во-первых, заметим, что на любом непустом C^r-многообразии без края со счетной базой, допускающем разбиение единицы класса C^r, существует положительная собственная функция класса C^r. Действительно, если $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетные покрытия многообразия X и U_n открыто, K_n компактно, $U_n \subset K_{n+1}$ и $K_n \subset U_n$ при всех n, и если $\{g_n\}$ — такое ассоциированное C^r-разбиение единицы, что $g_n | K_n - U_{n-1} = 1$, $g_n | X - U_n = 0$, и $\sum g_n = 1$, то $f = \sum n g_n$ является положительной собственной функцией класса C^r. Далее, поскольку $r > \dim X - 1$, множество критических значений функций f нигде не плотно в $\mathbf{R}$ в силу теоремы Сарда (предложение 3 § 5). Следовательно, для каждого целого i найдется такая точка $y_i \in (i-1, i]$, что $f \pitchfork y_i$. Значит, $f^{-1}(y_i)$ будет подмногообразием в X коразмерности 1. Пусть $Y^i = [0, y_i]$ и $X^i = f^{-1}(Y^i)$. Поскольку функция f собственная, X^i компактно. Таким образом, X^i — компактное многообразие с краем $\partial X^i = f^{-1}(y^i)$ и $\dim X^i = \dim X$.

Сопоставляя эту лемму со следствием из теоремы 1, мы получаем следующий классический результат.

ТЕОРЕМА УИТНИ О ВЛОЖЕНИИ. *Если X — паракомпактное C^r-многообразие без края конечной размерности s, а Y — C^{2r+2}-многообразие без края конечной размерности t, $r \geqslant \max(\dim X, 2)$ и $t \geqslant 2s+1$, то $\mathrm{Em}^r(X, Y) \subset \mathscr{C}^r(X, Y)$ — множество второй категории.*

§ 8. Невырожденные функции

В качестве последнего приложения теоремы Тома мы покажем, что любую дифференцируемую функцию на многообразии можно аппроксимировать невырожденными функциями. Для определения невырожденной функции нам понадобятся два новых понятия: линейной связанности и ковариантного дифференциала.

Рассмотрим C^{r+2}-многообразие X и C^{r+1}-расслоение $\sigma: E \to X$. Мы можем построить следующие C^{r+1}-расслоения:

$$\pi_{TX}: TX \oplus E \to TX, \quad \pi_E: TX \oplus E \to E \text{ и } T_\sigma: TE \to TX.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *C^r-связностью на* σ назовем C^r-отображение $\Gamma: TX \oplus E \to TE$, индуцирующее

(а) точную последовательность $0 \to \pi_E \to \tau_E$ расслоений,

(б) отображение расслоений $\pi_{TX} \to T_\sigma$.

Линейная C^r-связность на X — это C^r-связность на касательном расслоении к X.

Специалистам ясно, что каждая связность в дифференциальной геометрии является образом единственной связности в нашем смысле. Локальные представления связности являются аналогами классических «компонент» соответствующих связностей. Действительно, если $U \subset \mathbf{F}$ — открытое подмножество банахова пространства, $\mathbf{G}$ — банахово пространство, $E = U \times \mathbf{G}$ и $\sigma : E \to U$ — локальное расслоение, то связность $\Gamma : TX \oplus E \to TE$ записывается в виде

$$\Gamma : U \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \to (U \times \mathbf{G}) \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}),$$

$$\Gamma(e; f, g) = (e, g; f, \Gamma'(e; f, g)),$$

где $\Gamma'(e)$ — билинейная форма от f, g. Таким образом, используя разбиения единицы, легко строить связности. Доказана следующая лемма

ЛЕММА 1. *Если X — многообразие класса C^{r+2}, допускающее разбиение единицы, $\sigma : E \to X$ есть C^{r+1}-расслоение, то на σ существует C^r-связность.*

Введем второе понятие. Рассмотрим C^r-многообразие X и банахово пространство $\mathbf{F}$. Если $f \in \mathscr{C}^1(X, \mathbf{F})$, то $Tf : TX \to T\mathbf{F}$. Но $T\mathbf{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{F}$, где $\{v\} \times \mathbf{F} = T_v\mathbf{F}$. Пусть $\pi_V : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$ означает проектирование на второй сомножитель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $f \in \mathscr{C}^r(X, \mathbf{F})$, то отображение $\nabla f = \pi_V \circ Tf : TX \to \mathbf{F}$ назовем *дифференциалом отображения* f. Аналогично, если $2 \leqslant k \leqslant r$, то

$$\nabla^k f = \nabla(\nabla^{k-1} f) : T^k(X) \to \mathbf{F}$$

называется *k-м дифференциалом* отображения f. Если $\Gamma : TX \oplus TX \to T^2X$ есть C^{r-2}-связность на X $(r > 2)$, то отображение

$$\Gamma_{\nabla^2 f} = \nabla^2 f \circ \Gamma : TX \oplus TX \to \mathbf{F}$$

называется *вторым ковариантным дифференциалом* (определенным связностью Γ) отображения f.

Перейдем к вещественнозначным функциям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $f \in \mathscr{C}^1(X, \mathbf{R})$, то $x \in X$ называется *критической точкой* f, если $\nabla f \mid T_xX \equiv 0$. Предположим, что на C^{r+2}-многообразии X задана линейная C^r-связность Γ и что $f \in \mathscr{C}^{r+2}(X, \mathbf{R})$. Если $x \in X$, положим

$$H_x^\Gamma f = \Gamma_{\nabla^2 f} \mid T_x X \oplus T_x X.$$

ЛЕММА 2. *Если x — критическая точка отображения f, то $H_x^\Gamma f$ — симметрическая билинейная форма на $T_x X$, не зависящая от Γ. Если $X \subset \mathbf{E}$ — открытое множество в банаховом пространстве, то $H_x^\Gamma f = D^2 f(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать последнее утверждение. Здесь $\nabla f : X \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}$, $\nabla f(x, e) = Df(x)e$, так что по формуле для частных производных (предложение 11 § 3, гл. I) имеем

$$\nabla^2 f : (X \times \mathbf{E}) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \to \mathbf{R},$$

$$\nabla^2 f(x, e_1; e_2, e_3) = Df(x)e_3 + D^2 f(x)(e_1, e_2).$$

Мы уже видели, что

$$\Gamma : X \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \to (X \times \mathbf{E}) \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E})$$

задается формулой $\Gamma(x; e_1, e_2) = (x, e_2; e_1, \Gamma_3(x; e_1, e_2))$. Таким образом, при любом $x \in X$ имеет место равенство

$$H_x^\Gamma f(x; e_1, e_2) = Df(x)\Gamma_3 + D^2 f(x) \cdot (e_2, e_1),$$

из которого немедленно следует наше утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $f \in \mathscr{C}^{r+2}(X, \mathbf{R})$ и $x \in X$ — критическая точка отображения f, то гессианом отображения f в точке x назовем билинейную форму

$$H_x f = H_x^\Gamma f : T_x X \times T_x X \to \mathbf{R},$$

определенную любой линейной C^r-связностью Γ. Критическая точка $x \in X$ отображения f называется *невырожденной*, если гессиан $H_x f$ невырожден (т. е. индуцирует изоморфизм $H_x f_L : T_x X \to (T_x X)^*$).

Функция f называется *невырожденной*, если каждая ее критическая точка невырождена.

Заметим, что мы определили понятие невырожденной критической точки только для C^3-многообразий, допускающих разбиение единицы, моделью для которых служат банаховы пространства, совпадающие со своими сопряженными. Однако невырожденность — локальное свойство, и гессиан можно определить в более общем случае, используя только окрестность критической точки.

Пусть теперь X — конечномерное C^3-многообразие. Наше последнее приложение теоремы Тома (доказанное Томом) формулируется следующим образом.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МОРСА. *Если* $\dim X \geqslant 2$ *и* $r \geqslant 3$, *то подпространство* $\mathscr{C}^r_{\text{нв}}(X, \mathbf{R}) \subset \mathscr{C}^r(X, \mathbf{R})$ *невырожденных функций является множеством второй категории в C^r-топологии компактной сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W \subset J^2(X, \mathbf{R})$ — множество 2-струй $j^2 f(x)$, имеющих такое локальное представление $(x', f'(x'), Df'(x'), D^2 f'(x'))$, что $Df'(x') = 0$ и $D^2 f'(x')$ имеет ранг меньше, чем $n = \dim X$. Ясно, что это условие не зависит от выбора локальных карт и W является подмногообразием коразмерности $n+1$. Следовательно,

$$\max(\dim X + \dim W - \dim J^k(X, R), 0) = 0$$

и $j^2 f$ принадлежит классу C^{r-2} при $r \geqslant 3$. Поэтому по теореме Тома о трансверсальности подпространство $\mathscr{C}^r_W(X, \mathbf{R}) \subset \mathscr{C}^r(X, \mathbf{R})$ тех отображений f, для которых $j^2 f \pitchfork W$ имеет вторую категорию. Но $\operatorname{codim} W = n+1$, поэтому из $j^2 f \pitchfork W$ следует $j^2 f(X) \cap W = \varnothing$, и значит f — невырожденная функция.

Можно дать описание поведения невырожденных функций в окрестности критической точки. Поскольку эта характеристика локальна, достаточно рассмотреть функции на банаховом пространстве. Наше изложение будет основываться на письме Пале [20]. Пусть $\mathbf{E}$ — банахово пространство, совпадающее со своим сопряжением, и U — окрестность нуля.

ЛЕММА 3. *Если у функции* $f \in \mathscr{C}^3(U, \mathbf{R})$ *нуль является невырожденной критической точкой,* $f(0) = 0$, *и гессиан равен* $H_0 f$, *то существуют такие окрестности нуля* V, $W \subset U$ *и C^1-диффеоморфизм* $\varphi : V \to W$, $\varphi(0) = 0$, *что для всех* $x \in V$ *выполнено равенство* $f(\varphi(x)) = H_0 f(x, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу Тейлора (§ 4 гл. I), мы можем записать $f(x)$ в виде $B_x(x, x)$, где для каждого $x \in U$ симметричная билинейная форма B_x задается равенством

$$B_x = \int_0^1 (1-t) D^2(tx)\, dt.$$

Пусть $\beta_x : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^*$ означает индуцированное этой формой линейное отображение. Поскольку $B_0 = H_0 f$, существует такая окрестность нуля $U_1 \subset U$, что при $x \in U_1$ отображение β_x является изоморфизмом. Обозначим $\gamma_x = \beta_x^{-1} \circ \beta_0$. Поскольку γ_0 тождественный оператор, существует такая окрестность нуля $U_2 \subset U_1$, в которой оператор $\alpha_x = \gamma_x^{1/2}$ можно определить с помощью сходящегося степенного ряда по $(I - \gamma_x)$. Определим $\varphi : U_2 \to \mathbf{E}$ формулой $\varphi_x = \alpha_x^{-1}(x)$. Тогда из того, что $\beta : U_2 \to L(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$ $(\beta(x) = \beta_x)$ принадлежит классу C^1, следует, что классу C^1 принадлежат и отображения

$$\gamma : U_2 \to \operatorname{Laut}(\mathbf{E}) \quad (\gamma(x) = \gamma_x),$$
$$\alpha : U_2 \to \operatorname{Laut}(\mathbf{E}) \quad (\alpha(x) = \alpha_x).$$

Таким образом, отображение φ принадлежит классу C^1, и, как легко видеть, его производная равна

$$D\varphi(x) = \alpha_x^{-1} + D\alpha^{-1}(x) \cdot x.$$

Поскольку $D\varphi(x) \in \operatorname{Laut}(\mathbf{E})$, и поскольку множество $\operatorname{Laut}(\mathbf{E})$ открыто в $L(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ и $D\varphi$ непрерывно, существует такая окрестность нуля $U_3 \subset U_2$, что (U_3, φ) — локальная карта. Пусть $W = \varphi(U_3) \cap U$ и $V = \varphi^{-1}(W)$. Тогда $\varphi : V \to W$ является C^1-диффеоморфизмом, и нам осталось показать, что $f(\varphi(x)) = B_0(x, x)$.

Заметим сначала, что из симметричности B_x следует самосопряженность β_x (мы отождествляем $\mathbf{E}$ с $\mathbf{E}^{**}$ при помощи канонического изоморфизма). Так как $\beta_x \circ \gamma_x = \beta_0$, то оператор $\beta_x \circ \gamma_x$ также самосопряжен, т. е. $\beta_x \circ \gamma_x = \gamma_x^* \circ \beta_x$. Кроме того, поскольку $\alpha_x = \gamma_x^{1/2}$ представляет собой сходящийся ряд по степеням $(I - \gamma_x)$, отсюда следует, что $\beta_x \circ \alpha_x = \alpha_x^* \circ \beta_x$. Таким образом, $\gamma_x^* \circ \beta_x = \beta_0$, или $\alpha_x^* \circ \left(\alpha_x^* \circ \beta_x \right) = \beta_0$, или $\alpha_x^* \circ \beta_x \circ \alpha_x = \beta_0$, так что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}^* & \mathbf{E}^* \arrow[l, "\alpha_x^*"'] \\ \mathbf{E} \arrow[u, "\beta_0"] \arrow[r, "\alpha_x"'] & \mathbf{E} \arrow[u, "\beta_x"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Наконец, мы видим, что

$$f(\varphi(x)) = \beta_{\varphi(x)}(\varphi(x))\cdot\varphi(x) = \beta_0(\alpha_x\circ\varphi(x))\cdot(\alpha_x\circ(\varphi(x)) = \beta_0(x)\cdot x.$$

Следовательно, $f(\varphi(x)) = H_0 f(x, x)$.

В случае, когда $\mathbf{E}$ — гильбертово пространство, при помощи линейной замены локальных карт можно провести дальнейшую редукцию и получить теорему

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МОРСА. *Если* $f \in \mathscr{C}^3(U, \mathbf{R})$, $f(0) = 0$, *и нуль является невырожденной критической точкой, то существуют такие окрестности нуля* V, $W \subset U$, C^1*-диффеоморфизм* $\varphi : V \to W$, $\varphi(0) = 0$, *и разложение в прямую сумму* $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \oplus \mathbf{E}_2$, *что если* $x_1 \in \mathbf{E}_1$, $x_2 \in \mathbf{E}_2$, *а* $x_1 + x_2 \in V$, *то*

$$f(\varphi(x_1 + x_2)) = \langle x_1, x_1 \rangle - \langle x_2, x_2 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство, являющееся упражнением по спектральной теории, взято из письма Пале [20]. Спектр оператора A распадается на две части: справа и слева от нуля вещественной прямой. Взяв характеристические функции этих частей и применив их к A, получим два таких проекционных оператора P_1 и P_2, коммутирующих с A, что $P_1 + P_2 = I$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Кроме того, $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, и оба они симметричны. Таким образом,

$$\langle Ax, x \rangle = \langle P_1Ax, x \rangle + \langle P_2Ax, x \rangle = \\ = \langle AP_1x, P_1x \rangle + \langle AP_2x, P_2x \rangle.$$

Итак, мы разложили наше гильбертово пространство в прямую сумму подпространств, на которых функция A представлена соответственно положительно и отрицательно определенными операторами $P_1A = AP_1$ и $P_2A = AP_2$. Приведем теперь f к нормальному виду. Если $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, где A — положительно определенный оператор, то, меняя карту с помощью отображения $\psi(x) = \sqrt{A^{-1}}\,x$, мы получаем представление f в виде скалярного произведения. Если оператор A отрицательно определен, те же рассуждения мы применим к функции $-f$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ambrose W., Palais R. S., Singer I. M., Sprays, *Acad. Brasileira de Ciencias*, **32**, № 2 (1960), 163—178.
2. Bott R., Morse Theory and its applications to homotopy theory, Lecture notes by A. Van de Ven, Bonn, 1960.
3. Бурбаки Н., Общая топология, М., 1966.
4. Bourbaki N., Fascicule de résultats des variétés, Hermann, Paris, в печати.
5. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, М., 1965.
6. Eells J., Jr., On submanifolds of certain function spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **45**, № 10 (1959), 1520—1522.
7. Eells J., Jr., On the geometry of function spaces, Symposium de Topologia Algebrica, Mexico, 1958, 303—307.
8. Eells J., Jr., Alexander — Pontrjagin duality in function spaces, Proc. Symposia in Pure Mathematics, vol. 3, Am. Math. Soc., 1961, 109—129.
9. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, М., 1956.
10. Mazur B., Stable equivalence of differentiable manifolds, *Bull. Am. Math. Soc.*, **67**, № 4 (1961), 377—384.
11. Milnor J., Differential Topology, Princeton, 1958.
12. Milnor J., Differentiable Structures, Princeton, 1961.
13. Milnor J., Der Ring der Vektorraumbündel eines topologischen Raumes Bonn, 1959.
14. Moser J., A new technique for the construction of solutions for nonlinear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **47**, № 11 (1961), 1824—1831.
15. Nash J., The embedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **63** (1956), 20—63.
16. Schwartz J., On Nash's implicit functional theorem, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 509—530.
17. Smale S., Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.*, **74**, № 2 (1961), 391—406.
18. Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961.
19. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, М., 1964.
20. Palais R., From Letters of R. Palais (mimeo.), Columbia University, New York, 1962.
21. Sard A., The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Am. Math. Soc.*, **48** (1942), 883—890.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Iредисловие 5
'лава I. **Дифференциальное исчисление** 9
§ 1. Категории 10
§ 2. Топологические векторные пространства 11
§ 3. Производные и композиция отображений 16
§ 4. Интегрирование и формула Тейлора 20
§ 5. Теорема об обратной функции 24

'лава II. **Многообразия** 30
§ 1. Атласы, карты, морфизмы 30
§ 2. Подмногообразия, иммерсии, субмерсии 33
§ 3. Разбиение единицы 43
Приложение. Многообразия с краем 50

'лава III. **Векторные расслоения** 55
§ 1. Определение, обратные образы 55
§ 2. Касательное расслоение 62
§ 3. Точная последовательность расслоений 64
§ 4. Операции в векторных расслоениях 71
§ 5. Разложение векторных расслоений 76

'лава IV. **Векторные поля и дифференциальные уравнения** 79
§ 1. Теорема существования для дифференциальных уравнений 80
§ 2. Векторные поля, кривые и потоки 92
§ 3. Пульверизации 98
§ 4. Экспоненциальное отображение 104
§ 5. Существование трубчатой окрестности 105
§ 6. Единственность трубчатой окрестности 109

'лава V. **Дифференциальные формы** 113
§ 1. Векторные поля, дифференциальные операторы, скобки 113
§ 2. Внешнее дифференцирование 117
§ 3. Каноническая 2-форма 122
§ 4. Лемма Пуанкаре 124

лава VI. **Теорема Фробениуса** 127
§ 1. Формулировка теоремы 128
§ 2. Дифференциальные уравнения, зависящие от параметра 132
§ 3. Доказательство теоремы 133
лава VII. **Римановы метрики** 135
§ 1. Определение и функториальность 135
§ 2. Группа Гильберта 139
§ 3. Редукция к группе Гильберта 143
§ 4. Гильбертова трубчатая окрестность 147
§ 5. Невырожденные билинейные тензоры 149
§ 6. Римановы метрики и пульверизации 151
риложение I. **Спектральная теорема** 154
§ 1. Гильбертово пространство 154
§ 2. Функционалы и операторы 156
§ 3. Эрмитовы операторы 158
риложение II. **Локальные координаты** 164
§ 1. Дифференциальные формы 164
§ 2. Символы Кристоффеля 167
риложение III. **Трансверсальность отображений.** *Р. Абрахам* 169
§ 1. Вертикальные касательные 169
§ 2. Многообразия отображений 171
§ 3. Элементарные свойства трансверсальных отображений 178
§ 4. Открытость множества трансверсальных отображений 179
§ 5. Плотность множества трансверсальных отображений 182
§ 6. Струи 188
§ 7. Приложения 191
§ 8. Невырожденные функции 195
итература 201