INTRODUCTION TO DIOPHANTINE APPROXIMATIONS

SERGE LANG

Columbia University, New York

ADDISON – WESLEY PUBLISHING COMPANY
READING, MASSACHUSETTS · PALO ALTO · LONDON · DON MILLS, ONTARIO
1966

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

С. ЛЕНГ

Введение в теорию диофантовых приближений

Перевод с английского

А. Б. ШИДЛОВСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва 1970

УДК 511.7

Новая монография известного американского математика С. Ленга, уже знакомого советскому читателю по переводам его книг «Алгебраические числа», «Введение в теорию дифференцируемых многообразий» и «Алгебра»; несмотря на малый объем, она представляет собой весьма содержательное введение в теорию диофантовых приближений.

Книга несомненно заинтересует математиков различных специальностей. Она доступна аспирантам и студентам университетов и педагогических вузов и может привлечь внимание многих из них к увлекательным задачам теории диофантовых приближений.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
25-70

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

На русском языке очень мало книг по теории диофантовых приближений. Поэтому выход каждой новой, по-своему интересной работы, посвященной этому разделу теории чисел, является своего рода событием.

Книга С. Ленга «Введение в теорию диофантовых приближений» отнюдь не претендует на исчерпывающую полноту изложения материала. Не пытается автор и описать на страницах этого небольшого по объему издания много различных фактов и методов. Он останавливается лишь на нескольких важнейших направлениях, но рассматривает их многосторонне, очень подробно, на примерах конкретных чисел или классов чисел, вскрывая все связи, существующие между различными задачами. Благодаря этому книга весьма содержательна, и читатель в полной мере воспринимает идейную сторону теории.

Книга, несомненно, окажется весьма полезной для студентов и аспирантов (университетов и педагогических институтов), интересующихся теорией чисел. Она может привлечь их внимание к увлекательным задачам теории диофантовых приближений. В то же время многое в этой книге покажется интересным и специалистам.

При переводе были исправлены отдельные опечатки оригинала. Кроме того, переводчик позволил себе внести кое-где некоторые незначительные уточнения; таких уточнений немного и они не оговорены специально.

А. Б. Шидловский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Количественные аспекты теории диофантовых приближений в настоящее время еще не слишком отличаются от того состояния, в котором они были оставлены Эйлером и Лагранжем. Лишь работы самых последних лет, по-видимому, открывают новые перспективные направления исследований, и в этой книге мы проиллюстрируем три аспекта теории диофантовых приближений на некоторых важных специальных примерах.

Во-первых, формальные связи, которые существуют между различными процессами подсчета и функциями, входящими в теорию. О них идет речь в главах I—III.

Во-вторых, построение этих функций для чисел, заданных в конкретном виде как классические постоянные. Соответствующие примеры содержатся в главах IV и V.

В-третьих, мы имеем в виду асимптотические оценки, выполняющиеся почти везде (например, теоремы Хинчина и Левека — Эрдёша — Шмидта). Такие результаты полезны, так как они в общих чертах показывают, какие числа могут считаться «патологическими», а также устанавливают диапазон величин подобных оценок для классических постоянных. Однако, как показывают квадратичные иррациональности (которые имеют постоянный тип) и результат Адамса для числа e, каждое специальное число обладает специфическим поведением, проявляющимся при изучении более точных приближений к нему. Определение этого поведения для классических постоянных, возможно, является наиболее увлекательной частью теории диофантовых приближений.

Существуют и другие аспекты теории, например ее связь с трансцендентными числами, но эти направления совсем не включены в книгу, так как стиль полученных здесь результатов пока что существенно отличается от стиля рассмотренных в книге.

Я избегал включения частных утверждений, формулировки которых казались мне слишком далекими от ожидаемых лучших результатов. Каждую главу следует рассматривать как разработку частного случая более широкой общей теории, пока еще не созданной. Указания возможных направлений ее развития везде приводятся одновременно со ссылками на имеющиеся публикации.

Очень странно, что такая классическая теория, как теория диофантовых приближений, находится в столь примитивном и мало развитом состоянии, но именно это и придает ей своеобразную прелесть. Настоящая книга фактически является учебником теории чисел, по которому студенты могут вступить в контакт с интересными и вполне доступными проблемами первого этажа здания математики. Однако, если бы мне, подобно Рипу Ван Винклю, было дано проспать двадцать лет подряд, то моим величайшим чаянием было бы, пробудившись от сна, увидеть теорию диофантовых приближений на достойном ее уровне развития.

Беркли, 1966 *Серж Ленг*

Глава I

ОБЩАЯ ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Рациональные непрерывные дроби

Мы интересуемся следующей проблемой. Дано иррациональное число α; определим все решения неравенства

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q}, \quad \text{или} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \tag{1}$$

с целыми q и p или в более общем случае неравенства

$$|q\alpha - p| < \psi(q), \tag{2}$$

где ψ — некоторая положительная убывающая функция действительного переменного. Если ξ — действительное число, то будем обозначать через $\|\xi\|$ расстояние от ξ до ближайшего целого числа. Тогда $|q\alpha - p| = \|q\alpha\|$ всякий раз, когда $|q\alpha - p|$ достаточно мало, и мы можем переписать основное неравенство (1) в виде $\|q\alpha\| < 1/q$. При изучении $\|q\alpha\|$ мы, следовательно, интересуемся только классом вычетов $q\alpha$ по модулю $\mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Факторгруппу $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ($\mathbf{R}$ — поле действительных чисел) иногда называют группой вращения окружности, так как она изоморфна группе комплексных чисел с абсолютной величиной 1 при отображении $x \longmapsto e^{2\pi i x}$. Мы можем представлять себе $\|\ \|$ как метрику в группе вращения окружности $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Неравенство (1) играет основную роль, и оказывается, что возможно получить большинство его решений некоторым рациональным процессом. В этой главе мы опишем этот процесс, а более общее неравенство (2) рассмотрим в следующей главе.

Результаты этой главы восходят к Эйлеру и Лагранжу. (Для специальных справок см. Перрон [1], где содержится обширная библиография старых работ; сама эта книга является превосходным справочником.)

Рассмотрим сначала независимые переменные a_0, a_1, a_2, ... Будем определять по индукции пары многочленов

$$p_n = p_n(a_0; \ldots, a_n) \quad \text{и} \quad q_n = q_n(a_0; \ldots, a_n),$$

начиная с $p_0 = a_0$ и $q_0 = 1$. Отношение p_n/q_n будем записывать в виде

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; \ldots, a_n].$$

Предположим, что уже определены p_k, q_k с $k < n$ и $n \geqslant 1$. Для сокращения обозначим

$$p'_k = p_k(a_1; \ldots, a_{k+1}) \quad \text{и} \quad q'_k = q_k(a_1; \ldots, a_{k+1}).$$

Определим по индукции

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \quad \text{и} \quad q_n = p'_{n-1}. \tag{3}$$

Это означает, что

$$[a_0; \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{[a_1; \ldots. a_n]}; \tag{4}$$

если выписать это выражение полностью, то получим

$$[a_0; \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{}{\ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}. \tag{5}$$

Выражение (5) будем называть *непрерывной дробью* (точнее *конечной непрерывной дробью*).

Таким образом, для последовательности независимых переменных a_0, a_1, ... мы получим последовательность непрерывных дробей (5) для $n = 0, 1, \ldots$. Если вместо a_0, a_1, ... подставлять такие числа, что q_n не обращаются в нуль, то получается последовательность чисел, записанных в виде непрерывных дробей.

Теорема 1. *Для* $n \geqslant 2$ *имеем*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Доказательство. Для $n = 2$ утверждение проверяется непосредственно. При $n > 2$ по предположению индукции имеем

$$p'_{n-1} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}, \qquad q'_{n-1} = a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}.$$

Используя (3), находим

$$p_n = a_0 (a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + a_n q'_{n-2} + q'_{n-3} =$$
$$= a_n (a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3} = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

и

$$q_n = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

что и доказывает теорему.

Для удобства положим $p_{-1} = 1$ и $q_{-1} = 0$. Тогда теорема 1 остается справедливой и при $n = 1$.

В приложениях мы будем интересоваться свойствами величин p_n и q_n, когда $a_0, a_1, \ldots$ принимают действительные значения. Будем всегда считать, что $a_1, a_2, \ldots$ положительны. В таком случае рассуждение по индукции показывает, что $q_n \geqslant 0$ для $n \geqslant 0$ и, следовательно, дробь p_n/q_n является действительным числом. В частности, получаются приведенные ниже следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть a_i — *положительные действительные числа для* $1 \leqslant i \leqslant n$. *Положим для* $1 \leqslant k \leqslant n$

$$r_k = [a_k; \ldots, a_n].$$

Тогда

$$[a_0; \ldots, a_n] = [a_0; \ldots, a_{k-1}, r_k] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $a_0, \ldots, a_n$ *и* $b_0, \ldots, b_n$ — *действительные числа, такие, что* $a_i \geqslant 1$ *и* $b_i \geqslant 1$ *для* $i \geqslant 1$. *Предположим, что* a_j, b_j — *целые числа для* $0 \leqslant j \leqslant n-1$. *Если*

$$[a_0; \ldots, a_n] = [b_0; \ldots, b_n],$$

то $a_i = b_i$ *для* $i \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $r_1 = [a_1; \ldots, a_n]$, так что

$$r_1 = a_1 + \frac{1}{[a_2; \ldots, a_n]}.$$

Тогда $r_1 \geqslant 1$ и аналогично $s_1 = [b_1; \ldots, b_n] \geqslant 1$. По предположению

$$a_0 + 1/r_1 = b_0 + 1/s_1.$$

Если $r_1 = 1$, то

$$a_0 + 1/r_1$$

является целым числом, и, следовательно, $1/s_1$ — также целое число. Значит, $s_1 = 1$ и $a_0 = b_0$. Если же $r_1 > 1$, то

$$a_0 + 1/r_1$$

не является целым числом, и, следовательно, также $s_1 > 1$. Но тогда $a_0 = b_0$, поскольку как a_0, так и b_0 являются наибольшими целыми, не превосходящими $[a_0; \ldots, a_n]$. Итак, во всех случаях $a_0 = b_0$ и $r_1 = s_1$. Теперь можно закончить доказательство по индукции.

Следствие 2 дает нам единственность непрерывной дроби, образованной действительными числами, которые удовлетворяют условиям этого следствия. Это будет применяться в следующем параграфе.

Для следующей теоремы мы вернемся к неопределенным $a_0, a_1, \ldots$.

Теорема 2. *Для $n \geqslant 0$ имеем*

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

Доказательство. Имеем

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1.$$

В общем случае умножим первое выражение в теореме 1 на q_{n-1}, а второе — на p_{n-1} и вычтем первое из второго. Получим

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = -(q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}).$$

Это доказывает теорему, ибо показывает, что, когда n последовательно изменяется от 1, выражение в левой части доказываемого в теореме равенства последовательно меняет знак.

Следствие 1. *Для $n \geqslant 1$ имеем*

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

Нас будут интересовать значения, принимаемые p_n и q_n при целых $a_0, a_1, \ldots$. При этом будем считать всегда, что числа $a_1, a_2, \ldots$ положительны.

Следствие 2. *Если $a_1, a_2, \ldots$ — положительные целые числа, то p_n и q_n взаимно просты и*

$$0 < q_1 < q_2 < \ldots,$$

т. е. q_n образуют строго возрастающую последовательность целых чисел.

Следствие 3. *Пусть α обозначает рациональную функцию*

$$\alpha = [a_0; \ldots, a_{n+2}].$$

Тогда

$$q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n}.$$

Доказательство. Заменим в теореме n на $n+2$ и разделим в ее утверждении обе части равенства на q_{n+2}. Заметим, что по определению $p_{n+2}/q_{n+2} = \alpha$ и $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$. Отсюда следует доказываемое соотношение.

Теорема 3. *Для $n \geqslant 1$ имеем*

$$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n.$$

Доказательство. Умножим первое выражение в теореме 1 на q_{n-2}, а второе — на p_{n-2} и вычтем первое из второго. Используя теорему 2, получаем

$$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = a_n (q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}) = \\ = (-1)^{n-1} a_n,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Для $n \geqslant 2$ имеем*

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Следствие 2. *Если $a_1, a_2, \ldots$ — положительные числа, то последовательность p_n/q_n для четных n является строго возрастающей, а для нечетных n — строго убывающей.*

Следствие 3. *Пусть α обозначает рациональную функцию*

$$\alpha = [a_0; \ldots, a_{n+2}].$$

Тогда

$$q_n \alpha - p_n = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{a_{n+2} q_{n+1} + q_n}.$$

Доказательство. Заменим в теореме 3 n на $n+2$ и разделим в ее утверждении обе части равенства на q_{n+2}. Заметим, что по определению $p_{n+2}/q_{n+2} = \alpha$ и $q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n$. Отсюда следует доказываемое соотношение.

Теорема 4. *Для $n \geqslant 1$ имеем*

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1].$$

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что $n > 1$. Предположим по индукции, что выполняется равенство

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}; \ldots, a_1].$$

Так как $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, мы находим

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}; \ldots, a_1]},$$

и требуемое утверждение получается по индукции.

§ 2. Непрерывная дробь действительного числа

Рассмотрим сначала коротко частный случай, когда α — *рациональное число*. Пусть a_0 — наибольшее целое число $\leqslant \alpha$. Если α не является целым, то можно написать

$$\alpha = a_0 + 1/\alpha_1,$$

где $\alpha_1 > 1$ — снова рациональное число. По индукции

$$\alpha_n = a_n + 1/\alpha_{n+1},$$

где a_n — наибольшее целое число $\leqslant \alpha_n$ и $\alpha_{n+1} > 1$. Мы можем сделать это при условии, что α_n не является целым. Однако наш процесс закончится после конечного числа шагов. В самом деле, если рациональное число $\alpha_n = a/b$ не является целым с натуральными a и b, то

$$\alpha_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b},$$

где $c < b$. Тогда

$$\alpha_{n+1} = b/c$$

и, следовательно, знаменатель α_{n+1} меньше знаменателя α_n. Таким образом, процесс заканчивается, и мы можем записать рациональное число α в виде конечной непрерывной дроби

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n]$$

с целыми a_i $(i = 0, \ldots, n)$ и $a_i \geqslant 1$ для $i \geqslant 1$. Заметим, что имеется возможность выбора для последовательного неполного частного a_n, а именно можно представить α в виде, записанном выше, с a_n равным целому числу >1 или еще в виде

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n - 1,\ 1].$$

Итак, длина непрерывной дроби рационального числа может быть выбрана как четной, так и нечетной.

Пусть α — *действительное иррациональное число.* Мы можем определить непрерывную дробь для α, написав, как прежде, $\alpha = a_0 + 1/\alpha_1$ с a_0 равным наибольшему целому $\leqslant \alpha$ (т. е. $a_0 = [\alpha]$) и $\alpha_1 > 1$. Допустим по индукции, что

$$\alpha_n = a_n + 1/\alpha_{n+1},$$

где a_n — наибольшее целое число $\leqslant \alpha_n$ и $\alpha_{n+1} > 1$. Так как α иррационально, последовательность α_1, α_2, ... бесконечна. Мы имеем в обозначениях § 1

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \alpha_{n+1}]$$

для некоторого $n \geqslant 0$. Мы будем также записывать символически бесконечное выражение

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ \ldots].$$

Правую часть этого равенства мы также будем называть *непрерывной дробью* (точнее бесконечной непрерывной дробью). Полученную таким образом непрерывную дробь мы будем называть *непрерывной дробью числа* α.

Из следствия 2 теоремы 2 мы получим последовательность пар взаимно простых чисел p_n и q_n с $q_n \geqslant 1$, связанных с непрерывными дробями $[a_0;\ \ldots,\ a_n]$; таким образом, равенство

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0;\ \ldots,\ a_n]$$

является теперь соотношением между действительными числами, а не соотношением между соответствующими величинами с неопределенными a_0, a_1, ..., a_n. Кроме того, p_n/q_n — несократимая дробь, которую будем называть *n-й подходящей дробью* к α. Мы назовем a_n *n-м неполным частным* числа α.

Применим теперь формальную теорию § 1 к непрерывной дроби числа α. Например, следствия 3 из теорем 2 и 3 могут теперь быть записаны следующим образом:

$$\boxed{q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}}$$

и

$$\boxed{q_n\alpha - p_n = \frac{(-1)^n\,\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}.}$$

Мы всегда имеем

$$a_n < \alpha_n < a_n + 1$$

и $a_n \geqslant 1$ для всех $n \geqslant 1$. Следовательно, знаменатели q_n всегда являются натуральными числами и образуют возрастающую последовательность

$$0 < q_1 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots .$$

Теорема 5. *Для четных n n-е подходящие дроби к α образуют строго возрастающую последовательность, сходящуюся к α. Для нечетных n n-е подходящие дроби к α образуют строго убывающую последовательность, сходящуюся к α. Кроме того,*

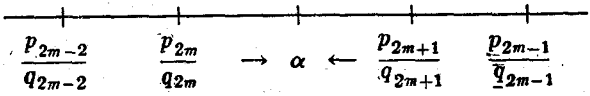
$$\frac{1}{2q_{n+1}} < \frac{1}{q_{n+1}+q_n} < |q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из следствия 2 теоремы 3 § 1 и следствия 1 теоремы 2. Так же получается правая часть неравенства. Левая его часть вытекает из следствия 1 теоремы 3 § 1, а именно

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{a_{n+2}}{q_{n+2}q_n} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+2}q_{n+1}+q_n)\,q_n}.$$

Разделив числитель и знаменатель на a_{n+2} и использовав тот факт, что $a_{n+2} \geqslant 1$, мы завершим доказательство.

Теорема 5 может быть проиллюстрирована следующим рисунком:



Так как $q_{n+1} > q_n$, мы получаем, что подходящие дроби дают решения неравенства (1), а именно

$$|q_n\alpha - p_n| < 1/q_n.$$

В § 3 мы покажем, что могут существовать и другие решения.

Заметим, что при $n \geqslant 1$

$$|q_n\alpha - p_n| = \| q_n\alpha \|.$$

Следствие. *При $n \geqslant 2$ имеем*

$$\| q_{n-1}\alpha \| = a_n \|q_n\alpha \| + \|q_{n+1}\alpha\|,$$

откуда

$$\| q_n\alpha \| < \|q_{n-1}\alpha \|$$

и

$$a_n = \left[\frac{\|q_{n-1}\alpha\|}{\|q_n\alpha\|}\right].$$

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой 1, чтобы выразить $q_{n+1}\alpha - p_{n+1}$, а затем используем тот факт, что по теореме 5 $q_{n+1}\alpha - p_{n+1}$ и $q_n\alpha - p_n$ имеют противоположные знаки. Таким образом доказывается первое утверждение следствия. Другие являются непосредственными следствиями доказанного.

Мы будем теперь характеризовать подходящие дроби к α некоторым свойством.

Наилучшим приближением к числу α называется дробь p/q $(q > 0)$, такая, что $\|q\alpha\| = |q\alpha - p|$ и

$$\| q'\alpha \| > \|q\alpha \|,$$

если $1 \leqslant q' < q$. Заметим, что дробь p/q — необходимо несократимая (т. е. p и q должны быть взаимно просты), если она является наилучшим приближением к α, так как в противном случае можно было бы написать $p = p'r$, $q = q'r$ с $r > 1$ и $q' < q$, так что $|q'\alpha - p'| < |q\alpha - p|$, что невозможно.

Теорема 6. *Всякое наилучшее приближение к α есть подходящая дробь к α; при $n \geqslant 1$ верно и обратное. В самом деле, q_n для $n \geqslant 1$ есть наименьшее целое $q > q_{n-1}$, такое, что $\|q\alpha\| < \|q_{n-1}\alpha\|$.*

Доказательство. Покажем сначала, что наилучшее приближение является подходящей дробью. Пусть a/b — несократимая дробь, $b > 0$, являющаяся наилучшим приближением к α. Мы покажем, что $a/b = p_n/q_n$ для некоторого n. Предположим, что $a/b < p_0/q_0 = a_0$. Тогда

$$|\alpha - a_0| < |\alpha - a/b| \leqslant |b\alpha - a|$$

вопреки предположению. Предположим теперь, что $a/b > p_1/q_1$. Тогда

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| > \left|\frac{a}{b} - \frac{p_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{bq_1},$$

откуда

$$|b\alpha - a| > 1/q_1 = 1/a_1 \geqslant |\alpha - a_0|,$$

снова вопреки предположению. Наконец, предположим, что a/b лежит между p_{n-1}/q_{n-1} и p_{n+1}/q_{n+1}, но не равна ни одной из этих дробей. Тогда

$$\frac{1}{bq_{n-1}} \leqslant \left|\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}.$$

Отсюда $q_n < b$. С другой стороны,

$$\frac{1}{bq_{n+1}} \leqslant \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|,$$

откуда

$$|q_n\alpha - p_n| < 1/q_{n+1} \leqslant |b\alpha - a|,$$

и мы пришли к противоречию. Это доказывает первую часть теоремы.

Мы будем доказывать обратное утверждение индукцией по n. Во-первых, для $n = 0$ не существует такого q, что $1 \leqslant q < q_0$, поскольку $q_0 = 1$. Следовательно, определение наилучшего приближения выполняется бессодержательно для p_0/q_0. Предположим теперь, что утверждение доказано для p_n/q_n с $n \geqslant 0$. Мы хотим доказать, что p_{n+1}/q_{n+1} является наилучшим приближением. Пусть q — наименьшее целое число $> q_n$ и такое, что

$$\| q\alpha \| < \| q_n\alpha \|,$$

и пусть p таково, что $\| q\alpha \| = |q\alpha - p|$. Тогда по предположению индукции p_n/q_n — наилучшее приближение, и мы заключаем, что p/q также является наилучшим приближением и, следовательно, должно быть подходящей дробью, как это уже было показано. Поскольку q выбрано наименьшим числом $> q_n$ и так, что $\|q\alpha\| < \|q_n\alpha\|$, то отсюда следует, что $q = q_{n+1}$. Но тогда $p = p_{n+1}$ (тривиально), что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Если p/q — подходящая дробь к α, а m — целое число, $1 \leqslant m < q$, то*

$$1/(2q) < \| m\alpha \|.$$

Доказательство. Предположим, что $q = q_n$. По теореме 5

$$1/(2q_n) < \| q_{n-1}\alpha \|,$$

а по теореме 6 $\| q_{n-1}\alpha \| \leqslant \| m\alpha \|$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Если a/b — несократимая дробь, $b > 0$, такая, что*

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2},$$

то a/b — подходящая дробь к α.

Доказательство. В силу теоремы достаточно доказать, что a/b — наилучшее приближение к α. Допустим, что c/d — дробь, $d > 0$, $c/d \neq a/b$, такая, что

$$|d\alpha - c| \leqslant |b\alpha - a| < 1/(2b).$$

Тогда

$$\frac{1}{bd} \leqslant \left| \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right| \leqslant \left| \alpha - \frac{c}{d} \right| + \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2 d}.$$

Из этого заключаем, что $b < d$, откуда a/b — наилучшее приближение к α, что и требовалось доказать.

§ 3. Эквивалентные числа

Множество матриц

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

с целыми элементами a, b, c, d, имеющих детерминанты равные ± 1 (т. е. $ad - bc = 1$ или -1), является группой, так как произведение двух таких матриц и матрица, обратная к такой матрице, снова имеют детерминант равный ± 1. Пусть G обозначает эту группу. Если α — иррациональное число и σ — элемент G, то определим

$$\sigma\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

Тогда с помощью непосредственной проверки убеждаемся, что если $\sigma, \tau \in G$, то

$$\sigma(\tau\alpha) = (\sigma\tau)\alpha \quad \text{и} \quad I\alpha = \alpha,$$

где I обозначает единичную квадратную матрицу второго порядка. Таким образом, G — группа преобразований множества иррациональных чисел, и мы будем говорить, что два иррациональных числа α и β *эквивалентны*, если существует $\sigma \in G$, такое, что $\sigma\alpha = \beta$. Тривиально проверяется, что это есть соотношение эквивалентности.

Пример 1. Для иррационального α мы можем написать

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ \alpha_n].$$

По теореме 1 § 1 и ее следствию получаем для $n \geqslant 1$

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}.$$

Положим

$$\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix}$$

и назовем σ_{n-1} $(n-1)$-м *непрерывным преобразованием* числа α. Мы видим, что

$$\alpha = \sigma_{n-1}\alpha_n.$$

Кроме того, теорема 2 § 1 показывает, что σ_{n-1} — элемент группы G. Итак, α эквивалентно α_n для $n \geqslant 1$, и, следовательно, все числа α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ эквивалентны друг другу. Заметим также, что если мы положим

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $\det A_n = -1$, и с помощью теоремы 1 § 1 находим

$$\sigma_n = A_0 \ldots A_n.$$

В следующей теореме мы дадим характеристику ситуации, описанной в рассмотренном примере.

Теорема 7. *Пусть α и β иррациональны и*

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \quad \alpha = \sigma\beta = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}.$$

Предположим, что $\beta > 1$ и $c > d > 0$. Тогда b/d и a/c являются двумя последовательными подходящими дробями к α, скажем p_{n-2}/q_{n-2} и p_{n-1}/q_{n-1}, и $\beta = \alpha_n$.

Доказательство. Заметим, что a и c взаимно просты, потому что $ad - bc = \pm 1$. Мы можем представить a/c в виде непрерывной дроби

$$\frac{a}{c} = [a_0; \ldots, a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

и имеем $a = p_{n-1}$, $c = q_{n-1}$. Можно выбрать n так, что

$$p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2} = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = ad - bc$ (потому что непрерывная дробь рационального числа может быть укорочена или удлинена на 1 искусственно). Так как

$$ad - bc = p_{n-1}d - q_{n-1}b = \varepsilon,$$

мы получаем

$$p_{n-1}(d - q_{n-2}) = q_{n-1}(b - p_{n-2}).$$

Поскольку p_{n-1} и q_{n-1} взаимно просты, отсюда следует, что q_{n-1} делит $(d - q_{n-2})$. Но $q_{n-2} \leqslant q_{n-1}$ и $d < q_{n-1}$. Отсюда

$$|d - q_{n-2}| < q_{n-1},$$

и поэтому $d - q_{n-2} = 0$. Тогда $b - p_{n-2} = 0$. Таким образом, мы можем написать

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\beta + p_{n-2}}{q_{n-1}\beta + q_{n-2}}.$$

Это означает, что

$$\alpha = [a_0; \ \ldots, \ a_{n-1}, \ \beta].$$

Так как $\beta > 1$, отсюда следует, что написанное выше выражение есть непрерывная дробь, представляющая число α, и что $\beta = \alpha_n$. Тогда мы видим наконец, что a/c и b/d являются последовательными подходящими дробями, что и требовалось доказать.

Теорема 8 (Серре). *Пусть α и β — иррациональные числа. Они эквивалентны тогда и только тогда, когда $\alpha_n = \beta_m$ для некоторой пары целых $n, m \geqslant 1$, или — что то же самое — когда для их непрерывных дробей*

$$\alpha = [a_0; \ a_1, \ a_2, \ \ldots],$$
$$\beta = [b_0; \ b_1, \ b_2, \ \ldots]$$

имеем $a_n = b_{n+l}$ для некоторого l и всех достаточно больших n.

Доказательство. Предположим, что существуют целые $k, l \geqslant 1$, такие, что $\alpha_k = \beta_l$, т. е.

$$\alpha = [a_0; \ a_1, \ \ldots, \ a_{k-1}, \ \alpha_k],$$
$$\beta = [b_0; \ b_1, \ \ldots, \ b_{l-1}, \ \beta_l],$$

и $\alpha_k = \beta_l$. Так как мы показали, что α эквивалентно α_k и β эквивалентно β_l, то отсюда следует, что α эквивалентно β.

Обратно, предположим, что α и β эквивалентны и

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \sigma\alpha,$$

причем $ad - bc = \pm 1$. Не нарушая общности доказательства, мы можем предположить, что $c\alpha + d > 0$ (в противном случае заменим a, b, c, d их противоположными числами). Пусть σ_{n-1} таково, как и в примере 1, так что $\alpha = \sigma_{n-1}\alpha_n$. Тогда

$$\beta = \sigma\sigma_{n-1}\alpha_n$$

и

$$\sigma\sigma_{n-1} = \begin{pmatrix} ap_{n-1} + bq_{n-1} & ap_{n-2} + bq_{n-2} \\ cp_{n-1} + dq_{n-1} & cp_{n-2} + dq_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Мы имеем

$$cp_{n-1}+dq_{n-1}=q_{n-1}\left(c\,\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}+d\right)=c',$$

$$cp_{n-2}+dq_{n-2}=q_{n-2}\left(c\,\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}+d\right)=d'.$$

Выберем n столь большим, чтобы p_{n-1}/q_{n-1} и p_{n-2}/q_{n-2} были близки к α. Тогда c' и d' оба >0, а также $\alpha_n>1$. Наконец, мы можем выбрать n так, чтобы было $c'>d'$. Тогда все условия теоремы 7 удовлетворены и мы заключаем, что $\alpha_n=\beta_m$ для некоторого m. Это доказывает теорему.

Примеры. Предположим сначала, что

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots].$$

Тогда легко проверить, что

$$-\alpha=\begin{cases}[-a_0-1;\ 1,\ a_1-1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots], & \text{если}\quad a_1>1,\\ [-a_0-1;\ a_2+1,\ a_3,\ a_4,\ \ldots], & \text{если}\quad a_1=1.\end{cases}$$

Так же просто представить обратную величину. Мы имеем из определения:

$$1\ \alpha=\begin{cases}[0;\ a_0,\ a_1,\ \ldots], & \text{если}\quad \alpha>1,\\ [a_1;\ a_2,\ a_3,\ \ldots], & \text{если}\quad 0<\alpha<1.\end{cases}$$

§ 4. Промежуточные дроби

Мы продолжим дальше изложение результатов Лагранжа и определим дроби, лежащие между подходящими дробями иррационального числа α. Сначала заметим, что если a, b, c, d — ненулевые действительные числа, такие, что

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

и r — положительное число, причем $b+rd\neq 0$, то

$$\frac{a}{b}<\frac{a+rc}{b+rd}<\frac{c}{d}.$$

Доказательство получается тривиально, перекрестным умножением. Кроме того, если $r < s$, то

$$\frac{a+rc}{b+rd} < \frac{a+sc}{b+sd},$$

другими словами, отношение $(a + rc)/(b + rd)$ является строго возрастающей функцией от r. Для любого целого $r \geqslant 0$ положим

$$p_{n,r} = rp_{n+1} + p_n \quad \text{и} \quad q_{n,r} = rq_{n+1} + q_n.$$

Если $r = 0$, то $p_{n,0} = p_n$, а если $r = a_{n+2}$, то $p_{n,r} = p_{n+2}$. Аналогичные равенства выполняются и для $q_{n,r}$. Нас будут интересовать такие значения r, что

$$1 \leqslant r < a_{n+2},$$

и мы назовем дроби

$$\frac{p_{n,r}}{q_{n,r}} = \frac{rp_{n+1} + p_n}{rq_{n+1} + q_n}, \qquad 1 \leqslant r \leqslant a_{n+2} - 1, \quad n \geqslant -1,$$

n-ми *промежуточными дробями* непрерывной дроби $[a_0; a_1, \ldots]$, или числа α, если эта дробь соответствует α. Промежуточные дроби и подходящие дроби будем называть просто *подходящими.*

Заметим, что знаменатели промежуточных дробей и подходящих дробей образуют строго возрастающую последовательность

$$\ldots < q_{n+1} < \ldots < q_{n,r} < q_{n,r+1} < \ldots < q_{n+2} < \ldots .$$

Теорема 9. *Промежуточные дроби образуют строго возрастающую последовательность*

$$\ldots < \frac{p_n}{q_n} < \ldots < \frac{p_{n,r}}{q_{n,r}} < \frac{p_{n,r+1}}{q_{n,r+1}} < \ldots < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \ldots$$

для четных n и аналогично строго убывающую последовательность для нечетных n. Кроме того,

$$q_{n,r+1}p_{n,r} - p_{n,r+1}q_{n,r} = (-1)^{n+1},$$

$$0 \leqslant r \leqslant a_{n+2} - 1, \quad n \geqslant -1.$$

Доказательство. Возрастание последовательности следует из замечания о неравенствах, сделанного в начале параграфа. Последнее соотношение следует из тривиальных выкладок, использующих теорему 2 § 1.

Мы убеждаемся, что $p_{n,r}$ и $q_{n,r}$ взаимно просты, а поэтому промежуточные дроби $p_{n,r}/q_{n,r}$ несократимы.

Следующий результат, являющийся важным для нахождения решений основного неравенства $|q\alpha - p| < 1/q$, восходит к Грейсу [1] (см. также Адамс [1]).

Теорема 10. *Если p и q — целые числа, $p \neq 0$, $q > 0$, удовлетворяющие неравенству $|\alpha - p/q| < 1/q^2$, то p/q является подходящей к α; в самом деле, p/q равно некоторой дроби $p_{n,r}/q_{n,r}$ с $r = 0$, или $r = 1$, или $r = a_{n+2} - 1$.*

Доказательство. Для первого утверждения предположим, что $\alpha < p/q$; другой случай доказывается аналогично. Если p/q не является подходящей, то существуют две последовательные подходящие[1] P/Q и P'/Q', такие, что

$$\alpha < P/Q < p/q < P'/Q'$$

и $P'Q - PQ' = 1$ по теореме 9. Таким образом,

$$\frac{1}{q^2} > \frac{p}{q} - \alpha > \frac{p}{q} - \frac{P}{Q} \geqslant \frac{1}{qQ}$$

и

$$\frac{1}{Q'q} \leqslant \frac{P'}{Q'} - \frac{p}{q} < \frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{1}{Q'Q}.$$

Эти оценки противоречивы, а поэтому первое утверждение доказано.

Теперь мы должны установить, какая из подходящих $p_{n,r}/q_{n,r}$ удовлетворяет требуемому неравенству. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Если $p_{n,r}/q_{n,r}$ — промежуточная дробь к α, то*

$$q_{n,r}\alpha - p_{n,r} = \frac{(-1)^n (\alpha_{n+2} - r)}{\alpha_{n+2} q_{n+1} + q_n}.$$

[1]) Каждая из этих подходящих может быть промежуточной дробью со значением $n = -1$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывную дробь

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_{n+1},\ \alpha_{n+2}].$$

Соотношение из следствия 3 теоремы 3 § 1 является соотношением между неопределенными величинами. Поэтому оно выполняется, в частности, для рассматриваемой дроби, и мы получаем

$$q_n\alpha - p_n = \frac{(-1)^n \alpha_{n+2}}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}.$$

Аналогично, используя следствие 3 теоремы 2 § 1, находим

$$q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}.$$

Умножая это последнее выражение на r и складывая с предшествующим, мы получаем равенство, входящее в утверждение леммы.

Заметим, что $r < \alpha_{n+2}$, так как $r \leqslant a_{n+2} - 1$, и следовательно, что

$$|q_{n,r}\alpha - p_{n,r}| = \frac{\alpha_{n+2} - r}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}.$$

Мы можем найти необходимое условие, наложенное на r, чтобы полученное выражение было $<1/q_{n,r}$, другими словами, чтобы

$$\frac{\alpha_{n+2} - r}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n} < \frac{1}{rq_{n+1} + q_n}.$$

Тривиальным преобразованием показывается, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{(q_{n+1} + q_n/r)}{(q_{n+1} + q_n/\alpha_{n+2})}\, r\left(1 - \frac{r}{\alpha_{n+2}}\right) < 1.$$

Предположим, что $r > 0$. Так как $r < \alpha_{n+2}$, то из этого неравенства следует, что

$$r(1 - r/\alpha_{n+2}) < 1.$$

Пусть теперь $r < a_{n+2} - 1$ и, следовательно, $r < \alpha_{n+2} - 2$, потому что r — целое, а α_{n+2} — не целое. Тогда

$$r\left(1 - \frac{\alpha_{n+2} - 2}{\alpha_{n+2}}\right) < 1,$$

откуда $r < \alpha_{n+2}/2$. Поэтому

$$r\left(1 - \frac{\alpha_{n+2}}{2\alpha_{n+2}}\right) < 1$$

и $r < 2$, так что $r = 1$. Это доказывает теорему 10.

Мы можем обобщить на промежуточные дроби одно из неравенств, доказанных ранее для подходящих дробей к α.

Теорема 11. *Пусть $p_{n,\,r}/q_{n,\,r}$ — промежуточные дроби к α и*

$$0 \leqslant r \leqslant a_{n+2} - 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{q_{n,\,r} + q_{n,\,r+1}} < |\, q_{n,\,r}\alpha - p_{n,\,r}\,|.$$

Доказательство. По лемме теоремы 10 мы должны проверить, что

$$\frac{1}{(2r+1)\,q_{n+1} + 2q_n} < \frac{\alpha_{n+2} - r}{\alpha_{n+2}q_{n+1} + q_n}.$$

Это неравенство эквивалентно следующему:

$$1 < \left(1 - \frac{r}{\alpha_{n+1}}\right)(2r+1)\,\frac{q_{n+1} + q_n/(r+1/2)}{q_{n+1} + q_n/\alpha_{n+2}}$$

и является следствием соотношения

$$1 \leqslant (1 - r/\alpha_{n+1})\,(2r+1).$$

Соображения, подобные использованным при доказательстве теоремы 10, теперь показывают, что это неравенство выполняется для $0 \leqslant r \leqslant a_{n+2} - 1$, что и требовалось доказать.

Решение p/q неравенства $|q\alpha - p| < \omega(q)/q$ с взаимно простыми целыми p и q, $q \geqslant 1$, и некоторой положительной функцией ω будем называть ω-*подходящей* к α. Следовательно, 1-подходящими к α будут несократимые дроби p/q с $q \geqslant 1$, являющиеся решениями основного неравенства $|q\alpha - p| < 1/q$.

Мы упорядочим 1-подходящие по возрастанию знаменателей. По теореме 10 последовательность знаменателей имеет вид

$$\ldots < q_{n+1} < q_{n,1}(?) < q_{n,a_{n+2}-1}(?) < q_{n+2} < \ldots;$$

здесь вопросительные знаки показывают, что промежуточные члены $q_{n,1}$, или $q_{n,a_{n+2}-1}$ могут входить или не входить в неравенства.

Как частный случай теоремы 11 получаем

Следствие. *Если p/q и p'/q' — две последовательные 1-подходящие к α, то*

$$\frac{1}{q+q'} < |q\alpha - p|.$$

Этот параграф более или менее завершает наше изучение общей теории непрерывных дробей. Для изучения более специальных вопросов рекомендуется ознакомиться с превосходной книгой Перрона [1][1]) Обобщение результатов этой главы на совместные приближения является проблемой, которая описывается исследованием выражения

$$\|q_1X_1 + \ldots + q_mX_m\|,$$

где X_i — вектор в некотором многомерном пространстве, а норма берется, как на торе[2]). Первое исследование в этом направлении было предпринято Перроном [2] и недавно продолжено Бернштейном [1—3]. Для ознакомления с возможными приложениями к задачам алгебраической геометрии мы отсылаем читателя к статьям автора [3, 4].

---

[1]) В первую очередь здесь следует рекомендовать более доступную и прекрасно написанную книгу А. Я. Хинчина [1]. — *Прим. перев.*

[2]) Норма вектора на торе есть наибольшее из расстояний до ближайшего целого его проекций на оси координат. — *Прим. перев.*

Глава II

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

§ 1. Распределение подходящих

Мы начнем со старого результата Дирихле.

Теорема 1. *Пусть α — действительное, а N — натуральное числа. Тогда существует натуральное число q, $0 < q \leqslant N$, такое, что* $\|q\alpha\| < 1/N$.

Доказательство. Разобьем $[0, 1)$ на N не содержащих правые концы отрезков длины $1/N$ и рассмотрим $N+1$ чисел

$$0\alpha,\ 1\alpha,\ 2\alpha,\ \ldots,\ N\alpha$$

по модулю $\mathbf{Z}$. Два из них должны лежать в некотором из построенных полуинтервалов $(\operatorname{mod} \mathbf{Z})$, скажем $r\alpha$ и $s\alpha$, $r < s$. Полагая $q = s - r$, получаем

$$\|q\alpha\| < 1/N \leqslant 1/q,$$

что и доказывает теорему.

Нас интересует нижняя грань чисел q в теореме 1. Пусть α — иррациональное число, а g — положительная функция, которую всегда будем считать возрастающей (не обязательно строго) и $\geqslant 1$. Будем говорить, что α — *число типа* $\leqslant g$, если для всех достаточно больших чисел B существует решение неравенств

$$|q\alpha - p| < 1/q \quad \text{и} \quad B/g(B) \leqslant q < B$$

со взаимно простыми числами q и p.

Теорема 2. *Пусть $\{p_n/q_n\}$ — последовательность подходящих дробей к α и f — возрастающая функция $\geqslant 1$, такая, что для всех достаточно больших n*

$$\frac{1}{q_n f(q_n)} \leqslant |q_n\alpha - p_n|.$$

Тогда α — число типа $\leqslant f$.

Доказательство. Так как $|q_n\alpha - p_n| < 1/q_{n+1}$, мы получаем, что

$$q_{n+1} < q_n f(q_n).$$

Для данного большого N находим n так, что $q_n < N \leqslant q_{n+1}$. Тогда

$$\frac{N}{f(N)} \leqslant \frac{N}{f(q_n)} < q_n < N,$$

а это доказывает, что α — число типа $\leqslant f$.

Теорема 2 допускает частичное обращение, которое показывает, что тип α определяет некоторого рода границу снизу для $|q\alpha - p|$ со взаимно простыми q и p.

Теорема 3. *Пусть α — число типа $\leqslant g$. Предположим, что функция $t/g(t)$ строго возрастающая, а g^* — обратная ей функция. Тогда для некоторого достаточно большого целого решения q, p неравенства $|q\alpha - p| < 1/q$ со взаимно простыми q и p имеем*

$$\frac{1}{q + g^*(q)} < |q\alpha - p|.$$

Доказательство. Пусть p/q есть некоторая 1-подходящая к α, а p'/q' есть 1-подходящая к α с наименьшим знаменателем $> q$. Тогда по предположению

$$\frac{q'}{g(q')} \leqslant q < q',$$

следовательно, $q' \leqslant g^*(q)$. По следствию из теоремы 11 § 4 гл. I получаем, что

$$\frac{1}{q + g^*(q)} \leqslant \frac{1}{q + q'} < |q\alpha - p|,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Предположим, что g — достаточно медленно растущая функция, а именно такая, что существует постоянная $c \geqslant 1$, для которой $g^*(t) \leqslant ctg(t)$

для всех достаточно больших t. Тогда мы можем переписать наше неравенство

$$\frac{1}{q(1+cg(q))} \leqslant |q\alpha - p|.$$

Это выполняется, когда g постоянна либо растет как логарифм или степень логарифма. Когда $g(t) = t^{\varepsilon}$, то получается оценка, мало отличающаяся от рассмотренной.

Замечание 2. В теореме 3, а также в других приложениях (а именно в § 2 гл. III) более полезно иметь дело с измененным понятием типа. Итак, мы можем сказать, что α — *число подтипа* $\leqslant g$, если для данного достаточно большого B существует решение неравенств

$$|q\alpha - p| < 1/q \quad \text{и} \quad B < q \leqslant Bg(B)$$

со взаимно простыми q и p. Как мы видели в замечании 1, в большинстве приложений тип и подтип могут быть определены одной и той же функцией.

Чтобы получить некоторое представление о возможных типах для чисел, мы докажем простую теорему Хинчина. Напомним, что числовое множество имеет *меру нуль*, если для данного $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто счетным числом интервалов с суммой длин $< \varepsilon$.

Теорема 4. *Пусть ψ — положительная функция, такая, что ряд*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$$

сходится. Тогда для почти всех чисел α (т. е. за исключением множества меры нуль) существует только конечное число решений неравенства

$$\|q\alpha\| < \psi(q).$$

Доказательство. Дано $\varepsilon > 0$; выберем q_0 так, что

$$\sum_{q \geqslant q_0} \psi(q) < \varepsilon.$$

Мы можем ограничиться в рассуждениях только числами α, лежащими в $[0, 1]$. Рассмотрим те из них, для которых неравенство имеет бесконечно много решений. Для каждого $q \geqslant q_0$ рассмотрим интервалы радиуса $\psi(q)/q$ — окрестности рациональных чисел

$$\frac{0}{q}, \frac{1}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}.$$

Каждое из рассматриваемых чисел α при некотором q будет лежать в одном из этих интервалов, так как для каждого α мы имеем

$$|\alpha - p/q| < \psi(q)/q$$

для бесконечного множества значений q. Мера объединения этих интервалов ограничена суммой

$$\sum_{q \geqslant q_0} q \frac{2\psi(q)}{q} < 2\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Например, мы можем взять $\psi(q) = 1/(q \ln^{1+\varepsilon} q)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Итак в теореме 2 мы можем взять для почти всех чисел функцию $f(t) = \ln^{1+\varepsilon} t$.

Теорема 5. *Пусть ψ — положительная функция, такая, что ряд*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$$

расходится. Тогда для почти всех чисел α существует бесконечно много решений неравенства $\|q\alpha\| < \psi(q)$.

Для доказательства теоремы 5 мы отсылаем читателя к книге Хинчина [1].

Теоремы 4 и 5 будем называть *теоремами Хинчина о сходимости и расходимости.*

§ 2. Числа постоянного типа

Существуют числа специального вида, которые дают полезные примеры и с которыми особенно легко работать. Они характеризуются свойствами, указанными в следующей теореме.

Теорема 6. *Для иррационального числа* α *следующие его свойства эквивалентны.*

СТ 1. *Существует постоянная* $c > 0$, *такая, что для всех натуральных чисел* q *выполняется неравенство* $\|q\alpha\| > c/q$.

СТ 2. *Для любой положительной функции* ψ *со сходящимся рядом* $\sum \psi(q)$ *неравенство*

$$\|q\alpha\| < \psi(q)$$

имеет только конечное число решений.

СТ 3. *Существует постоянная* $c > 0$, *такая, что для заданного достаточно большого натурального числа* N *существует взаимно простое решение* q, p *неравенств* $|q\alpha - p| < 1/q$ *и* $N < q < cN$ (*другими словами,* α — *число постоянного типа*).

СТ 4. *Если* $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ — *непрерывная дробь числа* α, *то существует постоянная* $c > 0$, *такая, что* $a_n < c$ *для всех* n.

Доказательство. Пусть выполнено СТ 1, и пусть ψ — такая функция, что неравенство $\|q\alpha\| < \psi(q)$ имеет бесконечно много решений. Тогда $c/q < \psi(q)$ для бесконечно многих значений q. Покажем, что ряд $\sum \psi(q)$ расходится.

Разделив ψ на c, мы можем без ограничения общности предположить, что $c = 1$. Пусть $q_1 < q_2 < \ldots$ — возрастающая последовательность q, такая, что $\psi(q_n) > 1/q_n$. Определим $\varphi(q) = 1/q_n$ для $q_{n-1} < q \leqslant q_n$. Тогда $\varphi \leqslant \psi$, и достаточно доказать, что ряд $\sum \varphi(q)$ расходится. Поэтому

$$\sum \psi(q) \geqslant \sum \varphi(q) \geqslant 1/q_1 + (q_2 - q_1)/q_2 + (q_3 - q_2)/q_3 + \ldots.$$

Возьмем $n = n_1$ большим. Первые n членов этих рядов имеют нижнюю грань

$$(q_2 - q_1)/q_n + \ldots + (q_n - q_{n-1})/q_n = (q_n - q_1)/q_n.$$

Итак, для больших n мы получили оценку $> 1/2$ для первых n членов рассматриваемого ряда. Мы повторим это рассуждение с числом n_2, которое даст оценку, большую чем

$$(q_{n_2} - q_{n_1})/q_{n_2} > 1/2$$

для следующих $n_2 - n_1$ членов того же ряда, и продолжим этот процесс для $n_3, \ldots$. Таким образом, мы видим, что ряд расходится и СТ 2 выполняется.

Пусть выполнено СТ 2. Мы докажем, что α удовлетворяет СТ 1, следуя рассуждениям Шануэля. Предположим, что α не удовлетворяет СТ 1. Тогда мы можем найти последовательность целых q_i

$$1 < q_1 < q_2 < \ldots,$$

таких, что $\|q_i\alpha\| < 1/(2^i q_i)$. Пусть

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e}{2^i q_i} e^{-t/q_i}.$$

Тогда $\psi(q_j) > 1/(2^j q_j)$ для $j = 1, 2, \ldots$ и ряд для ψ сходится. Это является противоречием, которое доказывает, что α удовлетворяет СТ 1.

Мы заметим, что функция Шануэля очень гладкая и ведет себя наилучшим образом в смысле выпуклости. Итак, если в СТ 2 рассматривать только такие функции, то из него сразу следует, что α удовлетворяет СТ 1.

Эквивалентность СТ 1 и СТ 3 есть частный случай теорем 2 и 3. Эквивалентность их СТ 4 следует из того факта, что по теореме 7 § 3 гл. I самое большее две n-х промежуточных дроби являются также 1-подходящими. Это доказывает теорему.

Числа постоянного типа в силу СТ 4 называют также *числами с ограниченными неполными частными.*

Пример. Пусть D — натуральное число, не являющееся квадратом, и пусть $\alpha = a + b\sqrt{D}$, где a и b — целые. Тогда α — число постоянного типа. Это тривиально вытекает из следующего. Предположим, что $|q\alpha - p|$ мало, так что $\alpha - p/q$ мало. Пусть

$\alpha' = a - b\sqrt{D}$ — число, сопряженное к α. Так как p/q приближает α очень хорошо, мы заключаем, что $\alpha' - p/q$ приближенно равно $\alpha' - \alpha$. Но число $(q\alpha - p)(q\alpha' - p)$ — отличное от нуля целое с абсолютной величиной $\geqslant 1$. Если $|q\alpha - p| \leqslant c/q$ для некоторого малого $c > 0$, то

$$|q\alpha' - p| \geqslant q/c.$$

Однако $q\alpha' - p$ приближенно равно $q(\alpha' - \alpha)$. Это показывает, что c не может быть произвольно малым числом.

Пример. Если α — число постоянного типа и $m/n \neq 0$ — рациональное число, то и $m\alpha/n$ — число постоянного типа. Простое доказательство предлагается читателю в качестве упражнения.

В силу теоремы Хинчина о расходимости мы видим, что для данного натурального n множество чисел α, для которых существует только конечное число решений неравенства $\|q\alpha\| < 1/nq$, имеет меру нуль. Обозначим это множество через S_n. Если $m > n$, то $S_n \subset S_m$. Каждый элемент из S_n — число постоянного типа, и, обратно, каждое число постоянного типа лежит в некотором S_n. Так как счетное объединение множеств меры нуль также является множеством меры нуль, отсюда следует, что числа постоянного типа составляют множество меры нуль.

Неизвестны простые примеры чисел постоянного типа, отличных от чисел приведенного выше примера. Наиболее вероятное предположение состоит в том, что не существует других «естественных» примеров.

§ 3. Асимптотические приближения

Всюду в этом параграфе мы будем считать, что ψ — положительная функция $\leqslant 1$, убывающая и такая, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$$

расходится. Мы положим

$$\Psi(N)=\int\limits_1^N \psi(t)\,dt.$$

Пусть $\lambda_{\alpha,\psi}^{+}(N)$ для каждого натурального N и иррационального числа α обозначает число решений неравенств

$$0<q\alpha-p<\psi(q) \quad \text{и} \quad 1\leqslant q<N$$

в целых числах q и p. Для того чтобы упростить обозначение, мы будем опускать знак $+$, а также обычно опускать индексы α, ψ у λ. Естественно попытаться найти асимптотическую оценку для λ; такая оценка была получена только недавно для почти всех чисел. Мы приведем этот результат без доказательства, а сначала напомним определения некоторых необходимых понятий.

Если F и G — две функции действительного переменного и G положительна, то говорят, что они *эквивалентны*, и записывают $F\sim G$, если

$$\lim_{x\to\infty} F(x)/G(x)=1.$$

Говорят, что $F=O(G)$, если существует постоянная $C>0$, такая, что $|F(x)|\leqslant CG(x)$ для всех достаточно больших x. Говорят также, что $F=o(G)$, если

$$\lim_{x\to\infty} F(x)/G(x)=0.$$

Теорема 7. *Для почти всех чисел* α

$$\lambda(N)=\Psi(N)+o(\Psi(N)).$$

Частный случай теоремы 7 был впервые получен Левеком [1]. Общая теорема была доказана Эрдёшем [1] и Шмидтом [1]. В этой книге мы главным образом интересуемся специальными числами и поэтому опустим доказательство теоремы 7, но установим частичный результат (следствие 3 из следующей ниже теоремы 8), согласующийся с нашими интересами. Заметим, однако, что Шмидт получил, кроме того, другие важные обобщения, например на многомерный случай, а также очень хорошую оценку остаточного члена. Это важно, так как, когда мы имеем дело со специальными числами, выражение остаточного члена существенным образом отражает специальную природу рассматриваемого числа. Для дальнейшего ознакомления с этим вопросом мы отсылаем читателя к статье Галлахера [1].

Теперь возникает проблема отыскания специальных чисел и функций ψ, для которых λ имеет подобное асимптотическое свойство. Для формулировки следующей теоремы введем одно обозначение. Условимся писать $f \succ g$ и говорить, что f *много больше* g, если существует положительная функция h, стремящаяся к ∞ и такая, что $f = gh$. Будем также говорить, что g *много меньше* f.

Теорема 8. *Пусть* α — *иррациональное число типа* $\leqslant g$ *и* $\psi(t) = \omega(t)/t$, *где* $\omega \succ g$ *и* ω *неограниченно возрастает, а* $\omega^{1/2}(t) g^{1/2}(t)/t$ *убывает для всех достаточно больших* t. *Тогда*

$$\lambda(N) = \Psi(N) + O\left(\int_1^N \frac{\omega^{1/2}(t)\, g^{1/2}(t)}{t}\, dt\right).$$

Замечание. Если η — функция, стремящаяся к нулю, то легко проверить, что для $N \to \infty$

$$\int_1^N \frac{\omega(t)\,\eta(t)}{t}\, dt = o(\Psi(N)).$$

В силу $\omega \succ g$ отсюда следует, что остаточный член в этой теореме позволяет получить асимптотический результат $\lambda \sim \Psi$.

Если α — такое число, что $|q\alpha - p| > 1/[qf(q)]$ для некоторой возрастающей функции f и взаимно простых q и p, то по теореме 2 § 1 можно положить $g = f$. Следовательно, асимптотический результат выполняется всякий раз, когда $\omega \succ f$. Мы имеем два интересных частных случая.

Следствие 1. *Если α — число постоянного типа, то*

$$\lambda(N) = \Psi(N) + o\left(\int_1^N \frac{\omega^{1/2}(t)}{t}\,dt\right)$$

для некоторой функции $\omega > 1$.

Следствие 2. *Пусть $0 < a \leqslant 1$ и $\omega(t) = at$. Тогда $\lambda(N)$ равно числу пар целых q и p, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < q\alpha - p < a \quad \text{и} \quad 1 \leqslant q < N,$$

и

$$\lambda(N) = aN + O\left(\int_1^N \frac{g^{1/2}(t)}{t^{1/2}}\,dt\right),$$

где остаточный член есть $o(N)$, если $g(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$.

Когда ω таково, как в следствии 2, то проблема оценки λ известна как проблема *равномерного распределения*. В ней определяется число тех целых q, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant q < N$, для которых $q\alpha \pmod{\mathbf{Z}}$ лежит в $[0, a)$. Когда $\lambda(N)$ эквивалентно aN, то говорят, что числа $q\alpha \pmod{\mathbf{Z}}$ равномерно распределены. Следствие 2 определяет связь между проблемой равномерного распределения и типом числа α в зависимости от поведения остаточного члена. Этот частный случай был рассмотрен давно, в основном Вейлем [2], а наиболее близко к точке зрения, изложенной здесь, — Островским [1] и Бенке [2]. Вместо использования понятия типа в принятом нами смысле эти авторы пошли менее эффективным путем определения аппроксимативного поведения α по отношению к p/q, что привело к более слабым результатам и усложненным доказательствам. Функция ω, важность которой в настоящих оценках видна, была введена автором в статье [1].

Теорема 8 содержит в себе также утверждение для почти всех чисел, так как к ней можно применить теорему 4 § 1. Если $g(t) = \ln^{1+\varepsilon} t$, то из теоремы

Хинчина о сходимости следует, что почти все числа имеют тип $\leqslant g$. Таким образом, имеет место

Следствие 3. *Пусть* ω — *положительная функция, такая, что* $\omega > \ln^{1+\varepsilon} t$. *Тогда для почти всех чисел* α (*за исключением множества меры нуль, зависящего от* ω) $\lambda_{\alpha,\psi} \sim \Psi$.

Доказательство теоремы 8 будет включать в себя сначала частный случай следствия 2, как в следующей ниже лемме 1.

Удобно обозначить через $R(\xi)$ дробную долю числа ξ, т. е. остаток числа $\xi \pmod{\mathbf{Z}}$, лежащий между 0 и 1. Итак, $R(\xi)$ — единственное число $\xi - p$ (при некотором целом p), такое, что $0 \leqslant \xi - p < 1$.

Лемма 1. *Пусть* $0 < a \leqslant 1$, *а* q *и* p — *взаимно простые целые числа, такие, что* $|\alpha q - p| < 1/q$. *Тогда среди* q *последовательных целых чисел число целых* n, *таких, что* $R(n\alpha) < a$, *равно* $qa + O(1)$.

Доказательство. Положим

$$\alpha = p/q + \delta/q^2, \quad |\delta| < 1.$$

Пусть $n = n_0 + \nu$, где $\nu = 1, \ldots, q$. Тогда

$$n\alpha = (n_0 + \nu)\alpha = n_0\alpha + \nu\alpha = n_0\alpha + \nu p/q + \nu\delta/q^2.$$

Рациональные числа $\nu p/q$ $(\nu = 1, \ldots, q)$ равны (с точностью до перестановки) числам

$$0/q,\ 1/q,\ \ldots,\ (q-1)/q \pmod{\mathbf{Z}}.$$

Погрешность $\nu\delta/q^2$ ограничена числом $1/q$. Мы можем написать $n_0\alpha = r/q + \varepsilon$ для некоторого целого r, $0 \leqslant r < q$, и $|\varepsilon| \leqslant 1/q$. Следовательно, числа $n\alpha \pmod{\mathbf{Z}}$ совпадают с числами

$$(r+\nu)/q + \varepsilon_\nu \pmod{\mathbf{Z}},$$

где $|\varepsilon_\nu| \leqslant 2/q$. Эти числа с точностью до перестановки совпадают с числами

$$\mu/q + \varepsilon_\mu \pmod{\mathbf{Z}},$$

где $0 \leqslant \mu < q$ и $|\varepsilon_\mu| \leqslant 2/q$. Теперь имеем

$$R(\mu/q + \varepsilon_\mu) = \mu/q + \varepsilon_\mu,$$

за исключением, возможно, тех случаев, когда $\mu \geqslant q-2$ или $\mu \leqslant 2$, которые могут встретиться не более чем для пяти значений μ. Итак, число искомых чисел n равно числу целых μ, $0 \leqslant \mu < q$, таких, что

$$\mu/q+\varepsilon_\mu < a,$$

с точностью до ограниченной величины. Число решений этого неравенства ограничено сверху числом решений неравенства

$$\mu/q < a+2/q,$$

или эквивалентного ему неравенства $\mu < qa+2$, которое отличается от qa на ограниченную величину. Аналогично получается нижняя граница, которая также отличается от qa на ограниченную величину. Это доказывает утверждение леммы.

Лемма 2. *Для всех достаточных больших N (зависящих от ω) и всех целых взаимно простых q и p, $q>0$, удовлетворяющих неравенствам*

$$0<|q\alpha-p|<1/q \quad и \quad 1 \leqslant q < \frac{Ng^{1/2}(N)}{\omega^{1/2}(N)},$$

выполняется равенство

$$\lambda(N)-\lambda(N-q)=\int\limits_{N-q}^{N}\psi(t)\,dt+\theta\frac{q\omega^{1/2}(N)\,g^{1/2}(N)}{N}+\theta_1,$$

где $|\theta| \leqslant 4$, $|\theta_1| \leqslant c_1$ и c_1 — абсолютная постоянная.

Доказательство. Заметим, что $\lambda(N)-\lambda(N-q)$ есть число целых n, удовлетворяющих неравенствам

$$0<R(n\alpha)<\psi(n) \quad \text{и} \quad N-q \leqslant n < N.$$

Пусть

$$E(t)=\frac{\omega^{1/2}(t)\,g^{1/2}(t)}{t}.$$

Докажем, что для достаточно больших N имеет место неравенство

$$0 \leqslant \psi(N-q)-\psi(N) \leqslant 2E(N).$$

Для этого заметим, что

$$0 \leqslant \psi(N-q) - \psi(N) = \frac{\omega(N-q)}{N-q} - \frac{\omega(N)}{N} =$$
$$= \frac{N\omega(N-q) - (N-q)\,\omega(N)}{N(N-q)}.$$

Заменим в этом равенстве $\omega(N-q)$ на $\omega(N)$, увеличивая тем самым правую часть. Аналогично, мы можем заменить $N-q$ в знаменателе на $N/2$, так как $g(t)/\omega(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Используя предположение о том, что $q < Ng^{1/2}(N)/\omega^{1/2}(N)$, убеждаемся, что доказываемое утверждение выполняется.

Мы получаем, что

$$\psi(N) \leqslant \psi(n) \leqslant \psi(N-q) < \psi(N) + 2E(N).$$

Можно определить границы для $\lambda(N) - \lambda(N-q)$, заменяя $\psi(n)$ на $\psi(N) \pm E(N)$ в неравенстве $0 < R(n\alpha) < \psi(n)$. По лемме 1 получаем

$$\lambda(N) - \lambda(N-q) = q\psi(N) \pm 2qE(N) + O(1).$$

С другой стороны, так как ψ убывает,

$$q\psi(N) \leqslant \int\limits_{N-q}^{N} \psi(t)\,dt \leqslant q\psi(N-q) \leqslant q\psi(N) + 2qE(N).$$

Следовательно,

$$\lambda(N) - \lambda(N-q) = \int\limits_{N-q}^{N} \psi(t)\,dt + \theta qE(N) + \theta_1,$$

что и доказывает лемму 2.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 8. Для достаточно больших N положим

$$B = \frac{Ng^{1/2}(N)}{\omega^{1/2}(N)} \leqslant N$$

и выберем q и p так, что $0 < |q\alpha - p| < 1/q$ и $B/g(B) \leqslant q < B$. Тогда, поскольку $g(B) \leqslant g(N)$, очевидно, что

$$\frac{N}{\omega^{1/2}(N)\, g^{1/2}(N)} \leqslant q < \frac{N g^{1/2}(N)}{\omega^{1/2}(N)}$$

и

$$0 < |q\alpha - p| < 1/q.$$

Используя тот факт, что $\omega^{1/2}(t) g^{1/2}(t)/t$ убывает, и левую часть неравенства для q, получаем

$$\int\limits_{N-q}^{N} \frac{\omega^{1/2}(t)\, g^{1/2}(t)}{t}\, dt \geqslant \frac{q\omega^{1/2}(N)\, g^{1/2}(N)}{N} \geqslant 1.$$

По лемме 2 отсюда следует, что

$$\lambda(N) - \lambda(N-q) = \int\limits_{N-q}^{N} \psi(t)\, dt + \theta_{N,\,q} \int\limits_{N-q}^{N} \frac{\omega^{1/2}(t)\, g^{1/2}(t)}{t}\, dt,$$

где $|\theta_{N,\,q}| \leqslant c_1 + 5$. Повторяя проведенное рассуждение с $N - q$ вместо N и т. д. и складывая полученные равенства, находим, что

$$\lambda(N) = \Psi(N) + \theta \int\limits_{1}^{N} \frac{\omega^{1/2}(t)\, g^{1/2}(t)}{t}\, dt + O(1),$$

где $|\theta| \leqslant c_1 + 5$. Это доказывает теорему.

Кроме возможных количественных обобщений на многомерный случай, возникает проблема описания поведения асимптотического приближения к числу α, когда g растет медленнее чем ω. Тогда необязательно верно, что λ эквивалентно Ψ (см. гл. IV и особенно гл. V). В следующем параграфе мы опишем метод, который может быть иногда применен в таких случаях.

Что касается многомерного случая, то можно начать с рассмотрения линейных форм

$$\| q_1\alpha_1 + \ldots + q_m\alpha_m \|,$$

аналогично тому как выше рассматривался одномерный случай. *Принцип переноса Хинчина* дает слабое соотношение между величиной упомянутой линейной формы и совместным приближением чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

(которые предполагаются линейно независимыми над полем рациональных чисел). (См., например, книгу Касселса [1].) Было бы интересно сформулировать количественный асимптотический принцип переноса, зависящий от обобщенного понятия типа для линейных форм от нескольких чисел.

§ 4. Связь с непрерывными дробями

Мы опишем здесь формально метод, использованный Адамсом [1, 2] для определения асимптотических приближений к числу e и другим числам. Один специальный случай будет рассмотрен в гл. V.

Пусть, как обычно,

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$$

— иррациональное число. Из равенства

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

мы находим

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = a_{n+1} + \frac{1}{q_n/q_{n-1}} = a_{n+1}\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}a_n + \rho_n}\right)$$

с некоторым $\rho_n > 0$. По индукции отсюда следует, что

$$a_1 \ldots a_n \leqslant q_n \leqslant a_1 \ldots a_n \prod_{\nu=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_\nu a_{\nu-1}}\right).$$

Пусть $A(n) = a_1 \ldots a_n$ и $P(n)$ обозначает произведение

$$P(n) = \prod_{\nu=2}^{n}\left(1 + \frac{1}{a_\nu a_{\nu-1}}\right),$$

так что

$$A(n) \leqslant q_n \leqslant A(n) P(n).$$

Предположим, что существуют строго возрастающие функции A_* и A^*, такие, что

$$A_*(n) \leqslant A(n) \quad \text{и} \quad A(n) P(n) \leqslant A^*(n).$$

Тогда получим

$$A_*(n) \leqslant q_n \leqslant A^*(n). \qquad (*)$$

Пусть g_* и g^* — обратные функции для A_* и A^* соответственно.

Пусть $\lambda_0(N)$ — число решений неравенств

$$0 < q\alpha - p < 1/q \quad \text{и} \quad 0 < q < N \tag{1}$$

в целых взаимно простых числах q и p, а $\lambda(N)$ — число решений таких же неравенств, но без ограничений, что q и p — взаимно простые числа. Найдем выражения для λ_0 и λ через элементы непрерывной дроби для α. Мы получим их из следующего предположения.

Предположение. *Для достаточно больших q все взаимно простые решения q, p неравенства*

$$|q\alpha - p| < 1/q$$

даются подходящими дробями к α.

Пусть дано N, и пусть n таково, что

$$q_n \leqslant N < q_{n+1}.$$

Тогда из (*) мы находим $n \leqslant g_*(N)$ и $g^*(N) < g^*(q_{n+1}) \leqslant n+1$, или

$$g^*(N) - 1 \leqslant n \leqslant g_*(N).$$

Подходящая дробь p_ν/q_ν по теореме 5 § 2 гл. I будет удовлетворять условию $q_\nu\alpha - p_\nu > 0$ тогда и только тогда, когда ν четно. Отсюда по определению $\lambda_0(q_n) = n/2 + O(1)$, и мы получаем оценки

$$\boxed{{}^1/_2\, g^*(N) - O(1) \leqslant \lambda_0(N) \leqslant {}^1/_2\, g_*(N) + O(1).} \tag{2}$$

Для того чтобы найти аналогичные границы для λ, мы должны сосчитать не являющиеся взаимно простыми решения рассматриваемого неравенства для каждого ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, и сложить их. В силу следствия 3 из теоремы 3 § 1 гл. I (с α_{n+2} вместо a_{n+2}) мы видим, что положительное целое k удовлетворяет неравенству

$$|kq_\nu\alpha - kp_\nu| < 1/(kq_\nu),$$

тогда и только тогда, когда

$$k^2 < \frac{1}{a_{\nu+2}} + \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu}.$$

Если $a_{\nu+1} \geqslant 2$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, то очевидно, что $kq_\nu < q_{n+1}$. Следовательно, число целых k, таких, что произведения kq_ν, kp_ν дают решение (1) с $kq_\nu < q_{n+1}$, равно

$$a_\nu^{1/2} + O(1).$$

Отсюда получаем промежуточную оценку

$$\lambda(q_{n+1}) = \sum_{\substack{\nu=1,\\ \nu \text{ четные}}}^{n} a_\nu^{1/2} + O(n).$$

Мы можем тогда легко определить $\lambda(N)$ из неравенств

$$\lambda(q_n) \leqslant \lambda(N) \leqslant \lambda(q_{n+1}),$$

Используя оценки для n через $g^*(N)$ и $g_*(N)$, а именно

$$\boxed{\sum_{\substack{\nu=1,\\ \nu \text{ четные}}}^{g^*(N)-2} a_\nu^{1/2} + O(g^*(N)) \leqslant \lambda(N) \leqslant \sum_{\substack{\nu=1,\\ \nu \text{ четные}}}^{g_*(N)} a_\nu^{1/2} + O(g_*(N)).} \quad (3)$$

Все члены, входящие в оценки (2) и (3), выражаются лишь через элементы непрерывной дроби для α, а это и являлось целью наших рассуждений.

В приложениях две функции A_* и A^* могут быть выбраны так, что g_* и g^* будут очень близки друг к другу, и таким путем мы получаем асимптотическую оценку для $\lambda(N)$.

Оценка (3) из-за наличия членов $O(g_*(N))$ несколько груба. Этого достаточно для приложения непрерывных дробей, подобных тем, которые рассматриваются в гл. V. Можно было бы получить более точное выражение при более тщательном подсчете чисел k, удовлетворяющих неравенству

$$k^2 < \frac{q_{\nu+1}}{q_\nu} + \frac{1}{a_{\nu+2}} < a_{\nu+2} + \frac{1}{a_\nu} + \frac{1}{a_{\nu+2}}.$$

Сейчас еще нет достаточного количества примеров непрерывных дробей, соответствующих классическим постоянным, которые позволили бы дать полезные существенные обобщения для проведения такого подсчета.

Глава III

ОЦЕНКИ УСРЕДНЕННЫХ СУММ

§ 1. Сумма дробных долей

Пусть снова α — иррациональное действительное число. При рассмотрении значений дробных долей $R(n\alpha)$ естественно образовать сумму

$$\sum_{n=1}^{N} R(n\alpha)$$

и оценить порядок ее величины. Так как предполагается, что значения $R(n\alpha)$ до некоторой степени равномерно распределены около $1/2$, лучше исследовать сумму

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (R(n\alpha) - 1/2),$$

которая дает усредненное отклонение суммы дробных долей от $N/2$. Выразим оценку этого отклонения через тип числа α.

Теорема 1. *Пусть α — число типа $\leqslant f$, и пусть функция $f(t)/t$ убывает. Тогда*

$$S_N = O\left(\int_1^N \frac{f(t)}{t}\,dt\right).$$

Доказательство. Пусть p и q — взаимно простые целые числа, такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \quad \text{и} \quad \frac{N}{f(N)} \leqslant q < N.$$

Тогда

$$a = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2}, \quad |\delta| < 1.$$

Оценим сумму

$$S_N - S_{N-q} = \sum_{N-q+1}^{N} (R(n\alpha) - 1/2) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{q-1} \left(R \left(N\alpha - \nu \frac{p}{q} - \nu \frac{\delta}{q^2} \right) - \frac{1}{2} \right).$$

Дробь $\nu p/q$ с точностью до перестановки пробегает значения $0/q, 1/q, \ldots, (q-1)/q \pmod{\mathbf{Z}}$. Следовательно, $S_N - S_{N-q} = O(1)$. В частности, существует абсолютная постоянная c_1, такая, что

$$S_N - S_{N-q} = \theta \int_{N-q}^{N} \frac{f(t)}{t} dt$$

с $|\theta| \leqslant c_1$, потому что для интеграла справа имеет место оценка снизу

$$\int_{N-q}^{N} \frac{f(t)}{t} dt \geqslant q \frac{f(N)}{N} \geqslant 1.$$

Повторяя эти рассуждения с заменой N на $N-q$ и т. д., по индукции получаем утверждение теоремы.

Вышеизложенное доказательство следует приведенному в статье автора [4]. Сумма, оценка которой дается теоремой 1, была исследована классически главным образом Харди и Литлвудом [1—7], Островским [1], Бенке [2] и Гекке [1]. Читатель может найти связь между этой суммой и другими проблемами, рассматриваемыми в этих работах, особенно с функцией, определенной рядом Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n\alpha)}{n^s}.$$

Было бы весьма интересно изучить аналитические свойства этой функции комплексного переменного s и продолжить исследования Харди — Литлвуда и Гекке в этом направлении. Это следует сделать в связи со специальными числами, скажем алгебраическими числами, или, например, числом e.

Мы видим, что остаточный член в теореме 1 достаточно хорош. Например, если α — число постоянного типа, то отклонение, т. е. S_N, имеет порядок $\ln N$ — величины достаточно малой по сравнению с величиной суммы дробных долей. Аналогично, поскольку известно, что почти все числа имеют тип $<\ln^{1+\varepsilon} t$, для таких чисел сумма S_N — величина порядка $\ln^{2+\varepsilon} N$, которая опять достаточно мала.

§ 2. Сумма обратных величин

Для дальнейших приложений удобно иметь дело с некоторым измененным понятием типа, а также пользоваться только подходящими дробями к α. Пусть $g \geqslant 1$ — возрастающая функция и B_0 — натуральное число, $B_0 \geqslant 10$. Мы будем говорить, что α — число *главного подтипа* $\leqslant g$ для всех чисел $\geqslant B_0$, если для данного числа $B \geqslant B_0$ существует подходящая дробь к α p_i/q_i, такая, что $B < q_i \leqslant Bg(B)$. В частности, если p/q и p'/q' — две последовательные подходящие дроби к α и $q \geqslant B_0$, то $q' \leqslant qg(q)$.

Теорема 2. *Пусть α — число главного подтипа $\leqslant g$ для всех чисел $\geqslant B_0$. Тогда для всех целых $N \geqslant B_0$ мы имеем*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R(n\alpha)} \leqslant 2N \ln N + 20Ng(N) + K_0,$$

где

$$K_0 \leqslant \sum_{n=1}^{B_0 g(B_0)} \frac{1}{R(n\alpha)}.$$

Аналогичные оценки выполняются и при замене $R(n\alpha)$ на $1 - R(n\alpha)$.

Доказательство. Утверждение для $1 - R(n\alpha)$ следует так же, как и для $R(n\alpha)$. Таким образом, мы установим только первую оценку. Для этого нам потребуется лемма, дающая оценку суммы членов $1/R(n\alpha)$ в некотором интервале значений n.

Лемма. *Пусть p/q и p'/q' — две последовательные подходящие дроби к α, а q_0, $1 \leqslant q_0 \leqslant q$, и $n_0 \geqslant 0$ — целые числа, такие, что $n_0 + q_0 < q'$. Тогда*

$$\sum_{n=n_0+1}^{n_0+q_0} \frac{1}{R(n\alpha)} \leqslant q \ln q + 10q'.$$

Доказательство. Представим α в виде

$$\alpha = p/q + \delta/q^2, \quad |\delta| < 1,$$

и

$$n = n_0 + \nu, \quad \nu = 1, \ldots, q_0.$$

Тогда

$$n\alpha = n_0\alpha + \nu\alpha = n_0\alpha + \nu p/q + \varepsilon_\nu,$$

где $|\varepsilon_\nu| < 1/q$. Числа $\nu p/q \pmod{\mathbf{Z}}$ с точностью до перестановки совпадают с числами

$$\mu/q \pmod{\mathbf{Z}}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant q-1,$$

потому что p и q — взаимно простые числа. Таким образом,

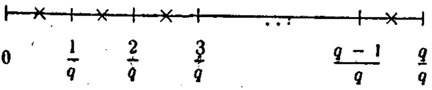
$$n\alpha \equiv n_0\alpha + \mu/q + \varepsilon_\mu \pmod{\mathbf{Z}}.$$

(Каждому n поставим в соответствие единственные числа ν и μ, которые следовало бы обозначить ν_n и μ_n, но для простоты мы опускаем индекс n.) При оценке суммы мы будем рассматривать несколько случаев:

(а) $n = q$ или n таково, что

$$R(n_0\alpha + \mu/q) \leqslant 3/q \quad \text{или} \quad \geqslant (q-1)q.$$

Для таких n видно, что числам $R(n_0\alpha+\mu/q)$ соответствуют точки, помеченные крестиками на следующем чертеже:



В этом случае мы пользуемся тем, что $n<q'$ и, следовательно, что $1/(2q')\leqslant R(n\alpha)$ по следствию 1 из теоремы 6 § 2 гл. I, другими словами, что

$$\frac{1}{R(n\alpha)}\leqslant 2q'.$$

Мы замечаем, что существует ровно пять значений n, удовлетворяющих условиям рассматриваемого случая, а сумма обратных величин для таких n будет $\leqslant 10q'$.

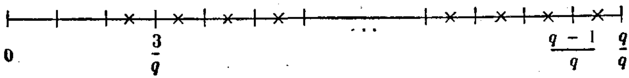
(b) Все остальные n такие, что $n\neq q$ и

$$3/q<R(n_0\alpha+\mu/q)<(q-1)/q.$$

Тогда $R(n\alpha)\geqslant 2/q$, и в этом случае точки, соответствующие числам

$$R(n_0\alpha+\mu/q),$$

лежат во всех малых интервалах на местах, указанных крестиками на следующем чертеже:



Тогда

$$R(n_0\alpha+\mu/q)-\varepsilon_\mu\leqslant R(n_0\alpha+\mu/q+\varepsilon_\mu)=R(n\alpha).$$

Мы оценим $1/R(n\alpha)$, заменяя $R(n\alpha)$ на дробь m/q, ближайшую слева от $R(n\alpha)$. Если мы рассмотрим сумму величин $1/R(n\alpha)$ по всем n, удовлетворяющим условию (b), то увидим, что эта сумма не превосходит

$$\sum_{\mu=2}^{q} \frac{1}{\mu/q} \leqslant q \ln q.$$

Складывая верхние границы в случаях (a) и (b), получаем оценку, которая доказывает утверждение леммы.

Мы теперь можем довести до конца основную часть доказательства теоремы 2 индукцией по $N \geqslant B_0$. Пусть p/q и p'/q' — последующие подходящие дроби к α, такие, что

$$q \leqslant N < q'.$$

Если $q < B_0$, то $N \leqslant B_0 g(B_0)$, и мы тривиально оценим нашу сумму как K_0. Предположим, что $q \geqslant B_0$. Тогда

$$q' \leqslant qg(q)$$

по определению подтипа. Будем различать два случая.

Случай 1. $N/2 < q$. Тогда $N < 2q$ и мы разобьем рассматриваемую сумму на две части:

$$\sum_{1}^{N} = \sum_{1}^{q} + \sum_{q+1}^{N}.$$

Применяя лемму к каждой сумме, находим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R(n\alpha)} \leqslant 2q \ln q + 20qg(q) \leqslant 2N \ln N + 20Ng(N);$$

здесь мы использовали монотонность логарифма и g.

Случай 2. $q \leqslant N/2$. В силу леммы получаем

$$\sum_{N-q+1}^{N} \frac{1}{R(n\alpha)} \leqslant 2q \ln q + 20qg(q).$$

(Умножение на 2 только ухудшает оценку.) По индукции

$$\sum_{1}^{N-q} \frac{1}{R(n\alpha)} \leqslant 2(N-q)\ln(N-q) + 20(N-q)\,g(N-q) + K_0.$$

Используя монотонность g, мы находим

$$(N-q)\,g(N-q) + qg(q) =$$
$$= Ng(N-q) - qg(N-q) + qg(q) \leqslant Ng(N-q) \leqslant Ng(N)$$

(здесь было использовано неравенство $N - q \geqslant q$); аналогичный результат получается при замене g логарифмом. Это доказывает теорему.

Замечание 1. Оценка в теореме 2 является наилучшей из возможных. Положим $N = q - 1$ или $N = q$ и покажем, что оба члена $N \ln N$ и $Ng(N)$ необходимы в оценке. Кроме того, для чисел α постоянного типа легко видеть, что рассматриваемая сумма $\geqslant cN \ln N$ для некоторой постоянной $c > 0$ и всех достаточно больших N.

Замечание 2. Оценка для K_0 может быть дана только выражением, зависящим от g. Мы используем тот факт, что

$$N < q' \leqslant Ng(N),$$

и аппроксимируем α дробью p'/q', а не p/q. Тогда получим альтернативную оценку

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R(n\alpha)} \leqslant 10Ng(N)\ln(Ng(N))$$

для всех $N \geqslant B_0$. Итак, суммы в этой главе могут быть оценены только выражениями, зависящими от типа, — никаких других сведений о числе α не требуется.

Замечание 3. Как обычно, для почти всех чисел можно взять

$$g(t) = \ln^{1+\varepsilon} t,$$

так что мы получим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R(n\alpha)} = O(N \ln^{1+\varepsilon} N)$$

для почти всех чисел. Конечно, постоянная в O зависит от ε и α.

Теорема 2 имеет разнообразные применения. Мы прежде всего используем ее для того, чтобы оценить некоторую сумму, содержащую $\sin x$. Мы знаем, что для малых значений x функция $\sin x$ эквивалентна x. Нужна грубая оценка отношения этих двух величин. Чтобы получить ее, вспомним, что для $0 < y \leqslant \pi/2$ мы имеем

$$y - \frac{y^3}{3!} < \sin y < y$$

и, следовательно,

$$1 - \frac{y^2}{6} < \frac{\sin y}{y} < 1.$$

Наименьшее значение члена слева получается при $y = \pi/2$, и в рассматриваемом полуинтервале

$$y < 2 \sin y.$$

Лемма. *Для некоторого действительного числа x, не являющегося целым,*

$$\frac{1}{|\sin \pi x|} < \frac{1}{R(x)} + \frac{1}{1 - R(x)},$$

и, следовательно, для иррационального α

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|\sin \pi n\alpha|} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R(n\alpha)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - R(n\alpha)}.$$

Доказательство. Выражение $|\sin \pi x|$ зависит только от $R(x)$, и поэтому, не нарушая общности доказательства, можно предположить, что $0 < x < 1$.

Предположим сначала, что $x = R(x) \leqslant 1/2$. Пусть $y = \pi x \leqslant \pi/2$. Тогда по предыдущей оценке

$$\frac{1}{|\sin \pi x|} = \frac{1}{|\sin y|} < \frac{2}{y} = \frac{2}{\pi x} < \frac{1}{R(x)}.$$

Если, с другой стороны, $1/2 \leqslant R(x) < 1$, то $R(-x) = 1 - R(x)$, так как $|\sin \pi x| = |\sin(-\pi x)|$. Поэтому мы можем использовать такого рода оценку, чтобы закончить доказательство леммы.

Теорема 3. *При предположениях теоремы 2 и $N \geqslant B_0$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|\sin \pi n \alpha|} \leqslant 4N \ln N + 40Ng(N) + 2K_0.$$

Доказательство. Теорема 3 непосредственно следует из теоремы 2 и леммы.

§ 3. Тригонометрические суммы с многочленом второй степени

Существует классическая проблема оценки сумм вида

$$\sigma(n, F) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i F(n)},$$

где F — многочлен с действительными коэффициентами. Эта сумма содержит N членов, каждый из которых по модулю равен единице. Однако (в зависимости от частного вида коэффициентов F) некоторые члены этой суммы могут взаимно погашаться, и тогда ее абсолютная величина будет гораздо меньше N. Мы сначала докажем результаты, которые допускают плодотворные обобщения и восходят к Виноградову [1].

Теорема 4. *Пусть h — положительная неограниченно возрастающая функция, k — натуральное число и*

$$\sigma(N, x) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^k x}.$$

Тогда множество чисел x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, таких, что

$$|\sigma(N, x)| \geqslant N^{1/2} h(N) \quad \textit{для всех} \quad N > N_0(x),$$

имеет меру нуль.

Доказательство. Пусть A_{N_0} для каждого натурального N_0 обозначает множество чисел x, таких, что

$$|\sigma(N, x)| \geqslant N^{1/2} h(N) \quad \text{для всех} \quad N > N_0.$$

Мы имеем

$$|\sigma(N, x)|^2 = \sigma(N, x)\overline{\sigma(N, x)},$$

откуда следует, что

$$\int_0^1 |\sigma(N, x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \int_0^1 e^{2\pi i (n^k - m^k) x} dx.$$

Но для каждого натурального $\mu \neq 0$ выполняется равенство

$$\int_0^1 e^{2\pi i \mu x} dx = 0,$$

следовательно, для $N > N_0$

$$N = \int_0^1 |\sigma(N, x)|^2 dx \geqslant N h^2(N) \cdot \operatorname{mes}(A_{N_0}).$$

Если $\operatorname{mes}(A_{N_0}) \neq 0$, то, выбирая N достаточно большим, мы приходим к противоречию. Наконец, обозначим через $A = \bigcup A_{N_0}$ объединение всех A_{N_0} для

$$N_0 = 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда A имеет меру нуль и A содержит множество чисел x, рассматриваемое в теореме 4.

Из теоремы Виноградова следует, что для данного $\varepsilon > 0$ абсолютная величина суммы $\sigma(N, x)$ равна $O(N^{1/2+\varepsilon})$ для почти всех x. Это оставляет открытой проблему получения аналогичной оценки для особых чисел x. В соответствии с нашей общей системой такая оценка может зависеть от типа числа x. Известен, однако, только частный случай, а именно случай $k=2$. В этом случае мы будем сводить соответствующую сумму к сумме, рассмотренной в предшествующем параграфе.

Лемма. *Пусть* α *и* β — *действительные числа,* α *иррационально,*

$$F(n)=\alpha n^2+\beta$$

и

$$\sigma(N,\ F)=\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i F(n)};$$

тогда

$$|\sigma(N,\ F)|^2 \leqslant N+4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|\sin 4\pi n\alpha|}.$$

Доказательство. Имеем

$$|\sigma(N,\ F)|^2=\sigma(N,\ F)\overline{\sigma(N,\ F)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i\,[F(n)-F(m)]}.$$

В этой сумме мы отдельно рассмотрим все члены с $m=n$. Существует N таких членов, и каждый из них равен единице. Другие члены — это те, у которых $n<m$ или $m<n$. Таким образом,

$$|\sigma(N,\ F)|^2=N+\sum_{m<n} e^{2\pi i\,[F(n)-F(m)]}+\sum_{m<n} e^{-2\pi i\,[F(n)-F(m)]}=$$
$$=N+2\,\mathrm{Re}\sum_{m<n} e^{2\pi i\,[F(n)-F(m)]}, \qquad (1)$$

где Re — действительная часть комплексного числа.

Положим $n=m+\nu$. Отображение

$$(n,\ m)\longmapsto(n-m,\ m)=(\nu,\ m)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие множества всех пар $(n,\ m)$, таких, что

$$1\leqslant m<n\leqslant N,$$

и множества всех пар $(\nu,\ m)$, таких, что

$$1\leqslant \nu<N \quad \text{и} \quad 1\leqslant m\leqslant N-\nu.$$

Кроме того,

$$F(n)-F(m)=F(m+\nu)-F(m)=\nu^2\alpha+2m\nu\alpha.$$

Поэтому

$$\sum_{m<n} e^{2\pi i\,[F(n)-F(m)]}=\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-\nu} e^{2\pi i\,(\nu^2\alpha)}e^{2\pi i 2m\nu\alpha}. \tag{2}$$

Мы будем оценивать эти последние двойные суммы сверху как

$$\sum_{\nu=1}^{N-1}\left|\sum_{m=1}^{N-\nu} r^m\right|,\quad \text{где}\quad r=e^{4\pi i\nu\alpha}. \tag{3}$$

(Заметим, что члены $e^{2\pi i\nu^2\alpha}$ по абсолютной величине равны единице, и поэтому не входят в эту оценку.) Далее,

$$r+r^2+\ldots+r^M=r(1+r+\ldots+r^{M-1})=$$
$$=r(1-r^M)/(1-r),$$

и для некоторого действительного x имеем $|\sin x|\leqslant\leqslant|1-e^{ix}|$. Отсюда

$$\left|\sum_{m=1}^{N-\nu} r^m\right|\leqslant\frac{2}{|1-r|}\leqslant\frac{2}{|\sin 4\pi\nu\alpha|}. \tag{4}$$

Используя результаты (1)—(4), мы убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема 5. *Пусть α и β — действительные числа, α иррационально и*

$$F(n)=\alpha n^2+\beta,$$

причем α — число главного подтипа $\leqslant g$ для всех чисел $\geqslant B_0$. Тогда для $N\geqslant B_0$ выполняется неравенство

$$|\sigma(N,\ F)|^2\leqslant N+64N\ln(4N)+640Ng(4N)+4K_0.$$

Доказательство. Мы используем лемму, теорему 3 и очевидное неравенство

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{|\sin 4\pi n\alpha|}\leqslant\sum_{n=1}^{4N}\frac{1}{|\sin \pi n\alpha|}.$$

Замечание 1. Практически подтип g — медленно возрастающая функция, так что из оценки в теореме 5 следует, в частности, оценка

$$\sigma(N,\ F) = O\left(N^{1/2+\varepsilon}\right)$$

в случае, когда $g(t) = O(t^{\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Замечание 2. Было бы весьма желательно обобщить теорему 5 для многочленов степени выше двух. Идея оценки квадрата модуля суммы введена Вейлем [2]. Если применить этот метод к суммам, содержащим многочлены высшей степени, то получается очень плохая оценка, далекая от $N^{1/2+\varepsilon}$, которая кажется возможной в силу теоремы 4. Что касается остальной части доказательства, то Островский [1] был первым, кто указал на связь между непрерывной дробью для α и оценкой тригонометрической суммы. Эта работа была продолжена Бенке [2], чьи идеи наряду с другими соображениями мы использовали для получения очень точных оценок теорем 2—5.

О других подходах к тригонометрическим суммам см. у Харди и Литлвуда [1—7], а о прочих методах — у Виноградова [1].

Установим еще одну теорему о тригонометрических суммах, которая будет использована в следующем параграфе.

Теорема 6. *Пусть α и β — действительные числа, α иррационально, m — натуральное число,*

$$F_m(n) = m\alpha n^2 + \beta$$

и α — число главного подтипа $\leqslant g$ для всех чисел $\geqslant B_0$. Тогда для $N \geqslant B_0$ имеем

$$|\sigma(N,\ F_m)| \leqslant CN^{1/2}\ln^{1/2} Nm^{1/2}\ln^{1/2} m + \\ + CN^{1/2}m^{1/2}g^{1/2}(mN) + CK_0^{1/2},$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство. Применяем лемму и теорему 3 так же, как в доказательстве теоремы 5.

Замечание. Число β совсем не влияет на окончательную оценку, которая совершенно не зависит от β.

§ 4. Суммы с более общими функциями

Пусть h — некоторая непрерывная периодическая функция с периодом единица, которой соответствует ряд Фурье

$$h(t) \mapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi imt},$$

где c_m есть m-й коэффициент Фурье, определенный как скалярное произведение

$$c_m = \int_0^1 h(t)\, e^{-2\pi imt}\, dt.$$

В любом курсе анализа доказано, что если $c_m = 0$ для всех m, то $h = 0$ (по существу это вариант теоремы Вейерштрасса об аппроксимации), и поэтому ряд Фурье определяет h однозначно. Предположим, кроме того, что $c_m = O(1/m^2)$ для $m \to \infty$ (постоянная в O зависит от h). В таком случае будем говорить, что коэффициенты Фурье функции h стремятся к нулю как $1/m^2$. Тогда возникает следующая задача: доказать, что $h(t)$ равна значению ее ряда Фурье при всех t (так как мы предположили, что h непрерывна). Если, например, h — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то ее коэффициенты Фурье удовлетворяют этому условию, как это видно сразу после двукратного интегрирования по частям.

Оценка, установленная в теореме 6, позволяет иметь дело с более общими суммами. Пусть, как и в теореме 6, $F(n) = \alpha n^2 + \beta$; составим сумму

$$S(N,\ h \circ F) = \sum_{n=1}^{N} h \circ F(n) = \sum_{n=1}^{N} h(F(n)).$$

Используя ряды Фурье для h, находим, что

$$\begin{aligned} S(N,\ h \circ F) &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi imF(n)} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_m \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi imF(n)} = \\ &= c_0 N + \sum_{m \neq 0} c_m \sigma(N,\ mF), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma(N, mF)$ — сумма, рассмотренная в предыдущем параграфе, и

$$c_0 = \int_0^1 h(t)\,dt.$$

Таким образом, изучение $S(N, h \circ F)$ сведено к исследованию коэффициентов Фурье c_m и рассмотренной выше суммы $\sigma(N, mF)$.

Заметим, что если α — число главного подтипа $\leqslant g$, то $-\alpha$ также является числом главного подтипа $\leqslant g$, так как неравенство $|q\alpha - p| < 1/q$ может быть записано в виде $|-q\alpha + p| < 1/q$. Итак, при оценке $\sigma(N, mF)$ можно считать, что m положительно. При условиях теоремы 6 и сделанном выше предположении о том, что коэффициенты Фурье функции h стремятся к нулю как $1/m^2$, находим оценку

$$|S(N, h \circ F) - c_0N| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 N^{1/2} \ln^{1/2} N + C_1 N^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^{1/2}(mN)}{m^{3/2}} + C_1 K_0^{1/2}$$

с абсолютной постоянной C_1. Если g растет медленно, то остаточный член

$$E(N) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g^{1/2}(mN)}{m^{3/2}}$$

растет соответственно медленно и, таким образом, сумма $|S(N, h \circ F) - c_0N|$ отличается от $N^{1/2}$ на медленно растущую функцию. Как пример сформулируем теорему, накладывая специальные условия на g.

Теорема 7. *Пусть h — непрерывная периодическая функция с периодом единица и с коэффициентами Фурье, стремящимися к нулю как $1/m^2$, а c_0 — нулевой коэффициент Фурье. Пусть, далее, $F(n) = \alpha n^2 + \beta$, где α — иррациональное число главного подтипа $\leqslant g$ для всех чисел $\geqslant B_0$. Тогда:*

(i) *если $g(t) = O(t^{\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$, то*

$$|S(N, h \circ F) - c_0N| \leqslant KN^{1/2+\varepsilon};$$

(ii) *если* $g(t) = O(\ln^{2k} t)$ *для некоторого* $k > 0$, *то*

$$|S(N, h \circ F) - c_0 N| \leqslant K N^{1/2} \ln^{1/2 + k + \varepsilon} N.$$

(*Постоянная* K *зависит от* g, h *и* ε.)

Доказательство. Это непосредственное следствие из оценки для $E(N)$, полученной выше. Основным моментом здесь является то, что ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

сходятся для $s > 1$.

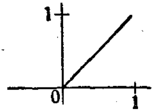
Заметим, что с общей точки зрения условие о том, что коэффициенты Фурье функции h стремятся к нулю как $1/m^2$, не является неестественным: любая достаточно гладкая функция обладает этим свойством, как мы уже заметили выше.

Однако в некоторых приложениях приходится иметь дело с разрывной функцией h, коэффициенты Фурье которой не стремятся к нулю достаточно быстро, чтобы применить предшествующие рассуждения. Важнейшим примером является функция

$$h(t) = R(t),$$

где R была рассмотрена выше: мы имеем $R(t) = t$ для $0 \leqslant t < 1$ и продолжаем R периодически на всю числовую прямую. В таком случае постараемся аппроксимировать R непрерывной функцией, коэффициенты Фурье которой будут вести себя лучше (см. Бенке [2], стр. 306). Коэффициенты Фурье функции R стремятся к нулю как $1/m$. Если изменить R в δ-окрестности нуля так, чтобы она стала непрерывной, и аппроксимировать R полученной при этом функцией R_δ, то хорошо видно, как сделать сразу так, чтобы коэффициенты Фурье R_δ стремились к нулю как $1/(m^2\delta)$. Тогда этим методом можно получить некоторую оценку для $S(N, R \circ F) - N/2$, а именно оценку с показателем $^3/_4$ вместо $^1/_2$ в ситуации, аналогичной той, которая имела место в теореме 7. Мы оставим это как задачу для читателя — найти правильный метод, который будет давать показатель $1/2$. Поскольку методы аппроксимации интересны сами по себе, мы проведем рассуждения, дающие частичный результат.

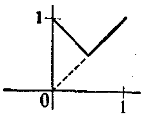
График функции R между 0 и 1 имеет вид



Для каждого малого $\delta > 0$ определим две функции U_δ и L_δ так, чтобы для всех t иметь

$$L_\delta(t) \leqslant R(t) \leqslant U_\delta(t).$$

Эти функции L_δ и U_δ будут непрерывны, очень близки к R (за исключением δ-окрестности нуля) и будут иметь коэффициенты Фурье, стремящиеся к нулю как $1/(m^2\delta)$. Пусть U_δ — функция, график которой имеет вид



Иначе говоря,

$$U_\delta(t) = \begin{cases} 1 + (1 - 1/\delta)\, t, & 0 \leqslant t \leqslant \delta, \\ t, & \delta \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Для других t функция U_δ определена по периодичности. Тогда U_δ непрерывна. Кроме того, если мы обозначим коэффициенты Фурье этой функции через $c_m(\delta)$, то элементарным интегрированием получим

$$c_0(\delta) = 1/2 + \delta/2,$$

а для $m \neq 0$

$$c_m(\delta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{e^{-2\pi i m\delta} - 1}{m^2\delta},$$

так что, в частности, для $m \neq 0$ получаем оценку

$$|c_m(\delta)| \leqslant \frac{1}{m^2\delta}.$$

Мы имеем

$$S(N,\ U_\delta \circ F) = c_0(\delta) N + \sum_{m \neq 0} c_m(\delta) \sigma(N,\ mF).$$

Заметим, что $c_0(\delta)N$ отличается от $N/2$ на δN. С другой стороны, по теореме 6 § 3 получим оценку для

$$c_m(\delta)\sigma(N,\ mF).$$

Выбрав $\delta = N^{-1/4}$, получим, что

$$|S(N,\ U_\delta \circ F) - N/2| \leqslant N^{3/4} E_1(N)$$

с остаточным членом $E_1(N)$, подобным $E(N)$.

Если вместо U_δ надлежащим образом выбрать функцию L_δ, то получится аналогичная оценка для $S(N, L_\delta \circ F)$, а так как

$$S(N,\ L_\delta \circ F) \leqslant S(N,\ R \circ F) \leqslant S(N,\ U_\delta \circ F),$$

то оценки двух экстремальных сумм влекут за собой подобную оценку для $S(N, R \circ F)$.

Глава IV

КВАДРАТИЧНЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

§ 1. Квадратичные иррациональности и периодичность

Алгебраическое число α — это число, являющееся корнем алгебраического уравнения

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

с рациональными коэффициентами a_i, не всеми равными нулю. Умножая это уравнение на общий знаменатель всех a_i, убеждаемся, что α является также корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, не всеми равными нулю. В этой главе мы интересуемся специальным классом алгебраических чисел, а именно таких, которые удовлетворяют квадратному уравнению (т. е. являются корнями многочлена второй степени).

Пусть d — натуральное число. Множество чисел

$$x + y\sqrt{d}$$

с рациональными x и y является полем, как это легко проверить. Предположим, что это поле не совпадает с $\mathbf{Q}$, т. е. что d не является квадратом [1]). Тогда, не нарушая общности доказательства, *всегда будем предполагать, что d свободно от квадратов, т. е. что разложение d на простые сомножители не содержит квадрата ни одного простого числа.* Заметим, что 1 и $\sqrt{d}$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$ (в противном случае $\sqrt{d}$ было бы рациональным). Таким образом, каждый элемент рассматриваемого поля имеет единственное представление в виде $x + y\sqrt{d}$ с $x, y \in \mathbf{Q}$. Обозначим это поле через $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

---

[1]) Через $\mathbf{Q}$ автор обозначает поле рациональных чисел. — *Прим. перев.*

Если $\alpha = x + y\sqrt{d}$ с $x, y \in \mathbf{Q}$, то определим

$$\alpha' = x - y\sqrt{d}$$

и назовем α' *сопряженным* к α. Читатель без труда может проверить прямым подсчетом, что для $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ имеем

$$(\alpha+\beta)' = \alpha' + \beta' \quad \text{и} \quad (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'.$$

Определим *след* числа α как

$$\operatorname{Tr}(\alpha) = \alpha + \alpha'$$

и его *норму* — как

$$\mathbf{N}(\alpha) = \alpha\alpha'.$$

След и норма — рациональные числа (это очевидно). Заметим, что α является корнем квадратного многочлена

$$(X-\alpha)(X-\alpha') = X^2 - \operatorname{Tr}(\alpha)X + \mathbf{N}(\alpha).$$

Квадратное уравнение для α может также быть записано в виде

$$\alpha^2 - 2x\alpha + (x^2 - dy^2) = 0.$$

Можно получить уравнение с целыми коэффициентами, положив

$$x^2 - dy^2 = c/a \quad \text{и} \quad -2x = b/a,$$

где a, b, c — взаимно простые целые числа, $a > 0$. Тогда α — корень квадратного уравнения

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

с целыми взаимно простыми коэффициентами a, b, c, $a > 0$, и a, b, c единственным образом определены этими условиями.

Определим *дискриминант* α как

$$D(\alpha) = b^2 - 4ac = 4a^2y^2d.$$

Так как α — действительное иррациональное число, получаем $D(\alpha) > 0$.

Будем говорить, что α — *приведенное число*, если $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha' < 0$ (или, что то же самое,

$-1/\alpha' > 1$.) Если α — приведенное число, то и $-1/\alpha'$ — приведенное число.

Теорема 1. *Для данного положительного числа D существует только конечное число приведенных элементов из $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, дискриминантом которых является D.*

Доказательство. Пусть α — приведенное число и имеет D своим дискриминантом. Тогда

$$\alpha = \frac{-b+\varepsilon\sqrt{D}}{2a} > 1 \quad \text{и} \quad -1 < \frac{-b-\varepsilon\sqrt{D}}{2a} < 0,$$

где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$. Если $\varepsilon = -1$, то

$$-b-\sqrt{D} > 0 \quad \text{и} \quad -b+\sqrt{D} < 0,$$

и мы приходим к противоречию. Поэтому $\varepsilon = 1$. Тогда из тех же самых условий

$$-b+\sqrt{D} > 2a > b+\sqrt{D}.$$

Отсюда $b < 0$ и $0 < -b < \sqrt{D}$. Значит, $|b|$ ограничен выражением, зависящим от D, и предшествующее неравенство показывает, что a также ограничено выражением, зависящим от D. Отсюда следует, что $|c|$ ограничен, и теорема доказана.

Лемма 1. *Если α имеет дискриминант $D > 0$ и β эквивалентно α, то β имеет такой же дискриминант D. Если m — целое и $\beta = \alpha + m$, то β опять имеет такой же дискриминант, что и α.*

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Теорема 2. *Пусть α — действительная квадратичная иррациональность. Тогда:*

(i) *у непрерывной дроби*

$$\alpha = [a_0;\ a_1, \ldots, a_{n-1},\ \alpha_n]$$

число α_n, $n \geqslant 1$, имеет такой же дискриминант, что и α;

(ii) *если* α — *приведенное число, то* α_n *для всех* $n \geqslant 1$ — *тоже приведенное число;*

(iii) *если* α *не является приведенным числом, то* α_n *для всех достаточно больших* n *будет приведенным числом.*

Доказательство. Из леммы мы немедленно получаем, что α_n имеет такой же дискриминант, как α (используя свойства непрерывной дроби; см. § 3 гл. I). Это доказывает утверждение (i). Кроме того, $\alpha_n > 1$. Если α — приведенное и

$$\alpha = a + 1/\beta$$

с целым a и $\beta > 1$, то $-1/\beta' = a - \alpha' > 1$, так что β — также приведенное число. Это доказывает утверждение (ii). Для того чтобы доказать утверждение (iii), заметим, что

$$\alpha'_n = -\frac{q_{n-1}\alpha' - p_{n-1}}{q_n\alpha' - p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - p_{n-1}/q_{n-1}}{\alpha' - p_n/q_n}\right).$$

Для больших n дроби p_{n-1}/q_{n-1} и p_n/q_n близки к α и, следовательно, $\alpha' - p_{n-1}/q_{n-1}$ и $\alpha' - p_n/q_n$ близки к $\alpha' - \alpha$. Поэтому выражение в правой части равенства отрицательно. С другой стороны,

$$\alpha'_n + 1 = \frac{1}{q_n}\left(q_n - q_{n-1} - \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha' - p_n/q_n)}\right).$$

Для больших n выражение

$$\frac{1}{q_n(\alpha' - p_n/q_n)}$$

мало и, следовательно, $\alpha'_n + 1 > 0$. Это доказывает утверждение (iii).

Пусть α — действительное иррациональное число. Будем говорить, что его непрерывная дробь

$$[a_0;\ a_1, \ldots]$$

периодическая, если существует целое k, такое, что $a_{n+k} = a_n$ для всех достаточно больших n. Скажем, что α — *чисто периодическая дробь*, если $a_{n+k} = a_n$ для всех n, и что k — *основной период*, если k

является наименьшим целым числом, обладающим этим свойством.

Будем употреблять следующее стандартное обозначение для периодических непрерывных дробей. Напишем

$$[a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_r,\ \overline{a_{r+1},\ \ldots,\ a_{r+k}}]$$

как сокращение для

$$[a_0;\ a_1, \ldots, a_r,\ a_{r+1}, \ldots, a_{r+k},\ a_{r+1}, \ldots, a_{r+k}, \ldots],$$

с повторяющимися $a_{r+1}, \ldots, a_{r+k}$, так что для $n \geqslant r+1$ выполняются равенства $a_{n+k} = a_n$. Непрерывная дробь является чисто периодической тогда и только тогда, когда в предыдущих обозначениях она может быть записана в виде

$$[\overline{a_1\ \ldots,\ a_k}].$$

Лемма 2. *Пусть α — приведенное число, a — целое и*

$$\alpha = a + 1/\alpha_1.$$

Тогда α_1 будет приведенным числом тогда и только тогда, когда $a < \alpha < a+1$, т. е. когда a — наибольшее целое $\leqslant \alpha$.

Доказательство. Если a удовлетворяет данному условию $a < \alpha < a+1$, то $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_1' = 1/(\alpha' - a)$, так что α_1 — приведенное число, поскольку $a \geqslant 1$ и $\alpha' < 0$. Обратно, если $\alpha < a$, то $\alpha_1 < 0$, и если $a+1 < \alpha$, то $\alpha_1 < 1$, так что α_1 не может быть приведенным числом.

Заметим, что соотношение между α и α_1 в лемме 2 определяет каждое число через другое. Действительно,

$$-\frac{1}{\alpha_1'} = a + \frac{1}{-1/\alpha'}.$$

Итак, мы видим, что a является также наибольшим целым $\leqslant -1/\alpha_1'$. Кроме того, α' (а следовательно, и α) единственным образом определяются через α_1' (а следовательно, и через α_1).

Теорема 3 (Эйлер — Лагранж). *Пусть α — действительное иррациональное число. Непрерывная дробь числа α является периодической тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность. В этом случае α — приведенное число тогда и только тогда, когда его непрерывная дробь является чисто периодической.*

Доказательство. Предположим, что α — квадратичная иррациональность. По теореме 2 известно, что α_n — приведенное число для больших n, а по теореме 1 вместе с леммой 1 существует только конечное число возможных значений для таких α_n. Отсюда для некоторого n и $k > 1$ выполняется равенство $\alpha_n = \alpha_{n+k}$. Из этого немедленно следует периодичность непрерывной дроби. Предположим, кроме того, что α — приведенное число и что $\alpha_m = \alpha_{m+k}$ для некоторого $m > 0$, $k \geqslant 1$. Из леммы 2 и замечаний, следующих за ней, заключаем, что α_{m-1} определено единственным образом через α_m, откуда также $\alpha_{m-1} = \alpha_{m+k-1}$. Из определения непрерывной дроби получаем, что это чисто периодическая непрерывная дробь.

Обратно, если непрерывная дробь является чисто периодической, то мы можем написать

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_m}] = [a_0; a_1, \ldots, a_m, \alpha].$$

Из соотношения $\alpha = \sigma_m \alpha$ сразу видно, что α — квадратичная иррациональность и, кроме того, $\alpha = \alpha_n$ для достаточно большого n. Из теоремы 2 (iii) следует, что α — приведенное число. Если непрерывная дробь является просто периодической, скажем

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_r, \overline{a_{r+1}, \ldots, a_{r+k}}],$$

то

$$\alpha_{r+1} = [\overline{a_{r+1}, \ldots, a_{r+k}}]$$

представляет собой чисто периодическую непрерывную дробь и, следовательно, квадратичную иррациональность. Так как α_{r+1} эквивалентно α, отсюда следует, что α — квадратичная иррациональность.

Упражнение. Показать, что если α — приведенное число и

$$\alpha = [\overline{a_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_{k-1}}],$$

то

$$-1/\alpha' = [\overline{a_{k-1},\ \ldots,\ a_0}].$$

§ 2. Единицы и непрерывные дроби

Пусть, как и ранее, α — квадратичная иррациональность. Будем говорить, что α — *целое алгебраическое число*, если $\mathrm{Tr}(\alpha)$ и $\mathbf{N}(\alpha)$ — целые рациональные числа. Если α — целое алгебраическое, то соответствующее квадратное уравнение

$$X^2 - \mathrm{Tr}(\alpha) X + \mathbf{N}(\alpha) = 0$$

имеет целые коэффициенты, и наоборот. Представим α в виде

$$\alpha = \frac{u + v\sqrt{d}}{2},$$

с $u,\ v \in \mathbf{Q}$. Это возможно потому, что $\mathrm{Tr}(\alpha) = u$ и

$$\mathbf{N}(\alpha) = \frac{u^2 - dv^2}{4}.$$

Теорема 4. *Элемент α из $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ является целым алгебраическим числом тогда и только тогда, когда u и v — целые числа и удовлетворяются следующие условия:*

$$\begin{aligned} &u \equiv v \pmod 2, && \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 4, \\ &u \equiv v \equiv 0 \pmod 2, && \text{если} \quad d \equiv 2,3 \pmod 4. \end{aligned} \qquad (*)$$

Доказательство. Если указанные условия удовлетворены, то с помощью определения немедленно устанавливается, что α — целое алгебраическое число. Обратно, если α — целое алгебраическое, то его след u должен быть целым числом. Тогда

$$-dv^2 = 4\mathbf{N}(\alpha) - u^2$$

— также целое число, а так как d предполагается свободным от квадратов, из этого следует, что и v — целое число. Таким образом,

$$u^2 - dv^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

Из этого сравнения мы сразу заключаем, что условия сравнимости, наложенные в теореме на u и v, должны выполняться.

Пусть

$$\theta = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 4, \\ \sqrt{d}, & \text{если} \quad d \equiv 2,3 \pmod 4. \end{cases}$$

Тогда из теоремы 4 мы получаем

Следствие 1. *Элемент α из $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ является целым алгебраическим числом тогда и только тогда, когда α может быть записано в виде*

$$\alpha = x + y\theta$$

с целыми x и y.

Следствие 2. *Целые алгебраические числа в $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ образуют кольцо.*

Доказательство. В силу представления α, принятого в следствии 1, достаточно доказать, что θ^2 — целое алгебраическое число, а это очевидно.

Единицей в $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ называется целое алгебраическое число, обратное к которому также является целым алгебраическим. Если ω — единица, то из условия $\omega\omega^{-1} = 1$ мы заключаем, взяв норму, что $\mathbf{N}(\omega) = \pm 1$. Обратно, если $\omega\omega' = \pm 1$, то ω — единица и $\omega^{-1} = \pm \omega'$. Итак, единицы образуют мультипликативную группу ненулевых целых алгебраических чисел, норма которых равна 1 или —1, т. е. образуют множество решений уравнения

$$\frac{u^2 - dv^2}{4} = \pm 1,$$

называемого *уравнением Пелля*. В этом уравнении u и v — целые числа, удовлетворяющие условию (*) теоремы 4.

Пусть U — группа единиц. Отобразим U в $\mathbf{R}^2$ так:

$$L\colon \omega \mapsto (\ln|\omega|, \ln|\omega'|).$$

Тогда L — гомоморфизм U в прямую, удовлетворяющую уравнению $X+Y=0$. Ядро L состоит из единиц, имеющих абсолютную величину 1, и коэффициенты квадратных уравнений для таких единиц являются целыми числами с абсолютной величиной $\leqslant 2$. Следовательно, ядро L содержит лишь конечное число элементов, которые поэтому образуют конечную группу, т. е. группу корней из единицы. Так как действительными корнями из единицы являются только ± 1, отсюда следует, что ядро L — это $\{1, -1\}$. Кроме того, в любой ограниченной области $\mathbf{R}^2$ существует только конечное число элементов из образа L, так как любое ограничение на $\ln|\omega|$ и $\ln|\omega'|$ дает соответствующее ограничение на целые коэффициенты квадратного уравнения, которому удовлетворяет ω. Легко показать, что образ L содержит векторы, отличные от нулевого вектора.

Пусть ω_1 — *единица, не равная* 1 *и* -1 *и такая, что* $L(\omega_1)$ — *вектор наименьшей длины в образе* L. *Тогда мы утверждаем, что каждый элемент образа* L — *целое кратное* $L(\omega_1)$.

Доказательство. Пусть $W_1 = L(\omega_1)$ и W принадлежит образу L. Тогда существует действительное число t, такое, что $W = tW_1$. Пусть m — целое, такое, что $m \leqslant t < m+1$. Тогда

$$W - mW_1 = (t-m)W_1$$

и длина $W - mW_1$ меньше длины W_1. Следовательно, $W - mW_1 = 0$, так что $W = mW_1$, что и требовалось доказать.

Показав, что существуют нетривиальные единицы, т. е. единицы, отличные от 1 или -1, мы тем самым можем установить следующую теорему.

Теорема 5. *Группа единиц есть бесконечная циклическая группа по модулю* $\{1, -1\}$. *Существует единственная единица* ω_1, *порождающая эту группу и такая, что* $\omega_1 > 1$.

Доказательство. Единица ω_1 такова, что $L(\omega_1)$ — образующая для образа L — определена не единственным образом, и любая из единиц

$$\omega_1, \quad -\omega_1, \quad \omega_1^{-1}, \quad -\omega_1^{-1}$$

будет также обладать этим свойством. Однако точно одно число из этих четырех чисел будет > 1. Это доказывает теорему.

Будем теперь определять нетривиальные единицы. Пусть D — дискриминант числа θ, определенный ранее, так что непосредственным вычислением находим, что

$$D = \begin{cases} d, & \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 4, \\ 4d, & \text{если} \quad d \equiv 2,3 \pmod 4. \end{cases}$$

Назовем D *дискриминантом поля* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Из теоремы 4 получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Элемент* α *из* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ *есть целое алгебраическое число тогда и только тогда, когда он может быть записан в виде*

$$\alpha = \frac{u + v\sqrt{D}}{2}$$

с целыми u, v, *такими, что* $u \equiv Dv \pmod 2$. *Кроме того, целое алгебраическое число* α *является единицей тогда и только тогда, когда в этом представлении мы имеем*

$$\frac{u^2 - Dv^2}{4} = \pm 1.$$

Из свойства единиц, указанного в теореме 6, мы выведем результаты Пелля, Эйлера и Лагранжа.

Теорема 7. *Пусть* α — *приведенное число из* $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, *имеющее* D *своим дискриминантом* (D —

дискриминант $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$), k — *период соответствующей непрерывной дроби*, v — *наибольший общий делитель чисел*

$$q_{k-1}, \quad p_{k-1} - q_{k-2}, \quad p_{k-2}$$

и

$$u = p_{k-1} + q_{k-2}.$$

Тогда

$$\omega = \frac{u + v\sqrt{D}}{2}$$

является единицей > 1 *и каждая единица* > 1 *может быть представлена в таком же виде. Далее,*

$$\mathbf{N}(\omega) = (-1)^k.$$

Доказательство. В обозначениях § 3 гл. I имеем

$$\alpha = \sigma_{k-1}\alpha,$$

так как по определению

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha] = \frac{p_{k-1}\alpha + p_{k-2}}{q_{k-1}\alpha + q_{k-2}}.$$

Таким образом, α является корнем уравнения

$$q_{k-1}\alpha^2 + (q_{k-2} - p_{k-1})\alpha - p_{k-2} = 0.$$

Допустим, как и ранее, что

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

есть уравнение для α с взаимно простыми коэффициентами a, b, c и $a > 0$. Тогда мы можем написать

$$q_{k-1} = av, \quad q_{k-2} - p_{k-1} = bv, \quad -p_{k-2} = cv. \tag{1}$$

Пусть, как принято в теореме,

$$u = p_{k-1} + q_{k-2}; \tag{2}$$

тогда

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= \frac{u - bv}{2} \quad \text{и} \quad q_{k-1} = av, \\ p_{k-2} &= -cv \quad \text{и} \quad q_{k-2} = \frac{u + bv}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из соотношения

$$q_{k-1}p_{k-2} - p_{k-1}q_{k-2} = (-1)^{k-1}$$

мы заключаем, что

$$u^2 - Dv^2 = (-1)^k 4.$$

Следовательно, норма ω равна $(-1)^k$. Так как след ω равен u, мы заключаем, что ω — единица, $\omega > 1$.

Обратно, пусть

$$\omega = \frac{u + v\sqrt{D}}{2}$$

— положительная единица > 1 с целыми u и v. Тогда u, $v \geqslant 1$ (потому что среди четырех чисел

$$\pm \frac{u \pm v\sqrt{D}}{2}$$

точно одно > 1). Пусть p/q и p'/q' определены равенствами, аналогичными равенствам (3), а именно

$$p = \frac{u - bv}{2}, \quad q = av,$$

$$p' = -cv, \quad q' = \frac{u + bv}{2}.$$

Так как $u \equiv vD \pmod 2$ по теореме 6 и $b \equiv D \pmod 2$, поскольку $D^2 = b^2 - 4ac$, отсюда следует, что p, p', q, q' — целые. Тогда

$$q, \quad q' - p, \quad -p'$$

пропорциональны a, b, c, и, следовательно, α удовлетворяет уравнению

$$q\alpha^2 + (q' - p)\alpha + (-p') = 0,$$

или, другими словами,

$$\alpha = \frac{p\alpha + p'}{q\alpha + q'}.$$

Используя определение $D = b^2 - 4ac$, легко получаем, что

$$pq' - qp' = \mathbf{N}(\omega) = \pm 1,$$

Используя неравенства теоремы 1 § 1, находим

$$q' = \frac{u+bv}{2} > \frac{u - v\sqrt{D}}{2} = \omega' = \frac{\mathrm{N}(\omega)}{\omega} > \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathrm{N}(\omega) = 1, \\ -1, & \text{если} \quad \mathrm{N}(\omega) = -1, \end{cases}$$

$$q - q' = \frac{(2a-b)v - u}{2} > \frac{v\sqrt{D} - u}{2} = -\omega' = \frac{-\mathrm{N}(\omega)}{\omega} > \begin{cases} -1, & \text{если} \quad \mathrm{N}(\omega) = 1, \\ 0, & \text{если} \quad \mathrm{N}(\omega) = -1. \end{cases}$$

Случай 1. $\mathrm{N}(\omega) = -1$. Тогда $q > q' \geqslant 0$. Если $q' = 0$, то $p' = 1$ и

$$\alpha = p + 1/\alpha,$$

так что $\alpha = \alpha_1$ и мы находимся в такой же ситуации, как в первой части доказательства с $k = 1$. Если $q' > 0$, то можно применить теорему 7 § 3 гл. I, чтобы заключить опять, что $\alpha = \sigma_{k-1}\alpha$ и что мы снова находимся в такой же ситуации.

Случай 2. $\mathrm{N}(\omega) = 1$. Тогда $q' > 0$ и $q \geqslant q'$. Если $q = q'$, то $q = q' = 1$, так как q и q' взаимно просты. Тогда простым вычислением получим

$$\alpha = p' + \frac{1}{1 + 1/\alpha},$$

так что мы снова находимся в такой же ситуации, как в первой части доказательства, а именно $\alpha = [p'; 1, \alpha]$. Если $q > q'$, то можно еще раз применить теорему 7 § 3 гл. I, чтобы получить аналогичный результат.

Мы показали, что во всех случаях ω получается из α так же, как и в первой части доказательства, которая, следовательно, дает все единицы > 1.

Мы получим наконец несколько другое описание единиц, построенных в теореме 7.

Теорема 8. *Пусть α — приведенное число с дискриминантом D [дискриминант $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$], а k — основ-*

ной период. Тогда для любого целого $m \geqslant 1$ *существует единственная единица* ω_m, *такая, что*

$$\sigma_{mk-1}\binom{\alpha}{1} = \omega_m \binom{\alpha}{1},$$

(*где* σ_n *есть n-е непрерывное преобразование* α), *причем* $\omega_m = \omega_1^m$, *а* $\omega_1 > 1$ *порождает группу положительных единиц.*

Доказательство. Из определения следует, что ω_m совпадает с единицей, построенной в первой части доказательства теоремы 7, и в силу § 3 гл. I имеем

$$\sigma_{m\,k-1} = \sigma_{k-1}^m;$$

следовательно, $\omega_m = \omega_1^m$. Это доказывает теорему.

Мы видим, что положительные единицы > 1 могут быть интерпретированы как собственные значения определенных линейных отображений, а именно непрерывных преобразований α, соответствующих периодам.

Для того чтобы применить теорему 7 или теорему 8, мы можем начать с приведенных чисел α. Простой способ нахождения таких чисел указывает следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* θ — *число, определенное в следствии* 1 *теоремы* 4, *а* $[\theta]$ — *наибольшее целое* $\leqslant \theta$. *Тогда*

$$\theta^* = \frac{1}{\theta - [\theta]}$$

есть приведенное число.

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

§ 3. Основная асимптотическая оценка

В § 2 гл. II мы видели, что квадратичные иррациональности являются числами постоянного типа. Таким образом, применима асимптотическая оценка § 3 гл. II, кроме специального случая, когда выполняется неравенство

$$0 < q\alpha - p < c/q$$

с постоянной c. Этот случай мы рассмотрим, используя специальные свойства квадратичных иррациональностей. Дальнейшее изложение будет следовать статье автора [1].

Теорема 10. *Пусть α — действительная квадратичная иррациональность, а натуральное число c таково, что неравенство*

$$0 < q\alpha - p < c/q$$

имеет бесконечно много решений в целых числах q и p, где $q > 0$, и пусть $\lambda(N)$ обозначает число решений этого неравенства, для которых $1 \leqslant q \leqslant N$. Тогда существуют числа c_1, $c_2 > 0$, такие, что для всех N справедливо неравенство

$$|\lambda(N) - c_1 \ln N| \leqslant c_2.$$

Иными словами,

$$\lambda(N) = c_1 \ln N + O(1).$$

Для доказательства потребуется несколько лемм.

Пусть $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, где $d > 0$ и, как обычно, свободно от квадратов. Мы полагаем, как и выше,

$$\theta = \begin{cases} d, & \text{если} \quad d \equiv 2,3 \pmod 4, \\ \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Тогда 1 и θ образуют базис кольца целых чисел алгебраического поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ над $\mathbf{Z}$. Пусть

$$\alpha = a\theta + b$$

с рациональными a и b и $a \neq 0$. Пусть e — натуральное число, такое, что как ea, так и eb — целые. Тогда $e\alpha$ — целое алгебраическое.

Мы будем употреблять выражение «достаточно большое» (соответственно «малое») для обозначения следующих понятий: «больше (соответственно меньше), чем постоянная, зависящая только от θ, α и c».

Лемма 1. *Существует натуральное $k>0$, обладающее следующим свойством: целое q (достаточно большое) является таким, что*

$$0<q\alpha-p<c/q \qquad (*)$$

для некоторого целого p тогда и только тогда, когда существует целое p, такое, что разность $q\alpha-p$ положительна, достаточно мала и удовлетворяет условию

$$|\mathbf{N}(q\alpha-p)|\leqslant k/e^2. \qquad (**)$$

Доказательство. Мы выделяем случаи, зависящие от того, является или не является число $ce^2(\alpha'-\alpha)$ целым.

Предположим, что $ce^2(\alpha'-\alpha)$ не является целым. Тогда в качестве k возьмем

$$k=[ce^2(\alpha'-\alpha)].$$

Допустим, во-первых, что выполняется условие $(*)$. Тогда

$$|\mathbf{N}(qe\alpha-ep)|<(ce^2/q)\,|q\alpha'-p|=ce^2|\alpha'-p/q|.$$

Если p/q близко к α, то $\alpha'-p/q$ близко к $\alpha'-\alpha$. Так как норма целого алгебраического числа является целым числом, получаем

$$|\mathbf{N}(qe\alpha-ep)|\leqslant k,$$

и тем самым неравенство $(**)$ доказано.

Во-вторых, допустим, что выполняется неравенство $(**)$ и, кроме того, что $q\alpha-p$ положительно и достаточно мало. Тогда

$$0<q\alpha-p\leqslant\frac{k}{e^2\,|q\alpha'-p|}\leqslant\frac{c}{q}\,\frac{k}{ce^2\,|\alpha'-p/q|}.$$

Частное $k/(ce^2|\alpha'-\alpha|)$ является фиксированным числом <1. Для q достаточно больших $\alpha'-p/q$ близко к $\alpha'-\alpha$, следовательно, правая часть нашего неравенства меньше c/q; тем самым неравенство $(*)$ доказано.

Предположим, что $ce^2(\alpha' - \alpha)$ — целое число. Мы различаем два подслучая в зависимости от того, какое из неравенств, $\alpha < \alpha'$ или $\alpha' < \alpha$, имеет место.

Если $\alpha < \alpha'$, то для достаточно больших q имеем

$$p/q < \alpha < \alpha'.$$

Выберем k так же, как и выше. При этом первая часть рассуждений остается без изменений, поскольку

$$|\mathbf{N}(qe\alpha - ep)| < ce^2(\alpha' - p/q).$$

Во второй части мы используем тот факт, что

$$\alpha' - p/q > \alpha' - \alpha,$$

так что

$$0 < q\alpha - p < \frac{c}{q}\,\frac{k}{ce^2(\alpha' - \alpha)} = \frac{c}{q}.$$

Если $\alpha' < \alpha$, то для достаточно больших q

$$\alpha' < p/q < \alpha.$$

В этом случае мы берем

$$k = ce^2|\alpha' - \alpha| - 1.$$

В первой части рассуждений мы имеем

$$|\alpha' - p/q| < |\alpha' - \alpha|,$$

откуда получаем необходимое утверждение. Вторая часть рассуждений проходит, как и выше, что и завершает доказательство леммы.

Замечание. Теорема 10 справедлива при любом $c \geqslant 1$. Более того, лемма 1 и тот факт, что норма целого алгебраического числа является целым числом, точно указывают, сколь малым может быть взято c, при котором все еще существует бесконечно много решений рассматриваемого неравенства.

В силу леммы 1 мы должны подсчитать число целых q, $1 \leqslant q \leqslant N$, таких, что существует p, для которого разность $q\alpha - p$ положительна, достаточно мала и удовлетворяет условию

$$|\mathbf{N}(qe\alpha - ep)| \leqslant k.$$

Пусть m — натуральное число, $1 \leqslant m \leqslant k$. Мы докажем, что требуемая асимптотическая оценка выполняется для числа решений уравнения

$$|\mathbf{N}(qe\alpha - ep)| = m, \qquad 1 \leqslant q \leqslant N,$$

где разность $q\alpha - p$ положительна, достаточно мала и такова, что существует хотя бы одно решение этого уравнения. Складывая эти оценки для $m = 1, \ldots, k$ и используя тот факт, что исходное неравенство в действительности имеет бесконечно много решений, мы легко получаем доказательство теоремы.

Мы увидим, что наша задача может быть сведена к подсчету числа некоторых единиц. *Для завершения доказательства* удобно ввести некоторое отношение эквивалентности. Пусть ξ и η — целые алгебраические числа. Говорят, что они *эквивалентны*, если существует положительная единица ω, такая, что $\xi = \omega\eta$. Это отношение, очевидно, является отношением эквивалентности.

Лемма 2. *Для заданного числа $B > 0$ существует лишь конечное число неэквивалентных целых алгебраических ξ, таких, что $|\mathbf{N}(\xi)| \leqslant B$.*

Доказательство. Пусть ω_0 является образующей > 1 для положительных единиц. Убедимся в том, что если $|\xi\xi'| \leqslant B$, то существует некоторая степень ω_0^r, такая, что числа

$$|\omega_0^r\xi| \quad \text{и} \quad |(\omega_0^r\xi)'|$$

ограничены выражением, зависящим от B. Так как существует лишь конечное число целых алгебраических чисел с ограниченными сопряженными, то после этого лемма будет доказана. Предположим, что одно из чисел $|\xi|$ и $|\xi'|$ превосходит ω_0. Вследствие симметрии достаточно рассмотреть случай $|\xi| > \omega_0$. Пусть n — целое, такое, что

$$\omega_0^n \leqslant |\xi| < \omega_0^{n+1}.$$

Тогда

$$|\xi/\omega_0^n| < \omega_0.$$

С другой стороны, $|\xi'| \leqslant B/|\xi|$ и $1/|\xi| \leqslant 1/\omega_0^n$, откуда

$$\left|\frac{\xi'}{\omega_0'^n}\right| \leqslant \frac{B}{|\omega_0^n \omega_0'^n|} = B.$$

Это и доказывает требуемое утверждение (с $r = -n$).

Лемма 3. *Пусть q_0 и p_0 — целые, $q_0 \neq 0$ и $\xi_0 = q_0 e\alpha - ep_0$. Тогда множество единиц u, таких, что число $u\xi_0$ может быть записано в виде $qe\alpha - ep$ с целыми q и p, образует группу.*

Доказательство. Запишем a_1 и b_1 в виде $a_1 = ea$ и $b_1 = eb$, а единицу u как $u = x\theta + y$ с целыми x и y. Докажем, что условие, сформулированное в лемме, является эквивалентным некоторому условию делимости, наложенному на x.

Мы имеем

$$\xi_0 = q_0 a_1 \theta + q_0 b_1 - ep_0;$$

тогда

$$u\xi_0 = (x(q_0 b_1 - ep_0) + yq_0 a_1)\alpha + xq_0 a_1 d + y(q_0 b_1 - ep_0).$$

Требуется найти необходимое и достаточное условие того, чтобы это выражение имело вид

$$qa_1\alpha + qb_1 - ep$$

с целыми q и p. Оно сводится к двум условиям:

$$x(q_0 b_1 - ep_0) + yq_0 a_1 = qa_1,$$
$$xq_0 a_1 d + y(q_0 b_1 - ep_0) = qb_1 - ep.$$

Первое условие просто означает, что a_1 является делителем левой части. Пусть w будет н. о. д. для a_1 и $q_0 b_1 - ep_0$, и пусть $a_1 = wa_0$. Тогда первое условие эквивалентно тому, что $a_0 | x$. (Доказательство для случая, когда $q_0 b_1 - ep_0 = 0$, мы оставляем читателю.) Запишем x в виде $a_0 x^*$.

Теперь первое из условий удовлетворено, и из второго следует другое условие делимости, а именно что e делит число

$$x^*\left(a_0 q_0 a_1 d - b_1 \frac{q_0 b_1 - ep_0}{w}\right).$$

Пусть t является н. о. д. для e и выражения в скобках, которое мы только что получили. Запишем e в виде $e = te_0$. Тогда наше последнее условие означает, что

$$e_0 \mid x^*.$$

Отсюда наконец получаем, что рассмотренные условия являются эквивалентами делимости чисел

$$a_0 e_0 \mid x.$$

Вследствие того что $u^{-1} = \pm u'$, сразу получаем, что единицы, удовлетворяющие нашим условиям делимости, образуют группу, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть в лемме 3 число* $\xi_0 > 0$, S *является бесконечной циклической группой положительных единиц с образующей* ω, $0 < \omega < 1$, *а единицы* $u \in S$ *представлены в виде* $u = \omega^n$. *Тогда подмножество из* S, *состоящее из таких единиц* u, *которые достаточно малы и таковы, что в выражении* $u\xi_0 = qe\alpha - ep$ *число* $q > 0$, *является одним из следующих: оно либо пусто, либо состоит из всех достаточно больших* n, *или достаточно больших четных* n, *или достаточно больших нечетных* n.

Доказательство. Мы имеем

$$u\xi_0 - u'\xi_0' = qe(\alpha - \alpha').$$

Если u мало, то $u\xi_0$ также мало, а u' велико по абсолютной величине, потому что $\mathrm{N}(u) = uu' = \pm 1$. Следовательно, $-u'\xi_0'$ — величина того же порядка, что и $qe(\alpha - \alpha')$. Предположим сначала, что $\alpha > \alpha'$. Тогда $q > 0$ тогда и только тогда, когда $-u'\xi_0' > 0$ всякий раз, когда u достаточно мало. Пусть $\varepsilon = \omega\omega'$ и $\eta = -\xi_0'$. Условие $-u'\xi_0' > 0$ эквивалентно условию $\varepsilon^n \eta > 0$ (записываем $u' = \omega'^n$ и умножаем неравенство на положительное число ω^n). Тогда мы имеем четыре случая в зависимости от того, какое из следующих условий: $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = -1$, $\eta > 0$ или $\eta < 0$ выполняется. Эти четыре случая, очевидно, дают четыре возможности, описанные в лемме. Заметим, наконец, что при $\alpha' > \alpha$ доказательство остается тем же самым. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $q_0 > 0$ *и* p_0 — *целые числа, и пусть*

$$\xi_0 = q_0 e\alpha - ep_0$$

положительно. Пусть, далее, $\xi = qe\alpha - ep$, *а* $\lambda_0(N)$ *обозначает число пар целых* p *и* q, $1 \leqslant q \leqslant N$, *таких, что:*

(i) ξ *эквивалентно* ξ_0,
(ii) $\xi > 0$,
(iii) ξ *достаточно мало.*

Тогда существует такая постоянная $c_0 \geqslant 0$, *что*

$$\lambda_0(N) = c_0 \ln N + O(1).$$

Доказательство. Пусть S является подгруппой положительных единиц из леммы 3. Если S имеет только один элемент, то можно взять $c_0 = 0$, и тогда $\lambda_0(N)$ ограничено, т. е. равно $O(1)$. Предположим, что S содержит более одного элемента. Тогда S — бесконечная циклическая группа. Пусть ω — ее образующая, $0 < \omega < 1$. Целое q, такое, что число $\xi = qe\alpha - ep$ удовлетворяет трем условиям леммы, тогда определяется через ξ, которое может быть записано в виде $\xi = u\xi_0$, где $u = \omega^n$, и мы имеем дело с одним из четырех возможных случаев, описанных в лемме 4. Если группа пуста, то наше утверждение снова выполнено. Предположим, что она не пуста. Рассмотрим для определенности случай, когда мы имеем дело со всеми достаточно большими четными n. Из уравнения

$$u\xi_0 - u'\xi_0' = qe(\alpha - \alpha')$$

следует, что существуют две постоянные $k_1, k_2 > 0$, такие, что

$$k_1 q \leqslant |u'| \leqslant k_2 q,$$

или, другими словами,

$$k_1 q \leqslant u^{-1} \leqslant k_2 q.$$

Заметим, что при заданном $k_3 > 0$ число единиц $u = \omega^n$, таких, что n является четным натуральным числом и

$$1 < u^{-1} = (1/\omega)^m \leqslant k_3 N,$$

равно числу четных натуральных n, таких, что

$$n \leqslant \frac{\ln (k_3 N)}{\ln (1/\omega)} = \frac{1}{\ln (1/\omega)} \ln N + O(1),$$

и поэтому задается формулой

$$c_0 \ln N + O(1),$$

где $c_0 = {}^1/_2 \ln(1/\omega)$. [Постоянная k_3 включена в остаточный член $O(1)$.]

Для положительных чисел B обозначим через $S(B)$ множество единиц $u = \omega^n \in S$, таких, что n является достаточно большим, а $u^{-1} \leqslant B$. Тогда для подходящим образом выбранных постоянных $k_3, k_4 > 0$ имеем [1])

$$\operatorname{card} S(k_3 N) \leqslant \lambda_0(N) \leqslant \operatorname{card} S(k_4 N).$$

Используя полученную выше оценку, убеждаемся в справедливости теоремы.

Заметим, что хотя асимптотическая оценка известна почти для всех чисел, оценка теоремы 10 была первой, дающей подобный результат для специальных чисел, которые могут быть явно указаны.

Распространение результатов этой главы на алгебраические числа степени выше двух является фундаментальной проблемой теории алгебраических чисел. Лиувилль заметил, что если α — алгебраическое число степени n, то получается тривиальное обобщение того факта, что квадратичные иррациональности имеют постоянный тип, а именно существует постоянная $c > 0$, такая, что

$$|q\alpha - p| > c/q^{n-1}.$$

[1]) В следующем далее неравенстве card означает мощность множества, в данном случае — количество элементов множества. — *Прим. перев.*

Доказательство по существу является таким же, как в примере, приведенном в конце § 2 гл. II. Наилучший известный тип для алгебраических чисел дается теоремой Туэ — Зигеля — Рота (см. Рот [1]), но несмотря на трудности, которые встречались на протяжении всей истории достижения этого результата, можно ожидать, что тип $O(t^{\varepsilon})$ может быть заменен на $O(\ln^{\rho} t)$ с некоторым $\rho > 0$, и, таким образом, результат Рота еще довольно далек от точного описания действительной ситуации.

Другие возможные направления в обобщении диофантовых приближений на алгебраические числа указаны Шмидтом [3] (результаты типа Лиувилля), Бернштейном [1—3], а также Хассе и Бернштейном [1].

Глава V

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. Некоторые непрерывные дроби

Существует общая проблема отыскания непрерывных дробей для значений соответствующим образом нормированных классических функций. Мы опишем ее решение в весьма частном случае, который, в частности, позволит нам получить непрерывную дробь для числа e.

Начнем с рассмотрения функции

$$f(c,\ x) = 1 + \frac{1}{c}x + \frac{1}{c(c+1)\,2!}x^2 + \\ + \frac{1}{c(c+1)(c+2)\,3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Число c пока будем считать любым действительным, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Тогда легко убедиться в том, что

$$f(c,\ x) = f(c+1,\ x) + \frac{x}{c(c+1)} f(c+2,\ x),$$

или

$$\frac{f(c+1,\ x)}{f(c,\ x)} = \frac{f(c+1,\ x)}{f(c+1,\ x) + \dfrac{x}{c(c+1)} f(c+2,\ x)}$$

и, следовательно,

$$\frac{f(c+1,\ x)}{f(c,\ x)} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{c(c+1)} \dfrac{f(c+2,\ x)}{f(c+1,\ x)}}.$$

Это выражение совсем похоже на непрерывную дробь, но единица в знаменателе стоит не там, где нужно. Поэтому преобразуем его, положив $x = z^2$. Тогда

$$\frac{z}{c} \frac{f(c+1,\ z^2)}{f(c,\ z^2)} = \frac{1}{\dfrac{c}{z} + \dfrac{z}{c+1} \dfrac{f(c+2,\ z^2)}{f(c+1,\ z^2)}}.$$

Теперь оно приведено к виду, легко допускающему запись в обозначениях формальной теории § 1 гл. I, а именно по индукции получаем

$$\frac{z}{c}\,\frac{f(c+1,\,z^2)}{f(c,\,z^2)}=\left[0;\ \frac{c}{z},\ \frac{c+1}{z},\ \ldots,\ \frac{c+n}{z},\ \alpha_{n+2}\right],$$

где

$$\alpha_{n+2}=\frac{c+n+1}{z}\,\frac{f(c+n+1,\,z^2)}{f(c+n+2,\,z^2)}.$$

Таким образом, мы получим разложение в непрерывную дробь значения левой части, если сможем подставить специальные значения для c и z, такие, что $(c+n)/z$ является целым числом $\geqslant 1$ и что остаток $\alpha_{n+2}\geqslant 1$ для всех целых $n\geqslant 0$. Например, мы сразу убеждаемся, что значения

$$c={}^1/_2 \quad \text{и} \quad z=1/(2y)$$

для любого целого $y\geqslant 1$ будут удовлетворять этим условиям. Таким путем мы получаем *непрерывную дробь Ламберта* (которая фактически была известна уже Эйлеру). Для этих значений c и z рассматриваемую функцию можно представить в более известной форме. Действительно, мы имеем

$$e^{w}-e^{-w}=2w\left(1+\frac{w^2}{3\,!}+\frac{(w^2)^2}{5\,!}+\ldots\right)=$$
$$=2w\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w^2)^n}{(2n+1)\,!}=2wf\left(\frac{3}{4},\ \frac{w^2}{4}\right),$$

так как коэффициент при $(w^2)^n$ в обоих степенных рядах равен

$$\frac{1}{(3/2)(3/2+1)\ldots(3/2+n-1)\,4^n n\,!}=$$
$$=\frac{1}{3\cdot 5\ldots(2n+1)\,2\cdot 4\ldots 2n}=\frac{1}{(2n+1)\,!}.$$

Аналогично,

$$e^{w}+e^{-w}=2f\left(\frac{1}{2},\ \frac{w^2}{4}\right).$$

Мы получим непрерывную дробь Ламберта, если положим $w=1/y$.

Теорема 1. *Для каждого целого* $y \geqslant 1$

$$\frac{e^{1/y} - e^{-1/y}}{e^{1/y} + e^{-1/y}} = [0;\ y,\ 3y,\ 5y,\ \ldots];$$

в частности, для $y = 2$

$$\frac{e-1}{e+1} = [0;\ 2,\ 6,\ 10,\ \ldots].$$

Непрерывная дробь для e будет легко получена в следующем параграфе из непрерывной дроби для $(e-1)/(e+1)$. Заметим, однако, что эти два числа не являются эквивалентными, так как детерминант

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 2.

Заметим, что тот же самый рекуррентный метод, который мы применяли для показательной функции, может быть применен и для более широкого класса функций (так называемых гипергеометрических функций), включая функцию Бесселя. Однако, как и в теореме 1, можно получить разложения в непрерывную дробь только для особых значений аргумента, и возникает проблема отыскания подхода для получения общего решения этой задачи. Трудность состоит и в том, что для функций, удовлетворяющих, скажем, линейному дифференциальному уравнению второго порядка, подобных функции Бесселя J, получить информацию о поведении J'/J недостаточно для того, чтобы иметь информацию, относящуюся к непрерывной дроби для самой функции J (для рациональных или целых значений аргумента).

§ 2. Непрерывная дробь для числа e

Используя рассуждения Эйлера, докажем следующее предложение.

Теорема 2. *Правая часть равенства*

$$e = [2;\ 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \ldots]$$

является непрерывной дробью числа e. Другими словами, $a_0 = 2$, *а для* $m \geqslant 1$

$$a_{3m} = a_{3m-2} = 1 \quad \text{и} \quad a_{3m-1} = 2m.$$

Доказательство. Пусть r_n/s_n являются подходящими дробями к числу

$$\alpha = \frac{e+1}{e-1}.$$

Взяв обратную дробь к непрерывной дроби теоремы 1, мы видим, что

$$\alpha = [2;\, 6,\, 10,\, \ldots]$$

и, очевидно,

$$e = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

Пусть $\xi = [2;\, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \ldots]$ и p_n/q_n являются подходящими дробями к числу ξ. Докажем, что для всех $n \geqslant 0$ имеем

$$p_{3n+1} = r_n + s_n \quad \text{и} \quad q_{3n+1} = r_n - s_n. \qquad (*)$$

Эти соотношения проверяются непосредственным вычислением для $n = 0,\ 1$. По определению для $n \geqslant 2$

$$r_n = (2+4n)\, r_{n-1} + r_{n-2},$$
$$s_n = (2+4n)\, s_{n-1} + s_{n-2}.$$

С другой стороны, умножим рекуррентные формулы для p_n и q_n на числа, указанные справа в нижеследующей таблице:

$$\begin{array}{ll|c}
p_{3n-3} = p_{3n-4} + p_{3n-5} & & 1 \\
p_{3n-2} = p_{3n-3} + p_{3n-4} & & -1 \\
p_{3n-1} = 2n p_{3n-2} + p_{3n-3} & & 2 \\
p_{3n} \quad = p_{3n-1} + p_{3n-2} & & 1 \\
p_{3n+1} = p_{3n} - p_{3n-1} & & 1
\end{array}$$

и сложим результаты. Мы получим (для $n \geqslant 2$) формулы, подобные соответствующим формулам для r_n и s_n

$$p_{3n+1} = (2+4n)\, p_{3n-2} + p_{3n-5},$$
$$q_{3n+1} = (2+4n)\, q_{3n-2} + q_{3n-5}.$$

Равенства (*) теперь следуют по индукции. Отсюда получаем, что

$$\frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}}=\frac{r_n+s_n}{r_n-s_n}=\frac{r_n/s_n+1}{r_n/s_n-1}.$$

Мы знаем, что p_{3n+1}/q_{3n+1} приближается к ξ, когда $n\to\infty$. Так как r_n/s_n приближается к α, то отсюда следует, что $\xi=e$, что и требовалось доказать.

Подобным методом можно получить непрерывную дробь для $e^{2/y}$ с целым $y\geqslant 1$; см. Перрон [1].

§ 3. Основная асимптотическая оценка

Асимптотический результат § 3 гл. II является справедливым только при некоторых условиях, определенных типом числа. Теперь мы воспроизведем результат Адамса [1], определяющий основную асимптотическую оценку для e. Пусть λ будет функцией $\lambda^{+}_{e,\,1/q}$, рассмотренной в гл. II; обозначим через $\lambda_0(N)$ число решений неравенств

$$0<qe-p<1/q \quad \text{и} \quad 1\leqslant q\leqslant N \tag{1}$$

в целых *взаимно простых* p и q. Для начала мы можем уточнить теорему 10 § 4 гл. I.

Теорема 3. *Любое решение p/q неравенства $|qe-p|<1/q$ в целых взаимно простых числах с $q>0$ является подходящей дробью к e.*

Доказательство. Мы должны показать, что решение вида

$$\frac{p_n+rp_{n+1}}{q_n+rq_{n+1}}$$

с $r=1$ или $r=a_{n+2}-1$ получиться не может. Если $n=3m-2$ или $n=3m-1$, то $a_{n+2}=1$ и, таким образом, $r=0$. Предположим, что $n=3m$. С помощью леммы теоремы 10 § 4 гл. I мы можем показать, что единственным решением неравенства

$$\frac{e_{3m+2}-r}{q_{3m}+e_{3m+2}q_{3m+1}}<\frac{1}{q_{3m}+rq_{3m+1}}$$

является $r = 0$. То, что $r \neq 1$, следует из неравенств

$$e_{3m+2} > a_{3m+2} = 2(m+1),$$
$$q_{3m+1}/q_{3m} = [1;\ 1, 2m, \ldots] < 2.$$

Подобным же образом можно убедиться, что $r \neq a_{3m+2} - 1$. Тем самым доказана теорема 3.

В дальнейшем мы встретимся с функцией $4^x\Gamma(x + {}^3/_2)$, которая строго возрастает для $x > 0$. Обозначим обратную ей функцию через g. Простые оценки показывают, что $g(x)$ эквивалентна функции

$$\ln x/\ln\ln x.$$

Теорема 4. *Имеют место равенства*

$$\lambda_0(N) = (3/2)\,g(N) + O(1)$$

и

$$\lambda(N) = (1/6)\,(2g(N))^{3/2} + O(g(N)).$$

Доказательство. Сначала получим частный случай теоремы 4 для частных значений N.

Лемма 1. *Для всех n, $m \geqslant 1$ имеют место равенства*

$$\lambda_0(q_n) = (1/2)\,n + O(1),$$
$$\lambda(q_{3m+1}) = (1/6)\,(2m)^{3/2} + O(m).$$

Доказательство. Первое утверждение является прямым следствием теоремы 3, определений и того факта, что подходящие дроби альтернируют около e в силу теоремы 5 § 2 гл. I. (Это причина появления множителя 1/2 перед n). Что же касается второго утверждения, то мы должны определить кратные подходящих p_n и q_n, которые также являются решениями (1) и удовлетворяют неравенству $0 < q_n\alpha - p_n$. Еще раз применяя лемму из теоремы 10 § 4 гл. I с $r = 0$, мы видим, что $q = kq_n$ и $p = kp_n$ являются решением (1) тогда и только тогда, когда

$$\frac{e_{n+2}}{q_n + e_{n+2}q_{n+1}} < \frac{1}{k^2 q_n}, \quad \text{или} \quad k^2 < \frac{1}{e_{n+2}} + \frac{q_{n+1}}{q_n}.$$

Если $n = 3m - 1$ или $n = 3m$, то это условие означает, что $k^2 < 4$; таким образом, остается возможным только $k=1$. Если $n=3m-2$, то условие означает, что $k^2<2m+O(1)$, т. е. $1\leqslant k<(2m)^{1/2}+O(1)$. Для такого k мы замечаем, что $kq_{3m-2}<q_{3m+1}$ (для достаточно большого m). Следовательно, по модулю $O(m)$ мы находим

$$\lambda(q_{3m+1})\equiv\sum_{\substack{\nu=0,\\ \nu\ \text{четные}}}^{m-1}(2\nu)^{1/2}\equiv\int_0^{m/2}\sqrt{2}\,(2x)^{1/2}\,dx=(1/6)\,(2m)^{3/2}.$$

(Мы суммируем лишь по четным ν, так как рассматриваем лишь те n, для которых $0<q_ne-p_n$; такие n являются четными, а в данном случае это означает, что ν — четные.) Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 теперь по существу равносильно получению выражения для m как функции от q_{3m-2}.

Лемма 2. *Существуют постоянные c_1, $c_2>0$, такие, что*

$$c_1 4^m\Gamma(m+3/2)\leqslant q_{3m+1}\leqslant c_2 4^m\Gamma(m+3/2).$$

Доказательство. Заметим, что уравнения

$$\begin{aligned} q_{3m+2}&=2(m+1)\,q_{3m+1}+q_{3m},\\ q_{3m+1}&=q_{3m}+q_{3m-1},\\ q_{3m}&=q_{3m-1}+q_{3m-2} \end{aligned}$$

могут быть решены, что дает

$$\frac{q_{3m+1}}{q_{3m-2}}=2(2m+1)+\frac{q_{3m-5}}{q_{3m-2}},$$

и поэтому

$$\frac{q_{3m+1}}{q_{3m-2}}=[2(2m+1);\ 2(2m-1),\ \ldots].$$

Таким образом,

$$q_{3m+1}\geqslant 2(2m+1)\,q_{3m-2}\geqslant$$
$$\geqslant 2^2(2m+1)(2m-1)\,q_{3m-5}\geqslant\ \ldots$$

и отсюда, очевидно,

$$q_{3m+1}\geqslant c_1 4^m\Gamma(m+3/2).$$

Обратно,

$$\frac{q_{3m+1}}{q_{3m-2}} \leqslant 2(2m+1) + \frac{1}{2(2m-1)} \leqslant$$
$$\leqslant 2(2m+1)\left(1 + \frac{1}{4(2m+1)(2m-1)}\right),$$

и, продолжая по индукции, мы видим, что

$$q_{3m+1} \leqslant 2^m (2m+1)(2m-1) \ldots \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 + \frac{1}{4(2\nu+1)(2\nu-1)}\right).$$

Таким образом,

$$q_{3m+1} \leqslant c_2 4^m \Gamma(m + 3/2),$$

где c_2 определяется бесконечным произведением.

Чтобы доказать теорему, мы находим для любого заданного N целое m, такое, что $q_{3m-2} \leqslant N < q_{3m+1}$. Таким образом,

$$c_1 4^{m-1} \Gamma(m - 1 + 3/2) \leqslant N < c_2 4^m \Gamma(m + 3/2)$$

и, следовательно,

$$g(N/c_2) < m \leqslant g(N/c_1) + 1.$$

Поскольку $g(x)$ растет как $\ln x / \ln \ln x$, мы заключаем, что

$$m = g(N) + O(1),$$

откуда, согласно лемме 1, следует теорема 4.

Замечание. Здесь рассуждения мало отличаются от приведенных в § 4 гл. II, и мы могли бы просто применить то, что было сделано ранее. Мы избрали повторение рассуждений с самого начала, как это сделал Адамс [1], отчасти для того, чтобы показать, как в лемме 2 можно получить несколько более точные границы для q_n $(n = 3m + 1)$, чем с помощью рассуждений гл. II, которые дали бы дополнительный множитель 2^n. Мы также отмечаем, что могли бы использовать функцию x^x вместо $\Gamma(x)$, поскольку множитель c^x (где $c > 0$ — постоянная) не влияет на асимптотическое поведение функции, обратной $c^x x^x$.

По непрерывной дроби числа e мы можем также определить его тип.

Теорема 5. *Если $g(x)$ — обратная функция к функции $4^x\Gamma(x+{}^3/_2)$, то e — число типа $\leqslant 2g+O(1)$.*

Доказательство. По данному N находим q_n, такое, что

$$q_{n-1}<N\leqslant q_n.$$

Имеем

$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\leqslant a_n+1.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{N}{a_n+1}<\frac{q_n}{a_n+1}\leqslant q_{n-1}<N.$$

Если $n=3$ или $n=3m-2$, то $a_n=1$. Если $n=3m-1$, то из выражения $m=g(N)+O(1)$, полученного ранее, находим

$$a_n=a_{3m-1}=2m=2g(N)+O(1).$$

Это доказывает теорему.

Отметим, что тип, указываемый теоремой 5, является по существу наилучшим возможным.

В статье [2] Адамс расширяет оценку теоремы 4. Он рассматривает случай более общих функций $\psi(t)=\omega(t)/t$, как было описано в гл. II, в той области, где результат теоремы 8 § 3 гл. II неприменим. Он также рассматривает более широкий класс чисел, непрерывные дроби которых подобны непрерывной дроби числа e (включая непрерывные дроби Гурвица — см. Перрон [1]).

Общей проблемой является исследование в интересующем нас аспекте значений должным образом нормированных классических функций. (Общее обсуждение этого вопроса проводится в статье автора [3].) Функция e^t является, конечно, наиболее простой. Первой возникающей проблемой, и, возможно, самой простой, является определение непрерывной дроби для e^a, где a — рациональное число (или даже произвольное целое). Хотелось бы знать, как особые аналитические свойства одной из классических функций отражаются на арифметических свойствах ее значений. Теорема 1 в § 1 дает подобный пример, показывая, что все числа, полученные как значения должным образом нормированной функции в надлежащей области определения, имеют похожие непрерывные дроби.

БИБЛИОГРАФИЯ

Адамс (Adams W.)

[1] Asymptotic Diophantine approximations to *e*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **55** (1966), 28—31.

[2] Asymptotic Diophantine approximations and Hurwitz numbers, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 1083—1108.

Бенке (Behnke H.)

[1] Über die Verteilung von Irrationalitäten mod 1, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **1** (1922), 252—267.

[2] Zur Theorie der Diophantischen Approximationen, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **3** (1924), 261—318.

Бернштейн (Bernstein L.)

[1] Periodical continued fractions for irrationals of degree *n* by Jacobi's algorithm, *J. reine angew. Math.*, **213** (1964), 31—38.

[2] Periodicity of Jacobi's algorithm for a special type of cubic irrationals, *J. reine angew. Math.*, **213** (1964), 137—146.

[3] Representation of $(D^n - d)^{1/n}$ as a periodical continued fraction by Jacobi's algorithm, *Math. Nachr.*, **29** (1965), 179—200.

Вейль (Weyl H.)

[1] Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1914), 234—244.

[2] Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math. Ann.*, **77** (1914), 313—352.

Виноградов И. М.

[1] Метод тригонометрических сумм в теории чисел, «Избранные труды», Изд-во АН СССР, М., 1952, 237—331.

Галлахер (Gallagher P.)

[1] Metric simultaneous diophantine approximations (II), *Mathematika*, 24 (1965), 123—127.

Гекке (Hecke H.)

[1] Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **1** (1922), 54—76.

Грейс (Grace J. H.)

[1] The classification of rational approximations, *Proc. London Math. Soc.*, **17** (1918), 247—258.

Касселс (Cassels J. W. S.)

[1] An introduction to diophantine approximation, Cambridge University Press, 1957; русский перевод: Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, ИЛ, М., 1961.

Левек (Leveque W.)

[1] On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 327—360; **94** (1960), 130—149.

Ленг (Lang S.)

[1] Asymptotic approximations to quadratic irrationalities I and II, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 481—496.
[2] Diophantine approximations on toruses, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 521—533.
[3] Report on diophantine approximations, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 177—192.
[4] Asymptotic diophantine approximations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **55** (1966), 31—33.

Островский (Ostrowski A.)

[1] Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **1** (1922), 77—98.

Перрон (Perron O.)

[1] Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner, Leipzig—Berlin, 1929.
[2] Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruch Algorithmus, *Math. Ann.*, **64** (1907), 1—76.

Рот (Roth K. F.)

[1] Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1—20; русский перевод: сб. *Математика*, **1**:1 (1957), 3—18.

Харди и Литлвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.)

«Some problems of diophantine approximations» — следующая серия публикаций:
[1] *Acta Mathematica*, **37** (1914), 155—190.
[2] *Acta Mathematica*, **37** (1914), 193—238.
[3] *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **XXI** (1922), 1—5.
[4] *Proc. London Math. Soc.*, **20** (1922), 15—36.
[5] *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **1** (1922), 212—249.
[6] *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **3** (1923), 57—68.
[7] *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **22** (1924), 519—534.

Хассе и Бернштейн (Hasse H., Bernstein L.)

[1] Einheitberechnung durch Jacobi-Perronschen Algorithmus, *J. reine angew. Math.*, **218** (1965), 51—69.

Хинчин А. Я.

[1] Цепные дроби, М., Физматгиз, 1961, изд. 3-е.

Шмидт (Schmidt W.)

[1] A metrical theorem in diophantine approximations, *Canadian J. Math.*, **11** (1960), 619—631.

[2] Metrical theorems on fractional parts of sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110** (1964), 493—518.

[3] Simultaneous approximation to a basis of a real number field, *Amer. J. Math.*, 88 (1969), 517—527.

Эрдёш (Erdös P.)

[1] Some results on diophantine approximations, *Acta Arithmetica*, **5** (1959), 359—369.

УКАЗАТЕЛЬ

Дискриминант 67
— поля 75
Дробь непрерывная 10, 16
— — бесконечная 16
— — конечная 10
— — Ламберта 90
— — периодическая 69
— — числа α 16
— — чисто периодическая 69
— n-я подходящая 16
— n-я промежуточная 25

Единица 73
Единицы нетривиальные 74

Норма числа 67

Период основной 69—70
Подтип числа 32
— — главный 50
Подходящие 25
Приближение наилучшее 18
Принцип переноса Хинчина 43
Проблема равномерного распределения 39

След числа 67

Теорема Виноградова 56—57
— Серре 23
— Туэ—Зигеля—Рота 88
— Эйлера—Лагранжа 71
Теоремы Хинчина о сходимости и расходимости 32—33
Тип числа 30

Уравнение Пелля 73—74

Числа алгебраические 66
— постоянного типа 34—35
— приведенные 67
— с ограниченными неполными частными 35
— сопряженные 67
— целые алгебраические 66
— эквивалентные 21, 83

n-е неполное частное 16
— непрерывное преобразование 21
n-я подходящая дробь 16
— промежуточная дробь непрерывной дроби 25
ω-подходящая 28

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 5

Предисловие 7

Глава I. Общая формальная теория 9

§ 1. Рациональные непрерывные дроби 9
§ 2. Непрерывная дробь действительного числа . . . 15
§ 3. Эквивалентные числа 20
§ 4. Промежуточные дроби 24

Глава II. Асимптотические приближения 30

§ 1. Распределение подходящих 30
§ 2. Числа постоянного типа 33
§ 3. Асимптотические приближения 36
§ 4. Связь с непрерывными дробями 44

Глава III. Оценки усредненных сумм 48

§ 1. Сумма дробных долей 48
§ 2. Сумма обратных величин 50
§ 3. Тригонометрические суммы с многочленом второй степени 56
§ 4. Суммы с более общими функциями 61

Глава IV. Квадратичные иррациональности 66

§ 1. Квадратичные иррациональности и периодичность 66
§ 2. Единицы и непрерывные дроби 72
§ 3. Основная асимптотическая оценка 79

Глава V. Показательная функция 89

§ 1. Некоторые непрерывные дроби 89
§ 2. Непрерывная дробь для числа e 91
§ 3. Основная асимптотическая оценка 93

Библиография 99

Указатель 102

С. Ленг

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Редактор *Г. М. Ильичева*
Художник *Н. А. Фильчагина*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Г. Б. Алюлина*
Корректор *И. С. Додалева*

Сдано в производство 4/II 1970 г. Подписано к печати 13/VII 1970 г. Бумага № 2 $84 \times 108^1/_{32}$=1,63 бум. л., 5,46 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 3,95. Изд. № 1/5644. Цена 40 к. Зак. 522.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.