«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Вводные курсы

С. ЛЕНГ

Введение в алгебраические и абелевы функции

Перевод с английского
Ю. И. Манина

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1976

ADVANCED BOOK PROGRAM

Introduction to algebraic and abelian functions

SERGE LANG
Yale University, New Haven, Connecticut

Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
Reading, Massachusetts
1972

УДК 5136

Автор знаком нашим читателям по переводам его книг «Алгебраические числа», «Введение в теорию дифференцируемых многообразий», «Алгебра», «Введение в теорию диофантовых приближений», выпущенных издательством «Мир» в разные годы. Его новая книга посвящена изложению теории алгебраических кривых и абелевых многообразий как с алгебраической, так и с аналитической точек зрения. Это — мастерски написанное лаконичное введение в предмет; читателю сообщаются действительно самые важные факты.

Книга полезна не только алгебраистам и аналитикам, но и специалистам по теории чисел и дифференциальным уравнениям, а также физикам-теоретикам. Она доступна студентам университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Л $\frac{20203-031}{041(01)-76}$ 31—76

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

В своей новой книге С. Ленг с присущим ему мастерством очень быстро вводит читателя в теорию алгебраических кривых и абелевых многообразий. Свой вклад в общую картину вносят алгебра (нормированные кольца в поле), топология (римановы поверхности) и анализ (тэта-функции и абелевы интегралы). Хотя изложение ограничивается классическими фундаментальными результатами, для них выбраны современные методы доказательства, и это позволит читателю уверенно двигаться затем дальше.

ПРЕДИСЛОВИЕ

После периода увлечения диофантовыми приближениями и трансцендентными числами я вернулся к старой привязанности — абелевым функциям. По некотором размыщлении я нашел, что было бы все еще полезно написать краткое введение в предмет, объединяющее начала алгебраической и аналитической теории, по возможности элементарное и лаконичное. Предлагаемую книжку можно использовать для полугодового курса или семинара, рассчитанного на второкурсников.

Теорема Римана — Роха доказана по А. Вейлю. Его метод быстро приводит к цели и заодно знакомит читателя с языком аделей — чрезвычайно полезной алгебраической структурой, завоевавшей теорию чисел.

Изложенное доказательство теоремы Абеля—Якоби было рассказано Артином в одном семинаре 1948 года. Насколько я знаю, очень простое доказательство второй составной части этой теоремы — теоремы обращения Якоби — придумано им.

В мае 1949 года А. Вейль дал толчок развитию теории тэта-функций своим известным докладом в семинаре Бурбаки. Я следую ему в доказательстве теоремы Пуанкаре, согласно которой любому дивизору на комплексном торе отвечает тэта-функция. К сожалению, когда сам Вейль включал эту теорему в свою монографию о кэлеровых многообразиях[1]), он обобщил ее до результата, годного для всех таких многообразий. Теорема выиграла в глубине, но потеряла в доступности для неискушенного читателя.

Следует заметить, что без соответствия между дивизорами и тэта-функциями можно обойтись, когда речь идет о линейной теории и проективных вложениях торов (и постулируется существование невырожденной римановой формы). Поэтому я изложил эти две темы еще до объяснения связи между тэта-функциями и дивизорами.

Тем, кто продумает эту книжку, будет, надеюсь, уже нетрудно читать более продвинутые работы, перечисленные в списке литературы.

Нью-Хейвен, Коннектикут *Серж Ленг*
лето 1972

---

[1]) См. список литературы в конце настоящей книги. — *Прим. ред.*

ГЛАВА I

ТЕОРЕМА РИМАНА — РОХА

§ 1. ЛЕММЫ О НОРМИРОВАНИЯХ

Напомним, что ***кольцом дискретного нормирования*** $\mathfrak{o}$ называется кольцо главных идеалов (и тем самым кольцо, в котором разложение на множители однозначно), имеющее единственный ненулевой простой идеал. Любая образующая t этого идеала называется ***локальным параметром***. Каждый элемент $x \neq 0$ кольца $\mathfrak{o}$ представляется в виде

$$x = t^r y,$$

где r — целое число $\geqslant 0$, а y — единица (обратимый элемент). Значит, элементы поля частных K тоже представляются в таком виде, только r может быть любым целым числом. Это число называется ***порядком*** (или ***нормой***) соответствующего элемента. Если $r > 0$, то мы говорим, что x имеет ***нуль*** в данном нормировании, а если $r < 0$, то ***полюс***. Мы пишем

$$r = v_{\mathfrak{o}}(x), \quad \text{или } v(x), \quad \text{или } \operatorname{ord}_{\mathfrak{o}}(x).$$

Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}$. Отображение поля K, которое совпадает с каноническим гомоморфизмом $\mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{o}$, а все элементы $x \notin \mathfrak{o}$ переводит в ∞, называется *точкой*, отвечающей этому нормированию.

Мы примем без доказательства несколько основных результатов о нормированиях; их можно найти в моей книге „Алгебра“ [1]). А именно, пусть E — конечное расширение поля K и $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования в K с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$. Тогда в поле E существует кольцо дискретного нормирования $\mathfrak{O}$ с максимальным идеалом $\mathfrak{P}$, такое, что

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{O} \cap K \quad \text{и} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K.$$

---

[1]) Русский перевод: „Мир“, 1968. — *Прим. ред.*

Если u — простой элемент кольца $\mathfrak{O}$, то $t\mathfrak{O} = u^e\mathfrak{O}$. Число e называется ***индексом ветвления*** $\mathfrak{O}$ над $\mathfrak{o}$ (или $\mathfrak{P}$ над $\mathfrak{p}$). Если $\Gamma_{\mathfrak{O}}$ и $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ — группы нормирований этих колец, то $(\Gamma_{\mathfrak{O}} : \Gamma_{\mathfrak{o}}) = e$.

Пример. Пусть k — поле, t трансцендентно над k и $a \in k$. Обозначим через $\mathfrak{o}$ множество рациональных функций $f(t)/g(t)$, где $f(t), g(t) \in k[t]$ и $g(a) \neq 0$. Тогда $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования, максимальный идеал которого состоит из функций с $f(a) = 0$. Это — типичная ситуация. В самом деле, пусть (для простоты) k алгебраически замкнуто. Рассмотрим расширение $k(x)$, полученное присоединением к k одного трансцендентного элемента x. Пусть $\mathfrak{o}$ — любое кольцо дискретного нормирования в $k(x)$, содержащее k. Заменив при необходимости x на $1/x$, мы можем считать, что $x \in \mathfrak{o}$. Тогда $\mathfrak{p} \cap k[x] \neq 0$, поэтому идеал $\mathfrak{p} \cap k[x]$ порождается некоторым неприводимым многочленом $p(x)$, который должен быть линейным, ибо по предположению k алгебраически замкнуто. Значит, $p(x) = x - a$ для некоторого $a \in k$. Тогда каноническое отображение

$$\mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$$

индуцирует на многочленах отображение

$$f(x) \mapsto f(a).$$

Отсюда очевидно, что $\mathfrak{o}$ состоит из всех частных $f(x)/g(x)$, для которых $g(a) \neq 0$. Тем самым мы оказываемся в ситуации, описанной в начале примера.

Аналогично, пусть $\mathfrak{o} = k[[t]]$ — кольцо формальных степенных рядов от одной переменной. Это — кольцо дискретного нормирования, максимальный идеал которого порожден t. Любой элемент поля частных разлагается в формальный ряд

$$x = a_{-m}t^{-m} + \ldots + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$$

с коэффициентами $a_i \in k$. Точка отображает x в коэффициент a_0, если только она не является полюсом для x.

Нам понадобится одна аппроксимационная теорема, обеспечивающая существование функции (т. е. элемента поля K) с частично предписанными нулями и полюсами. Пусть K — некоторое поле, $\mathfrak{o}_1, \ldots \mathfrak{o}_n$ — конечное множество колец дискретных нормирований в нем.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{o}_1$, $\mathfrak{o}_2$ — кольца дискретных нормирований с общим полем частных K и $\mathfrak{o}_1 \subset \mathfrak{o}_2$, то $\mathfrak{o}_1 = \mathfrak{o}_2$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ — соответствующие максимальные идеалы, то $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$. Пусть $y \in \mathfrak{p}_2$. Если $y \notin \mathfrak{p}_1$, то $1/y \in \mathfrak{o}_1$, откуда $1/y \in \mathfrak{o}_2$ — противоречие. Значит, $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$. Любая единица кольца $\mathfrak{o}_1$ тем более является единицей в $\mathfrak{o}_2$. Каждый элемент $y \in \mathfrak{p}_2$ можно записать в виде $y = \pi_1^{\nu} u$, где u — некоторая единица кольца $\mathfrak{o}_1$, а π_1 — элемент порядка 1 в $\mathfrak{p}_1$. Если элемент π_1 не лежит в $\mathfrak{p}_2$, то он должен быть единицей в $\mathfrak{o}_2$, что не так. Значит, $\pi_1 \in \mathfrak{p}_2$, так что $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{o}_1\pi_1$. Поэтому $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$. Наконец, если u — единица в $\mathfrak{o}_2$, но не в $\mathfrak{o}_1$, то $1/u \in \mathfrak{p}_1$, а это невозможно для единиц из $\mathfrak{o}_2$, чем доказательство и завершается.

Впредь мы будем считать, что *кольца $\mathfrak{o}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) различны и, значит, ни одно из них не содержится в другом.*

Предложение 2. *Существует элемент y поля K, имеющий нуль в $\mathfrak{o}_1$ и полюсы в $\mathfrak{o}_j$ ($j = 2, \ldots, n$).*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 2$ можно найти элементы $y \in \mathfrak{o}_2$, $y \notin \mathfrak{o}_1$ и $z \in \mathfrak{o}_1$, $z \notin \mathfrak{o}_2$, ибо наши кольца не вложены друг в друга. Тогда z/y имеет нуль в $\mathfrak{o}_1$ и полюс в $\mathfrak{o}_2$, что и требовалось.

Предположим, что мы уже нашли элемент $y \in K$ с нулем в $\mathfrak{o}_1$ и полюсами в $\mathfrak{o}_2, \ldots, \mathfrak{o}_{n-1}$. Пусть еще z имеет нуль в $\mathfrak{o}_1$ и полюс в $\mathfrak{o}_n$. Тогда для достаточно большого r элемент $y + z^r$ удовлетворяет нашим требованиям. Действительно, для значений в точке имеем: нуль + нуль = нуль; нуль + полюс = полюс, и сумма полюсов разных порядков дает полюс.

Высокая степень элемента y из предложения 2 имеет нуль высокого порядка в $\mathfrak{o}_1$ и полюс высокого порядка в $\mathfrak{o}_j\,(j=2, \ldots, n)$. Добавляя к этой степени 1 и рассматривая $1/(1+y^r)$, получаем

Следствие. *Существует такой элемент* $z \in K$, *что* $z-1$ *имеет нуль (сколь угодно) высокого порядка в* $\mathfrak{o}_1$, *а* z *имеет нули (сколь угодно) высокого порядка в* $\mathfrak{o}_j\,(j=2, \ldots, n)$.

Обозначим через ord_i порядок элемента K относительно нормирования, отвечающего $\mathfrak{o}_i$. Имеет место следующая аппроксимационная теорема.

Теорема 1. *Для любых элементов* $a_1, \ldots, a_n$ *из* K *и любого целого числа* N *существует такой элемент* $y \in K$, *что* $\mathrm{ord}_i(y-a_i) > N$.

Доказательство. Для каждого i выберем, пользуясь следствием, z_i, близкое к 1 относительно $\mathfrak{o}_i$ и к 0 относительно $\mathfrak{o}_j\,(j \neq i)$. Тогда элемент $z_1a_1 + \ldots + z_na_n$ удовлетворяет требованиям теоремы.

В частности мы можем найти элемент y, имеющий в точности предписанные порядки во всех нормированиях, отвечающих $\mathfrak{o}_i$. Используя этот факт, докажем следующее неравенство.

Следствие. *Пусть* E — *конечное алгебраическое расширение поля* K, Γ — *группа значений некоторого дискретного нормирования поля* K, *а* Γ_i — *группы значений конечного числа неэквивалентных дискретных нормирований* v_i *поля* E, *совпадающих с данным на* K. *Обозначим через* e_i *индекс* Γ *в* Γ_i. *Тогда*

$$\sum e_i \leqslant [E:K].$$

Доказательство. Выберем в E элементы

$$y_{11}, \ldots, y_{1e_1}, \ldots, y_{r1}, \ldots, y_{re_r}$$

так, чтобы $y_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, e_i)$ представляли все различные смежные классы Γ_i в Γ и имели нули высокого порядка в остальных нормированиях v_j $(j \neq i)$.

Эти элементы линейно независимы над K. В самом деле, допустим, что верно нетривиальное линейное соотношение

$$\sum_{i,\nu} c_{i\nu} y_{i\nu} = 0.$$

Пусть, скажем, c_{11} имеет максимальную норму в Γ, т. е. $v(c_{11}) \geqslant v(c_{i\nu})$ для всех i, ν. Разделив все соотношение на c_{11}, мы можем считать, что $c_{11} = 1$ и $v(c_{i\nu}) \leqslant 1$. Рассмотрим норму нашей суммы в точке v_1. Все члены y_{11}, $c_{12}y_{12}$, ..., $c_{1e_1}y_{1e_1}$ имеют разные нормы, потому что $v_1(y_{1\nu})$ лежат в разных смежных классах. Поэтому

$$v_1(y_{11} + \ldots + c_{1e_1}y_{1e_1}) \geqslant v_1(y_{11}).$$

С другой стороны, нормы остальных членов суммы в v_1 очень малы по предположению. Мы пришли к противоречию. Стало быть, выбранные элементы линейно независимы, откуда и следует требуемое неравенство.

§ 2. ТЕОРЕМА РИМАНА — РОХА

Пусть k — алгебраически замкнутое поле и K — поле функций над k от одной переменной (коротко: *функциональное поле*). По определению это означает, что K является конечным расширением чисто трансцендентного расширения $k(x)$ (поля k) степени трансцендентности единица. Будем называть k ***полем констант***. Элементы K иногда называются ***функциями***.

Точкой[1]) поля K над k будем называть любое содержащее k кольцо дискретного нормирования в K (или кольцо над k). Разбирая пример § 1, мы убедились, что поле классов вычетов такого кольца совпадает с k. Множество всех таких колец (т. е. точек поля K) называется ***кривой***, а K — полем функций на ней. В соответствии с геометрическими

[1]) В оригинале „point"; мы переводим одним словом „точка" английские „point" и „place". Это не может привести к недоразумениям. — *Прим. перев.*

представлениями точки кривой мы будем обозначать буквами P, Q.

Дивизорами (кривой или поля K над k) мы будем называть элементы свободной абелевой группы, порожденной точками. Таким образом, всякий дивизор есть формальная сумма

$$\mathfrak{a} = \sum n_i P_i = \sum n_P P,$$

где P_i — точки, n_i — целые коэффициенты, среди которых лишь конечное число ненулевых. Сумму

$$\sum n_i = \sum_P n_P$$

назовем ***степенью*** дивизора $\mathfrak{a}$, а n_i — его ***порядком*** в P_i.

Для любого ненулевого элемента $x \in K$ имеется лишь конечное число точек P с $\operatorname{ord}_P x \neq 0$. В самом деле, если x — константа, то $\operatorname{ord}_P x = 0$ для всех P. Если же x — не константа, то у поля $k(x)$ есть одна точка, в которой x имеет нуль, и одна точка, в которой x имеет полюс. Каждая из них имеет лишь число продолжений в K, потому что степень K над $k(x)$ конечна. Таким образом, мы можем поставить в соответствие функции x дивизор

$$(x) = \sum n_P P,$$

где $n_P = \operatorname{ord}_P(x)$. Дивизоры $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ называются ***линейно эквивалентными***, если $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ есть дивизор некоторой функции. Если $\mathfrak{a} = \sum n_P P$ и $\mathfrak{b} = \sum m_P P$, то мы пишем

$\mathfrak{a} \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $n_P \geqslant m_P$ для всех P.

Очевидно, это соглашение определяет (частичный) порядок на дивизорах. Будем называть дивизор $\mathfrak{a}$ ***положительным***, если $\mathfrak{a} \geqslant 0$.

Для любого дивизора $\mathfrak{a}$ обозначим через $L(\mathfrak{a})$ множество всех элементов $x \in K$, для которых $(x) \geqslant -\mathfrak{a}$. Если $\mathfrak{a}$ положителен, то $L(\mathfrak{a})$ состоит из всех функций в K, полюсы которых лежат в $\mathfrak{a}$, причем их кратности не превосходят кратностей в $\mathfrak{a}$, т. е. порядков $\mathfrak{a}$ относительно соответствующих точек. Очевидно, для любого дивизора $\mathfrak{a}$ множество $L(\mathfrak{a})$ будет линейным пространством над полем констант k. Обозначим его размерность через $l(\mathfrak{a})$.

Наша основная цель состоит в том, чтобы более глубоко изучить функцию $l(\mathfrak{a})$ на дивизорах $\mathfrak{a}$ кривой (или ее поля функций).

Пусть P — некоторая точка кривой V и $\mathfrak{o}$ — ее локальное кольцо в K с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$. Из алгебраической замкнутости k следует, что $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ канонически изоморфно k. Мы знаем, что $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования. Пусть t — образующая его максимального идеала, x — некоторый элемент кольца. Существует такая константа a_0 в k, что $x \equiv a_0 \bmod \mathfrak{p}$. Функция $x - a_0$ лежит в $\mathfrak{p}$ и имеет нуль в точке $\mathfrak{o}$. Поэтому $x - a_0 = ty_0$, где y_0 снова лежит в $\mathfrak{o}$. По тем же соображениям $y_0 = a_1 + ty_1$ с $y_1 \in \mathfrak{o}$ и $x = a_0 + a_1 t + y_1 t^2$. Продолжая эту процедуру, получаем разложение x в степенной ряд

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots .$$

Ясно, что если все его коэффициенты равны нулю, то $x = 0$.

Поле частных K кольца $\mathfrak{o}$ можно вложить в поле формальных рядов $k((t))$ следующим способом. Для любого элемента $x \in K$ существует такая степень t^s, что функция $t^s x$ лежит в $\mathfrak{o}$. Поэтому x можно записать в виде

$$x = \frac{a_{-s}}{t^s} + \ldots \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \ldots .$$

Если u — другая образующая идеала $\mathfrak{p}$, то, очевидно, $k((t)) = k((u))$. Поэтому описанное поле степенных рядов зависит только от точки P. Обозначим его через K_P. Любой элемент ξ_P поля K_P можно представить в виде $\xi_P = \sum\limits_{\nu=m}^{\infty} a_\nu t^\nu$, где $a_m \neq 0$. Если $m < 0$, мы говорим, что ξ_P имеет полюс порядка $-m$. При $m > 0$ мы говорим, что ξ_P имеет нуль порядка m. В общем случае мы пишем $m = \mathrm{ord}_P\, \xi_P$.

Пусть A^* — прямое произведение полей K_P по всем точкам P. Любой элемент этого произведения можно представлять себе как бесконечный вектор $\xi = (\ldots, \xi_P, \ldots)$, где ξ_P лежит в K_P. Иными словами, выбрать такой элемент — значит выбрать случайным образом по степенному ряду в каждой точке. Можно превратить A^* в кольцо покомпонентным сложением и умножением. Оно слишком велико для наших целей, и мы будем работать с его подкольцом A, состоящим из всех таких векторов, что ξ_P имеет полюс в P не более чем для конечного числа точек P. Это кольцо A называется кольцом ***аделей***. Заметим, что наше поле функций K погружено в A посредством отображения

$$x \longmapsto (\ldots, x, x, x, \ldots).$$

Иными словами, в точке P мы выбираем разложение элемента x в этой точке. В частности, поле констант k также вложено в кольцо A, и это кольцо можно рассматривать как (бесконечномерную) алгебру над k.

Пусть $\mathfrak{a}$ — дивизор нашей кривой. Обозначим через $\Lambda(\mathfrak{a})$ подмножество в A, состоящее из всех аделей ξ, таких, что $\operatorname{ord}_P \xi_P \geqslant -\operatorname{ord}_P \mathfrak{a}$ для всех P. Ясно, что $\Lambda(\mathfrak{a})$ есть k-подпространство в A. Множество всех подпространств вида $\Lambda(\mathfrak{a})$ можно взять в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля в A. В этой топологии A становится топологическим кольцом.

Множество всех функций x, удовлетворяющих условию $(x) \geqslant -\mathfrak{a}$, — это наше старое пространство $L(\mathfrak{a})$. Очевидно, оно совпадает с $\Lambda(\mathfrak{a}) \cap K$.

Пусть $\mathfrak{a} = \sum n_i P_i$ — некоторый дивизор степени $\deg \mathfrak{a} = \sum n_i$. Цель этой главы — показать, что $\deg(\mathfrak{a})$ и $l(\mathfrak{a})$ имеют одинаковый порядок роста, и получить точную информацию о разности $l(\mathfrak{a}) - \deg(\mathfrak{a})$.

В конечном счете мы докажем существование такой константы g, зависящей только от поля K, что

$$l(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + 1 - g + \delta(\mathfrak{a}),$$

где $\delta(\mathfrak{a})$ — неотрицательное целое число, равное нулю, если $\deg(\mathfrak{a})$ достаточно велика ($> 2g-2$).

Выпишем несколько тривиальных формул, на которых будут основаны дальнейшие вычисления. Пусть B, C — два k-подпространства в A, и пусть $B \supset C$. Символом $(B : C)$ мы будем обозначать размерность факторпространства $B \bmod C$ над k.

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — *два дивизора. Тогда* $\Lambda(\mathfrak{a}) \supset \Lambda(\mathfrak{b})$ *в том и только том случае, когда* $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$. *Если это условие выполнено, то*

1. $(\Lambda(\mathfrak{a}) : \Lambda(\mathfrak{b})) = \deg(\mathfrak{a}) - \deg(\mathfrak{b})$,
2. $(\Lambda(\mathfrak{a}) : \Lambda(\mathfrak{b})) = ((\Lambda(\mathfrak{a}) + K) : (\Lambda(\mathfrak{b}) + K)) + ((\Lambda(\mathfrak{a}) \cap K) : (\Lambda(\mathfrak{b}) \cap K))$.

Доказательство. Первое утверждение тривиально. Формулу 1 нетрудно установить следующим способом. Если точка P входит в $\mathfrak{a}$ с кратностью d и в $\mathfrak{b}$ с кратностью e, то $d \geqslant e$. Если t — элемент поля K_P, имеющий порядок 1 в P, то индекс $(t^{-d}K_P : t^{-e}K_P)$, очевидно, равен $d - e$. Индекс, фигурирующий в формуле 1, разумеется, является суммой конечного числа локальных индексов такого вида, когда P пробегает все точки, входящие в $\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$. Этим доказана формула 1. Формула 2 немедленно вытекает из элементарных теорем о гомоморфизмах для векторных пространств. Формальное доказательство мы предоставляем в качестве упражнения читателю.

Из предложения 3 следует фундаментальная формула

$$(1) \quad \deg(\mathfrak{a}) - \deg(\mathfrak{b}) = (\Lambda(\mathfrak{a}) + K : \Lambda(\mathfrak{b}) + K) + l(\mathfrak{a}) - l(\mathfrak{b}),$$

верная для любой пары дивизоров $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$. Пока мы не в состоянии выразить „среднюю“ коразмерность через два значения какой-то функции — от $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ по отдельности, потому что мы еще не установили, что размерность $(A : \Lambda(\mathfrak{b}) + K)$ конечна. Это будет сделано ниже.

Пусть y — непостоянная функция из K. Обозначим через $\mathfrak{c}$ дивизор ее полюсов; пусть $\mathfrak{c} = \sum e_i P_i$. Все точки P_i, входящие в $\mathfrak{c}$, индуцируют одну и ту же точку Q рациональной кривой с полем функций $k(y)$, а именно точку, соответствующую этому полюсу функции y в $k(y)$. Числа e_i по определению являются индексами ветвления дискретного нормирования в $k(y)$, отвечающего точке Q, относительно продолжений этого нормирования в K, отвечающих точкам P_i. Докажем, что степень $\sum e_i$ дивизора $\mathfrak{c}$ равна $[K:k(y)]$. Обозначим последнее число через n.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — какой-нибудь линейный базис K над $k(y)$. Умножив z_j на подходящий многочлен от $k(y)$, можно добиться того, чтобы эти элементы были целы над $k[y]$. Тогда никакая точка K, конечная на $k[y]$, не может быть полюсом ни одного из элементов z_j. Следовательно, все полюсы z_j находятся среди точек P_i, входящих в $\mathfrak{c}$. Поэтому можно найти такое целое число μ_0, что $z_0 \in L(\mu_0\mathfrak{c})$. Пусть μ — достаточно большое натуральное число. Для любого целого s, удовлетворяющего условию $0 \leqslant s \leqslant \mu - \mu_0$, имеем

$$y^s z_j \in L(\mu\mathfrak{c}),$$

так что

$$l(\mu\mathfrak{c}) \geqslant (\mu - \mu_0 + 1)\, n.$$

Обозначим через N_μ целое число $(\Lambda(\mu\mathfrak{c}) + K : \Lambda(0) + K)$. Ясно, что $N_\mu \geqslant 0$. Положив в фундаментальной формуле (1) $\mathfrak{b} = 0$ и $\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{c}$, получим

$$\mu\left(\sum e_i\right) = N_\mu + l(\mu\mathfrak{c}) - 1 \geqslant \geqslant N_\mu + (\mu - \mu_0 + 1)\, n - 1. \tag{2}$$

Разделив (2) на μ и устремив μ к бесконечности, найдем, что $\sum e_i \geqslant n$. Принимая во внимание следствие теоремы 1 из § 1, получаем:

Теорема 2. *Пусть K — поле функций на некоторой кривой, $y \in K$ — непостоянная функция, $\mathfrak{c}$ — ее дивизор полюсов. Тогда* $\deg(\mathfrak{c}) = [K:k(y)]$. *Поэтому степень дивизора всякой функции равна нулю (т. е. число нулей всякой функции равно числу ее полюсов).*

Доказательство. Дивизор нулей $\mathfrak{c}'$ функции y равен дивизору полюсов функции $1/y$, а степень $[K:k(1/y)]$ совпадает с n.

Следствие. *Функция* $\deg(\mathfrak{a})$ *постоянна на классах линейной эквивалентности дивизоров.*

Функции, постоянные на классах линейной эквивалентности, мы будем называть ***функциями класса***. Итак, степень является функцией класса.

Возвращаясь к (2), мы видим, что

$$\mu n \geqslant N_\mu + \mu n - \mu_0 n + n - 1,$$

откуда

$$N_\mu \leqslant \mu_0 n - n + 1,$$

чем доказана равномерная ограниченность чисел N_μ. Из нее следует, что для достаточно больших μ размерность $N_\mu = (\Lambda(\mu\mathfrak{c}) + K : \Lambda(0) + K)$ становится постоянной, потому что это всегда целое неотрицательное число.

Определим теперь на дивизорах новую функцию $r(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) - l(\mathfrak{a})$. Оба слагаемых $\deg(\mathfrak{a})$ и $l(\mathfrak{a})$ являются функциями класса. Для первого это следует из теоремы 2, а для второго — из того, что отображение $z \mapsto yz$ для $z \in L(\mathfrak{a})$ является k-изоморфизмом между пространствами $L(\mathfrak{a})$ и $L(\mathfrak{a} - (y))$.

Фундаментальную формулу (1) можно переписать в виде

$$(3) \qquad 0 \leqslant (\Lambda(\mathfrak{a}) + K : \Lambda(\mathfrak{b}) + K) = r(\mathfrak{a}) - r(\mathfrak{b})$$

для любых двух дивизоров $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, таких, что $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$. Возьмем $\mathfrak{b} = 0$ и $\mathfrak{a} = \mu\mathfrak{c}$. Тогда

$$(\Lambda(\mu\mathfrak{c}) + K : \Lambda(0) + K) = r(\mu\mathfrak{c}) - r(0).$$

Это равенство вместе с результатом предыдущего абзаца показывает, что функция $r(\mu\mathfrak{c})$ равномерно ограничена для больших μ.

Пусть теперь $\mathfrak{b}$ — любой дивизор. Возьмем функцию $z \in k[y]$, имеющую нули высокого порядка во всех точках $\mathfrak{b}$, кроме тех, которые входят также и в $\mathfrak{c}$ (т. е. являются полюсами y). Тогда $(z)+\mu\mathfrak{c}\geqslant\mathfrak{b}$ для некоторого μ. Положив $\mathfrak{a}=\mu\mathfrak{c}$ в формуле (3) и пользуясь тем, что $r(\mathfrak{a})$ является функцией класса, получаем

$$r(\mathfrak{b})\leqslant r(\mu\mathfrak{c}).$$

Это доказывает, что вообще функция $r(\mathfrak{b})$ ограничена при всех $\mathfrak{b}$. (Все это, конечно, чистое волшебство.) Отсюда уже видно, что $\deg(\mathfrak{b})$ и $l(\mathfrak{b})$ имеют общий порядок роста. Мы вернемся к этому ниже. Заметим, что если в формуле (3) зафиксировать $\mathfrak{b}$ и менять $\mathfrak{a}$, то $\Lambda(\mathfrak{a})$ можно сделать настолько большим, чтобы любой наперед заданный элемент кольца A попал в это пространство. С другой стороны, индекс, входящий в (3), ограничен, потому что, как мы только что убедились, функция $r(\mathfrak{a})$ ограничена. Значит, он достигает максимума для некоторого дивизора $\mathfrak{a}$, и для этого дивизора $\mathfrak{a}$ мы должны иметь $A=\Lambda(\mathfrak{a})+K$. Зафиксируем это в виде отдельной теоремы.

Теорема 3. *Существует такой дивизор* $\mathfrak{a}$, *что* $A=\Lambda(\mathfrak{a})+K$. *Это означает, что поле* K *образует решетку (дискретную подгруппу) в* A *и что существует такая окрестность нуля* $\Lambda(\mathfrak{a})$, *сдвиги которой на все точки этой решетки покрывают* A.

Этот результат позволяет нам расщепить индекс в формуле (1). Обозначим через $\delta(\mathfrak{a})$ размерность $(A:\Lambda(\mathfrak{a})+K)$. Как мы только что установили, она конечна. Формула (1) принимает вид

$$\deg(\mathfrak{a})-\deg(\mathfrak{b})=\delta(\mathfrak{b})-\delta(\mathfrak{a})+l(\mathfrak{a})-l(\mathfrak{b}), \tag{4}$$

или

$$l(\mathfrak{a})-\deg(\mathfrak{a})-\delta(\mathfrak{a})=l(\mathfrak{b})-\deg(\mathfrak{b})-\delta(\mathfrak{b}). \tag{5}$$

Этот результат был доказан нами для $\mathfrak{a}\geqslant\mathfrak{b}$. Однако у любых двух дивизоров есть верхняя грань, поэтому формула (5) верна для любой пары дивизоров. *Род поля* K — это по определению то целое число g, для которого

$$l(\mathfrak{a}) - \deg(\mathfrak{a}) - \delta(\mathfrak{a}) = 1 - g.$$

Это инвариант поля. Положив в этом определении $\mathfrak{a} = 0$, находим $g = \delta(0)$, так что g — неотрицательное целое число, $g = (A : \Lambda(0) + K)$. Подведем итоги.

Теорема 4. *Существует такое целое число $g \geqslant 0$, зависящее только от K, что для любого дивизора $\mathfrak{a}$*

$$l(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + 1 - g + \delta(\mathfrak{a}),$$

где $\delta(\mathfrak{a}) \geqslant 0$.

Назовем ***дифференциалом*** λ поля K любой k-линейный функционал на A, обращающийся в нуль на некотором пространстве $\Lambda(\mathfrak{a})$ и на K (вложенном в A, как описывалось). Первое условие означает, что функционал λ непрерывен, если k снабжено дискретной топологией. Поскольку мы уже установили конечность индекса $(A : \Lambda(\mathfrak{a}) + K)$, ясно, что дифференциал, обращающийся в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a})$, можно рассматривать как функционал на факторпространстве

$$A \bmod (\Lambda(\mathfrak{a}) + K),$$

и что пространство всех таких дифференциалов двойственно к этому факторпространству. Поэтому его размерность над k равна $\delta(\mathfrak{a})$.

Заметим еще, что дифференциалы образуют векторное пространство над K. В самом деле, если дифференциал λ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a})$, ξ — любой элемент из A, а y — любой элемент из K, то произведение $y\lambda$ можно определить формулой $(y\lambda)(\xi) = \lambda(y\xi)$. Функционал $y\lambda$ снова является дифференциалом, ибо он, очевидно, обращается в нуль на K и на $\Lambda(\mathfrak{a} + (y))$.

Будем называть множества $\Lambda(\mathfrak{a})$ ***параллелотопами***. Докажем следующий результат.

Теорема 5. *Для любого дифференциала λ существует максимальный параллелотоп $\Lambda(\mathfrak{a})$, на котором λ обращается в нуль.*

Доказательство. Если λ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a}_1)$ и $\Lambda(\mathfrak{a}_2)$, то он обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a} = \sup(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно установить, что степени таких дивизоров $\mathfrak{a}$ ограниченны. Пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный дивизор. Если $y \in L(\mathfrak{b})$, так что $y \geqslant -\mathfrak{b}$, то $y\lambda$ обращается в нуль на параллелотопе $\Lambda(\mathfrak{a} + (y))$, который содержит $\Lambda(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$, ибо $\mathfrak{a} + (y) \geqslant \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$. Если $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы над k, то $y_1, \lambda, \ldots, y_n\lambda$ тоже линейно независимы. Следовательно,

$$\delta(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \geqslant l(\mathfrak{b}).$$

Пользуясь теоремой 4, находим

$$l(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}) - 1 + g \geqslant$$
$$\geqslant l(\mathfrak{b}) \geqslant \deg(\mathfrak{b}) + 1 - g + \delta(\mathfrak{b}),$$

откуда

$$\deg(\mathfrak{a}) \leqslant l(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + 2g - 2 - \delta(\mathfrak{b}).$$

Возьмем в качестве $\mathfrak{b}$ положительный дивизор очень большой степени. Тогда $L(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) = 0$, потому что у ненулевой функции не может быть больше нулей, чем полюсов. Поскольку $\delta(\mathfrak{b}) \geqslant 0$, мы видим, что $\deg(\mathfrak{a}) \leqslant \leqslant 2g - 2$, т. е. эта степень ограничена, чем наша теорема и доказана.

Теорема 6. *Дифференциалы образуют одномерное K-пространство.*

Доказательство. Допустим, что дифференциалы λ и μ линейно независимы над K. Рассмотрим две системы элементов $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ поля K, линейно независимых над k. Тогда дифференциалы $x_1\lambda, \ldots, x_n\lambda, y_1\mu, \ldots, y_n\mu$ линейно независимы над k. Действительно, иначе имелось бы соотношение

$$\sum a_i x_i \lambda + \sum b_i y_i \mu = 0.$$

Полагая $x = \sum a_i x_i$ и $y = \sum b_i y_i$, мы получили бы $x\lambda + y\mu = 0$, что противоречит независимости λ и μ над K.

Далее, существует параллелотоп $\Lambda(\mathfrak{a})$, на котором λ и μ обращаются в нуль одновременно. В самом деле, если λ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a}_1)$, а μ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a}_2)$, то мы можем положить $\mathfrak{a} = \inf(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ и $\Lambda(\mathfrak{a}) = \Lambda(\mathfrak{a}_1) \cap \Lambda(\mathfrak{a}_2)$. Пусть теперь $\mathfrak{b}$ — произвольный дивизор. Если $y \in L(\mathfrak{b})$, так что $(y) \geqslant -\mathfrak{b}$, то $y\lambda$ обращается в нуль на параллелотопе $\Lambda(\mathfrak{a} + (y))$, содержащем $\Lambda(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$, потому что $\mathfrak{a} + (y) \geqslant \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$. Аналогично $y\mu$ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$. Из замечания в начале доказательства следует тогда, что

$$\delta(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \geqslant 2l(\mathfrak{b}).$$

Пользуясь теоремой 4, находим

$$(*) \quad l(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) - \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}) - 1 + g \geqslant 2l(\mathfrak{b}) \geqslant$$
$$\geqslant 2(\deg(\mathfrak{b}) + 1 - g + \delta(\mathfrak{b})) \geqslant 2\deg(\mathfrak{b}) + 2 - 2g.$$

Если взять в качестве $\mathfrak{b}$ положительный дивизор достаточно большой степени, то пространство $L(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})$ будет состоять только из нуля, потому что функция не может иметь больше нулей, чем полюсов. Так как $\deg(\mathfrak{a})$ в (*) постоянна, мы получаем противоречие, которое и доказывает теорему.

Пусть λ — ненулевой дифференциал. Любой другой дифференциал имеет вид $y\lambda$. Если $\Lambda(\mathfrak{a})$ — максимальный параллелотоп, на котором λ обращается в нуль, то, очевидно, $\Lambda(\mathfrak{a} + (y))$ есть максимальный параллелотоп, на котором $y\lambda$ обращается в нуль. Это позволяет определить некоторый класс линейно эквивалентных дивизоров: если назвать $\mathfrak{a}$ ***дивизором*** (λ) ***дифференциала*** λ, то дивизором дифференциала $y\lambda$ будет $\mathfrak{a} + (y)$. Этот класс дивизоров называется ***каноническим классом*** поля K, а любой дивизор из него называется ***каноническим дивизором***.

Теорема 6 позволяет дополнить теорему 4 информацией о функции $\delta(\mathfrak{a})$; мы в состоянии теперь дать полную формулировку теоремы Римана — Роха.

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *— произвольный дивизор поля* K. *Тогда*

$$l(\mathfrak{a}) = \deg(\mathfrak{a}) + 1 - g + l(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}),$$

где $\mathfrak{c}$ — *любой дивизор из канонического класса. Иными словами,*

$$\delta(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{c}$ — такой дивизор, что $\Lambda(\mathfrak{c})$ является максимальным параллелотопом в ядре ненулевого дифференциала λ. Если $\mathfrak{b}$ — произвольный дивизор и $y \in L(\mathfrak{b})$, то $y\lambda$ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$. Обратно, по теореме 6 любой дифференциал, обращающийся в нуль на $\Lambda(\mathfrak{c}-\mathfrak{b})$, имеет вид $z\lambda$ для некоторого $z \in K$. Но максимальный параллелотоп в ядре $z\lambda$ — это $(z) + \mathfrak{c}$, и он должен содержать $\Lambda(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})$. Поэтому $(z) \geqslant -\mathfrak{b}$, т. е. $z \in L(\mathfrak{b})$. Таким образом, мы доказали, что $\delta(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) = l(\mathfrak{b})$. Дивизор $\mathfrak{b}$ можно было выбирать как угодно. Взяв $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} - \mathfrak{a}$, получим требуемое.

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{c}$ — *канонический дивизор, то* $l(\mathfrak{c}) = g$.

Доказательство. Положим в теореме Римана—Роха $\mathfrak{a} = 0$. Пространство $L(\mathfrak{a})$ состоит только из констант, поэтому $l(\mathfrak{a}) = 1$. Поскольку $\deg(0) = 0$, получаем требуемое.

Следствие 2. *Степень канонического класса равна* $2g - 2$.

Доказательство. Положим в теореме Римана—Роха $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ и воспользуемся следствием 1.

Следствие 3. *Если* $\deg(\mathfrak{a}) > 2g - 2$, *то* $\delta(\mathfrak{a}) = 0$.

Доказательство. Число $\delta(\mathfrak{a})$ равно $l(\mathfrak{c} - \mathfrak{a})$. Так как функция не может иметь больше нулей, чем полюсов, то $L(\mathfrak{c} - \mathfrak{a}) = 0$ при $\deg(\mathfrak{a}) > 2g - 2$.

§ 3. ЗАМЕЧАНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ

Дифференцированием D кольца R называется всякое аддитивное отображение этого кольца в себя, удовлетворяющее обычным правилам дифференцирования: $D(x + y) = Dx + Dy$ и $D(xy) = x\,Dy + y\,Dx$. Например, пусть $k[X]$ — кольцо многочленов над полем k. Дифференцирование $\partial/\partial X$, определенное с помощью обычной формулы, является дифференцированием кольца. Любое дифференцирование очевидным образом продолжается на поле частных: нужно положить $D(u/v) = (v\,Du - u\,Dv)/v^2$.

Мы будем рассматривать дифференцирования поля K. Дифференцирование D называется ***тривиальным***, если $Dx = 0$ для всех $x \in K$. Оно называется *тривиальным* ***над подполем*** k поля K, если $Dx = 0$ для всех $x \in k$. Любое дифференцирование тривиально над простым подполем: $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$, откуда $D(1) = 0$.

Исследуем задачу продолжения дифференцирований. Пусть поле $E = K(x)$ порождено над K одним элементом. Для любого многочлена $f \in K[X]$ обозначим через $\partial f/\partial x$ значение многочлена $\partial f/\partial x$ в точке x. Пусть дано дифференцирование D поля K. Существует ли дифференцирование D^* поля $K(x)$, совпадающее с D на K? Если многочлен $f(x) \in K[X]$ имеет x своим корнем, то любое продолжение D^* должно удовлетворять тождеству

$$(1) \qquad 0 = D^*(f(x)) = f^D(x) + (\partial f/\partial x)\, D^*x,$$

в котором f^D обозначает многочлен, получающийся после применения D ко всем коэффициентам многочлена f. Заметим, что если соотношение (1) выполняется для всех элементов некоторой конечной системы образующих идеала в $K[X]$, состоящего из многочленов, обращающихся в нуль в x, то (1) выполняется и для любого элемента этого идеала. Это немедленно следует из правил дифференцирования.

Указанное необходимое условие существования D^* оказывается и достаточным.

Лемма 1. *Пусть D — дифференцирование поля K, x — любой элемент в некотором расширении поля K и $f(X)$ — образующая идеала многочленов в $K[X]$, обращающихся в нуль в x. Тогда для любого элемента u поля $K(x)$, удовлетворяющего соотношению*

$$0 = f^D(x) + f'(x)\, u,$$

существует единственное дифференцирование D^* поля $K(x)$, совпадающее с D на K и такое, что $D^*x = u$.

Доказательство. Необходимость этого условия на u была показана раньше. Установим достаточность. Пусть $g(x)$, $h(x)$ — многочлены из $K[x]$ и $h(x) \neq 0$. Положим

$$D^*g(x) = g^D(x) + g'(x)u,$$

$$D^*(g/h) = \frac{hD^*g - gD^*h}{h^2}.$$

Без труда проверяется, что так заданное отображение D^* корректно определено и является дифференцированием поля $K(x)$.

Рассмотрим следующие частные случаи. Пусть D — некоторое фиксированное дифференцирование поля K.

Случай 1. Элемент x алгебраичен и сепарабелен над K. Пусть он является корнем неприводимого многочлена $f(X)$ над K. Тогда $f'(x) \neq 0$. Из уравнения $0 = f^D(x) + f'(x)u$ следует, что $u = -f^D(x)/f'(x)$. Значит, D однозначно продолжается на $K(x)$. Если D тривиально на K, то D^* тривиально на $K(x)$.

Случай 2. Элемент x трансцендентен над K. Продолжение D существует, и u можно выбирать в $K(x)$ как угодно.

Случай 3. Элемент x чисто несепарабелен над K, и $x^p - a = 0$, где $a \in K$. Здесь D продолжается в том и только том случае, когда $Da = 0$. В частности, если D тривиально на K, то u можно выбирать как угодно.

Рассматривая эти три случая, мы убеждаемся, что элемент x алгебраичен и сепарабелен над K в том и только том случае, когда любое дифференцирование поля $K(x)$, тривиальное на K, тривиально. В самом деле, если x трансцендентен, мы всегда можем определить дифференцирование, тривиальное на K, но не на x. Если же x алгебраичен, но не сепарабелен, то $K(x^p) \neq K(x)$, так что можно найти дифференцирование, тривиальное на $K(x^p)$, но не на $K(x)$.

Дифференцирования поля K образуют векторное пространство над K, если положить $(zD)(x) = z\,Dx$ для любого $z \in K$.

Пусть K — поле функций (одной переменной) над алгебраически замкнутым полем констант k. Известно, что существует такой элемент $x \in K$, что K сепарабельно над $k(x)$ (см. „Алгебру"). В частности, любое дифференцирование поля K однозначно определяется своим действием на $k(x)$.

Обозначим через $\mathscr{D}$ векторное пространство над K дифференцирований D поля K, тривиальных на k. Имеется спаривание

$$(D, z) \mapsto Dz$$

из $(\mathscr{D}, K)$ в K. Следовательно, каждый элемент z поля K определяет K-линейный функционал на $\mathscr{D}$. Обозначим этот функционал символом dz. Имеем

$$d(yz) = y\,dz + z\,dy,$$
$$d(y + z) = dy + dz.$$

Здесь $y\,dz$ определяется формулой

$$(D, y\,dz) \mapsto y\,Dz.$$

Функционалы dz порождают некоторое подпространство $\mathscr{F}$ пространства, двойственного к $\mathscr{D}$.

Лемма 2. *Пусть K — поле функций (от одной переменной) над алгебраически замкнутым полем k. Тогда $\mathscr{D}$ одномерно над K. Пусть $t \in K$. Поле K сепарабельно над $k(t)$ в том и только том случае, когда dt порождает пространство, двойственное к $\mathscr{D}$ над K.*

Доказательство. Если K сепарабельно над $k(t)$, то любое дифференцирование поля K определяется его действием на t. Если $Dt = u$, то $D = uD_1$, где D_1 — такое дифференцирование, что $D_1 t = 1$. Значит, $\mathscr{D}$ одномерно над K, а dt порождает двойственное пространство. С другой стороны, разбор случаев 2 и 3 теоремы о расширении показывает, что если K не сепарабельно над $k(t)$, то $dt = 0$ и потому dt не может порождать двойственное пространство.

Пространство $\mathscr{F}$, двойственное к $\mathscr{D}$, мы будем называть пространством ***дифференциальных форм*** поля K над k. Таким образом, если K сепарабельно над $k(x)$, то любую дифференциальную форму в K можно записать в виде $y\,dx$.

§ 4. ВЫЧЕТЫ В ПОЛЯХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Результаты этого параграфа будут использованы в качестве вспомогательных лемм при доказательстве того, что сумма вычетов дифференциальной формы в поле функций на кривой равна нулю.

Пусть $k((t))$ — поле степенных рядов с любым (не обязательно алгебраически замкнутым) полем коэффициентов. Если элемент u этого поля имеет вид $a_1t + a_2t^2 + \ldots$, где $a_1 \neq 0$, то, очевидно, $k((u)) = k((t))$. Порядок любого ряда из $k((t))$ будет одним и тем же, вычислять его с помощью u или с помощью t. Всякий элемент порядка 1 будем называть ***(локальным) параметром*** поля $k((t))$.

Наше поле степенных рядов очевидным образом допускает дифференцирование. В самом деле, пусть $y = \sum a_\nu t^\nu$ — ряд из $k((t))$. Немедленно проверяется, что формула $D_t y = \sum \nu a_\nu t^{\nu-1}$ определяет дифференцирование D_t этого поля. Иногда мы будем писать dy/dt вместо $D_t y$. Аналогично можно ввести дифференцирование D_u. Классическая формула дифференцирования сложной функции (цепное правило) $D_u y \cdot D_t u = D_t y$ (или лучше $dy/du \cdot du/dt = dy/dt$) остается верной и здесь, будучи чисто формальным тождеством.

Коэффициент a_{-1} в разложении $y = \sum a_\nu t^\nu$ называется ***вычетом*** *ряда y относительно параметра t* и обозначается через $\operatorname{res}_t(y)$.

Предложение 4. *Пусть x, y — два элемента поля $k((t))$ и u — какой-нибудь другой (отличный от t) параметр этого поля. Тогда*

$$\operatorname{res}_u\left(y\,\frac{dx}{du}\right) = \operatorname{res}_t\left(y\,\frac{dx}{dt}\right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что для любого ряда y из $k((t))$ мы имеем $\mathrm{res}_t(y) = \mathrm{res}_u(y\,dt/du)$. Обе части формулы как функции от ряда y линейны и обращаются в нуль на рядах, имеющих нуль достаточно высокого порядка. Поэтому достаточно установить требуемый результат для $y = t^n$ (где n — любое целое число). Далее, при тривиальной замене параметра $t = au$ (где a—ненулевая константа) наш результат верен тривиальным образом. Следовательно, можно ограничиться случаем $t = u + a_2u^2 + \ldots$, когда $dt/du = 1 + 2a_2u + \ldots$. Нам надо показать, что $\mathrm{res}_u(t^n\,dt/du) = 1$ при $n = -1$ и 0 в остальных случаях.

При $n \geqslant 0$ это утверждение очевидно, ибо $t^n\,dt/du$ не содержит отрицательных степеней t.

При $n = -1$ имеем

$$\frac{1}{t}\frac{dt}{du} = \frac{1 + 2a_1u + \ldots}{u + a_2u^2 + \ldots} = \frac{1}{u} + \ldots,$$

так что вычет равен 1, что и требуется.

При $n < -1$ рассмотрим сперва случай характеристики нуль. В этом случае

$$\mathrm{res}_u(t^n\,dt/du) = \mathrm{res}_u\left(\frac{d}{du}\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right)\right),$$

а это есть нуль при $n \neq -1$.

Наконец, в случае произвольной характеристики имеем для $m = -n > 1$

$$\frac{1}{t^m}\frac{dt}{du} = \frac{1 + 2a_2u + \ldots}{u^m(1 + ma_2u + \ldots)} = \frac{F(a_2, a_3, \ldots)}{u} + \ldots,$$

где $F(a_2, a_3, \ldots)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Он один и тот же для всех полей и зависит лишь от конечного числа коэффициентов a_i. Поэтому общий результат формально следует из случая характеристики нуль, поскольку в этом случае, как мы только что видели, многочлен $F(a_2, a_3, \ldots)$ тождественно равен нулю. Тем самым доказательство завершено.

Предложение 4 позволяет рассматривать выражение $y\,dx$ (где x, y — два ряда) как ***дифференциаль-***

ную форму поля рядов и определить ***вычет*** $\operatorname{res}(y\,dx)$ этой формы как $\operatorname{res}_t(y\,dx/dt)$ (относительно любого параметра t этого поля).

Нам понадобится некоторое обобщение предложения 4. Пусть t — ненулевой ряд из $k((u))$ порядка $m \geqslant 1$. Умножив в случае нужды t на некоторую константу, мы можем написать

$$t = u^m + b_1 u^{m+1} + b_2 u^{m+2} + \ldots = \\ = u^m (1 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots).$$

Поле рядов $k((t))$ вкладывается в $k((u))$. Более того, степень $k((u))$ над $k((t))$ в точности равна m. В самом деле, любой элемент $y \in k((u))$ рекурсивно можно представить в виде

$$y = f_0(t) + f_1(t)\,u + \ldots + f_{m-1}(t)\,u^{m-1},$$

где $f_i(t) \in k((t))$. Элементы $1, u, \ldots, u^{m-1}$ линейно независимы над $k((t))$, потому что относительно дискретного нормирования в поле $k((u))$ элемент u имеет порядок 1, а t — порядок m. Если бы имело место соотношение указанного вида с $y=0$, то какие-нибудь два члена $f_i(t)\,u^i$ и $f_j(t)\,u^j$ с $i \neq j$ должны были бы иметь один и тот же порядок. Но это невозможно, если они ненулевые. Поэтому степень $k((u))$ над $k((t))$ совпадает с m и с индексом ветвления нормирования $k((u))$ над $k((t))$.

В следующем предложении описывается связь между вычетами в полях $k((u))$ и $k((t))$. Символом Tr мы будем обозначать след из $k((u))$ в $k((t))$.

Предложение 5. *Пусть $k((u))$ — поле формальных рядов, t — ненулевой элемент этого поля порядка $m \geqslant 1$ и y — некоторый ряд из $k((u))$. Тогда*

$$\operatorname{res}_u\left(y\,\frac{dt}{du}\,du\right) = \operatorname{res}_t(\operatorname{Tr}(y)\,dt).$$

Доказательство. Как мы видели, степени $1, u, \ldots, u^{m-1}$ образуют базис поля $k((u))$ над $k((t))$ и след любого элемента y из $k((u))$ можно вычислить с помощью матрицы, представляющей умножение на y в этом базисе. Истинность или ложность нашего предложения не меняются от умножения t на ненулевую константу. Поэтому можно считать, что

$$t = u^m + b_1 u^{m+1} + \ldots = u^m (1 + b_1 u + b_2 u^2 + \ldots),$$

где $b_\nu \in k$. Решая это уравнение, получаем

$$u^m = f_0(t) + f_1(t) u + \ldots + f_{m-1}(t) u^{m-1},$$

где $f_i(t)$ — элементы поля $k((t))$, а их коэффициенты являются универсальными многочленами от $b_1, b_2, \ldots$ с *целыми* коэффициентами. Иными словами, каждый ряд $f_i(t)$ можно записать в виде

$$f_i(t) = \sum P_{i\nu}(b) t^\nu,$$

где каждое $P_{i\nu}(b)$ является многочленом с целыми коэффициентами, зависящими только от конечного числа коэффициентов b.

Поэтому общий элемент

$$g_0(t) + g_1(t) u + \ldots + g_{m-1}(t) u^{m-1}$$

поля $k((u))$ представляется матрицей вида

$$\begin{pmatrix} G_{0,1}(t) & \ldots & G_{0,m-1}(t) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ G_{m-1,0}(t) & \ldots & G_{m-1,m-1}(t) \end{pmatrix},$$

где $G_{\nu\mu}(t) \in k((t))$ и коэффициенты $G_{\nu\mu}(t)$ являются универсальными многочленами с целыми коэффициентами от b и коэффициентов многочленов $g_j(t)$. Все это означает, что если доказываемая нами формула справедлива, то она является формальным тождеством, никак не связанным с характеристикой поля k. Поэтому проверку формулы можно производить для случая характеристики 0.

В этом случае имеем $t = v^m$, где $v = u + c_2 u^2 + \ldots$ есть другой параметр поля $k((u))$. Это можно получить с помощью биномиального разложения для $(1 + b_1 u + \ldots)^{1/m}$. Ввиду предложения 4 наша задача сводится к доказательству формулы

$$\operatorname{res}_v\left(y\ \frac{dt}{dv}\,dv\right) = \operatorname{res}_t(\operatorname{Tr}(y)\,dt).$$

В свою очередь, по линейности достаточно проверить ее для $y = v^j$, $-\infty < j < +\infty$. (В самом деле, если порядок y достаточно высок, то обе части, очевидно, обращаются в нуль, а произвольный элемент y можно записать в виде суммы конечного числа членов вида $a_j v^j$ и элемента высокого порядка.)

Положим $j = ms + r$, где $0 \leqslant r \leqslant m-1$. Тогда $v^j = t^s v^r$ и $\operatorname{Tr}(v^j) = t^s \operatorname{Tr}(v^r)$. Тривиальным образом

$$\operatorname{Tr}(v^r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq 0, \\ m, & \text{если } r = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\operatorname{Tr}(v^j) = \begin{cases} mt^s, & \text{если } j = ms, \\ 0, & \text{если } j \not\equiv 0 \bmod m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\operatorname{res}_t(\operatorname{Tr}(v^j)\,dt) = \begin{cases} m, & \text{если } j = -m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С другой стороны, левая часть доказываемой формулы равна $\operatorname{res}_v(v^j m v^{m-1}\,dv)$, что, очевидно, совпадает с только что найденным выражением для правой части. Этим наше предложение доказано.

В предыдущем обсуждении мы рассматривали пару полей степенных рядов, вложенных одно в другое. В заключение этого параграфа мы покажем, что такая ситуация типична.

Пусть $F = k((t))$ — поле степенных рядов над алгебраически замкнутым полем k. Существует каноническая k-значная точка поля F, отображающая t в нуль. Пусть E — конечное алгебраическое расширение поля F. Тогда дискретное нормирование поля F продолжается на E хотя бы одним способом. Поэтому продолжается и наша каноническая точка. Пусть

u — элемент поля E, имеющий порядок 1 относительно продолженного нормирования, также являющегося дискретным. Обозначим через e индекс ветвления. Согласно следствию теоремы 1, имеем $e \leqslant [E:F]$. Покажем, что $e = [E:F]$, так что продолжение канонической точки единственно.

Элемент y поля E, значение которого в продолжении канонической точки конечно, допускает разложение вида $y = a_0 + a_1 u + \ldots + a_{e-1} u^{e-1} + t y_1$, где элемент y_1 принадлежит E и также конечен. Это следует из того, что u^e и t имеют один и тот же порядок относительно продолженного нормирования. Элемент y_1 также имеет аналогичное разложение $y_1 = b_0 + b_1 u + \ldots + b_{e-1} u^{e-1} + t y_2$. Подставив это выражение вместо y_1 в первую формулу и продолжая эту процедуру, получим, что

$$y = f_0(t) + f_1(t) u + \ldots + f_{e-1}(t) u^{e-1},$$

где $f_i(t)$ — степенные ряды из $k((t))$. Поскольку степени $1, u, \ldots, u^{e-1}$, очевидно, линейно независимы над $k((t))$, это доказывает, что $e = [E:F]$ и что продолжение канонической точки единственно.

Далее, каждый элемент из E представляется некоторым степенным рядом $\sum_{\mu=m}^{\infty} a_\mu u^\mu$. Обратно, любой такой ряд отвечает некоторому элементу поля E, потому что всегда можно заменить u^e на ty, где y имеет конечное значение при $u = 0$, и затем рекурсивно определить коэффициенты в $k((t))$ линейной комбинации степеней $1, u, \ldots, u^{e-1}$. Подведем итоги всему доказанному.

Предложение 6. *Пусть $k((t))$ — поле степенных рядов над алгебраически замкнутым полем k. Тогда каноническая k-значная точка поля $k((t))$ единственным способом продолжается на любое конечное алгебраическое расширение поля $k((t))$. Если E — такое расширение и u — элемент первого порядка относительно него, то E можно отождествить с полем формальных рядов $k((u))$ и $[E:F] = e$.*

§ 5. СУММА ВЫЧЕТОВ

Вернемся к глобальной ситуации. Рассмотрим одномерное поле функций K над алгебраически замкнутым полем k. Точки P поля K над k отождествляются с k-значными точками этого поля. Каждая из них определяет вложение поля K в некоторое поле формальных рядов $K_P = k((t))$, как в § 2. Начнем с того, что сравним дифференцирования поля K с дифференцированиями кольца $k((t))$, которые были изучены в § 3.

Теорема 8. *Пусть y — некоторый элемент поля K, $t \in K$ — локальный параметр в точке P и z — элемент поля K, для которого $dy = z\,dt$. Обозначим через dy/dt производную y по t, вычисленную формально, исходя из разложения y в степенной ряд по t. Тогда $z = dy/dt$.*

Доказательство. В формулировке теоремы неявно используется то обстоятельство, что любая дифференциальная форма поля K представляется в виде $z\,dt$ (см. § 3). Известно, что K является сепарабельным алгебраическим расширением поля $k(t)$, а неприводимое соотношение $f(t, y) = 0$ между y, t удовлетворяет условию $f_y(t, y) \neq 0$. С одной стороны, мы имеем

$$0 = f_t(t, y)\,dt + f_y(t, y)\,dy,$$

откуда $z = -f_t(t, y)/f_y(t, y)$ (см. лемму 2 § 3). С другой стороны, дифференцируя соотношение $f(t, y) = 0$ по t в поле степенных рядов, получаем

$$0 = f_t(t, y) + f_y(t, y)\frac{dy}{dt}.$$

Это доказывает нашу теорему.

Пусть ω — дифференциальная форма поля K, P — точка поля K, а t—локальный параметр в этой точке, принадлежащий K. Тогда $\omega = y\,dt$, где $y \in K$. Предложение 4 из § 4 позволяет нам определить ***вычет*** ω ***в точке*** P как вычет формы $y\,dt$ относительно t, т. е.

$$\mathrm{res}_P(\omega) = \mathrm{res}_t(y).$$

Если $\omega = x\,dz$, где $x, z \in K$, то мы будем записывать этот вычет в виде $\operatorname{res}_P(x\,dz)$. Сформулируем теперь основную теорему параграфа.

Теорема 9. *Пусть K — поле функций на некоторой кривой над алгебраически замкнутым полем k и ω — произвольная дифференциальная форма этого поля. Тогда*

$$\sum_P \operatorname{res}_P(\omega) = 0.$$

(Сумма берется по всем точкам P, но в действительности она конечна, ибо множество полюсов дифференциальной формы конечно.)

Доказательство. Рассуждение состоит из двух шагов — сначала для случая поля рациональных функций, затем для общего случая, с использованием предложения 5.

Пусть $K = k(x)$, где элемент x трансцендентен над k. Точки P находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством значений x в $k \cup \{\infty\}$ ($x \mapsto \infty$ означает $1/x \mapsto 0$). Если в точке P значение x конечно, скажем равно $a \in k$, то $x - a$ является локальным параметром в точке P и вычет дифференциальной формы $y\,dx$ совпадает с коэффициентом при $(x-a)^{-1}$ в разложении y по степеням $x - a$. Положение дел здесь точно такое же, как в теории функций одной комплексной переменной.

Представим y в виде суммы элементарных дробей:

$$y = \sum c_{\mu i}/(x - b_\mu)^i + f(x),$$

где $f(x)$ — многочлен из $k[x]$. Сумма вычетов по всем точкам, в которых значение x конечно, равна $\sum\limits_\mu c_{\mu 1}$.

Пусть теперь P — бесконечно удаленная точка. В ней локальным параметром служит $t = 1/x$, и $dx = -(1/t^2)\,dt$. Следовательно, мы должны вычислить коэффициент при $1/t$ в разложении $-y\,(1/t^2)$. Ясно, что слагаемое $(-1/t^2)f(1/t)$ дает нулевой вклад. Остальные слагаемые приводят к разложению[1])

$$-\frac{1}{t^2}\sum_{\mu,\,i}\frac{c_{\mu i}}{(1/t-b_\mu)^i}=-\sum_{\mu,\,i}c_{\mu i}t^{i-2}(1+tb_\mu+\ldots)^i.$$

Вклад в вычет дают лишь первые члены под знаком суммы, и вклад этот равен $-\sum c_{\mu 1}$, чем и завершено доказательство для случая чисто трансцендентных полей.

Пусть теперь K—конечное сепарабельное алгебраическое расширение чисто трансцендентного поля $F=k(x)$ размерности 1 над алгебраически замкнутым полем констант k. Пусть Q—некоторая точка поля F и t — локальный параметр поля F в Q. Пусть, далее, P — некоторая точка поля K, лежащая над Q, и u—локальный параметр точки P в поле K. Порядки t и u относительно дискретного нормирования точки P, продолжающего нормирование точки Q, связаны между собой соотношением $\operatorname{ord}_P t=e\cdot\operatorname{ord}_P u$. Поле степенных рядов $k((u))$ является конечным расширением степени e поля $k((t))$. Таким образом, каждая точка P определяет некоторое вложение поля K в конечное алгебраическое расширение поля $k((t))$, и точка P поля K отвечает канонической точке поля рядов $k((u))$.

Пусть P_i $(i=1,\ldots,s)$ — все точки поля K, лежащие над Q. Обозначим через A алгебраическое замыкание поля $k((t))$. Дискретное нормирование поля $k((t))$ однозначно продолжается до нормирования поля A, которое дискретно на любом подполе, конечном над $k((t))$ (предложение 6 § 4). Пусть расширение $K=F(y)$ порождено одним элементом y — корнем неприводимого многочлена $g(Y)$ со старшим коэффициентом 1 над F. Над полем $k((t))$ этот многочлен разлагается на неприводимые множители

$$g(Y)=g_1(Y)\ldots g_r(Y), \tag{1}$$

[1]) При записи деления с помощью косой черты операция деления пользуется приоритетом перед операциями сложения и вычитания, так что, например, $1/t-b$ означает $(1/t)-b$, а не $1/(t-b)$. — *Прим. ред.*

скажем, степеней d_j ($j=1, \ldots r$). Пусть y_j — один из корней многочлена $g_j(Y)$. Отображение $y \longmapsto y_j$ индуцирует вложение поля K в A. Два корня одного и того же множителя g_j сопряжены над $k((t))$, и соответствующие им вложения поля K сопряжены. Из теоремы о единственности продолжения нормирования следует, что такие вложения индуцируют одинаковые нормирования на K. Степень $k((t))(y_j)$ равна индексу ветвления d_j соответствующего нормирования, и из (1) видно, что $\sum d_j = n$. Теорема 2 § 2 показывает теперь, что разные множители g_j отвечают разным нормированиям на K и что $s=r$. Поэтому поля $k((t))(y_j)$ можно отождествить с полями K_{P_i}:

Для каждого $i=1, \ldots, r$ обозначим через Tr_i след из поля K_{P_i} в поле F_Q.

Предложение 7. *Пусть* Tr—*след из поля K в поле F. Тогда для любого элемента $y \in K$*

$$\mathrm{Tr}(y) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}_i(y).$$

Доказательство. Пусть y порождает K над F. Если $[K:F]=n$, то $\mathrm{Tr}(y)$ есть коэффициент при Y^{n-1} в неприводимом многочлене $g(Y)$, корнем которого является y. Аналогично вычисляются локальные следы, и формула (1) делает наше утверждение очевидным. Если y не порождает все поле K над F, то выберем некоторый порождающий элемент z. Для подходящей константы $c \in k$ элемент $w = y + cz$ также порождает K над F. Так как интересующая нас формула истинна для cz и w и линейна по y, она истинна и для y, что и требовалось установить.

Следующее предложение позволяет свести доказываемую нами теорему 9 (для произвольных полей функций K) к случаю $K = k(x)$.

Предложение 8. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле. Обозначим через $F = k(x)$ чисто трансцен-*

дентное одномерное расширение, а через K — конечное алгебраическое сепарабельное расширение поля F. Пусть Q — некоторая точка поля F и P_i $(i = 1, \ldots, r)$ — точки поля K, лежащие над Q. Обозначим через y произвольный элемент поля K, и пусть Tr *— след из поля K в поле F. В таком случае*

$$\operatorname{res}_Q (\operatorname{Tr}(y)\, dx) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{res}_{P_i} (y\, dx).$$

Доказательство. Пусть t — локальный параметр точки Q в поле $k(x)$, u_i — локальный параметр точки P_i в поле K. Обозначим через Tr_i локальный след из K_{P_i} в F_Q. Имеем

$$\sum \operatorname{res}_{P_i} (y\, dx) = \sum \operatorname{res}_{P_i} \left(y \frac{dx}{dt} dt \right) = \\ = \sum \operatorname{res}_{P_i} \left(y \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du_i} du_i \right).$$

Предложение 5 § 4 позволяет записать последнее выражение в виде

$$\sum \operatorname{res}_Q \left(\operatorname{Tr}_i \left(y \frac{dx}{dt} \right) dt \right).$$

Так как множитель dx/dt лежит в поле $k(x)$, его можно вынести за знак следа, и мы приходим к тождеству

$$\sum \operatorname{res}_Q \left(\operatorname{Tr}_i (y) \frac{dx}{dt} dt \right) = \sum \operatorname{res}_Q (\operatorname{Tr}_i (y)\, dx) = \\ = \operatorname{res}_Q \left(\sum \operatorname{Tr}_i (y)\, dx \right) = \operatorname{res}_Q \operatorname{Tr}(y)\, dx,$$

чем наше предложение и доказано.

Теорема 9 следует из него немедленно, потому что любую дифференциальную форму можно записать в виде $y\,dx$, где элемент x таков, что поле K сепарабельно алгебраично над $k(x)$.

Доказанная теорема позволяет нам отождествить дифференциальные формы поля функций K с дифференциалами, которые были введены в § 2 как k-линейные функционалы на кольце A аделей, обращающиеся в нуль на K и некотором подходящем множестве $\Lambda(\mathfrak{a})$. Это делается следующим способом. Пусть $\xi = (\ldots, \xi_P, \ldots)$ — некоторый адель, и пусть $y\,dx$ — дифференциальная форма поля K. Тогда отображение

$$\lambda : \xi \longmapsto \sum_P \operatorname{res}_P (\xi_P y\,dx)$$

определено на A, k-линейно и принимает значения в k. В выражении $\operatorname{res}_P(\xi_P y\,dx)$ элементы y и x рассматриваются, конечно, как элементы поля K_P. Ясно, что все члены суммы, кроме конечного числа, обращаются в нуль.

Так как множество полюсов любой дифференциальной формы конечно, определенное выше отображение обращается в нуль на подходящем множестве $\Lambda(\mathfrak{a})$. Из теоремы 9 следует, что оно обращается в нуль и на K. Поэтому оно является дифференциалом. Мы определили вложение K-пространства дифференциальных форм в K-пространство дифференциалов. Так как оба пространства одномерны над K (последнее — в силу теоремы 6 § 2), это вложение является изоморфизмом.

Пусть $y\,dx$ — некоторая дифференциальная форма поля K. Для любой точки P поля нетрудно определить порядок $y\,dx$ в P. С этой целью обозначим через t некоторый элемент первого порядка относительно P. В поле степенных рядов $k((t))$ элемент $y\,dx/dt$ имеет порядок m_P, не зависящий от выбора t. Назовем число m_P порядком формы $y\,dx$ в точке P и определим ***дивизор формы*** $y\,dx$ как

$$(y\,dx) = \sum m_P P.$$

Пусть $\operatorname{ord}_P(y\,dx) = m_P$. Если $\operatorname{ord}_P(\xi_P) \geqslant -m_P$, то

$$\operatorname{ord}_P(\xi_P y\,dx) \geqslant 0,$$

так что вычет $\operatorname{res}_P(\xi_P y\,dx)$ равен нулю. Поэтому дифференциал λ обращается в нуль на $\Lambda(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a} = (y\,dx)$.

С другой стороны, пусть $\Lambda(\mathfrak{b})$ максимальный параллелотоп, на котором λ обращается в нуль. Тогда $\Lambda(\mathfrak{b}) \supset \Lambda(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{a}$. Если $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$, то для подходящей точки P коэффициент при P в $\mathfrak{b}$ больше m_P и адель

$$(\ldots 0, 0, 1/t^{m_P+1}, 0, 0 \ldots)$$

лежит в $\Lambda(\mathfrak{b})$. Но из определений ясно, что

$$\operatorname{res}_P (t^{-m_P-1}\, y\, dx) \neq 0,$$

так что λ не может обращаться в нуль на $\Lambda(\mathfrak{b})$. Подытожим наши рассмотрения:

Теорема 10. *Пусть K — одномерное функциональное поле над алгебраически замкнутым полем констант. Любая дифференциальная форма $y\,dx$ поля K определяет дифференциал*

$$\lambda : \xi \mapsto \sum \operatorname{res}_P (\xi_P\, y\, dx).$$

Это отображение индуцирует K-изоморфизм K-пространства дифференциальных форм с K-пространством дифференциалов. Дивизоры $(y\,dx)$ и (λ) (определение последнего см. в § 2) совпадают между собой.

§ 6. ФОРМУЛА ГУРВИЦА ДЛЯ РОДА

Эта формула связывает род поля с родом его конечного расширения и индексами ветвления.

Теорема 11. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле, K — поле функций над k и E — конечное сепарабельное расширение поля K степени n. Обозначим через g_E и g_K роды полей E и K соответственно. Предположим, что для любой точки P поля K и любой точки Q поля E, лежащей над P, индекс ветвления e_Q не делится на характеристику поля k. Тогда*

$$2g_E - 2 = n(2g_K - 2) + \sum_Q (e_Q - 1).$$

Доказательство. Пусть ω — ненулевая дифференциальная форма поля K. Как мы уже знаем, ее степень равна $2g_K - 2$. Запишем ее в виде $y\,dx$, где x, $y \in K$. Рассматривая x, y как элементы поля E, мы можем вычислить степень этой формы в E, а сравнив эти две степени, мы получим формулу Гурвица.

Пусть P — точка поля K, и пусть t — локальный параметр в P, т. е. элемент порядка 1 в P из поля K. Пусть u — локальный параметр в точке Q. Тогда $t = u^e v$, где v единица в Q. Далее, $dt = u^e\,dv + eu^{e-1}v\,du$. Поэтому

$$\operatorname{ord}_Q(y\,dx) = e_Q \operatorname{ord}_P(y\,dx) + (e_Q - 1).$$

Суммируя по всем точкам Q, лежащим над P, и затем по всем P, получаем требуемое.

Замечание. Можно было бы работать непосредственно с дифференциалами как функционалами на аделях, рассматривая композицию E/K-следа с K-дифференциалом как E-дифференциал. Мы получили бы аналогичную формулу, связывающую дивизоры двух дифференциалов и их степени. Такой подход естественно приводит к понятию дифференты, как в теории алгебраических чисел.

§ 7. КРИВЫЕ РОДА 0 И 1

Теорема Римана — Роха позволяет дать простые модели кривых рода 0 и 1.

Пусть K — поле функций рода 0, P — некоторая его точка. Согласно теореме Римана — Роха, в пространстве $L(P)$ существует непостоянная функция x, потому что

$$l(P) = 1 + 1 - 0 + 0 = 2,$$

а константы образуют одномерное подпространство в $L(P)$. Покажем, что $K = k(x)$. В самом деле, x имеет в P свой единственный полюс порядка 1, а степень $[K : k(x)]$ равна степени дивизора полюсов x, т. е. 1. Следовательно, K — поле рациональных функций от x.

Пусть теперь K — поле функций рода 1, P — его точка. Так как $2g - 2 = 0$, теорема Римана — Роха показывает, что $L(P)$ состоит только из констант.

Однако, $\deg(2P) = 2$, так что

$$l(2P) = 2 + 1 - 1 = 2,$$

поэтому в K есть функция с полюсом второго порядка в точке P и без других полюсов. Далее,

$$l(3P) = 3 + 1 - 1 = 3,$$

так что в K существует функция y с полюсом третьего порядка в P и без дальнейших полюсов. Семь функций $1, x, x^2, x^3, xy, y, y^2$ должны быть линейно зависимы, потому что все они лежат в $L(6P)$ и

$$l(6P) = 6 + 1 - 1 = 6.$$

В соотношении, дающем эту линейную зависимость, коэффициент при y^2 не может обращаться в нуль — иначе оказалось бы, что $y \in k(x)$, а это невозможно, ибо функции из $k(x)$ могут иметь в точке P полюсы только четного порядка.

Так как степень дивизора полюсов функции x равна 2, имеем $[K : k(x)] = 2$. Аналогично $[K : k(y)] = 3$. Поскольку y не лежит в $k(x)$, а строго промежуточного поля между K и $k(x)$ не существует, получаем отсюда $K = k(x, y)$.

Далее, линейное соотношение между выписанными выше семью функциями можно записать в виде

$$y^2 = c_1 y + c_2 xy + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6.$$

В случае когда характеристика поля k отлична от 2 и 3, несложная замена переменных позволяет привести это соотношение к виду

$$y^2 = 4x^3 - c_2 x - c_3,$$

хорошо известному в теории эллиптических функций.

В качестве несложного упражнения мы предлагаем читателю доказать, что, и обратно, кубическое уравнение такого вида определяет поле функций рода 1, если оно неособо, т. е. если кубический многочлен справа не имеет кратных корней.

ГЛАВА II

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. ЛОКАЛЬНАЯ УНИФОРМИЗАЦИЯ

Предполагается, что все рассматриваемые поля имеют характеристику нуль.

Пусть K — поле функций одной переменной над полем k. Это означает, что K конечно порождено над k и имеет степень трансцендентности 1. Если $K = k(x, y)$, где x, y — две образующие, то пару (x, y) можно рассматривать как общую точку плоской кривой, определенной уравнением $f(X, Y) = 0$, где f — неприводимый многочлен, задающий соотношение между x, y и определенный с точностью до постоянного множителя. Точка плоскости (a, b) лежит на этой кривой в том и только том случае, когда $f(a, b) = 0$. Назовем ее ***неособой*** (или ***простой***) точкой, если[1]) $D_2 f(a, b) \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{o}$ — дискретно нормированное кольцо поля K, содержащее k. Его максимальный идеал $\mathfrak{m}$ является главным, и любая его образующая называется ***локальным параметром*** кольца $\mathfrak{o}$ или идеала $\mathfrak{m}$. Предположим, что поле классов вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ совпадает с k. Пусть $\varphi\colon \mathfrak{o} \to \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ — каноническое отображение. Если $K = k(x, y)$ и $x, y \in \mathfrak{o}$, то, положив $a = \varphi(x)$, $b = \varphi(y)$, мы убеждаемся, что точка (a, b) лежит на кривой с общей точкой (x, y). Мы можем продолжить φ на все K, положив $\varphi(z) = \infty$ для $z \in K$, $z \notin \mathfrak{o}$. Отображение φ будем называть ***точкой*** *поля* K (над k). Мы будем говорить, что точка кривой (a, b) *индуцирована* этой точкой поля.

Теорема о локальной униформации. *Пусть K — поле функций одной переменной над полем k.*

---

[1]) Ниже D_2 обозначает оператор дифференцирования по второй переменной. — *Прим. ред.*

(1) *Предположим, что $K = k(z, y)$, где пара (x, y) удовлетворяет неприводимому полиномиальному соотношению $f(X, Y) = 0$ над k. Пусть $a, b \in k$ таковы, что $f(a, b) = 0$, но $D_2 f(a, b) \neq 0$. Тогда существует единственная точка φ поля K над k, для которой $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$. Если $\mathfrak{o}$ — соответствующее ей дискретно нормированное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то $x - a$ является образующей $\mathfrak{m}$.*

(2) *Обратно, пусть $\mathfrak{o}$ — содержащее k дискретно нормированное кольцо поля K с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, такое, что $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = k$. Пусть x — некоторая образующая идеала $\mathfrak{m}$. Тогда существует такой элемент $y \in \mathfrak{o}$, что $K = k(x, y)$ и точка, индуцированная на соответствующей кривой, простая.*

Доказательство. Чтобы установить первое утверждение, мы покажем, что любой ненулевой элемент $g(x, y) \in k[x, y]$ можно записать в виде

$$g(x, y) = (x - a)^{\nu} \frac{A(x, y)}{B(x, y)},$$

где A, B — многочлены и $B(a, b) \neq 0$. Отсюда будет следовать, что кольцо $\mathfrak{o}$, состоящее из всевозможных отношений многочленов $g_1(x, y)/g_2(x, y)$ с $g_2(a, b) \neq 0$, дискретно нормировано, а $x - a$ является образующей максимального идеала в нем, если $D_2(a, b) \neq 0$.

В случае $g(a, b) \neq 0$ результат очевиден. Пусть $g(a, b) = 0$. Положим

$$g(a, Y) = (Y - b)\, g_1(Y), \quad g_1(Y) \in k[Y],$$
$$f(a, Y) = (Y - b)\, f_1(Y), \quad f_1(Y) \in k[Y].$$

Тогда $f_1(b) \neq 0$, потому что $D_2 f(a, b) \neq 0$. Следовательно,

$$g(a, Y)\, f_1(Y) = f(a, Y)\, g_1(Y).$$

Отсюда находим

$$g(X, Y)\, f_1(Y) - f(X, Y)\, g_1(Y) = (X - a)\, A_1(X, Y),$$

где A_1 — некоторый многочлен. Стало быть,

$$g(x, y) = (x - a)\, A_1(x, y)/f_1(y).$$

Если $A_1(a, b) \neq 0$, то представление нужного вида найдено. Если же нет, то повторим процедуру. Это не может продолжаться до бесконечности. Действительно, мы знаем, что некоторая точка поля K, индуцирующая данную точку кривой, существует, и функция $g(x, y)$ не может иметь бесконечный порядок в дискретно нормированном кольце, отвечающем этой точке.

Для доказательства обратного утверждения (2) представим K в виде $K = k(x, z)$, где элемент z цел над кольцом $k[x]$. Обозначим через $z = z_1, \ldots, z_n$ $(n \geqslant 2)$ все сопряженные к z над $k(x)$ и расширим $\mathfrak{o}$ до нормированного кольца $\mathfrak{O}$ в поле $k(x, z_1, \ldots, z_n)$. Рассмотрим разложение z в формальный ряд с коэффициентами $a_i \in k$

$$z = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + \ldots$$

и положим

$$P_r(x) = a_0 + \ldots + a_r x^r.$$

Рассмотрим, далее, элементы

$$y_i = \frac{z_i - P_r(x)}{x^r}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Если r достаточно велико, то y_1 не имеет полюса в $\mathfrak{O}$, а $y_2, \ldots, y_n$ имеют. Все $y_1, \ldots, y_n$ сопряжены над $k(x)$. Обозначим через $f(X, Y)$ неприводимый многочлен над k, которому удовлетворяет пара (x, y). Тогда

$$f(x, Y) = \psi_n(x) Y^n + \ldots + \psi_0(x).$$

При этом $\psi_i(0) \neq 0$ для некоторого i, иначе многочлен $f(X, Y)$ делился бы на некоторую степень X. Перепишем $f(x, Y)$ в виде

$$f(x, Y) = \psi_n(x)\, y_2 \ldots y_n (Y - y_1)\left(\frac{1}{y_2} Y - 1\right) \ldots$$
$$\ldots \left(\frac{1}{y_n} Y - 1\right).$$

Коэффициент

$$u = \psi_n(x)\, y_2 \ldots y_n$$

не может иметь полюса в кольце $\mathfrak{D}$ (иначе мы бы пришли к противоречию, разделив оба выражения для $f(x, Y)$ на этот коэффициент и сравнив результаты $\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}$). Обозначим переход к классу вычетов в $\mathfrak{o}\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{m}$ чертой сверху. Тогда

$$0 \neq f(\bar{x}, Y) = (-1)^{n-1}\bar{u}(Y - \bar{y}_1).$$

По предположению $\bar{x} = a = 0$. Пусть $y = y_1$ и $\bar{y} = b$. Тогда

$$D_2 f(a, b) = (-1)^{n-1}\bar{u} \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть K — конечное расширение поля $k(x)$. Тогда лишь конечное число нормирований поля $k(x)$ над k разветвлены в K.*

Доказательство. На кривой $f(X, Y) = 0$ имеется только конечное число точек с $D_2 f(a, b) = 0$, и кроме того, имеется лишь конечное число колец нормирования поля K, не содержащих x (т. е. таких, в которых x имеет полюс).

§ 2. ТОПОЛОГИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Предположим теперь, что k — локально компактное поле. Можно показать, что тогда k — либо комплексное, либо вещественное, либо p-адическое поле. Точка P поля K называется ***k*-рациональной**, если поле классов вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ее кольца совпадает с k. Теорема о локальной униформизации показывает, как отождествлять такие точки поля с неособыми точками плоских кривых. Обозначим через R множество всех k-рациональных точек поля K над k и назовем его ***римановой поверхностью*** поля K над k. Элементы поля K можно рассматривать как функции на R. Для всякой точки $P \in R$ обозначим через $\mathfrak{o}_P$ кольцо нормирования, отвечающее P, а через $\mathfrak{m}_P$ — его максимальный идеал. Для $z \in \mathfrak{o}_P$ пусть $z(P)$ обозначает класс вычетов $z\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_P$, так что $z(P) \in k$. Для $z \notin \mathfrak{o}_P$ положим $z(P) = \infty$. Элементы поля k являются постоянными функциями, и других постоянных функций не существует[1]). Если $z(P)=0$, то мы говорим, что z имеет в точке P ***нуль***, а если $z(P)=\infty$, то ***полюс***.

Для любого элемента $x\in K$ пусть $\Gamma_x=\{k,\infty\}$ — гауссова сфера над k, т. е. компактное пространство, полученное присоединением к k бесконечно удаленной точки. Положим

$$\Gamma=\prod_{x\in K}\Gamma_x.$$

Существует очевидное вложение R в Γ: точка P переходит в вектор $\prod x(P)$. Введем на R топологию, индуцированную этим вложением. Иными словами, это слабейшая топология, в которой все функции $x\in K$ непрерывны.

Произведение Γ *компактно. Мы утверждаем, что риманова поверхность* R *замкнута в* Γ. *Отсюда следует, что она сама компактна.*

Доказательство. Пусть точка $(a_x)_{x\in K}$ лежит в замыкании R. Обозначим через $\mathfrak{o}$ множество тех элементов $x\in K$, для которых $a_x\neq\infty$. Покажем, что $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования, а соответствующая ему точка P такова, что $x(P)=a_x$ для всех x. Это нетрудно. Заметим прежде всего, что $k\subset\mathfrak{o}$, потому что $a(P)=a$ для всех $a\in k$ и $P\in R$. Пусть теперь $x, y\in\mathfrak{o}$. Тогда a_x, $a_y\neq\infty$. По предположению существуют такие точки $P\in R$, что значения $x(P)$, $y(P)$ сколь угодно близки к a_x, a_y соответственно. Для таких точек P имеем $x(P)$, $y(P)\neq\infty$, так что $(x+y)(P)\neq\infty$. Следовательно, $x+y\in\mathfrak{o}$. Аналогично $x-y$ и xy лежат в $\mathfrak{o}$, так что $\mathfrak{o}$ является кольцом. Далее, $x\mapsto a_x$ есть гомоморфизм $\mathfrak{o}$ в k, тождественный на k; это следует, как и выше, из соображений непрерывности. Наконец, $\mathfrak{o}$ — кольцо нормирования. В самом деле, пусть $x\notin\mathfrak{o}$. Тогда $a_x=\infty$. Положим $y=x^{-1}$. Существует такая точка $P\in R$, что $x(P)$ сколь угодно

[1]) Здесь неявно предполагается, что риманова поверхность R непуста и потому бесконечна. — *Прим. перев.*

близко к a_x, а $y(P)$ — к a_y. Так как $x(P)$ близко к бесконечности, то $y(P)$ близко к нулю. Значит, $a_y = 0$, так что $y \in \mathfrak{o}$. Доказательство окончено.

Пусть $P \in R$ — некоторая точка и t — некоторая образующая максимального идеала $\mathfrak{m}_P$, т. е. локальная униформизирующая в точке P. Покажем, что *отображение*

$$Q \mapsto t(Q)$$

доставляет топологический изоморфизм некоторой окрестности точки P на некоторую окрестность нуля в k.

Согласно теореме о локальной униформации, существуют такие образующие t, y поля K, что точка P представляется простой точкой кривой с координатами (a, b) из k, причем даже $a = 0$. Разложим многочлен $f(0, Y)$ на линейные множители в алгебраическом замыкании $\bar{k}$ поля k. Тогда b является корнем кратности единица, так что

$$f(0, Y) = (Y - b)(Y - b_2)^{e_2} \ldots (Y - b_r)^{e_r}.$$

Корни многочлена непрерывно зависят от его коэффициентов. Поэтому существует такая окрестность U нуля в k, что для любого элемента $\bar{t} \in U$ многочлен $f(\bar{t}, Y)$ имеет в $\bar{k}$ в точности один однократный корень, близкий к b в $\bar{k}$. Привлекая теперь, скажем, метод Ньютона и начиная с b в качестве приближенного корня, мы можем установить, что при достаточно малых b этот близкий к b корень лежит уже в k. Следовательно, отображение $Q \mapsto t(Q)$ инъективно на множестве тех точек Q, для которых точка кривой $(t(Q), y(Q))$ достаточно близка к $(0, b)$. Учитывая, что топология поверхности R определена посредством функций из K и что поле k локально компактно, мы заключаем, что для достаточно малых U отображение $Q \mapsto t(Q)$ определяет топологический изоморфизм U с некоторой окрестностью нуля в k.

Мы можем выбрать U так, чтобы $t(U)$ было диском в t-плоскости [1]). Заметим, что теорема о локаль-

[1]) Терминология, естественная для **C**, переносится на общий случай. — *Прим. перев.*

ной униформизации показывает, что если точка Q близка к P, то $t-t(Q)$ является локальным униформизирующим параметром в точке Q, так как необращение в нуль частных производных обеспечено непрерывностью. Иными словами, если $D_2 f(a, b) \neq 0$, то $D_2 f(a', b') \neq 0$ для всех точек (a', b'), достаточно близких к (a, b).

Теорема 1. *Взятые в качестве карт описанные выше диски на t-плоскостях в совокупности с отображениями, доставляемыми локальными параметрами, определяют на R структуру аналитического многообразия.*

Доказательство. Пусть $P \in R$ и t, u — два локальных параметра в точке P. Тогда t можно разложить в ряд по степеням u:

$$t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i.$$

Несложные оценки с использованием алгебраичности t над $k(u)$ показывают, что этот ряд сходится в некоторой окрестности начала. Следовательно,

$$t(Q) = \sum a_i u(Q)^i$$

для точек Q, близких к нулю в t-плоскости. Это означает, что функция перехода от одной карты к другой голоморфна.

Теорема 1 верна для комплексных, вещественных и p-адических полей k. *Начиная с этого места, мы будем считать, что k есть поле комплексных чисел* **C**.

Мы располагаем понятием мероморфной функции на R; локально (в окрестности любой точки) это — отношение двух голоморфных функций. Любую такую функцию f в окрестности точки P можно представить рядом

$$f(Q) = \sum b_i t(Q)^i,$$

в котором t означает локальный параметр в P и только конечное число членов с отрицательными степенями не обращается в нуль. Таким образом, f

можно рассматривать как элемент поля формальных рядов $K_P \approx \mathbf{C}((t))$, а также как адель, ибо в силу компактности R число полюсов функции f конечно.

Теорема 2. *Всякая мероморфная функция на R принадлежит K.*

Доказательство. Пусть L — поле мероморфных функций на R. Если $L \neq K$, то размерность $(L:K)_{\mathbf{C}}$ факторпространства $L \bmod K$ над $\mathbf{C}$ должна быть бесконечной. Обозначим через Λ_1 единичный параллелотоп, состоящий из аделей, целых во всех точках P. Тогда имеем

$$(L:K)_{\mathbf{C}} = (L + \Lambda_1 : K + \Lambda_1)_{\mathbf{C}} + (L \cap \Lambda_1 : K \cap \Lambda_1)_{\mathbf{C}}.$$

В нашем доказательстве теоремы Римана — Роха по Вейлю было показано, что первое слагаемое справа конечно. Второе обращается в нуль, ибо функция без полюсов постоянна (по принципу максимума). Получили противоречие.

Теорема 3. *Риманова поверхность связна.*

Доказательство. Пусть S — связная компонента нашей поверхности. Пусть $P \in S$, а $z \in K$ — функция, имеющая в P единственный полюс (она существует в силу теоремы Римана — Роха). Тогда на любой другой компоненте римановой поверхности функция z голоморфна и не имеет полюсов и, значит, постоянна. Пусть c — ее значение. Тогда $z - c$ имеет бесконечно много нулей, что невозможно в силу компактности R и S.

Теорема 4. *Пусть $z \in K$ — непостоянная функция. Точки поля K индуцируют точки поля $\mathbf{C}(z)$, чем определяется некоторое отображение поверхности R в z-сферу S_z. Это отображение является разветвленным топологическим накрытием. Алгебраический индекс ветвления e_P в произвольной точке P поверхности R совпадает с топологическим индексом ветвления, а число листов накрытия равно*

$$n = [K : \mathbf{C}(z)].$$

Доказательство. Пусть P — точка поверхности R, t — параметр в этой точке. Тогда P индуцирует точку $z=a$ на z-сфере, а t^e есть произведение $z-a$ на единицу в кольце формальных рядов $\mathbf{C}[[t]]$. Так как в поле $\mathbf{C}$ можно извлекать корни, мы можем найти такой локальный параметр u в точке P на R, что $u^e = z - a$, где $a = z(P)$. Отображение

$$u(Q) \longmapsto u(Q)^e = z(Q) - a$$

является e-кратным накрытием подходящего диска V_a с центром в a на z-сфере посредством диска V_P с центром P. Назовем такой диск ***регулярным*** для P. Мы показали, что топологический индекс ветвления равен e. Число листов накрытия совпадает с n, потому что лишь конечное число точек сферы S_z ветвятся в K, а остальные вполне распадаются на n точек (в силу формулы $\sum e_i = n$).

Теорема 5. *Риманова поверхность триангулируема и ориентируема.*

Доказательство. Мы построим специальную триангуляцию поверхности R, которая будет полезна и при доказательствах других теорем. Пусть z — непостоянная функция из K. Рассмотрим такую триангуляцию z-сферы S_z, что каждая точка сферы, разветвленная в K, принадлежит к числу вершин триангуляции (можно просто добавить эти точки к вершинам выбранной заранее триангуляции). Достаточно мелкое подразделение такой триангуляции будет обладать следующими свойствами.

Если Δ — треугольник в S_z, у которого все вершины неразветвлены, то Δ содержится в некоторой регулярной окрестности своей внутренней неразветвленной точки.

Если Δ — треугольник с разветвленной вершиной Q, то $\Delta < V_Q$.

Теперь мы можем поднять эту триангуляцию на R. Прежде всего, каждая вершина имеет своим прообразом несколько точек поверхности R, и каждый треугольник Δ без разветвленных вершин имеет своим прообразом n однозначно определенных треугольников в R.

Пусть Q — точка поверхности R, лежащая над разветвленной точкой q сферы S_z. Обозначим через m ее индекс ветвления, а через t — какой-нибудь параметр в Q. При подходящем m отображение

$$V_Q \to V_q$$

будет задаваться формулой

$$t \mapsto t^m = z - a.$$

У каждой точки $z - a = re^{i\theta}$ есть m прообразов:

$$t = r^{1/m} \exp\left(\frac{i\theta}{m} + \frac{2\pi i\nu\theta}{m}\right), \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, каждый треугольник Δ с вершиной q поднимается m способами до треугольника с вершиной Q.

При доказательстве ориентируемости мы можем считать, что любые два треугольника нашей триангуляции с общей стороной и без разветвленных вершин содержатся в некотором подходящем регулярном диске и что если Δ имеет разветвленную вершину q, а Δ_1 имеет с Δ'общую сторону, то оба треугольника Δ и Δ_1 содержатся в V_q.

Ориентируем треугольники на S_z так, чтобы на каждом ребре два соседних треугольника индуцировали противоположные ориентации. Если треугольник $\tilde{\Delta}$ на R проектируется на Δ, то снабдим $\tilde{\Delta}$ и его стороны той же ориентацией, что и Δ. Усиленные требования на мелкость триангуляции позволяют проверить, что таким образом ориентация S_z поднимается на R. Следовательно, поверхность R ориентируема. Теорема доказана.

Пусть теперь V, E и T — число вершин, ребер и треугольников в выбранной триангуляции z-сферы. Те же обозначения со штрихами будут относиться к подъему этой триангуляции на R. Тогда имеем

$$E' = nE, \quad T' = nT.$$

С другой стороны, пусть r — количество разветвленных точек p поля $\mathbf{C}(z)$, а n_p — количество точек P поля K, лежащих над точкой p [1]). Тогда

$$V' = n(V - r) + \sum_p n_p,$$

где сумма взята по всем разветвленным точкам. Поэтому

$$V' = nV - nr + \sum_p n_p = nV + \sum_p (n_p - n) =$$
$$= nV - \sum_p \sum_{P \mid p} (e_P - 1) = nV - \sum_P (e_P - 1),$$

где последнее суммирование производится по всем точкам P поля K.

Используя этот результат, докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть g — топологический род поверхности R. Тогда*

$$2g - 2 = -2n + \sum_P (e_P - 1).$$

Доказательство. Обозначим через χ_z эйлерову характеристику сферы S_z, а через χ_R — эйлерову характеристику нашей поверхности R. Имеем $\chi_z = B_0 - B_1 + B_2$, где B_i есть i-е число Бетти. Но $B_0 = B_2 = 1$, $B_1 = 0$, так что $\chi_z = 2$. Следовательно, $V - E + T = 2$.

С другой стороны, $\chi_R = V' - E' + T'$ и по нашему предыдущему результату

$$\chi_R = nV - \sum (e_P - 1) - nE + nT = n\chi_z - \sum (e_P - 1).$$

Поскольку $B'_0 = B'_2 = 1$, а $B'_1 = 2g$, последнее выражение равно $2 - 2g$, откуда

$$2g - 2 = -2n + \sum (e_P - 1),$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) Тот факт, что точка P лежит над точкой p, записывается ниже так: $P \mid p$. — *Прим. ред.*

Следствие. *Алгебраический род совпадает с топологическим.*

Доказательство. Оба вычисляются по одной и той же формуле.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Как и выше, K обозначает поле функций над $\mathbf{C}$, а R — его риманову поверхность.

Пусть U — открытое подмножество в R. Назовем ***мероморфным дифференциалом*** на U всякое выражение вида $f\,dx$, где f — мероморфная функция на U, а x — элемент поля K. Будем отождествлять $f\,dx$ с $g\,dy$ и писать $f\,dx \sim g\,dy$, если $f/g = dy/dx$. Назовем дифференциал $f\,dx$ ***голоморфным*** в точке P, если для любого локального параметра t в этой точке функция $f\,dx/dt$ не имеет полюсов в P. (Здесь следует иметь в виду, что $f\,dx = f\,dx/dt \cdot dt$.) Назовем дифференциал ***голоморфным на*** U, если он голоморфен в каждой точке U.

Мероморфная функция g на U называется ***первообразной*** для дифференциала $f\,dx$, если $dg/dx = f$. Если U связно, то, как обычно, две первообразных одного дифференциала могут отличаться только на константу.

Для любого голоморфного дифференциала ω на диске V первообразная g существует и голоморфна на V.

Пусть γ — одномерный симплекс, содержащийся в диске V, $\omega = f\,dx$ на V, $\partial\gamma = P - Q$, и пусть g — первообразная для ω на $\overline{V}$. Положим

$$\int_\gamma \omega = g(P) - g(Q).$$

Это число не зависит от выбора V и g. В самом деле, если $\operatorname{supp}(\gamma)$ содержится в другом диске V_1 и g_1 есть первообразная для $f\,dx$ функция на V_1, то $V \cap V_1$ содержит открытое связное множество W, содержащее γ, и функция $g - g_1$ постоянна на W.

Рассмотрим подразделение $\mathrm{subd}_1 \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ посредством одной промежуточной точки A. Тогда $\partial\gamma_1 = P - A$, $\partial\gamma_2 = A - Q$ и

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2} \omega.$$

Следовательно, если γ содержится в диске V, то

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\mathrm{subd}_1 \gamma} \omega.$$

Пусть цепь $\gamma = \sum n_i \sigma_i$ такова, что каждый 1-симплекс σ_i содержится в некотором открытом диске. Определим интеграл ω по γ по линейности. Как и выше, он не меняется при переходе к подразделению.

Если γ — произвольная 1-цепь, то все симплексы ее r-го барицентрического подразделения при достаточно большом r содержатся в подходящих открытых дисках. Это позволяет определить интеграл по 1-цепи, не зависящей от выбора подразделения, удовлетворяющего указанному условию.

Теорема Коши. *Пусть ω — голоморфный дифференциал на открытом подмножестве U римановой поверхности R. Предположим, что 1-цикл γ на U гомологичен нулю на U. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \omega = 0.$$

Доказательство. Имеем $\gamma = \partial\eta$, где η — некоторая 2-цепь. Для достаточно больших r подразделение $\mathrm{subd}_r \gamma$ настолько мелко, что каждый его симплекс содержится в подходящем диске. Так как

$$\mathrm{subd}_r \gamma = \mathrm{subd}_r \partial\eta = \partial\, \mathrm{subd}_r \eta,$$

достаточно доказать теорему Коши в предположении, что η и γ содержатся в некотором диске. Но в этом случае ω имеет первообразную и результат тривиален.

Следствие. *Если U односвязно, то ω имеет первообразную на U.*

ГЛАВА III

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ — ЯКОБИ

§ 1. АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Дифференциал на римановой поверхности R, голоморфный всюду, называется дифференциалом ***первого рода***. Такие дифференциалы образуют векторное пространство над комплексным полем, размерность которого в силу теоремы Римана — Роха равна роду g поверхности R.

Мы примем без доказательства известное из топологии представление римановой поверхности R в виде

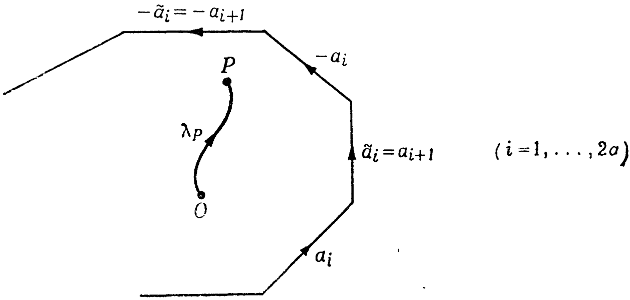


Рис. 1

(*фундаментального*) многоугольника [1]) $\mathscr{P}$ со сторонами, отождествленными, как показано на рис. 1.

Выберем внутри многоугольника какую-нибудь точку O и будем пользоваться ею как отмеченной точкой. Пусть φ дифференциал первого рода (сокращенно ***д. п. р.***). Для любой точки P внутри много-

[1]) Ниже под многоугольником понимается то „заполненный“ многоугольник, то его граница. Это не должно вызывать недоразумений. — *Прим. ред.*

угольника $\mathscr{P}$ положим

$$f(P) = \int\limits_{\lambda_P} \varphi,$$

где λ_P — любой путь от O до P, лежащий целиком внутри $\mathscr{P}$ (здесь следует учесть, что многоугольник $\mathscr{P}$ односвязен). Функция f однозначна и голоморфна внутри $\mathscr{P}$.

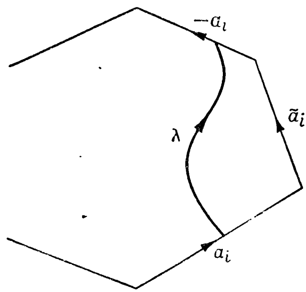


Рис. 2

Для любого другого пути λ_1 от O до P на R, уже не обязательно лежащего внутри $\mathscr{P}$, имеем

$$\lambda_1 \sim \lambda_P + \sum n_i a_i$$

($\sim$ означает гомологичность), где n_i — подходящие целые числа. Следовательно,

$$\int\limits_{\lambda_1} \varphi = \int\limits_{\lambda_P} \varphi + \sum n_i \int\limits_{a_i} \varphi.$$

Числа

$$\alpha_i = \int\limits_{a_i} \varphi$$

порождают абелеву группу, называемую группой ***периодов*** дифференциала φ. Интеграл формы φ от O до P вдоль любого пути определен однозначно по модулю периодов.

Интеграл вдоль замкнутого пути λ, показанного на рис. 2, является периодом, который мы обозначим так:

$$\int\limits_{\lambda} \varphi = \tilde{\alpha}_i.$$

Рассмотрим один из циклов a_i. Можно найти односвязное открытое множество U, содержащее цикл a_i с выколотой вершиной v. Определим голоморфную функцию f_i^+ на U следующим образом. Для любой фиксированной точки P из $a_i - v$ построим какой-нибудь путь λ_P^+, лежащий целиком внутри нашего многоугольника, за исключением своего конца, и для всякой точки Q из U положим

$$f_i^+(Q) = \int\limits_{\lambda_P^+} \varphi + \int\limits_{P}^{Q} \varphi,$$

где интеграл от P до Q берется вдоль любого пути, целиком лежащего в U. Функция f_i^+ голоморфна на $a_i - v$.

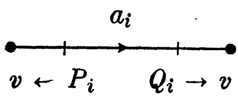
Пусть ω—дифференциал, голоморфный на цикле a_i (включая вершину). Мы можем определить

$$\int\limits_{a_i} f_i^+ \omega$$

как предел интеграла

$$\int\limits_{P_i}^{Q_i} f_i^+ \omega,$$

когда P_i, Q_i приближаются к вершине следующим способом:



Аналогично определим f_i^- на стороне $-a_i$. Имеем

$$\int\limits_{-a_i} f_i^- \omega = -\int\limits_{a_i} f_i^- \omega.$$

Заметим еще, что $f_i^+(P) - f_i^-(P) = -\tilde{\alpha}_i$, если P лежит на a_i. Теперь мы можем определить символ $\int\limits_{\mathscr{P}} f\omega$ для любого дифференциала ω, голоморфного на многоугольнике $\mathscr{P}$, формулой

$$\int\limits_{\mathscr{P}} f\omega = \sum \int\limits_{a_i} f_i^+\omega + \sum \int\limits_{-a_i} f_i^-\omega =$$

$$= \sum \lim_{\substack{P_i \to v \\ Q_i \to v}} \int\limits_{P_i}^{Q_i} (f_i^+ - f_i^-)\omega = \sum \lim \int\limits_{P_i}^{Q_i} -\tilde{\alpha}_i\omega =$$

$$= -\sum \tilde{\alpha}_i w_i,$$

где

$$w_i = \int\limits_{a_i} \omega$$

— период дифференциала ω.

Теорема 1. *Пусть ω — дифференциал, голоморфный на $\mathscr{P}$. Тогда интеграл $\int\limits_{\mathscr{P}} f\omega$ равен*

$$-\sum w_i\tilde{\alpha}_i = 2\pi\sqrt{-1}\sum \operatorname{res}_P (f\omega),$$

где сумма берется по полюсам P дифференциала ω.

Доказательство. Внутри многоугольника $\mathscr{P}$ наша функция f однозначна. Чтобы вычислить интеграл вдоль самого многоугольника, где функция f определена по отдельности для каждой из двух сторон, склеивающихся в одну, мы приблизим этот многоугольник многоугольником $\mathscr{P}$, как показано на рис. 3. Пусть все полюсы дифференциала ω лежат внутри $\mathscr{P}'$. Тогда

$$\lim_{\mathscr{P}' \to \mathscr{P}} \int\limits_{\mathscr{P}'} f\omega = \int\limits_{\mathscr{P}} f\omega,$$

где запись $\mathscr{P}' \to \mathscr{P}$ означает, что вершины многоугольника $\mathscr{P}'$ стремятся к вершинам многоугольника $\mathscr{P}$. Многоугольник $\mathscr{P}'$ гомологичен сумме взятых с положительной ориентацией маленьких окружностей с центрами в полюсах дифференциала ω, так что интеграл вдоль $\mathscr{P}'$ постоянен и равен выражению в правой части доказываемой формулы. Так как он в то же время стремится к интегралу вдоль $\mathscr{P}$, он совпадает с этим интегралом, чем и завершается доказательство.

Обобщим наши предыдущие результаты.

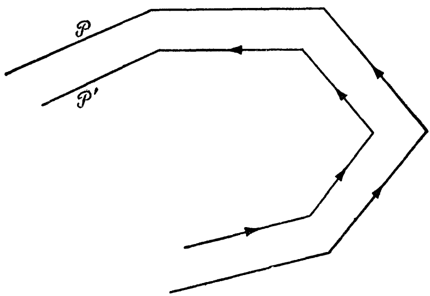


Рис. 3

Пусть $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ — некоторый базис д. п. р. Рассмотрим векторный интеграл

$$\int_{a_i} \Phi = \left(\int_{a_i} \varphi_1, \ldots, \int_{a_i} \varphi_g \right) = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ig}) = A_i,$$

который мы далее будем называть ***вектором периодов*** или просто ***периодом***. Аналогично положим

$$\int_{\tilde{a}_i} \Phi = (\tilde{\alpha}_{i1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{ig}) = \tilde{A}_i.$$

Системы векторов $A_1, \ldots, A_{2g}$ и $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_{2g}$ порождают над целыми числами одну и ту же группу периодов, ибо эти системы векторов отличаются лишь перестановкой.

Для любой точки P внутри нашего многоугольника положим

$$F(P) = \int_{\lambda_P} \Phi = (f_1(P), \ldots, f_g(P)),$$

где f_ν — соответствующие интегралы от φ_ν. Определим F_i^+ и F_i^-, как выше. Тогда для любой внутренней точки P стороны a_i имеем

$$F_i^+(P) = F_i^-(P) = -\tilde{A}_i.$$

Мы можем теперь рассмотреть векторный интеграл $\int\limits_{\mathscr{P}} F\omega$ и дать векторный вариант теоремы 1.

Теорема 2. *Если дифференциал ω голоморфен на $\mathscr{P}$, то*

$$\int\limits_{\mathscr{P}} F\omega = -\sum w_i \tilde{A}_i = 2\pi\sqrt{-1}\sum \operatorname{res}_P(E\omega),$$

где „вычет“ есть вектор вычетов, а сумма взята по всем полюсам P дифференциала ω.

§ 2. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

Напомним, что мы фиксировали точку O нашей римановой поверхности. Векторный интеграл

$$\int\limits_O^P \Phi = \left(\int\limits_O^P \varphi_1, \ldots, \int\limits_O^P \varphi_g\right),$$

взятый вдоль любого пути от O до переменной точки P на римановой поверхности, однозначно определен по модулю периодов. Это позволяет определить отображение римановой поверхности R в факторгруппу $\mathbf{C}^g$ по модулю периодов, которое можно продолжить по линейности на свободную абелеву группу, порожденную точками поверхности R. Эта группа называется *группой **циклов*** на R, или *группой **дивизоров***. Всякий дивизор представляется в виде формальной суммы

$$\mathfrak{a} = \sum n_P P,$$

где n_P — целые числа, равные нулю для всех P, кроме конечного числа. Сумма коэффициентов n_P называется ***степенью*** дивизора. Дивизоры нулевой степени образуют подгруппу D_0. Ограничение на эту подгруппу описанного выше гомоморфизма, очевидно, не зависит от выбора отмеченной точки O. Таким образом, мы определили гомоморфизм

$$\mathfrak{a} \longmapsto S(\mathfrak{a}) \equiv \sum n_P \int_O^P \Phi \bmod (\text{периоды})$$

из группы D_0 в группу $\mathbf{C}^g/(\text{периоды})$. Последняя факторгруппа называется ***якобианом*** римановой поверхности R и обозначается символом J. Наша цель — доказать следующую основную теорему.

Теорема Абеля — Якоби. *Описанный выше гомоморфизм из D_0 в J сюръективен, и его ядро состоит в точности из дивизоров функций. Тем самым он устанавливает изоморфизм между группой классов дивизоров („по модулю линейной эквивалентности") степени* 0 *и якобиевой группой $\mathbf{C}^g/(\text{периоды})$.*

Утверждение о ядре, называемое ***теоремой Абеля***, мы докажем в этом параграфе, а утверждение о сюръективности, называемое ***теоремой Якоби***, отложим до следующего.

Прежде всего покажем, что дивизоры функций содержатся в ядре. Иными словами, пусть z — функция с дивизором

$$(z) = \sum n_P P.$$

Нужно установить, что

$$\sum n_P F(P) \equiv 0 \bmod (\text{периоды}).$$

Всегда можно найти представление R в виде многоугольника, на границе которого z не имеет ни нулей, ни полюсов. Применим теорему 2 к $\omega = dz/z$. Имеем $\operatorname{res}_P(F\omega) = n_P F(P)$. Действительно, пусть t — локальный параметр в точке P и f — любая голоморфная функция. Тогда $f\omega = f\,(dz/dt)\,z^{-1}\,dt$. Далее,

$$z^{-1}\frac{dz}{dt} = \frac{k}{t} + \ldots,$$

где k — порядок функции z в P. Поэтому

$$\operatorname{res}_t\left(fz^{-1}\frac{dz}{dt}\right)=f(0)\,k.$$

В силу теоремы 2

$$2\pi\sqrt{-1}\sum n_P F(P)=\sum w_i\tilde{A}_i,$$

где $w_i=\int\limits_{a_i} z^{-1}\,dz$. Нетрудно убедиться, что $w_i=2\pi\sqrt{-1}\,m_i$, где m_i — некоторое целое число. Деля на $2\pi\sqrt{-1}$, находим

$$\sum n_P F(P)=-\sum m_i\tilde{A}_i,$$

что и требовалось.

Для доказательства обратного утверждения нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть x_i $(i=1, \ldots, 2g)$ — комплексные числа. Тогда соотношение $\sum x_i\tilde{A}_i=0$ имеет место в том и только том случае, когда $x_i=B\cdot A_i$, где $B=(b_1, \ldots, b_g)$ — некоторый комплексный вектор. Пространство, натянутое на векторы $A_1, \ldots, A_g$ над* **C** *имеет размерность g.*

Доказательство. Рассмотрим д. п. р. $\psi=b_1\varphi_1+\ldots+b_g\varphi_g$ ясно, что $F\psi$ не имеет полюсов, и в силу теоремы 2

$$0=-\sum \operatorname{res}_P(F\psi)=\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum w_i\tilde{A}_i,$$

где

$$w_i=\sum_{\nu=1}^{g} b_\nu\int\limits_{a_i}\varphi_i=\sum b_\nu a_{i\nu}=B\cdot A_i.$$

Этим первое утверждение доказано „в одну сторону“.

Чтобы доказать его в обратную, покажем сперва, что если $X\cdot A_i=0$ для всех i, то $X=0$ (X — комплексный вектор). Положим $\omega = X \cdot \Phi$. Тогда

$$\int_{a_i} \omega = \int_{a_i} X \cdot \Phi = X \cdot \int_{a_i} \Phi = X \cdot A_i = 0$$

по предположению. Значит, все периоды дифференциала ω равны нулю. Но тогда интеграл $\int_O^P \omega$ является голоморфной функцией без полюсов на R, потому что ω д. п. р. Значит, эта функция постоянна; поэтому $\omega = 0$ и $X = 0$, ибо φ_ν линейно независимы над $\mathbf{C}$.

Мы показали, что периоды порождают g-мерное пространство над комплексным полем. Напомним, что модуль периодов порожден как векторами A_i, так и векторами $\tilde{A}_i$. Для доказательства оставшейся части леммы рассмотрим решения системы

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1 a_{11} + \ldots + x_{2g} a_{2g,\,1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 a_{1g} + \ldots + x_{2g} a_{2g,\,g} = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы коэффициентов, равный числу линейно независимых столбцов или строк, равен, как было показано выше, g. Значит, пространство решений g-мерно. С другой стороны, решения $X = (B \cdot A_1, \ldots, B \cdot A_{2g})$ образуют как раз g-мерное пространство. Значит, это все решения. Лемма доказана.

Если вычеты дифференциала ω во всех точках нулевые, то ω называется *дифференциалом* ***второго рода*** (сокращенно д. в. р.). Если все его полюсы имеют порядок не выше 1, он называется *дифференциалом* ***третьего рода*** (сокращенно д. т. р.). В нашей следующей лемме речь идет как раз о таких дифференциалах.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{a} = \sum n_P P$ *— некоторый дивизор степени* 0. *Тогда существует такой д. т. р.* ω, *что* $\operatorname{res}_P \omega = n_P$ *для всех* P.

Доказательство. Достаточно установить это утверждение для случая, когда лишь две точки входят в дивизор с ненулевыми коэффициентами. Действительно, рассуждая по индукции, предположим, что лемма верна для точек $P_1, \ldots, P_r$, и пусть Q — еще одна точка, не совпадающая ни с одной из них. Для $j = 1, \ldots, r$ пусть ω_j — дифференциал с полюсами только в P_j и Q и вычетами $\operatorname{res}_{P_j} \omega_j = n_j$, $\operatorname{res}_Q \omega_j = -n_j$. Положим $\omega = \sum \omega_j$. Очевидно, этот дифференциал отвечает дивизору $\sum n_P P$.

Согласно теореме Римана — Роха,

$$l(-\mathfrak{a}) = -\deg(\mathfrak{a}) + 1 - g + d(\mathfrak{a}),$$

где $d(\mathfrak{a})$ — размерность пространства дифференциалов ω с $(\omega) \geqslant -\mathfrak{a}$. Положим $\mathfrak{a} = P_1 + P_2$. Тогда $d(\mathfrak{a}) = g + 1$. Значит, существует д. т. р. ω, имеющий полюсы порядка 1 в точках P_1 и P_2. Так как сумма его вычетов равна нулю, вычеты в этих полюсах не равны нулю и отличаются друг от друга знаком. Умножая ω на подходящую константу, получаем требуемое.

Теперь мы в состоянии определить ядро нашего отображения в якобиан. Пусть $\mathfrak{a} = \sum n_P P$ — дивизор степени 0 с $S(\mathfrak{a}) = 0$. Нам надо установить, что $\mathfrak{a}$ — дивизор некоторой функции.

Мы утверждаем, что существует д. т. р. ψ, такой, что он имеет во всех P полюсы с вычетами n_P и, сверх того,

$$\int_{a_i} \psi = 2\pi \sqrt{-1}\, n_i,$$

где n_i — подходящие целые числа. В самом деле, первое требование выполнено для некоторого д. т. р. ω в силу леммы. Для любой точки P имеем тогда

$$\operatorname{res}_P (F\omega) = n_P F(P).$$

В силу теоремы 2

$$\sum \varpi_i \tilde{A}_i = 2\pi \sqrt{-1} \sum \operatorname{res}_P (F\omega) =$$
$$= 2\pi \sqrt{-1} \sum n_P F(P) = 2\pi \sqrt{-1} \sum m_i \tilde{A}_i$$

(по предположению). Значит,

$$\sum w_i - 2\pi\sqrt{-1}\, m_i \tilde{A}_i = 0.$$

Из леммы 1 следует, что

$$w_i - 2\pi\sqrt{-1}\, m_i = B \cdot \tilde{A}_i$$

для подходящего вектора B. Положим $\psi = \omega - B \cdot \Phi$. Тогда ψ имеет те же полюсы и вычеты в них, что и ω. Кроме того,

$$\int\limits_{a_i} \psi = \int\limits_{a_i} \omega - \int\limits_{a_i} B \cdot \Phi = w_i - B \cdot A_i = 2\pi\sqrt{-1}\, m_i,$$

чем наше утверждение и установлено.

Теперь нужную нам функцию z можно построить так:

$$z(P) = \exp \int\limits_O^P \psi.$$

где O, как обычно, — подходящая точка внутри многоугольника. Для любой точки P, не являющейся полюсом ψ, и для любого пути от O до P экспонента от интеграла не зависит от выбора пути и потому определяет однозначную мероморфную функцию. Разлагая ψ по степеням локального параметра в окрестности каждой точки, являющейся полюсом ψ, немедленно получаем, что мероморфность сохраняется в этих точках: особенность может быть лишь полюсом.

Теорема Абеля доказана.

§ 3. ТЕОРЕМА ЯКОБИ

Нам остается показать, что отображение группы дивизоров степени нуль в факторгруппу $\mathbf{C}^g$/(периоды) сюръективно.

Дивизор $\mathfrak{a}$ называется ***неспециальным***, если $\delta(-\mathfrak{a})=0$, т. е. если не существует дифференциала ω с $(\omega) \geqslant \mathfrak{a}$.

Лемма 3. *Существуют такие g разных точек $M_1, \ldots, M_g$, что дивизор $M_1 + \ldots + M_g$ неспециален.*

Доказательство. Пусть $\omega_1 \neq 0$ — некоторый д. п. р., а M_1 — точка, не являющаяся его нулем. Пространство д. п. р. с нулем в M_1 имеет по теореме Римана — Роха размерность $g-1$. Повторяя эту процедуру g раз, получаем требуемые g точек.

Теорема 3. *Пусть $M_1, \ldots, M_g$ — такие g разных точек, что дивизор $M_1 + \ldots + M_g$ неспециален. Тогда отображение*

$$(P_1, \ldots, P_g) \mapsto \sum \int_{M_i}^{P_i} \Phi$$

определяет аналитический изоморфизм произведения достаточно малых дисков $V_1 \times \ldots \times V_g$ с центрами в точках $P_1, \ldots, P_g$ с некоторой окрестностью нуля в $\mathbf{C}^g$.

Прежде чем доказывать эту теорему, покажем, как из нее выводится теорема Якоби.

Заметим сначала, что достаточно доказать локальный вариант теоремы Якоби — сюръективность для некоторой окрестности нуля в $\mathbf{C}^g$. В самом деле, пусть X — произвольный вектор. Если n достаточно велико, то $(1/n)X$ лежит в сколь угодно малой окрестности нуля. Поэтому, предполагая локальную сюръективность доказанной, мы можем отыскать дивизор $\mathfrak{a}$ степени 0, для которого $F(\mathfrak{a}) \equiv (1/n)X$ по модулю периодов. Тогда $F(n\mathfrak{a}) \equiv X$ по модулю периодов.

Далее, в обозначениях теоремы 3, заставим $\mathfrak{a}$ пробегать дивизоры вида

$$P_1 + \ldots + P_g - (M_1 + \ldots + M_g),$$

где P_i меняются в V_i. Тогда, очевидно,

$$F(\mathfrak{a}) \equiv \int_{M_i}^{P_i} \Phi \text{ по модулю периодов,}$$

так что из теоремы 3 следует локальная сюръективность.

Докажем теперь теорему 3. Пусть t_i — локальный параметр в точке M_i. Мы утверждаем, что определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\varphi_1}{dt_1}(M_1) & \ldots & \frac{\varphi_1}{dt_g}(M_g) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\varphi_g}{dt_1}(M_1) & \ldots & \frac{\varphi_g}{dt_g}(M_g) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi \mapsto \left[\frac{\varphi}{dt_1}(M_1), \ldots, \frac{\varphi}{dt_g}(M_g)\right]$$

пространства д. п. р. в комплексное g-пространство. Любой д. п. р., лежащий в ядре этого гомоморфизма, должен иметь дивизор $\geqslant M_1 + \ldots M_g$ и потому может быть лишь нулевым. Следовательно, наше отображение является изоморфизмом, так что выписанный определитель не обращается в нуль.

Пусть

$$\varphi_1 = h_{11}(t_1)\,dt_1, \ \ldots, \ \varphi_1 = h_{1g}(t_g)\,dt_g,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_g = h_{g1}(t_1)\,dt_1, \ \ldots, \ \varphi_g = h_{gg}(t_g)\,dt_g,$$

где функции $h_{ij}(t_j)$ голоморфны в V_j. Обозначим через $h^*_{ij}(t_j)$ интеграл степенного ряда $h_{ij}(t_j)$, нормализованный так, чтобы он обращался в нуль при $t_j = 0$. Тогда построенное нами отображение представляется в виде

$$(P_1, \ldots, P_g) \mapsto (h^*_{11}(t_1) + \ldots + h^*_{1g}(t_g), \ldots) =$$
$$= (H_1(t_1, \ldots, t_g), \ldots, H_g(t_1, \ldots, t_g)),$$

где каждая функция $H_i(t_1, \ldots, t_g)$ голоморфна по всем g переменным на $V_1 \times \ldots \times V_g$. Учтем теперь, что

$$\frac{\partial H_i}{\partial t_j} = h_{ij}(t_j).$$

Поэтому якобиан нашего отображения в $(0, \ldots, 0)$ совпадает с выписанным ранее определителем и, значит, не обращается в нуль.

По теореме о неявных функциях мы получаем, что наше отображение является локальным изоморфизмом. Теорема 3, а с ней и теорема Якоби доказаны.

Следующее замечание является важным дополнением к теореме Якоби. Рассмотрим комплексное g-пространство как вещественное $2g$-пространство. Имеет место

Теорема 4. *Периоды $A_1, \ldots, A_{2g}$ линейно независимы над вещественным полем. Следовательно, фактор-пространство $\mathbf{C}^g$ по периодам является $2g$-мерным вещественным тором.*

Доказательство. Достаточно установить, что любой комплексный вектор X сравним по модулю периодов с вектором, длина которого ограничена подходящей константой. Воспользуемся теоремой Римана — Роха. Любой дивизор степени нуль линейно эквивалентен дивизору вида $(P_1 + \ldots + P_g) - g \cdot O$, где точки $P_1, \ldots, P_g$ лежат внутри или на границе фундаментального многоугольника. Если интеграл $\int\limits_O^P \Phi$ брать по пути, целиком лежащему внутри многоугольника (кроме, быть может, конца пути P), то значения эвклидовой нормы такого векторного интеграла будут ограничены, причем P может пробегать все точки римановой поверхности. Следовательно, норма суммы

$$\sum_{i=1}^{g} \int\limits_O^{P_i} \Phi$$

также ограничена. Сопоставляя этот результат с теоремой Якоби о сюръективности, мы убеждаемся, что пространство $\mathbf{C}^g$ имеет ограниченную фундаментальную область по модулю периодов, чем и завершается доказательство теоремы 4.

§ 4. СООТНОШЕНИЯ РИМАНА

Пусть φ, φ' — два д. п. р. Рассмотрим фундаментальный многоугольник для R со сторонами a_i, b_i,

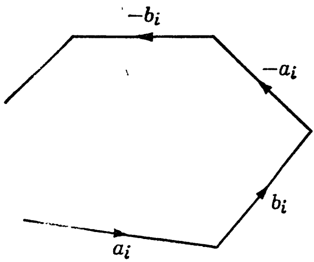


Рис. 4

$-a_i$, $-b_i$ $(i=1, \ldots, g)$, следующими друг за другом, как на рис. 4. Положим

$$\alpha_i = \int_{a_i} \varphi, \quad \beta_i = \int_{b_i} \varphi.$$

Аналогичные канонические периоды дифференциала φ' обозначим через α_i', β_i'.

Билинейные равенства Римана.

$$\sum_{i=1}^{g} (\alpha_i \beta_i' - \alpha_i' \beta_i) = 0.$$

Доказательство. Пусть $f(P)$ — функция, введенная в § 1 (интеграл от O до P, подходящим образом определенный для точек P, лежащих на границе многоугольника $\mathscr{P}$). Рассмотрим интеграл

$$\int_{\partial\mathscr{P}} f\varphi'.$$

Так как φ не имеет полюсов, то согласно теореме 2

$$0=\sum_{i=1}^{g}\left(\int_{a_i}\varphi'\int_{b_i}\varphi+\int_{b_i}\varphi'\int_{-a_i}\varphi\right),$$

чем требуемое и доказано.

Билинейные неравенства Римана.

$$\sum_{j=1}^{g}(\bar{\alpha}_j\beta_j-\bar{\beta}_j\alpha_j)>0.$$

Доказательство. На этот раз рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2i}\int\bar{f}\varphi$$

и докажем, что он строго положителен. Пусть $f=u+iv$, где u, v — вещественная и мнимая части. Тогда $\bar{f}=u-iv$ и

$$df=\varphi=du+i\,dv,$$

а также

$$\bar{f}\varphi=\frac{1}{2}d(u^2+v^2)+i(u\,dv-v\,du).$$

Теорема Грина позволяет заменить наш интеграл двойным интегралом $\iint du\,dv$, и несложное вычисление показывает, что последний положителен. Тем самым неравенства Римана доказаны.

§ 5. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Лемма 4. *Пусть стороны многоугольника $\mathcal{P}$ пронумерованы, как в § 1: $a_1, \ldots, a_{2g}$. Для любого i существует такой д. п. р., что*

$$\operatorname{Re}\int_{a_i}\varphi=1,\quad \operatorname{Re}\int_{a_j}\varphi=0\quad \textit{при}\quad j\neq i.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу периодов

$$\begin{array}{c|ccc}
 & a_1 & \ldots & a_{2g} \\
\hline
\varphi_1 & u_1^1+iv_1^1 & \ldots & u_{2g}^1+iv_{2g}^1 \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\varphi_g & u_1^g+iv_1^g & \ldots & u_{2g}^g+iv_{2g}^g
\end{array}$$

Здесь на пересечении строки φ_i и столбца a_j стоит период $\int \varphi_i$ с выделенными вещественной и мнимой частями. Столбцы этой матрицы суть векторы периодов $A_1, \ldots, A_{2g}$. Мы хотим отыскать g комплексных чисел $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, \ldots, g)$ и д. п. р. $\varphi = z_1\varphi_1 + \ldots + z_g\varphi_g$ с требуемыми периодами. Это приводит к системе уравнений, которая, скажем, для $i = 1$ имеет вид

$$x_1u_1^1 - y_1v_1^1 + \ldots + x_gu_1^g - y_gv_1^g = 1,$$
$$x_1u_2^1 - y_1v_2^1 + \ldots + x_gu_2^g - y_gv_2^g = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Она разрешима, если строки матрицы коэффициентов линейно независимы над вещественными числами. Это условие выполнено, потому что из любого нетривиального соотношения между строками немедленно получилось бы линейное соотношение над R между векторами $A_1, \ldots, A_{2g}$.

Лемма 5. *У нулевого д. п. р. все периоды не могут быть чисто мнимыми.*

Доказательство. Однородная система уравнений с рассмотренной в лемме 4 матрицей коэффициентов не может иметь ненулевых решений.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{a} = \sum n_P P$ — *дивизор степени* 0. *Существует единственный д. т. р.* $\omega_\mathfrak{a}$, *такой, что*

1) $\mathrm{res}_P\,\omega_\mathfrak{a} = n_P$ *для всех* P;
2) *все периоды* $\omega_\mathfrak{a}$ *чисто мнимые.*

Доказательство. Пусть ω — какой-нибудь д. т. р. с $\operatorname{res}_P \omega = n_P$. Достаточно отыскать д. п. р. φ, вещественные части периодов которого вдоль путей a_i таковы же, как у φ. Но его существование немедленно следует из леммы 4. Единственность дифференциала ω очевидна: разность двух таких дифференциалов есть д. п. р. с чисто мнимыми периодами. Она равна нулю по лемме 5.

Теорема 6. *Пусть σ — такой цикл, что $\int_\sigma \varphi = 0$ для всех д. п. р. φ. Тогда $\sigma \sim 0$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \sim n_1 a_1 + \ldots + n_{2g} a_{2g}$. Отыщем такой д. п. р. φ, что

$$\operatorname{Re} \int_{a_1} \varphi = 1, \quad \operatorname{Re} \int_{a_j} \varphi = 0 \quad \text{при} \quad j \neq 1.$$

Тогда

$$0 = \int_\sigma \varphi = n_1 + (\text{чисто мнимое число}),$$

так что $n_1 = 0$. Аналогично $n_j = 0$ для всех других j.

Теорема 7. *Формула*

$$(\sigma, \mathfrak{a}) \longmapsto \langle \sigma, \mathfrak{a} \rangle = \exp \int_\sigma \omega_{\mathfrak{a}}$$

определяет билинейное спаривание между первой группой гомологий $H_1(R)$ поверхности R и группой классов дивизоров степени 0 на ней. Это спаривание невырождено и осуществляет двойственность Понтрягина между дискретной группой $H_1(R)$ и компактным тором.

Доказательство. Пусть D_0 — группа дивизоров степени нуль. Если $\mathfrak{a} \in D_0$ и $\mathfrak{a} = (z)$ — дивизор функции, мы можем положить $\omega_{\mathfrak{a}} = dz/z$. Все периоды dz/z чисто мнимые и имеют вид $2\pi \sqrt{-1}\, m$ для подходящего целого числа m. Следовательно, для любого такого дивизора $\mathfrak{a}$ и любого цикла σ, не проходящего через точки $\mathfrak{a}$, имеем $\langle\sigma, \mathfrak{a}\rangle$. Далее, если $\sigma \sim 0$, то

$$\int_{\sigma} \omega_{\mathfrak{a}} = 2\pi\sqrt{-1} \sum \operatorname{res}_P \omega_{\mathfrak{a}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{-1} \cdot \begin{pmatrix}\text{некоторое} \\ \text{целое число}\end{pmatrix},$$

так что $\langle\sigma, \mathfrak{a}\rangle = 1$. Значит, мы построили спаривание $H_1(R) \times J \to$ (единичная окружность).

Пусть теперь дивизор $\mathfrak{a}$ ортогонален к $H_1(R)$. Из наших определений видно, что все периоды дифференциала $\omega_{\mathfrak{a}}$ имеют вид $2\pi\sqrt{-1}\,m$ для подходящего целого числа m. Определим функцию z, положив

$$z(P) = \exp \int_{O}^{P} \omega_{\mathfrak{a}}.$$

Она мероморфна, и ее дивизор есть $\mathfrak{a}$. Следовательно, ортогональны к $H_1(R)$ в точности главные дивизоры.

Покажем, теперь, что ко всем дивизорам ортогональны только циклы, гомологичные нулю. Пусть цикл $\sigma \sim \sum n_i a_i$ ортогонален ко всем дивизорам. Мы должны установить, что $n_i = 0$. Пусть $M_1, \ldots, M_g$ — неспециальные точки, выбранные, как в доказательстве теоремы Якоби. Не ограничивая общности, можно считать, что они не лежат на циклах a_i. Рассмотрим дивизоры степени 0 вида

$$\mathfrak{a} = P_1 + \ldots + P_g - M_1 - \ldots - M_g,$$

где $P_1, \ldots, P_g$ лежат в малых окрестностях нуля $V_1, \ldots, V_g$ точек $M_1, \ldots, M_g$ соответственно. Имеем

$$(P_1, \ldots, P_g) \in V_1 \times \ldots \times V_g \subset \mathbf{C}^g.$$

Положим

$$w_i(\mathfrak{a}) = \int_{a_i} \omega_{\mathfrak{a}},$$

так что

$$w_1(\mathfrak{a})A_1 + \ldots + w_{2g}(\mathfrak{a})A_{2g} = 2\pi\sqrt{-1}\sum_{\nu=1}^{g}\int_{M_\nu}^{P_\nu} F =$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\sum(F(P_\nu) - F(M_\nu)).$$

Из теоремы Якоби ясно, что, когда $\mathfrak{a}$ пробегает дивизоры описанного вида, векторы в левой части равенства пробегают множество, порождающее вещественное $2g$-мерное пространство. Если $\langle\sigma, \mathfrak{a}\rangle = 0$ для всех $\mathfrak{a}$, то

$$0 = \langle\sigma, \mathfrak{a}\rangle = \sum n_i \int_{a_i} \omega_{\mathfrak{a}} = \sum n_i w_i(\mathfrak{a}).$$

Предположив, что не все n_i равны нулю, мы получили бы, что векторы $w_1(\mathfrak{a}), \ldots, w_{2g}(\mathfrak{a})$ лежат все в некоторой (собственной) гиперплоскости, в противоречие со сказанным выше.

Что касается двойственности Понтрягина, то доказать непрерывность нашего спаривания мы представляем читателю в качестве упражнения.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

§ 1. АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Пусть V — комплексное линейное пространство размерности n (вещественной размерности $2n$), и пусть D — некоторая решетка в V, т. е. дискретная подгруппа ранга $2n$. Факторгруппа V/D является комплексным тором. Назовем ***тэта-функцией*** на V по отношению к D (или на V/D) всякое отношение двух целых функций, не равное тождественно нулю и удовлетворяющее соотношению

$$F(x+u) = F(x)\, e^{2\pi i\,[L(x,\,u) + J(u)]} \quad \text{для всех } x \in V,\ u \in D.$$

Здесь функция L предполагается $\mathbf{C}$-линейной по x, на зависимость L и J от u никаких условий заранее не накладывается. Заметим, однако, что, не нарушая указанного соотношения, к J можно добавить любую функцию на D со значениями в $\mathbf{Z}$. Кроме того, позже мы увидим, что из самого этого соотношения вытекают некоторые ограничения на вид L, J.

Тэта-функции образуют группу по умножению.

Пример. Пусть q — квадратичная форма на V,

$$g(x) = b(x,\ x),$$

где функция b симметрична и $\mathbf{C}$-билинейна. Пусть, далее, c — некоторое комплексное число, и λ — некоторая $\mathbf{C}$-линейная форма на V. Функция

$$e^{2\pi i\,[q(x) + \lambda(x) + c]},$$

очевидно, является тэта-функцией. Такие тэта-функции назовем ***тривиальными***. Ясно, что они тоже образуют мультипликативную группу. Далее, выписанная тривиальная тэта-функция есть произведение константы на тэта-функции, построенные отдельно с помощью $g(x)$ и $\lambda(x)$.

Заметим, что $q(x+y)-q(x)-q(y)=2b(x, y)$. Поэтому, полагая

$$F(x)=e^{2\pi i q(x)},$$

мы можем выбрать функции L и J, фигурирующие в нашем функциональном уравнении, такими:

$$L_F(x, u)=2b(x, u), \quad J_F(u)=q(u).$$

В случае

$$F(x)=e^{2\pi i \lambda(x)}$$

можно взять

$$L_F=0, \quad J_F(u)=\lambda(u).$$

Ниже удобно будет нормировать произвольные тэта-функции, умножая их на подходящие тривиальные.

Замечание. Пусть F — целая тэта-функция, не имеющая нулей. Тогда $F(z)=e^{2\pi i g(z)}$, где g — целая функция. Из функционального уравнения следует, что

$$g(z+u)-g(z)=L(z, u)+J(u).$$

Все вторые частные производные этого выражения по комплексным аргументам обращаются в нуль. Значит, вторые частные производные g должны быть периодическими целыми функциями. Тем самым они постоянны. Следовательно, g — многочлен не выше второй степени. Иными словами, F тривиальна.

Выясним теперь, каким соотношениям должны удовлетворять L и J в случае общей тэта-функции F.

Вычисляя $F(x+u+v)/F(x)$ двумя способами, находим

$$L(x, u+v)+J(u+v)\equiv L(x, v)+L(x+v, u)+ \\ +J(u)+J(v) \pmod{\mathbf{Z}}$$

Положив здесь $x=0$, получаем

(1) $J(u+v)-J(u)-J(v)\equiv L(u, v) \pmod{\mathbf{Z}}$,

(2) $$L(u, v)\equiv L(v, u) \pmod{\mathbf{Z}},$$

(3) $$L(x, u+v)\equiv L(x, u)+L(x, v) \pmod{\mathbf{Z}}.$$

Второе соотношение вытекает из того, что левая часть соотношения (1) симметрична по u, v. Разность левой и правой частей соотношения (3) должна быть целым числом, линейно зависящим от x. Значит, она равна нулю, так что в (3) сравнение можно заменить равенством. Поэтому $L(x, u)$ можно продолжить до некоторой функции $L(x, y)$ на $V\times V$, $\mathbf{C}$-линейной по x и $\mathbf{R}$-линейной по y. (Обычный способ продолжения состоит в том, чтобы сначала по линейности распространить L на рациональные кратные элементов D, а затем продолжить по непрерывности.) Положим

$$K(u)=J(u)-\frac{1}{2}L(u, u).$$

Из (1) получаем тогда

(4) $$K(u+v)\equiv K(u)+K(v) \pmod{\mathbf{Z}}.$$

Так как решетка D свободна, то, зафиксировав значения K на некотором ее $\mathbf{Z}$-базисе и затем продолжив K по $\mathbf{Z}$-линейности на всю решетку, мы получим функцию K' на D, разность которой с K принимает только целые значения. Учитывая, что к первоначальной функции J можно прибавлять любые целозначные функции, мы можем с самого начала выбрать J так, чтобы отвечающая ей функция K была $\mathbf{Z}$-линейной. Тогда в (4) сравнение можно заменить равенством. Наконец, всякую $\mathbf{Z}$-линейную функцию на D можно продолжить до $\mathbf{R}$-линейной функции на всем пространстве V. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть функции L, J ассоциированы, как выше, с тэта-функцией F. Тогда L можно про-*

должить до функции $L(x, y)$ *на* $V \times V$, $\mathbf{C}$-*линейной по* x *и* $\mathbf{R}$-*линейной по* y. *Функцию* J *можно выбрать так, чтобы функция*

$$K(u) = J(u) - \frac{1}{2} L(u, u)$$

была $\mathbf{Z}$-*линейной и продолжалась до* R-*линейной функции на* V.

Назовем пару (L, K) ***типом*** функции F. Мы будем считать, что функция K определена только $\operatorname{mod} \mathbf{Z}$.

Следствие 1. *Положим*

$$E(x, y) = L(x, y) - L(y, x).$$

Функция E $\mathbf{R}$-*билинейна, кососимметрична и принимает вещественные значения на* $V \times V$. *Кроме того,* E *принимает целые значения на* $D \times D$.

Доказательство. Последнее утверждение следует из (2). Так как функция L $\mathbf{R}$-билинейна, то E принимает вещественные значения, чем и завершается доказательство.

Следствие 2. *Положим*

$$S(x, y) = E(ix, y).$$

Форма S *симметрична и положительна (но не обязательно положительно определена). Кроме того, форма*

$$H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y)$$

эрмитова.

Доказательство. Выразив разность $S(x, y) - S(y, x)$ через L, сразу найдем, что

$$S(x, y) - S(y, x) = i[E(x, y) - E(ix, iy)].$$

Так как левая часть этого равенства вещественная, а правая—чисто мнимая, обе они обращаются в нуль. Это показывает, что форма S симметрична и что

$$E(x, y) = E(ix, iy).$$

Прямое вычисление дает

$$H(ix, y) = iH(x, y), \quad H(x, iy) = -iH(x, y),$$
$$H(x, y) = \overline{H(y, x)},$$

т. е. форма H эрмитова, что и требовалось доказать.

Уравнение для тэта-функции записывается в терминах L и K следующим образом:

$$\boxed{\begin{aligned} &F(x+u) = \\ &= F(x)\exp\left(2\pi i\left[L(x, u) + \tfrac{1}{2}L(u, u) + K(u)\right]\right). \end{aligned}}$$

По L, K эрмитова форма H восстанавливается, как указано в следствии 2, а именно: сначала мы находим

$$E(x, y) = L(x, y) - L(y, x),$$

а затем

$$H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y).$$

Назовем тэта-функцию ***нормализованной***, если она удовлетворяет условиям

H1. $L(x, y) = -\frac{i}{2}H(x, y)$.

H2. *Функция K принимает на V только вещественные значения.*

Очевидно, нормализованные тэта-функции образуют подгруппу по умножению. Функциональное уравнение для них принимает вид

$$\boxed{\begin{aligned} &F(x+u) = \\ &= F(x)\exp\left(2\pi i\left[-\tfrac{i}{2}H(x, u) - \tfrac{i}{4}H(u, u) + K(u)\right]\right). \end{aligned}}$$

Так как функция K вещественна и определена $\bmod \mathbf{Z}$, то функция

$$\psi(x) = e^{2\pi i K(x)}$$

является характером на V. По нормализованной тэта-функции он восстанавливается однозначно.

Назовем две тэта-функции ***эквивалентными***, если их отношение есть тривиальная тэта-функция. Покажем, что в каждом классе эквивалентности есть ровно одна нормализованная тэта-функция (с точностью до постоянного множителя), так что характер ψ один и тот же на всем классе эквивалентности. Мы будем называть пару (H, ψ) ***эрмитовым характером*** данного класса, а также его нормализованной тэта-функции.

Теорема 2. *Во всяком классе эквивалентных тэта-функций существует нормализованная тэта-функция. С точностью до умножения на ненулевой постоянный множитель она единственна.*

Доказательство. Умножение произвольной тэта-функции на тривиальную изменяет L на $\mathbf{C}$-билинейный член, а любой такой член связан с однозначно определенной квадратичной функцией. Поэтому, для того чтобы убедиться, что можно удовлетворить условию H1, достаточно показать, что функция

$$L(x, y) + \frac{i}{2} H(x, y)$$

симметрична. (Будучи $\mathbf{C}$-линейной по первому аргументу, она автоматически окажется $\mathbf{C}$-линейной и по второму и тем самым $\mathbf{C}$-билинейной.) Иными словами, достаточно проверить, что

$$L(x, y) - L(y, x) = \frac{i}{2}[H(y, x) - H(x, y)],$$

а это очевидно. Теперь, производя нормализацию в отношении L, мы все еще можем умножать на экспоненты линейных функций. Существует единственная $\mathbf{C}$-линейная форма, после добавления которой K будет принимать только вещественные значения. В этом нетрудно убедиться. Чтобы избежать индексов, разберем случай одной переменной. Пусть $z = s + it$. Так как функция K $\mathbf{R}$-линейна, существуют вещественные числа a и b, такие, что

$$K(z) = (\text{вещественная часть}) + i(as + bt).$$

Положим $\alpha = c + id$, где c, d вещественны. Тогда

$$\alpha z = (\text{вещественная часть}) + i(ds + ct).$$

Остается только положить $d = a$, $c = b$. Функция $K(z) - \alpha z$ будет вещественной. Так как наша линейная форма, очевидно, определена однозначно, доказательство завершено.

Теорема 3. *Пусть F — нормализованная целая тэта-функция. Тогда ассоциированная с ней эрмитова форма H положительна (но не обязательно положительно определена).*

Доказательство. Установим сначала существование такой константы C, что

$$|F(z)| \leqslant Ce^{(\pi/2)H(z,z)}.$$

Положим $g(z) = F(z)e(-\pi/2H(z, z))$, где $e(w) = e^{w}$. Тогда для всех $u \in D$

$$g(z+u) = g(z)e^{i\pi[E(z, u)+K u)]}.$$

Выражение в квадратных скобках вещественно. Поэтому $|g(z+u)| = |g(z)|$. Это означает, что функция $|g|$ периодична. Будучи непрерывна, она ограничена. Отсюда сразу следует устанавливаемая оценка.

Предположим теперь, что $H(z_0, z_0) < 0$ для некоторого комплексного числа z_0. Так как функция $z \longmapsto F(zz_0)$ целая, то в силу доказанной нами оценки она стремится к нулю на бесконечности. Поэтому она постоянна и ясно, что ее (постоянное) значение равно нулю. Но $H(z, z) < 0$ для всех z, достаточно близких к z_0. Значит, функция F равна нулю в некоторой окрестности точки z_0 и потому всюду, что невозможно. Теорема доказана.

§ 2. ВЫРОЖДЕННЫЕ ТЭТА-ФУНКЦИИ

Покажем, что в теории тэта-функций возможна факторизация по подпространству пространства V, на котором построенная эрмитова форма тривиальна. Обозначим через V_H подмножество в V, состоящее из всех z, таких, что $H(z, z)=0$. Ясно, что V_H есть комплексное подпространство в V. Оно называется ***ядром*** или ***нуль-пространством*** *формы* H.

Теорема 4. *Пусть F — нормализованная целая тэта-функция на комплексном пространстве V по отношению к решетке D, H — ассоциированная с ней эрмитова форма и V_H — ядро формы H. Тогда*

(i) *образ решетки D в V/V_H дискретен;*

(ii) *значения F зависят только от класса аргумента по модулю V_H.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in V_H$ и $x \in V$. По предположению для любого комплексного числа z имеем

$$H(x+zz_0,\ x+zz_0)=H(x,\ x).$$

Оценка, выведенная при доказательстве теоремы 3, показывает, что

$$|F(x+zz_0)| \leqslant Ce\left(\frac{\pi}{2} H(x,\ x)\right).$$

Следовательно, $F(x+zz_0)$—целая ограниченная функция от z, значит, она не зависит от z и совпадает с $F(x)$. Этим доказано (ii). Докажем (i). Обозначим через $u_1, \ldots, u_r$ такие элементы решетки D, что их классы $\bar{u}_i \pmod{V_H}$ порождают V/V_H над $\mathbf{R}$. Для всех $x \in V$, достаточно близких к нулю, имеем

$$|E(x,\ u_i)| < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если v — элемент из D, класс которого близок к нулю, то $E(\bar{v}, \bar{u}_i)=0$ для всех i. Значит, элемент $\bar{v}$ ортогонален к пространству, порожденному векторами $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$. Поэтому $\bar{v}=0$. Это показывает, что решетка $\bar{D}$ дискретна в $\bar{V}=V/V_H$.

Предположим теперь, что тэта-функция F нормализована. Пусть $z_0 \in V_H$ и $x \in V$. Обычная оценка

$$|F(x+zz_0)| \leqslant Ce\left(\frac{\pi}{2} H(x, x)\right)$$

показывает, что $F(x+zz_0)$ — целая ограниченная функция от z. Поэтому она постоянна, и ее (постоянное) значение равно $F(x)$. Доказательство завершено.

Теорема 4 позволяет рассматривать F как тэта-функцию на V/V_H по отношению к решетке $D \bmod V_H$. Связанная с ней эрмитова форма на V/V_H индуцирована формой H и потому *положительно определена*. Исследованием этой ситуации мы и будем заниматься дальше.

§ 3. РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ТЭТА-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим снова n-мерное комплексное векторное пространство V с решеткой D. ***Римановой формой*** *E на V по отношению к D* назовем любую вещественнозначную билинейную форму

$$E: V \times V \to \mathbf{R},$$

удовлетворяющую следующим условиям:

РФ 1. *Форма E кососимметрична.*

РФ 2. *Она принимает целые значения на $D \times D$.*

РФ 3. *Форма $(x, y) \mapsto E(ix, y)$ положительна и симметрична.*

Если последняя форма к тому же положительно определена, форма E называется ***невырожденной*** римановой формой.

Выберем какой-нибудь базис решетки D над $\mathbf{Z}$. Он является также базисом для V над $\mathbf{R}$. Матрица, представляющая невырожденную риманову форму E в таком базисе, имеет целые элементы, а ее определитель является полным квадратом. Квадратный корень из этого определителя называется ***пфаффианом*** формы *E по отношению к D*; от выбора базиса он не зависит (действительно, при замене базиса матрица формы умножается на матрицу перехода и транспонированную к ней, что не меняет определителя). Фактически доказательство того, что определитель является квадратом, будет следовать также из приводимой ниже леммы 1, устанавливающей существование удобного нормированного базиса.

Условимся об одном обозначении: если $u_1, \ldots, u_m$ — элементы из V, то $[u_1, \ldots, u_m]$ будет обозначать порожденный ими $\mathbf{Z}$-модуль. Во всех случаях, которые мы будем рассматривать, эти элементы лежат в D и оказываются независимыми над $\mathbf{Z}$ и потому даже над $\mathbf{R}$.

Лемма 1. *Пусть E — кососимметричная невырожденная билинейная форма на свободном $\mathbf{Z}$-модуле D со значениями в $\mathbf{Z}$. Тогда D разлагается в E-ортогональную прямую сумму*

$$D = [e_1, v_1] \oplus \ldots \oplus [e_n, v_n]$$

двумерных подмодулей $[e_j, v_j]$, таких, что $E(e_j, v_j) = d_j$ — положительное целое число и $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_n$.

Доказательство. Проведем индукцию. Среди всех значений $E(u, v)$ с $u, v \in D$ выберем наименьшее положительное, скажем d_1. Пусть $E(e_1, v_1) = d$. Обозначим 2-мерный $\mathbf{Z}$-модуль $[e_1, v_1]$, порожденный e_1, v_1, через D_1. Пусть $D_1^{\perp}$ — его ортогональное дополнение относительно E. Тогда $D_1 \cap D_1^{\perp} = \{0\}$, потому что в D_1 только 0 ортогонален к e_1 и v_1. Чтобы убедиться, что $D = D_1 + D_1^{\perp}$, применим стандартный прием ортогонализации Грама — Шмидта. Для всякой данной точки $u \in D$ можно отыскать такие числа a, b, что вектор

$$u - ae_1 - bv_1$$

ортогонален к $[e_1, v_1]$ (относительно E). Действительно, пусть, например,

$$E(u - ae_1 - bv_1, e_1) = E(u, e_1) + bd_1.$$

Так как все идеалы кольца $\mathbf{Z}$ главные, а d_1 — положительная образующая идеала всех значений формы E, то d_1 делит $E(u, e_1)$. Это позволяет найти b, обращающее наше выражение в нуль. Аналогично отыскивается a. Индукция по размерности завершает доказательство леммы.

Эта лемма, открытая Фробениусом, дает „кососимметрический" аналог утверждения о существовании ортогонального базиса симметричной формы. Соответствующее ортогональное разложение и базис $\{e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n\}$ мы будем называть ***разложением Фробениуса*** и ***базисом Фробениуса*** *решетки D относительно формы E.*

Рассмотрим $\mathbf{C}$-линейное по первому аргументу $\mathbf{R}$-билинейное отображение

$$L: V \times V \to \mathbf{C},$$

такое, что ***ассоциированная с ним кососимметричная форма***

$$E(x, y) = L(x, y) - L(y, x)$$

является римановой. Пусть, далее,

$$K: V \to \mathbf{R}$$

— $\mathbf{R}$-линейная функция. Назовем такую пару (L, K) ***типом*** тэта-функций, связанных с (V, D). Очевидно, множество тэта-функций типа (L, K) образует (вместе с 0) комплексное векторное пространство. Мы хотим вычислить его размерность.

Для любой римановой формы E, связанной с парой (V, D), мы можем определить эрмитову форму

$$H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y),$$

и затем билинейную форму

$$L(x, y) = -\frac{i}{2} H(x, y).$$

Мы все же вольны в выборе функции K, дополняющей L до типа (L, K), но мы видим во всяком случае, что L и H определяют друг друга однозначно. Разумеется, функция K определена лишь $\operatorname{mod} Z$.

Назовем тэта-функцию ***невырожденной***, если ассоциированная с ней форма H положительно определена (иными словами, если риманова форма E невырождена).

Лемма 2. *Пусть* $[e_1, v_1] \oplus \ldots \oplus [e_n, v_n]$ — *разложение Фробениуса решетки* D *относительно некоторой невырожденной римановой формы. Тогда система* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *есть* $\mathbf{C}$*-базис пространства* V.

Доказательство. Пусть V' обозначает, $\mathbf{R}$-пространство, порожденное $e_1, \ldots, e_n$, и пусть $V'' = iV'$. Предположим, что существует соотношение

$$x + iy = 0, \quad x, y \in V'.$$

Тогда элемент iy лежит в V' (ибо совпадает с $-x$) и, значит, E-ортогонален к V'. Но $E(iy, y) > 0$ при $y \neq 0$, так как форма E невырождена. Значит, $y = 0$. Поэтому $x = 0$. Лемма доказана.

Заметим, что мы установили, что (в обозначениях леммы) $V = V' + iV''$ (прямая сумма).

Следствие. *Пусть* (L, K) — *некоторый тип с невырожденной римановой формой. Выберем разложение Фробениуса, как в лемме* 2. *Тогда* $L(z, e_j) = 0$ *для всех* $z \in V$ *и всех* j.

Доказательство. Это сразу следует из $\mathbf{C}$-линейности формы L по первому аргументу.

Лемма 3. *Пусть* (L, K) — *тип с невырожденной римановой формой. Рассмотрим отвечающее ей разложение Фробениуса, как в лемме 2. Отождествив* V *с* $\mathbf{C}^n$ *с помощью базиса* $\{e_1, \ldots, e_n\}$, *запишем векторы* v_j *в виде столбцов коэффициентов разложения по этому базису. Пусть* T — *такая матрица, что*

$$v_j = T d_j e_j,$$

иными словами, $T = (v_1/d_1, \ldots, v_n/d_n)$. *Матрица* T *симметрична, и ее мнимая часть отрицательно определена,* Доказательство. Пусть $T=(\tau_{jk})$. По определению,

$$\frac{v_j}{d_j}=\sum_{\nu=1}^{n}\tau_{\nu j}e_\nu .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L(v_j,\ v_k)&=d_j\sum\tau_{\nu j}L(e_\nu,\ v_k)=\\ &=d_j\sum\tau_{\nu j}E(e_\nu,\ v_k)=\\ &=d_jd_k\tau_{kj}. \end{aligned}$$

(замена L на E возможна благодаря доказанному следствию). Так как $E(v_j,\ v_k)=0$, отсюда видно, что $L(v_j,\ v_k)=L(v_k,\ v_j)$; значит, матрица T симметрична.

Для доказательства второго утверждения запишем T в виде $T'+iT''$, где T' и T'' — вещественные матрицы. Тогда для любого вещественного (в базисе $\{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$) вектора r имеем

$$\langle Tr,\ r\rangle=\langle T'r,\ r\rangle+i\langle T''r,\ r\rangle,$$

а также

$$\langle Tr,\ r\rangle=L(z,\ z),$$

где

$$z=\sum r_jv_j/d_j.$$

Таким образом, мы должны изучить мнимую часть формы $L(z,\ z)$. Пусть $z=x+iy$, где $x,\ y$ лежат в определенном выше пространстве V'. Тогда при $y\neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} 0<E(iy,\ y)=E(x+iy,\ y)=E(z,\ y)=\\ =L(z,\ y)-L(y,\ z)=-L(y,\ z) \end{aligned}$$

в силу из леммы 2. С другой стороны,

$$L(z,\ z)=L(x,\ z)+iL(y,\ z).$$

Следовательно, мнимая часть формы $L(z,\ z)$ отрицательно определена, чем лемма 3 и доказана.

Пусть теперь

$$L_1\colon V\times V\to\mathbf{C}$$

— симметричная $\mathbf{C}$-билинейная форма, а

$$K_1\colon V \to \mathbf{C}$$

— $\mathbf{C}$-линейная форма. Очевидно, пространство целых тэта-функций типа (L, K) изоморфно пространству целых тэта-функций типа $(L + L_1, K + K_1)$. Действительно, если G — тривиальная тэта-функция типа (L_1, K_1) (экспонента суммы соответствующих форм, квадратичной и линейной), то умножение на G и деление на G доставляют взаимно обратные изоморфизмы пространств тэта-функций указанных типов. Это позволит нам выбирать тип (L, K) самым удобным образом для вычисления размерности пространства

$$\mathrm{Th}(L, K)$$

целых тэта-функций этого типа. Результат дается следующей теоремой.

Теорема 5 (Фробениус). *Пусть* (L, K) — *невырожденный тип по отношению к пространству с решеткой* (V, D). *Тогда целые тэта-функции этого типа на* V *по отношению к* D *в совокупности с нулем образуют векторное пространство над* $\mathbf{C}$, *размерность которого равна пфаффиану* E *относительно* D.

Доказательство. Заметим прежде всего, что форма L симметрична на группе $[e_1, \ldots, e_n]$ и, следовательно, на всем пространстве V', порожденном векторами $e_1, \ldots, e_n$ над $\mathbf{R}$. Следовательно, на V существует такая симметричная $\mathbf{C}$-билинейная форма L_1, что $L - L_1$ обращается в нуль на $[e_1, \ldots, e_n]$ и, значит, на V'. Аналогично на V существует такая $\mathbf{C}$-линейная форма K_1, что $K - K_1$ обращается в нуль на V'. Поэтому можно считать, что уже L и K обращаются в нуль на V'. В этом случае уравнения для тэта-функций становятся особенно простыми и нашу теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6. *Пусть* (L, K) — *невырожденный тип, связанный с* (V, D). *Рассмотрим такое разложение Фробениуса* $D = [e_1, v_1] \oplus \ldots \oplus [e_1, v_n]$, *что* L *и* K *обращаются в нуль на* $[e_1, \ldots, e_n]$. *Положим* $c_j = K(v_j)$

и для любой точки $z \in V$ обозначим через $\{z_1, \ldots, z_n\}$ координаты точки z в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ над $\mathbf{C}$. Тогда целые тэта-функции типа (L, K) — это в точности целые функции, которые удовлетворяют условиям

$$F(z+e_j) = F(z),$$
$$F(z+v_j) = F(z)\,\mathbf{e}(z_j d_j + c_j),$$

где $\mathbf{e}(w) = e^{2\pi i w}$. Размерность пространства таких функций равна $d_1 \ldots d_n$, где $d_j = E(e_j, v_j)$.

Доказательство. Ясно, что функциональные уравнения для тэта-функций сводятся в рассматриваемом случае к выписанным соотношениям в рассматриваемом случае. Построим теперь наши тэта-функции явно. Так как e_j являются точными периодами, любая тэта-функция разлагается в ряд Фурье

$$F(z) = \sum a(r)\, e^{2\pi i r \cdot z},$$

где сумма взята по всем $r \in \mathbf{Z}^n$. Вместо $r \cdot z$ мы будем писать также $\langle r, z\rangle$.

Вторая система уравнений накладывает на коэффициенты $a(r)$ соотношения вида

$$a(r - d_j e_j) = a(r)\,\mathbf{e}(r \cdot v_j + c_j),$$

где, напоминаем, $\mathbf{e}(w) = e^{2\pi i w}$. Чтобы решить эту систему уравнений, положим

$$a(r) = e^{2\pi i g(r)}.$$

Система приобретает вид

$$g(r - d_j e_j) - g(r) + e_j = \langle r, v_j\rangle.$$

Нетрудно выписать ее решение, „узнав“ в левой части поляризацию суммы квадратичной формы и линейной формы:

$$g(r) = -\frac{1}{2}\langle r, Tr\rangle - \frac{1}{2}\langle r, v_j\rangle + \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j c_j}{d_j} + h(r).$$

Здесь h можно выбрать как угодно на множестве векторов $s = (s_1, \ldots, s_n)$ с

$$0 \leqslant s_j < d_j$$

и затем однозначно продолжить на все r по „периодичности“. Этот произвол в выборе h дает в точности $d_1 \ldots d_n$ линейно независимых формальных рядов.

Остается проверить сходимость. Она, однако, очевидна, потому что порядок убывания $a(r) = e^{2\pi i g(r)}$ определяет квадратичная часть в показателе экспоненты, а она имеет вид отрицательно определенной квадратичной формы, ибо мнимая часть T отрицательно определена. Наша теорема доказана.

Будем теперь исходить из такого типа (L, K), связанная с которым форма E вырождена. Нас по-прежнему интересует размерность пространства тэта-функций этого типа. Можно считать, что они нормализованы. Тогда элементы пространства $\mathrm{Th}(L, K)$ индуцируют тэта-функции на фактор-торе $\bar{V}/\bar{D}$, где $\bar{V} = V/V_H$, а V_H — нуль-пространство ассоциированной эрмитовой формы. Далее,

$$\dim \mathrm{Th}(L, K) = \dim \mathrm{Th}(\bar{L}, \bar{K}),$$

где $(\bar{L}, \bar{K})$ — тип, индуцированный на $\bar{V}/\bar{D}$. Форма $\bar{E}$ невырождена, ее пфаффиан называется ***приведенным пфаффианом*** формы E. Таким образом, мы получаем

Следствие 1. *Размерность пространства* $\mathrm{Th}(L, K)$ *равна приведенному пфаффиану ассоциированной кососимметричной формы* E.

Доказательство. Это следует из нашей теоремы, определяющей размерность в невырожденном случае.

Замечание. Пусть (L, K) — невырожденный тип, связанный с (V, D). Может случиться, что существует бóльшая решетка D', такая, что (L, K) является невырожденным типом и по отношению к (V, D'). Однако таких решеток лишь конечное число. В самом деле, пусть $u \in D'$ и

$$u = \sum a_\nu e_\nu + \sum b_\nu v_\nu$$

— разложение по элементам базиса Фробениуса. Тогда

$$E(e_i, u) = b_i d_i, \quad E(v_i, u) = -a_i d_i.$$

Эти значения должны быть целыми числами. Значит, a_j, b_j могут принимать только конечное число значений $\mathrm{mod}\,\mathbf{Z}$, и существует только конечное число решеток D'.

Для каждой такой решетки D' факторгруппа D/D' конечна. Конечно и число возможных продолжений K на такие решетки. Пфаффиан формы E по отношению к решетке D' равен $d/(D':D) < d$, где d — пфаффиан E по отношению к D. Поэтому пространство тэта-функций типа (L, K') имеет меньшую размерность, чем пространство функций типа (L, K), и, кроме того, число таких пространств, отвечающих разным надрешеткам D', конечно.

§ 4. АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ТЕОРЕМА РИМАНА — РОХА НА ТОРЕ

Абелевой функцией *на V по отношению к решетке D* (или *на торе* $T = V/D$) мы будем называть отношение тэта-функций одинакового типа, а также нуль. Очевидно, абелевы функции образуют поле, которое мы назовем ***полем функций*** на торе T и будем обозначать через $\mathbf{C}(T)$. Заметим, что абелевы функции имеют элементы решетки D в качестве своих точных периодов:

$$f(z+u) = f(z), \quad z \in V, \ u \in D.$$

Из определений немедленно следует, что любая ненулевая абелева функция есть отношение *целых* тэта-функций одинакового типа.

Для всякой функции θ_0 типа (L, K) будем обозначать через $\mathscr{L}(\theta_0)$ пространство всех целых тэта-функций того же типа. Для любой функции θ из этого пространства отношение θ/θ_0 есть абелева функция. Если тип (L, K) невырожден, то размерность пространства $\mathscr{L}(\theta_0)$ определяется теоремой 5 § 3. Назовем $\mathscr{L}(\theta_0)$ ***линейной системой*** функции θ_0.

Будем называть две тэта-функции ***линейно эквивалентными*** и писать

$$\theta \sim \theta',$$

если их отношение есть абелева функция. Напомним, что в каждом классе тэта-функций, отличающихся тривиальным множителем, есть ровно одна нормализованная тэта-функция (теорема 2).

Замечание. *Две нормализованные тэта-функции линейно эквивалентны в том и только том случае, когда их типы совпадают.*

Это очевидно: отношение нормализованных тэта-функций нормализовано и оно является абелевой тэта-функцией, если и только если его тип равен (0, 0).

Пусть V_0 — пересечение всех нуль-пространств всех римановых форм относительно (V, D). Назовем V_0 ***вырожденным подпространством*** *пространства V относительно решетки D*. Оно само является нуль-пространством подходящей римановой формы: достаточно взять конечную сумму тех форм, в виде конечного пересечения нуль-пространств которых представляется V_0.

Так как любая абелева функция является нормализованной тэта-функцией, мы можем однозначно (с точностью до постоянного множителя) представить ее в виде отношения нормализованных целых тэта-функций, которые по существу определены на V/V_0, согласно результатам § 2. Следовательно, поле функций на V/D „совпадает“ с полем функций на $\overline{V}/\overline{D}$, где $\overline{V} = V/V_0$ и $\overline{D}$ — образ решетки D в V. Кроме того, пара $(\overline{V}, \overline{D})$ невырождена, т. е. допускает невырожденную риманову форму. Все это без труда сводит изучение поля функций к невырожденному случаю.

Теорема 7 (Риман — Рох). *Пусть $\theta_0, \ldots, \theta_m$ — целые тэта-функции, причем θ_0 невырождена. Существует такой многочлен P от $m+1$ переменной, что размерность пространства $\mathscr{L}\left(\theta_0^{r_0} \ldots \theta_m^{r_m}\right)$ равна*

$$P(r_0, \ldots, r_m)$$

для всех $r_0, \ldots, r_m \geqslant 0$, $r_0 > 0$. *Если* θ — *целая тэта-функция с невырожденной римановой формой* E, *то*[1])

$$\dim \mathscr{L}(\theta^r) = r^n \operatorname{pf}(E).$$

Доказательство. Это очевидно ввиду теоремы 5 § 3, потому что интересующая нас размерность совпадает с пфаффианом формы $r_0E_0 + \ldots + r_mE_m$.

Следствие 1. *Степень трансцендентности поля функций на* V/D *не превосходит* n.

Доказательство. Предположим, что существуют абелевы функции $f_1, \ldots, f_m$, алгебраически независимые над $\mathbf{C}$. Запишем их в виде отношений $f_j = \theta_j/\theta_0$ с общим знаменателем θ_0, который можно считать невырожденным (профакторизовав, если нужно, по нуль-пространству). Одночлены

$$\theta_1^{r_1} \ldots \theta_m^{r_m}, \quad r_1 + \ldots + r_m = r,$$

лежат в пространстве $\mathscr{L}(\theta_0^r)$, размерность которого в силу теоремы 7 равна $r^n \operatorname{pf}(E_0)$. С другой стороны, эти одночлены линейно независимы, а всего их $\binom{m+r}{m}$. Эта величина растет как r^m, откуда $m \leqslant n$, что и требовалось доказать.

В § 6 мы установим, что если на V/D есть невырожденная риманова форма, то степень трансцендентности поля функций в точности равна n. В этом предположении мы покажем сейчас, используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, что наше поле функций также конечно порождено.

Следствие 2. *Пусть на* V/D *имеется* n *алгебраически независимых абелевых функций* $f_1, \ldots, f_n$. *Тогда поле функций на* V/D *является конечным расширением поля* $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_n)$.

---

[1]) Ниже $\operatorname{pf}(E)$ обозначает пфаффиан формы E. — *Прим. ред.*

Доказательство. Положим снова $f_j = \theta_j/\theta_0$. Функция θ_0 должна быть невырожденной. Иначе, считая (что можно делать) θ_j и θ_0 нормализованными, мы могли бы рассмотреть индуцированные функции на факторпространстве $\overline{V} = V/V_H$, где V_H — нуль-пространство эрмитовой формы, связанной с θ_0. Это привело бы к противоречию со следствием 1.

Пусть g — произвольная абелева функция, $g = \varphi/\psi$, φ, ψ — нормализованные целые тэта-функции. Рассмотрим всевозможные одночлены

$$\theta_1^{r_1} \ldots \theta_n^{r_n} \varphi^q \psi^{s-q},$$

где $r_1 + \ldots + r_n = r$, $1 \leqslant q \leqslant s$. Каждый такой одночлен лежит в $\mathscr{L}(\theta_0^r \psi^s)$. Их количество равно $s\binom{r+n}{n}$. Асимптотически оно растет как $sr^n/n!$ при $n \to \infty$. Поскольку размерность пространства $\mathscr{L}(\theta_0^r \psi^s)$ равна

$$\mathrm{pf}\,(rE_0 + sE_\psi) = r^n\,\mathrm{pf}\,(E_0) + (\text{младшие члены}),$$

отсюда следует, что при $s > n!\,\mathrm{pf}\,(E_0)$ наши одночлены линейно зависимы. Разделив выражающее эту зависимость линейное соотношение на ψ^s, мы получим алгебраическое уравнение для g, коэффициенты которого лежат в $\mathbf{C}[f_1, \ldots, f_n]$, а степень не превосходит $n!\,\mathrm{pf}\,(E_0)$. Выберем теперь абелеву функцию максимальной степени над полем $\mathbf{C}(f_1, \ldots, f_n)$. По теореме о примитивном элементе из начальной теории полей эта функция должна порождать все поле абелевых функций, чем наша теорема и доказана.

§ 5. СДВИГИ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

Рассмотрим теперь сдвиги тэта-функций. Предположим, что функция θ — нормализованная, но необязательно целая. Пусть $a \in V$. Положим

$$\theta_a(x) = \theta(x - a)$$

и назовем θ_a ***сдвигом*** функции θ на a. Очевидно, θ_a — тэта-функция. Если тип функции θ равен (L, K), то типом функции θ_a будет $(L, K - L_a)$, где $L_a(u) = L(a, u)$. В самом деле,

$$\frac{\theta(x-a+u)}{\theta(x-a)} = \exp\left\{2\pi i\left[L(x-a, u) + \frac{1}{2}L(u, u) + K(u)\right]\right\},$$

откуда и следует требуемое. *Отметим, что билинейная форма L при сдвиге не меняется, поэтому не меняется и соответствующая эрмитова форма H.*

Сдв. 1. *Если θ нормализована, то тип нормализованной тэта-функции, эквивалентной θ_a, равен*

$$(L, K - E_a).$$

Доказательство. Умножив θ_a на тривиальную тэта-функцию

$$\exp\left\{2\pi i\left[-\frac{i}{2}H(x, a)\right]\right\},$$

мы избавимся от мнимой части формы $-L(a, u)$ в показателе степени функционального уравнения. Останется вещественная часть, которая равна $K(u) - E(a, u)$.

Сдв. 2. *Пусть θ, θ' — целые нормализованные тэта-функции, H, H' — соответствующие эрмитовы формы. Тогда $H = H'$ в том и только том случае, если существует точка $a \in V$, для которой $\theta_a \sim \theta'$.*

Доказательство. Предположим, что такая точка a существует. Поскольку тип функции θ_a равен $(L, K - L_a)$, получаем $L = L'$, откуда $H = H'$ (в силу единственности нормализации). Обратно, пусть $H = H'$. Обозначим через V_H нуль-пространство формы H. Тогда θ и θ' обе индуцируют на $V/V_H = \overline{V}$ тэта-функции, согласно результатам § 2. Кроме того,

$$\frac{\theta(x+u)}{\theta(x)} = \mathbf{e}\left[L(x, u) + \frac{1}{2}L(u, u) + K(u)\right],$$

$$\frac{\theta'(x+u)}{\theta'(x)} = \mathbf{e}\left[L(x, u) + \frac{1}{2}L(u, u) + K'(u)\right],$$

где форма L одна и та же в обоих случаях и $\mathbf{e}(w)=e^{2\pi i w}$. Заметим, что $e^{2\pi i K(u)}$ и $e^{2\pi i K'(u)}$ зависят только от класса $\bar{u}$ точки u и по модулю V_H. Следовательно, существует такая точка $\bar{a}\in\bar{V}$, что характер $e^{2\pi i\,[K'(u)-K(u)]}$ совпадает с

$$\mathbf{e}\,[K'(u)-K(u)]=\mathbf{e}\left[\frac{i}{2}H(a,u)\right].$$

Отсюда немедленно следует, что θ'/θ_a — абелева функция. Наше утверждение доказано.

Для любой тэта-функции θ обозначим через $\mathrm{Cl}(\theta)$ ее класс по модулю группы, порожденной тривиальными тэта-функциями и абелевыми функциями. Факторгруппа всех тэта-функций по модулю тривиальных и абелевых называется ***группой Пикара*** тора V/D или пары (V, D).

Очевидно, отображение

$$\varphi_\theta:\ a\longmapsto \mathrm{Cl}(\theta_a/\theta)$$

является гомоморфизмом тора V/D в его группу Пикара. Нас интересует его ядро.

Сдв. 3. *Пусть θ — невырожденная целая тэта-функция, нормализованная, типа (L, K). Тогда ядро гомоморфизма φ_θ является конечной подгруппой в V/D. Если элемент $v\in V$ таков, что θ_v/θ — тривиальная тэта-функция, то $E(v, u)\in\mathbf{Z}$ для всех $\bar{u}\in D$.*

Доказательство. Мы уже проверили (Сдв. 1), что нормализованная тэта-функция, эквивалентная θ_a, имеет тип $(L, K-E_a)$. Предположим, что a лежит в ядре гомоморфизма φ_θ. Тогда функция θ_a/θ эквивалентна некоторой абелевой функции. Поэтому

$$E_a(u)=E(a, u)\in\mathbf{Z}$$

для всех $u\in D$. Но форма E принимает целые значения на $D\times D$. Отсюда следует, что если мы разложим a по базису $\{u_1, \ldots, u_{2n}\}$ решетки D с вещественными коэффициентами, то эти коэффициенты будут рациональными числами с ограниченными знаменателями. Это в точности означает, что ядро φ_θ конечно в V/D. Пользуясь базисом Фробениуса, легко убедиться, что возможные знаменатели — это как раз элементарные делители $d_1, \ldots, d_n$.

Сдв. 4. *Пусть* θ — *нормализованная целая тэта-функция,* H — *ассоциированная с ней эрмитова форма и* V_H — *ее нуль-пространство. Тогда* $V_H + D$ *имеет конечный индекс в ядре гомоморфизма* φ_θ (*как подгруппе* V).

Доказательство. Задача немедленно сводится к невырожденному случаю. В самом деле, из § 2 мы знаем, что θ индуцирует на $\bar{V} = V/V_H$ тэта-функцию $\bar{\theta}$ с периодами $\bar{D} = D \bmod V_H$. Если $\theta_a \sim \theta$ и θ'_a — нормализованная тэта-функция, эквивалентная θ_a, то θ'_a имеет тип $(L, K - E_a)$ в силу Сдв. 1. Так как θ_a/θ'_a — абелева функция, отсюда следует, что $E(a, D) \subset \mathbf{Z}$, Но $E(a, D) = E(\bar{a}, \bar{D})$. Значит, $\bar{a}$ лежит в ядре $\varphi_{\bar{\theta}}$ как подгруппе тора $\bar{V}/\bar{D}$. Для завершения доказательства остается применить утверждение Сдв. 3.

§ 6. ПРОЕКТИВНОЕ ВЛОЖЕНИЕ

Пусть θ_0 — целая тэта-функция, $\{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m\}$ — базис пространства $\mathscr{L}(\theta_0)$. Этот базис определяет отображение

$$F\colon x \longmapsto (\theta_0(x), \ldots, \theta_m(x))$$

тора V/D в проективное пространство $\mathbf{P}^m$, определенное в тех точках x, где не все θ_j одновременно обращаются в нуль. Будем говорить, *что это отображение* ***индуцировано линейной системой функции*** θ_0. Мы покажем, что если у тора существует невырожденная риманова форма, то найдется и такая тэта-функция θ_0, что связанное с ней отображение является комплексно-аналитическим вложением тора в проективное пространство.

Вместо базиса пространства $\mathscr{L}(\theta_0)$ мы могли бы взять любую систему образующих этого пространства: получившееся отображение было бы определено точно на том же множестве, а именно на множестве тех точек x, для которых существует функция $\theta \in \mathscr{L}(\theta_0)$ с $\theta(x) \neq 0$. Представим θ в виде линейной комбинации элементов базиса. Очевидно, условие $\theta(x)=0$ равносильно тогда требованию, что образ точки x лежал в гиперплоскости пространства $\mathbf{P}^m$, определенной уравнением с теми же коэффициентами, что и коэффициенты этой линейной зависимости.

Пусть теперь θ — целая тэта-функция. Обозначим через X множество ее нулей, т. е. множество тех точек x, в которых $\theta(x)=0$. Мы можем рассматривать X как подмножество в V либо как подмножество в V/D, ибо оно инвариантно относительно сдвигов на элементы из D. Далее, пусть X^- — множество всех элементов $-x$, где $x \in X$. Очевидно, X^- есть множество нулей функции θ^-, определяемой равенством $\theta^-(z)=\theta(-z)$. Наконец, для любой точки $a \in V$ сдвиг X_a, состоящий из всех точек вида $x+a$ с $x \in X$, является множеством нулей функции θ_a (именно этим объясняется выбор знака минус в формуле, определяющей θ_a). Объединение конечного числа таких множеств нулей $X_1 \cup \ldots \cup X_m$ представляет собой множество нулей произведения $\theta_1 \ldots \theta_m$ соответствующих тэта-функций. В частности, оно не может совпадать со всем пространством.

Теорема 8 (Лефшец). *Пусть θ — целая невырожденная тэта-функция. Тогда индуцированное линейной системой $\mathscr{L}(\theta^3)$ отображение тора V/D в проективное пространство всюду определено и является аналитическим вложением.*

Доказательство. Начнем с замечания, что для любых двух точек $a, b \in V$ функция

$$\theta(x-a)\,\theta(x-b)\,\theta(x+a+b)$$

лежит в $\mathscr{L}(\theta^3)$. Поэтому для доказательства того, что наше отображение всюду определено, достаточно установить, что, какова бы ни была точка x, существуют точки a, b, для которых выписанное произведение не равно нулю. В этом нетрудно убедиться: сперва подберем a так, чтобы точка $x-a$ не лежала во множестве нулей функции θ, а затем отыщем b так, чтобы $\theta(x-b)\,\theta(x+a+b)\neq 0$. Каждая из этих задач сводится к отысканию точки, не лежащей на конечном объединении множеств нулей тэта-функций.

Докажем теперь, что построенное отображение инъективно. Заметим, что любая тэта-функция F, имеющая общий с θ тип, обладает тем свойством, что F^3 лежит в $\mathscr{L}(\theta^3)$. Значит, достаточно проверить следующее: если $x,\ y\in V$ имеют один и тот же образ в проективном пространстве, то их разность лежит в решетке D. Если x и y имеют общий образ, то существует такая комплексная константа $\gamma\neq 0$, что для всех b, z и всех F одинакового с θ типа имеем

$$F(x-z)\,F(x-b)\,F(x+z+b)=$$
$$=\gamma F(y-z)\,F(y-b)\,F(y+z+b).$$

Для каждой точки z_0 можно найти такую точку b, что

$$F(x-b)\,F(x+z_0+b)\,F(y-b)\,F(y+z_0+b)\neq 0.$$

Это же неравенство выполняется тогда и в подходящей окрестности точки z_0. Следовательно, в этой окрестности существует такая не обращающаяся в нуль голоморфная функция g_0, что

$$F(x-z)=F(y-z)\,g_0(z).$$

Ясно, что все такие функции аналитически продолжают друг друга и склеиваются в целую функцию без нулей g, такую, что для всех z

$$F(x-z)=F(y-z)\,g(z).$$

Положим $v=x-y$. Тогда последнюю формулу можно переписать в виде

$$F(z+v)=F(z)\,h(z),$$

где h — некоторая целая функция без нулей. Функциональное уравнение для F показывает, что h есть тривиальная тэта-функция вида

$$h(z) = Ce^{2\pi i\lambda(z)},$$

где λ есть $\mathbf{C}$-линейная функция. Действительно, тип h равен $(0, L_v)$, если у F тип (L, K). Функцию λ нетрудно определить явно. Прежде всего, мы знаем значения λ на элементах решетки D, именно

$$\lambda(u) - L(v, u) \in \mathbf{Z}.$$

Но

$$\lambda(u) - L(v, u) = \lambda(u) - L(u, v) + E(v, u).$$

Согласно Сдв. 3, $E(v, u)$ принимает целые значения. Следовательно, разность $\lambda(z) - L(z, v)$ принимает вещественные значения. Действительно, λ и L линейны по z над $\mathbf{R}$, а элементы решетки D порождают V над $\mathbf{R}$. Но λ и L также $\mathbf{C}$-линейны. Значит,

$$\lambda(z) = L(z, v).$$

Положим $D' = D + \mathbf{Z}v$. Тогда D' есть решетка, содержащая D и не совпадающая с D, если $v \notin D$. Из определений видно, что F является тэта-функцией типа (L, K') относительно D'. Как мы уже отмечали (вслед за доказательством теоремы Фробениуса в § 3), пространство тэта-функций типа (L, K') по отношению к (V, D') имеет размерность, строго меньшую, чем пространство тэта-функций того же типа, что θ. Следовательно, мы можем выбрать такую функцию F в $\mathscr{L}(\theta)$, которая не принадлежит типу (L, K') относительно какой бы то ни было большей решетки D'. Используя именно ее в предыдущем рассуждении, заключаем, что $v \in D$, т. е. x и y отличаются друг от друга на точку решетки. Этим инъективность нашего отображения доказана.

Остается установить, что дифференциал этого отображения нигде не обращается в нуль, т. е. что оно является вложением. Выберем произвольную точку x

и такую функцию G из $\mathscr{L}(\theta^3)$, что $G(x) \neq 0$. Любая функция $F \in \mathscr{L}(\theta^3)$ может рассматриваться как одна из проективных координат для нашей точки x, а соответствующей ей аффинной координатой будет F/G. Чтобы установить, что дифференциал нашего отображения не обращается в нуль ни на одном касательном векторе к точке x, достаточно проверить, что для любого вектора $v \in V$, $v \neq 0$ можно подобрать такую функцию F, что

$$d(F/G)(x)\,v \neq 0.$$

Возьмем базис пространства V, в котором $v = (1, 0, \ldots, 0)$. Имеем

$$d(F/G)(x) = \frac{G(x)\,dF(x) + F(x)\,dG(x)}{G(x)^2}.$$

Предположим, что $d(F/G)(x)\,v = 0$ для любой функции $F \in \mathscr{L}(\theta^3)$. Тогда

$$\frac{dF(x)}{F(x)}\,v = -\frac{dG(x)}{G(x)}\,v = \alpha,$$

где α не зависит от выбора F с $F(x) \neq 0$. В нашей системе координат имеем

$$dF(x)\,v = \frac{\partial F}{\partial z_1}(x), \quad \frac{dF(x)}{F(x)}\,v = \frac{1}{F(x)}\frac{\partial F}{\partial z_1}(x).$$

Пусть

$$f(z) = \frac{1}{\theta(z)}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}$$

в тех точках, где выражение справа определено. Выберем в качестве F функцию

$$F(z) = \theta(z-a)\,\theta(z-b)\,\theta(z+a+b)$$

с произвольными a, b. Тогда равенство

$$f(x-a) + f(x-b) + f(x+a+b) = \alpha$$

выполнено всюду вне исключительного множества, где обращаются в нуль знаменатели левой части. Рассмотрим теперь такую функцию от z:

$$f(x-z) + f(x-b) + f(x+z+b).$$

Она постоянна. Продифференцировав по каждой переменной z_j, получим

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(x-z)=\frac{\partial f}{\partial z_j}(x+z+b).$$

Вид правой части показывает, что эти частные производные постоянны, когда z меняется в подходящем открытом множестве. Отсюда следует, что в любом открытом множестве, где функция f определена, мы имеем

$$\frac{1}{\theta(z)}\frac{\partial\theta}{\partial z_1}=\alpha_1 z_1+\ldots+\alpha_n z_n+\beta$$

с некоторыми постоянными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$. Положим

$$q(z)=\frac{1}{2}\alpha_1 z_1^2+\alpha_2 z_1 z_2+\ldots+\alpha_n z_1 z_n+\beta z_1.$$

Тогда производная функции

$$\theta(z)\,e^{-q(z)}=\theta_1(z)$$

обращается в нуль на непустом открытом множестве и, значит, всюду. Это означает, что функция θ_1 (эквивалентная θ) зависит только от $n-1$ переменных. Но θ_1 — целая невырожденная тэта-функция. Мы пришли в очевидное противоречие с Сдв. 3, чем наша теорема и доказана.

Следствие. *На любом торе V/D, допускающем невырожденную риманову форму, существует n линейно независимых абелевых функций.*

Доказательство. У любой точки тора существуют аналитические локальные координаты, являющиеся абелевыми функциями. Они отображают некоторую окрестность этой точки на подходящее открытое множество в $\mathbf{C}^n$. Поэтому они алгебраически (и даже аналитически) независимы.

Этим следствием завершается доказательство справедливости предположения, которым мы пользовались в § 4, когда устанавливали, что поле функций на торе является конечным расширением чисто трансцендентного расширения размерности n.

Приложение I

РИМАНОВЫ ФОРМЫ И МАТРИЦЫ

Условия, определяющие риманову форму, в литературе часто записывают в матричном виде. Хотя никакой роли в наших доказательствах эта запись не играла, возможно, читателю будет полезно ознакомиться с ней. С этой целью мы и включили в главу настоящее приложение.

Пусть $V=\mathbf{C}^n$, $w_1, \ldots, w_{2n}$ — некоторый базис решетки D над $\mathbf{Z}$, E — некоторая билинейная вещественнозначная форма на V, и пусть

$$p_{ij}=E(w_i, w_j).$$

Назовем матрицу $P=(p_{ij})$ ***главной матрицей*** формы E относительно этого базиса. Положим

$$w_i=\sum_{k=1}^{2n} w_{ki}e_k,$$

где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис из координатных векторов в $\mathbf{C}^n$. Обозначим через

$$W=(w_{ij}), \quad i, j=1, \ldots, 2n,$$

матрицу, столбцы которой представляют векторы w_i в базисе e_k:

$$W=\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1,2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{2n,1} & \cdots & w_{2n,2n} \end{pmatrix}.$$

Пусть, далее, r_{ki} — такие вещественные числа, что

$$\sqrt{-1}\, w_i=\sum_{k=1}^{2n} r_{ki}w_k$$

и $R=(r_{ki})$ $(k, i=1, \ldots, 2n)$ — составленная из них матрица. Тогда

$$\sqrt{-1}\, W=WR.$$

Утверждение. *Форма E является невырожденной римановой формой тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

РФ1′. ${}^tP = -P$.

РФ2′. *Элементы матрицы P лежат в* $\mathbf{Z}$.

РФ3′. $WP^{-1}\,{}^tW = 0$, *а матрица*

$$-\sqrt{-1}\, W\,{}^tP^{-1}\overline{W}$$

эрмитова и положительно определена.

Доказательство. Очевидно, первые два условия равносильны первым двум условиям из определения римановой формы. Проверим, что два требования из РФ3′ означают соответственно, что форма $E(ix, y)$ симметрична и положительно определена. Заметим прежде всего, что матрица

$$\begin{pmatrix} W \\ \overline{W} \end{pmatrix}$$

невырождена. Имеем

$$E(\sqrt{-1}\, w_i, w_j) = \sum_k r_{ki} E(w_k, w_j) = \sum_k r_{ki} p_{kj}.$$

Поэтому

$${}^tRP = (E(\sqrt{-1}\, w_i, w_j)).$$

Эта матрица симметрична, если и только если

$${}^tRP = {}^tPR = -PR, \quad \text{т. е.} \quad P^{-1}\,{}^tR = -RP^{-1}$$

(при условии, что выполнены первые два требования, в частности, при условии, что матрица P кососимметрична). Равносильное требование:

$$-\begin{pmatrix} W \\ \overline{W} \end{pmatrix} RP^{-1}({}^tW\,{}^t\overline{W}) = \begin{pmatrix} W \\ \overline{W} \end{pmatrix} P^{-1}\,{}^tR({}^tW\,{}^t\overline{W}).$$

Пользуясь тем, что $WR = \sqrt{-1}\, W$, мы можем переписать это условие в виде

$$\begin{pmatrix} WP^{-1}\,{}^tW & WP^{-1}\,{}^t\overline{W} \\ -\overline{W}P^{-1}\,{}^tW & -\overline{W}P^{-1}\,{}^t\overline{W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -WP^{-1}\,{}^tW & WP^{-1}\,{}^t\overline{W} \\ -\overline{W}P^{-1}\,{}^tW & \overline{W}P^{-1}\,{}^t\overline{W} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что в левом нижнем и правом верхнем углах слева и справа попросту стоят одинаковые матрицы, а совпадение матриц в остальных двух углах равносильно соотношению

$$WP^{-1}\,{}^tW = 0.$$

Остается проверить последнее утверждение. Форма $E(ix, y)$ положительно определена, если и только если ${}^tRP > 0$, или, что то же,

$${}^tP^{-1}\,{}^tRPP^{-1} = {}^tP^{-1}\,{}^tR > 0.$$

Это симметричная вещественная $2n \times 2n$-матрица. Ее можно рассматривать как матрицу некоторой эрмитовой формы на $\mathbf{C}^{2n}$. Такая форма положительно определена в том и только том случае, когда матрица

$$\begin{pmatrix} W \\ \overline{W} \end{pmatrix} {}^tP^{-1}\,{}^tR\,({}^t\overline{W}\,{}^tW)$$

— эрмитова, положительно определенная. (Прежнюю матрицу мы умножили слева на квадратную комплексную матрицу, а справа — на сопряженно-транспонированную к ней.) Эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} W\,{}^tP^{-1}\,{}^tR\,{}^t\overline{W} & W\,{}^tP^{-1}\,{}^tR\,{}^tW \\ \overline{W}\,{}^tP^{-1}\,{}^tR\,{}^t\overline{W} & \overline{W}\,{}^tP^{-1}\,{}^tR\,{}^tW \end{pmatrix}.$$

Ее эрмитовость означает, что в нижнем левом и верхнем правом углах стоят нули. Положительная определенность равносильна тому, что матрица

$$W\,{}^tP^{-1}\,{}^tR\,{}^t\overline{W}$$

положительно определена, а это в свою очередь означает, что положительно определена матрица

$$-\sqrt{-1}\,W\,{}^tP^{-1}\overline{W},$$

чем и завершается доказательство.

Приложение 2

ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Небесполезно будет напомнить здесь читателю вкратце особенности одномерного случая. Все тэта-функции здесь можно получить из одной-единственной, для которой все точки решетки служат простыми нулями, а других нулей нет. Положим $D = [w_1, w_2]$; так как переменная одна, мы можем записать эту функцию в виде произведения:

$$\sigma(z) = z \prod_{w \in D'} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left[\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2\right]$$

(здесь $D' = D \setminus \{0\}$). Классическое название этой функции — *сигма-функция Вейерштрасса*. Ее логарифмическая производная называется *дзета-функцией Вейерштрасса*:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in D'} \left[\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2}\right].$$

Еще одно дифференцирование дает *$\wp$-функцию Вейерштрасса* с обратным знаком; легко убедиться, что она периодична. Поэтому для любого периода w имеем

$$\zeta(z + w) = \zeta(z) + \eta(w),$$

где функция η аддитивна по w. Интегрируя это соотношение и переходя к экспоненте, находим

$$\sigma(z + w) = \psi(w) \exp\left[\eta(w)\left(z + \frac{w}{2}\right)\right] \sigma(z),$$

где $\psi(w)$ — подходящая функция. Заметим, что функция

$$L(z, w) = \eta(w) z$$

C-линейна по z и аддитивна по w, как и должно быть. Это показывает, что σ — тэта-функция. Легко проверить, что

$$\psi(w) = 1, \quad \text{если} \quad w/2 \text{ — период},$$
$$\psi(w) = -1, \quad \text{если} \quad w/2 \text{ — не период}.$$

Наконец, тэта-функция, связанная с произвольным дивизором, совпадает с произведением подходящих сдвигов сигма-функции:

$$\prod_{i=1}^{r} \sigma(z - a_i)^{m_i}.$$

Таким образом, в одномерном случае существование вейерштрассова представления целых функций в виде произведения делает почти тривиальной основную теорему о связи тэта-функций с дивизорами, которую мы докажем в гл. VI.

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

§ 1. ДВОЙСТВЕННОЕ АБЕЛЕВО МНОГООБРАЗИЕ

Пусть снова V обозначает n-мерное векторное пространство над $\mathbf{C}$ с решеткой D. Предположим, что (V, D) допускает невырожденную риманову форму. В этом случае мы будем называть комплексно-аналитический тор V/D ***абелевым тором.*** Образ тора V/D при его погружении в проективное пространство в качестве алгебраического подмногообразия называется ***абелевым многообразием.*** Мы будем, однако, продолжать работать с абелевыми торами и тета-функциями. В этом параграфе мы следуем изложению А. Вейля [7].

Обозначим через V^* комплексное *антидвойственное* пространство для V. Оно состоит из *антифункционалов*, т. е. $\mathbf{R}$-линейных отображений,

$$\xi\colon V \to \mathbf{C}$$

со свойством $\xi(ix) = -i\xi(x)$ для всех $x \in V$. Значение антифункционала ξ на элементе $x \in V$ мы будем обозначать через $\langle \xi, x\rangle$. Отображение $(\xi, x) \longmapsto \langle \xi, x\rangle$ является билинейным отображением $V^* \times V$ в $\mathbf{C}$ (заметим, что V^* — линейное пространство над $\mathbf{C}$).

Для любого вектора $\xi \in V^*$ отображение $\bar{\xi}\colon x \longmapsto \overline{\xi(x)}$ является $\mathbf{C}$-линейным. Поэтому антифункционалы — это просто отображения, комплексно сопряженные к функционалам. (Мы вводим антидвойственное пространство для того, чтобы некоторое отображение φ_E, которое будет определено ниже, оказалось аналитичным, а не антианалитичным.)

Любой элемент $\xi \in V^*$ однозначно определяется своей мнимой частью. В самом деле, пусть

$$\xi = \rho + i\mu,$$

где $\rho = \operatorname{Re} \xi$, $\mu = \operatorname{Im} \xi$. Условие $\xi(ix) = -i\xi(x)$ означает, что

$$\mu(x) = \rho(ix), \quad \mu(ix) = -\rho(x).$$

Обратно, по любому $\mathbf{R}$-линейному отображению μ: $V \to \mathbf{R}$ можно определить антифункционал $\xi = \rho + i\mu$, взяв в качестве ρ функцию, которая определяется по μ написанной выше формулой.

Отсюда следует, что $\mathbf{R}$-билинейное отображение

$$(\xi, x) \longmapsto \operatorname{Im} \langle \xi, x \rangle$$

невырождено, и элементарное рассуждение показывает, что множество D^* тех элементов $u^* \in V^*$, для которых $\operatorname{Im} \langle u^*, u \rangle \in \mathbf{Z}$ при всех $u \in D$, является решеткой в V^*.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{C}_1$ — *группа комплексных чисел с единичным модулем. Для каждого элемента* $\xi \in V^*$ *обозначим через* ψ_ξ *элемент группы* $\operatorname{Hom}(D, \mathbf{C}_1)$, *определенный формулой*

$$\psi_\xi(u) = e^{2\pi i \operatorname{Im} \langle \xi, u \rangle}.$$

Тогда отображение $\xi \longmapsto \psi_\xi$ *определяет изоморфизм между* V^*/D^* *и* $\operatorname{Hom}(D, \mathbf{C}_1)$.

Доказательство. Отображение $\xi \longmapsto \psi_\xi$, очевидно, является гомоморфизмом. Предположим, что $\psi_\xi(u) = 1$ для всех $u \in D$. Ясно, что это равносильно тому, что $\xi \in D^*$. Значит, на факторгруппе V^*/D^* наше отображение инъективно. Чтобы установить его сюръективность, рассмотрим какой-нибудь гомоморфизм $D \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Так как группа D свободна, этот гомоморфизм можно поднять до аддитивного отображения ρ: $D \to \mathbf{R}$, которое в свою очередь можно продолжить до $\mathbf{R}$-линейного отображения $V \to \mathbf{R}$. Как мы уже отмечали, ρ является вещественной частью подходящего антифункционала ξ, что и доказывает нашу лемму.

Пусть E — некоторая риманова форма на (V, D) и H — ассоциированная с ней эрмитова форма. Таким образом, E — мнимая часть H и

$$H(x, y) = E(ix, y) + iE(x, y).$$

Существует единственное $\mathbf{C}$-линейное отображение

$$\varphi_E\colon V \to V^*,$$

обладающее свойством

$$H(x, y) = \langle \varphi_E(x), y \rangle$$

для всех $x, y \in V$. Рассмотрим мнимые части и вспомним, что $E(u, v) \in \mathbf{Z}$ при $u, v \in D$. Мы обнаружим, что φ_E отображает D в D^* и, значит, индуцирует гомоморфизм (который мы обозначаем тем же символом φ_E)

$$\varphi_E\colon V/D \to V^*/D^*.$$

Предположим, что форма E невырождена. Очевидно, тогда форма H также невырождена и отображение $\varphi_E\colon V \to V^*$ является изоморфизмом. В этом случае мы можем ***перенести*** E на V^*, положив по определению

$$E^*(\varphi_E(x), \varphi_E(y)) = E(x, y),$$

или, что то же,

$$E^*(\xi, \eta) = E\left(\varphi_E^{-1}(\xi), \varphi_E^{-1}(\eta)\right).$$

Заметим, что φ_E отображает D на некоторую подрешетку в D^*. Поэтому некоторое целое кратное отображения φ_E отображает подходящую подрешетку в D на D^*.

Итак, мы доказали, среди прочего, следующий результат.

Теорема 1. *Пусть E — невырожденная риманова форма на (V, D) и E^* — ее перенос на V^*. Тогда существует такое положительное целое число m, что mE^* — невырожденная риманова форма на (V^*, D^*).*

Мы видим, что если V/D — абелев тор, то V^*/D^* — также абелев тор.

Пусть теперь C, D — две решетки в V. Любой комплексно-аналитический гомоморфизм

$$\lambda_0\colon V/D \to V/C$$

можно поднять до $\mathbf{C}$-линейного отображения λ, делающего коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\lambda} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V/D & \xrightarrow[\lambda_0]{} & V/C \end{array}$$

Это нетрудно установить, написав локальное разложение λ_0 вблизи нуля в степенной ряд и заметив, что из аддитивности следует обращение в нуль всех членов ряда, кроме линейных. Значит, локально вблизи нуля отображение λ $\mathbf{C}$-линейно. Далее, для любого $x \in V$ можно найти такое большое целое число N, что x/N окажется вблизи нуля, и

$$\lambda_0\left(N\cdot\frac{x}{N}\right) = N\lambda_0\frac{x}{N}.$$

Отсюда следует глобальное утверждение: $\lambda_0 \equiv \lambda \bmod C$. Разумеется, этот результат ясен также и с общей точки зрения: гомоморфизм λ_0 поднимается до отображения универсального накрытия V тора V/D.

Обычно мы будем обозначать одной и той же буквой λ отображение пространства V и индуцированное им отображение тора V/D. Кольцо комплексно-аналитических отображений $\lambda\colon V/D \to V/D$ обозначим символом $\mathrm{End}\,(V/D)$. Согласно сделанному замечанию, оно отождествляется с некоторым подкольцом линейных эндоморфизмов V. Это отождествление мы назовем ***аналитическим представлением*** кольца $\mathrm{End}\,(V/D)$. Тензорное произведение этого кольца с кольцом рациональных чисел $\mathbf{Q}$ обозначим через $\mathrm{End}\,(V/D)_{\mathbf{Q}}$. Если $\lambda \in \mathrm{End}\,(V/D)$ (или $\mathrm{End}\,(V/D)_{\mathbf{Q}}$), то соответствующее линейное отображение пространства V мы будем обозначать символами $V(\lambda)$, или λ_V, или $\lambda_{\mathbf{C}}$.

Пусть $\lambda \in \mathrm{End}\,(V/D)$. Сопряженное к λ отображение — элемент кольца $\mathrm{End}\,(V^*/D^*)$ — определяется обычной формулой

$$\langle {}^t\lambda\xi, x\rangle = \langle \xi, \lambda x\rangle.$$

Выбрав еще невырожденную риманову форму E на V/D, мы можем определить ***инволюцию*** кольца $\mathrm{End}(V/D)$:

$$\lambda' = \lambda'_E = \varphi_E^{-1}\, {}^t\lambda\varphi_E.$$

Теорема 2. *Пусть E — невырожденная риманова форма на (V, D), H — ассоциированная с ней эрмитова форма. Положим $\lambda' = \lambda'_E$. Тогда отображение λ' сопряжено с λ по отношению к H, т. е.*

$$H(\lambda x, y) = H(x, \lambda' y), \qquad x,\ y \in V.$$

Поэтому $\mathrm{Tr}(\lambda\lambda') > 0$, *если* $\lambda \neq 0$.

Доказательство получается простым вычислением:

$$\begin{aligned} H(\lambda x, y) &= \overline{H(y, \lambda x)} = \overline{\langle \varphi_E(y), \lambda x\rangle} = \\ &= \overline{\langle {}^t\lambda\varphi_E(y), x\rangle} = \overline{H(\varphi_E^{-1}\, {}^t\lambda\varphi_E(y), x)} = \\ &= H(x, \varphi_E^{-1}\, {}^t\lambda\varphi_E(y)) = H(x, \lambda' y). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы 2 следует, что введенная операция $\lambda \mapsto \lambda'$ действительно есть инволюция: $\lambda'' = \lambda$.

§ 2. СВЯЗЬ С ТЭТА-ФУНКЦИЯМИ

Назовем нормализованную тэта-функцию ***алгебраически эквивалентной нулю***, если ассоциированная с ней эрмитова форма равна нулю. Для такой тэта-функции F функциональное уравнение принимает вид

$$F(x + u) = F(x)\,\psi_F(u),$$

где $\psi_F\colon D \to \mathbf{C}_1$ — некоторый характер решетки D, однозначно определяемый функцией F. Мы назовем его характером, ***ассоциированным с*** F. В наших прежних обозначениях $\psi_F(u) = e^{2\pi i K(u)}$. Этот характер не меняется при замене F на линейно эквивалентную функцию. Обратно, две нормализованные тэта-функции, алгебраически эквивалентные нулю и имеющие общий ассоциированный характер, линейно эквивалентны.

Тэта-функции, алгебраически эквивалентные нулю, образуют, очевидно, группу, которую мы обозначим через $\mathrm{Th}_a(V/D)$. Она содержит подгруппу абелевых функций, обозначаемую через $\mathrm{Th}_l(V/D)$. Факторгруппа

$$\mathrm{Th}_a(V/D)/\mathrm{Th}_l(V/D)$$

называется ***связной компонентой группы Пикара*** или *группой Пикара в узком смысле* $\mathrm{Pic}_0(V/D)$ тора V/D. В этой главе мы не будем, однако, вводить полной группы Пикара, ограничиваясь рассмотрением ее связной компоненты. Поэтому мы будем называть Pic_0 просто группой Пикара.

Отображение $F \longmapsto \psi_F$, определенное выше, индуцирует инъективный гомоморфизм

$$\mathrm{Pic}_0(V/D) \to \mathrm{Hom}(D, \mathbf{C}_1).$$

Мы покажем сейчас, что он является изоморфизмом.

Напомним, что, как мы установили в гл. 4 (§ 5, Сдв. 1), если θ — нормализованная тэта-функция типа (L, K), то нормализованная тэта-функция, эквивалентная θ_a, имеет тип $(L, K - E_a)$. Напомним, кроме того, обозначение отображения

$$\varphi_\theta\colon a \longmapsto \mathrm{Cl}(\theta_a/\theta)$$

и отметим, что нормализованная тэта-функция в классе θ_a/θ алгебраически эквивалентна нулю.

Следовательно, характер, ассоциированный с классом линейной эквивалентности функции θ_a/θ, имеет вид

$$u \longmapsto e^{-2\pi i E(a, u)}.$$

Теорема 3. *Пусть E — невырожденная риманова форма на (V, D) и θ — целая тэта-функция эрмитова типа (H, ψ), где E — мнимая часть формы H. Тогда следующая диаграмма коммутативна с точностью до* *умножения на* -1:

$$\begin{array}{ccc} V/D & \xrightarrow{\varphi_E} & V^*/D^* \\ {\scriptstyle\varphi_\theta}\downarrow & (-1) & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathrm{Pic}_0(V/D) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(D, \mathbf{C}_1) \end{array}$$

Здесь правая вертикальная стрелка есть изоморфизм, индуцированный отображением $\xi \mapsto \psi_\xi$, *определенным в лемме из* § 1. *Нижняя стрелка переводит каждый элемент группы Пикара в ассоциированный с ним характер и является изоморфизмом. Поэтому ядро гомоморфизма* φ_θ *конечно и группа* $\mathrm{Pic}_0(V/D)$ *изоморфна* V^*/D^*.

Доказательство. Теорема станет очевидной, если собрать воедино уже имеющуюся информацию. Начнем с произвольного элемента $x \in V$. Его образ $\varphi_E(x)$ характеризуется соотношением

$$H(x, u) = \langle \varphi_E(x), u \rangle.$$

Соответствующий характер есть экспонента мнимых частей:

$$u \mapsto e^{2\pi i E(x, u)}.$$

С другой стороны, второй путь по стрелкам приводит к ассоциированному характеру нормализованной тэта-функции в классе θ_x/θ, который равен $e^{-2\pi i E(x, u)}$. Тем самым установлено утверждение о коммутативности. Из невырожденности формы E следует, что для любого характера решетки D существует алгебраически эквивалентная нулю нормализованная тэта-функция, с которой этот характер ассоциирован. Поэтому нижняя стрелка является изоморфизмом. Теорема доказана.

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОМПЛЕКСНЫМ И РАЦИОНАЛЬНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ

Пусть V/D, как и выше, — абелев тор и

$$D = [u_1, \ldots, u_{2n}].$$

Положим $V = \mathbf{C}^n$, т. е. зафиксируем некоторый базис в V. Обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ единичные векторы —

элементы этого базиса, рассматриваемые как векторы-столбцы, так что

$$(e_1, \ldots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Подобным же образом будем рассматривать $u_1, \ldots, u_{2n}$ как векторы-столбцы, так что $(u_1, \ldots, u_{2n})$ это $n \times 2n$-матрица с комплексными элементами. Рассмотрим эндоморфизм $\lambda \in \operatorname{End}(\mathbf{C}^n/D)$. Он представляется в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ комплексной $n \times n$-матрицей

$$(\lambda e_1, \ldots, \lambda e_n) = (e_1, \ldots, e_n)\, C(\lambda).$$

С другой стороны, он представляется также *рациональной* $2n \times 2n$-матрицей $Q(\lambda)$, поскольку λ отображает D в себя:

$$(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_{2n}) = (u_1, \ldots, u_{2n})\, Q(\lambda)$$

(***рациональное представление***). Обозначим через U матрицу размера $n \times 2n$, образованную из $u_1, \ldots, u_n$:

$$U = (u_1, \ldots, u_{2n}).$$

Тогда

$$(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_{2n}) = (e_1, \ldots, e_n)\, C(\lambda)\, U,$$

а также

$$(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_{2n}) = (e_1, \ldots, e_n)\, U Q(\lambda).$$

Поэтому

$$\boxed{C(\lambda)\, U = U Q(\lambda).}$$

Теорема 4. *Рациональное представление $\lambda \mapsto Q(\lambda)$ эквивалентно прямой сумме комплексного представления и сопряженного к нему.*

Доказательство. Матрица $\begin{pmatrix} U \\ \bar{U} \end{pmatrix}$ обратима, и мы имеем соотношение, комплексно сопряженное к доказанному выше:

$$\overline{C(\lambda)U} = \overline{U}Q(\lambda).$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} C(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{C(\lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \overline{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ \overline{U} \end{pmatrix} Q(\lambda),$$

что и доказывает нашу теорему.

§ 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ И p-АДИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть p — простое число. Точки периода p^r на V/D представлены подгруппой

$$(V/D)_r = \frac{1}{p^r} D/D.$$

Обозначим через $T_p(V/D)$ множество всех бесконечных векторов

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

для которых $a_r \in (V/D)_r$ и $pa_{r+1} = a_r$. Оно является группой относительно покомпонентного сложения. Эта группа называется ***группой Тэйта***. Целые p-адические числа действуют на $T_p(V/D)$ следующим образом. Пусть z — такое число и m — обыкновенное целое число, такое, что $m \equiv z \bmod p^r$. Тогда мы полагаем $za = ma$ для всех точек a с $p^r a = 0$. От выбора m это определение не зависит. Наконец, определяем

$$z \cdot (a_1, a_2, \ldots) = (za_1, za_2, \ldots).$$

Очевидно, это превращает $T_p(V/D)$ в $\mathbf{Z}_p$-модуль без кручения.

Модуль $T_p(V/D)$ свободен ранга $2n$ над $\mathbf{Z}_p$, где n — комплексная размерность пространства V.

Доказывается это легко. Обозначим через $x_1, \ldots, x_{2n}$ векторы в $T_p(V/D)$, первые координаты которых $a_{1,1}, \ldots, a_{2n,1}$ линейно независимы над $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Эти векторы линейно независимы над $\mathbf{Z}_p$. Действительно, допустим, что существует нетривиальное соотношение линейно зависимости между ними. Можно считать, что не все его коэффициенты делятся на p. Но тогда индуцированное соотношение между первыми координатами нетривиально, в противоречие с предположением.

Покажем теперь, что векторы x_i образуют базис модуля $T_p(V/D)$ над $\mathbf{Z}_p$. Применим индукцию. Предположим, уже доказано, что любой элемент w из $T_p(V/D)$ может быть записан в виде

$$(1) \qquad w \equiv z_1 x_1 + \ldots + z_{2n} x_{2n} \pmod{p^r T_p(V/D)},$$

где $z_j \in \mathbf{Z}$. Положим $w = (b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots)$. Согласно предположению,

$$z_1(a_{1,1}, \ldots, a_{1,r+1}) + \ldots + z_{2n}(a_{2n,1}, \ldots, a_{2n,r+1}) = \\ = (b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}) + (0, \ldots, 0, c_{r+1}),$$

где $c_{r+1} \in (V/D)_{r+1}$. Но по выбору векторов x_i существуют такие целые числа $d_1, \ldots, d_{2n}$, что

$$c_{r+1} = d_1 p^r a_{1,r+1} + \ldots + d_{2r} p^r a_{2r,r+1}.$$

Заменив $z_1, \ldots, z_{2r}$ на $z_1 + d_1 p^r, \ldots, z_{2r} + d_{2r} p^r$, мы получаем соотношение вида (1), но уже для $r+1$, чем индукция и завершена.

Теперь мы можем определить p-адический аналог пространства V. Обозначим через $V_p(V/D)$ множество векторов вида

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

где $a_0 \in (V/D)_r$ для какого-нибудь r и $pa_{r+1} = a_r$ для всех $r > 0$. Проекция на первую координату определяет точную последовательность

$$0 \to T_p(V/D) \to V_p(V/D) \to (V/D)^{(p)} \to 0,$$

где через $(V/D)^{(p)}$ обозначено объединение групп $(V/D)_r$ для всех целых положительных чисел r, т. е. множество точек на торе V/D, периоды которых суть степени p.

Умножение на p^r определяет естественный изоморфизм

$$\frac{1}{p^r} D/D \approx D/p^r D.$$

Переходя к проективному пределу по r, получаем изоморфизм

$$\text{(2)} \qquad \boxed{T_p(V/D) \approx \mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} D.}$$

Любой элемент $\lambda \in \mathrm{End}(V/D)$ определяет $\mathbf{Z}_p$-эндоморфизм модуля $T_p(V/D)$:

$$T_p(\lambda)(a_1, a_2, \ldots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots).$$

Аналогично определяется представление $V_p(\lambda)$ в пространстве $V_p(V/D)$. Это представление кольца $\mathrm{End}(V/D)$ на $V_p(V/D)$ называется p-***адическим представлением.***

Теорема 5. *p-адическое представление кольца* $\mathrm{End}(A)$ *эквивалентно рациональному представлению.*

Доказательство. Это факт очевидным образом следует из заключенного в рамочку изоморфизма (2).

Впервые p-адические представления на точках конечного порядка были введены Дёйрингом и А. Вейлем почти одновременно в 1940 и 1941 гг. Дёйринг существенно пользовался ими в статье „Die Typen der Multiplikatorenringe ellip tischer Funktionenkörper" (*Abh. Math. Sem. Hamb.*, 1941, 197—272), а также в своей более ранней статье о теории соответствий, опубликованной в том же году. Вейль упомянул о них в своей статье „Sur ler fonctions algébriques à corps de constantes fini" (*C. R.*, **210** (1940), 592—594) и затем существенно развил их теорию в своей книге, посвященной абелевым многообразиям.

Шимура и Таниямà в своей книге [3] описали применения p-адических представлений к нормам комплексного умножения. Тэйт заметил около 1957 г. что, перейдя к проективному пределу, т. е. рассмотрев бесконечные векторы, как в начале этого параграфа, можно получить модуль над $\mathbf{Z}_p$ (или $\mathbf{Q}_p$), дающий более естественный подход к этим представлениям.

§ 5. СПАРИВАНИЕ КУММЕРА

Опишем теперь p-адический вариант двойственности между V/D и двойственным тором V^*/D^*.

Пусть вектор $\xi \in V^*$ таков, что $N\xi \in D^*$ для подходящего положительного целого числа N. (Ниже будет важен случай, когда N является степенью простого числа, но обозначения удобнее в общем случае.) Напомним изоморфизмы

$$\mathrm{Pic}_0(V/D) \approx \mathrm{Hom}(D, \mathbf{C}_1) \approx V^*/D^*.$$

Они позволяют поставить вектору ξ в соответствие некоторую нормализованную тэта-функцию f_ξ (разумеется, не целую). Она определена однозначно с точностью до умножения на абелеву функцию, алгебраически эквивалентна нулю и удовлетворяет соотношению

$$f_\xi(x+u) = f(x)\,\psi_\xi(u) = f(x)\,e^{2\pi i\,\mathrm{Im}\langle \xi, u\rangle}$$

для всех $x \in V$ и $u \in D$. Для заданного конечного множества векторов $u \in D$ всегда можно подобрать такое x в V, что все члены этого соотношения будут принимать конечные значения. Из соотношения $N\xi \in D^*$ следует, что f_ξ^N есть абелева функция. Поэтому для любой точки $a \in V$ с $Na \in D$ существует такой корень из единицы $e_N(\xi, a)$ степени N, что

$$\boxed{f_\xi(Nx + Na) = e_N(\xi, a)\, f_\xi(Nx).}$$

Очевидно, что этот корень не зависит ни от выбора f_ξ в своем классе линейной эквивалентности, ни от выбора $\xi \pmod{D^*}$ и $a \pmod{D}$. Поэтому отображение

$$(\xi, a) \mapsto e_N(\xi, a)$$

индуцирует отображение

$$(V^*/D^*)_N \times (V/D)_N \to \mu_N,$$

где μ_N — группа корней из единицы степени N. Тривиальная проверка показывает, что это отображение $\mathbf{Z}$-билинейно, т. е. является спариванием. Столь же легко проверить, что его ядра тривиальны, т. е. что оно определяет точную двойственность между $(V^*/D^*)_N$ и $(V/D)_N$.

Представляет интерес следующий частный случай. Пусть θ — целая тэта-функция, E — ассоциированная с ней риманова форма. Для любой точки $b \in V$ существует в классе $\mathrm{Cl}(\theta_b/\theta)$ единственная нормализованная тэта-функция f, ассоциированный характер которой равен $-E_b$. Предположим, что $Nb \equiv 0 \bmod (D)$ и $Na \equiv 0 \pmod D$, иными словами, что b и a представляют точки порядка N в V/D. Тогда

$$\boxed{e_N(\varphi_E(b), a) = e^{-2\pi i NE(b, a)}.}$$

Это очевидно из определений и теоремы 3.

Займемся теперь p-адическим вариантом. Будем в предыдущих рассмотрениях вместо N иметь в виду p^N. Тогда $(V/D)_N$ следует понимать как $(V/D)_{p^N}$; аналогично меняется смысл обозначений $(V^*/D^*)_N$ и μ_N. При переходе от p^N к p^{N+1} спаривания согласованы в следующем смысле: если $p^{N+1}\xi \in D^*$ и $p^{N+1}a \in D$, то

$$e_{N+1}(\xi, a)^p = e_N(p\xi, pa).$$

Поэтому можно перейти к проективному пределу и получить $\mathbf{Z}_p$-билинейное отображение групп Тэйта

$$T_p(V^*/D^*) \times T_p(V/D) \to T_p(\mu).$$

Оно является невырожденным $\mathbf{Z}_p$-спариванием двух $\mathbf{Z}_p$-модулей. Заметим, что $T_p(\mu)$ состоит из векторов вида

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots),$$

где ζ_N — корень из единицы степени p^N и $\zeta_{N+1}^p = \zeta_N$. Таким образом, $T_p(\mu)$ — свободный модуль ранга 1 над $\mathbf{Z}_p$, который можно отождествить с $\mathbf{Z}_p$, лишь выбрав его образующую.

Замечание. Преимущество данных определений $e_N(\xi, a)$ и p-адического спаривания состоит в том, что они допускают *чисто алгебраическую* трактовку. Погрузив абелев тор в проективное пространство, мы получим множество комплексных точек $A_{\mathbf{C}}$ абелева многообразия A, которое можно определить системой уравнений с коэффициентами в подходящем поле k. В следующей главе мы покажем, что нули любой тэта-функции на V отвечают некоторому дивизору на A. После этого можно проверить, что существует чисто алгебраическое определение числа $e_N(\xi, a)$, использующее только класс дивизоров на A, отвечающий ξ. Корни из единицы, которые при этом возникают, могут порождать нетривиальные расширения поля коэффициентов k (это заведомо так, если k конечно порождено над $\mathbf{Q}$, а N достаточно велико). Дополнительное преимущество структуры группы корней из единицы и модуля $T_p(\mu)$ состоит в действии на них группы Галуа алгебраического замыкания поля k. Это существенно для исследования арифметических аспектов ситуации. В таком контексте бессмысленно отождествлять $T_p(\mu)$ с $\mathbf{Z}_p$, потому что на $\mathbf{Z}_p$ группа Галуа действует тривиально.

Мы отсылаем читателя к книгам Ленга, Мамфорда, Шимуры и Таниямы и Вейля (см. список литературы), в которых изложена алгебраическая теория и ее приложения.

ГЛАВА VI

ТЭТА-ФУНКЦИИ И ДИВИЗОРЫ

Пусть M — комплексное многообразие. Всюду в дальнейшем в качестве M будет фигурировать либо $\mathbf{C}^n$, либо $\mathbf{C}^n/D$, где D — решетка (дискретная подгруппа ранга $2n$). Пусть, далее, $\{U_i\}$ — некоторое открытое покрытие M и φ_i — мероморфная функция на U_i. Если для каждой пары индексов (i, j) функция φ_i/φ_j голоморфна и обратима на $U_i \cap U_j$, мы будем говорить, что семейство $\{(U_i, \varphi_i)\}$ ***представляет некоторый дивизор на*** M. Пусть это так, и пусть еще (U, φ) — пара, состоящая из открытого множества U и мероморфной функции φ на нем. Скажем, что пара (U, φ) ***совместима*** с семейством $\{(U_i, \varphi_i)\}$, если отношение φ_i/φ голоморфно и обратимо на всех $U \cap U_i$. Такую пару можно присоединить к нашему семейству, и расширенное семейство будет по-прежнему представлять дивизор. Назовем два семейства $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $\{(V_k, \psi_k)\}$ ***эквивалентными***, если каждая пара (V_k, ψ_k) совместима с первым семейством. Класс эквивалентности семейств описанного типа назовем ***дивизором*** на M. Если пара (U, φ) совместима с семействами, представляющими данный дивизор, мы будем говорить, что она представляет этот дивизор *на открытом множестве* U.

Если семейства $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и $\{(V_k, \psi_k)\}$ представляют некоторые дивизоры, то, очевидно, семейство $(U_i \cap V_k, \varphi_i\psi_k)$ также представляет дивизор, который мы назовем их ***суммой***.

Для краткости мы будем иногда говорить, что само семейство $\{(U_i, \varphi_i)\}$ есть дивизор, скажем X, и писать $X = \{(U_i, \varphi_i)\}$. Дивизор X называется

положительным, если он представим семейством, у которого все функции φ_i голоморфны.

Пусть φ — мероморфная функция на M. Тогда пара (M, φ) представляет некоторый дивизор. Мы говорим в этом случае, что функция φ ***представляет этот дивизор глобально***.

Основной результат данной главы и его доказательство не зависят почти ни от чего предшествующего. Надо лишь знать определение тэта-функции. Напомним его. Пусть V — комплексное n-мерное пространство, D — решетка в нем. Все тэта-функции в этой главе предполагаются целыми; таким образом, в настоящей главе тэта-функция F на V по отношению к D — это целая функция, не равная тождественно нулю, удовлетворяющая соотношению

$$F(z+u)=F(z)\,e^{2\pi i\,[L(z,\,u)+J(u)]}$$

для всех $u \in F$, где функция L линейна по z над $\mathbf{C}$. Фиксировав какой-нибудь базис пространства V, мы будем иногда отождествлять V с $\mathbf{C}^n$. В этом случае показатель степени для каждого u можно переписать в виде

$$L(z,\,u)+J(u)=\sum c_\alpha z_\alpha+b,$$

где c_α, b — комплексные числа, зависящие от u.

Мы покажем, что для любого дивизора на X на $\mathbf{C}^n/D$ существует тэта-функция, глобально представляющая прообраз этого дивизора на $\mathbf{C}^n$. Читатель, ознакомившийся с содержанием предыдущей главы, поймет после прочтения этой, что имеется биекция между дивизорами на торе и нормализованными тэта-функциями (с точностью до постоянных множителей). Эта биекция является даже изоморфизмом полугрупп: сумме дивизоров отвечает произведение нормализованных тэта-функций.

Далее, две (целых) тэта-функции обладают общим дивизором, если и только если они эквивалентны (т. е. отличаются на тривиальную тэта-функцию).

Наконец, поскольку с каждой тэта-функцией связана риманова форма, то каждому дивизору отвечает однозначно определенная риманова форма, и это отображение аддитивно.

Обратимся теперь к самой теореме существования. Ее доказательство не опирается на линейную теорию, развитую в предыдущих главах.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{X}$ — *положительный дивизор на* $\mathbf{C}^n/D$, *а* X — *его прообраз на* $\mathbf{C}^n$. *Тогда существует целая тэта-функция* F, *представляющая этот дивизор на* $\mathbf{C}^n$.

Доказательство состоит в манипуляциях с дифференциальными формами, при этом мы докажем в нашей ситуации некоторые результаты общей теории кэлеровых многообразий. Поскольку мы ограничиваемся торами и $\mathbf{C}^n$, все очень упрощается.

Лемма 1. *Пусть* M — *некоторое* C^∞-*многообразие и* $\{U_i\}$ — *его локально конечное открытое покрытие. Пусть, далее, для каждой пары* (i, j) *с непустым пересечением* $U_i \cap U_j$ *задана дифференциальная* p-*форма* ω_{ij} *на* $U_i \cap U_j$, *причем*

$$\omega_{ij} - \omega_{ik} + \omega_{jk} = 0$$

на $U_i \cap U_j \cap U_k$, *когда это пересечение непусто. Тогда на* U_i *существуют такие дифференциальные формы* ω_i, *что*

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$$

на каждом непустом пересечении $U_i \cap U_j$.

Доказательство. Обозначим через $\{g_i\}$ какое-нибудь разбиение единицы, подчиненное данному покрытию, и положим

$$\omega_i = \sum g_j \omega_{ij},$$

условившись, что члены суммы считаются равными нулю там, где они не определены. Пользуясь соотношением обращения в нуль кограницы и его очевидными следствиями

$$\omega_{ii} = 0, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji},$$

получаем утверждение леммы.

В следующей лемме снова рассматриваются только C^∞-формы. Пусть D — некоторая решетка в $\mathbf{R}^m$ и $T = \mathbf{R}^m/D$ — соответствующий тор. Обозначая через $x_1, \ldots, x_m$ вещественные координатные функции на $\mathbf{R}^m$, будем записывать p-формы в виде

$$\sum f_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

где суммирование производится по наборам индексов $i_1 < \ldots < i_p$. Обозначим через $I(\omega)$ форму с постоянными коэффициентами, которая получится, если заменить в этом выражении каждую функцию $f_{(i)}$ ее интегралом

$$I(f_{(i)}) = \int_T f_{(i)}(x)\, dx.$$

Так как $f_{(i)}$ можно рассматривать как периодическую функцию на $\mathbf{R}^m$, подходящая замена переменных позволит записать этот интеграл как кратный по соответствующей области в $\mathbf{R}^m$.

Положим

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} f_{(i)}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Иными словами, частное дифференцирование формы производится покоэффициентно. Аналогично для любого дифференциального оператора Δ мы обозначим через $\Delta\omega$ форму $\sum \Delta f_{(i)}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Интегрируя по частям, без труда находим

$$I\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Лемма 2. *Пусть (a_{ij}) — вещественная симметричная положительно определенная матрица. Положим*

$$\Delta = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}.$$

Пусть ω — некоторая p-форма на торе. Тогда p-форма ψ на торе, удовлетворяющая условию $\Delta\psi = \omega$, *существует в том и только том случае, когда* $I(\omega)=0$. *Если* $\Delta\psi=0$, *то* ψ *имеет постоянные коэффициенты*.

Доказательство. Поскольку операторы I и Δ фактически действуют на коэффициенты, мы можем ограничиться рассмотрением функций f на торе, которые в свою очередь можно рассматривать как периодические функции на $\mathbf{R}^m$. Поскольку они бесконечно дифференцируемы, их коэффициенты Фурье быстро убывают. Пусть

$$f(x)=\sum c_\nu e^{2\pi i\nu\cdot x},$$

где сумма берется по всем $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, а $\nu\cdot x$ — обычное скалярное произведение. Заметим, что

$$\Delta(e^{2\pi i\nu\cdot x})=(2\pi i)^2 Q(\nu)\, e^{2\pi i\nu\cdot x},$$

где $Q(\nu)=\sum a_{jk}\nu_j\nu_k$ — значение нашей квадратичной формы в точке ν. Если $I(f)=0$, то нулевой член в разложении Фурье равен нулю. Это позволяет решить уравнение $\Delta g=f$, покоэффициентно находя разложение Фурье для g. Обратное утверждение тривиально (надо проинтегрировать по частям). Такое же сравнение рядов Фурье показывает, что если $\Delta g=0$, то g является константой. Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathbf{R}^m=\mathbf{C}^n$ $(m=2n)$. Будем пользоваться стандартными координатами z_α, $\bar z_\alpha$:

$$z_\alpha=x_\alpha+iy_\alpha, \qquad \bar z_\alpha=x_\alpha-iy_\alpha.$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right).$$

Эти формулы оправданы тем, что x_α, y_α выражаются через z_α, $\bar z_\alpha$ и

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial z_\alpha}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial z_\alpha}=\frac{1}{2i},$$

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar z_\alpha}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial \bar z_\alpha}=-\frac{1}{2i}.$$

Будем записывать наши дифференциальные формы в терминах dz_α, $d\bar{z}_\alpha$. Рассмотрим лапласиан

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \, \partial \bar{z}_\alpha}.$$

Формы

$$\omega = f_{(\alpha,\ \beta)}\, dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$$

и их линейные комбинации называются формами *типа* (p, q). Внешняя производная такой формы ω имеет вид

$$d\omega = \sum_j \frac{\partial f_{(\alpha,\ \beta)}}{\partial z_j}\, dz_j \wedge dz_{(\alpha)} \wedge dz_{(\beta)} + \\ + \sum_j \frac{\partial f_{(\alpha,\ \beta)}}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge dz_{(\alpha)} \wedge dz_{(\beta)}.$$

Иными словами, действует тот же формализм, что и в случае вещественных координат.

C^∞-функция f на U голоморфна в том и только том случае, когда для всех α выполнены уравнения Коши — Римана $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} = 0$. Этот факт для случая одной переменной является стандартным. Применяя его к каждой из переменных, мы получаем голоморфность по каждой из них. По очереди применяя к ним формулу Коши и пользуясь непрерывностью f, получим разложение f в степенной ряд по всем переменным и тем самым голоморфность по совокупности переменных.

Рассмотрим теперь (комплексный) положительный дивизор на торе $\mathbf{C}^n/D$, представленный, скажем, конечным семейством $\{(U_i, \varphi_i)\}$. Допустим, что множество U_i является гомеоморфным образом подходящего шара U_{i0} в $\mathbf{C}^n$ при каноническом отображении $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n/D$. Тогда φ_i как периодическая функция на $\mathbf{C}^n$ поднимается, в частности, до функции φ_{i0} на U_{i0}. Для любой точки решетки $l \in D$ обозначим через U_{il} сдвиг U_{i0} на l. Тогда φ_i поднимается до функции φ_{il} на U_i. Заметим, что шары $\{U_{il}\}_{i,\, l}$ образуют открытое покрытие пространства $\mathbf{C}^n$.

В силу леммы 1 мы можем написать

$$\zeta_{ij} = d\log \varphi_i/\varphi_j = \zeta_i - \zeta_j,$$

где ζ_i — подходящие 1-формы класса C^∞ на U_i. Так как ζ_{ij} имеет тип (1, 0), для всех α имеем

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{\partial \zeta_j}{\partial \bar{z}_\alpha} \text{ на } U_i \cap U_j.$$

Следовательно, на торе существует 1-форма η_α, совпадающая с $\partial\zeta_i/\partial\bar{z}_\alpha$ на каждом U_i. Положим

$$\gamma = \sum_\alpha \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\alpha}.$$

Тогда $\gamma = \Delta\zeta_i$ на U_i. Но $I(\gamma) = 0$. Следовательно, по лемме 2 существует такая 2-форма ζ, что $\gamma = \Delta\zeta$. Положим

$$\zeta_i' = \zeta_i - \zeta.$$

Тогда

$$\Delta\zeta_i' = 0 \quad \text{и} \quad \zeta_{ij} = \zeta_i' - \zeta_j'.$$

Но форма $\zeta_{ij} = d\log\varphi_i/\varphi_j$ имеет тип (1, 0). Значит, в рассматриваемом отношении существенны только (1,0)-компоненты форм ζ_i' и ζ_j'. Обозначим (1, 0)-компоненту ζ_i' через ζ_i''. Имеем

$$d\log\varphi_i/\varphi_j = \zeta_i'' - \zeta_j'',$$

$$\Delta\zeta_i'' = 0 \quad \text{на} \quad U_i.$$

Далее, $d\zeta_i'' = d\zeta_j''$ на $U_i \cap U_j$, потому что $d^2 = 0$. Следовательно, на торе существует такая 2-форма ω, что $\omega \mid U_i = d\zeta_i''$. Поскольку

$$d\Delta = \Delta d,$$

отсюда вытекает, что $\Delta\omega = 0$ и, значит, по лемме 2 ω имеет постоянные коэффициенты. Учитывая, что ζ_i'' имеет тип (1,0), мы можем написать

$$\omega = \sum a_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge dz_\beta + \sum b_{\alpha\beta}\, d\bar{z}_\alpha \wedge dz_\beta.$$

Пусть

$$\psi = \sum a_{\alpha\beta} z_\alpha\, dz_\beta + \sum b_{\alpha\beta} \bar{z}_\alpha\, dz_\beta \text{ на } \mathbf{C}^n.$$

Тогда $d\psi = \omega$.

Напомним, что $U_{il} = U_{i0} + l$, где $l \in D$. Имеем

$$d(\zeta_i'' - \psi) = 0 \quad \text{на} \quad U_{il}.$$

По лемме Пуанкаре на U_{il} существует такая C^∞-функция f_{il}, что

$$df_{il} = \zeta_i'' - \psi.$$

Поскольку она имеет тип (1,0), мы видим, что функция f_{il} голоморфна в силу уравнений Коши — Римана. Но на $U_{il} \cap U_{jl'}$

$$df_{il} - df_{jl'} = \zeta_i'' - \zeta_j'' = d \log \varphi_i / \varphi_j.$$

Следовательно, функция $\varphi_i e^{-f_{il}}$ и $\varphi_j e^{-f_{jl'}}$ на $U_{il} \cap U_{jl'}$ различаются лишь постоянным множителем. Поэтому, начав, скажем, с $\varphi_1 e^{-f_{10}}$, мы можем продолжить аналитически этот росток до функции F на всем $\mathbf{C}^n$, отличающейся от $\varphi_i e^{-f_{il}}$ на U_i лишь мультипликативной константой.

Отсюда мы можем заключить, что F является искомой тэта-функцией, т. е.

$$F(z + l) = F(z)\, e^{2\pi i\, [L(z,\, l) + J(l)]}.$$

Действительно, пусть $z \in U_{i0}$. Тогда

$$\frac{F(z+l)}{F(z)} = c\, \frac{\varphi_i(z+l)}{\varphi_i(z)}\, \frac{e^{-f_{il}(z+l)}}{e^{-f_{i0}(z)}}.$$

Используя периодичность φ_i, находим

$$\begin{aligned} d \log F(z+l)/F(z) &= -df_{il}(z+l) + df_{i0}(z) = \\ &= \zeta_i''(z+l) - \psi(z+l) - \zeta_i''(z) - 4(z) = \\ &= \sum a_{\alpha\beta}(z_\alpha + l)\, dz_\beta + \sum b_{\alpha\beta}(\bar z_\alpha + \bar l)\, dz_\beta - \\ &\quad - \left(\sum a_{\alpha\beta} z_\alpha\, dz_\beta + \sum b_{\alpha\beta} \bar z_\alpha\, dz_\beta\right) = \\ &= \sum c_\beta(l)\, dz_\beta. \end{aligned}$$

Это 1-форма, коэффициенты которой зависят только от l. Интегрируя по z, получим требуемое. Наша теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Lang, Abelian varieties, Interscience, New York, 1958.
2. Д. Мамфорд, Абелевы многообразия, М., «Мир», 1971.
3. G. Shimura, Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties, Math. Soc. Japan, Publ. № 6, 1961.
4. C. L. Siegel, Lectures on several complex variables, Inst. for Adv. Studies, Princeton, 1962.
5. C. L. Siegel, Topics in complex frunction theory, Interscience, New York, 1971.
6. A. Weil, Théorèmes fondamentaux, de la théorie des fonctions theta, Séminaire Bourbaki, Mai 1949.
7. А. Вейль, Введение в теорию кэлеровых многообразий, М., ИЛ, 1961.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

С. Ленг

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Редактор В. И. Авербух. Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Г. Б. Алюлина

Сдано в набор 12/VIII 1975 г. Подписано к печати 7/IV1976 г. Бум. тип. № 3 $84 \times 108^{1}/_{32}$=2,13 бум. л. Усл. печ. л. 7,14 Уч.-изд. л. 5,50. Изд. № 1/8338
Цена 38 коп. Зак. 822

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография №2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29