

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ

ТОМ

I

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И ПРОБЛЕМА УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ

Т О М
I

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1 9 5 8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит статьи, в которых излагаются теоретические и экспериментальные исследования, выполненные в 1951—1958 гг. в Институте атомной энергии Академии наук СССР по проблеме управляемых термоядерных реакций и связанным с ней вопросам физики плазмы. В сборник включены только те работы, которые не были ранее опубликованы в печати. Сборник разделен на 4 тома, в основном по хронологическому признаку.

Редакционная работа по сборнику выполнена кандидатом физико-математических наук В. И. Коганом.

Ответственный редактор
академик М. А. Леонтович

И. Е. Тамм

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА *

(Часть I)**

СВОЙСТВА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 1. Движение заряженной частицы в скрещенных полях.
§ 2. Кинетическое уравнение. Первое приближение теории (пренебрежение соударениями). § 3. Второе приближение теории, роль соударений. Теплопроводность и вязкость плазмы. § 4. Ориентировочный расчет малой модели МТР с подогревом и температурным скачком.

§ 1. Движение заряженной частицы в скрещенных полях

Магнитное поле \mathbf{H} будем всюду считать направленным по оси z ; вектор электрического поля \mathbf{E} лежит в плоскости (xy) ; скорость частицы в этой плоскости будем обозначать через v_1 ($v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$).

Если поля однородны (\mathbf{H} и \mathbf{E} не зависят от координат), то, как известно, траектория частицы в плоскости (xy) представляет собой трохоиду: частица движется по окружности радиуса

$$R = \frac{mc v_1}{eH}, \quad (1.1)$$

* В дальнейшем всюду употребляется сокращение МТР.

** Работа выполнена в 1951 г.

центр которой перемещается перпендикулярно к электрическому полю со скоростью

$$u = \frac{cE}{H}. \quad (1.2)$$

Перемещение центра ларморовой окружности называется дрейфом. Направление дрейфа не зависит от знака заряда частицы и параллельно вектору $[E H]$.

§ 2. Кинетическое уравнение. Первое приближение теории (пренебрежение соударениями)

В дальнейшем Φ_α будет обозначать функцию распределения частиц сорта α , т. е. число частиц этого сорта в элементе объема фазового пространства $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$. Значение $\alpha = 1$ будет соответствовать ионам, значение $\alpha = 2$ — электронам. Масса иона — M , масса электрона — m . Введем еще обозначение для ларморовой частоты частицы

$$\omega_\alpha = \frac{e_\alpha H}{m_\alpha c}. \quad (2.1)$$

Кинетическое уравнение для полностью ионизированной плазмы в магнитном и электрическом полях имеет такой вид (в стационарном случае):

$$D\Phi \equiv v_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{eE_k}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} + \omega \left(v_y \frac{\partial \Phi}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} \right) = St, \quad (2.2)$$

где St означает член, учитывающий соударения частиц друг с другом. Индексы α у букв m , e и ω мы здесь опустили. Напомним, что магнитное поле всюду считаем направленным по z .

Длина свободного пробега частиц в плазме между соударениями равна

$$l_{cm} = \frac{1,2 \cdot 10^{18} T_{кэВ}^2}{n}, \quad (2.3)$$

где $T_{кэВ}$ — температура плазмы в килоэлектронвольтах, а n — число ионов (или электронов) в 1 см^3 . При $T \sim 100 \text{ кэВ}$ и $n \sim 10^{14}$ получаем $l \sim 10^8 \text{ см} \sim 10^3 \text{ км}$. Между тем средний радиус ларморовой окружности равен для ионов дейтерия и для электронов, соответственно,

$$R_{DcM} = \frac{5,6 \cdot 10^3 \sqrt{T_{кэВ}}}{H}, \quad R_{элcM} = \frac{94 \cdot \sqrt{T_{кэВ}}}{H}, \quad (2.4)$$

так что при $T \sim 100$ кэв, $H \sim 2,5 \cdot 10^4$ эс $R_D = 2,2$ см, а $R_{эл} = 0,038$ см $= 0,38$ мм. Таким образом, ионы успевают в среднем совершить 10^7 оборотов по ларморовой окружности между каждыми двумя последовательными соударениями.

Поскольку влияние магнитного поля превалирует над влиянием соударений, целесообразно сначала рассмотреть газ невзаимодействующих заряженных частиц, отвлекаясь от эффектов их соударений.

В дальнейшем будем предполагать, что все интересующие нас величины (H , E , n , T) зависят только от одной координаты (от x в плоском случае и от r в цилиндрическом) и что электрическое поле тоже направлено либо по x , либо по r . В этом случае уравнение движения свободной частицы (а стало быть, и кинетическое уравнение (2.2) без учета члена соударений St) обладает двумя интегралами

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + eV(x) \quad \text{и} \quad q = \frac{v_y}{\omega_0} + \xi, \quad (2.5)$$

где ω_0 — значение ω в точке $x=0$, $V(x)$ — электрический потенциал, а

$$\xi = \frac{1}{\omega_0} \int_0^x \omega dx = x + \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_0 \frac{x^3}{6} + \dots \quad (2.6)$$

Считая, что Φ не зависит от y , и вводя вместо x , v_x и v_y переменные ξ , q и v_x , можно преобразовать уравнение (2.2) к виду

$$\left[\frac{eE(x)}{m} + \omega(x) v_y \right] \frac{\partial}{\partial v_x} \Phi(\xi, q, v_x) = St. \quad (2.7)$$

В качестве нулевого приближения для функции распределения Φ_0 целесообразно выбрать такую функцию интегралов ε и q , которая была бы близка к максвеллову распределению. Мы выбираем

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \frac{n\beta^3}{\pi^{3/2}} e^{-\beta^2 \left(v^2 + \frac{2eV(x)}{m} \right)} & \left[1 + \left(\frac{v_y}{\omega_0} + \xi \right) \left\{ a + b\beta^2 \left(v^2 + \frac{2eV}{m} \right) \right\} + \right. \\ & + \left(\frac{v_y}{\omega_0} + \xi \right)^2 \left\{ c + d\beta^2 \left(v^2 + \frac{2eV}{m} \right) \right\} + \\ & \left. + \frac{1}{\omega_0^2} F \left(v_x^2, v^2 + \frac{2eV}{m} \right) \right], \quad (2.8) \end{aligned}$$

где n, β, a, b, c, d — константы. Функция эта удовлетворяет кинетическому уравнению, если в нем пренебречь членом соударений. Функция $F\left(v_x^2, v^2 + \frac{2eV}{m}\right)$ в уравнении (2.8) есть полином с постоянными коэффициентами от v_x^2 и $v^2 + \frac{2eV}{m}$. Коэффициенты в этом полиноме подбираются так, чтобы при заданных a, b, c и d [определяемых формулами (2.10) через $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$ и т. д.] отклонение функции Φ_0 от максвелловской было минимальным.

Вычисляем плотность n , температуру T и плотность потока частиц S по обычным формулам

$$n = \int \Phi dv, \quad T = \frac{m}{3n} \int v^2 \Phi dv, \quad S = \int v \Phi dv. \quad (2.9)$$

Подставляя вместо Φ значение Φ_0 из (2.8), заметим, что плотность тока S у нас определена как число частиц, проходящих через 1 см^2 за 1 сек .

Выполнив вычисления и продифференцировав затем результат по x , получаем (предполагая, что $V(0) = 0$) следующие значения констант, фигурирующих в выражении (2.8):

n равно плотности частиц в точке $x = 0$,

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{m}{2T_0}, \quad a = \frac{1}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 - \frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 - \frac{eE_0}{T_0}, \quad b = \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 \\ 2c &= \frac{1}{n_0} \left(\frac{d^2n}{dx^2} \right)_0 - \frac{3}{2} \frac{1}{T_0} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 \left\{ \frac{5eE_0}{T_0} - \frac{3}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2H_0} \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 \right\} - \frac{1}{n_0 H_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 + \frac{e^2 E_0^2}{T_0^2} + \frac{eE_0}{T_0} \left\{ \frac{1}{H_0} \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 - \right. \\ &- \left. \frac{2}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 \right\} - \frac{e}{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)_0, \quad d = \frac{1}{2T_0} \left(\frac{d^2T}{dx^2} \right)_0 + \\ &+ \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0 \left\{ \frac{1}{n_0} \left(\frac{dn}{dx} \right)_0 - \frac{eE_0}{T_0} - \frac{1}{2H_0} \left(\frac{dH}{dx} \right)_0 \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Индексы «0» означают, что значения величин относятся к точке $x = 0$. Кроме того, получаем из (2.8) и (2.9):

$$S_x = 0, \quad S_y = \frac{c}{eH} \frac{d}{dx} (nT) - \frac{cnE}{H}, \quad (2.11)$$

где c — скорость света.

Таким образом, в этом приближении ток направлен перпендикулярно к E и перпендикулярно к градиенту парциального давления ионов (или электронов) $\frac{dp}{dx} = \frac{d(nT)}{dx}$. Вторым членом выражения для S_y соответствует дрейфу частиц в электрическом поле (см. 1.2). Заметим, что в отличие от электрического дрейфа та часть S_y , которая пропорциональна $\frac{d(nT)}{dx}$, имеет противоположный знак для частиц различного знака заряда (стало бы, направление соответствующей части электрического тока $j_y = eS_y$ не зависит от знака заряда частиц).

Для разрешения парадоксов, возникающих, например, при рассмотрении дрейфа частиц в неоднородном магнитном поле (см. ниже), существенно отметить, что отдельные слагающие выражения для S_y обладают совершенно разной физической природой. Член $\frac{cnE}{H}$, как уже отмечалось, соответствует обусловленному электрическим полем перемещению центров ларморовых окружностей частиц. Напротив, член, пропорциональный $\frac{d(nT)}{dx}$, вообще не связан с движением центров этих окружностей — ведь мы пренебрегли соударением частиц, и, стало быть, пространственное и энергетическое их распределение никак не может влиять на их движение. Происхождение этого члена легко понять из рис. 1. Рассмотрим среднее значение скорости v_y частиц, находящихся в заштрихованной на рисунке полоске. Частицы, центр орбиты которых лежит левее полоски, движутся внутри этой полоски против направления оси y , а частицы, центры орбит которых лежат правее полоски, движутся по оси y .

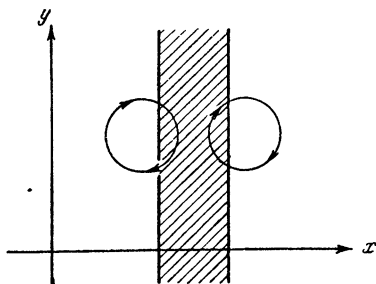


Рис. 1.

Если плотность частиц возрастает по направлению оси x , то частиц второго класса больше, и, следовательно, средняя скорость частиц по оси y больше нуля. Это находит свое выражение в первом члене формулы (2.11). Подобно этому,

если $\frac{dT}{dx} > 0$, то средняя энергия и средние радиусы орбит возрастают с возрастанием x , и в полоску попадет больше частиц справа, чем слева; скорости их будут тоже большими, что приведет к тому, что $\bar{v}_y > 0$.

В дальнейшем будем называть дрейфовой скоростью, или дрейфовым током, скорость и ток, обусловленные перемещением центров ларморовых окружностей, т. е. реальным перемещением частиц. В отличие от него скорости и токи, не связанные с изменением среднего положения частиц (т. е. только что рассмотренного типа), будем называть ларморовыми.

Заметим, что, как легко показать, в неоднородном магнитном поле каждая частица дрейфует со скоростью

$$\mathbf{u} = \frac{mv^2}{4eH^3} [\mathbf{H} \nabla H] \quad (2.12)$$

(предполагается, что направление вектора \mathbf{H} одинаково во всем пространстве). Между тем, в выражении (2.11) не фигурирует градиент напряженности магнитного поля H . Объясняется это тем, что в неоднородном магнитном поле средняя ларморова скорость точно компенсирует скорость дрейфа (2.12).

Отметим, наконец, что формула (2.11) полностью соответствует гидродинамическим уравнениям движения газа. Помножим эту формулу на $\frac{eH}{c}$ и просуммируем по обоим сортам частиц ($\alpha = 1, 2$). Приняв во внимание, что давление газа равно

$$p = \sum_{\alpha=1}^2 n_{\alpha} T_{\alpha} \quad (2.13)$$

и что электрический ток \mathbf{j} равен eS , получаем

$$\nabla p = \sum_{\alpha} \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{H}] + \mathbf{E} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}. \quad (2.14)$$

Так как в нашем случае $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0$, то это уравнение полностью соответствует уравнению гидродинамики (для стационарного случая):

$$\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{f},$$

где \mathbf{f} — внешняя сила, рассчитанная на единицу объема газа.

Простое преобразование уравнения (2.14) с помощью уравнений электродинамики $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha}$

приводит к следующему условию равновесия газа:

$$p - \left(\frac{E^2 - H^2}{8\pi} \right) = \text{const}. \quad (2.15)$$

В расчетах удобно вместо уравнения (2.11) пользоваться именно этим условием равновесия.

§ 3. Второе приближение теории, роль соударений. Теплопроводность и вязкость плазмы

Чтобы учесть роль соударений, необходимо раскрыть вид оператора соударений в кинетическом уравнении (2.2). Вид этого оператора для заряженных частиц, взаимодействующих по закону Кулона, был дан Ландау в 1936 г. Различая ионы и электроны индексом α ($\alpha = 1, 2$), запишем систему кинетических уравнений для полностью ионизированной плазмы в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} D\Phi_\alpha &\equiv v_k \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_k} + \frac{e_\alpha E_k}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_k} + \omega_\alpha \left(v_y \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_y} \right), \\ D\Phi_\alpha &= - \frac{\partial q_{\alpha, k}}{\partial v_k} \\ q_{\alpha, k} &= \frac{2\pi e^4 \lambda}{m_\alpha} \sum_{\alpha'} \int d\mathbf{v}' \left(\frac{\Phi_\alpha}{m_{\alpha'}} \frac{\partial \Phi'_{\alpha'}}{\partial v'_l} - \frac{\Phi'_{\alpha'}}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_l} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{u^2 \delta_{kl} - u_k u_l}{u^3} \right). \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Здесь ω_α — ларморова частота ($\omega_\alpha = \frac{e_\alpha H}{m_\alpha c}$),

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(\mathbf{v}), \quad \Phi'_{\alpha'} = \Phi_{\alpha'}(\mathbf{v}'), \quad u = |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|.$$

Наконец, λ есть некоторая медленно (логарифмически) меняющаяся функция скорости частиц, которую можно приближенно выразить через температуру и плотность плазмы. Вид этой функции несколько различен в зависимости от того, больше или меньше единицы величина $\frac{e^2}{\hbar \bar{v}}$, где \bar{v} — средняя скорость частиц. Выражение для λ , полученное в основоположной работе Ландау, применимо для низкотемпературной плазмы. В наших условиях нужно пользоваться другим выражением, которое приведено в недавней работе Ландсхофа [1] и которое приближенно может быть представлено следующим образом:

$$\lambda = 36,2 - \frac{1}{2} \ln n + 2 \ln \frac{\bar{v}}{c}. \quad (3.2)$$

Ввиду нечувствительности λ к выбору значений n и \bar{v} в дальнейшем будем приближенно полагать

$$\lambda \simeq 20. \quad (3.3)$$

Отметим, что, воспользовавшись оператором соударений (3.1), мы пренебрегли влиянием магнитного поля на самый акт соударения частиц. Это законно, пока радиус ларморовых окружностей частиц много больше, чем дебаевская длина

$$D = \sqrt{\frac{T}{8\pi e^2 n}} = 1,66 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{\frac{T_{\kappa э в}}{n}}. \quad (3.4)$$

Как видно из сравнения (3.4) с (2.4), в интересующих нас условиях это требование удовлетворено для ионов, тогда как для электронов D может в несколько раз превышать $R_{\text{ларм.}}$. Хотя это обстоятельство не может внести коренных изменений в результаты последующих вычислений, все же, несомненно, необходимо будет в дальнейшем развить теорию, не связанную с ограничением

$$D < R_{\text{ларм.}}$$

Переходя к интегрированию уравнений (3.1), представим функцию распределения в виде

$$\Phi_{\alpha} = \Phi_{0, \alpha} + f_{0, \alpha} \chi, \quad \text{где} \quad f_{0, \alpha} = \frac{n \beta_{\alpha}^3}{\pi^{3/2}} \cdot e^{-\beta_{\alpha}^2 \left(v^2 + \frac{2e_{\alpha} V}{m_{\alpha}} \right)}$$

$$\beta_{\alpha}^2 = \frac{m_{\alpha}}{2T}, \quad (3.5)$$

где $\Phi_{0, \alpha}$ задается уравнением (2.8). Заметим, что эти выражения соответствуют предположению, что температура и плотность обеих компонент плазмы одинаковы.

Так как $\Phi_{0, \alpha}$ и $f_{0, \alpha}$ удовлетворяют уравнению $D\Phi = 0$, то подстановкой (3.5) в (3.1) приходим к системе уравнений:

$$f_{0, \alpha} D\chi = - \frac{\partial q_{\alpha, k}}{\partial v_k}, \quad (3.6)$$

причем, в первом приближении, при вычислении $q_{\alpha, k}$ можно положить

$$\Phi_{\alpha} = \Phi_{0, \alpha}.$$

Далее, если $H \gg E$ и если функция распределения Φ (точнее функция χ) мало меняется на расстояниях порядка радиуса ларморовой орбиты (2.4), то в операторе D можно ограничиться последним членом, т. е. положить

$$D = \omega_0 \left(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.7)$$

где

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{v_y}{v_x}.$$

В результате громоздких вычислений получаются громоздкие выражения для χ . Не приводя их, выпишем получающиеся из них выражения для интересующих нас физических величин. Во-первых, получаются следующие значения для плотности потока ионов и электронов по направлению градиентов n и T :

$$S_{x, \text{эл}} = S_{x, \text{ион}} = -\frac{2,1 \cdot 10^{-5} n^2}{H^2 \sqrt{T_{\text{кэс}}}} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{1}{4T} \frac{dT}{dx} \right) \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}. \quad (3.8)$$

Для потока энергии в направлении x получаем

$$\pi_x = -1,65 \cdot 10^{-12} \frac{n^2 \cdot \sqrt{T_{\text{кэс}}}}{H^2} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} + \frac{0,072}{n} \frac{dn}{dx} \right) \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}. \quad (3.9)$$

Отмечу, что формулы (3.8) и (3.9) были получены мной по изложенному методу и независимо Ю. А. Романовым и Д. Н. Зубаревым* и Е. С. Фрадкиным по способу, являющемуся обобщением на случай сильных магнитных полей способа, примененного в упомянутой статье Ландсхофа. Способ Ландсхофа гораздо сложнее изложенного здесь.

И поток частиц S_x , и тепловой поток π_x обратно пропорциональны H^2 . Сравнивая π_x с соответствующим выражением для теплового потока в полностью ионизированной плазме при отсутствии магнитного поля (по Ландсхофу)

$$H = 0, \quad \pi_x = -1,2 \cdot 10^{19} \cdot T_{\text{кэс}}^{5/2} \frac{dT_{\text{кэс}}}{dx} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}, \quad (3.10)$$

* Сентябрь 1950 г.

получаем при $\left(\frac{dn}{dx} = 0\right)$

$$\frac{\pi_{x, \text{магн}}}{\pi_{x, \text{немагн}}} = \frac{1,4 \cdot 10^{-31} n^2}{H^2 T_{\text{кэв}}^3}. \quad (3.11)$$

При $H = 10^4$, $n = 10^{14}$ и $T = 100$ кэв это отношение равно $1,4 \cdot 10^{-17}$.

Наиболее парадоксален тот факт, что выражение (3.8) для потока частиц оказывается одинаковым для ионов и электронов и что оно вовсе не зависит от электрического поля (которое мы считаем направленным по оси x). Это является непосредственным выражением того, что при $H > E$ электропроводность плазмы перпендикулярно H равна нулю (см. § 1). Вместе с тем это приводит к тому, что у нас не хватает уравнений для определения значения электрического поля E : в плазме могут существовать произвольные объемные заряды, которые, вследствие отсутствия электропроводности, не будут растекаться.

Это можно высказать также следующим образом. Обычно потоки электронов и ионов определяются выражениями типа:

$$S_{\text{эл}} = a_{\text{э}} \nabla T + b_{\text{э}} \nabla n + c_{\text{э}} E;$$

$$S_{\text{ион}} = a_{\text{и}} \nabla T + b_{\text{и}} \nabla n + c_{\text{и}} E.$$

В стационарном режиме $S_{\text{эл}} = S_{\text{ион}}$, ибо иначе происходило бы непрерывное перераспределение зарядов. Приравнивая выражения для $S_{\text{э}}$ и $S_{\text{и}}$, получаем уравнение типа

$$E = A \nabla T + B \nabla n, \quad (3.12)$$

с помощью которого можно определить E как функцию ∇T и ∇n (термо-ЭДС и концентрационная ЭДС). В магнитном же поле равенство $S_{x, \text{ион}}$ и $S_{x, \text{эл}}$ удовлетворяется тождественно, и никакого выражения типа (3.12), которое позволило бы нам определить значение E_x , мы не получаем.

Разрешения этой трудности можно искать в двух направлениях. Во-первых, можно ожидать, что при переходе от рассматриваемого нами второго приближения к более точным решениям кинетического уравнения возникнет зависимость потока S_x от E_x , либо от производных $\frac{dE_x}{dx}$ и т. д. Можно, однако, показать*, что члены в выражении для S_x , завися-

* Рассматривался только одномерный случай [все градиенты и E направлены либо по одной и той же оси (x), либо по радиусу r]. Более общий случай потребует дополнительного рассмотрения.

щие от E_x , будут, по крайней мере, порядка $\frac{1}{H^4}$ по отношению к H (тогда как основные члены в (3.8) $\sim \frac{1}{H^2}$) и, кроме того, будут, по крайней мере, третьего порядка по отношению к отклонениям от однородности (считая $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{H} \frac{dH}{dx}$ и $\frac{eE}{T} = -\frac{e}{T} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$ членами первого порядка, $\frac{1}{n} \frac{d^2n}{dx^2}$, $(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx})^2$ и т. д. членами второго порядка и т. д.).

Второй и, как будет показано, более правильный путь к разрешению рассматриваемой трудности был указан В. Л. Гинзбургом. Решение кинетического уравнения должно удовлетворять законам сохранения, которые выражаются уравнениями гидродинамики. В частности, в стационарном режиме должны соблюдаться уравнения движения:

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{u}_{\alpha} \nabla) u_{\alpha, k} = -\frac{\partial p'_{kl}}{\partial x_l} + \sum_{\alpha} \left(n_{\alpha} e_{\alpha} E_k + \frac{[\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{H}]_k}{c} \right). \quad (3.13)$$

Здесь n_{α} — число частиц сорта α в единице объема; m_{α} и e_{α} — их масса и заряд; u_{α} — их средняя скорость ($\mathbf{u}_{\alpha} = \frac{\mathbf{S}_{\alpha}}{n_{\alpha}}$); p'_{kl} — тензор потока импульса.

$$p'_{kl} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int \Phi_{\alpha} (v_k - u_{\alpha, k})(v_l - u_{\alpha, l}) d\mathbf{v}. \quad (3.14)$$

Вместо этого тензора удобнее ввести тензор

$$p_{kl} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \int \Phi_{\alpha} v_k v_l d\mathbf{v}. \quad (3.15)$$

Тогда уравнение (3.15) примет вид:

$$\frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l} = \sum_{\alpha} \left(n_{\alpha} e_{\alpha} E_k + \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\alpha} \mathbf{H}]_k \right). \quad (3.16)$$

Слагающая этого уравнения по оси x совпадает с рассмотренным уже выше уравнением (2.14); слагающая по оси y дает (так как $E_y = 0$ и $j_x = \sum_{\alpha} e_{\alpha} S_{\alpha, x} = 0$):

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} = 0, \quad p_{xy} = \text{const.} \quad (3.17)$$

p_{xy} представляет собой не что иное, как соответствующую компоненту тензора вязкости. При отсутствии магнитного поля (при условии, что все градиенты и вектор E направлены по оси x) эта «косая» компонента тензора вязкости тождественно равна нулю, и уравнение (3.17) удовлетворяется автоматически. Однако магнитное поле приводит к появлению «косой» компоненты вязкости p_{xy} (так как u_y в этом случае не равно нулю и зависит от x), зависящей, в частности, от электрического поля E_x . Тем самым уравнение (3.17) становится содержательным и дает нам возможность определить E_x в функции от $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$ и т. д.

Как показывают вычисления, p_{xy} пропорционально $m_\alpha^{3/2}$, и поэтому при определении p_{xy} можно рассматривать только ионы, не учитывая вязкости электронного газа. Получаем

$$p_{xy} = \frac{\lambda e c^3 M^{3/2} n^2 \sqrt{T}}{H^3} [\gamma_1 b^2 + \gamma_2 c + \gamma_3 d], \quad (3.18)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — численные коэффициенты, значения которых еще не полностью подсчитаны, а величины b, c и d — функции от $\frac{1}{T} \frac{dT}{dx}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$, $\frac{eE}{T}$ и т. д., определяемые уравнениями (2.10).

Таким образом, электрическое поле E_x может быть определено либо из условия $p_{xy} = \text{const}$, либо, как было указано на стр. 12, из высших приближений для потока частиц S_x .

Правильен первый путь, потому что выражение p_{xy} зависит от вторых производных $\frac{1}{n} \frac{d^2n}{dx^2}$, $\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dx^2}$ и т. д. и от квадратов первых производных, тогда как зависящие от E_x члены в выражении потока S_x входят в комбинации с членами, по крайней мере, третьего порядка в производных (типа $\frac{1}{T} \frac{d^3T}{dx^3}$, $\frac{1}{T^2} \frac{d^2T}{dx^2} \cdot \frac{dT}{dx}$ и т. д.)*. Дело в том, что ведь мы не ставим задачи точного решения кинетических уравнений. Всякая приближенная теория типа гидродинамики исходит из разложения точных решений по некоторой эффективной длине пробега l , предполагаемой малой величиной, т. е. из разложения, в котором члены k -го порядка пропорциональны $l^k \left(\frac{dT}{T dx}\right)^k$,

* Соответственно, $p_{xy} \sim \frac{1}{H^3}$, тогда как зависящие от E_x члены в S_x по крайней мере порядка $\sim \frac{1}{H^4}$.

либо $l^k \frac{d^k T}{T dx^k}$, либо аналогичным величинам. Гидродинамика идеальной жидкости обрывает разложение на $k=1$, гидродинамика вязкой жидкости обрывает разложение на $k=2$ и т. д. В нашем случае оказывается необходимым учесть вязкость, т. е. необходимо дойти до $k=2$; зависимость же S_x от E_x может проявиться только в более высоких приближениях, учитывать которые нет никаких оснований.

Формулы для определения E_x из (3.17) будут получены в ближайшее время.

§ 4. Ориентировочный расчет малой модели МТР с подогревом и температурным скачком

На границе плазмы со стенкой имеет место температурный скачок. Происхождение температурного скачка можно пояснить следующим образом. Допустим, что каждый ион, ударившись о стенку, нейтрализуется и отскакивает внутрь плазмы в виде нейтрального атома, энергия которого соответствует температуре стенки*. Плотность ионов около данной абсолютно поглощающей их стенки будет равна нулю (точнее $n=0$ не при $r=r_1$, где r_1 — радиус стенки, а при $r=r_1+0,71\lambda$, где λ — эффективная длина пробега ионов; этим уточнением пренебрегаем). Далее, в этом приближении ионы, так сказать, не имеют никаких прямых сведений о температуре стенки — ведь ион остается ионом только до тех пор, пока он ни разу не ударился о стенку. Правда, ионы охлаждаются при соударениях с нейтральными атомами, но при малых плотностях рекомбинировавшие на стенке нейтральные атомы имеют большой пробег и проскакивают сравнительно далеко в глубь плазмы.

Отсюда следует, что температура плазмы вблизи стенки может быть гораздо выше температуры стенки (температурный скачок). Так как поток ионов на стенку в магнитном поле очень мал, то мало и количество образующихся на стенке нейтральных атомов и мала их объемная концентрация. Эти качественные соображения были проверены расчетом.

Подогрев плазмы в малой модели должен осуществляться внешним переменным электрическим полем, направленным по

* Эти предположения, которыми мы пользовались в расчете малой модели, являются максимально неблагоприятными. В действительности нейтральные атомы, возникающие при рекомбинации ионов на стенке, будут иметь в среднем существенно большую температуру, чем температура стенки. Кроме того, по сообщению И. Н. Головина, рекомбинация ионов при соударении их со стенкой будет иметь место не в 100% случаев соударений, а лишь в 75%.

магнитным силовым линиям. Электропроводность плазмы в направлении, параллельном H (а также и в случае отсутствия H), равна

$$\sigma = 2,7 \cdot 10^{17} T_{\text{кэв}}^{3/2} \cdot \varphi(x) \frac{1}{\text{сек.}} = 3,0 \cdot 10^5 T_{\text{кэв}}^{3/2} \varphi(x) \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{см}}. \quad (4.1)$$

Функция $\varphi(x)$ учитывает зависимость проводимости от частоты приложенного электрического поля и равна:

| | | | | | | | | |
|----------------|---|-------|------|-------|-------|-------|--------|---------------------|
| $x =$ | 0 | 0,2 | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | ∞ |
| $\varphi(x) =$ | 1 | 0,815 | 0,44 | 0,184 | 0,064 | 0,022 | 0,0114 | $\frac{1}{195 x^2}$ |

При этом

$$x = \frac{5,6 \cdot 10^8 T_{\text{кэв}}^{3/2} \cdot f}{n}; \quad (4.2)$$

где f — циклическая частота электрического поля.

Формулы (4.1) и (4.2) были получены из данных статьи Ландсхофа об электропроводности плазмы в магнитном поле путем замены в его формулах ларморовой частоты $\omega = \frac{eH}{mc}$ на частоту электрического поля f . Можно показать, что поскольку Ландсхоф считает, что распределение ионов по скоростям является максвелловым (предположение, незаконное в случае сильного магнитного поля, но законное в интересующем нас сейчас случае), такая операция (замена $\frac{eH}{mc}$ на f) вполне правомерна.

При расчете малой модели в целях упрощения было предположено, что пробег нейтральных атомов сравним с размерами сосуда, так что плотность их можно считать постоянной во всем объеме (максимально неблагоприятное предположение). Плотность нейтральных атомов предполагалась малой по сравнению с плотностью ионов, так что соударения нейтральных атомов друг с другом не учитывались. Учитывались ионизация нейтральных атомов электронами и перезарядка их на ионах, в результате которой получается быстрый нейтральный атом, обладающий той же энергией, какой обладал столкнувшийся с медленным атомом ион. Предполагалось, что все образующиеся в процессе перезарядки быстрые нейтральные атомы, пробежав через сосуд, отдают всю свою энергию стенке (максимально неблагоприятное предположение). Этот механизм отвода тепла стенке является основным

и во много раз превышает отвод тепла за счет теплопроводности плазмы.

В отношении сечения перезарядки $\sigma_{\text{пер}}$ была использована полуэмпирическая формула Сены [2]

$$\sigma_{\text{пер}} = \frac{8\pi e^4}{I^2}, \quad (4.3)$$

где I — потенциал ионизации. По приводимым Сеной данным (стр. 187), эта формула хорошо подтверждается для ряда одноатомных газов (Hg, Ar, Ne, He) в области энергий порядка 900 эв. Для водорода (атомарного) по формуле (4.3) получаем

$$\sigma_{\text{пер}} = 2,86 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2. \quad (4.4)$$

Это сечение существенно больше сечения упругого соударения нейтральных атомов с ионами, которым мы пренебрегли.

При росте энергии сечение перезарядки должно сильно падать, начиная с энергий порядка $5 \div 10$ кэв. Так, например, известно, что при больших энергиях сечение перезарядки, при котором электрон переходит с низшего уровня на низший же, падает при больших энергиях пропорционально $\frac{1}{e^6}$. Мы этого падения не учитывали и считали, что $\sigma_{\text{пер}}$ дается формулой (4.4) вплоть до 20 кэв.

Уже после проведения расчетов И. Н. Головин указал нам на экспериментальные измерения $\sigma_{\text{пер}}$ ионов H_2^+ в молекулярном водороде [3]. По Кину, $\sigma_{\text{пер}}$ имеет максимум, равный $0,96 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$, примерно при $6 \div 7$ кэв. Если при пересчете на атомарный водород просто разделить этот максимум на два, то получим около $0,5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$, что в $5 \div 6$ раз меньше принятого нами значения $2,86 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$.

Однако такой расчет не правомерен, так как в нем не учитывается резонансный характер перезарядки H^+ в атомарном водороде, который приводит к увеличению $\sigma_{\text{пер}}$. Надо отметить, что данные Кина по резонансной перезарядке He^+ в He существенно выше (при экстраполяции — раза в два) прежних экспериментальных данных Ростаньи и Вольфа, которыми пользовался Сена.

Из изложенного следует, что вопрос о перезарядке требует экспериментального и теоретического уточнения.

При расчете малой модели мы пренебрегли следующими эффектами, которые в этой модели действительно несущественны: выделение энергии при ядерных реакциях, экранировка магнитного поля токами плазмы, тормозное излуче-

ние, объемная рекомбинация ионов (последняя мала по сравнению с рекомбинацией ионов на стенках). Кроме того, мы пренебрегли зависимостью электропроводности плазмы от ее плотности [функция $\varphi(x)$ в формуле (4. 2)]; учет этой зависимости привел бы к не очень существенным изменениям результатов расчета.

Расчет был проведен для случая, когда температура на оси прямого цилиндра равна 5 *кэв*. Приведем результаты расчета.

Мощность, потребляемая на подогрев плазмы (в расчете на 1 *см* длины цилиндра),

$$W = 1,74 \cdot 10^4 E^2 r_1^2 \frac{\text{квт}}{\text{см}},$$

где r_1 — радиус цилиндра в сантиметрах; E — амплитуда напряженности электрического поля, подогревающего плазму, в вольтах на сантиметр.

Число реакций $D + D$

$$R = 4,44 \cdot 10^5 E^2 H^2 r_1^4 \frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}}.$$

Число ионов, рекомбинирующих в объеме (в расчете на 1 *см* длины цилиндра),

$$Q = 5,0 \cdot 10^7 E^2 H^2 r_1^4 \frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}}.$$

Плотность ионов на оси цилиндра

$$n_0 = 0,95 \cdot 10^{12} E H r_1 \frac{1}{\text{см}^3};$$

Относительная концентрация нейтральных атомов на оси цилиндра

$$c_0 = \frac{1,08 \cdot 10^4}{H^2 r_1^2}.$$

Число пробегов медленных нейтральных атомов, укладывающихся на радиусе цилиндра,

$$\xi = 0,57 \cdot E H r_1^2.$$

Задавшись в виде примера значениями

$$H = 10^3 \text{ гс}, \quad E = 10^{-5} \text{ в/см}, \quad r_1 = 20 \text{ см},$$

получаем

$$W = 0,7 \frac{вт}{см}, \quad R = 7,1 \cdot 10^6 \frac{1}{см \cdot сек}, \quad S = 6 \cdot 10^{11} \frac{1}{см \cdot сек},$$

$$Q = 8 \cdot 10^8 \frac{1}{см \cdot сек}, \quad n_0 = 2 \cdot 10^{11} \frac{1}{см^3}, \quad c_0 = 2,7 \cdot 10^{-5}, \quad \xi = 2,3.$$

Плотность ионов изменяется примерно по закону

$$n = n_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_1^2}}.$$

Температура растет от оси к стенкам сосуда примерно в 4 раза; этот парадоксальный результат обусловлен двумя причинами. Во-первых, теплоемкость плазмы убывает к стенке вследствие уменьшения ее плотности, тогда как благодаря тому, что мы пренебрегли ее зависимостью электропроводности плазмы от ее плотности, джоулево тепло считалось равномерно выделяющимся по всему объему плазмы. Во-вторых, нами не было учтено, что концентрация нейтральных атомов, а стало быть, и обусловленный их перезарядкой теплоотвод, падают по мере удаления от стенки сосуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Landshoff, Phys. Rev., 76, 904 (1949).
 2. Сена, Столкновения электронов и ионов с атомами газа. М., ГТТИ, 1948.
 3. Кеене, Phil. Mag., 40, 369 (1949).
-

А. Д. Сахаров

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

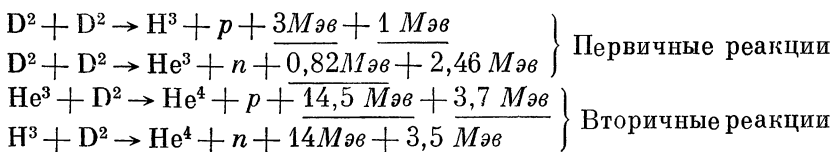
*(Часть II)**

В работе И. Е. Тамма [1] изложены свойства высокотемпературной плазмы в магнитном поле, дающие надежду на осуществимость МТР. Ниже излагаются другие вопросы теории МТР, а именно:

§ 1. Термоядерные реакции. Тормозное излучение. § 2. Расчет большой модели. Критический радиус. Краевые явления. § 3. Мощность подмагничивания. Оптимальная конструкция. Производительность по активным веществам. § 4. Дрейф в неоднородном магнитном поле. Подвешенный ток. Индукционная стабилизация. § 5. Проблема плазменной неустойчивости.

§ 1. Термоядерные реакции. Тормозное излучение

В МТР могут идти следующие реакции:



Подчеркнута энергия, которая сообщается заряженным частицам и поддерживает термоядерную реакцию в МТР.

Скорость протекания реакции характеризуется временем τ ,

* Работа выполнена в 1951 г.

в течение которого каждое ядро испытывает одно столкновение, сопровождающееся реакцией

$$\left. \begin{aligned} \tau_D^{-1} &= N_D ([\tilde{\sigma v}]_1 + [\tilde{\sigma v}]_2); \\ \tau_{H^3}^{-1} &= N_D [\tilde{\sigma v}]_{H^3+D}; \\ \tau_{He^3}^{-1} &= N_D [\tilde{\sigma v}]_{He^3+D}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

N_D — число дейтронов в 1 см^3 ; $[\tilde{\sigma v}]$ — усредненное по максвелловскому распределению произведение сечения на относительную скорость.

В табл. 1 приведены для ориентации в порядках величин времена τ , соответствующие $N_D = 0,77 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (использованы отчетные данные 1950 г.).

Т а б л и ц а 1

| $T, \text{ кэв}$ | Время жизни D по отношению к обоим реакциям (первичн.) | Время жизни H^3 | Время жизни He^3 |
|------------------|--|-------------------|--------------------|
| 10 | 7620 | 134 | 27 400 |
| 20 | 1770 | 34 | 8 850 |
| 50 | 421 | 15,3 | 322 |
| 100 | 202 | 13,8 | 89,9 |
| 200 | 112 | 18,0 | 51,2 |
| 300 | 85,5 | 23,0 | 46,4 |

На графике № 1* отложено, в функции температуры, количество энергии Q_1 , сообщаемое при той же плотности $N_D = 0,77 \cdot 10^{14}$ заряженным частицам в 1 см^3 в 1 сек. (учтены только первичные реакции**).

Для сравнения приведена энергия Q_2 , уносимая тормозным (рентгеновским) излучением, вычисленная по формуле

$$Q_2 = a N_D^2 \cdot \sqrt{T_{Mэв}} (1 + \alpha T). \quad (1.2)$$

$\alpha = 5,05 \text{ Мэв}^{-1}$ (этот член обусловлен в основном электронно-электронными соударениями): $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-20}$. На графике рис. 1 видно, что в системе достаточно больших размеров возможна самоподдерживающаяся реакция ($Q_1 > Q_2$).

* Графики даны на стр. 30, в «Приложении».

** $Q_1 = \frac{N_D}{\tau_D} \frac{3 \text{ Мэв} + 1 \text{ Мэв} + 0,82 \text{ Мэв}}{4} 1,6 \cdot 10^{-7}$.

§ 2. Расчет большой модели. Критический радиус. Краевые явления*

Рассмотрим прямой бесконечный цилиндр радиуса R . Пренебрежем эффектами, обусловленными нейтральными частицами. В этом предположении радиальный ионный ток j (в стационарном случае) отсутствует.

Согласно [1],

$$j \sim \frac{n^2}{T^{1/2}} \left(\frac{\nabla n}{n} + \frac{1}{4} \frac{\nabla T}{T} \right); \quad (2.1)$$

отсюда при $j=0$ имеем

$$nT^{1/2} = \text{const} = n_0 T_0^{1/2}, \quad (2.1a)$$

где n_0 и T_0 — число дейтонов в 1 см^3 и температура на оси цилиндра. Из (2.1a) видно, что $p = 2nT$ (давление) максимально в центре и спадает до малого значения у стенки. Согласно [1], магнитное поле в системе с цилиндрической симметрией меняется так, что остается постоянной сумма давлений газа и магнитного поля

$$\frac{H^2}{8\pi} + 2nT = \text{const} \quad (2.1b)$$

Запишем далее закон сохранения энергии. Пусть $\pi \frac{\partial p_g}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$ есть тепловой поток, обусловленный теплопроводностью плазмы. Имеем

$$\text{div } \pi = \left(\frac{n}{N_D} \right)^2 Q(T), \quad (2.1b)$$

где $Q = Q_1 - Q_2 = 0,77 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$; относительно Q_1 и Q_2 см. выше. Тогда (T — эрг/г)

$$\pi = \frac{3,6 \cdot 10^{-8} n^2}{H^2 \sqrt{T}} \left(\nabla T + \frac{7}{2 \left(\sqrt{\frac{M}{2m} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{41}{8} \right)} \frac{T}{n} \nabla n \right). \quad (2.2)$$

* Расчет большой модели (с пренебрежением краевыми явлениями и вторичными реакциями) впервые был произведен И. Е. Таммом в октябре 1950 г. Обнадеживающие результаты, касающиеся роли процессов с нейтральными частицами, были получены И. Е. Таммом для системы с малой плотностью (температурный скачок).

Из (2.1а) имеем $\frac{T}{n} \cdot \nabla n = -\frac{1}{4} \nabla T$, т. е.

$$\pi = -\frac{3,5 \cdot 10^{-8} n^2}{H^2 \cdot \sqrt{T}} \nabla T. \quad (2.1г)$$

Совместное рассмотрение уравнений (2.1а), (2.1г) дает возможность найти распределение всех величин по радиусу трубы, а также то критическое значение радиуса, при котором выделение термоядерной энергии сравнивается с уходом тепла к стенкам. Для рассмотрения были введены безразмерные переменные. В частности, магнитное поле входит в комбинации, пропорциональной HR , откуда следует, что критический радиус R_K обратно пропорционален H_0^* . Найдено (при пренебрежении вторичными реакциями и краевыми эффектами для $T_0 = 107$ кэв):

$$R_K H_0 \approx 10^7 \text{ гс} \cdot \text{см}. \quad (2.3)$$

Приняв $H_0 = 25\,000$ гс, имеем $R_K = 400$ см.

Заметим, что численное значение коэффициента термодиффузии, равное $\frac{1}{4}$ при $\frac{\nabla T}{T}$ в формуле (2.1), имеет принципиальное значение для осуществимости МТР. Это проще всего понять из следующих соображений. Теплоотдача всякого тела по порядку величины (в стационарном случае, при не очень неоднородном выделении энергии) пропорциональна

$$I = L \int_{T_1}^{T_0} \kappa(T) dT,$$

где L — линейные размеры; κ — теплопроводность; T_0 — температура в центре; T_1 — температура на границе. В нашем случае $\kappa \sim \frac{n^2}{T^{1/2}}$. Пусть $n \sim T^{-\alpha}$, где α , для общности, не обязательно равно $\frac{1}{4}$ [обобщение формулы (2.1а)]. Имеем $\kappa \sim \frac{1}{T^{1/2+2\alpha}}$. При $\alpha = \frac{1}{4}$ $I \sim \ln \frac{T_0}{T_1} \approx 15$; при $\alpha > \frac{1}{4}$ I может быть весьма велико. Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ $I \sim \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{1/2} \approx 10^3$. При

* Этот результат легко понять без всяких вычислений. Выделение тепла на 1 см цилиндра $\sim R^2 Q n_0^2$. Уход тепла пропорционален $\sim n_0^2 T^{1/2} H_0^{-2}$. Для нахождения R_K приравняем эти выражения. Отсюда $R_K^2 \sim T^{1/2} Q^{-1} H_0^{-2}$.

$\alpha < \frac{1}{4}$ интеграл сходится при $T_1 \rightarrow 0$. Было проверено, что наличие в дейтериевой плазме примесей с $Z > 1$ (гелий, воздух и т. д.) уменьшает α , т. е. действует в этом смысле в благоприятную сторону (расчеты Е. С. Фрадкина).

На графиках № 2 и 3 изображены распределения T и n для случая $H_0 = 25\,000$ гс; T_1 принято около 1000° (см. ниже). Магнитное поле в центре спадает до очень малых величин, поэтому n_0 можно вычислять по формуле

$$n_0 = \frac{H_0^2}{16\pi T}. \quad (2.4)$$

При $H_0 = 25\,000$ гс, $T = 100$ кэв $= 1,6 \cdot 10^{-7}$ эрг имеем $n_0 = 0,77 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$. На графике № 4 изображено выделение энергии в единице объема при n_0 , описываемом формулой (2.4), $H_0 = 25\,000$ гс. Очевидно, наиболее целесообразно работать при наименьшей температуре, при которой термоядерная реакция является самоподдерживающейся.

В имеющихся в настоящее время расчетах не учитывались вторичные реакции и возрастание тормозного излучения при появлении в системе He^3 и He^4 . Вероятно, первый из упомянутых факторов (снижающий R_K) более важен. Видимо, можно дополнительно уменьшить R_K принудительным сжиганием He^3 .

Лишь самые предварительные качественные оценки могут быть сделаны по вопросу о ходе решения вблизи стенки, где важную роль играют летящие от стенки нейтральные атомы и молекулы (полностью аналогичная задача была решена И. Е. Таммом для случая малой модели, причем выявился эффект температурного скачка).

Пренебрежем: а) рекомбинацией в объеме плазмы (будем учитывать только рекомбинацию на стенках); б) столкновениями нейтральных атомов между собой.

При этих предположениях можно найти качественную картину решения (рис. 1) и затем проверить законность исходных предположений. Температура ионов испытывает около стенки скачок T' . Летящие от стенки медленные нейтральные частицы испытывают перезарядку на очень малом расстоянии от стенки (доли миллиметра). Возникают быстрые нейтральные частицы, которые обладают заметным пробегом порядка 1 см. Разница пробега быстрых и медленных нейтральных частиц обусловлена тем, что пробег есть произведение времени свободного пролета на скорость частицы. Время свободного пролета определяется относительной скоростью нейтральных

и заряженных частиц и изменяется при изменении скорости нейтральной частицы лишь в $\sqrt{2}$ раз.

Разберем предельный случай, когда вероятность ионизации равна произведению некоторого α на вероятность перезарядки; $\alpha \ll 1$. Пусть полный поток быстрых нейтральных частиц есть j_n . Имеем $\pi_0 \sim \frac{3}{2} T' j_n + \pi_1$ (π_0 — поток в области $x > x_1$, π_1 — поток в области $x < x_1$, много меньше, см. ниже, и им

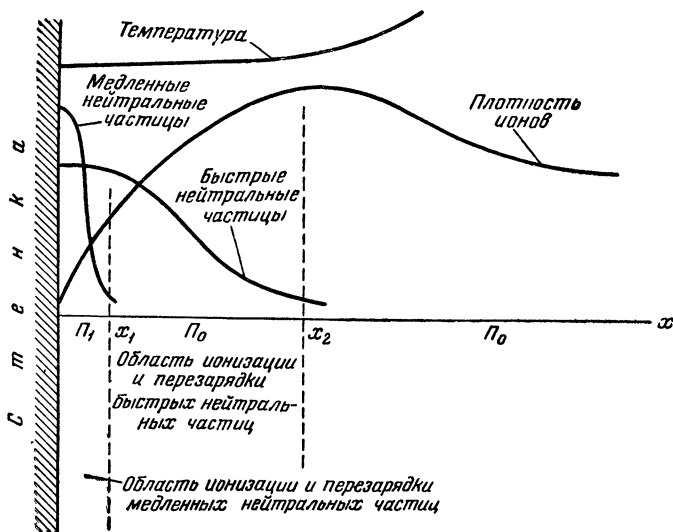


Рис. 1.

можно пренебречь). Согласно теории альbedo, вероятность ионизации быстрой нейтральной частицы есть $1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha}} \approx \sqrt{\alpha}^*$. Поэтому поток ионов есть $j_i = \sqrt{\alpha} j_n$. Вероятность ионизации медленной частицы есть αj_n , т. е. меньше вероятности ионизации быстрой частицы; ею можно пренебречь. При $x < x_1$ n мало. Поэтому $\pi_1 \sim \nabla(n^2)$, а температуру можно считать постоянной.

$$\pi_1 = \frac{7}{2} T' j_i = \frac{7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{T'} \nabla(n^2)}{H^2};$$

$$\pi_1 = \frac{7}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \pi_0. \quad (2.5)$$

* Ионизация есть аналог поглощения; перезарядка есть аналог рассеяния. Альbedo полупространства $\frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}} - 1$.

$\nabla(n^2) = \frac{n_1^2}{x}$, где n_1 — число ионов в точке x_1 .

$$x_1 = \frac{1}{\sigma n_1} \frac{v_0}{v_1}. \quad (2.6)$$

Здесь σ — сечение перезарядки; v_0 — скорость медленных нейтральных частиц; v_1 — скорость ионов.

В настоящее время не рассмотрена задача сшивания решений в областях $x < x_1$; $x_1 < x < x_2$ и $x > x_2$.

Ограничимся предварительной оценкой теплового потока, при котором возможен температурный скачок в 10 эв (примерительно к условиям большой модели; в малой модели температурный скачок несомненен). Примем: $n_1 = 1,4 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$; $\alpha = 1$ (т. е. находимся на грани применимости намеченной выше теории); $T' = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$; $\sigma = 3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^{-2}$; $H = 50\,000 \text{ гс}$; $\frac{v_0}{v_1} = 0,05$ (комнатная температура стенки). Получаем $x_1 = 0,01 \text{ см}$ (порядка радиуса ларморовой окружности для ионов, т. е. и в этом отношении находимся на грани применимости теории); $\pi = 5 \cdot 10^8 \sim 50 \text{ вт/см}^2$, что имеет правильный порядок величины.

§ 3. Мощность подмагничивания. Оптимальная конструкция. Производительность по активным веществам

На рис. 2 обозначены основные параметры МТР.

Найдем оптимальное соотношение ∂ и d , обеспечивающее минимум массы меди и мощности подмагничивания в самоподдерживающемся режиме. Отношение D/∂ определяется, очевидно, конструктивными соображениями; оно порядка 3—5.

Произведение $d(\partial - d)$ пропорционально $H_0 R_0$ и должно считаться заданным. Ищем $\min D(\partial^2 - d^2) \sim \partial(\partial^2 - d^2)$. Он удовлетворяется при $\partial \approx 2,2d$. Примем

$$\partial = 2d, \quad D = 6d; \quad (3.1)$$

при этом мощность подмагничивания $P \sim H_0^2 d$. Мощность, выделяемая в результате термоядерной реакции, и производительность по активным веществам

$$W \sim n_0^2 d^3 \sim H_0^4 d^3 \sim P^2 d.$$

Для характеристики численных коэффициентов в этих формулах разберем следующий пример (всюду в дальнейшем,

когда речь идет о численных характеристиках, имеем в виду этот пример):

$$\begin{array}{l}
 H_0 = 50\,000 \text{ гс,} \\
 d = 4 \text{ м} \\
 \vartheta = 8 \text{ м} \\
 D = 24 \text{ м} \\
 n_0 = 3,0 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \\
 T_0 = 100 \text{ кэв}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{Объем} \\
 \text{Поверхность} \\
 \text{Выделение термо-} \\
 \text{ядерной энергии}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = 0,96 \cdot 10^9 \text{ см}^3 \\
 = 0,96 \cdot 10^7 \text{ см}^2 \\
 = 17,6 \cdot 10^6 \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек.}
 \end{array}$$

Масса меди в обмотке (с учетом коэффициента заполнения $k=0,5$) 13 000 т. Плотность тока в обмотке — 400 а/см² (сред-

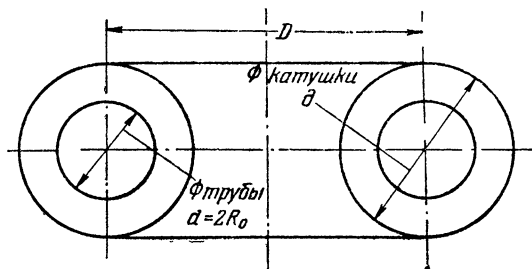


Рис. 2.

няя 200 а/см²). Мощность подмагничивания около 400 000 квт (с учетом неоднородности заполнения обмотки и других конструктивных моментов — несколько больше). Выделение термо-ядерной энергии (считая, что в среднем с приведенной выше скоростью реакция идет в 0,5 объема трубы)

$$W = 8,8 \cdot 10^{15} \text{ эрг/сек} = 880\,000 \text{ квт.}$$

При этом выгорает ядер D

$$\frac{8,8 \cdot 10^{15} \text{ эрг/сек}}{1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/Мэв}} \cdot \frac{4}{3,3 \text{ Мэв} + 4 \text{ Мэв}} = 3 \cdot 10^{22} \frac{\text{ядер } D}{\text{сек}}$$

(что составляет 150 г/сутки). Можно рассчитывать получить около 100 г T в сутки, или в 80 раз больше U^{233} *. Увеличение мощности P и массы меди в 2,5 раза увеличивают эту

* Заметим, что энергетическая ценность U^{233} , который может сжигаться в простых реакторах, значительно превышает выделение тепла в самом термоядерном реакторе.

производительность в 8,5 раза (без изменения плотности тока). Увеличивая плотность тока в n раз, можем уменьшить линейные размеры в $n^{1/2}$ раз, оставляя неизменным произведение $H_0 R_0$. При этом масса меди уменьшится в $n^{3/2}$ раз, а мощность подмагничивания возрастет в $n^{1/2}$ раз. В этом же отношении возрастет выход активных веществ.

§ 4. Дрейф в неоднородном магнитном поле. Подвешенный ток. Индукционная стабилизация

Магнитное поле в МТР (в пренебрежении экранировкой плазменными токами) совпадает с полем прямого тока. Неоднородность магнитного поля приводит к весьма опасным эффектам дрейфа (рис. 3). Для частицы массы M в точке A поле направлено по оси z , а градиент поля по оси x $\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{H_z}{x}$.

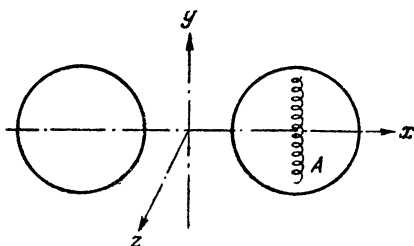


Рис. 3.

Подвешенный ток. Рассмотрим движение заряженных частиц в магнитном поле, созданном обмоткой МТР ($\sim 50\,000$ *гс*) и осевым током (200 *гс*), созданным кольцевым проводником, проходящим по оси трубы МТР. Магнитные силовые линии в таком поле приобретают винтообразный характер (рис. 4). В случае

приведенных выше примерных чисел центр ларморовой окружности частицы, двигаясь по магнитной силовой линии, обегает ось y в 40 раз чаще, чем осевой ток (ось z). Дивергенция векторного поля скоростей движения центра ларморовой окружности в пренебрежении дрейфом должна быть равна 0 (это утверждение следует из теоремы Лиувилля). На это движение накладывается дрейф. Дивергенция этого векторного поля тоже должна быть равна 0; поэтому проекции результирующих траекторий на сечение тороида (плоскость xy) представляют собой замкнутые траектории, смещенные на некоторую величину Δ относительно того положения, которое они занимали бы при отсутствии дрейфа. Оценки дрейфа показывают, что эта величина всегда достаточно мала. Так, для протона с энергией 14 *Мэв* ($v_0 = 5,2 \cdot 10^9$ *см/сек*) скорость винтового движения $2 \cdot 10^7$, а скорость дрейфа $1,5 \cdot 10^6$ *см/сек*. Отсюда $\Delta \sim 20$ *см*. Заметим, что в этом случае мы избегаем трудности, связанной с наличием объемных зарядов. Возникает вопрос, как осуществить осевой ток. В настоящее время

не ясно, можно ли провести через горячую область тросы, поддерживающие осевое кольцо и подводящие ток и охлаждающую воду. Не исключено, что может быть создана такая конфигурация защитных полей, например, при помощи пропускания сильного тока по тросам, которая предохранит тросы от попадания на них горячего газа. Продискутируем другую возможность — подвеску осевого кольца при помощи магнитного поля (дополнительное горизонтальное поле с $H' \sim 100 \text{ гс}$ не нарушит качественной картины магнитного поля в тороиде).

Материал кольца должен выдерживать высокие температуры, так как единственным механизмом охлаждения кольца является тепловое излучение, соответствующее даже при $T = 1400^\circ \text{С}$ около 40 вт/см^2 [$\pi = 5 \cdot 10^{-5} T^4 (\text{К}^\circ)$], т. е. очень малой величине. Одной из возможностей изготовления кольца, работающего при таких температурах, служит применение труб из тугоплавких металлов, содержащих расплавленный легкий металл (Li, Be, Al и т. д.).

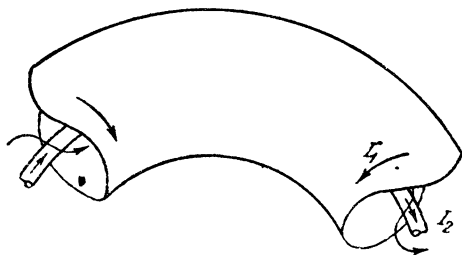


Рис. 4.

Постоянный ток — $200\,000 \text{ а}$. Общая мощность, необходимая для поддержания постоянного тока, составит $2\,000\text{—}10\,000 \text{ квт}$. Большие трудности должны представить: передача этой энергии (в форме радиочастоты) кольцу и выпрямление переменного тока.

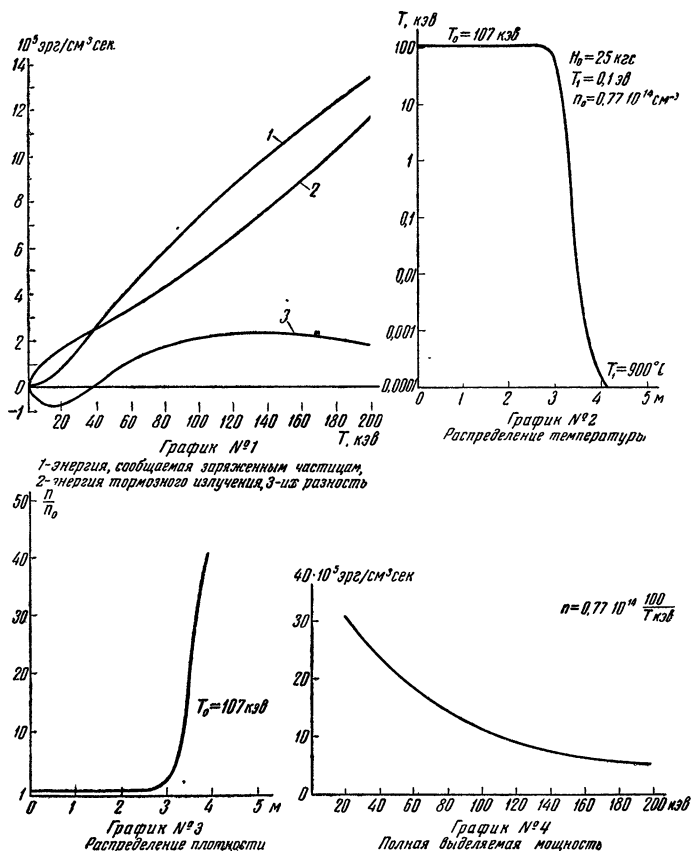
Другой способ антидрейфовой стабилизации, который технически несравненно более приемлем и который поэтому необходимо тщательно изучить, — это создание осевого тока непосредственно в плазме индукционным методом. В этом способе не ясно, разрушается ли высокотемпературная плазма в момент обращения индукционного тока в ноль.

§ 5. Проблема плазменной неустойчивости

Необходимо выяснить, существуют ли в случае плазмы в магнитном поле такие возмущения, которые, согласно уравнениям плазменной динамики, нарастают (по экспоненциальному или степенному закону) во времени. Нужно рассмотреть ряд случаев. Наиболее исследован теоретически и экспериментально случай протекания тока по плазме параллельно

внешнему магнитному полю, где найдены неустойчивость и турбулизация плазмы. Можно опасаться наличия неустойчивости также в случае неоднородной плазмы при наличии дрейфового тока. В настоящее время эта проблема только поставлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ



ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, см. настоящий том, стр. 3.

И. Е. Тамм

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

(Часть III)*

ДРЕЙФ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДЕ ПРИ НАЛИЧИИ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО ТОКА

§ 1

По вопросу, которому посвящена эта статья, существовали превратные представления (которые разделял и я, хотя высказывал их только устно, а не письменно). Предполагалось, что линии дрейфа частиц, различающихся своим зарядом или соотношением между параллельной и перпендикулярной к магнитному полю компонентами скоростей $v_{||}/v_{\perp}$, взаимно пересекаются, что приводит к резкому повышению теплопередачи в неравномерно нагретой плазме (по сравнению со случаем прямого цилиндра).

В этой работе, проведенной совместно с Н. Н. Боголюбовым, показывается, что если теплопроводность в прямом цилиндре обозначить

$$\kappa = \frac{A(N, T)}{H^2}, \quad (1.1)$$

то в тороиде

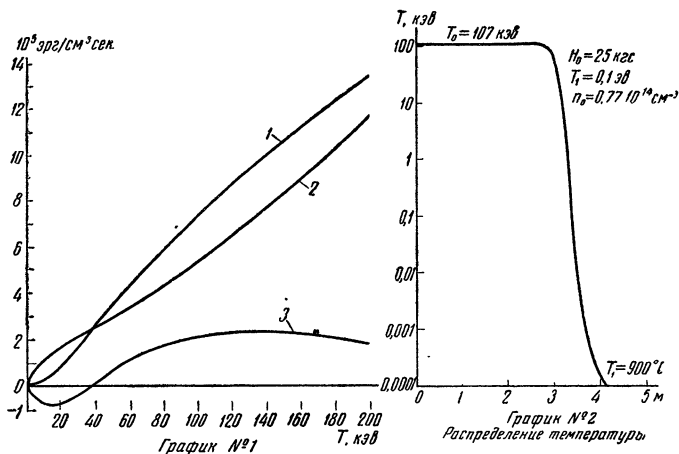
$$\frac{A}{H'^2 + H_{\varphi}^2} \leq \kappa \leq \frac{A}{H'^2}, \quad (1.2)$$

где H' — поле стабилизирующего тока, протекающего по плазме, а H_{φ} — поле катушки, намотанной на тороид. В статье

* Работа выполнена в 1951 г.

внешнему магнитному полю, где найдены неустойчивость и турбулизация плазмы. Можно опасаться наличия неустойчивости также в случае неоднородной плазмы при наличии дрейфового тока. В настоящее время эта проблема только поставлена.

ПРИЛОЖЕНИЕ



1-энергия, сообщаемая заряженным частицам, 2-энергия тормозного излучения, 3-их разность

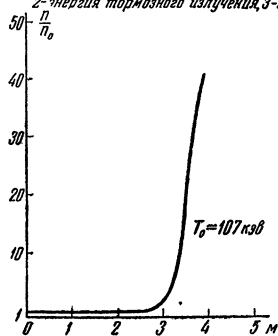


График №3
Распределение плотности

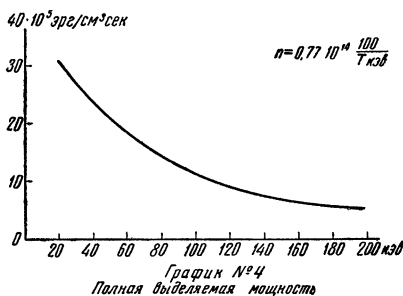


График №4
Полная выделяемая мощность

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, см. настоящий том, стр. 3.

И. Е. Тамм

ТЕОРИЯ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

(Часть III)*

ДРЕЙФ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДЕ ПРИ НАЛИЧИИ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО ТОКА

§ 1

По вопросу, которому посвящена эта статья, существовали превратные представления (которые разделял и я, хотя высказывал их только устно, а не письменно). Предполагалось, что линии дрейфа частиц, различающихся своим зарядом или соотношением между параллельной и перпендикулярной к магнитному полю компонентами скоростей $v_{||}/v_{\perp}$, взаимно пересекаются, что приводит к резкому повышению теплопередачи в неравномерно нагретой плазме (по сравнению со случаем прямого цилиндра).

В этой работе, проведенной совместно с Н. Н. Боголюбовым, показывается, что если теплопроводность в прямом цилиндре обозначить

$$\kappa = \frac{A(N, T)}{H^2}, \quad (1.1)$$

то в тороиде

$$\frac{A}{H'^2 + H_{\varphi}^2} \leq \kappa \leq \frac{A}{H'^2}, \quad (1.2)$$

где H' — поле стабилизирующего тока, протекающего по плазме, а H_{φ} — поле катушки, намотанной на тороид. В статье

* Работа выполнена в 1951 г.

приводятся формулы, позволяющие вычислить точно зависимость x от H' и H_φ .

Для упрощения будем предполагать, что электрического поля нет (оно всегда мало по сравнению с H , и введение его в качестве возмущения не представляет трудности).

Далее будем предполагать, что система обладает аксиальной симметрией, т. е. что

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.3)$$

Направление осей указано на рис. 1, где угол φ — угол вращения около оси z . Поле H считаем заданным; вопроса о согласовании его с плазменными токами мы здесь не рассматриваем*.

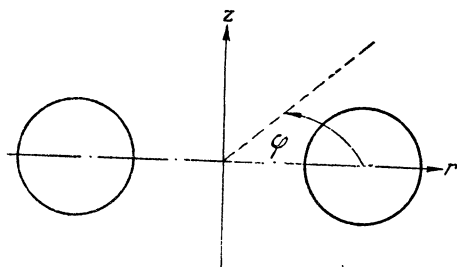


Рис. 1.

При наличии аксиальной симметрии [уравнение (1, 3)] слагающие поля H_r и H_z могут быть выражены через компоненту A_φ векторного потенциала (создаваемого стабилизирующим плазменным током) с помощью соотношений

$$H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi); \quad H_r = - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Согласно общей теореме электродинамики, движение заряженной частицы в таком поле (при отсутствии соударений с другими частицами) обладает двумя точными интегралами движения

$$v^2 = \text{const}; \quad (1.5)$$

$$\frac{e}{c} r A_\varphi + mrv_\varphi = M_z = \text{const}. \quad (1.6)$$

(M_z — обобщенный момент движения частицы вокруг оси z). Заметим, что уравнение проекции магнитной силовой линии на меридиональную плоскость r, z гласит

$$r A_\varphi = \text{const}. \quad (1.7)$$

* Хотя, например, меридиональное поле H_r и H_z создается током в плазме, для поддержания которого необходимо, вообще говоря, электрическое поле E , мы этого поля E_z пока не учитываем.

Это утверждение следует из того факта, что, согласно (1.4),

$$\mathbf{H} \operatorname{grad} (r A_{\varphi}) \equiv 0. \quad (1.8)$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что частица в своем движении уклоняется от магнитной силовой линии не больше чем на величину ларморовского радиуса в поле H' . Действительно, из (1.6) следует, что величина $\frac{e}{c} r A_{\varphi}$ при движении частицы изменяется не больше чем на $\pm mrv$ (где v — полная скорость частицы). Стало быть, если обозначить через δR максимальное отклонение частицы от магнитной силовой линии, то

$$\delta R |\operatorname{grad} (r A_{\varphi})| \leq \frac{mrv c}{e}. \quad (1.9)$$

Так как, согласно (1.4), $|\operatorname{grad} (r A_{\varphi})| = r H'$, где $H'^2 = H_r^2 + H_z^2$, то из (1.9) получаем

$$\delta R \leq \frac{m v c}{e H'} = R_{\text{Л}}(H'), \quad (1.10)$$

где $R_{\text{Л}}(H')$ — радиус Лармора в поле H' .

Таким образом, траектории движения частиц в меридиональной плоскости r, z совпадают с магнитными силовыми линиями поля H' , с точностью до $R_{\text{Л}}(H')$, т. е. одинаковы для частиц обоих знаков заряда, причем траектории эти замкнуты и не пересекаются между собой.

Ошибочные высказывания по этому вопросу были связаны со следующим обстоятельством. Если обозначить через \mathbf{u} скорость движения центров ларморовых окружностей (точнее, скорость движения частицы, усредненную по обращению ее вокруг направления магнитного поля), то нетрудно показать, что с точностью до членов порядка $\frac{1}{\omega^2}$

$$\mathbf{u} = v_{\parallel} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{v^2 + v_{\parallel}^2}{2\omega^2} [\boldsymbol{\varepsilon} \nabla \omega] + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega^2} \{ \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\varepsilon} (\boldsymbol{\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}) \}. \quad (1.11)$$

Здесь введены обозначения

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e \mathbf{H}}{m c}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \quad (1.12)$$

$$v_{\parallel} = (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v}). \quad (1.13)$$

В уравнение (1.11) величина v_{\parallel} входит как параметр; ее изменение во времени определяется с точностью до членов порядка $1/\omega$ уравнением

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\parallel}^2 - v^2}{2\omega} (\mathbf{e}\nabla\omega). \quad (1.14)$$

Уравнения (1.11) и (1.14) представляют собой полную систему уравнений дрейфа (точнее, усредненного по ларморовскому вращению движения частиц в магнитном поле).

В случае прямого цилиндра первый, главный член формулы (1.11) направлен по оси z , и дрейф частицы в плоскости xu определяется только членами, зависящими от *производных* магнитного поля по координатам. При рассмотрении дрейфа в торе недостаточно точно учитывалось, что главный член дрейфа в меридиональной плоскости r, z определяется *первым* членом формулы (1.11) (ибо проекция его на меридиональную плоскость не равна нулю) и что члены с производными от ω являются лишь поправочными, меняющими траекторию частицы лишь на величину порядка ларморовского радиуса.

§ 2

Теплопроводность плазмы определяется в первую очередь ионами и их соударениями друг с другом. Поэтому будем в дальнейшем рассматривать только ионы, пренебрегая их соударениями с электронами*.

Введем обозначение

$$\xi = \frac{e}{c} r A_{\varphi}. \quad (2.1)$$

Из (1.4) и (1.12) получаем

$$\text{grad } \xi = r (\omega_z \mathbf{i}_r - \omega_r \mathbf{i}_z), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{i}_z, \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_{\varphi}$ — единичные векторы по направлениям осей. И (2.2) следует, в частности,

$$(\mathbf{v}\nabla\xi) = r [\omega\mathbf{v}]_{\varphi}. \quad (2.3)$$

* Напротив, материальный поток частиц определяется *исключительно* соударениями ионов с электронами.

Помимо координаты ξ , постоянной вдоль проекции магнитных силовых линий на плоскость r, z , введем координату s , изменяющуюся вдоль магнитной силовой линии,

$$ds = \frac{(\omega' d\mathbf{r})}{\omega'} \quad (2.4)$$

Здесь ω' означает проекцию вектора ω на меридиональную плоскость, т. е.

$$\omega'_r = \omega_r, \quad \omega'_z = \omega_z, \quad \omega'_\varphi = 0, \quad (2.5)$$

так что

$$\omega = \omega' + \mathbf{i}_\varphi \omega_\varphi. \quad (2.6)$$

Из (2.2) и (2.4) следует

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\omega_z}{\omega'} \frac{\partial}{\partial s} - r \omega_r \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\omega_r}{\omega'} \frac{\partial}{\partial s} + r \omega_z \frac{\partial}{\partial \xi},$$

так что

$$(\mathbf{v}\nabla) = \frac{(\mathbf{v}\omega')}{\omega'} \frac{\partial}{\partial s} + r [\omega\mathbf{v}]_\varphi \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.7)$$

Введем еще обозначение k^2 для адиабатического инварианта

$$k^2 = \frac{\omega_0 v_\perp^2}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega} (v^2 - (\varepsilon\mathbf{v})^2). \quad (2.8)$$

Здесь ω_0 означает некоторую постоянную размерности и порядка ω : она введена в выражение для k^2 для того, чтобы сделать k^2 безразмерным.

Величина k^2 является адиабатическим инвариантом в том смысле, что ее производная по времени обращается в нуль после усреднения ее по Лармору:

$$\frac{dk^2}{dt} \overset{\text{II}}{=} \overline{(\mathbf{v}\nabla) k^2} \overset{\text{II}}{=} - \frac{k^2}{\omega} \overline{(\mathbf{v}\nabla)\omega} - \frac{2v_{\perp\omega_0}}{\omega} \overline{(\mathbf{v}\nabla)(\varepsilon\mathbf{v})} \equiv 0. \quad (2.9)$$

Усреднением по Лармору называем следующую операцию. Введем ортогональную тройку единичных векторов $\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{b}$, где

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\omega}, \quad [\varepsilon\mathbf{a}] = \mathbf{b}, \quad [\mathbf{b}\varepsilon] = \mathbf{a}. \quad (2.10)$$

Разлагаем вектор \mathbf{v} по этим направлениям:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} + v_{\perp} (\mathbf{a} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha). \quad (2.11)$$

Усреднением по Лармору будем обозначать усреднение по углу α . Легко показать, что

$$\overline{v_i v_k} = \frac{v_{\perp}^2}{2} \delta_{ik} + \left(v_{\parallel}^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \varepsilon_i \varepsilon_k. \quad (2.12)$$

Пользуясь этим соотношением, легко показать справедливость формулы (2.9).

Заметим еще для дальнейшего, что в координатах v , v_{\parallel} и α (заметим, что $v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2$) оператор

$$\sum_k [\mathbf{v}\omega]_k \frac{\partial}{\partial v_k} = -\omega \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (2.13)$$

§ 3

Кинетическое уравнение имеет вид

$$DF = \nu StF. \quad (3.1)$$

Здесь $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения частиц,

$$D = \sum_k [\mathbf{v}\omega]_k \frac{\partial}{\partial v_k} + (\mathbf{v}\nabla), \quad (3.2)$$

St — оператор соударений; ν — безразмерная величина, пропорциональная среднему числу соударений частиц в единицу времени. В дальнейшем будем считать ν малой величиной и будем разлагать F по степеням ν .

Будем искать решение кинетического уравнения, по возможности близкое к максвеллову распределению. Так как частицы дрейфуют вдоль магнитных силовых линий, то плотность N и температура T частиц должны быть постоянны вдоль магнитных линий и, стало быть, могут зависеть только от координаты ξ , но не от s .

Положим

$$\left. \begin{aligned} F &= F_0 (1 + \Phi + \chi); \\ F_0 &= \frac{N(\xi) \beta^3(\xi)}{\pi^{3/2}} \cdot e^{-\beta^2(\xi) \mathbf{v}^2}, \quad \beta^2 = \frac{m}{2T(\xi)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_0} DF_0 &= \frac{1}{F_0} (\nabla \nabla F_0) = r [\omega \mathbf{v}]_{\varphi} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{[\omega \mathbf{v}]_{\varphi}}{\omega'} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по нормали к магнитной силовой линии, т. е. производную по направлению изменения координаты ξ :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{|\text{grad } \xi|} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{r \omega'} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Введя обозначение

$$\gamma = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right), \quad (3.4)$$

получаем

$$\frac{1}{F_0} DF_0 = \gamma \frac{[\omega \mathbf{v}]_{\varphi}}{\omega'}. \quad (3.5)$$

Внося (3.3) и (3.5) в (3.1), получаем

$$D(\Phi + \chi) + \gamma \frac{[\omega \mathbf{v}]_{\varphi}}{\omega'} (1 + \Phi + \chi) = \nu St' (\Phi + \chi), \quad (3.6)$$

где введено обозначение

$$St' (\Phi) = \frac{1}{F_0} St [F_0 (1 + \Phi)]. \quad (3.7)$$

Выберем такие величины Φ и χ , чтобы Φ было решением кинетического уравнения при отсутствии соударений, т. е. положим

$$D\Phi + \gamma \frac{[\omega \mathbf{v}]_{\varphi}}{\omega'} (1 + \Phi) = 0, \quad (3.8)$$

$$D\chi + \gamma \frac{[\omega \mathbf{v}]_{\varphi}}{\omega'} \chi = \nu St' (\Phi + \chi). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) легко решить, разлагая Φ по обратным степеням ω . В частности, главный член Φ , обратный первой степени ω (точнее, ω'), равен

$$\Phi_1 = \gamma \frac{v_{\varphi}}{\omega'}. \quad (3.10)$$

Старшие члены нам не понадобятся.

Переходим к определению величины χ , учитывающей роль соударений. Разложим ее в ряд по степеням ν :

$$\chi = \chi_0 + \nu\chi_1 + \nu^2\chi_2 + \dots \quad (3.11)$$

Хотя при $\nu=0$ и можно положить $\chi=0$, однако при $\nu \neq 0$ в χ необходимо входит член, не зависящий от ν . Это объясняется следующим образом. Распределение $F = F_0(1 + \Phi)$ является одним из возможных распределений частиц в магнитном поле при отсутствии соударений. Однако нам в качестве исходного распределения нужно выбрать такое, какое минимально нарушалось бы соударениями. Распределение $F_0(1 + \Phi)$ таковым не является — если бы мы не ввели в χ члена χ_0 , т. е. взяли бы в качестве исходного (без соударений) распределения именно $F_0(1 + \Phi)$, а не $F_0(1 + \Phi + \chi_0)$, то в χ появились бы члены, пропорциональные сколь угодно большим положительным степеням большой величины ω .

Итак, исходя из (3.11) и внося это разложение в (3.9), получаем

$$D\chi_0 + \gamma \frac{[\omega \mathbf{v}]_z}{\omega'} \chi_0 = 0, \quad (3.12)$$

$$D\chi_1 + \gamma \frac{[\omega \mathbf{v}]_z}{\omega'} \chi_1 = \nu St' (\Phi + \chi_0) \text{ и т. д.} \quad (3.13)$$

Итак, χ_0 является решением уравнения (3.12), соответствующего отсутствию соударений. Разлагая это решение по обратным степеням ω , легко показать, что первый, главный член этого разложения должен быть функцией только следующих величин: ξ , v^2 и k^2 . В противном случае решение будет включать в себя члены, пропорциональные более высокой степени ω , чем первый член, который мы считаем главным. Итак, главный член χ_0 будет функцией только от ξ , v^2 и k^2 ; обозначим его через

$$\chi_{0,1}(\xi, v^2, k^2). \quad (3.14)$$

Второй индекс «1» после 0 означает, что этот член обратен первой степени ω .

Первый член разложения функции χ_1 по обратным степеням ω , который обозначим через $\chi_{1,1}$, может быть функцией более широкого класса аргументов ξ , s , v^2 , $(\mathbf{v}\epsilon)$. При этом условии главная часть оператора D — оператор $\sum_k [\mathbf{v}\omega]_k \frac{\partial}{\partial v_k}$

при действии на $\chi_{1,1}$ дает нуль. Заметим, что всякая функция

от s, ξ, v^2 , $(\mathbf{v}\mathbf{e})$ может быть представлена как функция от s, ξ, v^2, k^2 .

Итак, положим, что

$$\chi_1 = \chi_{1,1} + \chi_{1,2} + \dots, \quad (3.15)$$

где второй индекс означает ту *обратную* степень ω , которой пропорционален данный член, причем

$$\chi_{1,1}(s, \xi, v^2, k^2). \quad (3.16)$$

Внося (3.15) в (3.13), получаем

$$\sum_k [\mathbf{v}\omega]_k \frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial v_k} = St'(\Phi_1 + \chi_{0,1}) - (\mathbf{v}\nabla\chi_{1,1}) - \gamma \frac{[\omega\mathbf{v}]_p}{\omega'} \chi_{1,1}, \quad (3.17)$$

где Φ_1 определяется из (3.10).

Этим уравнением определяется функция $\chi_{1,2}$, при помощи которой в свою очередь определяется теплопроводность.

Может показаться, что уравнение (3.17) неопределенное, так как искомая функция $\chi_{1,2}$ определяется через две другие неизвестные функции $\chi_{0,1}$ и $\chi_{1,1}$; однако это не так. При условиях (3.14) и (3.16) относительно возможных аргументов функции $\chi_{0,1}$ и $\chi_{1,1}$ требование *разрешимости* уравнения (3.17) определяет эти функции с необходимой нам степенью определенности (впрочем, нам в дальнейшем придется еще рассмотреть условие разрешимости уравнения для $\chi_{2,2}$).

Действительно, во-первых, согласно (2.13), левая часть уравнения (3.17) равна $-\omega \frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial \alpha}$.

Для того чтобы $\chi_{1,2}$ была *однозначной* функцией вектора скорости \mathbf{v} , необходимо, чтобы $\chi_{1,2}$ была периодической функцией угла α с периодом 2π , для чего в свою очередь необходимо, чтобы правая часть уравнения (3.17) была периодической функцией α , т. е. обращалась бы в нуль при усреднении по Лармору. Легко видеть, что среднее по Лармору от последнего члена правой части уравнения (3.17) равно нулю, и поэтому изложенное только что требование гласит

$$\overline{(\mathbf{v}\nabla\chi_{1,1})}^{\text{Л}} = St'(\bar{\Phi}_1^{\text{Л}} + \chi_{0,1}). \quad (3.18)$$

* Напротив, функцию $\xi, v, (\mathbf{e}\mathbf{v})$ нельзя представить как функцию ξ, v^2, k^2 , если ω зависит от s .

Выпишем теперь выражение для $(\nabla \chi_{1,1})$, воспользовавшись (2.7) и (3.16):

$$(\nabla \chi_{1,1}) = \frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}')}{\omega'} \cdot \frac{\partial \chi_{1,1}}{\partial s} \Big|_{k^2} + r [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]_{\varphi} \frac{\partial \chi_{1,1}}{\partial \xi} \Big|_{k^2} + \frac{\partial \chi_{1,1}}{\partial k^2} (\nabla k^2). \quad (3.19)$$

Здесь индексами $|_{k^2}$ у знака производных обозначено, что они берутся при постоянных k^2 ; дифференцирование же по k^2 учитывается последним членом формулы (3.19). Легко убедиться, что

$$\overline{(\nabla \chi_{1,1})}^{\Pi} = \frac{\omega'}{\omega} v_{\parallel} \frac{\partial \chi_{1,1}}{\partial s} \Big|_{k^2}. \quad (3.20)$$

Стало быть, уравнение (3.18) можно записать в такой форме:

$$\frac{\partial \chi_{1,1}}{\partial s} \Big|_{k^2} = \frac{\omega}{\omega' v_{\parallel}} S t' (\bar{\Phi}_1^{\Pi} + \chi_{0,1}). \quad (3.21)$$

Так как $\chi_{1,1}$ должна быть однозначной функцией координат, то, проинтегрировав (3.21) по всей замкнутой магнитной силовой линии, т. е. по s , получим

$$\oint \frac{ds}{\omega'} \frac{\omega}{v_{\parallel}} S t' (\bar{\Phi}_1^{\Pi} + \chi_{0,1}) = 0. \quad (3.22)$$

Уравнение (3.22) определяет функцию $\chi_{0,1}$.

Выпишем это уравнение несколько подробнее. Внося выражение

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial n} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \left(\beta^2 v^2 - \frac{3}{2} \right) \right\} \frac{v_{\varphi}}{\omega'}$$

[см. (3.4) и (3.10)] в оператор соударения, легко убедиться, что только член $\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \beta^2 v^2 \frac{v_{\varphi}}{\omega'}$ в этом выражении дает результат, отличный от нуля*, а именно:

$$S t' \Phi_1 = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{v_{\varphi}}{\omega'} f(\beta, v) = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{v_{\varphi}}{r \omega'^2} \cdot f(\beta, v). \quad (3.23)$$

Здесь $f(\beta, v)$ есть некоторая функция, явный вид которой нам сейчас не существуетен.

* Мы ограничиваемся главным, линейным относительно Φ_1 членом в $S t' \Phi_1$; остаточный член пропорционален более высокой степени $1/\omega'$.

Так как на основании (2. 11) $\bar{v}_\varphi^\perp = v_{\parallel} \varepsilon_\varphi$, то уравнение (3. 22) можно записать так:

$$\oint \frac{ds}{\omega'} \cdot \frac{\omega}{v_{\parallel}} St'(\chi_{0,1}) = -\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} f(\beta, v) \oint \frac{ds \cdot \omega_\varphi}{r \omega'^3}. \quad (3. 24)$$

Из этого интегрального уравнения нужно определить $\chi_{0,1}$. Определив $\chi_{0,1}$, нужно определить $\chi_{1,1}$ из уравнения (3. 21). После этого нам известна правая часть уравнения (3. 17), из которого можно таким образом определить $\chi_{1,2}$, и именно этой функцией и определяется теплопроводность. Действительно, теплопроводность определяется теми членами функции распределения частиц $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, которые пропорциональны v_r и v_z , а члены такого характера входят в выражение для $\chi_{1,2}$ (в члены старших порядков относительно $1/\omega$).

Я не буду здесь излагать общего исследования системы уравнений (3. 24), (3. 21) и (3. 17) и методов их решения, а ограничусь несколькими общими замечаниями.

Рассмотрим случай, когда продольное поле катушки отсутствует, т. е. $\omega_\varphi = 0$. В этом случае $\bar{\Phi}^\perp = 0$, и правая часть уравнения (3. 24) обращается в нуль; стало быть, $\chi_{0,1}$ и $\chi_{1,1}$ можно приравнять, нулю и уравнение (3. 17) для $\chi_{1,2}$ после подстановки в правую часть выражения (3. 23) приобретает точно такой же вид, как и в случае прямого цилиндра. Таким образом, в случае $\omega_\varphi = 0$ приходим к прежнему выражению теплопроводности [см. (1. 1)]

$$\kappa = \frac{A(N, T)}{H'^2}. \quad (3. 25)$$

Если теперь при заданном H' станем возбуждать дополнительно продольное поле H_φ , то теплопроводность может при этом только уменьшаться. С другой стороны, она, очевидно, не может стать меньше, чем $\frac{A}{H'^2 + H_\varphi^2} = \frac{A}{H^2}$, откуда и получается неравенство (1. 2).

Исследование, изложенное в настоящей статье, имеет главным образом методическое значение и дает точное доказательство справедливости общей картины движений, происходящих в неравномерно нагретой плазме в магнитном поле.

Общие методы решения кинетического уравнения, изложенные в этой статье, могут оказаться полезными при уточнении теории магнитного термоядерного реактора.

*А. М. Андрианов, О. А. Базилевская,
С. Ю. Лукьянов, С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров,
И. М. Подгорный, Н. А. Явлинский*

ИССЛЕДОВАНИЕ НАГРЕВАНИЯ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАЛЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ *

§ 1. Введение

Задача, возникающая при исследовании процесса нагревания водородной плазмы, может быть сформулирована следующим образом: необходимо найти кривые распределения электронной и ионной температуры и значения плотности числа заряженных частиц в плазме в зависимости от координат и времени при различных условиях нагревания плазмы, т. е. при различной подводимой мощности, различной плотности газа и т. д.

При использовании импульсных методов нагревания температура и плотность заряженных частиц могут существенно изменяться на протяжении цикла нагревания. Электродинамическое стягивание, тороидальный дрейф, паразитные магнитные поля, в свою очередь могут приводить к очень большому непостоянству концентрации и энергии частиц по сечению газового разряда и вдоль его длины.

Исследование свойств плазмы, нагреваемой в импульсном режиме, существенно отличается от обычных исследований плазмы газового разряда, находящейся в стационарных условиях, и представляет собой более трудную задачу. Поэтому на начальной стадии работы приходится рас-

* Работа выполнена в 1951 г.

сма­тривать в качестве параметров плазмы величины, усред­ненные по сечению разряда. Важно подчеркнуть, что в усло­виях рассматриваемых экспериментов нет оснований полагать температуру ионов равной температуре нейтрального газа. С дру­гой стороны, имеются достаточно веские теоретические сообра­жения о возможности «отрыва» электронной температуры от ионной; следовательно, нельзя пользоваться и обычным для астрофизических задач допущением об изотермичности плазмы.

Своеобразие физических процессов, происходящих в рас­сматриваемых условиях в плазме, затрудняет применение обычных методов определения параметров плазмы. В сущности, в настоящее время в нашем распоряжении имеются два основ­ных метода измерения: электротехнический и оптический. В первом из них, осциллографически определяются токи, текущие через плазму, и напряжения обхода; во втором, измеряются ширины и интенсивности спектральных линий излучения плазмы.

Используя определенные теоретические представления о процессах, протекающих в плазме, и о механизме излучения, можно, по крайней мере в принципе, написать систему урав­нений, связывающих между собой, в каждый момент времени, усредненные по сечению параметры плазмы и наблюдаемые на опыте величины (токи, напряжения, ширины спектральных линий и т. д.). В действительности, при методах, которыми мы располагаем в настоящее время, оптические величины измеряются усредненно по всему циклу нагрева. Поэтому электрические величины, определяемые из осциллограмм, также должны усредняться во времени.

Неполнота теории и ограниченность экспериментальных возможностей, характерная для начальной стадии работы, не позволяют осуществить указанную программу в полной мере. В результате точность определения параметров плазмы оказывается невысокой и порой приобретает только оценочный характер.

Обычные методы исследования газового разряда — исполь­зование зондов — в условиях импульсного разряда и сильного азимутального магнитного поля, создаваемого током, текущим через плазму, не могут быть применены без полного пере­сматра теории метода, и до настоящего времени возможность проведения соответствующих экспериментов еще не выяснена.

В настоящей работе рассмотрены физические основы опти­ческого и электрического методов измерения некоторых пара­метров плазмы, описаны экспериментальная установка и тех­ника выполнения измерений. Затем приведены наиболее важные экспериментальные данные и обсуждены полученные результаты.

§ 2. Оптические методы исследования плазмы

В условиях, имеющих место при протекании сильного тока по тороидальному сосуду с водородом, молекулы водорода оказываются практически полностью диссоциированными при токах в несколько килоампер, не говоря уже о токах в десятки килоампер, с которыми проводились последние эксперименты. Спектр водорода в видимой области оказывается линейчатым — системы молекулярных полос исчезают, и на темном фоне отчетливо выступают яркие линии серии Бальмера. Все дальнейшее рассмотрение относится к анализу первых линий (H_α , H_β) бальмеровской серии.

Как известно, существует ряд причин, вызывающих расширение спектральных линий. Прежде всего следует рассмотреть роль собственной ширины спектральной линии, далее следует учесть расширение спектральных линий за счет эффекта Допплера, столкновений с нейтральными атомами (эффект Лоренца), ударного и статистического взаимодействия с электронами и ионами (эффект Штарка). Кроме того, при прохождении через плазму токов большой величины должно возникать расщепление линий в собственном магнитном поле тока (эффект Зеемана). Наконец, следует учитывать релятивистскую и спиновую тонкую структуру водородных линий, которые, наряду с зеемановским расщеплением, приводят к дополнительному расширению линий. Рассмотрим последовательно все эти эффекты.

Естественная ширина одинакова для всех спектральных линий и настолько мала ($\Delta\lambda = 1,18 \cdot 10^{-4}$ Å), что в интересующей нас области спектра она совершенно не влияет на вид контура линии и может не учитываться.

Эффект тонкой структуры для водородных линий полностью рассчитывается теоретически. Для линии H_α расстояние между двумя наиболее интенсивными компонентами (переходы $3D_{3/2} - 2P_{3/2}$ и переходы $3D_{3/2} - 2P_{1/2}$, $3P_{3/2} - 2S_{1/2}$) в шкале длин волн составляет всего лишь 0,14 Å. Для следующих линий расщепление значительно меньше, так как оно изменяется приблизительно обратно пропорционально кубу главного квантового числа [1]. Даже для линии H_α величина расщепления, при использовании хорошего спектрографа со стеклянной оптикой, который применялся в экспериментах в дальнейшем, лежит ниже разрешающей силы прибора.

Полное расщепление за счет эффекта Зеемана при полях в 5000 э составляет около 0,1 Å. Напряженность поля на периферии плазмы, даже в случае наиболее интенсивных разрядов (амплитуды тока плазмы ~ 50 ка), не превышает

указанной величины. Следовательно, и этот эффект не играет существенной роли.

Доплеровское расширение спектральных линий легко рассчитывается теоретически и, в предположении максвелловского распределения скоростей, выражается следующей формулой*:

$$\Delta\lambda_D = \frac{2\sqrt{\ln 2}\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.1)$$

Здесь λ_0 — длина волны исследуемой спектральной линии; T — температура газа в градусах Кельвина; μ — молекулярный вес газа, R — газовая постоянная и c — скорость света.

Для двух первых линий серии Бальмера формулу (2.1) можно, после подстановки численных значений констант и перевода градусов Кельвина в электрон-вольты, переписать в следующей форме:

$$\text{Для линии } H_\alpha \dots \Delta\lambda_D = 0,51T_{\text{эВ}}^{1/2}; \quad (2.2a)$$

$$\text{» } \text{» } H_\beta \dots \Delta\lambda_D = 0,38T_{\text{эВ}}^{1/2}. \quad (2.2b)$$

В этих расчетных формулах $\Delta\lambda$ выражено в ангстремах. Если предположить, что за время разряда в условиях сильной ионизации и большой плотности тока устанавливается равновесие между температурой ионов и нейтральных атомов, т. е. $T_n = T_i$, то на первый взгляд кажется, что уже при энергиях ионов в 5—10 эВ возникающий эффект расширения должен легко наблюдаться на опыте, и, следовательно, рассматриваемая методика должна обеспечить измерение T_i . В действительности положение оказывается несравненно более сложным, как это будет ясно из дальнейшего.

Расширение за счет затухания в результате столкновений с нейтральными молекулами газа выражается следующей формулой:

$$\Delta\lambda_s = \frac{2\lambda_0^2}{\pi^{3/2}lc} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.3)$$

Здесь l — газокинетическая длина свободного пробега молекулы, остальные обозначения — прежние. Используя выраже-

* В этой и последующих формулах символом $\Delta\lambda$ с соответствующим индексом обозначается так называемая «половинная ширина» спектральной линии, т. е. ширина контура линии в шкале длин волн в том месте, где интенсивность спадает до половины своего максимального значения.

ние для $\Delta\lambda_D$, последнюю формулу можно переписать в таком виде (после подстановки констант) [3]:

$$\Delta\lambda_s = 0,22 \frac{\lambda_0}{l} \Delta\lambda_D. \quad (2.4)$$

Как легко проверить, с помощью последнего равенства, даже при давлениях 1 мм рт. ст., не говоря уже о более низких давлениях, вклад эффекта Доплера в ширину спектральных линий на два порядка превышает вклад эффекта столкновения нейтральных частиц, следовательно, во всем интересующем нас интервале давлений эффект молекулярных столкновений может не учитываться.

Этот вывод остается в силе и в том случае, если учесть, что, строго говоря, в выражение (2.4) должна входить не газокинетическая, а в несколько раз меньшая «оптическая» длина пробега. Оптический поперечник соответственно больше газокинетического и определяется тем расстоянием, на котором сталкивающийся атом своим силовым полем может еще заметно изменить фазу излучающего атома, пролетающего мимо.

Рассмотрим теперь последнюю причину расширения — эффект Штарка. Действие электрического поля электронов и ионов плазмы может быть рассмотрено с двух точек зрения, отвечающим двум предельным случаям, имеющим место в действительности.

В условиях сравнительно малой плотности и большой скорости заряженных частиц расширение линии носит «ударный» характер. Это означает, что время соударения, в течение которого излучающий атом находится в поле электрона или иона и излучает смещенную частоту, мало по сравнению со временем между соударениями, в течение которого он излучает основную частоту. В этом случае излучением смещенной частоты можно пренебречь и весь эффект можно трактовать как мгновенное изменение фазы. Результат разложения Фурье колебаний с фазой, изменяющейся скачком, дает такой же результат, ту же ширину и форму линии, как и в случае прерванного колебания. Физические механизмы расширения линий в случае ударного столкновения с электроном или ионом и столкновения с нейтральными молекулами, таким образом, очень близки. Различие состоит лишь в том, что в первом случае изменение частоты во время столкновения обусловлено кулоновским полем точечных зарядов, и в выражение полуширины линии через время соударения должны входить константы эффекта Штарка. Во втором слу-

чае излучающий атом во время столкновения также находится в силовом поле атома, с которым он сталкивался, но силовое взаимодействие носит иной характер. Выражение для расширения линии за счет ударного взаимодействия с электронами и ионами может быть записано в следующем виде [2]:

$$\Delta\lambda_{\text{уд}} = a \frac{\sqrt{\mu} A^2 N}{\lambda_0^2 \sqrt{2RT}}. \quad (2.5)$$

Здесь a — константа; A — постоянная эффекта Штарка; N — концентрация частиц; λ_0 — длина волны излучаемой линии; остальные обозначения — прежние.

Выражая T в электрон-вольтах и подставляя численные значения констант, можно привести равенство (2.5) для линий серии Бальмера к форме, удобной для расчетов ($\Delta\lambda$ выражено в \AA).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для электронов} \\ \nearrow \text{ линия } H_\alpha \quad \Delta\lambda_{\text{уд}} = 0,4 \cdot 10^{-15} \frac{N}{\sqrt{T_{\text{эв}}}} \\ \searrow \text{ линия } H_\beta \quad \Delta\lambda_{\text{уд}} = 1,4 \cdot 10^{-15} \frac{N}{\sqrt{T_{\text{эв}}}} \end{array} \right\} (2.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для ионов} \\ \nearrow \text{ линия } H_\alpha \quad \Delta\lambda_{\text{уд}} = 1,2 \cdot 10^{-14} \frac{N}{\sqrt{T_{\text{эв}}}} \\ \searrow \text{ линия } H_\beta \quad \Delta\lambda_{\text{уд}} = 4,2 \cdot 10^{-14} \frac{N}{\sqrt{T_{\text{эв}}}} \end{array} \right\} (2.7)$$

Критерий применимости ударного расширения, в соответствии со сказанным, может быть записан как

$$\tau/\theta \ll 1,$$

где τ — время соударения; θ — среднее время между двумя соударениями. В развернутом виде предыдущее неравенство выглядит следующим образом [4]:

$$\frac{\pi^4 \alpha^3 N}{v^3} \ll 1. \quad (2.8)$$

Здесь α — величина, пропорциональная константе Штарка для данной линии и обратно пропорциональная квадрату длины волны линии; v — скорость электронов или ионов.

Численный подсчет по (2.8) показывает, что для водородных ионов во всем интересующем нас диапазоне давлений и скоростей (вплоть до энергии 100 эв) критерий (2.8) не выполняется ни для линии H_α , ни для линии H_β . Напротив, для случая ударного расширения электронами выполнимость критерия полная. Однако следует иметь в виду, что критерий (2.8) и формула (2.5) для величины расширения линии получены классическими, а не квантовыми методами. Между тем ряд астрофизических данных указывает на сомнительность применимости классических подсчетов и на резкую переоценку величины расширения, рассчитанной по формуле (2.5), по сравнению с наблюдаемой. Поэтому в тех случаях, когда расчет по формуле (2.5) дает величину расширения меньшую, чем за счет других эффектов, ее можно не принимать во внимание.

Остается рассмотреть второй механизм штарковского расширения, отвечающий случаю больших плотностей и сравнительно малых скоростей заряженных частиц. В этих условиях излучающий атом практически все время находится в поле окружающих электронов и ионов, а, следовательно, испускает смещенную частоту. Величина статистически усредненного поля плазмы определяется прежде всего концентрацией заряженных частиц. Расширение линий, связанное с этим полем, было рассчитано Хольтсмарком и может быть вычислено по формуле

$$\Delta\lambda_{\text{ст}} = 4,6 \cdot 10^{-10} AN^{2/3}. \quad (2.9)$$

Для линий H_α и H_β формула (2.9) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Для линии } H_\alpha \dots \Delta\lambda_{\text{ст}} &= 1,0 \cdot 10^{-10} N^{2/3}. \\ \text{» } \quad \text{» } H_\beta \dots \Delta\lambda_{\text{ст}} &= 1,4 \cdot 10^{-10} N^{2/3}. \end{aligned} \quad (2.9a)$$

Критерий применимости статистического рассмотрения имеет вид [4]:

$$\frac{\alpha N^{1/3}}{v} \gg 1. \quad (2.10)$$

Этот критерий в наших условиях для электронов (для обеих линий) совершенно не выполняется. При энергии ионов в несколько электрон-вольт критерий удовлетворительно выполняется для ионов, для обеих линий при давлениях больших 0,1 мм рт. ст.

Во всех приведенных рассуждениях, разумеется, следует понимать под «давлением» соответствующую плотность числа заряженных частиц; эта величина совпадает с числом диссоциированных атомов в 1 см^3 только при 100% ионизации плазмы. Для водорода 1 мм рт. ст. соответствует концентрации ионов, равной $7 \cdot 10^{16}$ в 1 см^3 .

Резюмируя итоги данного параграфа, можно сделать следующие выводы: среди всех рассмотренных причин расширения спектральных линий в водородной плазме в наших условиях следует принимать во внимание только три основных эффекта: 1) доплеровское расширение; 2) статистическое расширение полями ионов и 3) ударное расширение электронами. При этом последний эффект, по-видимому, играет малую роль. В целях наглядности на рис. 1, 2 и 3 изобра-

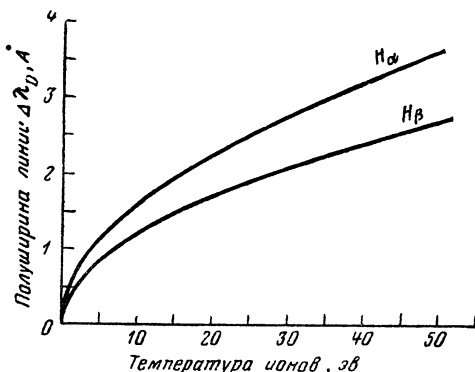


Рис. 1. Доплеровское уширение линий в зависимости от температуры ионов.

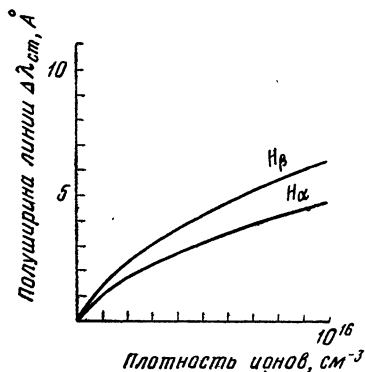


Рис. 2. Штарковское уширение линий в зависимости от концентрации ионов.

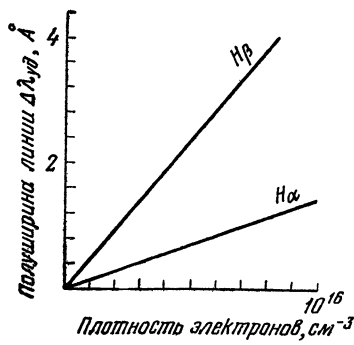


Рис. 3. Штарковское уширение линий в зависимости от концентрации электронов. Электронная температура принята равной 10 эВ.

жен расчетный ход расширения линий H_α и H_β во всех трех случаях. Только один из этих эффектов — эффект Доплера — связан с температурой излучающих атомов и, следовательно,

в принципе, может быть использован для оценки температуры ионов. Однако, как увидим при анализе экспериментальных данных, этот эффект оказывается в значительной мере замаскированным эффектом статистического расширения.

§ 3. Электротехнические методы исследования плазмы

Измерения токов и напряжений позволяют вычислить индуктивность плазменного шнура, баланс энергии и некоторые другие величины, по которым оказывается возможным произвести оценки значений параметров, характеризующих саму плазму: температуру электронов, потери энергии, стягивание газового витка и т. д.

Основными величинами, которые могут быть измерены чисто электрическими методами, являются: полный ток плазмы $I_{\text{п}}$ и полное напряжение обхода вдоль плазменного витка $U_{\text{п}}$. Обе эти величины определяются из осциллограмм, так что сдвиг фаз между током и напряжением известен от момента, соответствующего началу разряда конденсатора, до практически полного затухания процесса. Осциллограммы тока и напряжения имеют вид затухающих колебаний с законом изменения, близким к гармонической экспоненциально затухающей функции. Казалось бы, вследствие нелинейности характеристик плазмы, можно ожидать проявления на осциллограммах явно выраженных нелинейных эффектов. Однако в исследованной системе характер протекания процесса определялся в основном индуктивностью первичной цепи, на которую процессы, происходящие в плазменном витке, оказывают сравнительно малое воздействие.

Из осциллограмм холостого хода (разряд конденсатора при отключенном торе, когда в нем не возникает разряда) и осциллограмм рабочего режима видно, что фазовый сдвиг между первичным током и напряжением изменяется незначительно, так же как и сама величина первичного тока. Поэтому в данном случае при описании процесса можем выразить закон изменения во времени тока и напряжения в плазме так, как это имело бы место в линейной системе, т. е.

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{п}} &= U_{0\text{п}} e^{-\alpha t} \sin \omega t; \\ I_{\text{п}} &= I_{0\text{п}} e^{-\beta t} \sin (\omega t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Значения $U_{0\text{п}}$, $I_{0\text{п}}$, ω , α , β , φ могут быть определены непосредственно из осциллограммы.

Найдя эти величины, можно вычислить полную энергию P , вкладываемую в плазму за время t :

$$P = \int_0^t U_{\Pi} I_{\Pi} dt. \quad (3.2)$$

Вкладываемая энергия будет расходоваться на диссоциацию и ионизацию нейтрального газа, нагревание заряженных частиц, потери энергии на излучение и охлаждение газа на стенках камеры. Считая диссоциацию полной, что, по-видимому, имеет место, зная число ионизованных частиц и их температуру, можно определить потери энергии. При достигнутых в настоящее время температурах основная доля потерь обусловлена диффузионным уходом заряженных частиц к стенкам, где они охлаждаются и рекомбинируют.

Зная U_{Π} и I_{Π} , можно, с достаточной степенью точности, оценить величину электронной температуры, используя известное выражение для проводимости плазмы

$$\sigma = \frac{e^2 n}{m \nu}. \quad (3.3)$$

Здесь σ — удельная проводимость в CGSE; e — заряд электрона в CGSE; n — плотность заряженных частиц; m — масса электрона в граммах; ν — частота соударений электрона с тяжелыми частицами.

Считая скорости ионов и нейтральных атомов ничтожно малыми по сравнению со скоростью электронов, имеем

$$\nu = \frac{v_e}{\lambda_e},$$

где v_e — скорость электрона; λ_e — эффективная длина свободного пробега электрона между соударениями, причем λ_e имеет различное значение для соударений электрона с ионом и с нейтральной частицей. Поэтому, строго говоря, для определения σ из (3.3) следовало бы рассматривать отдельно проводимость от соударений электронов с нейтральными частицами и проводимость от соударений с ионами. Полная проводимость вычисляется как определенная комбинация этих двух проводимостей.

Оценим величины соответствующих частот соударений для электронов с энергией 5—10 эв. В работе Броне [6] экспериментально определена частота упругих соударений элект-

трона с нейтральными атомами водорода для рассматриваемого диапазона энергий:

$$\nu_1 = 5,9 \cdot 10^9 p \text{ сек}^{-1}, \quad (3.4)$$

где p — давление нейтрального газа в миллиметрах ртутного столба.

Частота кулоновских взаимодействий (частота столкновений заряженных частиц между собой), по Л. Ландау [7], составляет

$$\nu_2 = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} n \left(\frac{e^2}{kT_e} \right)^2 \left(\frac{kT_e}{m} \right)^{1/2} L, \quad (3.5)$$

где L — логарифмический член

$$L = 36,17 + 2 \ln \frac{v_e}{c} - \frac{1}{2} \ln n.$$

Выразим частоту соударений через энергию в электрон-вольтах; в случае полной ионизации имеем

$$n = 7 \cdot 10^{16} p.$$

При вычислении логарифмического члена принимаем

$$n = 10^{16} \text{ см}^{-3}; \quad v_e \simeq 1,8 \cdot 10^8 \text{ см/сек.} \quad (3.6)$$

Тогда

$$L = 7 \text{ и } \nu_2 = \frac{1,4 \cdot 10^{12} p}{T_e^{3/2}}.$$

Отношение ν_1 к ν_2 будет

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 4,3 \cdot 10^{-3} T_e^{3/2}. \quad (3.7)$$

Во всех до сих пор сделанных экспериментах температура электронов не превышала 6—7 эв, т. е. последнее соотношение оказывается меньше 0,06. Следовательно, в плазме, в которой ионизация неполная, число соударений электронов с ионами и число соударений с «нейтралями» сравниваются уже при степени ионизации порядка 60%. Так как в нашем случае степень ионизации, определяемая оптическими методами, оказывается больше этой величины, то проводимость в нашем случае в основном определяется кулоновскими столкновениями, и в дальнейшем, при определении проводимости

плазмы, мы не будем учитывать эффекта соударений электронов с нейтральными частицами и будем вычислять удельную проводимость по формуле

$$\sigma = \frac{e^2 n}{m \nu_2} = 14,3 T_e^{3/2} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}, \quad (3.8)$$

где T_e — в электрон-вольтах.

Переход к полной проводимости тороидального газового витка можно осуществить, накладывая некоторые дополнительные условия на закон распределения плотности тока в плазме по сечению. Наиболее простым предположением, позволяющим судить о нижней границе электронной температуры, является допущение постоянства электронной температуры по сечению трубки. Так как удельная проводимость слабо зависит от плотности заряженных частиц, то в рассматриваемых условиях она является однозначной функцией температуры электронов. Предположение о постоянстве электронной температуры по сечению приводит к выводу о постоянстве плотности тока по сечению, так как приложенное напряжение, с точностью до тороидального эффекта, не меняется по сечению, за исключением области, непосредственно примыкающей к стенке, которая здесь не рассматривается. Тогда полную проводимость можно представить в виде

$$\Sigma = \frac{e^2 n}{m \nu_2} \frac{r^2}{2R} = 7 T_e^{3/2} \frac{r^2}{R} \frac{1}{\text{ом}}, \quad (3.9)$$

где R — средний радиус тора в сантиметрах; r — внутренний радиус трубки. Экспериментально величину полной проводимости можно определить непосредственно из осциллограмм, сопоставляя мгновенные значения тока и напряжения плазмы

$$\Sigma = \frac{I_{\Pi}}{U_{\Pi}} = 7 T_e^{3/2} \frac{r^2}{R}. \quad (3.10)$$

Отсюда определяется нижний предел электронной температуры. В действительности значение T_e будет несколько больше из-за явления самостягивания плазмы. Однако точный учет этого явления в настоящее время не представляется возможным.

Некоторое суждение относительно эффекта самостягивания может быть сделано по углу сдвига фаз между напряжением и током плазмы. Виток, измеряющий напряжение, расположен на внешней поверхности стеклянного тора, внутри которого

горит разряд (рис. 4). Наличие эффекта самостягивания эквивалентно уменьшению внутреннего радиуса некоторого коаксиального кабеля, индуктивность которого вычисляется как:

$$L = 4\pi R \ln \frac{r_1}{r_2} \text{ см}, \quad (3.11)$$

где r_2 — радиус газового витка, а r_1 имеет смысл, ясный из рис. 4.

Существенного изменения индуктивности витка в процессе разряда обнаружено не было; поэтому для определения электронной температуры можно воспользоваться соотношением (3.10).

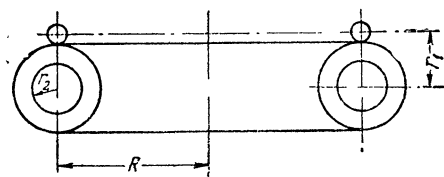


Рис. 4.

Однако при наличии больших токов, текущих через плазму и создающих сильные магнитные поля, проводимость плазмы не всегда можно выразить соотношением, подобным

(3.9), так как в этом случае отдельный электрон, движущийся в направлении электрического поля, должен двигаться перпендикулярно к магнитному полю собственного тока. При наличии сильных магнитных полей токов возникают значительные градиенты давления, а следовательно, и плотности заряженных частиц, так как температуру мы принимали постоянной по сечению. При этом электроны не совершают упорядоченных движений вдоль линий электрического поля, а в основном процессируют на своих ларморовских орбитах. Результирующая составляющая этих процессионных движений, возникающая из-за наличия градиента давления, эквивалентна электронному току. Выражение для проводимости в этих условиях полностью соответствует выражению (3.9) только при соблюдении условий гидродинамического равновесия. Поэтому для того, чтобы выражение (3.9) имело определенный физический смысл, необходимо установить как условия гидродинамического равновесия, так и оценить область их применимости. Условие гидродинамического равновесия можно представить следующим образом:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \left[j \frac{H}{c} \right] - \text{grad } p, \quad (3.12)$$

где j — плотность тока; H — напряженность магнитного поля.

В стационарном режиме в случае цилиндрической симмет-

рии и при отсутствии внешнего магнитного поля уравнение (3.12) можно записать так:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\pi j^2 r}{c^2}. \quad (3.13)$$

Интегрируя это выражение и имея в виду, что

$$p = k(n_e T_e + n_i T_i + n_n T_n),$$

где k — постоянная Больцмана, n_e , n_i , n_n — соответственно, плотности числа электронов, ионов и нейтральных частиц, T_e , T_i , T_n — температура электронов, ионов и нейтральных частиц, получаем

$$k(n_e T_e + n_i T_i + n_n T_n) = C - \frac{\pi j^2 r^2}{c^2}. \quad (3.14)$$

Постоянную интегрирования C определяем из условия, что $p=0$ при $r=r_0$; тогда

$$k(n_e T_e + n_i T_i + n_n T_n) = \frac{\pi j^2 r_0^2}{c^2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Представляет интерес рассмотрение двух предельных случаев.

1. Рассмотрим случай полной ионизации и равенства электронной и ионной температуры. Тогда, из условия квазинейтральности плазмы, $n_e = n_i = n_0$ и, следовательно

$$2kn_0 T = \frac{\pi j^2 r_0^2}{c^2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] = \frac{I^2}{\pi r_0^2 c^2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad (3.16)$$

где I — полный ток, текущий через плазму. Вводя полное число частиц на единицу длины плазменного контура, получим

$$N = 2\pi \int_0^{r_0} n_0 r dr = \frac{I^2}{r_0^2 c^2 k T} \int_0^{r_0} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] r dr = \frac{I^2}{4c^2 k T}. \quad (3.17)$$

Выражая I в амперах, T — в электрон-вольтах и вводя вместо N начальное давление p , имеем

$$I^2 = 4,5 \cdot 10^7 \pi r_0^2 p T. \quad (3.18)$$

Таким образом, при установлении гидродинамического равновесия имеется однозначная зависимость между величиной тока, текущего через плазму, и температурой заряженных частиц в предположении полной ионизации и изотермичности.

2. В случае неполной ионизации или когда температура электронов значительно превышает температуру ионов (так называемое явление «отрыва») силы гидродинамического давления будут определяться в основном давлением электронного газа. При этом ясно, что ток и температура будут связаны соотношением, аналогичным (3.18), но с коэффициентом, вдвое меньшим, т. е.

$$I^2 = 2,25 \cdot 10^7 \pi r_0^2 p T \frac{n_e}{n_0}. \quad (3.19)$$

Здесь $\frac{n_e}{n_0}$ — степень ионизации. Последнее соотношение позволяет определить степень ионизации по известной температуре или вычислить электронную температуру, если известна степень ионизации. Здесь, как указывалось, предполагается наличие «отрыва», чему, по-видимому, соответствует горение разряда при низких давлениях.

Величина r_0 , входящая в формулы (3.18) и (3.19), не всегда означает геометрический радиус трубки, и ее численное значение остается неопределенным. Вместе с тем произведение $\pi r_0^2 p$ — известная и определяемая полным начальным числом частиц на единицу длины величина, которая остается неизменной в течение всего времени существования разряда. Значение r_0 может значительно отличаться от геометрических размеров при сильном сжатии плазмы.

Термоизоляция плазмы от стенок осуществляется действием поля тока и, как известно, определяется безразмерным параметром

$$h = \frac{\omega}{\nu} = \frac{eH}{mc\nu} = \frac{1,77 \cdot 10^7 H}{\nu} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6} IT_0^{3/2}}{r_0 p}, \quad (3.20)$$

который для существования термоизоляции должен быть много больше единицы. Здесь ω — ларморовская частота и ν — частота кулоновских взаимодействий.

В существующей экспериментальной установке значения соответствующих величин были такими, что параметр h был порядка единицы, т. е. термоизоляция магнитным полем играла сравнительно малую роль, и тепловые потери были близки к обычным диффузионным. Только при значительном повышении тока, а следовательно, и температуры заряженных

частиц можно ожидать значительных температурных градиентов между плазмой и стенкой.

Приведенные выше рассуждения относительно равенства электромагнитных сил тока и сил гидродинамического давления справедливы только при стационарных и квазистационарных процессах в плазме, т. е. в предположении, что инерционные и вязкие члены в гидродинамическом уравнении могут быть отброшены.

В случае возникновения в плазме турбулентных движений, порожденных внутренней неустойчивостью, т. е. при появлении в плазме незатухающих колебаний объемного заряда, приведенные здесь рассуждения оказываются неверными, и процессы теплопередачи будут главным образом определяться этими колебательными процессами, удовлетворительной теории которых до настоящего времени не существует.

§ 4. Техника эксперимента и результаты измерений

Все эксперименты, описанные в дальнейшем, проводились на установке, в которой создавался безэлектродный газовый разряд в водороде в стеклянной трубке тороидальной формы. Вихревое электрическое поле, вызывающее разряд в торе, создавалось разрядом конденсаторов через медный кожух, охватывающий стеклянный тор.

Приведем описание последнего варианта установки. Первоначальные установки несколько отличались как конструктивно, так и значением параметров. Стеклянный тор, радиусом $R = 250$ мм, был сделан из трубки радиусом $r = 30$ мм (рис. 6). Для откачки применялся насос ЦВЛ-100. Конечный вакуум в системе при охлаждении ловушек жидким азотом составлял $5 \cdot 10^{-7}$ мм рт. ст. Наполнение системы водородом осуществлялось при помощи палладиевого натекателя. Медный кожух состоял из двух скрепленных между собой частей; он имел толщину стенок 1 мм и внутренний радиус 42 мм. В кожухе были сделаны отверстия A и B (рис. 6) для пропускания откачного патрубка и для оптических наблюдений.

Два конденсатора, общей емкостью 5 мкф, заряжались от выпрямительной установки, рассчитанной на напряжение 50 кв. Все измерения токов и напряжений производились с помощью двухлучевого импульсного осциллятора. Измеряемые напряжения подавались на осциллограф через делитель. Измерение напряжений обхода производилось на изолированном витке, уложенном внутри кожуха и имеющем выводы в точках a и b , а также на витке, уложенном снаружи кожуха.

Для измерения первичного тока в кожухе и вторичного тока в плазме применялись катушки D и C (рис. 6). Катушка, предназначенная для измерения первичного тока, имела 100 витков, намотанных на тороидальный каркас среднего радиуса

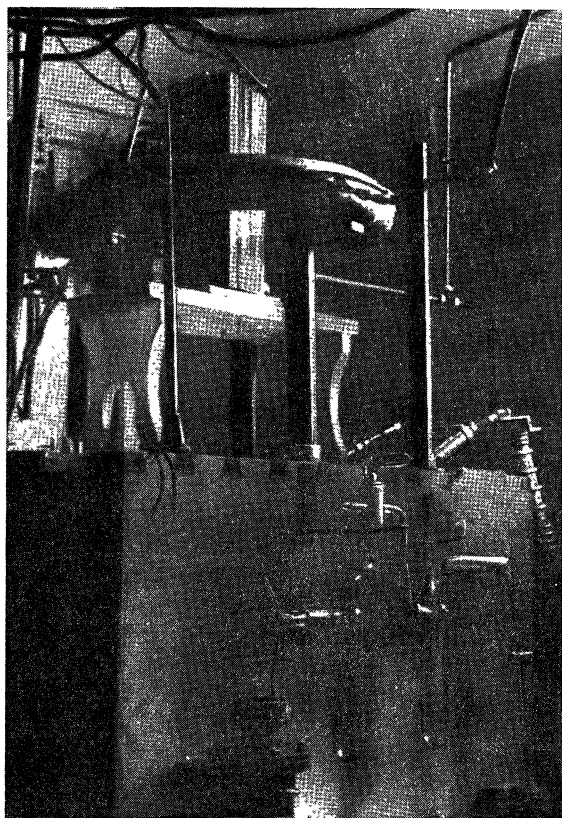


Рис. 5. Общий вид установки.

$r_1=2,6$ см при площади витка $s=0,66$ см². Сопротивление катушки составляло 2,7 ом, ее индуктивность — 7 мкгн. Электродвижущая сила, возникающая в катушке при протекании импульса первичного тока, вычислялась по формуле

$$E = -n \frac{d\Phi}{dt} 10^{-8} = ns \frac{2}{r_1} \frac{dI}{dt} \cdot 10^{-9} \text{ в},$$

или, в предположении синусоидального изменения тока, —

$$E = -ns \frac{2\omega I}{r_1} 10^{-9} \text{ в}.$$

Отсюда определялось значение I . Так как подводка к осциллографу осуществлялась кабелем, нагруженным на 100 ом , то можно было считать, принимая во внимание малость R и L катушки, что измеряемое напряжение равно электродвижущей силе. Для измерения вторичного тока использовалась катушка, состоящая из 15 витков, намотанных на прямоугольный каркас. Площадь витка равна $2,25 \text{ см}^2$. Сопротивление

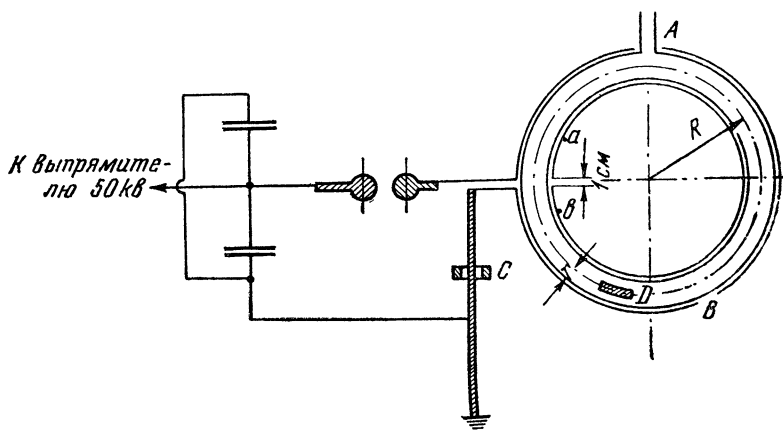


Рис. 6. Схема установки.

катушки составляло $2,7 \text{ ом}$, ее самоиндукция — 5 мкгн . Катушка помещалась на стеклянный тор так, что ее длинная сторона располагалась вдоль трубки и площадь витка была перпендикулярна к магнитному полю тока плазмы. Расчет возникающей в катушке электродвижущей силы производился по приведенной выше формуле.

Спектральные измерения производились на призменном спектрографе фирмы Steinheil, на фотопластинках Codak III—F, при ширине входной щели спектрографа $0,02 \text{ мм}$. Дальнейшее снижение ширины щели не позволяет получать более узких изображений линий из-за дифракционных эффектов. Фотографировались линии H_α и H_β серии Бальмера при различных параметрах разряда. В областях спектра, соответствующих этим линиям, дисперсия спектрографа составляла 47 и 13 \AA/мм . При малых токах для получения фотографий спектра приходилось производить несколько разрядов.

При увеличении тока, текущего через плазму, число разрядов, необходимых для экспозиции красной линии, монотонно уменьшается из-за увеличения яркости разряда.

Так, при изменении тока от 10 до 45 *ка* число разрядов изменилось от 30—40 до 2—3. Что касается линии H_{β} , то время экспозиции, необходимое для ее фотографирования, не только не уменьшалось, а даже увеличивалось из-за сильного расширения линии с ростом тока. Фотометрируя фотографии спектров и используя марки почернения, можно было построить контуры спектральных линий.

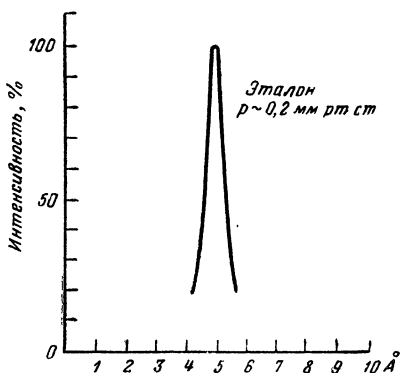


Рис. 7. Контур линии H_{α} .

Из полученных таким образом экспериментальных значений полуширины линии еще нельзя определить параметры плазмы, так как необходимо исключить собственную полуширину, инструментальное уширение и фотографическое уширение. Для учета влияния этих величин на каждую пластинку фотографировались линии серии Бальмера, испускаемые водородным газотроном. Давление в газотроне составляло 0,2 мм рт. ст., падение напряжения на нем не превышало 30 в. Плазма в таком газотроне заведомо «холодная».

Контуры спектральных линий H_{α} , H_{β} и получаемые описанным методом, изображены на рис. 8, 9, 10, 12, 13. В целях сравнения на рис. 7, 11 представлены контуры спектральных линий от эталонного источника — газотрона с холодной плазмой.

На приведенных рисунках показаны наиболее типичные кривые. Откладывая обсуждение результатов до следующего

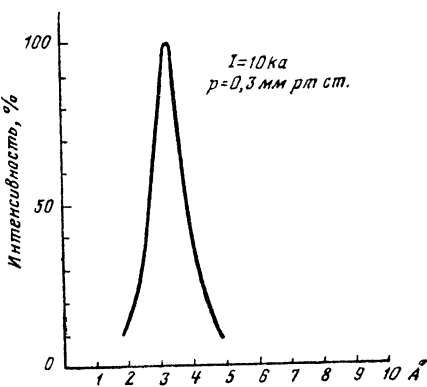


Рис. 8. Контур линии H_{α} .

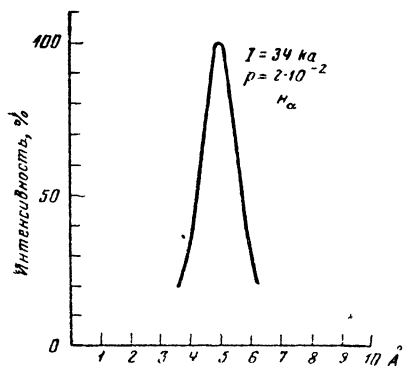


Рис. 9. Контур линии H_α .

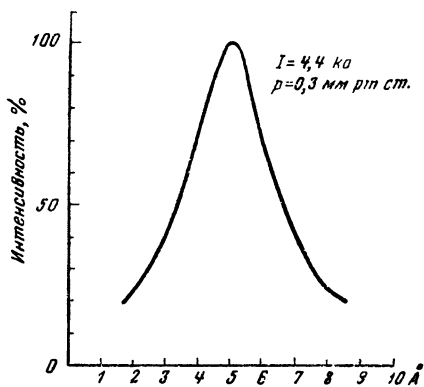


Рис. 10. Контур линии H_α .

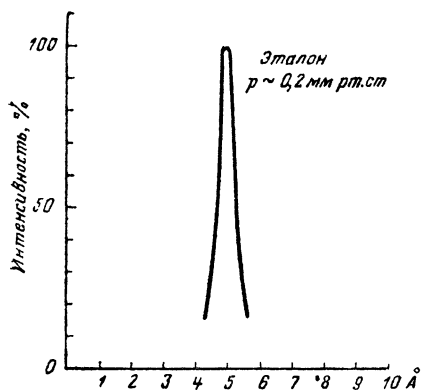


Рис. 11. Контур линии H_β .

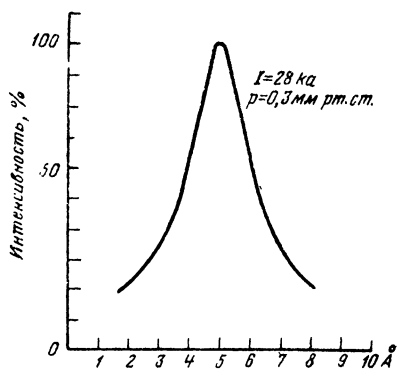


Рис. 12. Контур линии H_β .

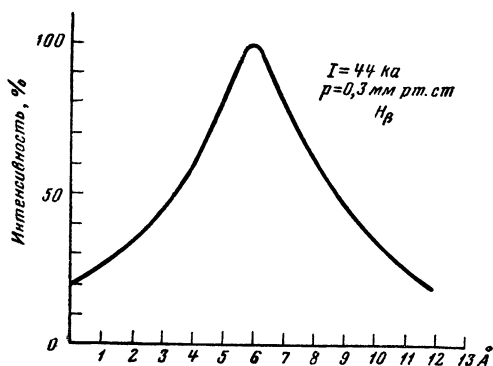


Рис. 13. Контур линии H_β .

параграфа, отметим здесь следующие основные экспериментальные факты: 1) дополнительное расширение исследуемых спектральных линий, по сравнению с эталонной, становится заметным лишь при больших токах через плазму (10—20 *ка*);

2) контур линий, хотя он на данной стадии исследования и не изучался с должной подробностью, напоминает, скорее, дисперсионные кривые, а не кривые типа Гаусса.

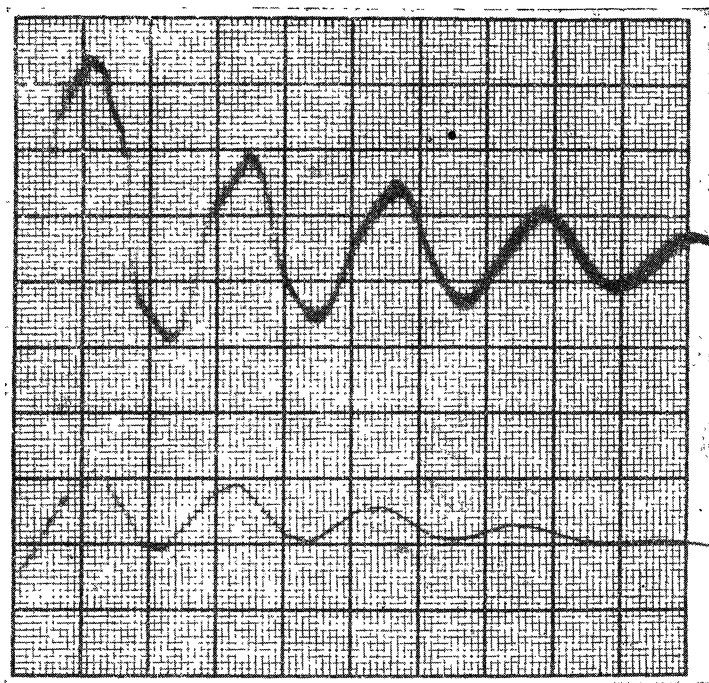


Рис. 14.

Для исследования интегрального светового потока, испускаемого плазмой, применялся вакуумный сурьмяноцезиевый фотоэлемент. Напряжение на фотоэлемент подавалось от сухой батареи. Падение напряжения на сопротивлении в цепи фотоэлемента подавалось на один из каналов импульсного осциллографа, и соответствующая осциллограмма фотографировалась одновременно с осциллограммой тока, которую записывал второй луч осциллографа. Во избежание помех подводящие провода, батарея и сам фотоэлемент тщательно экранировались.

Осциллограммы интегрального света показали, что в момент

прохождения кривой тока через нуль свечение плазмы не прекращается, а наблюдается лишь небольшое ослабление интенсивности свечения. При высоких давлениях ($\sim 0,5$ мм рт. ст.) колебания интенсивности почти полностью отсутствуют.

Остановимся теперь на результатах измерений электрических параметров, выполненных на последнем варианте установки. На этой установке были получены значения вторичного тока в газовом витке вплоть до 50 *ка* при напряжении на конденсаторе 48 *кв*. На рис. 14 изображена в качестве иллюстрации одна из осциллограмм напряжения и производной тока в газе. Частота колебаний составляла 48 *кГц*. Сдвиг фаз между первичным и вторичным током равнялся приблизительно $\frac{\pi}{2}$. При начальном напряжении на конденсаторе, равном 42 *кв*, и давлении $0,3$ мм рт. ст. максимальные значения первичного и вторичного тока, достигаемые на первой амплитуде, были, соответственно, 70 и 40 *ка*. Без разряда, при том же напряжении на конденсаторе, первичный ток составлял 56 *ка*. При понижении давления вторичный ток несколько уменьшался (до 34 *ка* при давлении $0,02$ мм рт. ст.).

§ 5. Выводы

Форма контура расширенных спектральных линий указывает на существенную роль, которую играет в наших условиях эффект Штарка.

Действительно, при попытке оценить среднюю температуру ионов по формулам для эффекта Доплера из экспериментально наблюдаемой полуширины линии H_{α} при силе тока 44 *ка* (см. рис. 10) получаемая величина T_e порядка 25 *эв* и еще более высокая цифра — из полуширины линии H_{β} . Этот результат находится в противоречии с оценкой электронной температуры из приводимости и, разумеется, неправилен. Предполагая, что расширение линий обусловлено статистическим эффектом Штарка, и игнорируя, в силу изложенных выше причин, ударное расширение электронами, можно попытаться из оптических данных определить другой параметр плазмы — концентрацию заряженных частиц.

При использовании формулы (2.9) или непосредственно из расчетного графика, приведенного на рис. 2, можно определить, каким концентрациям заряженных частиц отвечает наблюдаемое на опыте расширение. Для тока 44 *ка* и начального давления $0,3$ мм рт. ст. определенная по полуширине линии концентрация частиц оказывается $\sim 5 \cdot 10^{15}$ *см⁻³*, что отвечает приблизительно 20% ионизации плазмы. Близкие величины получаются и из ширины контура линии H_{β} .

Таким образом, создается впечатление, что наблюдаемые оптические эффекты, с одной стороны, разумно согласуются с теорией статистического эффекта Штарка и дают оценку для n_e , но, с другой стороны, непригодны для получения суждения о величине T_e ; такого рода вывод, однако, является недостаточно строгим. В самом деле, контур линии H_β при отсутствии эффекта Доплера и других причин расширения линии (кроме эффекта Штарка) обнаруживал бы некоторый провал в центре (из-за отсутствия несмещенной частоты). В действительности никакого намека на такой провал нет. Кроме того, контур линии H_α вблизи максимума при наличии одного эффекта Штарка был бы более острым, чем это наблюдается в действительности при больших токах. Сглаженность контура вблизи максимума, напротив, характерна для гауссовской кривой, которой описывается доплеровское расширение. Учитывая эти соображения и используя расчетную кривую для эффекта Доплера (рис. 1.), можно считать, что экспериментальные контуры линии лучше всего могут быть описаны как результат наложения доплеровского расширения за счет эффекта Штарка. Что касается полуширины доплеровской кривой, которая налагается в нашем случае на дисперсионную кривую, то она отвечает энергии ионов порядка 5 эв. Если приведенные соображения справедливы, то степень ионизации плазмы должна быть соответственно несколько ниже.

Из обработки осциллограмм I и U также можно сделать некоторые выводы относительно интересующих нас параметров плазмы. Прежде всего отметим, что значение $\frac{I_{II}}{U_{II}}$, которое должно характеризовать проводимость плазмы, во всяком случае для первого полупериода, мало зависит от давления. На последующих полупериодах такой анализ вряд ли имеет смысл, так как имеет место взаимодействие плазмы со стенками, что делает интерпретацию результатов затруднительной. Из этих данных температура электронов также оказывается слабо зависящей от давления. В качестве примера в таблице приведены результаты обработки экспериментов для типичного давления $p=0,3$ мм рт. ст. В последних двух строках таблицы приведены амплитудные значения электронной температуры, вычисленные двумя способами: по значению проводимости, пользуясь формулой (3.10), и из гидродинамического рассмотрения. В условиях эксперимента соотношение (3.10) можно представить в следующем виде

$$T_e = \left(\frac{I_{II}}{2U_{II}} \right)^{2/3}, \quad (5.1)$$

а гидродинамическое рассмотрение для этого случая дает

$$T_e = \frac{I_{\text{п}}^2}{3,4} \cdot 10^{-8}. \quad (5.2)$$

$$U_0 = 22 \text{ кВ};$$

$$r = 3 \cdot 10^{-1} \text{ мм}$$

| Амплитудные значения | A_1 | A_2 | A_3 | |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|------------------------------------|
| U_1 | 3,7 | 3,3 | 1,7 | $\times 10^3 \text{ в}$ |
| U_2 | 2,3 | 0,9 | 0,87 | $\times 10^3 \text{ в}$ |
| I_2 | | 23 | 19,4 | $\times 10^3 \text{ а}$ |
| Σ | | 25,6 | 22,2 | $(\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$ |
| T_e (из проводимости) | | 5,5 | 5 | эв |
| T_e (из гидродинамич. рассмотрения) | | 1,6 | 1,1 | эв |

В приведенной здесь таблице даны значения T_e , полученные по обоим формулам. Из этих значений видно, что порядок величины температуры электронов по обоим оценкам одинаков, и ошибка лежит в пределах точности эксперимента и строгости использованных теоретических рассуждений. Получающиеся расхождения в сторону пониженного значения электронной температуры, вычисленной из гидродинамического уравнения, могут быть объяснены неполной ионизацией нейтрального газа и разрывом в температурах электронов, ионов и нейтральных частиц.

Подробное рассмотрение потерь тепла на стенке сосуда здесь вряд ли имеет смысл из-за несимметричности системы, обусловленной наличием токоподводящих фидеров и вызывающей, по-видимому, значительные дополнительные потери тепла в области разреза, вследствие наличия скрещенных магнитных полей, создаваемых токами, текущими в плазме и фидере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров
2. G. H. Reman, Lingverbereedig in de licht boog, Utrecht, 1937.
3. М. Борн, Оптика, М., ДНТВУ, Харьков—Киев, 1937.
4. С. Л. Манделъштам, Н. Н. Соболев, ЖЭТФ, 20, 323 (1950).
5. В. Вейскопф, УФН, 13, 569 (1933).
6. В. В. Вроде, Rev. Mod. Phys., 5, 257 (1933).
7. Л. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).

Г. И. Будкер

**ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ДРЕЙФОМ ЧАСТИЦ
В ТОРОИДАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ТЕРМОЯДЕРНОМ
РЕАКТОРЕ ***

В работе изложены соображения, касающиеся дрейфа частиц в тороидальном магнитном термоядерном реакторе. Рассматривается дрейф частиц в неоднородном магнитном и электрическом полях; оценивается теплопроводность в торе при стабилизации дрейфа магнитным полем продольного тока и некоторыми другими способами.

Высказанные соображения позволяют сделать заключение о недостаточности компенсации дрейфа слабым продольным током. Приводится оценка, показывающая, что для осуществления термоядерной реакции необходимо, чтобы поле стабилизирующего тока было порядка основного поля. Кроме того, необходимо создать дополнительные поля, связанные со стенками камеры, которые удерживали бы в торе плазму как целое.

**§ 1. Дрейф частиц в неоднородном магнитном
и электрическом полях**

Если электрическое поле много меньше магнитного, а неоднородность магнитного поля мала, то можно ввести понятие дрейфа орбиты, в котором орбита частицы представляется как кружок, медленно перемещающийся и медленно изменяющийся по величине. При этом скорость кружка

* Работа выполнена в 1951 г.

и его размер оказываются функциями только средней координаты и не зависят от фазы частицы при основном вращении по ларморовской орбите.

Получение уравнений первого порядка для среднего движения частиц взамен уравнений второго порядка чрезвычайно упрощает исследование движения. Аналогичное понятие дрейфа вводится также для проекции движения частицы на плоскость, не вполне перпендикулярную к магнитному полю, т. е. когда имеются составляющие поля, лежащие в исследуемой плоскости (эти составляющие предполагаются малыми по сравнению с перпендикулярной составляющей).

Рассмотрим случай

$$E \ll H, \quad H_x \ll H_z, \quad H_y \ll H_z, \quad \frac{|\nabla H|}{H} \rho \ll 1, \quad (1.1)$$

где $\rho = \frac{mv_{\perp} c}{eH}$ — радиус ларморовской орбиты.

Разлагая составляющие магнитного поля в ряд по степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, где x_0, y_0 — координаты центра кружка, и подставляя в малые члены, входящие в уравнение движения

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}] + \frac{e}{m} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

невозмущенные решения для $v_x, v_y(x - x_0)$ и $(y - y_0)$, получим выражения для средних скоростей дрейфа

$$\bar{v}_x = \frac{H_x}{H_0} \cdot v_{\parallel} + c \frac{E_y}{H_0} - \frac{mc}{2eH_0^2} \left[\frac{\partial H_0}{\partial y} v_{\perp}^2 + 2 \frac{\partial H_y^0}{\partial z} v_{\parallel}^2 \right]; \quad (1.3a)$$

$$\bar{v}_y = \frac{H_y}{H_0} \cdot v_{\parallel} - c \frac{E_x}{H_0} + \frac{mc}{2eH_0^2} \left[\frac{\partial H_0}{\partial x} v_{\perp}^2 + 2 \frac{\partial H_x^0}{\partial z} v_{\parallel}^2 \right]. \quad (1.3b)$$

Первый член каждого из этих выражений есть скорость дрейфа от боковой составляющей магнитного поля. Второй член есть скорость дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях. Третий член выражает дрейф, обусловленный градиентом магнитного поля, а последний член — так называемый центробежный дрейф, скорость которого пропорциональна $\frac{mv_{\parallel}^2}{R}$, где R — радиус кривизны магнитной силовой

линии. Если токи текут только вдоль оси z , то составляющие $\text{rot } \mathbf{H}$ по осям x и y равны нулю, и из (1.3) следует

$$\bar{v}_x = \frac{H_x}{H_0} v_{\parallel} + c \frac{E_y}{H_0} - \frac{mc}{2eH_0^2} [v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2] \frac{\partial H_0}{\partial y}; \quad (1.4a)$$

$$\bar{v}_y = \frac{H_y}{H_0} v_{\parallel} - c \frac{E_x}{H_0} + \frac{mc}{2eH_0^2} [v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2] \frac{\partial H_0}{\partial x}. \quad (1.4b)$$

При равномерном распределении энергии по степеням свободы $\bar{v}_{\perp}^2 = 2\bar{v}_{\parallel}^2$, и в среднем центробежный дрейф равен дрейфу, вызванному неоднородностью магнитного поля. На «хвостах» кривых распределения они сильно различаются.

Для случая магнитного поля внутри кругового тора задача о движении частиц может быть решена точно. Поле \mathbf{H} в данном случае совпадает с полем линейного тока, текущего вдоль оси z (рис. 1),

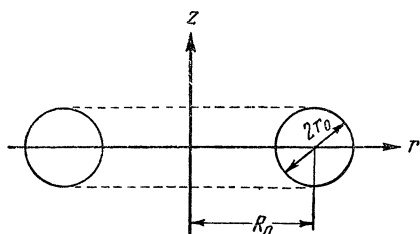


Рис. 1.

$$H_{\varphi} = \frac{2I}{cR}, \quad H_z = H_r = 0,$$

и описывается магнитным потенциалом

$$A_{\varphi} = A_r = 0, \quad A_z = \frac{2I}{c} \ln \frac{R}{R_0}.$$

Уравнения движения в этом случае решаются просто, в результате чего получаем

$$t = \int_{R_0}^R \frac{dR'}{\sqrt{F(R')}}; \quad (1.5a)$$

$$z = \int_{R_0}^R \frac{p_z^0 - \frac{2eI}{c^2} \ln \frac{R'}{R_0}}{\sqrt{F(R')}} dR'; \quad (1.5b)$$

$$F(R) = p^2 - \left(\frac{p_{\varphi}^0 R_0}{R} \right)^2 + \left(p_z^0 - \frac{2eI}{c^2} \ln \frac{R}{R_0} \right)^2, \quad (1.5b)$$

где p , p_φ^0 , p_z^0 — начальные значения импульса частицы.

Величина R периодически колеблется между двумя значениями R_1 и R_2 , равными корням выражения (1.5в), с периодом

$$T = 2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\sqrt{F(R)}}. \quad (1.6)$$

Координата z , кроме периодических колебаний, имеет еще систематическую скорость

$$\bar{v}_z = \frac{\Delta z}{T} = \frac{1}{T} \int_{R_1}^{R_2} \frac{p_z^0 + \frac{2eI}{c^2} \ln \frac{R}{R_0}}{\sqrt{F(R)}} dR. \quad (1.6')$$

При малых значениях $\frac{\rho}{R_0}$ ($\rho = \frac{mv_\perp c}{eH}$ — ларморовский радиус частицы)

$$\Delta z = \frac{\pi \rho^2}{R_0} \left(2 \frac{v_{||}^2}{v_\perp^2} + 1 \right);$$

$$\bar{v}_z = \frac{mc}{2eH_0 R_0} (v_\perp^2 + 2v_{||}^2); \quad T = 2\pi \cdot \frac{mc}{eH}. \quad (1.7)$$

Это совпадает с (1.4), поскольку в данном случае $\frac{dH}{dR} = -\frac{H}{R}$.

§ 2. К вопросу о стабилизации дрейфа радиальным электрическим полем, магнитным полем продольного тока и методом переменной «бочки»

При наличии радиального электрического поля (рис. 2)

$$\begin{aligned} E_x &= E(r) \cdot \frac{x}{r}, \\ E_z &= E(r) \cdot \frac{z}{r}, \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

траектория центра ларморовского кружка имеет вид

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} - \frac{m}{eR_0} \cdot \frac{2v_{||}^2 + v_\perp^2}{2z} \cdot \frac{r}{E(r)}. \quad (2.2)$$

линии. Если токи текут только вдоль оси z , то составляющие $\text{rot } \mathbf{H}$ по осям x и y равны нулю, и из (1.3) следует

$$\bar{v}_x = \frac{H_x}{H_0} v_{\parallel} + c \frac{E_y}{H_0} - \frac{mc}{2eH_0^2} [v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2] \frac{\partial H_0}{\partial y}; \quad (1.4a)$$

$$\bar{v}_y = \frac{H_y}{H_0} v_{\parallel} - c \frac{E_x}{H_0} + \frac{mc}{2eH_0^2} [v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2] \frac{\partial H_0}{\partial x}. \quad (1.4b)$$

При равномерном распределении энергии по степеням свободы $\bar{v}_{\perp}^2 = 2\bar{v}_{\parallel}^2$, и в среднем центробежный дрейф равен дрейфу, вызванному неоднородностью магнитного поля. На «хвостах» кривых распределения они сильно различаются.

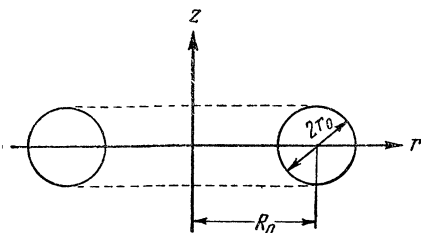


Рис. 1.

Для случая магнитного поля внутри кругового тора задача о движении частиц может быть решена точно. Поле \mathbf{H} в данном случае совпадает с полем линейного тока, текущего вдоль оси z (рис. 1),

$$H_{\varphi} = \frac{2I}{cR}, \quad H_z = H_r = 0,$$

и описывается магнитным потенциалом

$$A_{\varphi} = A_r = 0, \quad A_z = \frac{2I}{c} \ln \frac{R}{R_0}.$$

Уравнения движения в этом случае решаются просто, в результате чего получаем

$$t = \int_{R_0}^R \frac{dR'}{\sqrt{F(R')}}; \quad (1.5a)$$

$$z = \int_{R_0}^R \frac{p_z^0 - \frac{2eI}{c^2} \ln \frac{R'}{R_0}}{\sqrt{F(R')}} dR'; \quad (1.5b)$$

$$F(R) = p^2 - \left(\frac{p_{\varphi}^0 R_0}{R} \right)^2 + \left(p_z^0 - \frac{2eI}{c^2} \ln \frac{R}{R_0} \right)^2, \quad (1.5b)$$

где p , p_φ^0 , p_z^0 — начальные значения импульса частицы.

Величина R периодически колеблется между двумя значениями R_1 и R_2 , равными корням выражения (1.5в), с периодом

$$T = 2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{\sqrt{F(R)}}. \quad (1.6)$$

Координата z , кроме периодических колебаний, имеет еще систематическую скорость

$$\bar{v}_z = \frac{\Delta z}{T} = \frac{1}{T} \int_{R_1}^{R_2} p_z^0 + \frac{2eI}{c^2} \ln \frac{R}{R_0} \frac{dR}{\sqrt{F(R)}}. \quad (1.6')$$

При малых значениях $\frac{\rho}{R_0}$ ($\rho = \frac{mv_\perp c}{eH}$ — ларморовский радиус частицы)

$$\Delta z = \frac{\pi \rho^2}{R_0} \left(2 \frac{v_{||}^2}{v_\perp^2} + 1 \right);$$

$$\bar{v}_z = \frac{mc}{2eH_0 R_0} (v_\perp^2 + 2v_{||}^2); \quad T = 2\pi \cdot \frac{mc}{eH}. \quad (1.7)$$

Это совпадает с (1.4), поскольку в данном случае $\frac{dH}{dR} = -\frac{H}{R}$.

§ 2. К вопросу о стабилизации дрейфа радиальным электрическим полем, магнитным полем продольного тока и методом переменной «бочки»

При наличии радиального электрического поля (рис. 2)

$$\begin{aligned} E_x &= E(r) \cdot \frac{x}{r}, \\ E_z &= E(r) \cdot \frac{z}{r}, \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

траектория центра ларморовского кружка имеет вид

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{z} - \frac{m}{eR_0} \cdot \frac{2v_{||}^2 + v_\perp^2}{2z} \cdot \frac{r}{E(r)}. \quad (2.2)$$

Пусть $E(r) = E_0 \frac{r}{r_0}$ (т. е. плазма равномерно заряжена), $H_0 = \text{const}$. При этом решение (2.2) будет окружностью

$$z^2 + \left[x - \frac{m(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)r_0}{2eE_0R_0} \right]^2 = \text{const} \quad (2.3)$$

с центром, смещенным относительно центра сечения тора на величину

$$\delta = - \frac{m(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)r_0}{2eE_0R_0}. \quad (2.4)$$

Это смещение, одинаковое по величине, но различное по направлению для частиц разных знаков, должно вызвать поляризацию плазмы, т. е. уменьшение электрического поля.

Если, однако, предположить, что в результате останется некоторое электрическое поле, то разность потенциалов в поперечном сечении тора будет порядка $\frac{kT}{e}$ (T — температура плазмы). При этом

$$\frac{2mv_{\parallel}^2 + mv_{\perp}^2}{eEr_0} \simeq 1, \text{ и, следовательно}$$

$$\text{но, } \frac{\delta}{r_0} = \frac{r_0}{R_0}.$$

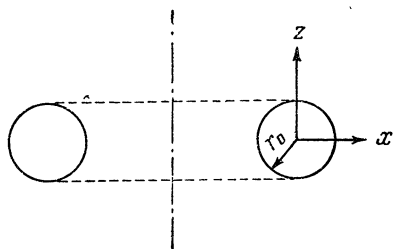


Рис. 2.

Несмотря на то, что траектории большинства частиц оказываются замкнутыми и лежат внутри тора, такая стабилизация, как будет показано ниже, явно недостаточна для уменьшения теплопроводности плазмы до практически интересных величин.

Кривые дрейфа можно сделать замкнутыми также и другим способом: пропустив через плазму ток вдоль основного магнитного поля. Магнитное поле такого тока, как и радиальное электрическое поле, вызовет дополнительный дрейф по окружностям. Поскольку $H_z = H_1 \frac{x}{r}$, $H_x = -H_1 \cdot \frac{z}{r}$, где $H_1(r)$ — абсолютная величина дополнительного поля, уравнение траектории центра ларморовского кружка принимает такой же вид, как и в случае электрического поля

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{x}{z} + \frac{mc}{2eR_0} \cdot \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{H_1(r) \cdot v_{\parallel}} \cdot \frac{r}{z}. \quad (2.5)$$

При $H_0 = \text{const}$ эта траектория является окружностью с центром, смещенным относительно центра тора на величину

$$\delta = \frac{r_0}{R_0} \cdot \frac{H_0}{H_1^*} \cdot \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}\bar{v}} \bar{\rho}, \quad (2.6)$$

где $H_1^* = H_1(r_0)$; \bar{v} и $\bar{\rho}$ — средняя скорость и средний лармовский радиус частицы.

Это смещение для электронов в $\sqrt{\frac{M}{m}}$ раз меньше, чем для ионов. Оно, однако, не вызывает поляризации плазмы (во всяком случае, дипольной поляризации), поскольку одинаковое количество ионов смещается вправо и влево в зависимости от знака v_{\parallel} .

Если стабилизация такова, что для средних скоростей орбита частицы есть замкнутая кривая, не задевающая стенки, то для «хвостов» максвелловского распределения это не так. Особенно сильно это скажется в случае стабилизации продольным током. В данном случае все частицы, у которых, по порядку величины,

$$\frac{v_{\parallel}}{v} \leq \frac{\rho}{R_0} \cdot \frac{H_0}{H_1^*}, \quad (2.7)$$

будут попадать на стенку.

При расчете количества уходящих частиц нельзя пользоваться максвелловским распределением частиц по скоростям, так как именно из-за этого ухода распределение будет искажено, а необходимо решить кинетическое уравнение с дополнительным условием обращения в нуль плотности частиц в пространстве скоростей на границе, заданной условием (2.7). При этом в пространстве скоростей будет иметь место диффузия частиц и энергии, которая во много раз повысит теплоотдачу по сравнению с обычной замагниченной теплопроводностью. Можно показать, что время существования частицы в торе будет (с точностью до логарифмического множителя) порядка времени ее свободного пробега.

Для ослабления этого эффекта можно предложить следующее. Создается зависимость поля от малого радиуса. Это можно сделать, если разбить обмотку тора на отдельные звенья, разделенные пустыми промежутками. При этом поле становится функцией φ , а также и r ; появляется так называемая бочка, которая вне звеньев направлена наружу, а внутри звеньев внутрь.

Если имеется зависимость поля от малого радиуса r , то появляется дополнительный дрейф по окружностям, аналогичный рассмотренному выше, но скорость которого пропорциональна также и v_{\perp}^2 .

При наличии необходимой стабилизации смещение центра окружности будет пропорционально выражению

$$\frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{\bar{v}_{\parallel} + av_{\perp}^2}$$

и не может стать большим при малых энергиях.

Поскольку, как будет показано ниже, ни один метод стабилизации, основанный на том, что траектории частиц являются кривыми, хотя и замкнутыми, но сильно эксцентричными (с эксцентриситетом, зависящим от соотношения между скоростями), не может считаться удовлетворительным, — мы не будем более подробно останавливаться на этом методе.

§ 3. Перемешивание при стабилизированном дрейфе. Оценка теплопроводности

Если бы даже нам удалось стабилизировать дрейф полностью, т. е. сделать так, чтобы орбиты ионов оказались замкнутыми при всех практических существенных значениях v_{\parallel} и v_{\perp} , то и тогда дрейф вносил бы существенный вклад в теплопроводность, точнее, являлся бы определяющим в величине теплопроводности.

Рассмотрим сечение тора при полностью стабилизированном дрейфе. Частицы, кроме вращения по ларморовским кружкам, дрейфуют по замкнутым кривым (окружностям), размер которых порядка размера сечения тора. Так как эти окружности эксцентричны, то частицы, которые при некотором азимуте находились в одной и той же точке (т. е. при одинаковых значениях r), через половину периода окажутся при различных значениях r и, таким образом, будут осуществлять теплопередачу между этими различными значениями r .

При этом существенно, что время дрейфа по окружности много меньше, чем время между двумя столкновениями.

Теплопроводность вдоль тора, по-прежнему, остается равной теплопроводности при отсутствии магнитного поля. Теплопроводность по азимуту φ сечения тора теперь равна

теплопроводности вдоль тора, умноженной на отношение скорости дрейфа к скорости частицы или ларморовского радиуса к радиусу тора. Эта теплопроводность, как уже указывалось, практически также очень велика.

Теплопроводность вдоль радиуса сечения тора оказывается сильно ослабленной, ибо она может осуществляться только вследствие столкновений.

Для ее оценки заметим, что частицы, вследствие дрейфа по эксцентричным окружностям, совершают радиальные колебания с амплитудой 2δ , где δ — смещение центра окружности. В результате столкновений некоторая частица может передать энергию тем частицам, средние расстояния которых от центра отличаются от среднего расстояния данной на величину порядка δ ; кроме того, среднее значение расстояния данной частицы от центра может измениться на величину порядка δ вследствие того, что при столкновении меняется соотношение между v_{\parallel} и v_{\perp} . Это эквивалентно тому, что длина свободного пробега по радиусу равна δ . Что касается времени между столкновениями τ , то оно такое же, как и без магнитного поля. Таким образом, коэффициент диффузии по радиусу сечения тора может быть оценен из следующего выражения:

$$D_r \simeq \frac{\delta^2}{\tau}.$$

Если учесть, что коэффициент диффузии без дрейфа порядка

$$D = \frac{\rho^2}{\tau},$$

где ρ — радиус ларморовского кружка, то получается, что при скомпенсированном дрейфе теплопроводность увеличивается по сравнению с той, которая приведена в публикуемых в настоящем томе работах И. Е. Тамма и А. Д. Сахарова, в отношении $\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2$. Так как при слабом продольном токе $\delta \gg \rho$, то теплопроводность повышается во много раз, и осуществление термоядерной реакции становится невозможным.

Величина δ становится порядка ρ только в том случае, когда дополнительное поле тока сравнимо с основным полем (точнее, в $\frac{r_0}{R_0}$ раз меньше). Таким образом, приходим к выводу, что для уничтожения дрейфовой теплопроводности необходим большой стабилизирующий ток.

4. Равновесие плазмы в тороидальном поле

Нетрудно видеть, что в случае стабилизации дрейфа одними лишь токами, текущими по плазме (без каких-либо дополнительных внешних полей, кроме основного продольного), нельзя рассматривать задачу о движении частиц в продольном поле и в поле заданного плазменного тока. Такое решение в принципе не самосогласованно.

В этом можно наглядно убедиться из следующих макроскопических соображений. Рассмотрим участок тора (рис. 3), ограниченный двумя сечениями S_1 и S_2 . Через поверхность S_1 в единицу времени втекает импульс, равный по порядку величины

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = 2nS\bar{v}_{||} \cdot 2m\bar{v}_{||}\mathbf{k}_1 \simeq 2nTS\mathbf{k}_1,$$

а через поверхность S_2

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 2nS\bar{v}_{||} \cdot 2m\bar{v}_{||} \cdot \mathbf{k}_2 = 2nTS \cdot \mathbf{k}_2,$$

где n — плотность плазмы, а \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — единичные векторы, нормальные к поверхностям S_1 и S_2 (один из множителей 2 получился за счет того, что имеются электроны и ионы, а второй — за счет того, что влетающие и вылетающие частицы вносят один и тот же импульс, и эффект удваивается).

Полный импульс, остающийся в объеме в единицу времени, равен

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2nTS(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) = 2nTS \cdot \frac{R}{R_0} d\varphi$$

и направлен по большому радиусу тора. Это означает, что на плазму действует сила, прижимающая ее к наружной стенке тора. При заданных полях и токах нет никаких электромагнитных сил, которые могли бы ее уравновесить. Продольный ток вообще не взаимодействует с магнитным полем тора. Собственное поле продольного тока дает, как нетрудно видеть, дополнительную силу, прижимающую плазму к наружной стенке. Наконец, замкнутые токи в плазме, связанные с вращением частиц в магнитном поле (так называемые ларморовские токи), при взаимодействии с неоднородным полем тора дают силу, направленную к наружной стенке и в точности равную силе газового давления (диамагнетик выталкивается в сторону более слабого поля).

Таким образом, на объем единицы длины тора действует сила

$$F = \frac{4nTS}{R} R$$

(не считая силы расталкивания, связанной с продольным током). Эта сила может быть уравновешена только ударами о наружную стенку, для чего требуется, по меньшей мере, $\frac{4nS}{R} v$

ударов о стенку, или, поскольку $S = \pi r_0^2$, $\frac{4\pi r_0^2 n v}{R}$ ударов

в единицу времени.

В незамагниченной плазме на единице длины тора происходит $2\pi r_0^2 n v$ ударов. Таким образом, количество ударов о стенку в торе с магнитным полем, независимо от величины этого поля и даже при наличии продольного тока, всего в $\frac{R}{r_0}$ раз меньше, чем при полном отсутствии поля. Всего лишь во столько же раз ослабляется, следовательно, и теплопроводность.

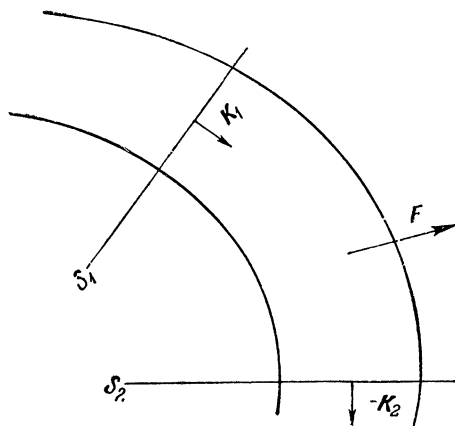


Рис. 3.

Кажущееся противоречие с микроскопическим рассмотрением разъясняется следующим образом: вследствие дрейфа частиц плазма поляризуется; возникающее при этом электрическое поле вызывает дрейф частиц, направленный к наружной стенке тора, и прижимает плазму к наружной стенке до тех пор, пока не установится рассмотренное выше макроскопическое равновесие.

Из проведенного рассмотрения следует, что в магнитном поле тора, в отличие от магнитного поля бесконечного цилиндра, практически отсутствует термоизоляция. Ее нельзя восстановить в стационарном случае пропусканием через плазму продольного тока (независимо от его силы), ибо этот ток вместе с плазмой будет прижиматься к наружной стенке. Для осуществления термоизоляции необходимо приложить внешние поля, связанные со стенками камеры и дающие силу воздействия на плазму, направленную к оси тора. Для этой

цели можно было бы применить однородное магнитное поле, направленное параллельно оси тора, которое, воздействуя на продольный ток (текущий вдоль основного магнитного поля), могло бы дать силу, направленную к оси тора и уравновешивающую силы газового и диамагнитного давления плазмы. При этом теплопроводность, по-прежнему, нужно рассчитывать с учетом «перемешивания». Устойчивость такого состояния плазмы требует отдельного рассмотрения.

Б. И. Давыдов

О ВЛИЯНИИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ НА ЕЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ*

§ 1. Введение

В обычные формулы для электропроводности и теплопроводности плазмы, а также в формулы для коэффициентов диффузии электронов и ионов в ней, входят их длины свободного пути. При вычислении этих длин принято учитывать только обычные столкновения между электронами и ионами, а также — в неполностью ионизованном газе — их столкновения с молекулами газа. Благодаря медленному спадаению кулоновских сил с увеличением расстояния, при подсчете столкновений между электронами и ионами получается логарифмически расходящийся интеграл, и для того, чтобы сделать этот интеграл конечным, учитывается дебаевское экранирование, т. е. в качестве верхнего предела интегрирования подставляется дебаевская длина. Таким образом, при подсчете столкновений учитывается только взаимодействие между электронами и ионами, находящимися друг от друга на расстояниях, не превышающих дебаевской длины.

В действительности к этому взаимодействию необходимо еще добавить взаимодействие на расстояниях, больших, чем дебаевская длина. Это взаимодействие уже не носит характера столкновений и сводится к влиянию колебаний плазмы на рассматриваемый электрон или ион. Как известно, в плазме могут распространяться только колебания с длиной волны

* Работа выполнена в 1951 г.

не меньше, чем дебаевская длина, что и соответствует взаимодействию на расстояниях, больших, чем эта последняя.

Следует отметить, что в нейтральном газе было бы неправильно специально учитывать влияние акустических волн при вычислении длины свободного пути. При силах, быстро убывающих с расстоянием, взаимодействие сводится к столкновениям на малых расстояниях. Соответственно этому в нейтральном газе не может быть колебаний с длиной волны, меньшей длины свободного пути.

При подсчете результирующей длины свободного пути l складываются обратные величины

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_{\text{ст}}} + \frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_i}. \quad (1.1)$$

Здесь $l_{\text{ст}}$ обозначает обычно вычисляемую длину свободного пути, учитывающую только столкновения. Член $1/l_e$ должен учесть рассеяние рассматриваемого электрона или иона на электронных колебаниях плазмы и $1/l_i$ на ионных колебаниях.

Если длина свободного пути l известна, то коэффициент диффузии, электропроводность и коэффициент теплопроводности вычисляются по обычным формулам

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} l; \quad \sigma = \frac{e^2 n}{\theta} D; \quad \kappa = 3 \frac{kn}{\theta} D. \quad (1.2)$$

Здесь \bar{v} — средняя тепловая скорость электронов или ионов; n — их число в единице объема; $\theta = kT$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Соответствующие формулы, выражающие D , σ и κ через l при наличии внешнего магнитного поля, в данном случае следует применять с осторожностью. Постоянное магнитное поле, с одной стороны, должно сказаться на механизме колебаний плазмы; с другой стороны, существенное значение может иметь резонанс при совпадении гиромагнитной частоты с частотами колебаний плазмы. Сейчас будем считать, что магнитное поле отсутствует.

§ 2. Спектр колебаний плазмы

В плазме, как известно, существует два типа колебаний: электронные и ионные. Их можно сопоставить с колебаниями ионных кристаллов. При этом ионные колебания плазмы соответствуют акустическим колебаниям, электронные — так называемым оптическим колебаниям кристаллов. В обоих случаях речь идет, разумеется, о продольных колебаниях.

После первоначальных элементарных оценок Ленгмюра и других электронные колебания плазмы рассматривали А. А. Власов [1] и Л. Д. Ландау [2]. Согласно их расчетам, зависимость частоты колебаний ω от волнового числа q имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + 3q^2\delta^2). \quad (2.1)$$

Здесь ω_0 — предельная ленгмюровская частота электронных колебаний, δ — дебаевская длина

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}, \quad \delta^2 = \frac{\theta}{4\pi e^2 n}, \quad (2.2)$$

где m — масса электрона. При $q\delta \sim 1$ формула (2.1) делается неточной, но мы все же будем ею пользоваться вплоть до $q\delta = 1$ как разумным приближением. Волны с $q\delta > 1$ в плазме вообще распространяться не могут, так как они затухают на расстояниях, меньших, чем длина волны.

Что касается ионных колебаний плазмы, то их теория разработана в настоящее время значительно хуже (см. обзор у Р. Ромпе и М. Штенбека [3]). Приведенные ими расчеты носят элементарный характер. В них, с одной стороны, не учитывается тепловое движение ионов; с другой стороны, предположение, что электроны в периодически меняющемся электрическом поле все время распределены по Больцману, строго не доказывается.

Нетрудно развить теорию ионных колебаний аналогично теории электронных колебаний. В этой последней обычно предполагается, что положительные ионы создают постоянный объемный заряд. Сейчас мы должны предположить, что заряды другого знака, т. е. теперь электроны распределены по Больцману в рассматриваемом периодическом поле с потенциалом $\varphi = \varphi(x, t)$ и создают объемный заряд

$$\rho_e = -en (e^{\epsilon\varphi/\theta} - 1) \simeq -\frac{e^2 n \varphi}{\theta}. \quad (2.3)$$

Это предположение будет обосновано далее.

Для ионной функции распределения $F_i(x, \mathbf{v}, t)$ имеем линеаризованное кинетическое уравнение и уравнение Пуассона

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_x} = 0; \quad (2.4)$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi (\rho_e + \rho_i) = 4\pi \left\{ -\frac{e^2 n \varphi}{\theta} + e \int f_i d\tau \right\}. \quad (2.5)$$

Здесь положено

$$F_i(x, v, t) = f_{i0} + f_i, \quad \text{где } f_{i0} = n \left(\frac{M}{2\pi\theta} \right)^{3/2} e^{-Mv^2/2\theta}. \quad (2.6)$$

Предполагается, что функция распределения мало отличается от максвелловского распределения f_{i0} , т. е. что $f_i \ll f_{i0}$.

Пусть

$$f_i = f_i^{(0)} e^{i(qx - \Omega t)}, \quad \varphi = \varphi^{(0)} e^{i(qx - \Omega t)}. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2. 4) находим

$$f_i = \frac{e}{M} q \varphi \frac{mv_x}{\theta} \frac{f_{i0}}{\Omega - qv_x}.$$

Подставляя это в (2. 5), получаем уравнение для определения $\Omega = \Omega(q)$

$$1 + \frac{1}{q^2 \delta^2} = \frac{4\pi e^2}{qM} \int \frac{Mv_x}{\theta} \frac{f_{i0}}{\Omega - qv_x} d\tau. \quad (2.8)$$

Приближенно это дает

$$\Omega^2 \simeq \frac{\theta}{M} q^2 = \Omega_0^2 q^2 \delta^2, \quad (2.9)$$

где

$$\Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{M}. \quad (2.10)$$

Строго говоря Ω , определяемая уравнением (2. 8), комплексна. Мнимая часть Ω оказывается малой по сравнению с действительной частью только в том случае, если ионная температура много меньше электронной (подробно этот вопрос рассмотрен в выполненной под руководством автора дипломной работе Т. Ф. Вслкова). Если температуры одинаковы, то сильное затухание будет уже на расстоянии одной длины волны. Тем не менее, в дальнейшем будем для приближенных оценок пользоваться выражением (2. 9).

Нам остается оправдать предположение (2. 3). Для электронной функции распределения

$$F_e = f_{e0} + f_e = f_{e0} + f_e^{(0)} e^{i(qx - \Omega t)}. \quad (2.11)$$

Уравнение, аналогичное (2. 4), дает

$$(qv_x - \Omega) f_e - \frac{e}{m} q \varphi \frac{mv_x}{\theta} f_{e0} = 0. \quad (2.12)$$

Отсюда

$$f_e = \frac{e\varphi}{\theta} \frac{qv_x}{qv_x - \Omega} f_{e0}, \quad (2.13)$$

и, следовательно,

$$\rho_e = -e \int f_e d\tau = -\frac{e^2\varphi}{\theta} \int \frac{qv_x}{qv_x - \Omega} f_{e0} d\tau. \quad (2.14)$$

Если здесь пренебречь Ω по сравнению с qv_x , то получим формулу (2.3). Но в (2.13) $v_x \sim \sqrt{\theta/m}$. С другой стороны, согласно (2.9), $\Omega/q \sim \sqrt{\theta/M}$. Следовательно, формула (2.3) верна с точностью до величин порядка $\sqrt{m/M}$.

§ 3. Рассеяние электронов и ионов на колебаниях плазмы

Хотя взаимодействие между свободными электронами и ионами и колебаниями плазмы не связано ни с какими квантовыми эффектами, его удобно рассчитывать, пользуясь теорией возмущений квантовой механики. Рассматриваемая задача аналогична задаче о взаимодействии свободных электронов с поляризационными (так называемыми оптическими) колебаниями в ионных кристаллах, и мы можем воспользоваться готовыми расчетами (Б. И. Давыдов и И. М. Шмушкевич [4]).

Согласно этим вычислениям, для взаимодействия с электронными колебаниями вероятность перехода свободного электрона или иона из состояния с волновым вектором $\mathbf{k} = m\mathbf{v}$ в состояние с волновым вектором $\mathbf{k} + \mathbf{q}$, сопровождающегося поглощением одного колебательного кванта с волновым вектором \mathbf{q} и с частотой ω , равна

$$W_e^+ = \frac{2ne^4}{m\omega q^2} N_\omega, \quad (3.1)$$

где N_ω — число таких квантов в единице объема. Точно так же вероятность перехода $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{q}$, сопровождающегося испусканием одного кванта, будет

$$W_e^- = \frac{2ne^4}{m\omega q^2} (N_\omega + 1). \quad (3.2)$$

При расчете взаимодействия с электронными колебаниями плазмы мы можем считать, что заряды другого знака, т. е. ионы плазмы, просто покоятся. Для ионных колебаний необходимо учесть, что электроны в них колеблются в той же фазе, что

и ионы. При этом объемный заряд, действующий на рассматриваемый электрон или ион, будет

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi} q^2 \varphi = \rho_i - \rho_e, \quad (3.3)$$

где ρ_i и ρ_e — объемные заряды, создаваемые, соответственно, ионами и электронами. Согласно (2.3), это дает

$$\frac{1}{4\pi} q^2 \varphi = \rho_i - \frac{e^2 n}{\theta} \varphi.$$

Поэтому суммарный объемный заряд

$$\rho = \rho_i \frac{q^2 \delta^2}{1 + q^2 \delta^2}. \quad (3.4)$$

Вероятность перехода пропорциональна ρ^2 . Следовательно, для взаимодействия с ионными колебаниями они будут

$$W_i^+ = \frac{2ne^4}{M\Omega q^2} \left(\frac{q^2 \delta^2}{1 + q^2 \delta^2} \right)^2 N_\Omega \quad (3.5)$$

для поглощения кванта $\hbar\Omega$ и

$$W_i^- = \frac{2ne^4}{M\Omega q^2} \left(\frac{q^2 \delta^2}{1 + q^2 \delta^2} \right)^2 (N_\Omega + 1) \quad (3.6)$$

для его испускания.

В наши вероятности перехода вошли, таким образом, N_ω и N_Ω . Дальше мы должны сделать какие-то предположения относительно этих чисел, т. е. относительно интенсивности колебаний плазмы.

В обычных условиях газового разряда состояние плазмы очень далеко от теплового равновесия. Любые упорядоченные потоки в плазме вызывают раскачку колебаний, и интенсивность их может быть очень велика. Не останавливаясь на этом вопросе, примем здесь минимальную интенсивность колебаний плазмы, т. е. ту, которая соответствует тепловому равновесию. При этом, по формуле Релея—Джинса,

$$N_\omega = \frac{\theta}{\hbar\omega}, \quad N_\Omega = \frac{\theta}{\hbar\Omega}. \quad (3.7)$$

Тем самым оценим нижний предел влияния колебаний плазмы на движение электронов и ионов в ней.

При поглощении или испускании колебательного кванта свободным электроном или ионом его импульс и энергия изменяются на очень небольшую величину, пропорциональную \hbar . Поэтому заметные изменения его импульса складываются из очень большого числа статистически независимых малых из-

менений, подобно тому, как это имеет место при диффузии броуновских частиц. Это означает, что члены в кинетическом уравнении для функции распределения электронов $F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ или ионов $F_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ должны иметь вид обобщенного уравнения диффузии — так называемого уравнения Фоккера—Планка.

При этом кинетическое уравнение (уравнение Больцмана) принимает вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 D_v \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{1}{v^2} D_\psi \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 G F) + \Delta_{\text{ст}} F. \quad (3.8)$$

Здесь мы ввели в пространстве скоростей сферические координаты (v, ϑ, φ) ; D_v и $D_\psi = D_\varphi$ означают соответствующие составляющие (главные оси) тензора диффузии в пространстве скоростей, $\Delta_{\text{ст}} F$ — обычные интегральные члены, учитывающие столкновения на малых расстояниях.

Коэффициент G характеризует потерю энергии электроном или ионом в результате взаимодействия с колебаниями плазмы. Если интенсивность их определяется формулой Релея—Джинса, то этот коэффициент легко выразить через D_e . Действительно, максвелловское распределение

$$F = f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} e^{-m^2/2\theta} \quad (3.9)$$

заведомо является решением уравнения (3.9) при отсутствии внешних сил. При этом от всего уравнения остается только

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 S) = 0, \quad (3.10)$$

где
$$S = D_e \frac{\partial f_0}{\partial v} + G f_0.$$

Чтобы избежать особенности в нуле, мы должны положить $S = 0$. Это дает для электронов и ионов, соответственно,

$$G^{(e)} = -\frac{mv}{\theta} D_e^{(e)}, \quad G^{(i)} = -\frac{Mv}{\theta} D_e^{(i)}. \quad (3.11)$$

После того как соответствующие члены в кинетическом уравнении определены, легко оценить влияние колебаний плазмы на время свободного пути τ , т. е. величину

$$\frac{1}{\tau_{\text{хол}}} = v \left(\frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_i} \right) \quad (3.12)$$

в формуле (1.1). Пусть у нас

$$F = f_0 \cos \vartheta e^{-t/\tau}. \quad (3.13)$$

Тогда в (3.8) из всех членов, связанных с колебаниями плазмы, останется только

$$\frac{1}{v^2} D_{\vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta}.$$

При подстановке (3.13) он даст

$$\frac{1}{\tau_{\text{кол}}} = \frac{2D_{\vartheta}}{v^2}. \quad (3.14)$$

Вся задача свелась, таким образом, к вычислению двух коэффициентов D_v и D_{ϑ} . Каждый из них складывается из двух частей, соответствующих взаимодействию с электронными и ионными колебаниями

$$D_v = D_{ve} + D_{vi}, \quad D_{\vartheta} = D_{\vartheta e} + D_{\vartheta i}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим сначала взаимодействие электронов с электронными колебаниями. Пусть в данный момент времени наш электрон имеет скорость

$$\mathbf{v} = \frac{h\mathbf{k}}{m}. \quad (3.16)$$

Угол ϑ будем отсчитывать от направления этой скорости. С течением времени, в результате взаимодействия с колебаниями, скорость электрона будет изменяться иным образом. По известной эйнштейновской формуле

$$D_v = \frac{1}{2} \frac{(\Delta v \cos \vartheta)^2}{\Delta t}; \quad D_{\vartheta} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta v \sin \vartheta \cos \varphi)^2}{\Delta t}. \quad (3.17)$$

Это дает:

$$\left. \begin{aligned} D_{ve}^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{q_1}^{1/\delta} \left(\frac{hq \cos \vartheta}{m} \right)^2 W_e^+ \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} + h\omega) \times \\ &\quad \times q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{q_1}^{1/\delta} \left(\frac{hq \cos \vartheta}{m} \right)^2 \times \\ &\quad \times W_e^- \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - h\omega) q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi; \\ D_{\vartheta e}^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{q_1}^{1/\delta} \left(\frac{hq \sin \vartheta \cos \varphi}{m} \right)^2 W_e^+ \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} + h\omega) \times \\ &\quad \times q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{q_1}^{1/\delta} \left(\frac{hq \sin \vartheta \cos \varphi}{m} \right)^2 \times \\ &\quad \times W_e^- \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - h\omega) q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Здесь $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$, δ -функции выражают закон сохранения энергии.

Сначала интегрируем по углам. Положив

$$x = \frac{\hbar^2 k q}{m} \cos \vartheta, \quad (3.19)$$

находим, пренебрегая q по сравнению с k ,

$$\int_0^\pi \delta(\epsilon_k + \epsilon_{k \pm q} \pm \hbar \omega) \sin^3 \vartheta d\vartheta = \int \delta\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \mp \hbar \omega \pm x\right) \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{mx}{\hbar^2 k q}\right)^2\right] \frac{m}{\hbar^2 k q} dx = \frac{m}{\hbar^2 k q} \left[1 - \left(\frac{m\omega}{\hbar k q}\right)^2\right]. \quad (3.20)$$

Нижний предел интегрирования q в (3.18) определяется необходимостью удовлетворить закон сохранения импульса и энергии, т. е. при $q = q_1$ интеграл (3.20) должен исчезать

$$\hbar k q_1 = m\omega, \quad (3.21)$$

где ω определяется формулой (2.1).

При $q < q_1$ колебательные кванты не могут испускаться или поглощаться электроном без нарушения закона сохранения. При вычислении интегралов (3.18) следует, конечно, иметь в виду, что должно быть, во всяком случае, $q_1 \leq 1/\delta$. Если, при данном k , согласно (3.21) получается $q_1 > 1/\delta$, то это означает, что для электронов с таким k , т. е. со скоростью $v = \hbar k/m$, коэффициенты $D_{\delta}^{(\epsilon)}$ исчезают, т. е. что такие электроны не взаимодействуют с электронными колебаниями плазмы.

В результате, согласно (3.1), (3.2) и (3.7), находим, что при

$$(mv)^2 = (\hbar k)^2 > 4m\theta; \quad (3.22)$$

$$D_{\omega}^{(\epsilon)} = 2\pi \frac{ne^4}{m^2 v} \frac{\theta}{mv^2} \left[\ln \frac{mv^2}{\theta} + \ln \left(1 - 3 \frac{\theta}{mv^2}\right) \right]; \\ D_{\delta}^{(\epsilon)} = 2\pi \frac{ne^4}{m^2 v} \left\{ \frac{1}{6} \left[\ln 4 + \ln \left(1 - 3 \frac{\theta}{mv^2}\right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\theta}{mv^2} \left[\ln \frac{mv^2}{\theta} + \ln \left(1 - 3 \frac{\theta}{mv^2}\right) \right] \right\}. \quad (3.23)$$

При $(mv^2) < 4m\theta$ оба эти коэффициента равны нулю. Отсутствие взаимодействия между медленными электронами и элек-

тронными колебаниями плазмы аналогично тому, что тело, движущееся в жидкости, не может испускать (а следовательно, и поглощать) звук, когда оно движется со скоростью, меньшей скорости звука.

Что касается взаимодействия между ионами и электронными колебаниями плазмы, то вместо (3.24) для него получим

$$hkq_1 = M\omega.$$

Это даст, вместо (3.22),

$$(Mv)^2 = (hk)^2 > 4 \frac{M^2}{m} \theta. \quad (3.24)$$

Ионов, удовлетворяющих такому условию, обычно нет в плазме. Поэтому ионы вообще не могут взаимодействовать с электронными колебаниями плазмы. Для них

$$D_{\nu e}^{(i)} = D_{\nu e}^{(e)} = 0. \quad (3.25)$$

Переходим теперь к взаимодействию электронов с ионными колебаниями плазмы. Вместо (3.18) получаем

$$\left. \begin{aligned} D_{\nu i}^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1/\delta} \left(\frac{hq \cos \vartheta}{m} \right)^2 W_i^+ \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} + h\Omega) \times \\ &\quad \times q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1/\delta} \left(\frac{hq \cos \vartheta}{m} \right) \times \\ &\quad \times W_i^- \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - h\Omega) q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \\ D_{\nu i}^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1/\delta} \left(\frac{hq \sin \vartheta \cos \varphi}{m} \right)^2 W_i^+ \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+q} + h\Omega) \times \\ &\quad \times q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1/\delta} \left(\frac{hq \sin \vartheta \cos \varphi}{m} \right)^2 \times \\ &\quad \times W_i^- \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q} - h\Omega) q^2 dq \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Согласно (3.5), (3.6) и (3.7), это даст

$$\begin{aligned} D_{\nu i}^{(e)} &= 2\pi \frac{ne^4}{m^2 v} \frac{m}{M} \frac{0}{mv^2} \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right); \\ D_{\nu i}^{(e)} &= 2\pi \frac{ne^4}{m^2 v} \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Первый из этих коэффициентов по порядку величины отличается от остальных множителем m/M .

Для взаимодействия ионов с ионными колебаниями, т. е. для $D_{vi}^{(i)}$ и $D_{\Phi i}^{(i)}$, получаются такие же выражения, как (3.26), только с заменой hq/m на hq/M . Из закона сохранения, вместо (3.21), мы здесь получим

$$hkq > M\Omega. \quad (3.28)$$

Согласно (2.8), при

$$h^2k^2 > M\theta, \text{ т. е. } Mv^2 > \theta, \quad (3.29)$$

неравенство (3.28) удовлетворяется для любого q при меньших k , т. е. при меньших скоростях ионов v оно не удовлетворяется. Это значит, что с ионными колебаниями плазмы взаимодействуют только ионы с энергиями, удовлетворяющими неравенству (3.29).

Выполняя интегрирование, находим для таких v

$$D_{vi}^{(i)} = 2\pi \frac{ne^4}{M^2v} \frac{\theta}{Mv^2} \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right);$$

$$D_{\Phi i}^{(i)} = 2\pi \frac{ne^4}{M^2v} \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right). \quad (3.30)$$

При $Mv^2 < \theta$ $D_{vi}^{(i)} = D_{\Phi i}^{(i)} = 0$.

Если полученные нами выражения для D_{Φ} подставить в (3.12) и (3.14), то для соответствующей части обратной длины свободного пути мы по порядку величины получим

$$\frac{1}{l_{\text{нол}}^e} \sim 2\pi \frac{ne^4}{m^2v^4}, \quad \frac{1}{l_{\text{нол}}^i} \sim 2\pi \frac{ne^4}{M^2v^4}. \quad (3.31)$$

Обычные формулы для столкновений на малых расстояниях дают для $1/l_{\text{ст}}^{(e)}$ и $1/l_{\text{ст}}^{(i)}$ точно такие же величины, но еще помноженные на логарифмический множитель, в обычных условиях порядка десяти.

Мы оценили влияние колебаний плазмы на движение электронов и ионов в ней и на ее теплопроводность, предположив, что интенсивность колебаний соответствует тепловому равновесию. Известно, что любые упорядоченные потоки в плазме приводят к искусственной раскашке колебаний. При

этом их интенсивность может быть значительно больше, чем согласно (3.7). Соответственно этому и коэффициенты D_v и D_η будут также больше: все они пропорциональны интенсивности колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Власов, Теория многих частиц, § 32, М.—Л., ГИТТЛ (1950).
 2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
 3. Р. Ромпе, М. Штенбек, УФН, 25, 310 (1941).
 4. Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ, 10, 1043 (1940).
-

Б. И. Давыдов

О ЗАЖИГАНИИ БЕЗЭЛЕКТРОДНОГО РАЗРЯДА *

§ 1

При зажигании газового разряда между плоскими электродами существенное значение имеют сами электроды. Из катода тем или иным механизмом выбиваются электроны, которые и порождают электронную лавину. В безэлектродном кольцевом разряде также, конечно, не исключено выбивание электронов из стенок, но можно думать, что оно имеет второстепенное значение. Основные процессы ионизации происходят, по-видимому, в самом газе, стенки же играют только пассивную роль — на них происходит рекомбинация электронов и положительных ионов.

В кольцевом разряде непрерывность появления новых, свободных электронов не требует какого-либо «второго механизма» ионизации (β - или γ -механизм Таунсенда) дополнительно к ударной ионизации электронами (α -механизм), подобно тому как это необходимо при разряде между плоскими электродами. Здесь электронная лавина, закручиваясь по кольцу, так сказать, «ловит себя за хвост», не уходя из разрядной трубки и непрерывно ее заполняя.

Рассмотрим условия зажигания безэлектродного разряда в тороиде, в котором создается вихревое электрическое поле. Такое поле можно, например, создать равномерным нарастанием или убыванием магнитного потока сквозь тороид. Если этот поток меняется периодически, то поле будет изменяться во времени также периодически. В этом случае будем предполагать, что разряд зажигается за время, меньшее чем четверть периода, либо за время, охватывающее большое число

* Работа выполнена в 1951 г.

периодов. В последнем случае войдет какое-то эффективное поле.

Картина зажигания безэлектродного разряда в тороиде существенно зависит от того, имеется ли постоянное магнитное поле вдоль кольца тороида. Если такое поле отсутствует, то свободные электроны, диффундируя, уходят на стенки тороида быстрее, чем положительные ионы. Эти последние создают положительный объемный заряд, затрудняющий уход электронов на стенки и, тем самым, ускоряющий нарастание ионизации. Поэтому, если лавинообразное нарастание ионизации уже началось, появляющиеся затем объемные заряды могут только усилить его. Следовательно, здесь пробивное поле определяется начальной стадией разряда, когда объемных зарядов еще нет.

При наличии постоянного кольцевого магнитного поля картина будет обратная. Поперек магнитного поля ионы диффундируют быстрее, чем электроны. При этом по мере нарастания ионизации должен появляться отрицательный объемный заряд, который будет, наоборот, ускорять диффузию электронов к стенкам трубки. В результате начавшееся лавинообразное нарастание ионизации может затормозиться. Таким образом, при наличии кольцевого магнитного поля зажигание безэлектродного разряда в тороиде следует рассчитывать с учетом объемных зарядов.

§ 2

Рассмотрим сначала зажигание без кольцевого магнитного поля. Будем пользоваться диффузионными уравнениями, считая, что длина свободного пути достаточно мала по сравнению с (малым) радиусом тороидальной трубки.

Небольшой отрезок тороида можно приближенно рассматривать как отрезок цилиндра. Пусть n означает концентрацию свободных электронов; u_0 — их подвижность в продольном (в тороиде — вихревом) поле E_0 ; T — температуру электронов (в энергетических единицах). Если на 1 см пути, проходимого вдоль поля, электрон создаст α пар ионов, то в единице объема в единицу времени образуется $\alpha u_0 E_0 n$ пар ионов. Диффузионное уравнение в цилиндрических координатах будет

$$n = \frac{u_0 T}{e} \frac{1}{r} (rn)' + \alpha u_0 E_0 n, \quad (2.1)$$

e — заряд электрона.

Точка означает дифференцирование по времени, штрихи — по r . Граничные условия будут: ограниченность при $r = 0$ и $n = 0$ на стенках трубки, т. е. при $r = a$.

Пусть

$$n = n_0 J_0(\beta r) e^{\gamma t}, \quad (2.2)$$

где J_0 — нулевая бесселева функция. Из граничного условия получаем

$$\beta = \frac{2,4}{a}, \quad (2.3)$$

где 2,4 — первый корень функции J_0 . Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$a u_0 E_0 = \left(\frac{2,4}{a}\right)^2 \cdot \frac{u_0 T}{e} + \gamma. \quad (2.4)$$

Величины α , u_0 , n , T сами являются функциями E_0 , и их нужно брать из известных экспериментальных данных. Формула (2.4) дает, таким образом, трансцендентное уравнение для определения пробивного поля E_0 . Положив $\gamma = 0$, получаем

$$\alpha e E_0 = \left(\frac{2,4}{a}\right)^2 T. \quad (2.5)$$

При меньших полях, согласно (2.4), $\gamma < 0$, и всякая случайная ионизация будет исчезать. При больших E_0 $\gamma > 0$, и ионизация будет экспоненциально нарастать.

Если хотим, чтобы зажигание разряда произошло за какое-то время τ , то за это время n должно, согласно (2.2), увеличиться, скажем, порядков на десять. Вычисляя необходимое для этого поле E_0 по формуле (2.4), примем

$$\gamma \sim \frac{\ln 10^{10}}{\tau} = \frac{23}{\tau}. \quad (2.6)$$

§ 3

Переходим к расчету зажигания при наличии постоянного продольного, т. е. в тороиде — кольцевого, магнитного поля. Как мы уже говорили, здесь необходимо учитывать возникающие при ионизации объемные заряды и создаваемое ими радиальное электрическое поле. При не очень сильном магнитном поле можем по-прежнему рассматривать небольшой сектор тороида как отрезок прямого цилиндра (в сильном магнитном поле это недопустимо, так как приобретают значение специфически тороидальные эффекты — об этом см. ниже, § 4).

При наличии радиального поля E для радиальных потоков $_{1,2}$ имеем следующие выражения:

$$j_1 = u_1 \left(-En - \frac{T_1}{e} n' \right); \quad j_2 = u_2 \left(En - \frac{T_2}{e} n' \right). \quad (3.1)$$

Здесь значок «1» относится к электронам, «2» — к ионам. Концентрации тех и других считаются, как обычно, в первом приближении одинаковыми. Это дает диффузионные уравнения, аналогичные уравнению (2.1)

$$\dot{n} - \frac{u_1}{r} \left(rEn + \frac{T_1}{e} rn' \right)' = \alpha u_0 E_0 n; \quad (3.2)$$

$$\dot{n} + \frac{u_2}{r} \left(rEn - \frac{T_2}{e} rn' \right)' = \alpha u_0 E_0 n.$$

Здесь u_0 — подвижность электронов вдоль поля E_0 , т. е. вдоль цилиндра. Она не зависит от приложенного магнитного поля, имеющего то же направление, тогда как подвижности u_1 , u_2 поперек магнитного поля можно считать обратно пропорциональными его квадрату.

Разделив первое из уравнений (3.2) на u_1 , второе на u_2 и сложив, получаем

$$\dot{n} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \frac{T_1 + T_2}{er} (rn')' = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) \alpha n_0 E_0 n. \quad (3.3)$$

Решение опять будет иметь вид (2.2), причем

$$\beta^2 = \frac{e}{T_1 + T_2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) (\alpha u_0 E_0 - \gamma). \quad (3.4)$$

Подставив опять граничное условие (2.3), получим вместо (2.4)

$$\alpha u_0 E_0 = \gamma + \left(\frac{2,4}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right)^{-1} \frac{T_1 + T_2}{e} \cong \gamma + \left(\frac{2,4}{a} \right)^2 \frac{u_1 T_1}{e}. \quad (3.5)$$

Пробивное поле найдем, положив здесь $\gamma = 0$. Зависимость от магнитного поля определяется подвижностью электронов u_1 . Если их гиромагнитный радиус много меньше радиуса трубки a , то $u_1 \sim 1/H^2$ [1].

§ 4

В сильном магнитном поле начинают сказываться тороидальные эффекты, связанные с неоднородностью магнитного поля, которое в тороиде обратно пропорционально большому радиусу R , и с центробежными силами. И то и другое учитывается диффузионными уравнениями, если их записать с учетом симметрии тороида.

Тороидальный и центробежный дрейф электронов приведут к тому, что весь разряд будет прижиматься к верхней стороне тороида (или к нижней — это зависит от направления магнитного поля).

Диффузионный поток электронов будет при этом направлен в обратную сторону, от верхней части стенки. Таким образом, диффузия в данном случае облегчает зажигание, препятствуя уходу электронов на верхнюю часть стенки. Возникающие объемные заряды имеют здесь положительное значение. Действительно, у верхней части стенки появятся отрицательные заряды, у нижней, наоборот, — положительные. В результате появится электрическое поле, затрудняющее уход электронов на стенку. Поэтому расчет зажигания при наличии сильного магнитного поля следует вести так же, как и при полном его отсутствии — для начальной стадии зажигания, когда объемных зарядов нет.

Появляющиеся объемные заряды могут только ускорить зажигание. Мы можем, таким образом, рассматривать одни только электроны

Введем цилиндрические координаты (z, R, φ) с осью z , проходящей вертикально через центр (лежащего) тороида. Электрическое и магнитное поле будет направлено по φ , причем

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{R_0}{R}, \quad H_{\varphi} = H_0 \frac{R_0}{R}. \quad (4.1)$$

Здесь R_0 означает радиус средней линии тороида. Поток электронов будет тогда равен (см. [1])

$$\mathbf{j} = -u_0 E n - \frac{uT}{e} \nabla n + D' [\nabla n, \mathbf{H}], \quad (4.2)$$

где

$$D' = \frac{cT}{eH^2}. \quad (4.3)$$

Подвижность u у нас должна зависеть от E и H ; она, следовательно, зависит от R . Пренебрегая сравнительно слабой зависимостью от E и считая, что $u \sim 1/H^2$, напишем

$$u = \frac{k}{H_0^2} \frac{R^2}{R_0^2}. \quad (4.4)$$

Со значениями (4.4) и (4.3), (4.2) дает для составляющих \mathbf{j} по z и по R

$$j_z = -\frac{kR^2T}{eH^2R_0^2} \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{cRT}{eH_0R_0} \frac{\partial n}{\partial R}; \quad (4.5)$$

$$j_R = -\frac{kR^2T}{eH^2R_0^2} \frac{\partial n}{\partial R} + \frac{cRT}{eH_0R_0} \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (4.6)$$

В сильном магнитном поле наш разряд тороидальными дрейфами будет прижат к верхней части тороида. Поэтому в выражении для $\text{div } \mathbf{j}$ можно оставить только производные по z , пренебрегая производными по R и принимая $R=R_0$. Это дает диффузионное уравнение

$$\dot{n} - \frac{kT}{eH_0^2} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + 2 \frac{cT}{eH_0} \frac{\partial n}{\partial z} = \alpha u_0 E_0 n. \quad (4.7)$$

Нам нужно найти решение этого уравнения, обращающееся в нуль на верхней стенке тороида и затем экспоненциально убывающее с удалением от нее. Если магнитное поле достаточно велико, то эта экспонента сильная, и влияние нижней стенки можем не учитывать. Пусть на верхней стенке $z=0$. Будем искать решение в виде

$$n = -n_0 z e^{\beta z + \gamma t}. \quad (4.8)$$

Подстановка в (4.7) дает

$$\beta = cH_0/k; \quad (4.9)$$

$$\alpha u_0 E_0 = \gamma + \frac{c^2 T}{ek}. \quad (4.10)$$

Это дает опять трансцендентное уравнение для определения E_0 . Любопытно, что магнитное поле H_0 из него выпало. Таким образом, в тороиде это поле снижает поле зажигания до некоторой малой величины, которая с дальнейшим усилением поля уже не понижается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 7, № 9—10, 1069 (1937).

А. М. Андрианов, С. М. Осовец

ТЕОРИЯ И ОПЫТЫ ПО ЗАЖИГАНИЮ БЕЗЭЛЕКТРОДНОГО РАЗРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБОЯ В ВОДОРОДЕ ПРИ БЕЗЭЛЕКТРОДНОМ
РАЗРЯДЕ

§ 1. Теория пробоя в отсутствие магнитного поля

Рассмотрим условия возникновения пробоя в сосуде тороидальной формы при отсутствии внешнего магнитного поля. Ясно, что в этом случае зарождающиеся заряженные частицы могут теряться главным образом на боковых поверхностях сосуда, и в этом отношении возникновение разряда в торе полностью эквивалентно старту разряда в бесконечном цилиндре. Поток частиц к стенкам, в начальной стадии разряда, когда влияние объемного заряда незначительно, будет определяться градиентом концентрации этих частиц. Так как заряженные частицы создаются в основном электронами, для нахождения условий возникновения разряда достаточно исследовать только поведение электронов, или, точнее, изменение их концентрации во времени. На дальнейшей стадии развития разряда силы объемного заряда будут уменьшать поток электронов к стенкам, так как при отсутствии внешнего магнитного поля коэффициент диффузии электронов больше коэффициента диффузии ионов. Тем самым, если в начальной стадии разряд развивается, то в дальнейшем он будет поддерживаться. Поток электронов определяется выражением

$$S_e = -D_e \text{grad } n_e. \quad (1.1)$$

* Работа выполнена в 1951 г.

Рассмотрим это уравнение совместно с уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} S_e = \delta n_e. \quad (1.2)$$

Тогда из (1) и (2) имеем

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D_e \operatorname{div} \operatorname{grad} n_e = \frac{\partial n_e}{\partial t} - D_e \nabla^2 n_e = \delta n_e. \quad (1.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения: δ — число электронов, создаваемое одним электроном в секунду; D_e — коэффициент диффузии электронов.

$$D_e = \frac{\lambda \bar{v}}{3}.$$

Предполагается, что уже на начальной стадии развития разряда распределение электронов по энергиям близко к максвелловскому. Решение уравнения (1.3) имеет вид $n_e = n_e(x, y, z) e^{kt}$. При цилиндрической симметрии часть решения, зависящая от координаты r , выражается функцией Бесселя

$$n_e = n_{0e} J_0 \left(\sqrt{\frac{\delta - k}{D_e}} r \right). \quad (1.4)$$

С другой стороны, так как на стенках сосуда концентрация электронов равна нулю,

$$n_e = n_{0e} J_0 \left(\frac{2,4r}{r_0} \right). \quad (1.5)$$

Здесь n_{0e} — концентрация электронов у оси цилиндра; r_0 — радиус цилиндра; 2,4 — первый корень функции Бесселя. Приравнявая (1.4) и (1.5), находим, что

$$\delta - k = \left(\frac{2,4}{r_0} \right)^2 D_e. \quad (1.6)$$

Накопление частиц в объеме, а следовательно, и развитие разряда, очевидно, будут иметь место при $k \geq 0$. Отсюда следует, что для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$\delta \geq \left(\frac{2,4}{r_0} \right)^2 D_e. \quad (1.7)$$

Это неравенство и определяет условие зажигания разряда.

Приведем соотношение (1.7) к более удобному виду, разделив правую и левую части на $\bar{u}E$, где \bar{u} — средняя скорость электрона, E — напряженность электрического поля вдоль оси цилиндра. Тогда в левой части остается величина $\frac{\delta}{E\bar{u}} = \eta$, равная числу актов ионизации на вольт. Величина η является функцией $\frac{E}{P}$ (P — давление нейтрального газа в сосуде в миллиметрах ртутного столба), известной из эксперимен-

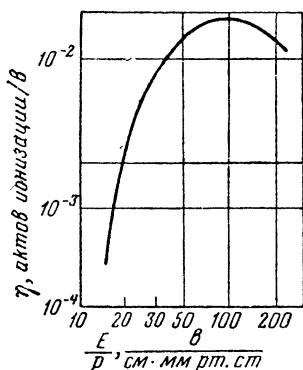


Рис. 1.

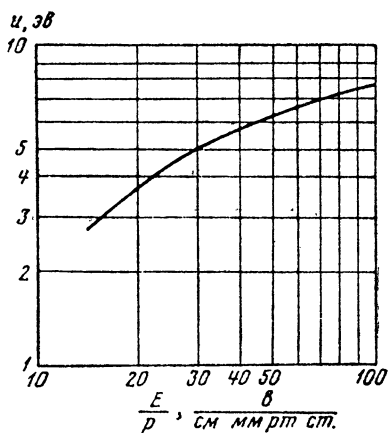


Рис. 2.

тальных данных, например из работы Варнерина и Броуна [1]. Полученная ими кривая $\eta\left(\frac{E}{P}\right)$ показана на рис. 1,

Соотношение (1.7) теперь принимает вид

$$\eta \geq \left(\frac{2,4}{r_0}\right)^2 \frac{\lambda \bar{v}}{3\bar{u}E}.$$

Величина λ — диффузионная длина свободного пробега электронов в нейтральном водороде для упругих соударений — зависит от энергии электронов и должна быть взята из кривых Рамзауэра. Зависимость средней энергии электронов от величины $\frac{E}{P}$ для водорода экспериментально определялась в той же работе [1]. Соответствующая кривая показана на рис. 2. Будем ориентироваться на значение $\frac{E}{P} = 100$, так как при этом η принимает максимальное значение, равное

10^{-2} $\frac{\text{актов ионизации}}{\text{вольт}}$. Энергия электронов составляет примерно 7 эв, что по кривым Рамзауэра соответствует $\lambda = \frac{0,025}{P}$ см. Теперь условие (1.7) приводится к виду

$$\eta \geq \left(\frac{2,4}{r_0}\right)^2 \frac{0,025}{3EP} \simeq \frac{0,05}{r_0^2 E^2} \frac{E}{P}.$$

Отсюда окончательно

$$r_0 E \geq 0,22 \sqrt{\frac{E/P}{\eta}}. \quad (1.8)$$

Величина $\frac{E/P}{\eta}$ имеет очень пологий минимум, равный примерно 10^4 , в диапазоне значений $\frac{E}{P}$ от 30 до 100.

Таким образом, в этом диапазоне давлений условие пробоя, соответствующее минимуму пробивного напряжения, имеет вид

$$Er_0 \simeq 22 \text{ в}. \quad (1.9)$$

§ 2. Теория пробоя в торе или наличии продольного магнитного поля

Рассмотрим условия возникновения пробоя в торе при наличии магнитного поля. Выбираем цилиндрическую систему координат (R, z, φ) , как это показано на рис. 3.

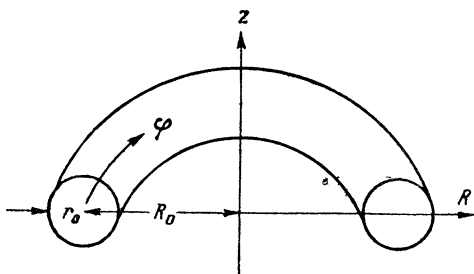


Рис. 3.

Как и ранее, рассматриваем только поведение электронов. Так как при этом функция распределения не зависит от φ , потоки электронов S_R и S_z в направлениях R и z можно выразить в форме, использованной в работах [2] и [3],

$$S_R = -D_e \left(\alpha \frac{\partial n}{\partial R} + \beta \frac{\partial n}{\partial z} \right) \quad \text{и} \quad S_z = -D_e \left(\alpha \frac{\partial n}{\partial z} - \beta \frac{\partial n}{\partial R} \right), \quad (2.1)$$

где коэффициенты α и β определяются напряженностью магнитного поля в направлении φ и частотой соударений элект-

тронов с нейтральными частицами, или, точнее, безразмерным параметром h , представляющим собой отношение ларморовской частоты электронов к частоте соударений,

$$h = \frac{\omega \lambda_e}{\bar{v}},$$

где $\omega = \frac{eH_\varphi}{mc} = 1,77 \cdot 10^7 H_\varphi \text{ сек}^{-1}$. Для рассматриваемого здесь диапазона энергий 5—10 эв газокINETическая длина свободного пробега $\lambda_e = \frac{0,025}{p} \text{ см}$.

Эффективная тепловая скорость $v \simeq 6 \cdot 10^7 \sqrt{V} \text{ см/сек}$. Тогда

$$h = \frac{7,3H_\varphi}{\sqrt{V}p} 10^{-3}. \quad (2.2)$$

При $h \gg 1$ коэффициенты α и β могут быть выражены как первые члены асимптотического разложения

$$\alpha = \frac{2}{h^2} \left(1 - \frac{3}{h^2} + \frac{12}{h^4} - \dots \right);$$

$$\beta = \frac{3\pi^{1/2}}{4h} \left(1 - \frac{5}{h^2} + \frac{35}{4} \frac{1}{h^4} - \dots \right),$$

т. е.

$$\alpha \simeq \frac{2}{h^2} \quad \text{и} \quad \beta \simeq \frac{3\pi^{1/2}}{4h}. \quad (2.3)$$

Напряженность магнитного поля в торе зависит от координаты R , причем эта зависимость имеет вид

$$H_\varphi = H_{\varphi_0} \frac{R_0}{R}, \quad (2.4)$$

где H_{φ_0} — напряженность поля у оси тора. Следовательно,

$$\alpha = \frac{2}{h_0^2} \frac{R^2}{R_0^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{3\pi^{1/2}}{4} \frac{R}{R_0},$$

где h_0 — значение h при $R = R_0$. Теперь:

$$\left. \begin{aligned} S_R &= -D_e \left(\frac{2}{h_0^2} \frac{R^2}{R_0^2} \frac{\partial n}{\partial R} + \frac{3\pi^{1/2}}{4h_0} \frac{R}{R_0} \frac{\partial n}{\partial z} \right); \\ S_z &= -D_e \left(\frac{2}{h_0^2} \frac{R^2}{R_0^2} \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{3\pi^{1/2}}{4h_0} \frac{R}{R_0} \frac{\partial n}{\partial R} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Используя уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial R S_R}{\partial R} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = \delta n, \quad (2.6)$$

получаем

$$D_e \left(\frac{2R^2}{h_0^2 R_0^2} \frac{\partial^2 n}{\partial R^2} + \frac{6R}{h_0^2 R_0^2} \frac{\partial n}{\partial R} + \frac{2R^2}{h_0^2 R_0^2} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \frac{3\pi^{1/2}}{2h_0 R_0} \frac{\partial n}{\partial z} \right) + \delta n = \frac{\partial n}{\partial t},$$

или, в предположении, что $n = n(R, z, \varphi) e^{kt}$,

$$\frac{2R^2}{h_0^2 R_0^2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + \frac{6R}{h_0^2 R_0^2} \frac{\partial n}{\partial R} + \frac{3\pi^{1/2}}{2h_0 R_0} \frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{\delta - k}{D_e} \right) n = 0. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения не может быть найдено в конечном виде. Однако, так как $R = R_0 + r$, а $r \leq r_0$, то, при обычном соотношении между размерами r_0 и R_0 , $\frac{r}{R_0} \ll 1$. После замены R переменной $R_0 + r$ уравнение (16) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{2}{h_0^2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + \frac{6}{h_0 R_0} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{3\pi^{1/2}}{2h_0 R_0} \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\delta - k}{D_e} n = \\ & = - \frac{2r}{R_0 h_0^2} \left[\left(2 + \frac{r}{R_0} \right) \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + \frac{6}{h_0^2 R_0} \frac{\partial n}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В первом приближении при $\frac{r}{R_0} \ll 1$ будем считать, что правая часть этого уравнения равна нулю. Тогда имеем

$$\frac{2}{h_0^2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + \frac{6}{h_0^2 R_0} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{3\pi^{1/2}}{2h_0 R_0} \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\delta - k}{D_e} n = 0. \quad (2.9)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $n = U(r) V(z)$. Разделяя переменные, находим

$$V = C_1 e^{-\frac{3}{8} \frac{h_0 \pi^{1/2}}{R_0} z} \cos \left[\sqrt{\frac{h_0^2}{2} \left(\frac{\delta - k}{D_e} - q^2 - \frac{9\pi}{32R_0} \right)} z \right]$$

Из условий $k \geq 0$ и $V(r_0) = 0$ следует, что

$$\sqrt{\frac{h_0^2}{2} \left(\frac{\delta}{D_e} - q^2 - \frac{9\pi}{32R_0} \right)} \geq \frac{\pi}{2r_0}. \quad (2.10)$$

Функция $U(r)$ имеет вид

$$U = C_2 e^{-\frac{3r}{2R_0}} \cos \left[\sqrt{\frac{h_0^2 q^2}{2} - \left(\frac{3}{2R_0}\right)^2} r \right].$$

Из граничного условия $U(r_0) = 0$ имеем

$$\sqrt{\frac{h_0^2 q^2}{2} - \left(\frac{3}{2R_0}\right)^2} = \frac{\pi}{2r_0},$$

откуда

$$q^2 \simeq \frac{2}{h_0^2} \left(\frac{\pi}{2r_0}\right)^2.$$

Теперь условие (2.10) можно представить в виде

$$\delta \geq D_e \left[\frac{1}{h_0^2} \left(\frac{\pi}{r_0}\right)^2 + \frac{9\pi}{32R_0^2} \right],$$

или, считая, что $\frac{9\pi}{32} \simeq 1$, и возвращаясь к величинам, которые использовались в § 1, имеем

$$\eta \geq \frac{1,13 \cdot 0,025 \frac{E}{p}}{3E^2} \left[\frac{1}{h_0^2} \left(\frac{\pi}{r_0}\right)^2 + \frac{1}{R_0^2} \right]. \quad (2.11)$$

Второй член в скобках этого выражения определяет потерю частиц за счет тороидального дрейфа, а первый — диффузионные потери. Представим это выражение в виде

$$ER_0 \geq 0,1 \sqrt{\frac{E/p}{\eta} \left[1 + \left(\frac{\pi R_0}{r_0 h_0}\right)^2 \right]}.$$

Тогда полное напряжение обхода, необходимое для зажигания разряда в сильном магнитном поле, должно удовлетворять условию

$$U = 2\pi R_0 E \geq 0,2\pi \sqrt{\frac{E/p}{\eta} \left[1 + \left(\frac{\pi R_0}{r_0 h_0}\right)^2 \right]} e. \quad (2.12)$$

При наиболее благоприятных условиях зажигания разряда, когда $\frac{E}{p} \simeq 100$,

$$U \simeq 63 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi R_0}{h_0 r_0}\right)^2}. \quad (2.13)$$

При достаточно больших значениях h_0 (или, что то же самое, при достаточно больших магнитных полях) второй член под знаком радикала, обусловленный диффузионными потерями, имеет относительно малое значение, и величина напряжения обхода, необходимого для зажигания разряда, асимптотически стремится к некоторому конечному значению. Это значение зависит только от сорта и давления газа и не зависит ни от геометрических размеров тора, ни от напряженности магнитного поля. Оценим величину второго члена, стоящего под знаком радикала в выражении (2.12).

$$\frac{\pi R_0}{r_0 h_0} = \frac{\pi R_0 \sqrt{V}}{7,3 H_{\varphi} r_0} P \cdot 10^3.$$

Будем считать, что входящие в последнюю формулу величины близки к тем, которые имеют место в условиях эксперимента, т. е.

$$\frac{R_0}{r_0} = 12,5; \quad V \simeq 7 \text{ эв}; \quad p \simeq 0,04 \text{ мм рт. ст.}$$

Тогда

$$\frac{\pi R_0}{r_0 h_0} \simeq \frac{580}{H_{\varphi}}.$$

Таким образом, уже при $H_{\varphi} \simeq 1000$ э поправка в подкоренном выражении (2.12) составляет $\sqrt{1 + (0,58)^2} = 1,15$, т. е. мало отличается от асимптотического значения. Однако оказывается, что значение минимального пробивного напряжения, вычисленного при помощи соотношения (2.12), отличается от реально наблюдаемых величин примерно на порядок. Сделанными в процессе вычислений допущениями нельзя объяснить такого большого расхождения. Поправки, учитывающие действие объемного заряда, также оказываются несущественными. Прделанные довольно громоздкие вычисления для учета действия объемного заряда не приводят к сколь-нибудь значительным изменениям, так как получающийся при этом коэффициент амбиполярной диффузии при сильных магнитных полях оказывается практически равным коэффициенту диффузии электронов.

§ 3. Временные зависимости

Все эксперименты по определению потенциала зажигания проводились в условиях импульсного режима. Поэтому следует рассмотреть вопрос о влиянии длительности приложенного импульса напряжения на процесс зажигания разряда.

Оценим порядок величины длительности импульса, при котором имеет место влияние его на процесс зажигания, и, в частности, на величину минимального пробивного напряжения. Для того чтобы сделать такую оценку, возвратимся к уравнению (1.6).

$$\delta = \left(\frac{2,4}{r_0}\right)^2 D_e + k,$$

где k — инкремент нарастания во времени лавины электронов.

Переходя к значению $\eta = \frac{\delta}{\bar{u}E}$, имеем, что

$$\eta = \frac{0,05E/p}{r_0^2 E^2} + \frac{k}{E\bar{u}}. \quad (3.1)$$

Для того чтобы лавина электронов успела нарасти до достаточной величины, величина k должна быть значительно больше длительности импульса приложенного электрического поля. Если приложенное напряжение изменяется по закону, близкому к гармоническому, то она должна быть больше четверти периода колебаний поля. Достаточно надежная оценка может быть сделана, если известно начальное число заряженных частиц в объеме. Если принять, что концентрация электронов до возникновения разряда равна $100 \text{ электронов/см}^3$ при атмосферном давлении, возникших, например, под действием космических лучей, то для того, чтобы при пробое плотность заряженных частиц n была достаточно близкой к плотности нейтрального газа, необходимо, чтобы

$$n \simeq n_0 e^{\frac{kT}{4}},$$

а так как

$$\frac{n}{n_0} \simeq \frac{2,5 \cdot 10^{19}}{100} = 2,5 \cdot 10^{17},$$

то

$$\frac{kT}{4} \simeq \ln \frac{n}{n_0} \simeq 40.$$

Тогда

$$k = \frac{160}{T},$$

где T — полный период колебаний приложенного электрического поля, если поле изменяется во времени по закону, близкому к гармоническому. В случае одиночного импульса длительность импульса принимаем равной $\frac{T}{4}$. Теперь условие (3.1) принимает вид

$$\eta = \frac{0,05E/p}{(r_0E)^2} + \frac{160}{T\bar{u}E}. \quad (3.2)$$

Очевидно, что импульсный или колебательный характер приложенного напряжения не будет препятствовать развитию достаточно интенсивного разряда, если

$$\frac{160}{T\bar{u}E\eta} \ll 1. \quad (3.3)$$

Взяв, как и ранее, для оптимальных условий зажигания разряда $\frac{E}{p} = 100$, $\bar{u} = 6 \cdot 10^7 \sqrt{V} \simeq 1,6 \cdot 10^8$ см/сек и $\eta = 10^{-2}$, получаем условие (3.3) в виде

$$\frac{5 \cdot 10^{-5}}{TE} \ll 1. \quad (3.4)$$

Воспользовавшись приведенными здесь рассуждениями, можно сделать две, правда, довольно грубые оценки. Предположим, что E , η , $\frac{E}{p}$, \bar{u} и коэффициент диффузии не слишком сильно меняются по величине от момента пробоя до достижения значительной степени ионизации и что поэтому во всем этом диапазоне можем пользоваться условием (3.1). Представим это условие в виде

$$E^2 r_0^2 - \frac{160}{T\bar{u}E} r_0^2 E - \frac{0,05E/p}{\eta} = 0.$$

Отсюда

$$Er_0 = \frac{80r_0}{T\bar{u}\eta} + \sqrt{\left(\frac{80r_0}{T\bar{u}\eta}\right)^2 + \frac{0,05E/p}{\eta}}, \quad (3.5)$$

или, при используемых оптимальных значениях $\frac{E}{p}$, имеем, что

$$Er_0 \geq \frac{5 \cdot 10^{-5}}{T} r_0 + \sqrt{\left(\frac{5 \cdot 10^{-5}}{T} r_0\right)^2 + 500}. \quad (3.6)$$

В описанном ниже эксперименте частота приложенного напряжения составляла примерно $3 \cdot 10^4$ пер/сек, или $T = 3,2 \cdot 10^{-5}$ сек. Тогда

$$Er_0 \geq 1,5r_0 + 22 \text{ и при } r_0 = 2 \text{ см } Er_0 \geq 3 + 22,$$

что мало отличается от выражения (1.9).

Однако при наличии сильного магнитного поля импульсный характер процесса может оказать существенное влияние на критическое значение напряжения пробоя. Так, например, в предельном случае сильных магнитных полей, когда $U = 2\pi R_0 E = 63$ в, учет импульсного характера приложенного напряжения приводит к условию

$$E \geq \frac{5 \cdot 10^{-5}}{T} + \sqrt{\left(\frac{5 \cdot 10^{-5}}{T}\right)^2 + \left(\frac{63}{2\pi R_0}\right)^2}. \quad (3.7)$$

Для исследовавшейся установки $2\pi R_0 = 150$ см. При значении $T = 3,2 \cdot 10^{-5}$ сек

$$E \geq 1,5 + \sqrt{(1,5)^2 + (0,42)^2} \approx 3 \text{ в/см}$$

и

$$U = 2\pi R_0 E \geq 450 \text{ в.}$$

Следовательно, в этом случае импульсный характер приложенного напряжения играет основную роль и практически определяет все, необходимое для пробоя значение приложенного напряжения.

§ 4. Эксперименты по исследованию пробоя в водороде

Исследуемый разряд создавался в стеклянной трубке диаметром $2r_0 = 4$ см, изогнутой в форме тора со средним диаметром $2R_0 = 50$ см. Электрическое поле внутри тора создавалось разрядом конденсатора емкостью $2,5$ мкф через медный виток, помещенный в середине тора. Внутри витка для улучшения связи медного витка с газовым помещался железный сердечник с поперечным сечением 150 см².

Продольное магнитное поле создавалось системой катушек, одетых на тор; катушки питались постоянным током. Для измерения напряжения обхода вдоль оси тора был проложен проволочный виток, напряжение на концах которого измерялось при помощи электростатического вольтметра с кенотроном.

Однако во время опытов измерялось не напряжение обхода, а напряжение на конденсаторе, который затем, путем

замыкания разрядника, разряжался через медный виток. Соотношения между напряжением обхода U и напряжением на конденсаторе V были следующие:

| $V, \text{кв}$ | $U, \text{в}$ | U/V |
|----------------|---------------|-------|
| 4,0 | 840 | 0,22 |
| 4,5 | 925 | 0,206 |
| 5 | 1075 | 0,214 |
| 6 | 1240 | 0,206 |

$$\left(\frac{U}{V}\right)_{\text{ср}} = 0,211$$

В дальнейшем принимаем $\left(\frac{U}{V}\right)_{\text{ср}} = 0,21$.

Схема всей установки представлена на рис. 4.

Перед проведением измерений система прогревалась до 150° (путем пропускания тока через катушки в течение длительного времени) и несколько раз промывалась водородом. Давление в системе перед напуском водорода составляет $0,3-0,15 \cdot 10^{-6}$ мм рт.ст. Результаты измерений после промывки оказались достаточно устойчивыми. Эти результаты приведены в таблице и представлены в виде кривых на рис. 5.

Т а б л и ц а

| $p, \text{мм рт. ст.}$ | H $2\pi R p,$ $\text{мм} \cdot \text{мм}$ рт. ст. | 0 | | 100 э | | 500 э | | 1000 э | |
|------------------------|---|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| | | $V_{\text{с}}, \text{кв}$ | $U_{\text{обх}}, \text{в}$ | $V_{\text{с}}, \text{кв}$ | $U_{\text{обх}}, \text{в}$ | $V_{\text{с}}, \text{кв}$ | $U_{\text{обх}}, \text{в}$ | $V_{\text{с}}, \text{кв}$ | $U_{\text{обх}}, \text{в}$ |
| 0,22 | 345 | 6,1 | 1280 | 5,6 | 1180 | 5,6 | 1180 | 5,6 | 1180 |
| 0,145 | 227 | 5,45 | 1145 | 5,6 | 1180 | 5,2 | 1190 | 5,0 | 1050 |
| 0,098 | 154 | 5,4 | 1135 | 4,65 | 977 | 4,5 | 945 | 4,3 | 902 |
| 0,080 | 125 | 5,9 | 1240 | 5,6 | 1180 | 4,6 | 965 | 3,9 | 818 |
| 0,064 | 100 | 5,55 | 1165 | 5,2 | 1090 | 4,4 | 924 | 3,8 | 798 |
| 0,041 | 64,4 | 5,4 | 1135 | 5,05 | 1060 | 4,5 | 945 | 3,3 | 694 |
| 0,032 | 50,1 | 5,5 | 1110 | 5,0 | 1050 | 4,3 | 904 | 3,0 | 630 |
| 0,021 | 33,0 | 6,0 | 1260 | 5,2 | 1090 | 4,0 | 840 | 3,0 | 630 |
| 0,012 | 18,8 | 11 | 2310 | 10 | 2100 | 10,5 | 2200 | 10,5 | 2200 |

Таким образом, магнитное поле довольно сильно влияет на напряжение пробоя вблизи минимума.

В области как более низких, так и более высоких давлений влияние магнитного поля оказывается меньшим. Зависимость минимального напряжения пробоя от напряженности магнитного поля показана на рис. 6.

Была сделана также попытка измерения при более сильных полях. Результаты одного произведенного опыта следующие: при $p = 0,027$ мм рт. ст. и $U = 540-550$ в разряд появлялся только при повышении магнитного поля до 1800 э

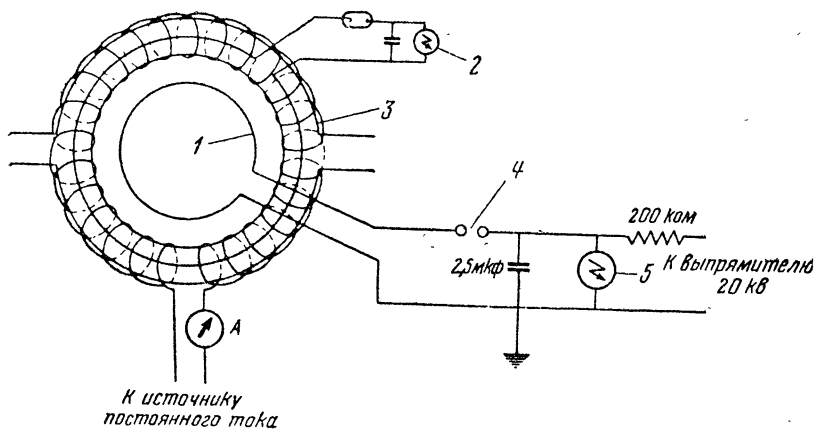


Рис. 4.

1 — медный виток; 2 — электростатический вольтметр; 3 — стеклянный тор; 4 — шаровый разрядник; 5 — электростатический вольтметр.

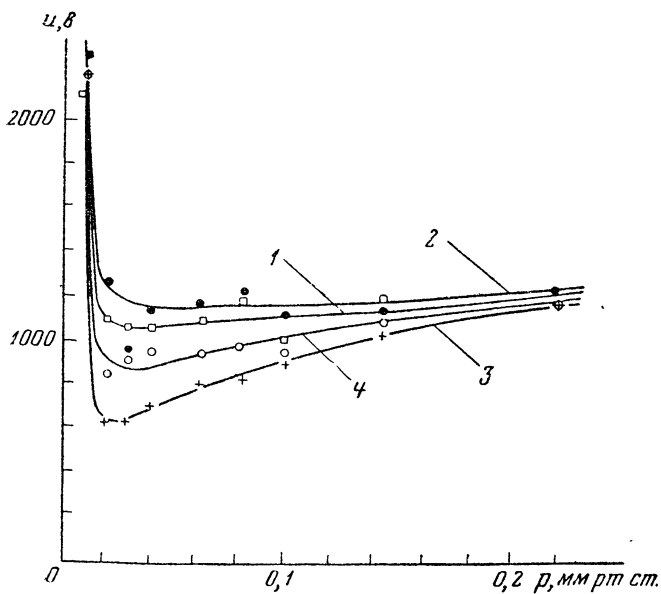


Рис. 5.

1 — $H = 100$ в (□); 2 — $H = 0$ (●); 3 — $H = 1000$ в (+); 4 — $H = 500$ в (○).

(максимальное поле которого можно было кратковременно достигнуть в данной установке). Это значение U также показано на рис. 6.

Во всех опытах разрядник устанавливался так, чтобы происходили регулярные разряды при достижении определенного напряжения на конденсаторы, т. е. при определенном напряжении обхода.

§ 5. Заключение

Сравнение теории с экспериментом. Из представленных на рис. 5 кривых зависимости пробивного напряжения от давления видно, что при отсутствии магнитного поля максимальное значение пробивного напряжения составляет

~ 1150 в при давлении 0,07 мм рт. ст. При размерах тора $r_0 = 2$ см и средней длине пробивного промежутка 150 см $E \simeq 7,7$ в/см.

Следовательно, величина $\frac{E}{P} \simeq 100$ действительно дает минимум пробивного напряжения, и поэтому можем пользоваться соотношением (1.9), которое для этого случая дает $E r_0 \simeq 22$ в и при $r_0 = 2$ см $E \simeq 11$ в/см. Действительное значение оказы-

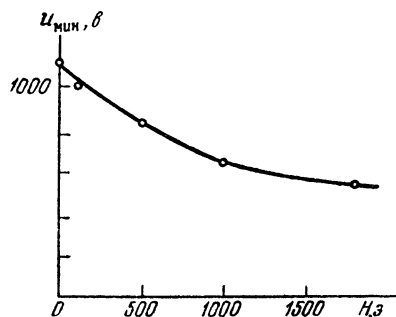


Рис. 6.

вается равным 7,7 в/см. Расхождение составляет примерно 30%.

Вряд ли имеет смысл здесь развивать строгую теорию, учитывающую, например, накопление объемного заряда в процессе пробоя, так как величина ошибки все же не превышает допустимого значения и сравнима с ошибками, возникающими в результате грубого определения исходных величин, использованных в данном расчете.

Импульсный характер разряда в этом случае, как видно из соотношения (3.5), также не вводит сколь-нибудь существенной поправки.

При наличии магнитного поля наблюдаемые значения минимального пробивного напряжения значительно отличаются от полученных расчетных величин для стационарного режима. Действительно, при напряженности магнитного поля 1000 в, когда величина пробивного напряжения уже должна быть достаточно близка к своему асимптотическому значению 63 в

[см. соотношение 2.12], экспериментально полученная величина составляла 630 *e* при $p \simeq 0,03$ мм рт. ст. При этом $\frac{E}{p} \simeq 140$, т. е. также достаточно близко к оптимальному значению $\frac{E}{p} = 100$.

Однако в этом случае, как было показано ранее, существенное влияние оказывает импульсный характер приложенного напряжения, что согласно соотношению (3.6), дает для рассматриваемых значений исходных величин $U = 460$ *e*, что уже достаточно близко к наблюдаемым величинам.

Выше указывалось, что при повышении напряженности магнитного поля до 1800 э минимальное пробивное напряжение не снижалось меньше чем до 540—550 *e*, т. е., как это видно из кривой рис. 6, стремится к некоторому асимптотическому значению, лежащему вблизи расчетной величины 460 *e*.

Получающиеся соотношения дают основания полагать, что изложенные здесь методы расчета могут быть использованы и получающиеся результаты следует признать достаточно надежными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vagnerin, Brown, Phys. Rev., 79, 946 (1950).
 2. Tonks, Phys. Rev., 79, 946 (1950).
 3. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, март 1936 г.
-

М. А. Леонтович

**О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ТОК,
НАХОДЯЩИЙСЯ ВНУТРИ ПРОВОДЯЩЕЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ***

В связи с вопросом о стабилизации тока с помощью окружающей его проводящей трубы здесь приводятся некоторые элементарные формулы для сил, действующих на ток.

А. Б. Мигдал и Г. И. Будкер подсчитали электродинамические силы расталкивания, вызывающие неустойчивость плазменного тороидального тока. При этих подсчетах тороидальный ток в плазме рассматривался как линейный ток, находящийся в пустом пространстве, и не учитывалось влияние проводящей трубы, в которой он возбуждается. Наличие этой трубы приводит к появлению дополнительных сил, а именно сил, вызванных действием на линейный ток магнитного поля токов, индуцированных в трубе. Эти силы появляются, если сила тока в линейном проводнике (т. е. в плазме) изменяется во времени и этот проводник смещен от осевой линии трубы, или если проводник этот движется.

Так как при смещенном относительно центра трубы положении проводника с переменным током с той стороны трубы, к которой он ближе, индуцируется ток направления, обратного току в линейном проводнике, то, очевидно, при этом на этот проводник будет действовать сила, направленная к центру трубы. При движении проводника, как всегда, возникают тормозящие силы.

Для расчета этих сил пользуемся следующей схемой. Рассматриваем круглую прямолинейную трубу радиуса b со

* Работа выполнена в 1951 г.

стенками толщиной d и прямолинейный ток I , находящийся внутри трубы, текущий в направлении параллельно оси трубы и смещенный на расстояние ξ от центра ее сечения. Смещение ξ считаем малым по сравнению с радиусом трубы b . На рис. 1 начало координат находится на линии тока. Очевидно, что электрическое поле будет направлено по оси z (по оси трубы), магнитное поле лежит в плоскости (xy) . Мы проводим расчет для двух крайних случаев, а именно: при отсутствии скин-эффекта в трубе и для идеально проводящей трубы. В первом случае считаем стенки трубы тонкими, так что толщина d мала по сравнению с толщиной скин-слоя δ . Толщина стенок d мала по сравнению с радиусом трубы b .

В этом случае, когда $d \ll \delta$ и $d \ll b$, на стенках трубы выполнены следующие граничные условия для электромагнитного поля:

$$H_t^{(B)} - H_t^{(C)} = \frac{4\pi i}{c} \quad i = \sigma d E^{(C)} \quad (1)$$

$$E^{(B)} = E^{(C)}. \quad (2)$$

Здесь i — ток на единицу длины периметра трубы; B обозначает внешнюю область, C — внутреннюю. Во втором случае при идеальной проводимости трубы на ней

$$E^{(C)} = 0. \quad (3)$$

Считая смещение ξ малым по сравнению с радиусом трубы b , можем написать вектор-потенциал A в виде

$$A = -\frac{2I}{c} \ln r + C_1 r \cos \varphi + C \quad (\text{внутри трубы}); \quad (4)$$

$$A = -\frac{2I}{c} \ln r + \frac{B_1}{r} \cos \varphi \quad (\text{снаружи трубы}). \quad (5)$$

Магнитное поле имеет компоненты

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{2I \sin \varphi}{c} \frac{1}{r}, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{2I \cos \varphi}{c} \frac{1}{r} - C_1,$$

$$H_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{2I}{cr} - C_1 \cos \varphi \quad (\text{внутри трубы}); \quad (6)$$

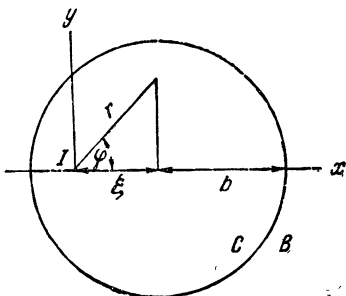


Рис. 1.

$$H_{\varphi} = \frac{2I}{cr} + \frac{B_1}{r^2} \cos \varphi \quad (\text{снаружи}). \quad (7)$$

Электрическое поле равно

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (8)$$

Для случая, когда $d \ll \delta$, граничные условия на поверхности трубы, т. е. при $r = b + \xi \cos \varphi$, будут, во-первых, согласно (2) и (8),

$$A^{(B)} = A^{(C)},$$

откуда в должном приближении пренебрегая членами выше первой степени по отношению к ξ/b , получим

$$B_1 = b^2 C_1. \quad (9)$$

Во-вторых, используя (1), (7) и учитывая, что в нашем приближении, при $\xi \ll b$, можно положить $H_t = H_{\varphi}$, получим при $r = b$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^{(C)} - \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^{(B)} = -\frac{4\pi\sigma d}{c} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (10)$$

Принимая во внимание, что при $r = b$

$$A = -\frac{2I}{c} \ln b + C + \cos \varphi \left(C_1 b - \frac{2I\xi}{cb} \right) \quad (11)$$

и учитывая (9) из условия (10), получим

$$\frac{dC_1}{dt} + \rho C_1 = \frac{2}{cb^2} \frac{dI\xi}{dt}, \quad (12)$$

где $\rho = \frac{c^2}{2\pi b d \sigma}$ — сопротивление единицы длины трубы в электромагнитных единицах. Заметим, что поверхностная плотность тока в трубе равна

$$i = \frac{c}{4\pi} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^{(C)} - \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^{(B)} \right) = \frac{c}{2\pi} C_1 \cos \varphi. \quad (13)$$

Уравнение (12) имеет поэтому простой смысл, а именно: первый член слева пропорционален произведению тока i на сопротивление, а правая часть пропорциональна э.д.с. индукции.

Решение уравнения (12) можно написать в виде

$$C_1 = \frac{2}{cb^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\theta-t)} \frac{dI(\theta) \xi(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (14)$$

Подставляя это выражение в (13), получаем

$$i = \frac{\cos \varphi}{\pi b^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\theta-t)} \frac{dI(\theta) \xi(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (15)$$

Для случая идеально проводящей трубы условие (3) приводит к условию $A=0$ на поверхности трубы. С учетом (11) это условие дает

$$C_1 = \frac{2I\xi}{cb^2}. \quad (16)$$

Это значение C_1 получается из решения (14), если в нем положить $\rho=0$, что сразу видно, если выражение (14) путем преобразования по частям привести к виду

$$C_1 = \frac{2}{cb^2} \left\{ I(t) \xi(t) - \rho \int_{-\infty}^t e^{\rho(\theta-t)} I(\theta) \xi(\theta) d\theta \right\}. \quad (17)$$

Сила действующая на единицу длины линейного тока (она считается положительной в направлении от центра трубы), равна

$$F = -F_x = \frac{1}{c} I H'_y. \quad (18)$$

Здесь H'_y — поле тока i в месте, где находится ток I ; H'_y равно полю H_y за вычетом собственного поля тока I , равного $\frac{2I \cos \varphi}{cr}$, так что, согласно (6),

$$H'_y = -C_1.$$

Принимая во внимание (14), получаем

$$F = -\frac{2I(t)}{c^2 b^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\theta-t)} \frac{dI(\theta) \xi(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (19)$$

Рассмотрим частные случаи выражения (19).

При идеальной проводимости трубы, используя преобразование (17) и полагая $\rho = 0$, находим

$$F = -\frac{2I^2\xi}{c^2b^2}. \quad (20)$$

Для постоянного тока I имеем

$$F = -\frac{2I^2}{c^2b^2} \int_{-\infty}^t e^{\rho(\theta-t)\xi} \xi(0) d\theta, \quad (21)$$

откуда для медленных движений (когда $\ddot{\xi} \ll \rho\dot{\xi}$) получим

$$F = -\frac{2I^2}{c^2b^2} \left(\frac{\dot{\xi}}{\rho} - \frac{\ddot{\xi}}{\rho^2} + \dots \right) \quad (22)$$

В случае тока, начинающегося в момент $t=0$ и растущего по закону $I(t) = \text{const } t^n$, получим

$$F = -\frac{2[I(t)]^2}{c^2b^2} \left(\xi - \frac{\rho t \dot{\xi}}{n+1} + \frac{\rho \dot{\xi} t^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right).$$

Приведенные формулы показывают, что отклонение силы F от того значения, которое она имеет при идеальной проводимости трубы, определяется величиной $\rho t = \frac{c^2 t}{2\pi b d \sigma}$, где t — характерное время процесса.

С. И. Брагинский

СТЯГИВАНИЕ ПЛАЗМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

При прохождении большого тока через плазму магнитное поле, создаваемое этим током, очень сильно влияет на движение заряженных частиц в плазме и на конфигурацию всей плазмы в целом. Одновременное действие электрического поля, вызывающего ток, и магнитного поля, создаваемого этим током, приводит к «дрейфу» заряженных частиц обоих знаков внутрь токопроводящего канала. Этот дрейф «уравновешивается» в стационарном состоянии диффузией частиц наружу поперек собственного магнитного поля. В результате плазма стягивается в более или менее узкий шнур, по которому и течет почти весь ток (так называемый пинч-эффект). Это явление ранее рассматривалось теоретически Шлютером [1] в предположении постоянства температуры плазмы по радиусу.

В настоящей работе излагаются предварительные результаты рассмотрения стационарной задачи о стягивании плазмы в бесконечной прямой трубе. Плазма считается полностью ионизованной. Предполагается равенство температур электронов и ионов; внешнее магнитное поле отсутствует. Более подробное исследование, в том числе для нестационарных процессов, было выполнено автором впоследствии и опубликовано в [2].

Введем цилиндрические координаты с осью z вдоль оси трубы и будем считать, что все величины зависят только от радиуса, так что все градиенты направлены по радиусу. Магнитное поле H , очевидно, имеет лишь одну отличную от нуля

* Работа выполнена в 1951 г.

составляющую — тангенциальную. Осевое электрическое поле E , вызывающее ток, постоянно по сечению. Все градиенты и электрическое поле направлены в рассматриваемой геометрии в каждой точке перпендикулярно к магнитному полю. В этом случае выражения для радиальных потоков частиц и тепла запишутся так*:

$$nv_{ir} = nv_{er} = -\frac{cn}{H} E - \frac{2c^2 n^2}{\sigma_1 H^2 T^{1/2}} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} + \frac{1}{4T} \frac{dT}{dr} \right); \quad (1)$$

$$q_r = - \left(\sqrt{\frac{2m_i}{m_e}} + \frac{15}{2} + 2,41 \right) \frac{c^2 n^2}{\sigma_1 H^2 T^{1/2}} \frac{dT}{dr} - \frac{3}{2} \frac{cE}{H} nT; \quad (2)$$

электрический ток течет в осевом направлении и равен

$$j_z = -\frac{2c}{H} \frac{dnT}{dr}. \quad (3)$$

Здесь n — плотность плазмы, т. е. число ионов или электронов (мы считаем их с достаточной точностью одинаковыми) в 1 см^3 ; T — температура плазмы, выраженная в энергетических единицах; m_i , m_e — массы ионов и электронов; c — скорость света. Постоянная σ_1 следующим образом входит во время электронных столкновений $\tau_e = (m_e \sigma_1 / e^2) T^{3/2}$. Она равна

$$\sigma_1 = \frac{3}{\sqrt{2\pi m_e} e^2 \lambda}, \quad (4)$$

где λ — «кулоновский логарифм»; примем $\lambda = 20$.

Система основных уравнений может быть записана в виде

$$\frac{1}{r} \frac{drH}{dr} = \frac{4\pi}{c} j_z = -\frac{8\pi}{H} \frac{dnT}{dr}; \quad (5a)$$

$$T \frac{dn}{dr} + \frac{n}{4} \frac{dT}{dr} + \frac{\sigma_1}{2c} EHT^{3/2} = 0; \quad (5b)$$

$$\frac{c}{4\pi} EH = q_r = -\frac{\kappa c^2 n^2}{\sigma_1 H^2 T^{1/2}} \frac{dT}{dr} - \frac{3}{2} \frac{cE}{H} nT, \quad (5b)$$

где $\kappa = (2m_i/m_e)^{1/2} + 15/2 + 2,41$. Здесь (5a) — уравнение Максвелла, (5б) — уравнение $v_r = 0$, (5в) представляет собой баланс

* Выражения для поперечных потоков частиц и тепла были получены И. Е. Таммом, Д. Н. Зубаревым и Ю. А. Романовым [3]; здесь они приводятся в несколько иной форме [4].

энергии в плазме — энергия, вносимая электромагнитным полем, отводится (в стационарном случае и без излучения) путем теплопроводности наружу.

Система (5) содержит три уравнения для трех неизвестных функций n , T , H . Радиальное электрическое поле E_r не влияет на потоки частиц и энергии, поэтому оно не вошло в систему (5) и не будет нас интересовать. Так как система (5) содержит лишь один размерный параметр $\sigma_1 E/c$, то, приводя ее к безразмерному виду, можно выбрать произвольные единицы для измерения плотности и температуры; например, можно принять за эти единицы плотность и температуру на оси

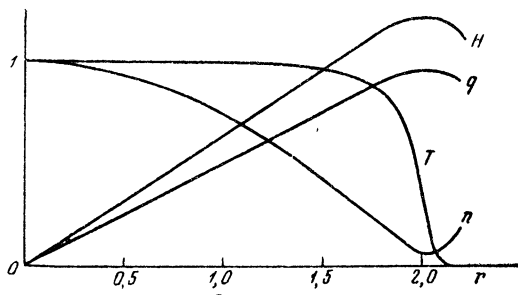


Рис. 1.

трубы n_0 , T_0 . За единицу магнитного поля примем $H_1 = (\frac{8\pi n_0 T_0}{c})^{1/2}$, а за единицу длины примем $r_1 = c H_1 / 4\pi \sigma_1 E T_0^{3/2}$.

Численное интегрирование системы (5) было произведено для $m_i/m_e = 3690$, чему соответствует $\kappa = 95,6$. Результаты численного интегрирования представлены на рис. 1.

Плотность падает примерно по параболическому закону и при $r \approx 2$ проходит через минимум, после чего снова начинает расти; магнитное поле на том же интервале изменяется примерно по линейному закону. Что касается температуры, то она на большей части рассматриваемого интервала меняется слабо и лишь вблизи правого края круто падает, доходя, например, при $r = 2,2$ до значения $T = 5 \cdot 10^{-4}$, причем ее логарифмическая производная становится очень большой (около 38). Малое изменение температуры на большей части токопроводящего плазменного шнура может быть пояснено, исходя из простых физических соображений. Дело в том, что передача тепла осуществляется в основном столкновениями ионов с ионами, тогда как в диффузии играют роль лишь столкновения электронов с ионами. Нетрудно показать про-

стой оценкой, что из-за большей величины ларморовского радиуса ионов это приводит к тому, что коэффициент температуропроводности плазмы оказывается по порядку величины в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз больше, чем коэффициент диффузии. Вследствие этого последнее из уравнений системы (5) содержит в правой части большой коэффициент κ , что и приводит к появлению плато на графике температуры. Можно найти приближенное решение системы (5), если отбросить в ней последнее уравнение и считать $T = T_0$. Для магнитного поля и плотности тогда получается

$$H = \frac{2\pi\sigma_1}{c} ET_0^{3/2}r; \quad (6)$$

$$n = n_0 - \frac{\pi\sigma_1^2}{2c^2} E^2 T_0^2 r^2 = n_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Это решение было получено ранее Шлютером [1].

Такое приближенное решение годится лишь при $r < a$, где

$$a^2 = \frac{2c^2 n_0}{\pi\sigma_1^2 E^2 T_0^2}, \quad (7)$$

т. е. до той точки, где оно дает $n = 0$. Плотность тока оказывается при этом постоянной по сечению шнура и равной

$$j = \sigma_1 T_0^{3/2} E. \quad (8)$$

Коэффициент при E совпадает по порядку величины с коэффициентом электропроводности при отсутствии магнитного поля.

Решение системы (5) содержит две неизвестные величины n_0 , T_0 . Одно из условий для их определения получается заданием полного числа частиц

$$\int_0^a n(r) 2\pi r dr = N. \quad (9)$$

Здесь N — полное число пар ионов на 1 см длины шнура, т. е. величина, определяющаяся давлением нейтрального газа, из которого затем образована плазма. Таким образом, n_0 , T_0 связаны между собой соотношением

$$n_0 = \frac{1}{c} ET_0 N^{1/2}. \quad (10)$$

Еще одно условие, необходимое для определения n_0 , T_0 , должно быть получено из граничного условия на стенке, где полностью ионизованная плазма переходит в неполностью ионизованный пристеночный слой. Точные условия на стенке в настоящее время неизвестны; можно, однако, приближенно считать, что стенка расположена в точке, где безразмерный радиус $r \approx 2$, что соответствует (7). Благодаря крутизне падения температуры на краю это не вносит большой неопределенности.

Следует также иметь в виду следующее обстоятельство. Вблизи границы шнура неизбежно наличие большого градиента температуры, направленного к оси; действующая на плазму сила, уравнивающая градиент давления, тоже направлена внутрь. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в атмосфере при наличии направленного вверх градиента температуры (направлению «наверх» соответствует направление к оси шнура). Эти условия благоприятствуют появлению конвективных потоков, которые будут размывать границу шнура и приведут к турбулентной теплопроводности и диффузии. Вопрос о возникновении такой неустойчивости и о том, будет ли турбулизованная область ограничена поверхностью шнура или распространится на весь его объем, требует особого исследования.

Если считать, что приближенное решение (6) справедливо для большей части объема шнура, то оказывается возможным выразить температуру плазмы T_0 через измеримую экспериментально величину — полный ток I , проходящий по трубе. Действительно, радиус шнура (7) выразится с учетом (10) так:

$$a = \left(\frac{2cN^{1/2}}{\pi T_0 E} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Умножив выражение для плотности тока (8) на πa^2 , получим

$$I = 2c (NT_0)^{1/2},$$

или

$$T_0 = \frac{I^2}{4c^2 N}. \quad (12)$$

Если выразить температуру в электрон-вольтах, ток в амперах, N в см^{-1} , то (12) принимает вид

$$T_0 = 1,56 \cdot 10^9 \frac{I^2}{N}. \quad (12')$$

Это соотношение показывает, что через плазму не может быть пропущен большой ток, если она не нагрета до достаточно

высокой температуры. Отметим здесь, что соотношение (12) было получено ранее Шлютером [1].

Можно ожидать, что при достаточно больших токах плазменный шнур совершенно оторвется от стенки, так что между шнуром и стенкой будет практически вакуум. При этом потеря тепла на стенку путем теплопроводности полностью отсутствует, энергия теряется лишь за счет излучения. Если стационарное решение такого типа существует, то оно может быть приближенно получено следующим образом. Согласно приведенным выше соображениям, температура будет приблизительно постоянной поперек шнура, а это приведет к выражениям (6) для магнитного поля и плотности и далее к выражениям (7)—(12). Необходимое для определения температуры дополнительное условие может быть в этом случае написано — это условие баланса энергии в шнуре

$$\int_0^a Q(r) 2\pi r dr = EI, \quad (13)$$

где Q — потери на излучение в 1 см^3 . Считая, что «бетатронным» излучением можно пренебречь по сравнению с тормозным, имеем для Q следующее выражение (его можно получить пользуясь результатами, приведенными у Гайтлера [5]):

$$Q = \beta n^2 T^{1/2}. \quad \beta = 32 \sqrt{2} e^2 / 3 \sqrt{\pi} \cdot 137 m^{3/2} c^2. \quad (14)$$

Учет условия (13) вместе с (14) дает возможность найти температуру и плотность в шнуре, радиус шнура и полный ток в нем

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{3c^2}{\beta \alpha_1} \frac{1}{N}; \\ a^2 &= \frac{2\beta}{3\pi c} \frac{N^{3/2}}{E}; \\ I &= c^2 (12/\beta \alpha_1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если выражать T в электрон-вольтах, a — в сантиметрах, E — в вольтах на сантиметр, I — в амперах, N — в см^{-1} , то соотношения (15) запишутся так:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{5,8 \cdot 10^{21}}{N}; \\ a &= 1,7 \cdot 10^{-14} \frac{N^{3/2}}{E^{1/2}}; \\ I &= 1,9 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что ток в шнуре в рассматриваемом режиме не зависит от электрического поля, увеличение поля приводит лишь к сжатию шнура; ток не зависит также и от числа частиц в трубе. Найденное значение тока является в случае водородной плазмы предельным для данной схемы. Действительно, любые неучтенные нами тепловые потери могут лишь понизить температуру в шнуре, а так как ток связан с температурой соотношением (12), то уменьшение температуры приведет и к уменьшению тока. В случае плазмы, в которой могут идти ядерные реакции, температура может быть выше, чем по (16), поэтому и ток тоже может быть больше.

Приношу глубокую благодарность Б. И. Давыдову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Schlüter, Z. Naturforsch., 5a, 72 (1950).
 2. С. Брагинский, ЖЭТФ, 33, 645 (1957).
 3. И. Е. Тамм, см. настоящий том, стр. 3.
 4. С. Брагинский, см. настоящий том, стр. 178.
 5. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., Гостехиздат, 1940.
-

Г. И. Бুদ্ধер

БЕТАТРОННЫЙ МЕТОД РАЗОГРЕВА ПЛАЗМЫ ДО ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР *

Рассматривается новый метод нагревания плазмы до высоких температур — так называемый бетатронный метод разогрева, основанный на том, что при увеличении магнитного поля температура плазмы повышается. Результаты сравниваются с предложенным ранее способом разогрева при помощи продольного электрического тока.

Задача решается для первоначальной модели: бесконечная прямая труба с магнитным полем, направленным вдоль оси.

§ 1. Разогрев плазмы электрическим током

Предполагаемый метод разогрева плазмы в термоядерном реакторе до высоких температур омическим теплом, выделяемым текущим продольным током, обладает следующими принципиальными недостатками:

1) существует опасность возникновения турбулентности в плазме, вызванной упорядоченной скоростью электронов в продольном токе;

2) тепло непосредственно передается электронам, а уже затем — от электронов к ионам;

3) передача тепла от электронов к ионам падает с ростом температуры, как $\sqrt{\nu}$. (Так как проводимость растет, как $\nu^{3/2}$, то для того, чтобы не произошел температурный отрыв электронов от ионов, необходимо в процессе разогрева уменьшать

* Работа выполнена в 1951 г.

напряженность электрического поля, создающего ток, как $\frac{1}{\vartheta}$.)

Поток тепла наружу, вследствие теплопроводности (даже при отсутствии дрейфа, турбулентности и т. п.), растет по крайней мере, как $\sqrt{\vartheta}$.

Вследствие этого существуют критическая температура, выше которой таким способом невозможно нагреть плазму при данных размерах и магнитном поле.

Эта температура оценивается следующим образом: количество тепла, передаваемое в единицу времени от электронов к ионам, на единице длины трубы

$$q = \pi r^2 \cdot \frac{3}{2} n \frac{\vartheta_{эл} - \vartheta_{ион}}{\tau_{эи}}, \quad (1.1)$$

где $\tau_{эи}$ — время столкновения между электронами и ионами; n — плотность частиц.

Поток тепла наружу, вследствие теплопроводности, по порядку величины равен

$$S = 2\pi r \alpha \cdot \frac{l^2}{\tau_{ии}} \cdot n \cdot \frac{\vartheta}{r} = \frac{4\pi \alpha M c^2 n}{e^2 H^2} \frac{\vartheta^2}{\tau_{ии}}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее α — численный множитель порядка единицы; $\tau_{ии}$ — порядка времени столкновения между ионами; l — ларморовский радиус иона; M — масса иона; m — масса электрона; H — магнитное поле.

Так как

$$\frac{\tau_{эи}}{\tau_{ии}} = \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{\vartheta_{эл}}{\vartheta_{ион}} \right)^{3/2}, \quad (1.3)$$

то, вводя величину

$$\gamma = \frac{\frac{\vartheta_{эл}}{\vartheta_{и}} - 1}{\left(\frac{\vartheta_{эл}}{\vartheta_{и}} \right)^{3/2}}, \quad (1.4)$$

максимальное значение которой равно $\frac{2}{9} \sqrt{3}$ (при $\vartheta_{эл} = 3\vartheta_{и}$), получим, приравнявая (1.1) и (1.2);

$$\vartheta_{пред} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \frac{e^2}{M c^2} (Hr)^2. \quad (1.5)$$

При таком нагреве существует определенный временной режим нагревания, от которого нельзя сильно отклоняться.

Этот режим достигается определенным изменением напряжения. Для получения высокой температуры необходимо подерживать

$$\gamma \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

§ 2. Адиабатический бетатронный метод разогрева плазмы

Так называемый бетатронный метод нагревания плазмы основан на том, что при увеличении магнитного поля кинетическая энергия ионов увеличивается. Так как при медленном (по сравнению с ларморовской частотой) изменении магнитного поля остается постоянным адиабатический инвариант $\frac{mv_{\perp}^2}{H}$ (v_{\perp} — перпендикулярная магнитному полю составляющая скорости), то с увеличением H растет и кинетическая энергия иона, а именно:

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{W_{\perp}}{H} \cdot \frac{dH}{dt}. \quad (2.1)$$

Этот способ нагрева отличается тем, что при нем, во-первых, одинаково греются как электроны, так и ионы; во-вторых, не возникает упорядоченных скоростей, которые могут вызвать турбулентность.

Надо отличать два способа бетатронного разогрева: однократный адиабатический, когда нарастание поля происходит за времена, много большие, чем время между соударениями, и многократный «баллистический», когда соотношение обратное.

Рассмотрим первый способ.

В этом случае между степенями свободы, перпендикулярными и параллельными магнитному полю, все время существует равновесие, и соотношение (2.1) для полной энергии иона, т. е. и для температуры, принимает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\vartheta}{H} \cdot \frac{dH}{dt}. \quad (2.2)$$

Это соотношение, однако, начинает выполняться только с некоторых значений H и ϑ , а именно таких, когда ларморовский радиус становится меньше размеров системы, т. е. когда

$$\frac{Mv_{\perp}c}{eH_0} \simeq r, \quad (2.3)$$

где r — радиус системы.

Если пренебрегать теплоотдачей за счет теплопроводности, то для конечной температуры имеем

$$\vartheta_0 = \left(\frac{eHr}{Mc v_{\perp}^0} \right)^{2/3} = \left(\frac{r}{l_0^*} \right)^{2/3}, \quad (2.4)$$

где l_0^* — ларморовский радиус иона начальной температуры, но в конечном поле.

То же выражение можно переписать в виде:

$$\vartheta = \left(\frac{eHr}{\sqrt{2Mc^2}} \vartheta_0 \right)^{2/3}, \quad (2.5)$$

откуда видно, что при изменении магнитного поля от нуля до некоторого H конечная температура пропорциональна степени $2/3$, а не первой степени начальной. Это связано с тем, что чем выше начальная температура, тем с больших значений H_0 начинается бетатронный разогрев [см. соотношение (2.3)].

Например, при конечном поле $H = 20\,000$ гс, $r = 400$ см и начальной температуре около 1 эв конечная температура

$$\vartheta_{\text{кон}} \simeq 1000 \text{ эв.}$$

Пока мы не учитывали теплопроводности, естественно, никаких условий на скорость нарастания магнитного поля не накладывалось.

Учет теплопроводности приводит к тому, что плазма может начать разогреваться только начиная с достаточно больших значений величины $\frac{d}{dt} (H^2)$. Воспользовавшись сначала выражением для столкновительной теплопроводности в магнитном поле (без учета вихревого электрического поля) типа соотношения (1.2), получим уравнение для изменения температуры плазмы со временем

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\dot{H}}{H} \vartheta - \frac{4}{3} \alpha \cdot \frac{l^2}{r^2} \cdot \frac{\vartheta}{\tau_{\text{ни}}}. \quad (2.6)$$

Температура будет повышаться при условии

$$\tau_{\text{ни}} \frac{\dot{H}}{H} > 2\alpha \frac{l^2}{r^2}. \quad (2.7)$$

Начиная с этого момента, второй член в правой части (2.6) становится меньше первого, и теплоотдачей можно пренебречь.

Таким образом, учет теплоотдачи приводит к тому, что разогрев начинается не с момента, когда $\frac{l}{r} \approx 1$, а с момента, когда $\frac{l}{r} \simeq \sqrt{\frac{\tau_{\text{ин}} \dot{H}}{2\alpha H}}$. Если за время $\tau_{\text{ин}}$ величина H меняется не сильно, то $\frac{l}{r} \ll 1$. Начальная температура и магнитное поле, согласно (2.7), определяются из соотношения

$$\sqrt{\vartheta_0} \cdot H_0 = \frac{8}{3} \alpha \frac{\sqrt{2\pi M} n e^2 c^2 L}{\dot{H} \cdot r^2}, \quad (2.8)$$

где L — кулоновский логарифм.

При заданном \dot{H}

$$\vartheta_{\text{нон}} = \left(\frac{3 \dot{H} H r^2 \vartheta_0^2}{8\alpha \sqrt{2\pi M} n e^2 c^2 L} \right)^{2/3}, \quad (2.9)$$

значительно сильнее зависит от ϑ_0 . Если дополнительно к бетатронному нагреву учесть еще нагрев ионов электронами (при этом нужно выбрать такой режим, чтобы было $\gamma \simeq \frac{2\sqrt{3}}{9}$), то

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H} \vartheta + \gamma \frac{\vartheta}{\tau_{\text{эи}}} - \frac{4}{3} \alpha \frac{l^2}{r^2} \frac{\vartheta}{\tau_{\text{ин}}}. \quad (2.10)$$

При этом можно не считаться с нарушением этого уравнения при низких температурах, так как тогда первый член много меньше остальных. Полученное уравнение надо решать, начиная с тех значений, когда правая часть положительна. Конечная температура увеличится по сравнению с конечной температурой в постоянном поле в $1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H} \frac{\tau_{\text{эи}}}{\gamma}$ раз. При достаточно большом $\tau_{\text{эи}}$ это увеличение может оказаться весьма существенным.

Электрическое поле, возникающее вследствие изменения магнитного поля, будет, кроме увеличения энергии ионов и электронов, вызывать также дрейф частиц к центру со скоростью

$$v_{\text{др}} = c \frac{E}{H}, \quad (2.11a)$$

или, поскольку $E = \frac{\dot{H}r}{2c}$,

$$v_{\text{др}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{H}}{H} r. \quad (2.11b)$$

Если для оценки считать, что соответствующее изменение теплопроводности сказывается в том, что вместе с дрейфующими к центру частицами переносится энергия порядка

$$q = 2\pi r v_{\text{др}} \frac{5}{2} n \vartheta = \frac{5}{2} \pi r^2 n \vartheta \frac{\dot{H}}{H},$$

то взамен уравнения (2.10) получим

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{7}{3} \vartheta \frac{\dot{H}}{H} + \gamma \frac{\vartheta}{\tau_{\text{эи}}} - \frac{4}{3} \alpha \frac{l^2}{r^2} \frac{\vartheta}{\tau_{\text{ни}}}, \quad (2.12)$$

и конечная температура увеличится по сравнению со случаем постоянного поля в $\left(1 + \frac{7}{3} \frac{\dot{H}}{H} \frac{\tau_{\text{эи}}}{\gamma}\right)$ раз. При малых плотностях плазмы это увеличение может быть весьма значительным. Следует указать, что точный расчет теплопроводности при наличии дрейфа к центру может изменить полученный результат.

§ 3. Многократный «баллистический» бетатронный метод разогрева

При медленном (по сравнению со временем установления температурного равновесия между степенями свободы) изменении магнитного поля температура плазмы (без учета теплопроводности) есть функция магнитного поля, и поэтому при колебаниях поля она колеблется около некоторого среднего значения. Если колебания магнитного поля происходят за времена, сравнимые с τ , то плазма будет систематически нагреваться.

Пусть магнитное поле H увеличивается на величину ΔH за время, много меньшее, чем τ , а затем остается постоянным на протяжении времени порядка τ . После этого магнитное поле уменьшается до прежней величины за время, много меньшее, чем τ , и затем опять остается постоянным на протяжении времени τ . В результате этого цикла температура плазмы повысится.

Действительно, пусть ϑ — температура плазмы до начала цикла:

$$(mv_{\perp}^2)_0 = 2\vartheta; \quad (mv_{\parallel}^2)_0 = \vartheta.$$

Так как изменение магнитного поля происходит все же за времена, много большие, чем период вращения иона в магнитном поле, то после повышения магнитного поля имеем

$$(mv_{\perp}^2)_1 = 2\vartheta \left(1 + \frac{\Delta H}{H}\right); \quad (mv_{\parallel}^2)_1 = \vartheta.$$

После установления равновесия между степенями свободы

$$(mv_{\perp}^2)_2 = 2\vartheta \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\Delta H}{H}\right); \quad (mv_{\parallel}^2)_2 = \vartheta \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\Delta H}{H}\right).$$

После уменьшения поля

$$(mv_{\perp}^2)_3 = 2\vartheta \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{\Delta H}{H}}{1 + \frac{\Delta H}{H}}; \quad (mv_{\parallel}^2)_3 = \vartheta \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\Delta H}{H}\right).$$

И, наконец, после вторичного установления равновесия

$$(mv_{\perp}^2)_4 = 2\vartheta \frac{1 + \frac{\Delta H}{H} + \frac{2}{9} \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}{1 + \frac{\Delta H}{H}}; \quad (mv_{\parallel}^2)_4 = \vartheta \frac{1 + \frac{\Delta H}{H} + \frac{2}{9} \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}{1 + \frac{\Delta H}{H}}.$$

Таким образом, увеличение температуры в результате одного цикла равно

$$\Delta\vartheta = \frac{\frac{2}{9} \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}{1 + \frac{\Delta H}{H}} \vartheta. \quad (3.1)$$

Если осуществлять циклы с максимально допустимой частотой (отвечающей периоду 2τ), то обозначая

$$q = \frac{\left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2}{1 + \frac{\Delta H}{H}},$$

получим

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{9} q \frac{\vartheta}{\tau}. \quad (3.2)$$

Время установления равновесия между степенями свободы τ — порядка времени $\tau_{ин}$. Установление равновесия между ионными степенями свободы может происходить как вследствие столкновения ионов друг с другом, так и вследствие столкновений ионов с электронами.

При столкновении ионов с электроном средний угол отклонения иона равен углу отклонения электрона, умноженному на $\sqrt{\frac{m}{M}}$ (в лабораторной системе координат, где их средние энергии равны). Между тем средний угол отклонения

электрона при столкновении с ионом порядка среднего угла отклонения иона на ионе (при равных энергиях); число столкновений электрона с ионом в $\sqrt{\frac{M}{m}}$ раз больше, чем число столкновений иона с ионом. Поскольку, однако, вследствие малости углов рассеяния, при кулоновском взаимодействии следует сравнивать углы многократного рассеяния в этих двух случаях

$$\frac{\langle \theta_{эи}^2 \rangle}{\langle \theta_{ии} \rangle^2} = \left(\sqrt{\frac{m}{M}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{M}{m}} = \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1,$$

то для установления равновесия играют роль главным образом столкновения ион — ион*.

Сравнив выражение (3.2) с выражениями (1.1) и (1.4) для количества тепла, передаваемого от электронов к ионам, получим ту глубину изменения магнитного поля, при которой оба метода сравниваются

$$\frac{\frac{1}{9} \left(\frac{\Delta H}{H} \right)^2}{1 + \frac{\Delta H}{H}} = \gamma \frac{\tau_{ии}}{\tau_{эи}}, \quad (3.3)$$

или $\left(\frac{\Delta H}{H} \ll 1 \right)$

$$\frac{\Delta H}{H} = \sqrt[4]{(9\gamma)^2 \frac{m}{M}}, \quad (3.4)$$

что означает, вообще говоря, весьма глубокое модулирование. Предельная достижимая температура определяется аналогично (1.5)

$$\vartheta_{\text{пред.}} = \frac{1}{24\alpha} \frac{l^2 (\Delta H r)^2}{M c^2} \quad (3.5)$$

и не зависит от магнитного поля H (при условии, что $\frac{\Delta H}{H} \ll 1$).

* Время установления этого равновесия вычислено в публикуемой в данном томе работе В. И. Когана «О скорости выравнивания температур заряженных частиц в плазме».

В. И. Коган

О СКОРОСТИ ВЫРАВНИВАНИЯ ТЕМПЕРАТУР ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ*

В работе вычисляются: 1) скорость обмена энергией между двумя степенями свободы газа заряженных частиц, находящимися при одной температуре, и третьей степенью свободы того же газа, находящейся при другой температуре (применительно к проблеме «бетатронного» нагрева плазмы); 2) скорость выравнивания температур заряженных частиц двух сортов для произвольного соотношения их масс.

§ 1. Скорость выравнивания «продольной» и «поперечной» температур газа заряженных частиц

Кинетическое уравнение для газа взаимодействующих заряженных частиц, выведенное в работе Л. Ландау [1], имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial p_i} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $n \equiv n(p_i)$, j_i , $\frac{\partial j_i}{\partial p_i}$ — соответственно, функция распределения частиц некоторого сорта, плотность их потока в пространстве импульсов p_i ($i = x, y, z$) и ее дивергенция; под двукратным повторением значков всюду подразумевается суммирование.

Компоненты потока имеют вид

$$j_i = \pi e^2 L \sum (e')^2 \int \left\{ n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right\} \frac{u^{2\delta_{ik}} - u_i u_k}{u^3} dp', \quad (1.2)$$

* Работа выполнена в 1951 г.

где $n' \equiv n(p'_i)$, $u_i = v_i - v'_i$ — относительная скорость частиц с зарядами e и e' ; $L \equiv \ln \left(\frac{T^3}{Ne^6} \right)$ — кулоновский логарифм (N — число частиц некоторого сорта в единице объема, T — температура в энергетических единицах; черта означает усреднение по сортам частиц). Суммирование в (1.2) производится по всем сортам частиц, причем нештрихованные величины относятся к данному сорту, а штрихованные — ко всем сортам (включая и данный).

Используем общие формулы (1.1), (1.2) для вычисления скорости выравнивания температур различных степеней свободы газа заряженных частиц одного сорта. Необходимость в таком вычислении возникает, например, в том случае, когда равновесная разреженная плазма находится в сильном магнитном поле, напряженность которого начинает изменяться во времени медленно по сравнению с ларморовской частотой частиц, но быстро по сравнению с частотой их взаимных столкновений*. При этом «поперечная» энергия каждой частицы ε_{\perp} изменяется пропорционально магнитному полю (в силу адиабатической инвариантности величины $\frac{\varepsilon_{\perp}}{H}$). В результате, после прекращения изменения поля, распределение частиц по ε_{\perp} (будучи, очевидно, по-прежнему максвелловским) отвечает некоторой новой температуре T_{\perp} ; распределение «продольных» энергий ε_{\parallel} отвечает прежней температуре T_{\parallel} , так как на продольном движении частиц изменение магнитного поля не сказывается. Задача состоит в нахождении скорости «перекачки» энергии между продольной и поперечными степенями свободы в результате столкновений частиц друг с другом.

Выражение (1.2) не учитывает влияния магнитного поля на акт столкновения. Поэтому использование этого выражения в нашем расчете законно лишь до тех пор, пока средний ларморовский радиус частиц велик по сравнению с дебаевской длиной. Это ограничение приводит к неравенству $H \ll \pi c \sqrt{2mN}$, которое при $N \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ выполняется для протонов или дейтронов вплоть до $H \sim 2 \cdot 10^6 \text{ гс}$, а для электронов — до $H \sim 4 \cdot 10^4 \text{ гс}$ **.

* Такая физическая картина лежит в основе «бетатронного» метода нагрева плазмы, предложенного Г. И. Будкером [2].

** В применении к задаче о «бетатронном» нагреве H ограничено также и снизу, а именно: условием сильной замагниченности $\omega\tau \gg 1$, где ω — ларморовская частота, τ — среднее время свободного пробега.

Введем цилиндрическую систему координат в пространстве импульсов с осью z вдоль магнитного поля. Для последующего вычисления нам понадобится из всех составляющих потока (1.2) только j_z . Для любой компоненты плазмы, состоящей из ионов одного сорта и электронов, в сумме (1.2) существенно лишь одно слагаемое, так как обмен энергией между ионами и электронами происходит гораздо медленнее, чем между частицами одного сорта. Итак,

$$j_z \approx \pi e^4 L \int \left(n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right) \frac{u^2 \delta_{zk} - u_z u_k}{u^3} d\mathbf{p}'. \quad (1.3)$$

Функция распределения частиц рассматриваемого сорта имеет вид

$$n = N (2\pi m)^{-3/2} (T_{\parallel} T_{\perp}^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{\varepsilon_{\perp}}{T_{\perp}} - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right); \quad (1.4)$$

выражение для n' получается из n заменой ε_{\perp} , ε_{\parallel} на ε'_{\perp} , ε'_{\parallel} . Температуры T_{\perp} и T_{\parallel} зависят от времени.

Вычислим передачу энергии за единицу времени (и в единице объема) от поперечных степеней свободы к продольной. Приращение «продольной» энергии частиц, имеющих импульсы в интервале $d\mathbf{p}$, равно с учетом (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{\parallel} n d\mathbf{p}) = \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial n}{\partial t} d\mathbf{p} = -\varepsilon_{\parallel} \frac{\partial j_i}{\partial p_i} d\mathbf{p}. \quad (1.5)$$

Следовательно, приращение продольной энергии W_{\parallel} всех частиц равно

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = - \int \varepsilon \frac{\partial j_i}{\partial p_i} d\mathbf{p} = \int j_i \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial p_i} d\mathbf{p} \quad (1.6)$$

(поверхностный интеграл, получающийся при интегрировании по частям с применением теоремы Гаусса, равен нулю, так как j_i экспоненциально спадает при $|p_i| \rightarrow \infty$).

Поскольку $\varepsilon_{\parallel} = \frac{p_z^2}{2m}$, то $\frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial p_i} = \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial p_i} = v_z \delta_{zi}$, откуда $j_i \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial p_i} =$

$= j_z v_z$, и (1.6) принимает вид

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \int j_z v_z d\mathbf{p}. \quad (1.7)$$

Выражая ε_{\perp} , ε_{\parallel} , ε'_{\perp} , ε'_{\parallel} через импульсы, находим из (1.4)

$$\frac{\partial n}{\partial p_x} = -\frac{nv_x}{T_{\perp}}, \quad \frac{\partial n}{\partial p_y} = -\frac{nv_y}{T_{\perp}}, \quad \frac{\partial n}{\partial p_z} = -\frac{nv_z}{T_{\parallel}}, \quad (1.8)$$

и аналогично: $\frac{\partial n'}{\partial p'_x} = -\frac{n'v'_x}{T_{\perp}}$ и т. д. Подставляя (1.4), (1.8) в (1.3) и выполняя суммирование по k , находим

$$j_z = \pi e^4 L \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} \iint nn' \frac{u_z u_{\perp}^2}{u^3} d\mathbf{p}' \quad (1.9)$$

($u_{\perp}^2 \equiv u_x^2 + u_y^2$), так что, согласно (1.7),

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \pi e^4 L \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} \iint nn' \frac{v_z u_z u_{\perp}^2}{u^3} d\mathbf{p} d\mathbf{p}'. \quad (1.10)$$

Подставляя сюда (1.4) и переходя к новым переменным интегрирования $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, $\mathbf{t} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$, получаем

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = A \iint \exp \left[-\frac{m \left(\frac{1}{2} u_{\perp}^2 + 2t_{\perp}^2 \right)}{2T_{\perp}} - \frac{m \left(\frac{1}{2} u_z^2 + 2t_z^2 \right)}{2T_{\parallel}} \right] \left(\frac{u_z}{2} + t_z \right) \times \left(\frac{u_z}{u} - \frac{u_z^3}{u^3} \right) du dt, \quad (1.11)$$

где

$$A = \pi e^4 L \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} N^2 \left(\frac{m}{2\pi} \right)^3 \frac{1}{T_{\parallel} T_{\perp}^2}. \quad (1.12)$$

Упрощение выражения (1.11) не представляет трудности. При этом, если пользоваться функциями только вещественного аргумента, то окончательное выражение для $\frac{dW_{\parallel}}{dt}$ имеет различный вид в зависимости от знака разности ($T_{\perp} - T_{\parallel}$), а именно*:

* Разумеется, выражения (1.13') и (1.13''), рассматриваемые как функции комплексного аргумента $\left(\frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right)^{1/2}$, тождественны, в чем легко убедиться с помощью соотношения

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

а) $T_{\perp} > T_{\parallel}$:

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \sqrt{\frac{\pi T_{\parallel}}{m}} e^4 L N^2 \frac{1}{T_{\perp} - T_{\parallel}} \left[-3 + \left(3 \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp} - T_{\parallel}}} + \sqrt{\frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}}} \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}}} \right], \quad (1.13')$$

б) $T_{\perp} < T_{\parallel}$:

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \sqrt{\frac{\pi T_{\parallel}}{m}} e^4 L N^2 \frac{1}{T_{\perp} - T_{\parallel}} \left[-3 + \frac{1}{2} \left(3 \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{T_{\parallel} - T_{\perp}}} - \sqrt{\frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}}} \right) \ln \frac{\sqrt{T_{\parallel}} + \sqrt{T_{\parallel} - T_{\perp}}}{\sqrt{T_{\parallel}} - \sqrt{T_{\parallel} - T_{\perp}}} \right]. \quad (1.13'')$$

По закону сохранения энергии (который здесь выполняется автоматически) имеем

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = - \frac{dW_{\parallel}}{dt}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим несколько подробнее частный случай близких температур ($|T_{\perp} - T_{\parallel}| \ll T$); для него получаем разложение (справедливое при любом знаке $T_{\perp} - T_{\parallel}$)

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\parallel}}{dt} &= - \frac{dW_{\perp}}{dt} = \\ &= \frac{4}{15} \sqrt{\frac{\pi}{m T_{\parallel}^3}} e^4 L N^2 (T_{\perp} - T_{\parallel}) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Так как $W_{\parallel} = N \frac{T_{\parallel}}{2}$, $W_{\perp} = N T_{\perp}$, то в рассматриваемом случае

$$\frac{dT_{\parallel}}{dt} \approx \frac{8}{15} \sqrt{\frac{\pi}{m T_{\parallel}^3}} e^4 L N (T_{\perp} - T_{\parallel}) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right); \quad (1.16')$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{\perp}}{dt} &\approx - \frac{4}{15} \sqrt{\frac{\pi}{m T_{\parallel}^3}} e^4 L N (T_{\perp} - T_{\parallel}) \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\parallel}} \right) = \\ &= - \frac{1}{2} \frac{dT_{\parallel}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.16'')$$

Ограничиваясь главными членами этих разложений и заменяя, с той же точностью, T_{\parallel} на T , приходим к дифференциальному уравнению для $(T_{\perp} - T_{\parallel})$, интегрирование которого дает

$$T_{\perp} - T_{\parallel} = (T_{\perp} - T_{\parallel})|_{t=0} \exp\left(-\frac{4}{5} \sqrt{\frac{\pi}{mT^3}} e^4 LNt\right). \quad (1.17)$$

Таким образом, для случая малой разности поперечной и продольной температур искомое время существенного выравнивания этих температур равно

$$\tau = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{mT^3}{\pi}} \frac{1}{e^4 LN}. \quad (1.18)$$

§ 2. Скорость выравнивания температур заряженных частиц двух сортов при произвольном соотношении масс

В упомянутой выше работе Ландау [1], с помощью (1.1), (1.2), вычислена скорость установления теплового равновесия между ионами и электронами, обладающими различными температурами. В этом вычислении существенно использовалась малость отношения $\frac{m}{M}$ (а именно: в приведенном ниже интеграле (2.1) относительная скорость электрона и иона полагалась равной скорости электрона). Между тем при вычислении интеграла (2.1) от этого ограничения нетрудно освободиться, так как он может быть вычислен точно. Это небольшое обобщение может оказаться полезным, например, при расчете скорости выравнивания температур холодных и горячих ионов одного сорта, находящихся порознь в тепловом равновесии.

Согласно [1], энергия, передаваемая в единицу времени ионами температуры T' ионам температуры T (в единице объема), равна

$$-\frac{dW'}{dt} = \frac{dW}{dt} = \pi (ee')^2 L \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) \iint nn' \frac{u_k^2 v_i^2 - (u_i v_i)^2}{u^3} dv dv', \quad (2.1)$$

где n, n' — максвелловские распределения (N, N' — плотности ионов):

$$n = N \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}}, \quad n' = N' \left(\frac{m'}{2\pi T'}\right)^{3/2} e^{-\frac{m'v'^2}{2T'}} \quad (2.2)$$

(остальные обозначения — те же, что и в § 1).

Подставим (2.2) в (2.1) и перейдем к интегрированию по \mathbf{v} и $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Выполняя интегрирование по углам и используя четность получающейся функции v , без труда находим

$$-\frac{dW'}{dt} = \frac{dW}{dt} = A \int_0^{\infty} \frac{du}{u} e^{-b'u^2} f(b + b'; 2b'u), \quad (2.3)$$

где постоянные A , b , b' и функция f имеют вид

$$A = \frac{2}{\pi} NN' \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} \left(\frac{T'}{m'}\right)^{1/2}; \quad b = \frac{m}{2T}; \quad b' = \frac{m'}{2T'}; \quad (2.4)$$

$$f(a; c) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-av^2} \left[\operatorname{ch}(cv) - \frac{\operatorname{sh}(cv)}{cv} \right] dv = \frac{c^2}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}} e^{\frac{c^2}{4a}}. \quad (2.5)$$

Из (2.3)–(2.5) находим окончательно

$$-\frac{dW'}{dt} = \frac{dW}{dt} = \sqrt{8\pi mm'} (ee')^2 LNN' \frac{(T' - T)}{(mT' + m'T)^{3/2}}. \quad (2.6)$$

Для нахождения скоростей изменения температур воспользуемся равенствами $W = \frac{3}{2} NT$, $W' = \frac{3}{2} N'T'$, откуда

$$\frac{dT'}{dt} = -\frac{4}{3} \sqrt{2\pi mm'} \frac{(ee')^2 LN (T' - T)}{(mT' + m'T)^{3/2}}; \quad (2.7')$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi mm'} \frac{(ee')^2 LN' (T' - T)}{(mT' + m'T)^{3/2}}. \quad (2.7'')$$

В частном случае $mT' \gg m'T$ из этих формул следует результат, полученный в [1].

Для времен релаксации τ и τ' , которые удобно определить равенствами

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| \tau = \left| \frac{dT'}{dt} \right| \tau' = |T' - T|, \quad (2.8)$$

получаем следующие выражения:

$$\tau = \frac{3(mT' + m'T)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi mm'} (ee')^2 LN'}; \quad \tau' = \tau \frac{N'}{N}. \quad (2.9)$$

В частном случае $|T' - T| \ll T$ и $N' = N$ величина $\tau = \tau'$, как легко убедиться, имеет смысл удвоенного времени затухания разности температур в e раз [ср. (1.17)].

Из (2.9) непосредственно виден, в частности, известный результат: времена установления электрон-электронного, ион-ионного и электрон-ионного равновесия отличаются друг от друга (при одних и тех же T, T') приблизительно в $\sqrt{\frac{M}{m}}$ раз.

Расчет проведен в предположении, что функции распределения обоих газов в процессе выравнивания температур остаются максвелловскими. Это справедливо в некоторых частных случаях (сильно различающиеся массы, сильно различающиеся температуры и др.), когда обмен энергией между газами происходит медленнее, чем внутри газов. В общем случае процесс выравнивания температур искажает функции распределения, так что формулы (1.13) и (2.7) справедливы лишь по порядку величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 103 (1937); Phys. Zs. d. Sowjetunion, 10, 154 (1936).
 2. Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 122.
-

Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов

К ТЕОРИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО СКАЧКА НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

Рассмотрен температурный скачок на границе замагниченной плазмы с учетом процессов ионизации, возбуждения и перезарядки атомов в пристеночном слое.

§ 1. Постановка задачи

Вопрос о возможности температурного скачка на границе плазмы в сильном магнитном поле представляет существенный интерес для теории магнитного термоядерного реактора (МТР)**. В том случае, если температурный скачок невозможен и температура пристеночного слоя плазмы совпадает с температурой стенки, должен существовать значительный слой, в котором теплопроводность определяется нейтральными атомами, что сильно увеличивает критические размеры реактора (для случая внешнего поля $H_0 = 25\,000$ гс, критический радиус возрастает при этом примерно на 1—2 м). В случае возможности температурного скачка переходный слой, где существуют нейтральные атомы, будет малым (порядка нескольких сантиметров), и нерабочая зона отпадает.

Причину возникновения температурного скачка можно усмотреть из следующих качественных соображений. Рас-

* Работа выполнена в 1951 г.

** Возможность температурного скачка была впервые показана И. Е. Таммом на примере модели МТР, с плотностью газа настолько малой, что нейтральные атомы распределены равномерно по объему.

смотрим формулы для теплового потока π и материального потока j в магнитном поле *

$$\pi(x) = \frac{-4,03 \cdot 10^{-8}}{H_0^2} \left\{ \frac{n^2}{\sqrt{T}} \cdot \frac{dT}{dx} + 0,072 \sqrt{T} \cdot n \frac{dn}{dx} \right\} \quad (1.1)$$

$$j(x) = \frac{-4,15 \cdot 10^{-10}}{H_0^2} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{d}{dx} (n^2 \cdot \sqrt{T}). \quad (1.2)$$

Материальный поток на стенку $j = -j(x)|_{x=0}$ должен быть равен некоторой конечной величине, так как внутри объема происходит ионизация летящих от стенки нейтральных атомов, которые возвращаются обратно на стенку в виде ионов и электронов. Деля (1.1) на (1.2) с учетом $n|_{x=0} = 0$, что выражает «прилипание» электронов и ионов к стенке, получаем конечное значение

$$T_0 = \frac{2}{7} \cdot \frac{\pi}{j}. \quad (1.7)$$

Эта величина при малых значениях j и заметных значениях π может быть значительно больше температуры стенки, что и составляет физическое содержание резкого пристеночного температурного скачка.

Задача об исследовании этого явления ставится следующим образом. Переходный слой, толщина которого определяется глубиной проникновения в плазму нейтральных атомов и поэтому мала, рассматривается плоским. Вне переходного слоя заданы не зависящие от координаты полный тепловой поток и произведение $nT^{1/4}$ [в силу (1.2) эта величина постоянна при $j=0$, что имеет место в тех частях плазмы, где отсутствуют нейтральные атомы]. Требуется изучить структуру переходного слоя и, в частности, найти величину температурного скачка (1.3) при сравнительно небольших (технически осуществимых) значениях теплоотода от стенки Π , необходимого для поддержания в системе стационарных условий **. (Фактически, при численном решении задачи, исходя из заданных значений температурного скачка T_0 и теплоотода Π и определяем асимптотическое значение $nT^{1/4}$.)

* Для дальнейших рассуждений существенно, что $\pi(x)$ обозначает поток тепла, переносимый движением только заряженных частиц. Тепловой поток, переносимый нейтральными атомами (там, где он существует), в значение $\pi(x)$ не входит.

** Π есть π плюс все прочие способы передачи энергии из плазмы на стенку.

Качественно структура переходного слоя может быть описана следующим образом. Плоский поток ионов и электронов плазмы, находящейся в сильном магнитном поле, параллельном стенке, падает на стенку. На границе плазмы, т. е. на стенке, ионы рекомбинируют с электронами и возвращаются обратно в плазму в виде потока нейтральных атомов, имеющих температуру стенки («медленные» нейтральные атомы). Медленные нейтральные атомы, попадая в плазму, либо ионизируются электронами, либо, вследствие перезарядки с ионами, порождают «быстрые» нейтральные атомы с энергией, соответствующей температуре плазмы. Этот процесс происходит в весьма узком пристеночном слое порядка миллиметра. Возникающие «быстрые» нейтральные атомы частично возвращаются сразу на стенку, отдавая ей свою энергию; другая же часть * проникает в глубь плазмы уже на большие расстояния порядка сантиметра, поглощаясь вследствие ионизации и испытывая перезарядку, что эквивалентно рассеянию (некоторые из этих «рассеянных» быстрых атомов также попадают на стенку).

Тепловой поток $\pi(x)$ в переходном слое уменьшается по мере приближения к стенке, так как при ионизации и возбуждении атомов ударом часть кинетической энергии электронов переходит в потенциальную форму, расходуясь на преодоление ионизационного потенциала и потенциала возбуждения; кроме того, энергия некоторых ионов при перезарядке полностью передается медленным атомам, выходя тем самым из потока $\pi(x)$ **. Дальнейший путь этих трех форм энергии следующий: потенциальная энергия ионизации переходит в тепловую энергию стенки при рекомбинации ионов и электронов; потенциальная энергия возбуждения, переходя в форму излучения, либо проникает сквозь стенку, покидая систему, либо поглощается стенкой в зависимости от свойств ее вещества; наконец, энергия, передаваемая медленным нейтральным атомам при их перезарядке, частью атомов передается стенке, другой частью уносится в более глубокие слои плазмы, превращаясь там в результате ионизации в кинетическую энергию заряженных частиц.

В настоящей работе показывается, что система уравнений, описывающая указанное движение частиц, а также превращение и перемещение различных форм энергии допускают решение, одновременно характеризующееся большим значе-

* При расчете каждая из этих частей принимается равной $\frac{1}{2}$.

** См. сноску * к стр. 139.

нием температурного скачка и сравнительно малым (технически осуществимым) значением теплоотода от стенки. Вопросы устойчивости решения при этом не рассматривались.

Обозначения

x — расстояние от стенки.

$H_0 = \text{const}$ — напряженность внешнего магнитного поля, совпадающая с напряженностью поля у стенки.

$\nu_1(x)$ — число медленных нейтральных атомов в 1 см^3 .

$\nu_2(x)$ — число быстрых нейтральных атомов в 1 см^3 .

$n(x)$ — число ионов в 1 см^3 , равное числу электронов в 1 см^3 .

$T(x)$ — температура ионов, электронов и быстрых атомов.

T_1 — температура стенки и медленных атомов.

$T_0 = \lim_{x \rightarrow 0} T(x)$ — пристеночный температурный скачок ($T_1 \ll T_0$).

θT_0 — оптимально подобранное постоянное значение для $T(x)$ (в интересующей нас области x).

m — масса электрона; M — масса иона и атома.

$\sigma_{\text{и}} = \text{const}$ — сечение перезарядки иона и атома.

$\sigma_{\text{и}}(w)$ — сечение ионизации в зависимости от относительной скорости w электрона и атома.

I — потенциал ионизации; $I_{\text{в}}$ — потенциал возбуждения.

$\sigma_{\text{в}}(w)$ — сечение возбуждения ударом в зависимости от относительной скорости w электрона и атома.

$$\langle v\sigma_{\text{и}} \rangle = \pi^{-3/2} \beta^3 \int_{(v)} e^{-\beta^2 v^2} v \sigma_{\text{и}}(v) dv, \text{ где } \beta^2 = \frac{m}{2\theta T_0},$$

$$\langle v\sigma_{\text{в}} \rangle = \pi^{-3/2} \beta^3 \int_{(v)} e^{-\beta^2 v^2} v \sigma_{\text{в}}(v) dv, \text{ где } \beta^2 = \frac{m}{2\theta T_0}.$$

$v_1 = \sqrt{\frac{8T_1}{\pi M}}$ — средняя скорость медленных атомов.

$v_2 = \sqrt{\frac{8\theta T_0}{\pi M}}$ — средняя скорость быстрых атомов при температуре θT_0 .

Π — стационарный теплоотвод от стенки (во внешнее пространство).

$j(x)$ — поток ионов, равный потоку электронов в направлении возрастания x (от стенки).

$j = -j(x)|_{x=0}$ (тот же поток на стенку).

$\pi(x)$ — суммарный поток тепловой энергии, переносимый заряженными частицами, т. е. как электронами, так и ионами, в направлении возрастания x (от стенки).

$\pi = -\pi(x)|_{x=0}$ (тот же поток на стенку).

$B_1 j$ — поток медленных нейтральных атомов со стенки в среду.

$B_2 j$ — поток быстрых нейтральных атомов от стенки (точнее, из узкого пристеночного слоя) в среду.

$B_2 j$ — половина всех порождаемых в процессе перезарядки быстрых атомов (за 1 сек во всем объеме с основанием 1 см^2).

π_0 — тепловой поток, втекающий в пристеночную зону из глубинных областей плазмы.

Единицы измерения: для x — см; для H_0 — гс; для T, T_0, T_1, I, I_B — эрг; для m, M — г; для $\sigma_n, \sigma_i, \sigma_B$ — см^2 ; v_1, v_2 — $\text{см}/\text{сек}$; $(v\sigma_n), (v\sigma_B)$ — $\text{см}^3/\text{сек}^{-1}$, j — $\text{см}^{-2}/\text{сек}^{-1}$, π, Π — $\text{эрг}/\text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$.

§ 2. Исходные уравнения

Для решения поставленной задачи требуется определить поведение в пограничном слое плазмы плотности и температуры заряженных частиц, а также плотности медленных и быстрых нейтральных атомов, т. е. найти четыре функции

$$n(x), T(x), v_1(x) \text{ и } v_2(x).$$

Соответственно для них задается система из четырех уравнений: 1) уравнение диффузии заряженных частиц, 2) уравнение теплопередачи заряженными частицами, 3) уравнение для плотности медленных атомов и 4) уравнение для плотности быстрых атомов.

1) Уравнение диффузии заряженных частиц

$$\text{div } \mathbf{j} = Q_1 + Q_2, \quad (2.1)$$

где поток j берется в виде $[j_x = j(x), j_y = j_z = 0]$,

$$j(x) = \frac{-4,15 \cdot 10^{-10}}{H_0^2 T} \frac{d}{dx} (n^2 \sqrt{T})^*; \quad (2.2)$$

источник Q_1 , обусловленный ионизацией электронами медленных атомов, в виде

$$Q_1 = (v\sigma_n) n v_1 \quad (2.3)$$

* Формулы (2.2), (2.7) получены при допущении, что не только распределение электронов φ , но и распределение ионов F отличается от максвелловского асимметричным множителем типа $(1 + hv)$ с заранее неизвестной зависимостью от v компонент вектора \mathbf{h} [1, 2].

и аналогичная величина для быстрых атомов

$$Q_2 = (v\sigma_n) n\nu_2. \quad (2.4)$$

В результате

$$\frac{4,15 \cdot 10^{-10}}{H_0^2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{T} \cdot \frac{d}{dx} (n^2 \sqrt{T}) \right\} = - (v\sigma_n) n (\nu_1 + \nu_2). \quad (2.5)$$

2) Уравнение теплопередачи заряженными частицами

$$\operatorname{div} \pi = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6, \quad (2.6)$$

где поток π берется в виде [$\pi_x = \pi(x)$, $\pi_y = \pi_z = 0$];

$$\pi(x) = -\frac{7}{7,2} \cdot \frac{4,15 \cdot 10^{-8}}{H_0^2} \left\{ \frac{n^2}{\sqrt{T}} \frac{dT}{dx} + 0,072 \sqrt{T} n \frac{dn}{dx} \right\}; \quad (2.7)$$

источник (отрицательный) R_1 , обусловленный поглощением из плазмы энергии I при каждом акте ионизации электроном медленных атомов, в виде

$$R_1 = -I (v\sigma_n) n\nu_1; \quad (2.8)$$

аналогичная величина для быстрых атомов

$$R_2 = -I (v\sigma_n) n\nu_2; \quad (2.9)$$

источник (отрицательный) R_3 , обусловленный поглощением из плазмы энергии I_B при каждом акте возбуждения электроном медленных атомов, в виде

$$R_3 = -I_B (v\sigma_B) n\nu_1; \quad (2.10)$$

аналогичная величина для быстрых атомов

$$R_4 = -I_B (v\sigma_B) n\nu_2; \quad (2.11)$$

источник (положительный) R_5 , обусловленный поступлением в заряженную компоненту плазмы энергии быстрого атома при его ионизации электроном

$$R_5 = +\frac{3}{2} T (v\sigma_n) n\nu_2 \quad (2.12)$$

и наконец, источник (отрицательный) R_6 , обусловленный передачей энергии быстрых ионов медленным атомам в процессе их перезарядки

$$R_6 = -2T v_2 \sigma_n n\nu_1. \quad (2.13)$$

В результате

$$\frac{7}{7,2} \cdot \frac{4,15 \cdot 10^{-8}}{H_0^2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{n^2}{\sqrt{T}} \frac{dT}{dx} + 0,072 \sqrt{T} \cdot n \frac{dn}{dx} \right\} =$$

$$= [I(v\sigma_{\text{и}}) + I_{\text{В}}(v\sigma_{\text{В}})] n \{v_1 + v_2\} + 2T v_2 \sigma_{\text{П}} n v_1 - \frac{3}{2} T(v\sigma_{\text{и}}) n v_2. \quad (2.14)$$

В качестве граничных условий для $n(x)$ и $T(x)$, в соответствии с § 1 (1.3), принимаем

$$n|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=0} = T_0. \quad (2.14a)$$

Везде в расчетах величины $(v\sigma_{\text{и}})$, $(v\sigma_{\text{В}})$, v_2 , зависящие от x через неизвестную $T(x)$, принимаются равными некоторым постоянным значениям, отнесенным к оптимально подобранному значению температуры θT_0 . Число θ в первом приближении полагается равным единице. После первого этапа вычислений с $\theta = 1$, на основании полученного хода зависимости $T = T(x)$, подбирается окончательное значение θ , и все расчеты воспроизводятся снова. Пользуясь таким приемом, будем считать фигурирующие в (2.5), (2.14) и во всех последующих уравнениях величины $(v\sigma_{\text{и}})$, $(v\sigma_{\text{В}})$, v_2 заранее известными числами, что значительно упрощает задачу.

3) Уравнение для плотности медленных атомов

Источники медленных атомов расположены на стенке. Уходя со стенки в среду, изотропно по всем направлениям, со средней скоростью v_1 в количестве $B_{1j} \text{ см}^{-2}/\text{сек}^{-1}$, медленные атомы поглощаются в процессах ионизации электронами и перезарядки быстрыми ионами. Поэтому в качестве уравнения для плотности медленных атомов имеем

$$v_1 = \frac{B_{1j}}{v_1} E \left(\int_0^x \frac{(v\sigma_{\text{и}}) + v_2 \sigma_{\text{П}}}{v_1} n dx \right), \quad E(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (2.15)$$

с двумя неизвестными функциями v_1 , n .

4) Уравнение для плотности быстрых атомов

Поскольку быстрые атомы порождаются перезарядкой медленных атомов с быстрыми ионами, а плотность медленных атомов круто спадает с расстоянием от стенки, можем искать распределение быстрых атомов, формально считая, что их источники расположены строго на стенке, с интенсивностью

B_2j см⁻²/сек⁻¹, находимой интегрированием по пространству числа актов перезарядки медленных атомов (с множителем $\frac{1}{2}$; см. сноску * к стр. 139). Это дает нам право записать уравнение для v_2 без свободного члена. В среде быстрые атомы испытывают ионизацию, которая эквивалентна захвату в теории нейтральной диффузии, и перезарядку с быстрыми ионами, которой в нейтронной аналогии соответствует рассеяние. В результате появляется возможность, приведя предварительно кинетическое уравнение к «нейтронно подобному» виду, воспользоваться известными приемами решения нейтронных задач.

Если в кинетическом уравнении для быстрых атомов сделать все упрощения, связанные с условием $m \ll M$, и проинтегрировать все члены уравнения по $v^2 dv$, считая, что распределение зависит от модуля скорости только множителем e^{-Bv^2} , где B — функция одних пространственных переменных, то получим

$$\mu \frac{\partial (v_2 f_2)}{\partial x} + \frac{(v\sigma_{\text{и}}) + \sqrt{2} v_2 \sigma_{\text{п}}}{v_2} n v_2 f_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sqrt{2} v_2 \sigma_{\text{п}} n}{v_2} \int_{(\Omega')} v_2 f_2(x\mu') d\Omega', \quad (2.16)$$

где μ — косинус угла между направлением движения атома и осью x ; $\sqrt{2} v_2$ — среднее значение относительной скорости (двух) быстрых атомов и $f_2(x\mu)$ — их пространственно угловое распределение, нормированное так, чтобы

$$v_2 = \int_{(\Omega)} f_2(x\mu) d\Omega \quad (2.17)$$

($d\Omega$ — элемент телесного угла).

Таким образом, для неизвестной функции $v_2 f_2(x\mu)$ формально имеем односкоростное нейтронное уравнение с «сечением захвата» $\frac{(v\sigma_{\text{и}})}{v_2}$, «сечением рассеяния» $\sqrt{2} \sigma_{\text{п}}$ и изотропной* функцией рассеяния, причем на границе расположены изотропные источники с интенсивностью B_2j , за границей —

* Строго говоря, при перезарядке с постоянным сечением $\sigma_{\text{п}} = \text{const}$ вероятность «рассеяния назад» будет несколько больше, чем для «рассеяния вперед», со средним косинусом угла рассеяния — 0,16. С достаточной точностью этот эффект может быть учтен в уравнении (2.16) заменой $\sigma_{\text{п}}$ на «транспортное сечение» $(1 - \langle \cos \theta \rangle_{\text{ср}}) \sigma_{\text{п}} = 1,16 \sigma_{\text{п}}$.

абсолютно поглощающая среда. Измеряя расстояния в «полных свободных пробегах»

$$y = \int_0^x \frac{(v\sigma_n) + \sqrt{2} v_2 \sigma_n}{v_2} n dx, \quad (2.18)$$

приводим уравнение (2.16) к стандартному виду

$$\mu \frac{\partial (v_2 f_2)}{\partial y} + v_2 f_2 = \frac{1-\alpha}{4\pi} \int_{(\Omega')} v_2 f_2 (x\mu') d\Omega', \quad (2.19)$$

где

$$\alpha = \frac{(v\sigma_n)}{(v\sigma_n) + \sqrt{2} v_2 \sigma_n} \quad (2.20)$$

является, при наших предположениях, известным числом (зависящим от θ).

Пользуясь теперь формулами Ю. А. Романова для нейтронных задач*, можем сразу записать выражение для интересующей нас величины (2.17)

$$v_2 = \frac{B_2 j}{v_2} \{E(\gamma k) + C e^{-ky}\}, \quad (2.21)$$

где

$$C = \frac{2(1-k)}{1-\alpha} \sqrt{\frac{2k^2}{k^2-\alpha}} e^{\frac{0,29k}{1-\alpha}}; \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}(1+\sqrt{\alpha})} - \frac{C}{k}, \quad (2.23)$$

причем k находится решением трансцендентного уравнения

$$\frac{\text{arth } k}{k} = \frac{1}{1-\alpha}. \quad (2.24)$$

Соотношение (2.21) представляет собой четвертое уравнение нашей задачи, связывающее, в силу (2.18), неизвестные функции v_2 и n .

Обозначая через A альбедо среды для быстрых атомов (т. е. отношение числа возвращающихся частиц к числу входящих), для которого в соответствующей нейтронной задаче Ю. А. Романовым получено выражение

$$1 - A = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}}, \quad (2.25)$$

* Используемые формулы получены Ю. А. Романовым решением интегрального уравнения (2.19) по методу Виннера—Хопфа.

можем записать для функций v_1, v_2 три необходимых соотношения:

1) баланс поглощаемых быстрых атомов

$$\int_0^{\infty} (v\sigma_n) v_2 n dx = B_2 j (1 - A); \quad (2.26)$$

2) баланс между порождением быстрых атомов и их «захватом» *

$$\frac{1}{2} (1 - A) \int_0^{\infty} v_2 \sigma_n v_1 n dx = \int_0^{\infty} (v\sigma_n) v_2 n dx; \quad (2.27)$$

3) баланс между порождением заряженных частиц и их потоком на стенку

$$\int_0^{\infty} (v\sigma_n) v_1 n dx + \int_0^{\infty} (v\sigma_n) v_2 n dx = j, \quad (2.28)$$

из которых, путем замены переменной интегрирования, согласно (2.18), имеем

$$\alpha \int_0^{\infty} v_2 v_2(y) dy = B_2 j (1 - A); \quad (2.29)$$

$$\frac{1 - \alpha}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{v_2}{v_1} \int_0^{\infty} v_1 v_1(y) dy = B_2 j; \quad (2.30)$$

$$\alpha \frac{v_2}{v_1} \int_0^{\infty} v_1 v_1(y) dy + B_2 j (1 - A) = j. \quad (2.31)$$

Воспользовавшись для (2.15) записью

$$v_1 = \frac{B_1 j}{v_1} E(\alpha_1 y), \quad (2.32)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{v_2}{v_1} \frac{1 + \alpha(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}, \quad (2.33)$$

* Относительно множителя $\frac{1}{2}$ см. сноску * к стр. 140 ,

и подставляя (2.32) и (2.24) в (2.29), (2.30) и (2.31), получаем из (2.29) формулу (2.23) для γ и из (2.30), (2.31) — два линейных уравнения для величин B_1 , B_2 , откуда

$$B_1 = \frac{1 + \alpha(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{\alpha} + \alpha(\sqrt{2} - 1)}; \quad (2.34)$$

$$B_2 = \frac{1 - \alpha}{2[\sqrt{\alpha} + \alpha(\sqrt{2} - 1)]}. \quad (2.35)$$

Заметим, что $(B_1 - 1)j$ выражает полный приток к стенке быстрых атомов, так что величина $(B_1 - 1 - B_2)j$ дает * поток на стенку быстрых атомов, претерпевших рассеяние в среде.

Поэтому должно иметь место

$$B_1 - 1 - B_2 \geq 0 \quad (2.36)$$

с обращением в нуль только или $\alpha = 1$. При $\alpha \rightarrow 0$ величина $(B_1 - 1 - B_2)j$ должна стремиться к значению потока B_2j быстрых атомов, уходящих в среду, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (B_1 - 1 - 2B_2) = 0.$$

Легко видеть, что выражения (2.34) и (2.35) удовлетворяют этим соотношениям строго. Их расходимость при $\alpha \rightarrow 0$ обусловлена тем, что (в стационарном режиме, при отсутствии притока плазмы извне) вместе с исчезновением ионизации стремится к нулю поток заряженных частиц j , а потоки нейтральных атомов B_1j , B_2j при наличии перезарядки могут оставаться конечными, с соотношением $B_1j = 2B_2j$.

Итак, при выбранном θ приобретают вполне определенное значение величины B_1 , B_2 , α_1 , γ , k , т. е. все величины, входящие в функциональную зависимость ν_1 , ν_2 от y , за исключением потока j , который (пока что) остается свободным параметром задачи.

§ 3. Приведение системы уравнений

Интегрируя (2.5), (2.14) по dx от 0 до x , получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{4,15 \cdot 10^{-10}}{H_0^2} \frac{1}{T} \left\{ n^2 \frac{d\sqrt{T}}{dx} + 2\sqrt{T} n \frac{dn}{dx} \right\} = \\ = - (v\sigma_n) \int_0^x \{ \nu_1 + \nu_2 \} n dx + j; \end{aligned} \quad (3.1)$$

* См. сноску * к стр. 140.

$$\begin{aligned} & \frac{7}{7,2} \cdot \frac{4,15 \cdot 10^{-8}}{H_0^2} \cdot \left\{ 2n^2 \frac{d\sqrt{T}}{dx} + 0,072 \sqrt{T} n \frac{dn}{dx} \right\} = \\ & = \int_0^x [I(v\sigma_n) + I_B(v\sigma_B) + 2Tv_2\sigma_n] v_1 n dx + \\ & + \int_0^x \left[I(v\sigma_n) + I_B(v\sigma_B) - \frac{3}{2} T(v\sigma_n) \right] v_2 n dx + \pi, \end{aligned} \quad (3.2)$$

для совместной разрешимости которых между потоками π и j должно соблюдаться соотношение (1.3)

$$\pi = \frac{7}{2} T_0 j. \quad (3.3)$$

Условившись относить величины $(v\sigma_n)$, $(v\sigma_B)$, v_2 , зависящие от x через $T(x)$, к некоторому оптимально подобранному постоянному значению температуры θT_0 , мы, в той же степени приближения, заменяем стоящие под интегралами в (3.2) множители T на θT_0 .

Вводя далее новые неизвестные функции ξ и τ , согласно

$$n = \omega \xi^{1/3}; \quad (3.4)$$

$$T = T_0 \tau^2, \quad (3.5)$$

где

$$\omega = \left\{ \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{H_0^2 j \sqrt{T_0} (1-\alpha)}{4,15 \cdot 10^{-10} \sigma_n} \right\}^{1/3}, \quad (3.6)$$

переходя к новой независимой переменной y (2.18) и выполняя интегрирование известных функций, оказывающихся при этом в правых частях (3.1), (3.2), получаем систему из двух дифференциальных уравнений

$$\tau \frac{d\xi}{dy} + \frac{3}{2} \xi \frac{d\tau}{dy} = \tau^2 F(y); \quad (3.7)$$

$$\tau \frac{d\xi}{dy} + \frac{250}{3} \xi \frac{d\tau}{dy} = G(y). \quad (3.8)$$

Интегрирование этой системы с учетом дифференциального соотношения

$$\frac{dx}{\omega y} = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2} \sigma_n \omega} (\xi(y))^{-1/3} \quad (3.9)$$

приводит, через (3.4), (3.5), (2.32), (2.21), к искомой зависимости величин n , T , v_1 , v_2 от пространственной координаты x . Здесь:

$$F(y) = 1 - \int_0^y \{\beta_1 E(\alpha_1 y') + \beta_2 E(\alpha_2 y') + \beta_3 e^{-\alpha_3 y'}\} dy' = \\ = \frac{\beta_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 y} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 y} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} e^{-\alpha_3 y} - \beta_1 y E(\alpha_1 y) - \beta_2 y E(\alpha_2 y); \quad (3.10)$$

$$G(y) = 1 + \int_0^y \{\delta_1 E(\alpha_1 y') + \delta_2 E(\alpha_2 y') + \delta_3 e^{-\alpha_3 y'}\} dy' = \\ = 1 + \frac{\delta_1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 y}) + \frac{\delta_2}{\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_2 y}) + \frac{\delta_3}{\alpha_3} (1 - e^{-\alpha_3 y}) + \\ + \delta_1 y E(\alpha_1 y) + \delta_2 y E(\alpha_2 y), \quad (3.11)$$

где α_1 см. (2.33), $\alpha_2 = \gamma$ см. (2.33), $\alpha_3 = k$ см. (2.24); далее

$$\beta_1 = \frac{v_2}{v_1} B_1 \alpha, \quad \beta_2 = B_2 \alpha, \quad \beta_3 = C \beta_2, \quad (3.12)$$

и, наконец,

$$\delta_1 = \frac{2}{7} \frac{v_2}{v_1} B_1 \{ \alpha i + \alpha_B i_B + (1 - \alpha) \sqrt{2} \theta \}; \\ \delta_2 = \frac{2}{7} B_2 \left\{ \alpha \left(i - \frac{3}{2} \theta \right) + \alpha_B i_B \right\}, \quad \delta_3 = C \delta_2; \quad (3.13)$$

$$\left[i = \frac{I}{T_0}, \quad i_B = \frac{I_B}{T_0}, \quad \alpha_B = \frac{(v \sigma_B)}{(v \sigma_{II} + \sqrt{2} v_2 \sigma_{II})} \right].$$

Разрешая систему (3.6), (3.8) относительно производных, получим

$$\tau \frac{d\xi}{dy} = (1 + \lambda) \tau^2 F(y) - \lambda G(y); \quad (3.14)$$

$$\xi \frac{d\tau}{dy} = \frac{2}{3} \lambda [G(y) - \tau^2 F(y)], \quad (3.15)$$

где $\lambda = \frac{9}{491}$.

Граничные условия для функций $\xi(y)$, $\tau(y)$, в силу (3.4), (3.5) и (2.14а), следующие:

$$\xi|_{y=0} = 0, \quad \tau|_{y=0} = 1; \quad (3.15а)$$

так что исходная точка численного интегрирования системы (3.14), (3.15) является особой. Выход из нее дается разложением

$$\xi(y) = y + 0(y^2 \ln y); \quad (3.15б)$$

$$\tau(y) = 1 + y(I_0 + I_1 \ln y) + 0(y^2 \ln^2 y), \quad (3.15в)$$

где

$$I_0 = \frac{6}{503} \left\{ (\beta_1 + \delta_1) \left[\frac{994}{503} - C_0 - \ln \alpha_1 \right] + \right. \\ \left. + (\beta_2 + \delta_2) \left[\frac{994}{503} - C_0 - \ln \alpha_2 \right] + (\beta_3 + \delta_3) \right\} \quad (3.15г)$$

$$I_1 = -\frac{6}{503} (\beta_1 + \delta_1 + \beta_2 + \delta_2)$$

[C_0 — константа Эйлера].

Как отмечалось в § 1, при отсутствии потока заряженных частиц $j(x)$ из (2.2) следует существование интеграла $nT^{1/4} = \text{const}$, или, в переменных ξ , τ ,

$$\xi\tau^{3/2} = \text{const}. \quad (3.15д)$$

Поэтому, в силу резкого убывания величин v_1, v_2 , являющихся единственными источниками заряженных частиц, уже на сравнительно небольших расстояниях от стенки, вместе с исчезновением потока $j(x)$, между функциями ξ , τ должно установиться соотношение (3.15д), что означает прекращение влияния стенки и, тем самым, дает точку для окончания численного интегрирования системы уравнений (3.14), (3.15).

Заметим, что величина

$$\pi_0 = \frac{7}{2} T_0 j \Delta, \quad (3.16)$$

где

$$\Delta = 1 + \frac{\delta_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2}{\alpha_2} + \frac{\delta_3}{\alpha_3}, \quad (3.17)$$

вследствие (3.2), (3.3), (3.11) и (2.7) дает значение теплового потока, текущего в среду из бесконечности. В наших условиях мы вправе считать, что вся эта энергия в конце концов передается стенке (за исключением, быть может, энергии возбуждения атомов, которая в форме жестких фотонов способна проникать сквозь стенку). Поэтому для стенки, поглощающей излучение, величина (3.16) совпадает с тепло-

отводом от стенки Π , который должен быть обеспечен для поддержания стационарного режима. В случае же, когда для фотонов стенка абсолютно прозрачна, для необходимого теплоотвода будем иметь

$$\Pi = \frac{7}{2} T_0 / \Delta', \quad (3.18)$$

где [сравни (3.13)]

$$\Delta' = 1 + \frac{\delta'_1}{a_1} + \frac{\delta'_2}{a_2} + \frac{\delta'_3}{a_3}; \quad (3.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta'_1 &= \frac{2}{7} \frac{v_2}{v_1} B_1 \{ \alpha i + (1 - \alpha) \sqrt{2} \theta \}; \\ \delta'_2 &= \frac{2}{7} B_2 \alpha \left(i - \frac{3}{2} \theta \right), \quad \delta'_3 = C \delta'_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Если ввести еще

$$\Delta'' = \frac{2}{7} i \quad (3.21)$$

($\Delta''\pi$ дает приток энергии к стенке за счет рекомбинации), то получим, что величины $(\Delta' - 1 - \Delta'')\pi$ и $(\Delta - \Delta')\pi$ выражают потоки энергии, доставляемые к границе, соответственно, нейтральными атомами и фотонами возбуждения.

В результате, обозначая через $\chi_{\text{зар}}$, $\chi_{\text{нейтр}}$, $\chi_{\text{фот}}$ и $\chi_{\text{рек}}$ доли энергетического потока у стенки, обусловленные, соответственно, заряженными частицами, нейтральными атомами, фотонами и процессом рекомбинации (поток потенциальной энергии), видим, что текущий из бесконечности энергетический поток π_0 распределяется у границы по различным формам энергии следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{зар}} &= \frac{1}{\Delta}, \quad \chi_{\text{нейтр}} = \frac{\Delta' - 1 - \Delta''}{\Delta}, \quad \chi_{\text{фот}} = \frac{\Delta - \Delta'}{\Delta}, \\ \chi_{\text{рек}} &= \frac{\Delta''}{\Delta}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

§ 4. Численный расчет

Ниже приводятся ход и результаты численного расчета структуры пристеночного слоя для МТР, работающего на ДД-реакции. Предварительные исследования показали, что в условиях стационарного режима, при $H_0 \sim 25\,000$ гс, в центре МТР может быть достигнута температура $T_{\text{центр}} \sim$

$\sim 100\,000$ эв [1, 2]. При этом во всем объеме плазмы сохраняется значение интеграла

$$\frac{H^2(x)}{8\pi} + 2n(x)T(x) = \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad (4.1)$$

выражающего постоянство полного давления в системе. Поскольку, вследствие экранирования магнитного поля. $H_{\text{центр}} \ll \ll H_0$, из (4.1) получаем

$$n_{\text{центр}} = \frac{H_0^2}{16\pi T_{\text{центр}}}, \quad (4.2)$$

т. е. (при $H_0 = 25\,000$ эс, $T_{\text{центр}} = 100$ кэв) $n_{\text{центр}} = 0,776 \times \times 10^{14} \frac{1}{\text{см}^3}$.

Таким образом, для константы асимптотического интеграла $nT^{1/4}$ имеем

$$nT^{1/4} = (nT^{1/4})_{\text{центр}} = 1,373 \cdot 10^{15} \text{ эв}^{1/4}/\text{см}^{-3}. \quad (4.3)$$

Как видно из хода рассуждений в § 2 и 3, расчет проводится, исходя из заданных значений T_0 , Π , и в ходе вычислений находим соответствующее им значение интеграла $nT^{1/4}$, т. е. подбираем значения T_0 и Π , удовлетворяющие целевому назначению работы, получение температурного скачка T_0 порядка 10 эв при технически осуществимом значении тепловода Π .

Заметим, что значение Π входит только в масштаб n и x (3.4), (3.9), так что система (3.14), (3.15) от Π совершенно не зависит. Мы можем, поэтому, проинтегрировав систему уравнений (3.14), (3.15) для фиксированного T_0 , скажем для $T_0 = 10$ эв, и найдя асимптотически постоянное значение $(\xi\tau^{3/2})_{\text{const}}$, получить нужное нам для соблюдения (4.3) значение Π при помощи формулы

$$\Pi = 1,370 \cdot 10^{-9} \frac{\sigma_{\Pi} \Delta}{H_0^2 T_0^{1/4} (1-\alpha)} \frac{(nT^{1/4})_{\text{центр}}^3}{(\xi\tau^{3/2})_{\text{const}}} [\text{CGS}], \quad (4.4)$$

которая следует из уравнений (3.16), (3.4), (3.5), (3.6).

Фигурирующая в (3.4), (3.9) величина ω может быть при этом рассчитана непосредственно

$$\omega = \frac{1}{T_0^{1/4}} \cdot \frac{(nT^{1/4})_{\text{центр}}}{(\xi\tau^{3/2})_{\text{const}}^{1/3}}. \quad (4.5)$$

1) *Исходные данные и предварительные расчеты*

Итак, оставляя пока что Π свободным параметром, для расчета принимаем:

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 25\,000 \text{ гс} & I &= 13,5 \text{ эв} \\ T_1 &= 0,05 \text{ эв} & I_B &= 11,15 \text{ эв (переход (1} \rightarrow 2)) \\ T_0 &= 10 \text{ эв} & \sigma_{\Pi} &= 2,80 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2 [3] \end{aligned} \right\} (4.6)$$

Рассмотрим в первом приближении случай $\theta = 1$, тогда:

$$\left. \begin{aligned} (v\sigma_{\Pi}) &= 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{сек}^{-1} [4] & v_2 &= 3,49 \cdot 10^6 \text{ см}/\text{сек}^{-1} \\ (v\sigma_B) &= 17,17 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{сек}^{-1} [5] & \frac{v_2}{v_1} &= 14,14 \end{aligned} \right\} (4.7)$$

Далее по (2. 20), (3. 13), (2. 24), (2. 22), (2. 23), (2. 34), (2. 35):

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,266 & k &= 0,793 & B_1 &= 1,774 \\ \alpha_B &= 0,912 & C &= 1,435 & B_2 &= 0,587 \\ i &= 1,350 & \gamma &= 1,332 \\ i_B &= 1,115 \end{aligned} \quad (4.8)$$

По (2. 33), (3. 12), (3. 13):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 11,10 & \beta_1 &= 6,67 & \delta_1 &= 17,31 \\ \alpha_2 &= 1,332 & \beta_2 &= 0,1560 & \delta_2 &= 0,1639 \\ \alpha_3 &= 0,793 & \beta_3 &= 0,224 & \delta_3 &= 0,235 \end{aligned} \quad (4.9)$$

И, наконец, по (3. 7), (3. 19), (3. 21):

$$\Delta = 2,98 \quad \Delta' = 1,885 \quad \Delta'' = 0,386 \quad (4.10)$$

На основании рассуждений конца § 2 и конца § 3 из (4. 8) и (4. 11) можем сделать следующие выводы:

а) По сравнению с величиной материального потока j имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{Поток медленных атомов со стенки в среду} & \dots \dots \dots 1,774; \\ \text{Поток быстрых атомов из пристеночного слоя в среду} & 0,587; \\ \text{Полный приток быстрых атомов к стенке} & \dots \dots \dots 0,774; \\ \text{Приток к стенке быстрых атомов, попадающих на нее} & \\ \text{немедленно после порождения} & \dots \dots \dots 0,587; \\ \text{Приток к стенке быстрых атомов, попадающих в нее} & \\ \text{после «рассеяния» в среде} & \dots \dots \dots 0,187. \end{aligned} \right\} (4.11)$$

б) Процентный состав энергетического потока стенки:

| | | | |
|--|------|---|---------|
| Кинетическая энергия нейтральных атомов | 16,7 | } | (4. 12) |
| Кинетическая энергия электронов и ионов | 33,6 | | |
| Потенциальная энергия электронов и ионов (энергия рекомбинации) | 12,9 | | |
| Энергия излучения возбужденных атомов | 36,8 | | |
| | 100% | | |

2) Результаты расчета системы (3.14), (3.15)

Уравнения (3.14), (3.15) интегрировались численным методом. Результаты расчета представлены на рис. 1—3.

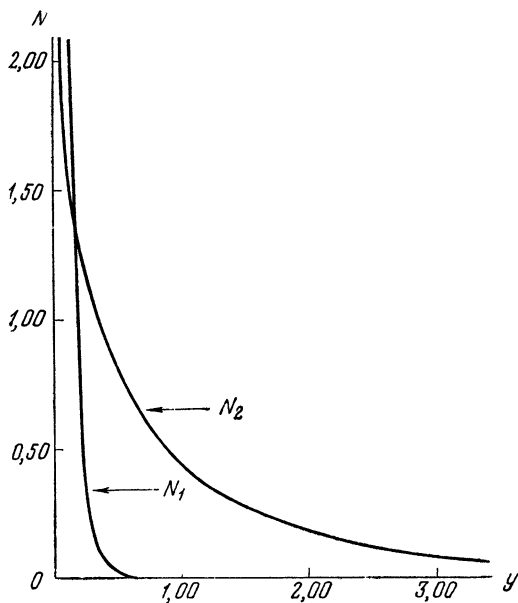


Рис. 1. Распределение плотности нейтральных атомов в пристеночном слое.

Плотность медленных атомов $v_1 = \frac{j}{v_2} N_1$; плотность
быстрых атомов $v_2 = \frac{j}{v_2} N_2$.

На рис. 1 изображено распределение медленных и быстрых нейтральных атомов вблизи стенки в зависимости от безразмерной пространственной переменной y . В качестве единицы плотности выбрано j/v_2 , значение которого будет указано

ниже. Следует отметить, что в действительности плотность ν_2 на границе конечна. Расходимость ν_2 при $y=0$ у нас обусловлена использованным нами искусственным приемом, согласно которому источники быстрых атомов, распределенные по пространству вместе с плотностью ν_1 , мы математически сосредоточили строго на границе. Как видно из рис. 1, при $y < 0,2$ преобладают медленные нейтральные атомы, плотность которых затем быстро спадает, практически обращаясь в нуль

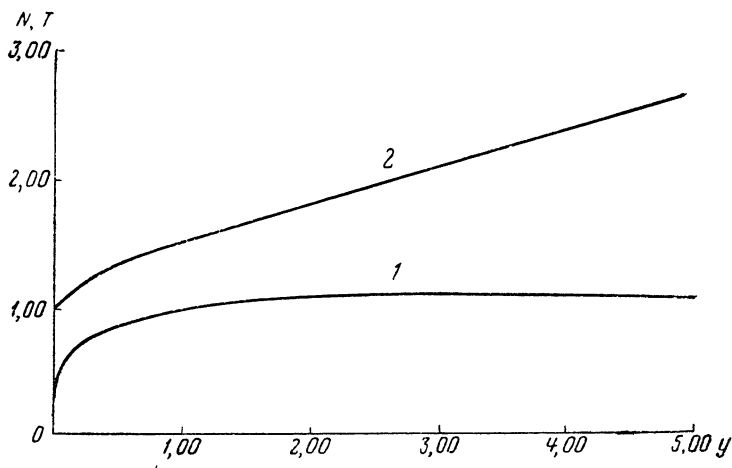


Рис. 2. Распределение плотности и температуры плазмы в пристеночном слое.

1 — распределение плотности плазмы в единицах $0,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$;
2 — распределение температуры в единицах $T_0 = 10 \text{ эв}$; $\Pi = 5 \text{ вт/см}^2$.

уже при $y=0,6$. При $y > 0,2$ преобладают быстрые атомы, плотность которых убывает значительно медленнее.

На рис. 2 изображено распределение температуры плазмы T (кривая 2) и плотности ее заряженной компоненты n (кривая 1) в зависимости от безразмерной переменной y . Кривая температуры имеет вблизи стенки логарифмическую особенность y производной; начиная с $y \sim 1$ она возрастает почти линейно. Плотность n , равная нулю на границе, сначала резко, как $\sqrt[3]{y}$, возрастает, затем продолжает возрастать очень медленно и, минуя при $y \sim 3$ слабо выраженный максимум, медленно убывает в соответствии с $nT^{1/4} = \text{const}$ и указанным выше «почти линейным» ростом температуры T . Наконец, на рис. 3 дана зависимость безразмерной пространственной переменной y от расстояния до стенки x , выраженного в санти-

метрах. Безразмерная переменная y , грубо говоря, показывает число средних свободных пробегов быстрых атомов, укладываемых на расстоянии от $x=0$ до x [точный смысл y см. (2.18)].

Численный расчет системы (3.14) (3.15) дал для асимптотического значения $(\xi\tau^{3/2})_{\text{const}}$ величину

$$(\xi\tau^{3/2})_{\text{const}} = 0,690. \quad (4.13)$$

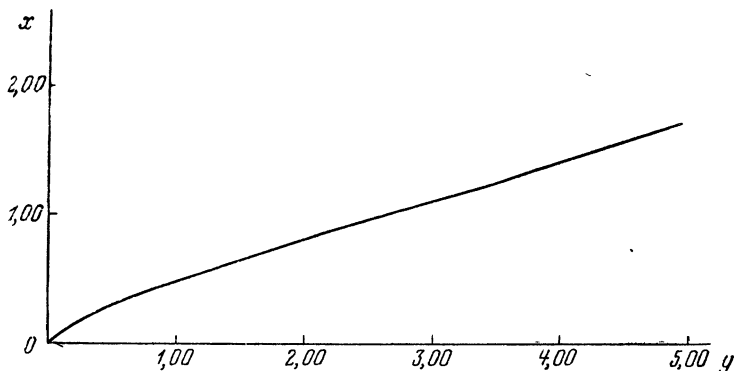


Рис. 3. По оси x отложено расстояние от стенки в см; по оси y — расстояние от стенки в полных свободных пробегах быстрых нейтральных атомов; $\pi = 5 \text{ вт/см}^2$.

Отсюда для теплоотода от фотонпоглощающей стенки (равного полному энергетическому потоку на стенку) по формулам (4.4), (4.3), (4.10) получаем

$$\Pi = 6,65 \text{ вт/см}^{-2} \quad (4.14)$$

и для теплоотода от фотонпрозрачной стенки

$$\Pi' = 4 \cdot 21 \text{ вт/см}^{-2}; \quad (4.15)$$

для материального потока ионов (равного потоку электронов) на стенку

$$j = 4,0 \cdot 10^{17} \text{ частиц/см}^2 \cdot \text{сек}; \quad (4.16)$$

для единицы, измеряющей плотность n на рис. 2 см. (4.5)

$$\omega = 0,87 \cdot 10^{15} \text{ частиц/см}^3 \quad (4.17)$$

и, наконец, для единицы измеряющей плотности $v_1 v_2$ на рис. 1

$$\frac{j}{v_2} = 1,14 \cdot 10^{11} \text{ частиц/см}^3. \quad (4.18)$$

Заметим, что масштаб плотности n на четыре порядка больше, чем масштаб для плотностей v_1, v_2 .

Итак, полученное в первом приближении ($\theta = 1$) решение, описывающее структуру пристеночного слоя в МТР, обладает следующими основными характеристиками:

| | | | |
|---|---------------------------------------|---|--------|
| Внешнее магнитное поле | 25 000 гс | } | (4.19) |
| Плотность ионов = плотности электронов в центре | $0,776 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ | | |
| Температура плазмы в центре | 100 000 эв | | |
| Пристеночный температурный скачок | 10 эв | | |
| Температура стенки | 307°C | | |
| Теплоотвод от стенки | $4,21-6,65 \text{ вт/см}^2$ | | |

По поведению функции $T(x)$ рис. 2 заключаем, что второй этап вычислений с более подходящим значением θ следует проводить примерно для $\theta = 1,5$. При этом значения (4. 6) остаются без изменения, но вместо (4. 7), (4. 8), (4. 9), (4. 10) будем иметь:

| | | |
|---|---|---------------------|
| $(v_{сн}) = 9,79 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{сек}^{-1}$ | $v_2 = 4,27 \cdot 10^6 \text{ см/сек}^{-1}$ | |
| $(v_{св}) = 20,73 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{сек}^{-1}$ | $\frac{v_2}{v_1} = 17,32$ | |
| $\alpha = 0,367$ | $k = 0,884$ | $B_1 = 1,522$ |
| $\alpha_{в} = 0,776$ | $C = 1,061$ | $B_2 = 0,418$ |
| $i = 1,350$ | $\gamma = 1,164$ | |
| $i_{в} = 1,115$ | | |
| $\alpha_1 = 14,11$ | $\beta_1 = 9,67$ | $\delta_1 = 20,4$ |
| $\alpha_2 = 1,164$ | $\beta_2 = 0,1537$ | $\delta_2 = 0,0640$ |
| $\alpha_3 = 0,884$ | $\beta_3 = 0,1628$ | $\delta_3 = 0,0680$ |
| $\Delta = 2,58$ | $\Delta' = 1,904$ | $\Delta'' = 0,386$ |

Откуда, вместо (4. 11), (4. 12),

- а) В единицах материального потока:
- Поток медленных атомов в среду 1,522
 - Поток быстрых атомов в среду 0,418
 - Полный приток быстрых атомов к стенке . . 0,522
 - Приток к стенке быстрых атомов после рождения 0,418
 - Приток к стенке быстрых атомов после «рас-
сеяния» 0,104
- б) Процентный состав энергетического потока у стенки:
- Кинетическая энергия нейтральных атомов . 20,1
 - Кинетическая энергия электронов и ионов . 38,9

| | |
|--|------|
| Потенциальная энергия электронов и ионов (энергия рекомбинации) | 15,0 |
| Энергия излучения возбужденных ионов | 26,0 |
| | 100% |

Численный расчет системы (3.14), (3.15) дает

$$(\xi\tau^{3/2}) = 0,488. \quad (4.13')$$

Отсюда, теплоотвод от фотонпоглощающей стенки

$$\Pi = 9,4 \text{ вт/см}^{-2}, \quad (4.14')$$

от фотонпрозрачной

$$\Pi' = 7.0 \text{ вт/см}^{-2}, \quad (4.15')$$

для материального потока j

$$j = 6,54 \cdot 10^{17} \text{ частиц/см}^2 \cdot \text{сек}, \quad (4.16')$$

для масштаба плотности n

$$\omega = 1,0 \cdot 10^{15} \text{ частиц/см}^3 \quad (4.17')$$

и, наконец, для масштаба плотностей ν_1, ν_2

$$\frac{j}{\nu_2} = 1,53 \cdot 10^{11} \text{ частиц/см}^3. \quad (4.18')$$

Отношение масштабов n и ν_1, ν_2 , по-прежнему, порядка 10^4 .

Таким образом, полученное во втором приближении ($\theta = 1,5$) решение, описывающее структуру промежуточного слоя в МТР, обладает характеристиками, отличающимися от (4.19) значением теплоотвода от стенки: $7,0-9,4 \text{ вт/см}^2$. Сравнивая результаты для $\theta = 1$ и $\theta = 1,5$, видим, что та или иная температурная спецификация подынтегральных членов в уравнениях (3.1), (3.2) никаких принципиальных изменений в конечный результат не вносит. Отсюда мы вправе заключить, что коррективный расчет — с учетом фактической зависимости $\nu_2, (\nu_{\text{и}}), (\nu_{\text{св}})$ от температуры привел бы нас качественно к тем же самым результатам.

§ 5. Выводы

Показано, что температурный скачок может иметь место в условиях большой модели МТР (пробег нейтральных частиц мал по сравнению с размерами системы) при значениях потока тепла на стенку и плотности частиц в центре системы, по порядку величины соответствующих технической модели (при тепловом потоке $4-10 \text{ вт/см}^2$ значение $nT^{1/4}$ по порядку величины то же самое, что у технической модели с $H_0 = 25\,000 \text{ гс}$).

В заключение благодарим А. Д. Сахарова за постановку задачи и деятельное участие в ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, см. настоящий том, стр. 3.
 2. А. Д. Сахаров, см. настоящий том, стр. 20.
 3. Л. А. Сена, Столкновения электронов и ионов с атомами газа, стр. 187.
 4. Мотт, Мессии, Теория атомных столкновений, стр. 205, рис. 36, Экспериментальная кривая, М., ИЛ, 1951.
 5. Bates, Phil. Trans., A. № 860, 118 (1956).
-

В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ И ОЦЕНКА ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ *

Найдено выражение для диэлектрической постоянной плазмы, находящейся в магнитном поле, при высоких температурах, когда существенны релятивистские эффекты. На основе мнимой части диэлектрической постоянной дается оценка лучистой теплопроводности. Лучистая теплопроводность оказывается меньше теплопроводности, осуществляемой частицами.

§ 1. Диэлектрическая постоянная высокотемпературной плазмы, находящейся в магнитном поле

1) Выражение для диэлектрической постоянной ионизованного газа, находящегося в магнитном поле, в случае низких температур приведено в книге В. Л. Гинзбурга [1].

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - c_0^2}; & \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2}; \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= -i \frac{4\pi n e^2}{m} \cdot \frac{\omega_0}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}; & \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь N , e , m — плотность, заряд и масса электронов; $\omega_0 = \frac{eH}{mc}$. Тензор диэлектрической постоянной — эрмитов. Он не может быть приведен к главным осям, что означает невоз-

* Работа выполнена в 1951 г.

возможность распространения по всем направлениям волн с линейной поляризацией.

2) Выражение (1.1) для диэлектрической постоянной оказывается несправедливым при температурах, приближающихся к mc^2 . В этом случае движение электронов является релятивистским. Из задачи об излучении электрона в магнитном поле [2] известно, что в релятивистском случае существенны волны, частота которых кратна основной ларморовской частоте $\omega_H = \frac{e\hbar}{E} = \omega_0 \frac{mc^2}{E}$. Естественно, что и в диэлектрической постоянной должны появиться резонансы, соответствующие кратным гармоникам.

Переход к высоким температурам приводит также к необходимости учета доплер-эффекта. Число столкновений частиц, взаимодействующих по закону Кулона, спадает с температурой, как $T^{3/2}$, и составляет для $kT = 100$ эв и $N = 10^{14}$ см⁻³ величину порядка 10^2 сек⁻¹. Доплеровская ширина растет, как $T^{1/2}$, и для частоты 10^{11} сек⁻¹ равна, в тех же условиях, 10^{10} сек⁻¹, т. е. она много больше столкновительной ширины.

3) Диэлектрическая постоянная вводится, как известно, следующими равенствами:

$$\frac{4\pi}{c} j_\alpha + \frac{1}{c} \dot{E}_\alpha = \frac{1}{c} \dot{D}_\alpha = \frac{1}{c} \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta} \dot{E}_\beta,$$

или для волны с частотой ω

$$j_\alpha = \frac{\omega^2}{4\pi c} \sum_\beta (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) A_\beta = \frac{\omega^2}{c} \sum_\beta \chi_{\alpha\beta} A_\beta, \quad (1.2)$$

где $\chi_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi}$ — тензор поляризуемости среды. Укажем, что в нашем случае $\chi_{\alpha\beta}$ не имеет обычного смысла, так как состояние системы характеризуется не только дипольным моментом, но и более высокими мультиполями.

Таким образом, вычисление диэлектрической постоянной сводится к нахождению связи тока с вектор-потенциалом.

4) По-видимому, наиболее просто получить эту связь с помощью квантовой механики. Применение квантовой механики для решения классической задачи является, конечно, просто вычислительным приемом, удобство которого обусловлено наличием хорошо разработанного аппарата теории возмущений. Взяв в качестве возмущения взаимодействие электрона с волной,

$$-\frac{e}{c} (\mathbf{vA}) = -\frac{e}{2c} (\mathbf{vA}^0) \{e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\}, \quad (1.3)$$

получим ψ — функцию первого приближ. и в виде

$$\begin{aligned} \psi_n = & \psi_n^0 + \frac{e}{2\hbar c} \sum_m \frac{\langle m | \mathbf{U}^k \mathbf{A}^0 | n \rangle}{\omega_{mn} - \omega} \psi_m^0 e^{-i\omega t} + \\ & + \frac{e}{2\hbar c} \sum_m \frac{\langle m | \mathbf{U} \mathbf{A}^0 | n \rangle}{\omega_{mn} + \omega} \psi_m^0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\langle m | \dots | n \rangle$, как обычно, означает матричный элемент, взятый между функциями состояний m и n ; $\omega_{m,n} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$ и $\mathbf{U}^k = \mathbf{v} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$.

Ток в состоянии ψ_n равен

$$\begin{aligned} j = & -\frac{e^2}{mc^2} \mathbf{A} + \frac{e^2}{2\hbar c} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \sum'_m \left\{ \frac{\langle n | \mathbf{U}^k \mathbf{A}^0 | m \rangle \langle m | \mathbf{U}^{-k} | n \rangle}{\omega_{mn} + \omega} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle n | \mathbf{U}^{-k} | m \rangle \langle m | \mathbf{U}^k \mathbf{A}^0 | n \rangle}{\omega_{mn} - \omega} \right\} + \\ & + \frac{e^2}{2\hbar c} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \sum'_m \left\{ \frac{\langle n | \mathbf{U}^{-k} \mathbf{A}^0 | m \rangle \langle m | \mathbf{U}^k | n \rangle}{\omega_{mn} - \omega} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle n | \mathbf{U}^k | m \rangle \langle m | \mathbf{U}^{-k} \mathbf{A}^0 | n \rangle}{\omega_{mn} + \omega} \right\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сравнивая с (1.2), находим выражение для тензора поляризуемости

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = & -\frac{e^2}{m\omega^2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{e^2}{\hbar\omega^2} \sum'_m \left\{ \frac{\langle n | \mathbf{U}_\beta^k | m \rangle \langle m | \mathbf{U}_\alpha^{-k} | n \rangle}{\omega_{mn} + \omega} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle n | \mathbf{U}_\alpha^{-k} | m \rangle \langle m | \mathbf{U}_\beta^k | n \rangle}{\omega_{mn} - \omega} \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Эта формула является обобщением обычного выражения для поляризуемости системы, полученного в предположении малости отношения размера системы к длине волны [3]. Нетрудно видеть, что при $k \rightarrow 0$ формула (1.6) переходит в обычную.

Для больших частот внешнего поля частицы должны вести себя, как свободные. В соответствие с этим имеем

$$\chi_{\alpha\beta} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{e^2}{m\omega^2} \delta_{\alpha\beta}.$$

5) Формула (1.6) является общим выражением для поляризуемости системы. Нам надо применить ее к случаю частицы, находящейся в однородном магнитном поле. Рассмотрим прежде всего разности энергий, стоящие в знаменателях (1.6). Квантовомеханическое выражение для энергии частицы в магнитном поле имеет вид [3]

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + 2mc^2 \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) + P_z^2 c^2} \quad (1.7)$$

(ось z выбрана вдоль магнитного поля). В результате перехода, соответствующего матричному элементу $\langle n | U^k | m \rangle$, происходит изменение энергии поперечного движения (изменение n) и энергии продольного движения (изменение P_z). Второе изменение однозначно определяется законом сохранения импульса

$$P_z^m + \hbar k_z = P_z^n.$$

Так как оба изменения малы по сравнению с энергией электрона, то

$$E_m - E_n = \hbar \omega_0 \frac{mc^2}{E} (m - n) - \frac{c^2 P_z}{E} \hbar k_z = \hbar \left\{ (m - n) \omega_0 \frac{mc^2}{E} - v_k k_z \right\},$$

или

$$\omega_{mn} = (m - n) \omega_H - v_z k_z, \quad (1.8)$$

где $\omega_H = \omega_0 \frac{mc^2}{E}$ — частота движения электрона по ларморовской окружности. Подставляя (1.8) в (1.6) и обозначая разность $(m - n)$ через l , получаем выражение для тензора поляризуемости в нашем случае. Удобно перейти в этом выражении к суммированию лишь по положительным l . Тогда

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = & - \frac{e^2}{m\omega^2} \delta_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{e^2}{\hbar\omega^2} \sum_{l>0} \left\{ \frac{\langle n | U_\beta^k | n+l \rangle \langle n+l | U_\alpha^{-k} | n \rangle - \langle n-l | U_\beta^k | n \rangle \langle n | U_\alpha^{-k} | n-l \rangle}{l\omega_H - k_z v_z + \omega} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle n | U_\alpha^{-k} | n+l \rangle \langle n+l | U_\beta^k | n \rangle - \langle n-l | U_\alpha^{-k} | n \rangle \langle n | U_\beta^k | n-l \rangle}{l\omega_H + k_z v_z - \omega} \right\}. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Числители в формуле (1.9) представляют собой разности произведений матричных элементов, в которых индексы соответ-

ствующих функций отличаются на l . Используя малость l по сравнению с n , нетрудно получить

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{e^2}{m\omega^2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{e^2}{\omega^2} \sum_{l>0} \left\{ \frac{l\omega_H - k_z v_z}{l\omega_H - k_z v_z + \omega} \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_\beta^k | n+l \rangle \langle n+l | U_\alpha^{-k} | n \rangle] + \right. \\ & \left. + \frac{l\omega_H + k_z v_z}{l\omega_H + k_z v_z - \omega} \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_\alpha^{-k} | n+l \rangle \langle n+l | U_\beta^k | n \rangle] \right\}. \quad (1.10) \end{aligned}$$

6) Матричные элементы в (1.10) могут быть вычислены классически. Согласно принципу соответствия, матричный элемент равен компоненте Фурье классического выражения, соответствующего данному оператору для частоты перехода. Таким образом,

$$\langle n | U_\alpha^k | n+l \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_\alpha(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{i(l\omega_H - v_z k_z)t} dt. \quad (1.11)$$

Вычисление приводит к следующему результату (при выборе оси z по магнитному полю и оси x так, чтобы вектор \mathbf{k} лежал в плоскости xz):

$$\begin{aligned} \langle n | U_x^k | n+l \rangle &= -\frac{l\omega_H}{k_\perp} J_l \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H} \right); \\ \langle n | U_y^k | n+l \rangle &= -iv_\perp J_l' \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H} \right); \\ \langle n | U_z^k | n+l \rangle &= v_z J_l \left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_H} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где J_l — функция Бесселя порядка l ; $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

7) Выражение (1.10) необходимо просуммировать по всем частицам в единице объема, т. е. усреднить по максвелловскому распределению и по всем начальным фазам движения частиц. Последняя операция сводится к усреднению по всем направлениям вектора \mathbf{k} в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, и будет проделана позже. В дальнейшем будем рассматривать наиболее интересующий нас случай волн, распространяющихся перпендикулярно к магнитному полю. Тогда

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{Ne^2}{\omega^2} \sum_{l>0} \left\{ \frac{l\omega_H}{l\omega_H + \omega} \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_\beta^k | n+l \rangle \langle n+l | U_\alpha^k | n \rangle] + \right. \\ & \left. + \frac{l\omega_H}{l\omega_H - \omega} \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_\alpha^{-k} | n+l \rangle \langle n+l | U_\beta^k | n \rangle] \right\} A e^{-\frac{E}{kT}} d\tau_p, \quad (1.13) \end{aligned}$$

где A — нормировочный коэффициент максвелловского распределения [4]

$$A = \frac{1}{4\pi (mc)^3} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 K_1 \left(\frac{mc^2}{kT}\right) + \frac{kT}{mc^2} K_0 \left(\frac{mc^2}{kT}\right)}; \quad (1.14)$$

K_0 и K_1 — функции Макдональда.

Второй из интегралов формулы (1.13) имеет полюс на действительной оси. Способ обхода этого полюса может быть найден из следующего рассуждения. Учет соударений привел бы к появлению в знаменателе (1.13) члена типа $i\nu$ (ν — столкновительная ширина). Знак этого члена легко установить исходя из известной теоремы, согласно которой, диэлектрическая постоянная не может иметь полюсов в верхней полуплоскости ω . Устремляя ν к нулю, получаем

$$\frac{1}{l\omega_H - \omega - i\nu} \rightarrow P \frac{1}{l\omega_H - \omega} + i\pi\delta(l\omega_H - \omega), \quad (1.15)$$

где символ P означает, что интеграл от соответствующего выражения берется в смысле главного значения. В соответствии с этим второй из интегралов (1.13) разбивается на две части: интеграл по действительной оси в смысле главного значения, дающий эрмитовскую часть $\chi(Re(x_{\alpha\beta}))$, и интеграл от δ -функции, дающий антиэрмитовскую часть $\chi(Im(x_{\alpha\beta}))$:

$$Re(x_{\alpha\beta}) = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{Ne^2}{\omega^2} \sum_{l>0} \left\{ \frac{l\omega_H}{l\omega_H + \omega} \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_{\beta}^k | n+l \rangle \langle n+l | U_{\alpha}^{-k} | n \rangle] + \right. \\ \left. + P \frac{l\omega_H}{l\omega_H - \omega} \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_{\alpha}^{-k} | n+l \rangle \langle n+l | U_{\beta}^k | n \rangle] \right\} A e^{-\frac{E}{kT}} d\tau_p; \quad (1.16)$$

$$Im(x_{\alpha\beta}) = \frac{\pi Ne^2}{\omega^2} \sum_{l>} \int l\omega_H \delta(l\omega_H - \omega) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial E} [\langle n | U_{\alpha}^{-k} | n+l \rangle \langle n+l | U_{\beta}^k | n \rangle] A e^{-\frac{E}{kT}} d\tau_p. \quad (1.17)$$

В результате усреднения обращаются в нуль смешанные компоненты тензора χ_{xx} , χ_{zz} , χ_{yz} , χ_{zy} . Это означает, что перпендикулярно к магнитному полю может распространяться волна, линейно поляризованная по оси z («обыкновенная» волна). Линейно поляризованные перпендикулярно к магнит-

ному полю волны распространяться не могут: у этих волн присутствует компонента электрического поля вдоль вектора распространения («необыкновенная» волна).

9) Грубая оценка эрмитовской части тензора поляризуемости показывает, что при плотности $N = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и магнитном поле $H = 10^4 \text{ гс}$ для частот порядка 10^{12} и больше $Re(\kappa_{\alpha\beta})$ мало. Поэтому при вычислении интересующей нас мнимой части можно положить $k = \frac{\omega}{c}$.

Интегрирование в (1.17) удобно проводить в сферических координатах, вводя в качестве переменных E , ϑ и φ (ϑ , φ — сферические углы импульса p). Интегрирование по E и φ выполняется элементарно.

Усредняя также по всем начальным фазам частиц, получаем

$$\begin{aligned}
 Im(\kappa_{xx}) = Im(\kappa_{yy}) &= 2\pi^2 (mc)^3 A \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_{l>0} l \left(l \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 e^{-l \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\theta}} \frac{d}{dz} \times \\
 &\times \left\{ \frac{l^2}{z^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \int_0^\pi \left[J_l^2(z \sin \vartheta) + \frac{z^2 \sin^2 \vartheta}{l^2} J_l'^2 \right] \sin \vartheta d\vartheta \right\}; \\
 Im(\kappa_{xy}) &= i 2\pi^2 (mc)^3 A \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_{l>0} l \left(l \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 e^{-l \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\theta}} \frac{d}{dz} \times \\
 &\times \left\{ \frac{l^2}{z^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \cdot \int_0^\pi \frac{z \sin \vartheta}{l} \cdot J_l(z \sin \vartheta) J_l'(z \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right\}; \quad (1.18) \\
 Im(\kappa_{zz}) &= 2\pi^2 (mc)^3 A \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_{l>0} l \left(l \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 e^{-l \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\theta}} \frac{d}{dz} \times \\
 &\times \left\{ \frac{l^2}{z^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \cdot \int_0^\pi \frac{z^2 \cos^2 \vartheta}{l^2} \cdot J_l^2(z \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\theta = \frac{kT}{mc^2}$, а z после дифференцирования нужно положить равным

$$z = l \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{l\omega_0} \right)^2}.$$

Интегралы по углу ϑ в (1.18) могут быть выражены через интегралы от функций Бесселя

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(x_{xy}) &= i2\pi^2 (mc)^3 A \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_{l>0} l \left(l \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 e^{-l \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\theta}} \frac{d}{dz} \times \\
 &\times \left\{ \frac{l^2}{z^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \frac{z}{2l} \frac{d}{dz} \int_0^{2z} J_{2l}(x) dx \right\}; \\
 \operatorname{Im}(x_{zz}) &= 2\pi^2 (mc)^3 A \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_{l<0} l \left(l \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 e^{-l \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\theta}} \frac{d}{dz} \times \\
 &\times \left\{ \frac{l^2}{z^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \left[\frac{z}{l^2} \int_0^{2z} J_{2l} dx - \frac{1}{8zl^2} \int_0^{2z} (4z^2 + x^2) J_{2l} dx \right] \right\}; \quad (1.18') \\
 \operatorname{Im}(x_{xx}) = \operatorname{Im}(x_{yy}) &= 2\pi^2 (mc)^3 A \frac{Ne^2}{m\omega^2} \sum_{l>0} l \left(l \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 e^{-l \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\theta}} \frac{d}{dz} \times \\
 &\times \left\{ \frac{l^2}{z^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \frac{1}{z} \int_0^{2z} \left[2J_{2l} - \frac{x}{l} J_{2l-1} + \frac{4z^2 + x^2}{8l^2} J_{2l-2} \right] dx \right\}.
 \end{aligned}$$

Формулы (1.18') более удобны для рассмотрения различных предельных случаев и оценок.

10) Мнимая часть тензора поляризуемости (1.18) представляет собой сумму, l -е слагаемое которой определяет линию поглощения волн мультипольным моментом порядка l ларморовского кружка электрона. Каждая линия начинается с нулевых частот и кончается при частоте, равной $l\omega_0$.

Значения мнимой части диэлектрической постоянной позволяют вычислить длину пробега волн и сделать оценку лучистой теплопроводности.

§ 2. Лучистая теплопроводность замагниченной высокотемпературной плазмы

Нас интересует коэффициент переноса лучистой энергии в направлении, перпендикулярном к магнитному полю.

Выберем систему координат так, как это указано на рисунке.

Для интенсивности J света определенного типа поляризации, распространяющегося под углом ϑ к направлению градиентов, может быть написано следующее уравнение:

$$\cos \vartheta \frac{dJ_i}{dy} = \eta_i - k_i J_i. \quad (2.1)$$

Здесь η_i — коэффициент излучения; k_i — коэффициент поглощения нашей среды; i — значок, указывающий тип поляризации.

Согласно закону Кирхгофа [5],

$$\eta_i = k_i |\varepsilon_i| J_0, \quad (2.2)$$

где J_0 — планковская функция распределения

$$J_0 = \frac{\hbar}{(2\pi)^3 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (2.3)$$

Существенные для теплопроводности частоты малы по сравнению с $\frac{kT}{\hbar}$, поэтому можно воспользоваться распределением Релея—Джинса

$$J_0 \cong \frac{kT}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.3')$$

С учетом (2.2) уравнение переноса лучистой энергии принимает вид

$$\cos \vartheta \frac{dJ_i}{dx} = k_i (|\varepsilon_i| J_0 - J_i). \quad (2.1')$$

Из уравнения (2.1') видно, что волны, для которых длина пробега (равная $\frac{1}{k_i}$) мала, будут распределены по Релею—Джинсу. Остальные волны слабо взаимодействуют со средой (пробег их велик), поэтому они не будут заметно участвовать в процессе теплопроводности, а интенсивность их будет определяться коэффициентом излучения. Для нас представляет интерес «запертое» излучение (длина пробега которого меньше размеров системы), поэтому естественно искать решение (2.1')

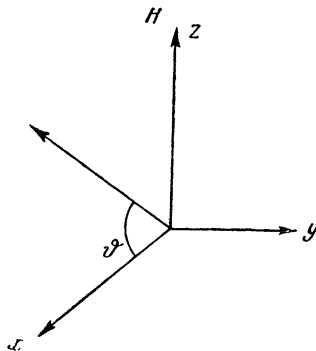


Рис. 1.

в виде разложения по степеням величины $\frac{1}{kL}$, где L — размеры системы. Это дает

$$J_i \cong J_0 |\varepsilon_i| - \cos \vartheta \frac{1}{k_i} \frac{d|\varepsilon_i| J_0}{dx} + \dots \quad (2.4)$$

Поток энергии, переносимый излучением с частотой ω , есть

$$q_\omega = \int J \cos \vartheta d\Omega = - \int \frac{1}{k_i} \frac{\partial |\varepsilon_i| J_0}{\partial x} \cos^2 \vartheta d\Omega, \quad (2.5)$$

а полный поток

$$q = - \sum_i \int \cos^2 \vartheta d\Omega \int_0^{\omega_m(\vartheta)} \frac{1}{k_i} \frac{\partial |\varepsilon_i| J_0}{\partial x} d\omega. \quad (2.6)$$

Величина $\omega_m(\vartheta)$ определяется тем условием, что для данного угла распространения пробег волны с частотой ω_m равен размерам системы.

§ 3. Оценка лучистой теплопроводности

Равновесная функция распределения J_0 быстро растет с частотой, поэтому в интеграле (2.6) существенны большие частоты, для которых диэлектрическая постоянная уже равна единице. Тогда

$$q = - \sum_i \int \cos^2 \vartheta d\Omega \int_0^{\omega_m} \frac{1}{k_i} \frac{\omega^2 d\omega}{(2\pi)^3 c^2} \nabla k T, \quad (3.1)$$

или

$$\chi_r = \frac{1}{(2\pi)^3 c^2} \sum_i \int \cos^2 \vartheta d\Omega \int_0^{\omega_m} \frac{\omega^2 d\omega}{k_i}. \quad (3.2)$$

При интегрировании по частотам мы должны дойти до волн, пробег которых равен размерам системы.

Поэтому

$$\chi_r \leq \frac{L}{(2\pi)^3 c^2} \sum_i \int \cos^2 \vartheta d\Omega \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega \sim \frac{Lc}{3} N_r, \quad (3.3)$$

где N_r — число волн с частотой меньше максимальной.

В противоположность коэффициенту теплопроводности частиц коэффициент лучистой теплопроводности растет с температурой. Поэтому целесообразно произвести оценку для больших температур.

Оценка выражений (1.18') показывает, что для $kT = 100$ кэв $N = 10^{14}$ см⁻³, $H = 10^4$ гс, $L = 10^2$ см пробег волны сравняется с размерами системы для частоты, равной приблизительно $5\omega_0$. Тогда

$$N_r \approx 40 \text{ см}^{-3},$$

а коэффициент лучистой теплопроводности равен

$$\kappa_r \sim 10^{13} \frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}}. \quad (3.4)$$

Для тех же условий коэффициент теплопроводности частиц равен

$$\kappa_m \approx 10^{16} \frac{1}{\text{см} \cdot \text{сек}}. \quad (3.5)$$

Таким образом,

$$\frac{\kappa_r}{\kappa_m} \sim 10^{-3}. \quad (3.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, М., ГТТИ, 1949.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., ГТТИ, 1948.
3. В. А. Фок, Начала квантовой механики. Л., Кубуч, 1932.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., ГТТИ, 1951.
5. M. Laue, Ann. phys., 32 (1910).

В. И. Коган, А. Б. Мигдал

ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРА ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАЗМЫ*

Выводятся приближенные выражения для спектрального распределения интенсивности тормозного излучения в зависимости от электронной температуры водородной плазмы (в «борновской» и квазиклассической областях температур). Обсуждается возможность использования этих выражений для определения электронной температуры исходя из экспериментальных данных.

1. Рассмотрим сильно ионизованную водородную или дейтериевую плазму в интервале электронных температур $kT_e \equiv T$ от нескольких десятков электрон-вольт до нескольких десятков килоэлектрон-вольт. В этой области температур тормозное излучение электронов происходит практически только на ионах**. Точная теория тормозного излучения развита А. Зоммерфельдом [1, 2]; полученные им общие выражения для спектрального распределения интенсивности имеют весьма сложный и трудно обозримый вид. Однако для целей ориентировки достаточно воспользоваться приближенными формулами для двух противоположных предельных случаев теории, а именно: 1) формулой борновского приближения, отвечающей большим энергиям электронов; 2) квазиклассической формулой, справедливой для малых энергий.

В этой связи необходимо отметить неправильность предлагаемого В. Гайтлером [3] рецепта обобщения формулы бор-

* Работа выполнена в 1951 г. и переработана при подготовке к печати.

** Столкновения электронов друг с другом приводят лишь к квадрупольному излучению, которое при рассматриваемых нерелятивистских энергиях мало по сравнению с дипольным излучением на ионах.

новского приближения на область малых энергий. Согласно Гайтлеру, для нахождения интенсивности тормозного излучения в этой области достаточно умножить «борновский» результат [см. ниже (2)] на величину

$$f(\xi_0, \xi) = \frac{2\pi\xi_0}{(e^{2\pi\xi_0} - 1)} \cdot \frac{2\pi\xi}{(1 - e^{-2\pi\xi})},$$

где

$$\xi_0 = \frac{Ze^2}{\hbar v_0}, \quad \xi = \frac{Ze^2}{\hbar v} \quad (1)$$

(v_0, v — начальная и конечная скорости электрона). Этот рецепт использован в ряде последующих работ других авторов. Между тем, он, вообще говоря, непригоден; это видно из того, что при $2\pi\xi_0 \gg 1$ формула Гайтлера не переходит в классическую, приведенную, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [4]. В действительности, как показывает рассмотрение точной формулы Зоммерфельда, первый сомножитель в (1) имеет смысл (несущественного) поправочного множителя лишь в «почти борновской» области $2\pi\xi_0 < 1$. Напротив, второй сомножитель в (1), вообще говоря, необходим — в частности, для получения правильного распределения интенсивности вблизи коротковолновой границы*. Однако при усреднении по максвелловскому распределению v_0 можно не учитывать и этот сомножитель (см. п. 2).

2. В борновском приближении ($2\pi\xi_0 < 2\pi\xi \ll 1$) распределение интенсивности тормозного излучения (для $Z=1$) имеет вид [3]

$$dw_\sigma = \frac{8}{3} \frac{r_0^2}{137} \frac{mc^2}{E_0} \ln \frac{(\sqrt{E_0} + \sqrt{E_0 - \varepsilon})^2}{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (2)$$

Здесь $r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \cdot 10^{-13}$ см — классический электронный радиус; E_0 — начальная энергия электрона; $\varepsilon = \hbar\omega$ — энергия излучаемого фотона.

Вычислим энергию dQ , излучаемую единицей объема плазмы в единицу времени в интервале $d\varepsilon$, для чего умножим (2) на $n^2 \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ (n — плотность заряженных частиц

* *Примечание при корректуре.* В новом издании книги Гайтлера множитель (1) заменен поправочным множителем Эльверта $\frac{\xi}{\xi_0} \frac{1 - e^{-2\pi\xi_0}}{1 - e^{-2\pi\xi}}$ [5]; однако этот уточненный рецепт обобщения борновской формулы справедлив только для $\xi_0 < 1$.

каждого сорта) и усредним результат по максвелловскому распределению значений E_0 (при этом следует учитывать, очевидно, лишь значения $E_0 \geq \varepsilon$). Интегрируя по частям и используя одно из интегральных представлений функции Макдональда K_0 , получаем

$$\left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_\varepsilon = \frac{16}{3} \frac{r_0^2 c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2m}{\pi T}} e^{-\frac{\varepsilon}{2T}} K_0\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right). \quad (3)$$

Следует отметить, что хотя эта формула получена из формулы (2), несправедливой вблизи коротковолновой границы спектра (ввиду «неборновости» электрона в конечном состоянии), она, тем не менее, применима при всех ε . Это очевидно для $\varepsilon \ll T$ и подтверждается несложным рассмотрением так же и для $\varepsilon \geq T$ (в последнем случае поправка на эффект коротковолновой границы интегрально мала, как $(2\pi\bar{\xi}_0)^3 \ll 1$).

В предельных случаях распределение (3) принимает вид

$$\varepsilon \geq 2T: \left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_\varepsilon \approx \frac{16}{3} \frac{r_0^2 c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon}{T}}; \quad (4)$$

$$\varepsilon \ll 2T: \left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_\varepsilon \approx \frac{16}{3} \frac{r_0^2 c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2m}{\pi T}} \ln\left(2,24 \frac{T}{\varepsilon}\right). \quad (5)$$

Полная интенсивность тормозного излучения единицы объема плазмы равна интегралу от (3) по всем ε . Результат имеет вид

$$Q_0 = \frac{32}{3} \frac{r_0^2 m c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2T}{\pi m}} = 1,69 \cdot 10^{-25} n^2 T^{1/2} \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{сек}}\right). \quad (6)$$

3. В квазиклассическом приближении ($2\pi\xi > 2\pi\xi_0 \gg 1$) имеем, согласно [4] и в обозначениях п. 2, при больших частотах $\left(\varepsilon \geq \frac{\hbar E_0^{3/2}}{m^{1/2} e^2}\right)^*$

$$dw_k = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{r_0^2}{137} \frac{mc^2}{E_0} d\varepsilon; \quad (7)$$

* В [4] получено спектральное распределение для произвольной частоты, но оно имеет сложный вид и не может быть в замкнутом виде проинтегрировано по максвелловскому распределению.

при малых частотах $\left(\varepsilon \ll \frac{\hbar E_0^{3/2}}{m^{1/2} e^2} \right)$

$$dw_k \approx \frac{8}{3} \frac{r_0^2}{137} \frac{mc^2}{E_0} \ln \left(3,18 \frac{\hbar E_0^{3/2}}{m^{1/2} e^2 \varepsilon} \right) d\varepsilon. \quad (8)$$

Для интенсивности излучения единицы объема плазмы, поступаая точно так же, как в п. 2, получаем:

для больших частот $\left(\varepsilon \gg \frac{\hbar T^{3/2}}{m^{1/2} e^2} \right)$

$$\left(\frac{dQ}{d\varepsilon} \right)_k \approx \frac{16\pi}{3} \frac{r_0^2 c^2}{\sqrt{3}} \frac{1}{137} n^2 \sqrt{\frac{2m}{\pi T}} e^{-\frac{\varepsilon}{T}}; \quad (9)$$

для малых частот $\left(\varepsilon \ll \frac{\hbar T^{3/2}}{m^{1/2} e^2} \right)$

$$\left(\frac{dQ}{d\varepsilon} \right)_k \approx \frac{16}{3} \frac{r_0^2 c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2m}{\pi T}} \ln \left(1,33 \frac{\hbar T^{3/2}}{m^{1/2} e^2 \varepsilon} \right). \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10) с (4) и (5), убеждаемся, что различие между «борновским» и квазиклассическим спектрами сравнительно существенно лишь при больших частотах. При малых частотах оба спектра различаются лишь множителем под знаком большого логарифма; этого и следовало ожидать в силу совпадения классической и квантовой формул для сечения рассеяния в кулоновском поле, с учетом несущественности квантовых эффектов при малых $\hbar\omega$. Отметим, однако, что само разграничение областей «больших» и «малых» частот в борновском и квазиклассическом случаях различно (соответствующие «граничные» частоты отличаются множителем $\sim \bar{\xi}_0$).

На рис. 1 представлены (в логарифмической шкале) полученные из (3) и (9)-(10) кривые зависимости величины

$$\frac{1}{A} \left(\frac{dQ}{d\varepsilon} \right) \text{ от } \frac{\varepsilon}{T}, \text{ где } A \equiv \frac{16}{3} \frac{r_0^2 c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}.$$

Для нахождения полной интенсивности излучения заметим, что в рассматриваемом квазиклассическом случае

$\frac{\hbar T^{3/2}}{m^{1/2} e^2} \ll T$ и, следовательно, преобладающую роль в спектре играют «большие» частоты. Таким образом, достаточно проинтегрировать одно лишь уравнение (9), что дает

$$Q_k = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{r_0^2 m c^2}{137} n^2 \sqrt{\frac{2T}{\pi m}} = 1,54 \cdot 10^{-25} n^2 T^{1/2} \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \right). \quad (11)$$

Сравнивая (11) с (6), видим, что эти выражения отличаются лишь множителем $\frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1,11$. В качестве ориентировочной границы борновской и квазиклассической областей можно принять $2\pi\bar{\xi}_0 = 1$, что после подстановки

$\left(\frac{1}{v_0} \right) = \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}$ дает «граничную» температуру $T_{\text{гр}} \approx 700$ эв.

4. Обсудим возможность определения электронной температуры по экспериментально наблюдаемой спектральной интенсивности тормозного излучения. Прежде всего, формулы (3), (9), (10) дают лишь одну связь между величинами T и n ; по-

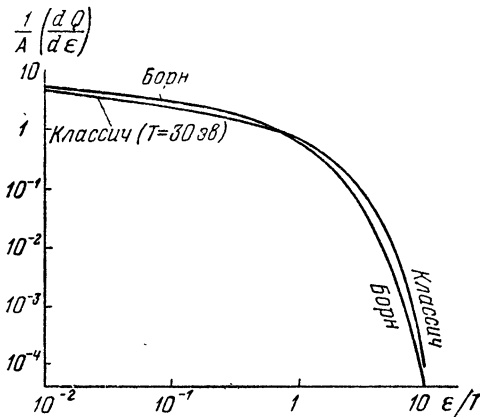


Рис. 1.

этому измерение интенсивности излучения следует либо комбинировать с каким-либо независимым методом измерения n , либо дополнять некоторой теоретической связью между n и T , характерной для исследуемого процесса в плазме. Далее из тех же формул и из рис. 1 видно, что само распределение интенсивности по частотам сильно зависит от T только в далекой ультрафиолетовой или в рентгеновской области (в интересующем нас интервале температур). Напротив, видимый участок тормозного континуума даже для наиболее «низких» температур попадает в область «малых» частот, в которой температура существенно влияет лишь на абсолютную интенсивность излучения, но не на его зависимость от частоты*.

* Поскольку вся оптическая область очень узка ($\epsilon \approx 1,5$ эв \div 3 эв), суммарная интенсивность излучения в этой области получается из (5) или (10) умножением на ширину области.

5. Остановимся вкратце на роли рекомбинационного излучения. Вклад его в полную интенсивность континуума значителен лишь при низких температурах. Вычисление показывает, что полные интенсивности рекомбинационного и тормозного излучений сравниваются при $T \approx 30$ эв. При более высоких температурах «тормозная» интенсивность быстро обгоняет «рекомбинационную» (отношение их вначале примерно пропорционально T , а затем — $T^{3/2}$). Нетрудно убедиться, далее, что даже для «низких» электронных температур (~ 10 эв) рекомбинация не дает заметного вклада в видимую часть континуума. Действительно, электрон захватывается с наибольшей вероятностью на K -орбиту атома водорода [6], чему соответствует ультрафиолетовое или рентгеновское излучение, тогда как к видимому излучению рекомбинация приводит лишь в результате маловероятного ступенчатого процесса с предварительным захватом электрона на высокую орбиту

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Ann. Phys., 11, 257 (1931).
2. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig, 1939.
3. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., ГТТИ, 1940.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., ГТТИ, 1948.
5. G. Elwert, Ann. Phys., 34, 178 (1939).
6. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, М., ОНТИ, 1935.

С. И. Брагинский

**ПОТОКИ ЧАСТИЦ И ТЕПЛА ПОПЕРЕК СИЛЬНОГО
МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ
ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ ***

В настоящей работе рассматривается полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов и одного сорта ионов, в сильном магнитном поле. Температуры ионов и электронов считаются, в общем случае, различными. Магнитное поле H будем считать весьма сильным, так что частота вращения частиц в нем $\omega = eH/mc$ велика по сравнению с частотой столкновений $1/\tau$, а расстояния L , на которых меняются все величины в плазме, велики по сравнению с ларморовскими радиусами частиц $\rho = v/\omega = mvc/eH$. Такое магнитное поле сильно ограничивает движение частиц в поперечном направлении. Ниже вычисляются для этого случая потоки частиц—электронов и ионов—и потоки тепла, переносимого электронами и ионами в направлении, перпендикулярном к магнитному полю.

Общие методы решения кинетического уравнения и определения материальных и тепловых потоков развиты в известной монографии Чепмена и Каулинга [1]; там же получены выражения для потока тепла однокомпонентного ионизованного газа и для электропроводности плазмы при наличии магнитного поля.

Электропроводность плазмы и поток энергии, переносимой электронами поперек слабого магнитного поля, вычислялись в работе Ландсхофа [2]. Поперечные потоки частиц и тепла в сильном магнитном поле при одинаковых температурах

* Работа выполнена в 1952 г.

ионов и электронов вычислены И. Е. Таммом [3]; общие уравнения переноса при этих условиях получены Е. С. Фрадкиным [4]. Уравнения переноса для случая различных температур ионов и электронов могут быть получены (см. [6]) методом, аналогичным методу Чепмена и Каулинга. Если, однако, нас интересуют только поперечные потоки в сильном магнитном поле, то вычисление можно провести более простым и прямым путем, аналогично тому, как это сделано для слабо ионизованного газа в работе Б. И. Давыдова [5]. Поперечные потоки в сильном магнитном поле при разных температурах электронов и ионов вычислялись независимо также Д. Н. Зубаревым и В. Н. Климовым; их результаты совпадают с нашими.

Функции распределения $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ электронов ($\alpha=1$) и ионов ($\alpha=2$) удовлетворяют (см., например, [1]) следующей системе кинетических уравнений:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \sum_\beta S_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = 0. \quad (1)$$

Здесь $S_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta)$ дает изменение функции распределения частиц α в результате их столкновений с частицами сорта β ; \mathbf{E} , \mathbf{H} — электрическое и магнитное поле; e_α , m_α — заряд и масса частицы сорта α . Интегралы столкновений берутся в соответствии с работой Л. Д. Ландау [7] в виде

$$S_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{2\pi\lambda e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_i} \int \left\{ \frac{f_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial f_\beta}{\partial v'_k} - \frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} \right\} U_{ik} dv, \quad (2)$$

где $U_{ik} = (u^2 \delta_{ik} - u_i u_k) / u^2$, $u_i = v_i - v'_i$; «кулоновский логарифм» λ здесь вдвое меньше, чем соответствующая величина в работе [7], и равен логарифму отношения максимального и минимального параметров удара. Выражение (2) не учитывает непосредственного влияния магнитного поля на акт соударения; оно справедливо в том случае, когда ларморовский радиус частицы велик по сравнению с дебаевской длиной. Ниже будем пользоваться выражениями для времен столкновений для электронов τ_1 и для ионов τ_2 , определяемыми, как

$$\tau_1 = \frac{3\sqrt{m_1} T_1^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} \lambda e_1^2 n_2}; \quad \tau_2 = \frac{3\sqrt{m_2} T_2^{3/2}}{4\sqrt{\pi} \lambda e_2^4 n_2}. \quad (3)$$

Температура частиц T выражается в энергетических единицах.

Время обмена энергией как для легких частиц-электронов между собой ($\sim \tau_1$), так и для тяжелых частиц-ионов ($\sim \tau_2$) много меньше, чем между электронами и ионами. Последнее по порядку величины равно $\tau_3 \sim (m_2/m_1) \tau_1 \sim (m_2/m_1)^{1/2} \tau_2$. Именно это обстоятельство и позволяет рассматривать задачу с различными температурами электронов и ионов.

Пусть все градиенты, а также электрическое поле в плазме, направлены в каждой точке перпендикулярно к магнитному полю и достаточно малы и пусть все величины мало меняются за время между столкновениями частиц. Функция распределения в пространстве скоростей будет при этом близка к сферически симметричной. Разложим ее по шаровым функциям и, так как члены этого разложения быстро убывают, удержим лишь первые два члена

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + f_1(v) \mathbf{v} + \dots \quad (4)$$

Плотность и распределение частиц по энергии полностью определяются нулевой гармоникой, потоки частиц и тепла — первой.

Усредняя кинетическое уравнение (1) по углам (в пространстве скоростей), а затем умножив его на \mathbf{v} и снова усредняя по углам, получим для функций f_0 , f_1 следующие уравнения:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v^2}{3} \operatorname{div} \mathbf{f}_1 + \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^3 \frac{e}{m} \mathbf{E} f_1 \right) + \sum \bar{S} = 0; \quad (5')$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{g} f_0 + [\omega \mathbf{f}_1] + \sum \frac{3}{v^2} \bar{v} S = 0. \quad (5'')$$

Эти уравнения аналогичны тем, которые были получены Б. И. Давыдовым в его работе [5].

Здесь опущен значок α , указывающий сорт частиц; уравнения для ионов и электронов выглядят аналогично. Черта означает усреднение по углам. Векторный оператор \mathbf{g} имеет компоненты

$$g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{e}{mv} E_i \frac{\partial}{\partial v_i}. \quad (6)$$

В уравнении (5'') отброшены члены, соответствующие второй сферической гармонике по сравнению с нулевой.

Нетрудно видеть, что поток частиц \mathbf{i} и поток энергии \mathbf{s} выражаются через $f(v)$

$$\mathbf{i} = \int f(\mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{3} \int f v^2 d\mathbf{v}; \quad (7)$$

$$\mathbf{s} = \int f(\mathbf{v}) \frac{m v^2}{2} \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{m}{6} \int f v^4 d\mathbf{v}. \quad (8)$$

Так как $\partial/\partial t \ll 1/\tau$ и $\omega\tau \gg 1$, то первый и последний члены в уравнении для f малы по сравнению с членом $[\omega f]$. Отбрасывая их, получим в первом приближении

$$f^{(1)} = \frac{1}{\omega^2} [\omega \mathbf{g}] f_0. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) дает для потока частиц в первом приближении

$$\mathbf{i}^{(1)} = \frac{1}{m\omega^2} [\omega \nabla n T] - \frac{en}{m\omega^2} [\omega \mathbf{E}]. \quad (10)$$

Вычисление этого потока не требует даже знания вида нулевой гармоники f_0 ; достаточно знать плотность n и среднюю энергию $(3/2)T$. Чтобы вычислить поток энергии, надо знать нулевую гармонику.

Так как рассматривается случай медленных временных изменений и малых градиентов, то ее можно считать максвелловской функцией, потому что в этом случае функция распределения вообще мало отличается от максвелловской.

Подставив выражение (9) в уравнение (5') и потребовав, чтобы главным членом в этом уравнении был S -член, можно получить условия, при которых функция распределения будет близка к максвелловской. При подстановке (9) в (5') в этом уравнении, кроме S -члена и членов с производными по времени, появляются также члены

$$\frac{c}{H^2} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \nabla f_0, \quad \frac{v^2}{3\omega} \left[\frac{\nabla H}{H}, \frac{\mathbf{H}}{H} \right] \mathbf{g} f_0, \quad \frac{v^2}{3\omega} \left[\left(\frac{\mathbf{H}}{H} \nabla \right) \frac{\mathbf{H}}{H}, \frac{\mathbf{H}}{H} \right] \mathbf{g} f_0.$$

Первый из них связан с электрическим дрейфом, второй — с магнитным, третий — с центробежным. Если L — расстояние, на котором значительно изменяются все величины, так что $\nabla \ln n$, $\nabla \ln T$, $\nabla \ln H$, eE/T и т. д. имеют порядок $1/L$ (все они перпендикулярны к магнитному полю), то в общем случае получается условие

$$\rho l \ll L^2,$$

где ρ — ларморовский радиус и l — свободный пробег частиц.

В ряде важных частных случаев, однако, достаточно более слабого условия $r \ll L$.

Кроме того, должно, конечно, выполняться условие $\partial/\partial t \ll 1/\tau$.

Ниже будем считать, что нулевая гармоника является максвелловской (со своей температурой у каждого сорта частиц). Подстановка в (9) максвелловской функции [будем обозначать ее $f^{(0)}$] и вычисление (8) дают

$$\mathbf{s}^{(1)} = \frac{5}{2} \frac{1}{m\omega^2} [\boldsymbol{\omega} \nabla n T^2] - \frac{5}{2} \frac{enT}{m\omega^2} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{E}]. \quad (11)$$

Вычислим поток энергии в системе координат, где средняя скорость частиц данного сорта равна нулю ($\mathbf{v}^0 = \mathbf{i}/n$)

$$\mathbf{q} = \int f \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0)^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}^0) d\mathbf{v}.$$

Пренебрегая переносом кинетической энергии и беря функцию распределения в виде (4), можно выразить \mathbf{q} через \mathbf{s}

$$\mathbf{q} = \mathbf{s} - \frac{5}{2} nT \mathbf{v}^0 = \mathbf{s} - \frac{5}{2} T \mathbf{i} = \frac{T}{3} \int \mathbf{f}(v) \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) v^2 d\mathbf{v}. \quad (12)$$

В первом приближении

$$\mathbf{q}^{(1)} = \frac{5}{2} \frac{nT}{m\omega^2} [\boldsymbol{\omega} \nabla T]. \quad (13)$$

Для того чтобы вычислить потоки в следующем приближении, с учетом столкновений, надо решить интегральное уравнение (5'), учитывая последний член, и найти более точное выражение для f . Можно, однако, обойтись без этого. Если положить

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$$

и, подставив в (5'), решить это уравнение формально относительно $f^{(2)}$, то получится

$$\mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{\omega^2} \left[\boldsymbol{\omega}, \sum_{v^2} \frac{3}{v^2} \overline{\mathbf{v}S} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, по порядку величины $f^{(2)} \sim f^{(1)}/\omega\tau$, поэтому в S -члены достаточно вместо \mathbf{f} подставить $\mathbf{f}^{(1)}$, т. е. уже известное выражение. Пользуясь затем (7) и (12), можно

найти $\mathbf{i}^{(2)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$. Членом $\partial \mathbf{f} / \partial t$ можно пренебречь, так как $\partial / \partial t \ll 1/\tau$.

Выражение для потока электронов во втором приближении имеет вид

$$\mathbf{i}_1^{(2)} = \frac{1}{\omega_1^2} \left[\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \int \mathbf{v} S_{11} d\mathbf{v} + \int \mathbf{v} S_{12} d\mathbf{v} \right]. \quad (15)$$

Усреднение по углам можно, очевидно, опустить. Первый из интегралов, стоящих в векторном произведении, тождественно равен нулю. Это свойство S -члена является следствием закона сохранения импульса при столкновениях. Физический смысл этого интеграла — изменение импульса электронов вследствие их столкновений с электронами (с точностью до множителя $-m_1$).

Таким образом, столкновения электронов друг с другом не сказываются на их диффузии поперек магнитного поля. То же самое относится, конечно, и к столкновениям ионов с ионами.

Второй интеграл, пренебрегая произведением малых членов, можно записать так:

$$\int \mathbf{v} S_{12} d\mathbf{v} = \int \mathbf{v} \{ S_{12}(f_1 \mathbf{v}, f_2^{(0)}) + S_{12}(f_1^{(0)}, f_2 \mathbf{v}) \} d\mathbf{v} = \frac{1}{\omega_1^2} [\boldsymbol{\omega}_1 A].$$

Так что

$$\mathbf{i}_1^{(2)} = -\frac{1}{\omega_1^2} \mathbf{A},$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \left\{ \mathbf{g}_1 \int v_i S_{12}(f_1^{(0)} v_i, f_2^{(0)}) d\mathbf{v} + \frac{e_1 m_1}{e_2 m_2} \mathbf{g}_2 \int v_i S_{12}(f_1^{(0)}, f_2^{(0)} v_i) d\mathbf{v} \right\}.$$

Здесь учтено, что оператор g_α , действующий на максвелловскую функцию частиц α , может быть представлен в виде

$$\mathbf{g}_\alpha = \nabla_\alpha - \frac{e_\alpha}{T_\alpha} \mathbf{E}$$

(∇_α действует только на величины, относящиеся к частицам α). В таком виде оператор \mathbf{g}_α можно вынести за знак интегрирования по скоростям. Оставшиеся интегралы представляют собой вычисленные в [6] матричные элементы (с индексами «00»). Их нетрудно вычислить и непосредственно.

Поток электронов выражается так:

$$\mathbf{i}^{(2)} = -\frac{4\sqrt{2\pi} \lambda e_1^2 e_2^2 n_2}{3T_1^{3/2} m_1^{3/2} \omega_1^2} \left\{ T_1^{3/2} \mathbf{g}_1 \left(\frac{n_1}{T_1^{1/2}} \right) - \frac{e_1 n_1}{e_2 n_2} \mathbf{g}_2 (n_2 T_2) \right\} \quad (16)$$

или окончательно (положено $n_1 = n_2 = n$, $e_1 = -e_2 = -e$)

$$\mathbf{i}^{(2)} = -\frac{1}{m_1 \omega_1^2 \tau_1} \left\{ (T_1 + T_2) \nabla n - \frac{1}{2} n \nabla T_1 + n \nabla T_2 \right\} \quad (17)$$

Члены, содержащие электрическое поле, выпадают из окончательного результата.

Поток ионов во втором приближении вычисляется аналогично. Фигурирующий в нем интеграл S_{21} легко вычислить, учитывая закон сохранения импульса при столкновениях

$$\int \mathbf{v} S_{21} d\mathbf{v} = -\frac{m_1}{m_2} \int \mathbf{v} S_{12} d\mathbf{v}.$$

Так как $(e_1/m_1) \omega_2 = (e_2/m_2) \omega_1$, то отсюда следует, что при $e_1 = -e_2$ поток ионов выражается той же формулой (17), что и поток электронов. В более общем случае

$$e_1 \mathbf{i}_1^{(2)} + e_2 \mathbf{i}_2^{(2)} = 0. \quad (17')$$

Пользуясь (10) и (17'), получим выражение для плотности электрического тока \mathbf{j} в виде

$$\mathbf{j} = \frac{c}{H^2} [\mathbf{H}, \nabla (nT_1 + nT_2)]. \quad (17'')$$

Поток тепла электронов во втором приближении дается выражением [см. (12)]

$$\mathbf{q}_1^{(2)} = \frac{T_1}{\omega_1^2} \left[\boldsymbol{\omega}_1, \int \left(\frac{m_1 v^2}{2T_1} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} S_{11} d\mathbf{v} + \int \left(\frac{m_1 v^2}{2T_1} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} S_{12} d\mathbf{v} \right]. \quad (18)$$

Вычисления аналогичны тем, которые производились при вычислении потока частиц, но теперь электрон-электронный член надо уже учитывать. Его удобно вычислять, представив оператор g_1 в виде

$$g^{(0)} = f^{(0)} \left\{ \left(\nabla \ln T - \frac{e\mathbf{E}}{T} \right) + \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T \right\}.$$

Члены, содержащие электрическое поле, из окончательного результата выпадают. Фигурирующие в вычислениях интегралы представляют собой матричные элементы с индексами «10», «11», вычисленные в [6]. Аналогично вычисляется поток тепла ионов. Главным членом в нем является ион-ионный

$$\frac{T_2}{\omega_2^2} \left[\boldsymbol{\omega}_2, \int \left(\frac{m_2 v^2}{2T_2} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} S_{22} d\mathbf{v} \right].$$

Член, содержащий перекрестные столкновения, оказывается меньше в $\sim (m_2/m_1)^{1/2}$ раз; ниже учтены оба члена.

Выражения для потоков тепла ионов и электронов получаются в виде (положено $n_1 = n_2 = n$)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(2)} &= -\frac{\left(\sqrt{2} + \frac{13}{4}\right)nT_1}{m_1\omega_1^2\tau_1} \nabla T_1 + \frac{3}{2} \frac{T_1}{m_1\omega_1^2\tau_1} \nabla(n(T_1 + T_2)); \\ \mathbf{q}_2^{(2)} &= -\left(\frac{2nT_2}{m_2\omega_2^2\tau_2} + \frac{15}{2} \frac{m_1nT_2}{m_2^2\omega_2^2\tau_1}\right) \nabla T_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения (10), (17) для потоков частиц, а также выражение для полного потока тепла $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ по (13), (19) совпадают, если в них положить $T_1 = T_2 = T$, с выражениями, полученными ранее И. Е. Таммом (см. [3]) и Е. С. Фрадкиным (см. [4]).

Относительно применимости уравнений (17), (19) при очень редких столкновениях следует заметить, что справедливость их предполагает отсутствие в системе «перемешивания» (этот термин предложен Г. И. Будкером).

Явление перемешивания заключается в следующем. В сильном магнитном поле частицы в основном двигаются вдоль магнитных силовых линий, испытывая одновременно некоторый «дрейф» поперек магнитного поля. Этот дрейф зависит, и притом различным образом, от продольной и поперечной составляющих скорости частицы. Очевидно, что если линии дрейфов частиц, проходящие через данную точку пространства, расходятся затем на расстояния, большие ларморовского радиуса частиц, причем за время этого дрейфа столкновения не успевают происходить, то перенос тепла значительно возрастает по сравнению с даваемыми формулами (19) — будет иметь место «перемешивание». Для применимости уравнений (17), (19) при очень редких столкновениях, таким образом, необходимо наличие в системе такой симметрии, чтобы линии дрейфов частиц проходили по областям с постоянными плотностью и температурой.

Приношу глубокую благодарность Б. И. Давыдову за руководство работой и Г. И. Будкеру за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chapman, T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge, University Press, 1939.
2. R. Landshoff, *Phys. Rev.*, **76**, 904 (1949).
3. И. Е. Тамм, см. настоящий том, стр. 3.
4. Е. С. Фрадкин, *ЖЭТФ*, **32**, 1176 (1957).
5. Б. И. Давыдов, *ЖЭТФ*, **7**, 1069 (1938).
6. С. И. Брагинский, *ЖЭТФ*, **33**, 459 (1957).
7. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ*, **7**, 203 (1937).

С. И. Брагинский, Г. И. Будкер

ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ РАЗГОРАНИЯ РАЗРЯДА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИОНИЗАЦИИ *

Настоящая статья представляет собой изложение предварительного отчета авторов по теоретическому исследованию начальной стадии разряда с большим током в водороде. Эта работа в дальнейшем не была завершена и в настоящем виде содержит лишь постановку задачи и разбор ряда отдельных вопросов, но не решение задачи в целом.

§ 1. Введение

Осуществление термоядерной реакции требует создания плазмы с высокой степенью ионизации. Нет оснований быть уверенным в том, что без изучения процесса разгорания разряда удастся достигнуть необходимой степени ионизации. Может оказаться, что далеко не достаточно вогнать в плазму большое количество энергии для того, чтобы ее полностью заионизовать. Кроме того, заранее неясно, каким образом вообще возможно вогнать в плазму большое количество энергии на необходимом этапе. Режим разгорания, приводящий к полной ионизации, может оказаться настолько замысловатым и сложным (для его осуществления может требоваться не только определенный подбор параметров, но и специальный характер их изменения во времени), что эмпирически его нельзя будет подобрать. В связи с этим принципиально важны исследование процесса разгорания разряда и создание теории этого процесса.

* Работа выполнена в 1952 г.

В настоящей работе рассматривается безэлектродный разряд в водороде в бесконечно длинной прямой трубе. Все характеризующие плазму величины считаются постоянными вдоль трубы. Следует отметить, что однородность внешних условий сама по себе еще не обеспечивает этого — разряд может быть неоднородным по длине даже при однородных внешних условиях.

Процесс развития разряда может быть разделен на следующие этапы: пробой, образование плазмы, замагничивание, полная ионизация.

1) Пробоем здесь называются явления, происходящие в газе до возникновения в нем заметного собственного электрического поля. Пробой безэлектродного разряда рассматривался Б. И. Давыдовым [1], а также А. М. Андриановым и С. М. Осовцом [2], и мы останавливаемся на нем лишь постольку, поскольку это необходимо для рассмотрения второго этапа.

2) Между пробоем и появлением сильного собственного магнитного поля лежит область образования и развития квазинейтральной плазмы. На этом этапе развитие разряда определяется соотношением между диффузией электронов и их движением в собственном электрическом поле плазмы. В настоящей работе написаны уравнения для этой стадии, найдены некоторые их решения и проведены некоторые исследования. Так как явления на этой стадии могут оказаться определяющими для характера всего последующего развития разряда, необходимо дальнейшее значительно более подробное теоретическое и эмпирическое исследование этих уравнений в следующих направлениях: нахождение новых решений, исследование зависимости решений от начальных условий, исследование устойчивости полученных решений и нахождение методов развития разряда на этой стадии, обеспечивающих нужное его направление.

3) С увеличением степени ионизации и проводимости плазмы по ней начинает течь большой ток. Появление собственного магнитного поля этого тока обуславливает ряд новых явлений.

а) Скин-эффект, отличающийся от обычного тем, что он может иметь место при практически постоянном электрическом поле за счет переменной проводимости (степени ионизации).

б) Замагничивание — ослабление проводимости и ионизации в магнитном поле. Как показано в работе, это явление наступает при таких полях, когда ω для электронов уже значительно больше единицы, а не порядка единицы, как это можно было бы ожидать на первый

взгляд. В зависимости от того, какое явление раньше станет определяющим, разряд будет развиваться или в центральной области (если замагничивание наступит раньше), или снаружи (если раньше наступит скин-эффект). В первом случае образуется узкий сильно ионизованный канал, окруженный нейтральной «шубой», которая затем будет сравнительно медленно ионизоваться. Во втором случае возможна полная ионизация газа во всем объеме, если образовавшееся кольцо сильно ионизованной плазмы будет в дальнейшем не слишком быстро стягиваться к центру.

в) Нагревание нейтрального газа до высокой температуры. Нейтральный газ может довольно долго находиться при температуре выше энергии ионизации, оставаясь неионизованным из-за отсутствия ионизирующих агентов. Это связано с тем, что сечение ионизации при столкновении атома с тяжелой частицей, например с другим атомом, очень мало при скоростях, малых по сравнению со скоростью электрона на орбите. При энергии 100 эв сечение ионизации $\sim 10^{-24}$, что при плотности газа 10^{16} дает время жизни нейтрального газа порядка 1 сек. Передача энергии от нейтрального газа к электронам, которые могли бы ионизовать, мала из-за большой разницы масс.

Как известно, температура электронного газа в слабом электрическом поле не может при неполной ионизации превосходить нескольких электрон-вольт. Это связано с тем, что при этих температурах начинается сильное охлаждение электронного газа вследствие ионизации и возбуждения нейтральных атомов. Таким образом, в принципе, возможно такое состояние неполностью ионизованной плазмы, когда температура нейтральных атомов выше температуры электронов.

4) Область полной ионизации вообще не рассматривается в настоящем отчете. Следует иметь в виду, что существует промежуточная область, непосредственно примыкающая к области полной ионизации (при степени ионизации $\sim 10^0\%$ и выше в зависимости от температуры электронов), в которой, с одной стороны, длина пробега заряженных частиц уже определяется их кулоновскими столкновениями между собой, а не с нейтральными частицами, а с другой стороны, все явления, связанные с балансом энергии, все еще определяются в основном нейтральными атомами. Эта область требует специального исследования.

Рассматривая процессы рассеяния электронов на атомах нейтрального газа (водорода) и ионизацию электронными ударами, мы пользовались результатами, приведенными в работе Варнерина и Броуна [3]. Согласно этим данным, сечение рассеяния медленных электронов в водороде обратно пропорцио-

нально их скорости, так что частота столкновений от скорости не зависит и может быть вычислена по формуле

$$\frac{1}{\tau} = 6 \cdot 10^9 p;$$

здесь τ — время между столкновениями в секундах; p — давление водорода в миллиметрах ртутного столба. Средняя энергия электронов $\frac{3}{2}T$ при наличии электрического поля зависит от величины отношения E/p , причем эта зависимость довольно слабая для не слишком сильных полей. Так, например, при $E/p = 10$ в/см рт. ст., $\frac{3}{2}T = 2$ эв, а при $E/p = 100$ $\frac{3}{2}T = 7,5$ эв.

Коэффициент ионизации электронными ударами, напротив, очень резко зависит от E/p .

Пусть ν — частота ионизаций (сек^{-1}); тогда величина $\nu\tau$ является функцией только от E/p . Эта функция может быть подсчитана по данным указанной выше работы, она приведена в виде графика (рис. 1).

Наличие резкой зависимости частоты ионизации от электрического поля в плазме приводит к тому, что, начиная с некоторых токов, электрическое поле в плазме слабо зависит от приложенного напряжения и остается почти постоянным, таким, чтобы величина E/p была порядка 20—30. Действительно,

$$L \frac{dI}{dt} = V - IR.$$

Так как изменение тока происходит главным образом за счет изменения проводимости, которая пропорциональна числу ионизованных частиц, то $dI/dt \approx \nu I$, так что $(L\nu + R)I = V$, или

$$\nu = \frac{V - RI}{LI}.$$

Если даже пренебречь активным сопротивлением по сравнению с индуктивным, то отсюда получается, что при больших

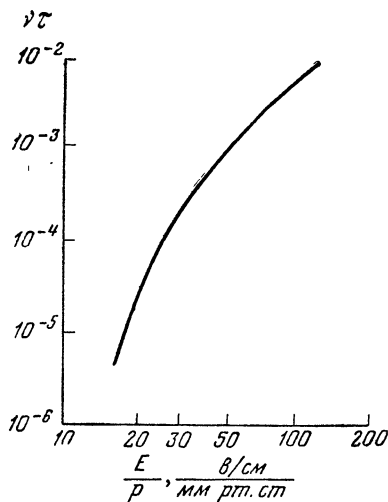


Рис. 1.

токах время нарастания ионизации должно быть весьма малым, соответствующим небольшим значениям E/p . Пусть, например, $V/L \sim 10^9$ а/сек, тогда уже при токе $I = 10^3$ а будет $\nu = 10^6$ сек⁻¹, что при $p = 1$ мм дает $\nu\tau = 1,7 \cdot 10^{-4}$. Этому значению $\nu\tau$ соответствует $E/p = 30$. С ростом тока величина ν , соответственно, падает, однако электрическое поле в плазме меняется слабо, так как кривая $\nu\tau = f(E/p)$ идет очень круто, и небольшого изменения E/p достаточно для того, чтобы сильно изменить величину $\nu\tau$. Таким образом, в этом режиме скорость нарастания ионизации, а следовательно, и электрическое поле в плазме и температура электронов определяются электротехническими параметрами цепи. При некоторых условиях (если V/L достаточно велико) такого режима может и не быть.

Важную роль в процессе развития разряда может играть запертое излучение. Как показывается в работе, запертой может оказаться только головная линия лаймановской серии. Перенос излучения в разряде не носит диффузионного характера. В работе написано для него кинетическое уравнение и проведена некоторая дискуссия. Требуется еще провести непосредственное исследование развития разряда с учетом излучения.

§ 2. Пробой и образование квазинейтральной плазмы

Ионизованный газ называется квазинейтральной плазмой, если разность плотностей ионов и электронов мала по сравнению с самими плотностями.

Как известно, потенциал электрического поля зарядов, образующихся в плазме, порядка температуры частиц. Поэтому плотность ионизованных частиц, при которой плазма становится квазинейтральной, можно оценить из соотношения

$$e\varphi \sim \pi(n_+ - n_-)e^2R^2 \sim T,$$

т. е.

$$\frac{n_+ - n_-}{n} \sim \frac{T}{\pi e^2 n R^2}.$$

Таким образом, условие квазинейтральности имеет вид

$$n \gg \frac{T}{\pi e^2 R^2}.$$

При $T \sim 5$ эв, $R \sim 3$ см получаем $n \gg 6 \cdot 10^5$ см⁻³.

Эта плотность много больше тех плотностей, которые имеются в естественном состоянии в газе до пробоя. С другой стороны, электрический ток при этих плотностях при разум-

ных значениях продольного электрического поля ничтожно мал, так что при расчете пробоя и образования плазмы можно пренебрегать магнитным полем тока и скин-эффектом.

Действительно,

$$I = \pi R^2 \sigma E = \pi R^2 \frac{ne^2 \tau}{m} E \sim \frac{\tau T}{m} E \sim 2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{E_{в/см}}{E_{мм \text{ пр.ст.}}} \right) a.$$

Поэтому можно считать продольное электрическое поле, а вместе с ним v и T постоянными по сечению.

Уравнения для количества образовавшихся электронов и электрического поля в плазме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= vn - \operatorname{div} \mathbf{j}; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e (n_+ - n_-). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Член vn дает размножение электронов в результате ионизации, \mathbf{j} — поток электронов вследствие диффузии и подвижности в электрическом поле.

$$\mathbf{j} = -D \nabla n - \mu \mathbf{E} n, \quad (2.2)$$

где коэффициент диффузии $D = (\bar{v}^2/3) \tau = T \tau/m$, а подвижность μ связана с D соотношением Эйнштейна

$$\mu = \frac{eD}{T} = \frac{\tau e}{m}.$$

Подвижность и диффузия ионов во много раз меньше электронных, а время образования плазмы столь мало, что ионы практически не успевают сдвинуться. Таким образом,

$$n_+ = \int_0^t vn(t') dt',$$

и уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= vn + \operatorname{div} (D \nabla n + \mu \mathbf{E} n); \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \left[\int_0^t vn(t') dt' - n(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дифференцируя второе уравнение по времени и пользуясь первым, получаем

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = 4\pi e (\nu n - \dot{n}) = -4\pi e \operatorname{div} (D \nabla n + \mu \mathbf{E} n).$$

Подставляя это выражение в (2.3) и переходя к цилиндрическим координатам, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \nu n - \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial r E}{\partial r}; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -4\pi e \left(D \frac{\partial n}{\partial r} + \mu E n \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В самом начале процесса, когда можно пренебречь электрическим полем, получаем известное уравнение для пробоя

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nu n + D \nabla^2 n, \quad (2.5)$$

решением которого при условии нуль плотности на некотором радиусе R является функция

$$n = e^{\nu t} \sum C_k e^{-\frac{\lambda_k^2 D}{R^2} t} J_0 \left(\lambda_k \frac{r}{R} \right), \quad (2.6)$$

где λ_k — k -й корень нулевой бesselовой функции; C_k — определяются из начальных условий, а R — радиус трубы.

Условием пробоя является

$$\nu > \nu_{\min} = \frac{\lambda_1^2 D}{R^2} = \frac{2,4^2 D}{R^2}. \quad (2.7)$$

Если ν не сильно отличается от ν_{\min} , то через небольшое время все слагаемые в сумме (2.6) будут малы по сравнению с первым, и еще до появления заметного электрического поля, независимо от начального распределения, n примет вид

$$n = C e^{\left(\nu - \frac{2,4^2 D}{R^2} \right) t} J_0 \left(\frac{2,4r}{R} \right). \quad (2.6a)$$

Однако при сильных электрических полях и больших размерах ($\nu \gg \nu_{\min}$) (практически легко достижимых) радиальное электрическое поле нарастет до заметной величины до того, как более высокие члены суммы (2.6) перестанут

играть роль, и тогда решение системы (2.4) даже при больших временах может зависеть от начальных условий.

Введем следующие единицы времени, длины, электрического поля и плотности:

$$t_0 = \frac{1}{v}; \quad r_0 = \sqrt{\frac{D}{v}} = \sqrt{\frac{T\tau}{mv}}; \quad (2.8)$$

$$E_0 = \frac{T}{er_0} = \sqrt{\frac{Tmv}{e^2\tau}}; \quad n_0 = \frac{T}{4\pi e^2 r_0^2} = \frac{mv}{4\pi e^2 \tau}.$$

В этих единицах уравнения (2.4) принимают вид

$$\dot{n} = n - \frac{dr\dot{E}}{r\partial r}; \quad (2.9)$$

$$\dot{E} = -\frac{\partial n}{\partial r} - nE.$$

Граничными условиями являются ограниченность E и n в нуле и нуль плотности n при

$$r = r_k = \frac{R}{r_0} = \sqrt{\frac{\sqrt{R^2}}{D}}.$$

Отметим, что из условия пробоя следует $r_k \geq 2,4$.

Можно указать один важный класс решений, осуществляющихся при некоторых начальных условиях.

Допустим, что с самого начала электрическое поле подобрано так, что подвижность в каждой точке в точности компенсирует диффузию. Тогда, как нетрудно видеть, это условие сохранится и в дальнейшем. Решением такого типа будет

$$n(rt) = f(r) e^t; \quad (2.10a)$$

$$E(rt) = -\frac{d \ln f(r)}{dr}, \quad (2.10б)$$

где $f(r)$ — произвольная функция.

Так как в этом решении E не зависит от t , то это решение осуществляется, вообще говоря, если вначале осуществлялась связь (2.10б) между E и n .

Исследование уравнений (2.9) должно ответить на следующие вопросы:

1) является ли решение (2.10) устойчивым в зависимости от r_k и вида функции $f(r)$; 2) является ли решение (2.10)

асимптотическим для любого начального распределения плотности в зависимости от r_k и определяется ли функция $f(r)$ начальным распределением плотности или только r_k .

§ 3. Замагничивание электронов и скин-эффект

Влияние магнитного поля, появляющегося по мере роста поля, сказывается в двух направлениях.

С одной стороны, магнитное поле замагничивает электроны и этим ослабляет нарастание лавины. Так как магнитное поле на краю больше, чем в центре, то это приводит к радиальному стягиванию разряда. (Речь идет о стягивании явления разряда, а не о стягивании заряженных частиц. Стягивание заряженных частиц появится значительно позже, когда создадутся значительные перемещения ионов вследствие дрейфов в магнитном и электрическом поле.) С другой стороны, скин-эффект уменьшает электрическое поле на оси по сравнению с краем и приводит к расширению разряда к стенкам.

В зависимости от значения параметров раньше наступит одно из этих явлений.

Если сначала наступит замагничивание, то эффект стягивания разряда к оси в дальнейшем будет все усиливаться, и в результате разряд разовьется в виде узкого полностью ионизованного канала, окруженного нейтральной «шубой». Оставшийся нейтральный газ будет медленно исчезать вследствие попадания отдельных молекул в ионизованный канал.

Если сначала наступит скин-эффект, то, в зависимости от параметров, может произойти как полная ионизация всего газа, так и неполная. В данном случае со скин-эффектом будет «бороться» стягивание заряженных частиц (а не явления разряда) к центру вследствие дрейфа. Если частицы стянутся скорее, чем произойдет полная ионизация, то снова получится узкий ионизованный канал, окруженный нейтральными частицами. В обратном случае электрическое поле будет проникать во внутренние области только тогда, когда внешние полностью заионизируются. (Здесь скин-эффект, как будет видно ниже, обусловлен увеличением проводимости. Как только внешние слои полностью заионизируются, их проводимость перестанет расти, и скин-эффект на них пропадет.) Таким образом, явление ионизации будет прорасти с края к середине, оставляя за собой полностью ионизованную плазму.

После полной ионизации плазма, вследствие дрейфов, может собраться в тонкий шнур.

Вопрос о том, что раньше наступит — скин-эффект или замагничивание, зависит не только от параметров, но и от распределения частиц по радиусу на предыдущем этапе развития разряда. Естественно, что если на предыдущем этапе разряд собрался у оси трубы, то это состояние останется и в дальнейшем, поскольку замагничивание наружных областей наступит раньше, чем скин-эффект (скин-эффект мая сначала из-за малого количества электронов и продолжает в дальнейшем падать из-за замагничивания).

Именно поэтому представляет большой интерес решение и исследование уравнений, полученных в предыдущем параграфе.

В дальнейшем будем считать, что к началу рассматриваемого этапа заряженные частицы распределены равномерно.

На первый взгляд может показаться, что влияние магнитного поля на проводимость и коэффициент ионизации начнет сказываться тогда, когда ωt для электронов достигнет значения порядка единицы, ибо при этом значении роль длины пробега начинает играть ларморовский радиус магнитного поля.

Оказывается, однако, что это не так. Явление существенно зависит от движения ионов. Так, при неподвижных ионах явление замагничивания электронов вообще не наступает.

Кинетическое уравнение для электронов в нейтральном газе в электрическом и магнитном поле имеет вид (столкновениями электронов между собой пренебрегаем)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + S(f) = 0, \quad (3.1)$$

где $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения в пространстве координат и скоростей; $S(f)$ — столкновительный член между электронами и нейтральными атомами, учитывающий упругие столкновения, возбуждение и ионизацию.

Ищем решение в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{r}, v) + f_i(\mathbf{r}, v) \frac{v_i}{v} \quad (3.2)$$

(что эквивалентно разложению функции распределения в пространстве скоростей по шаровым функциям) и ограничиваемся только первыми степенями малости*. Тогда, согласно работе

* Разложение ведется по степеням $(m/M)^{1/2}$.

Б. И. Давыдова [4], получаем следующие уравнения для функций f_0, f_i :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 E_i f_i) + S(f_0) = 0; \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \left(v \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{e}{m} E_i \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + [\omega \mathbf{f}]_i + \frac{f_i}{\tau} = 0, \quad (3.2б)$$

где τ — время столкновения, которое, как уже указывалось для водорода, не зависит от v .

Вектор \mathbf{f} есть вектор, компоненты которого f_i . Поскольку время ионизации много больше времени между столкновениями, во втором уравнении можно пренебречь членом $\partial f_i / \partial t$ по сравнению с f_i / τ . В этом случае можно из второго уравнения выразить f_i через f_0

$$f_i = - \frac{v\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \{ g_i f_0 + \tau [\omega \mathbf{g}]_i f_0 + \tau^2 \omega_i (\omega \mathbf{g}) f_0 \}, \quad (3.3a)$$

где

$$g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{e}{mv} E_i \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3.3б)$$

В нашем случае $\omega \perp \mathbf{g}$.

$$f_i = - \frac{v\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} (g_i + \tau [\omega \mathbf{g}]_i) f_0. \quad (3.4)$$

Плотность потока электронов

$$j_i = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) v_i dv = \frac{4\pi}{3} \int f_i v^3 dv \quad (3.5)$$

получается умножением (3.4) на v^3 и интегрированием по v . Учитывая, что

$$4\pi \int_0^\infty f_0(v) \frac{mv^2}{2} v^2 dv = \frac{3}{2} nT; \quad (3.6)$$

$$\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial v} v^3 dv = -4\pi \int f_0 v^2 dv = -n,$$

где n — плотность электронов, T — температура электронов, получим из (3.5), (3.4) и (3.3)

$$\mathbf{j} = \frac{\tau/m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\mathbf{F} + \tau [\omega \mathbf{F}]), \quad (3.7a)$$

где

$$\mathbf{F} = -(\nabla nT + enE). \quad (3.76)$$

Этот результат не зависит от вида функции $f_0(v)$, а следовательно, и от вида $S(f_0)$, который известен довольно плохо.

В компонентах получаем

$$j_z = -\frac{\tau/m}{1 + \omega^2\tau^2} \left\{ enE_z + \omega\tau enE_r + \omega\tau \frac{\partial nT}{\partial r} \right\}; \quad (3.8a)$$

$$j_r = -\frac{\tau m}{1 + \omega^2\tau^2} \left\{ -\omega\tau enE_z + enE_r + \frac{\partial nT}{\partial r} \right\}. \quad (3.8б)$$

Если ионы неподвижны, то из условия квазинейтральности следует, что электрическое поле подберется так, чтобы $j_r = 0$ (в противном случае плазма непрерывно заряжалась бы). Это условие определяет E_r

$$E_r = \omega\tau E_z - \frac{1}{en} \frac{\partial nT}{\partial r}. \quad (3.9)$$

Подставляя это значение в выражение для j_z , получаем

$$j_z = -\frac{e\tau n}{m} E_z = -\sigma E_z, \quad (3.10)$$

где $\sigma = \frac{e\tau n}{m}$ — обычная проводимость, т. е. при неподвижных ионах проводимость остается такой же, как и без магнитного поля.

В отличие от проводимости коэффициент ионизации зависит от вида функции f_0 , а следовательно, и от $S(f_0)$.

Нам, однако, удастся найти зависимость этого коэффициента от магнитного поля, не раскрывая выражения $S(f_0)$.

При отсутствии магнитного поля радиальное электрическое поле $eE_r R \sim T$ и направлено от центра. В магнитном поле уже при $\omega\tau \approx \frac{T}{eE_z R}$, вообще говоря, меньшем единицы, E_r меняет направление, и при больших значениях $\omega\tau$ радиальное электрическое поле $eE_r R \gg T$, так что в (3.8) можно пренебречь градиентом давления по сравнению с радиальным электрическим полем.

Это связано с тем, что в немагнитной плазме электрическое поле компенсирует диффузию электронов наружу, в то время как в магнитной плазме электрическое поле должно компенсировать их магнитный дрейф к центру, да при том еще при ослабленной радиальной проводимости.

Пренебрегая градиентами по сравнению с радиальным электрическим полем, получим

$$f_i = \frac{e\tau}{m(1 + \omega^2\tau^2)} (E_i + \tau [\omega E]_i) \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (3.11)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.2а), где тоже пренебрегаем градиентами, получим уравнение для функции распределения по скорости $f_0(v)$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \gamma \frac{1}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + S(f_0) = 0, \quad (3.12a)$$

где

$$\gamma = \frac{e^2\tau/m^2}{1 + \omega^2\tau^2} E^2 \quad (3.12б)$$

и

$$E^2 = E_r^2 + E_z^2$$

абсолютная величина электрического поля.

Таким образом, видим, что в электрическом и магнитном поле функция $f_0(v)$, которая, в частности, полностью определяет все процессы возбуждения и ионизации, зависит от электрического и магнитного поля только через комбинацию γ .

В частности, коэффициент ионизации и температура электронов

$$\nu(E_z, H) = \nu(\gamma), \quad T(E_z, H) = T(\gamma).$$

Если ионы покоятся, т. е. $j_r = 0$, то в пренебрежении градиентами получаем

$$\begin{aligned} E_r &= \omega\tau E_z; \\ E^2 &= E_r^2 + E_z^2 = E_z^2(1 + \omega^2\tau^2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

и величина γ равняется

$$\gamma = \frac{e^2\tau}{m^2} E_z^2, \quad (3.14)$$

т. е. такая же, как при отсутствии магнитного поля.

Таким образом, мы получили, что при отсутствии радиального движения не только проводимость в магнитном поле совпадает с обычной, но и вероятности ионизации и возбуждения, и температура электронного газа оказываются такими же, как при том же продольном электрическом поле, но при отсутствии магнитного поля.

Явление замагничивания появится тогда, когда заметным станет радиальное движение ионов.

Радиальная скорость ионов (пока их $\omega\tau \ll 1$) определяется радиальным электрическим полем и длиной пробега ионов l_i

$$v_{ir} = (eE_r l_i / 2M)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Длина пробега ионов определяется главным образом перезарядкой ионов с нейтральными атомами.

Радиальная скорость электронов — дрейф под действием поля E_z — равна (при $\omega\tau \gg 1$)

$$v_{др} = \frac{cE_z}{H} = \frac{E_z}{e m \omega}. \quad (3.16)$$

Существенное замагничивание наступает при $\alpha = v_{ir} / v_{др} \sim 1$. Подставив в (3.15) $E_r = \omega\tau E_z$, получим

$$\alpha = \left(\frac{m^2 l_i}{2M\tau^2 e E_z} \right)^{1/2} (\omega\tau)^{3/2}. \quad (3.17)$$

Отсюда видно, что замагничивание наступает при больших значениях $\omega\tau$, примерно при $\omega\tau \sim (M/m)^{1/3}$.

Следует отметить, что так как коэффициент ионизации сильно зависит от электрического поля, то уже слабое замагничивание ($\alpha \ll 1$) может сильно сказаться на нарастании лавины.

Рассмотрим влияние *скин-эффекта*. Уравнения Максвелла дают

$$\nabla^2 E_z = \frac{4\pi}{c^2} \frac{dj}{dt}. \quad (3.18)$$

В отличие от обычного скин-эффекта в нашем случае экранировка электрического поля может происходить также и в постоянном электрическом поле за счет изменения проводимости

$$\frac{dj}{dt} = \frac{\partial \sigma E_z}{\partial t} = E_z \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial E_z}{\partial t} \simeq E_z \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nu \sigma E_z,$$

и уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} - \frac{4\pi}{c^2} \nu \sigma E_z = 0. \quad (3.19)$$

Считая вначале $\sigma = \text{const}$, получаем

$$E_z = E_z^0 I_0 \left(\sqrt{\frac{4\pi\nu\sigma}{c^2}} r \right), \quad (3.20)$$

где $I_0(x)$ — нулевая бesselова функция мнимого аргумента. Ослабление поля в центре по сравнению с краем при слабом скин-эффекте

$$\frac{E(0)}{E(R)} = 1 - \frac{R^2}{4\delta^2}, \quad (3.21)$$

где

$$\delta^2 = \frac{c^2}{4\pi\nu\sigma}. \quad (3.22)$$

Выражение для толщины скин-слоя совпадает с обычным при переменном электрическом поле с заменой частоты поля на ν .

Отношение $\alpha/(R^2/4\delta^2)$ определяет, какой эффект играет большую роль. Подставляя

$$\omega = \frac{eH}{mc}; \quad H = \frac{2\pi R^2 j}{c} = \frac{2\pi R^2 \sigma E_{\#}}{c};$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} = \frac{n_0 e^2 \tau}{m} \xi,$$

где ξ — степень ионизации, $n = \xi n_0$, получим

$$\alpha = \frac{2\pi^{3/2} l_i^{1/2} R^{3/2} (e^2/mc^2)^{3/2} n_0^{3/2} \tau^2 e E \xi^{3/2}}{(mM)^{1/2}}; \quad (3.23)$$

$$\frac{R^2}{4\delta^2} = \frac{\pi R^2 e^2 n_0 \nu \tau \xi}{mc^2},$$

и их отношение

$$\frac{\alpha}{R^2/4\delta^2} = 2\pi^{1/2} \left(\frac{l_i}{R} \frac{e^2}{mc^2} \right)^{1/2} \frac{n_0^{1/2} \tau^2 E \xi^{1/2}}{(mM)^{1/2} \nu \tau}. \quad (3.24)$$

Поскольку l_i пропорциональна n_0 , а τ обратно пропорционально n_0 , подставляя численные значения, получаем

$$\frac{\alpha}{R^2/4\delta^2} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{E}{p} \frac{R^{1/2} \xi^{1/2}}{\nu \tau}, \quad (3.25)$$

и так как $\nu \tau$ есть функция E/p , то и это отношение есть функция E/p , R , ξ .

При достаточно малой степени ионизации ξ скин-эффект больше, чем замагничивание; при большом ξ — наоборот.

Если они сравниваются при таких значениях ξ , когда оба эффекта малы, то, следовательно, в дальнейшем замагничивание будет сильнее скин-эффекта. В обратном случае, т. е. если скин-эффект заметно закраивает внутреннюю область при значениях ξ , меньших тех, которые обращает отношение (3.25) в единицу, то в дальнейшем замагничивание ослабится, и можно ожидать, что разряд будет развиваться на краю.

В это условие входит не только начальное распределение электронов, но и распределение плотности нейтрального газа.

Как уже указывалось во введении, нейтральный газ может довольно длительное время, не ионизуясь, находиться при температуре, более высокой, чем энергия ионизации, вследствие того что сечение ионизации тяжелыми частицами при энергиях, меньших нескольких киловольт, ничтожно мало.

В процессе разгорания разряда, при некоторых условиях, может осуществиться такое состояние, при котором температура нейтрального газа и ионов будет выше энергии ионизации, а следовательно, и температуры электронов. Это на первый взгляд выглядит весьма странно, поскольку в электрическом поле основную часть энергии набирают электроны.

Следует, однако, учесть, что при некоторых условиях при наличии магнитного поля ионы набирают в электрическом поле (радиальном) столько же энергии, сколько и электроны. Эта энергия быстро передается нейтральному газу, который может терять ее только вследствие теплопроводности, между тем как электроны, достигнув энергии в несколько вольт, начинают ее быстро тратить на возбуждение и ионизацию.

Основным источником нагревания нейтрального газа являются столкновения с ионами. Ионы ускоряются радиальным электрическим полем, и в результате их перезарядки создаются быстрые нейтральные атомы. (Нейтральный газ можно считать диссоциированным, так как процесс диссоциации происходит очень быстро под действием электронных ударов.)

Нагрев нейтрального газа приводит к его перераспределению по радиусу и к снижению плотности в более горячих областях. Кроме того, к перераспределению плотности приводит сжатие магнитными силами, которые передаются нейтральному газу через ионы посредством столкновений. Следует указать на чрезвычайную чувствительность процесса развития разряда к изменению плотности, так как оно приводит к изменению величины E/p . Таким образом, в данном случае много факторов (замагничивание, скин-эффект, перераспределение плотности нейтрального газа, движение заряженных частиц) настолько перемешалось между собой, что какое-либо определенное суждение можно высказать только после решения всей задачи в целом.

§ 4. Запертое излучение

Явления, происходящие в разряде, могут совершенно измениться, если размеры и давление таковы, что резонансное излучение не может выходить из газа. Это нетрудно видеть уже из того, что при этом уменьшается уход энергии из плазмы, а следовательно, при данном электрическом поле ускоряется ионизация. При заданной же скорости нарастания тока и ионизации должно, наоборот, сильно падать электрическое поле внутри плазмы (в отличие от предыдущих параграфов, где электрическое поле внутри плазмы, точнее E/p , очень мало менялось при самом широком изменении параметров).

При медленном нарастании ионизации, даже тогда, когда роль излучения может быть велика, число возбужденных атомов все же много меньше числа атомов в основном состоянии, так как рождение их (и соответствующих квантов) обусловлено электронами сравнительно большой энергии ($> 10,15$ эв); гибель возбужденных атомов вызывается медленными электронами (с энергией $> 3,35$ эв), которых значительно больше, а кроме того, уходом квантов из системы и ударами второго рода.

В связи с этим запертой может оказаться только лаймановская серия. Даже в этой серии все линии, кроме головной, не будут заперты. Действительно, рассмотрим, например, вторую линию. Квант соответствующей энергии, поглотившись с большой вероятностью нейтральным атомом, переведет его в состояние $n=3$, из которого атом имеет вероятность, близкую к половине, перейти в состояние $n=2$ с излучением незапертой бальмеровской линии и затем первой лаймановской. Таким образом, в запертом излучении все кванты лаймановской серии очень быстро превратятся в кванты, соответствующие первой линии. В связи с этим более или менее заметно могут накапливаться только атомы с энергией возбуждения $10,15$ эв; более высокие возбуждения очень быстро перейдут в это последнее.

Первый возбужденный уровень водорода четырехкратно вырожден. Время жизни p -состояния равно $0,16 \cdot 10^{-8}$ сек, время жизни s -состояния для изолированного атома очень велико, однако наличие вырождения приводит к тому, что даже слабые электрические поля перемешивают состояния, так что время жизни каждого из них оказывается равным среднему $\tau_1 = 0,21 \cdot 10^{-8}$ сек. Пусть $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})$ — число квантов с любой поляризацией в единице фазового объема \mathbf{r}, \mathbf{k} ; n_0 — плотность невозбужденных атомов, а n_1 — возбужденных.

Учитывая процессы спонтанного и индуцированного излучения и поглощения квантов, можно написать

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \left(c \frac{\mathbf{k}}{k} f \right) = A_{10} n_1 + B_{10} n_1 f - B_{01} n_0 f, \quad (4.1)$$

A_{10} , B_{10} , B_{01} — эйнштейновские коэффициенты, соотношения между которыми легко находятся из следующих соображений. В равновесии

$$A_{10} n_1 + B_{10} n_1 f - B_{01} n_0 f = 0;$$

$$f = \frac{A_{10}/B_{10}}{\frac{B_{01}}{B_{10}} \frac{n_0}{n_1} - 1};$$

с другой стороны

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-h\nu/T} = 4e^{-h\nu/T}$$

и

$$f = \frac{A_{10}/B_{10}}{\frac{B_{01}}{B_{10}} \frac{1}{4} e^{-h\nu/T} - 1}.$$

Сравнивая это выражение с формулой Планка или Релея—Джинса при малых $h\nu/T$, получаем

$$B_{10} = \frac{1}{2} A_{10}, \quad B_{01} = 2A_{10}.$$

Коэффициент спонтанного испускания кванта

$$A_{10}(k) = \frac{w(k)}{\tau_\gamma}, \quad (4.2)$$

где $w(k)$ — нормированная вероятность, характеризующая форму линии; w не зависит от направления \mathbf{k} , так как упорядоченная скорость нейтральных атомов мала по сравнению с тепловой.

Таким образом, кинетическое уравнение для квантов имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\mathbf{k}}{k} \operatorname{grad} f = \frac{w(k)}{\tau_\gamma} \left(n_1 + \frac{1}{2} n_1 f - 2n_0 f \right). \quad (4.3)$$

Как уже говорилось, $n_1 \ll n_0$, и поэтому вторым членом можно пренебречь по сравнению с третьим.

Это означает, что, несмотря на запертость излучения и сравнительно высокую температуру электронов, индуцированное излучение при разряде мало по сравнению со спонтанным. Уравнение (4.3) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\mathbf{k}}{k} \text{grad } f + \frac{2n_0 w(k)}{\tau_\gamma} f = \frac{n_1 w(k)}{\tau_\gamma}. \quad (4.4)$$

Напишем уравнение для числа атомов в возбужденном состоянии

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \alpha n_0 n_e - \beta n_1 n_e - \int \frac{w(k)}{\tau_\gamma} \left(n_1 + \frac{1}{2} n_1 f - 2n_0 f \right) d\mathbf{k} + \delta. \quad (4.5)$$

Диффузией возбужденных атомов пренебрегли из-за малой скорости атомов. Первый член есть рождение вследствие возбуждения невозбужденных атомов электронным ударом; второй член — исчезновение возбужденных атомов вследствие ионизации их электронами.

Величина δ включает в себя все нелинейные по n_1, f члены, как то: исчезновение возбужденных вследствие ударов второго рода (n_1^2), исчезновение их вследствие фотоэффекта ($n_1 f$). Выражение, стоящее под интегралом, есть баланс нейтральных атомов вследствие излучения и поглощения запертого излучения.

Пренебрегая δ и членом $\frac{1}{2} n_1 f$ под интегралом, получим

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \alpha n_0 n_e - \beta n_1 n_e - \frac{1}{\tau_\gamma} n_1 + \frac{2n_0}{\tau_\gamma} \int w(k) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.6)$$

Так как уравнения (4.4) и (4.6) линейны, решение должно зависеть от времени, как e^{pt} .

В результате получаем

$$n_1 = \frac{1}{1 + \beta n_e \tau_\gamma + p} \left\{ \alpha n_0 n_e \tau_\gamma + 2n_0 \int w(k) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right\}. \quad (4.7)$$

Кинетическое уравнение для квантов принимает вид

$$\begin{aligned} pf + c \frac{\mathbf{k}}{k} \text{grad } f + \frac{2n_0 w(k)}{\tau_\gamma} \left\{ f - \frac{1}{1 + \beta n_e \tau_\gamma + p} \int w(k) f(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right\} = \\ = \frac{\alpha n_0 n_e \tau_\gamma}{1 + \beta n_e \tau_\gamma + p}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если бы $f(\mathbf{k})$ зависело от \mathbf{k} значительно слабее, чем $w(k)$, разложением, аналогичным (3. 2), можно было бы свести (4. 8) к диффузионному уравнению с коэффициентом диффузии

$$D_{\gamma} = \frac{c^2 \tau_{\gamma}}{6n_0 \bar{w}} = \frac{c^2 \tau_{\gamma}}{6n_0} \frac{32\pi^4 \Delta\lambda}{\lambda^3 \lambda}, \quad (4. 9)$$

где \bar{w} — значение $w(k)$ в максимуме; $\Delta\lambda$ — ширина линии.

В действительности $f(k)$ меняется так же, как и $w(k)$, и это приводит к тому, что кинетическое уравнение для квантов не сводится к диффузионному (этот результат был ранее получен в работах [5], [6]. Нетрудно понять, с чем это связано.

Рассмотрим квант, у которого k находится где-то в середине линии. Энергия, связанная с этим квантом, может выйти из объема двумя путями. Первый состоит в том, что квант, поглощаясь и излучаясь где-то в середине линии, будет диффундировать. Время выхода этим механизмом будет

$$t_1 \approx \frac{R^2}{l^2} \tau_{\gamma}, \quad (4. 10)$$

где l — длина пробега кванта со средним k .

Второй механизм состоит в том, что энергия излучится в виде кванта, длина пробега которого равна R , и сразу уйдет из объема. Относительная вероятность такого события $W(k_{кр})$. Длина пробега кванта с данным значением k

$$l(k) = \frac{c\tau_{\gamma}}{2n_0 w(k)}. \quad (4. 11)$$

Полагая $l(k_{кр}) = R$, получаем

$$w(k_{кр}) = \frac{c\tau_{\gamma}}{2n_0 R}.$$

Вероятность того, что в процессе излучения возбужденного атома излучится квант с длиной пробега больше R , будет

$$W = 2 \int_{k_{кр}}^{\infty} w(k) dk.$$

Пусть κ — ширина линии (в переменных k); так как $k_{\text{кр}}$ лежит на хвосте линии, то для круто спадающей формы линии

$$W \sim 8\pi\kappa k^2 w_{\text{кр}} = \frac{4\pi c\tau_\gamma k^2 \kappa}{n_0 R}. \quad (4.12)$$

Таким образом, время выхода квантов вторым механизмом будет

$$t_2 = \frac{\tau_\gamma}{W} = \frac{n_0 R}{4\pi k^2 \kappa c}. \quad (4.13)$$

Сравнивая его с t_1 и учитывая, что

$$\frac{1}{l_0} = \frac{2n_0 w}{c\tau_\gamma} \approx \frac{1}{4\pi k^2 \kappa} \frac{2n_0}{c\tau_\gamma},$$

получаем

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{R^2 n_0 R \tau_\gamma}{l_0^2 4\pi k^2 \kappa c \tau_\gamma^2} = \frac{2R}{l_0} \gg 1. \quad (4.14)$$

Таким образом, именно при условии, когда могло бы быть применимо диффузионное приближение ($l_0 \ll R$), второй механизм ухода энергии оказывается более сильным, чем первый, так что не остается области применимости диффузионного приближения. Это обстоятельство приводит к ослаблению плотности излучения и к значительно большему перемешиванию его в объеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Давыдов, см. настоящий том, стр. 89.
2. А. М. Андрианов, С. М. Осовец, см. настоящий том, стр. 95.
3. L. I. Varnerin, S. C. Brown, Phys. Rev., **79**, 946 (1950).
4. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, **7**, 1069 (1937).
5. Л. М. Биберман, ЖЭТФ, **17**, 416 (1947).
6. T. Holstein, Phys. Rev., **72**, 1212 (1947).

М. А. Леонтович, В. Д. Шафранов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКОГО ПРОВОДА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

В статье рассматривается вопрос об устойчивости формы неупругого прямолинейного проводника круглого сечения с током в продольном магнитном поле.

Как известно, собственное поле тока вызывает неустойчивость по отношению к искажению формы проводника. В настоящей заметке показано, что внешнее продольное поле, если оно достаточно велико, приводит к устойчивости. Минимальное значение требуемого для этого поля превышает значение собственного поля тока на границе проводника.

Задача решена при следующих допущениях. Проводник предполагается идеальным, искажение формы проводника невелико. В этих предположениях легко найти поле и распределение токов, необходимые для вычисления сил, возникающих при искривлении проводника.

§ 1. Определение магнитного поля

Рассмотрим деформированный проводник (рис. 1).

Магнитное поле определяется уравнениями:

$$\text{I.} \quad \Delta_{x,y,z} \mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\text{II.} \quad \text{div}_{x,y,z} \mathbf{A} = 0$$

с условием на границе $H_n = 0$ и на бесконечности $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^0$, где \mathbf{H}^0 — поле при отсутствии искажений:

$$H_r^0 = 0; \quad H_\varphi^0 = \frac{2I_0}{cr}; \quad H_z^0 = H_0.$$

* Работа выполнена в 1952 г.

Перейдем к новой системе координат X, Y, Z , связанной со старой (x, y, z) соотношениями

$$X = x - \xi(z);$$

$$Y = y - \eta(z);$$

$$Z = z;$$

$x = \xi(z)$ и $y = \eta(z)$ — уравнение оси изогнутого проводника в старой системе.

В новой системе уравнения I и II принимают вид

$$I'. \quad \Delta_{X, Y, Z} \mathbf{A} = L' \mathbf{A};$$

$$II'. \quad \operatorname{div}_{X, Y, Z} \mathbf{A} = f(A_z);$$

$$L' \equiv \xi_{zz} \frac{\partial}{\partial X} + \eta_{zz} \frac{\partial}{\partial Y} + 2\xi_z \frac{\partial^2}{\partial X \partial Z} + 2\eta_z \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z} - 2\xi_z \eta_z \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} - \\ - \xi_z^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \eta_z^2 \frac{\partial^2}{\partial Y^2};$$

$$f(A_z) = \xi_z \frac{\partial A_z}{\partial X} + \eta_z \frac{\partial A_z}{\partial Y}.$$

Эти уравнения приближенно решаются методом возмущений. Полагаем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1;$$

$$\Delta \mathbf{A}_0 = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_0 = 0.$$

Считая, что изгиб проводника невелик, будем всюду пренебрегать членами второго порядка относительно ξ, η и их производных и считать $\mathbf{A}_1 \ll \mathbf{A}_0$. Для \mathbf{A}_1 получим тогда уравнения

$$I''. \quad \Delta \mathbf{A}_1 = L \mathbf{A}_0;$$

$$II''. \quad \operatorname{div} \mathbf{A}_1 = f(A_z^0);$$

$$L \equiv \xi_{zz} \frac{\partial}{\partial X} + \eta_{zz} \frac{\partial}{\partial Y} + 2\xi_z \frac{\partial^2}{\partial X \partial Z} + 2\eta_z \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z}.$$

Если положить $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}' + \operatorname{rot} \mathbf{u}$, где \mathbf{u} — новая неизвестная функция, а $\operatorname{div} \mathbf{A}' \equiv f(A_z^0)$, то условие II будет автоматически выполняться. Очевидно, достаточно положить

$$\mathbf{A}' = \{\xi_z A_z^0, \eta_z A_z^0, 0\}.$$

Уравнение для \mathbf{u} будет

$$\operatorname{rot} \Delta \mathbf{u} = L \mathbf{A}_0 - \Delta \mathbf{A}'.$$

Легко проверить, что $\operatorname{div} (L \mathbf{A}_0 - \Delta \mathbf{A}') \equiv 0$, поэтому правая часть последнего уравнения представляет собой rot некоторого вектора \mathbf{K} , и уравнение для \mathbf{u} сводится к более простому

$$\text{III.} \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}.$$

Вектор \mathbf{K} имеет следующие компоненты:

$$K_x = -\eta_{zz} A_z^0 - 2\eta_{yz} \frac{\partial A_z^0}{\partial z};$$

$$K_y = \xi_{zz} A_x^0 + 2\xi_{yz} \frac{\partial A_x^0}{\partial z};$$

$$K_z = \eta_{zz} A_x^0 - \xi_{zz} A_y^0 + 2\eta_{yz} \frac{\partial A_x^0}{\partial z} - 2\xi_{yz} \frac{\partial A_y^0}{\partial z}.$$

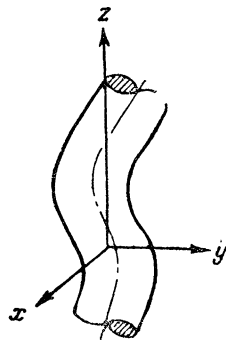


Рис. 1.

Поле \mathbf{H} выражается через решение уравнения III

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}^0 + \operatorname{rot} \mathbf{A}' - \mathbf{K} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}; \\ \mathbf{H}^0 &= \operatorname{rot} \mathbf{A}_0; \quad \mathbf{A}_0 = \left\{ -\frac{H_0}{2} Y, \frac{H_0}{2} X, -\frac{2I_0}{c} \ln R \right\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Так как \mathbf{H} определяется функцией $h = \operatorname{div} \mathbf{u}$, то удобнее решать вместо системы III одно уравнение для скалярной функции h

$$\Delta h = \operatorname{div} \mathbf{K}.$$

В цилиндрической системе координат ($X = R \cos \varphi$, $Y = R \sin \varphi$)

$$\Delta h = \left(\frac{2I_0}{cR} \eta_{zz} - \frac{H_0}{2} R \xi_{zzz} \right) \cos \varphi - \left(\frac{2I_0}{cR} \xi_{zz} + \frac{H_0}{2} R \eta_{zzz} \right) \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Решим это уравнение для частного случая, когда все величины, зависящие от z , изменяются по закону e^{ikz}

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 e^{ikz}; \\ \eta &= \eta_0 e^{ikz}; \\ h &= h_0 e^{ikz}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Все основные выводы, касающиеся устойчивости, можно получить из этого частного случая.

Уравнению (1.2) и граничным условиям удастся удовлетворить решением вида

$$h = e^{ikz} (p \cos \varphi + q \sin \varphi). \quad (1.4)$$

Для p и q получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial p}{\partial R} \right) - \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right) p &= -\frac{2I_0}{cR} \eta_0 k^2 + i \frac{H_0}{2} R \xi_0 k^3; \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial q}{\partial R} \right) - \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right) q &= \frac{2I_0}{cR} \xi_0 k^2 + i \frac{H_0}{2} R \eta_0 k^3, \end{aligned} \quad (1.5)$$

решения которых, удовлетворяющие поставленному условию на бесконечности,

$$\begin{aligned} p &= C_1 K_1(kR) + \frac{2I_0}{cR} \eta_0 - i \frac{H_0}{2} kR \xi_0; \\ q &= C_2 K_1(kR) - \frac{2I_0}{cR} \xi_0 - i \frac{H_0}{2} kR \eta_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Постоянные $C_1(k)$ и $C_2(k)$ определяются из граничного условия $(\mathbf{Hn}) = 0$ на поверхности проводника. \mathbf{n} — нормаль к поверхности, имеющая компоненты

$$n_x = \cos \varphi, \quad n_y = \sin \varphi,$$

$$(n_R = 1; n_\varphi = 0), \quad n_z = -\xi_z \cos \varphi - \eta_z \sin \varphi.$$

Для C_1 и C_2 получаются значения

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{kK'_1(ka)} \left\{ ikH_0 \xi_0 + \frac{2I_0}{ca} \frac{\tau_0}{a} \right\}; \\ C_2 &= \frac{1}{kK'_1(ka)} \left\{ ikH_0 \eta_0 - \frac{2I_0}{ca} \frac{\xi_0}{a} \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где a — радиус проводника.

Подставляя (1.4) в (1.1), находим \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} H_r &= ie^{ikz} H_0 k \rho_r; \\ H_\varphi &= H' + e^{ikz} \left\{ -H' \left(1 + \frac{\alpha}{ka} \right) \frac{\rho_r}{a} + iH_0 \alpha \frac{\rho_r}{a} \right\}; \\ H_z &= H_0 + e^{ikz} \left\{ iH' \alpha \frac{\rho_r}{a} - H_0 \alpha k \rho_r \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$H' = \frac{2I_0}{ca}; \quad \alpha = \frac{K_1(ka)}{K_1'(ka)}, \quad (\alpha < 0);$$

$$\rho_r = \xi_0 \cos \varphi + \eta_0 \sin \varphi; \quad \rho_\varphi = -\xi_0 \sin \varphi + \eta_0 \cos \varphi.$$

Эти выражения получены в предположении $k\xi_0 \ll 1$; $\frac{\xi_0}{a} \ll 1$ (то же для η_0).

Ток определяется тангенциальной составляющей поля на поверхности:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{nH}];$$

$$j_r = \frac{c}{4\pi} ikH' \rho_r e^{ikz};$$

$$j_\varphi = -\frac{c}{4\pi} \left\{ H_0 + e^{ikz} \left[iH' \left(1 + \frac{\alpha}{ka} \right) k\rho_\varphi - H_0 \alpha k\rho_r \right] \right\};$$

$$j_z = \frac{c}{4\pi} \left\{ H' + e^{ikz} \left[-H' \left(1 + \frac{\alpha}{ka} \right) \frac{\rho_r}{a} + iH_0 \alpha \frac{\rho_\varphi}{a} \right] \right\}.$$

Перераспределение токов на поверхности, вызванных полем H_0 , приводит, как будет видно ниже, к появлению силы, препятствующей искривлению проводника.

§ 2. Исследование устойчивости

Силу, действующую на единицу поверхности проводника в направлении нормали \mathbf{n} , можно определить по формуле

$$\frac{\Delta F}{\Delta S'} = -\frac{\mathbf{n}}{8\pi} \mathbf{H}^2. \quad (2.1)$$

Умножая компоненты этой силы на $ad\varphi$ и интегрируя по φ от 0 до 2π , найдем силу \mathbf{f} , действующую на единицу длины проводника. Компоненты этой силы имеют вид

$$f_x = A\xi - iB\eta; \quad (2.2)$$

$$f_y = iB\xi + A\eta,$$

где

$$A = \frac{1}{4} H_0^2 \alpha k a - \frac{1}{4} H'^2 \alpha S;$$

$$B = \frac{\alpha}{2} H' H_0; \quad S = \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} > 0.$$

Уравнения движения под действием силы (2. 2) имеют вид

$$\rho \pi a^2 \ddot{\xi} = A\xi - iB\eta;$$

$$\rho \pi a^2 \ddot{\eta} = iB\xi - A\eta,$$

где ρ — плотность вещества в проводнике.

Решение этих уравнений $\xi = \xi e^{i\omega t}$, $\eta = \eta' e^{i\omega t}$ отлично от нуля, если равен нулю детерминант, составленный из коэффициентов при ξ' и η' . Отсюда находим значение ω^2

$$\omega^2 = -\frac{H'^2 |\alpha| S}{4\pi\rho a^2} + \frac{H_0^2 k}{4\pi\rho a} |\alpha| \pm \frac{H' H_0 |\alpha|}{2\pi\rho a^2}. \quad (2. 3)$$

В отсутствие продольного поля всегда $\omega^2 < 0$: следовательно, имеется решение с $Im\omega < 0$, приводящее к экспоненциальному нарастанию случайных возмущений. Отсюда следует, что прямой проводник с током неустойчив. При наличии продольного поля знак ω^2 для возмущений с определенной длиной волны может изменяться. Необходимым условием отсутствия нарастающих возмущений является неравенство $\omega^2 > 0$, или (вводим отношение $y = \frac{H^0}{H'}$)

$$y^2 \pm \frac{2}{ka} y - \frac{S}{ka} > 0. \quad (2. 4)$$

Это неравенство должно выполняться одновременно для обоих знаков y второго члена.

Зависимость $\omega^2(y)$ изображена на рис. 2. Параболы пересекают ось в точках

$$\begin{aligned} \pm y_0 &= \frac{1}{ka} \left(\sqrt{ka \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} + 1 + 1} \right); \\ \pm y_1 &= \frac{1}{ka} \left(\sqrt{ka \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} + 1 - 1} \right). \end{aligned} \quad (2. 5)$$

Очевидно, устойчивой областью является область $|y| > |y_0|$. y_0 есть функция одной переменной. Рис. 3 дает зависимость $y_0 = y_0(ka)$;

$$\text{при } ka \rightarrow 0 \quad y_0 \simeq \frac{1}{ka};$$

$$\text{при } ka \rightarrow \infty \quad y_0 \simeq \frac{2}{\sqrt{ka}}.$$

Для каждого значения ka существует минимальное значение внешнего поля H^0 , начиная с которого поле препятствует искривлению проводника. Это значение, как видно из рис. 3, при $ka \leq 1$ превышает собственное поле тока $H' = \frac{2I_0}{ca}$ и тем больше (при данном радиусе), чем больше длина изгиба. Эти результаты нагляднее получаются из сравнения сил.

При равновесии $f_x = 0, f_y = 0$; из (1. 8) следует при этом, что

$$\eta = \xi e^{\pm i \frac{\pi}{2}},$$

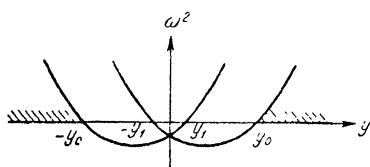


Рис. 2.

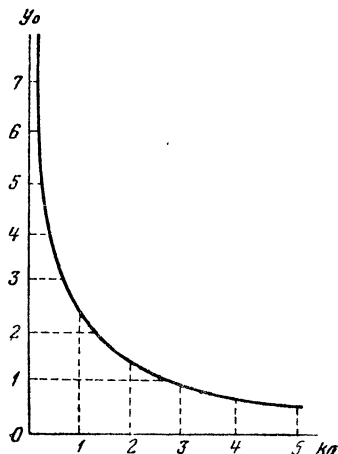


Рис. 3.

и выражения для сил около равновесия имеют вид

$$f_x = (A \pm B) \xi;$$

$$f_y = (A \pm B) \xi e^{\pm i \frac{\pi}{2}}.$$

При $A \pm B = 0$ (соответствует значениям $y = \pm y_0, \pm y_1$) имеется неустойчивое равновесие, в котором провод изогнут по винтовой линии. Разные знаки перед B соответствуют правому и левому винту. Условие (2. 4) $A \pm B < 0$ означает, что имеется сила, направленная против смещения.

Область $-y_1 < y < y_1$, где $A \pm B > 0$, является областью неустойчивости по отношению к любым изгибам.

Область $|y_1| < |y| < |y_0|$ является устойчивой по отношению к закручиванию в винт в одном направлении и неустойчивой — в другом.

В области $|y| > |y_0|$ имеется устойчивость по отношению к любым изгибам.

Г. И. Бударкер

**ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПРОБОЙ В ГАЗЕ ПРИ НАЛИЧИИ
СИЛЬНОГО ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ,
ПЕРЕМЕННОГО ВО ВРЕМЕНИ ***

В настоящей работе рассматривается пробой в газе при наличии сильного магнитного поля $|(\omega\tau)_{эл} \gg 1|$, меняющегося во времени.

Магнитное поле сказывается главным образом в трех отношениях: 1) уменьшает поперечный коэффициент диффузии в $(1 + \omega^2\tau^2)$ раз; 2) вызывает дрейф электронов к центру; 3) ослабляет поперечную проводимость, так что нагреванием электронов индукционным электрическим полем можно пренебречь.

Пробой осуществляется внешним продольным электрическим полем. В магнитном поле условия пробоя оказываются значительно более легкими, чем без него, особенно в том случае, если магнитное поле нарастает со временем. Возникает совершенно иная зависимость от плотности, значительно облегчается пробой при малых плотностях.

Рассмотрим разряд в бесконечной прямой трубе и в конечной прямой трубе. Задача о разряде в торе может быть сведена к задаче о разряде в прямой трубе при достаточно быстро нарастающем магнитном поле. Задача о разряде в прямой конечной трубе имеет смысл только в том случае, если пробой осуществляется продольным электрическим полем достаточно высокой частоты $\left(\frac{c}{v} \frac{R}{\lambda} \gg 1\right)$, где v — скорость электронов; λ — длина волны; в противном случае не удастся

* Работа выполнена в 1952 г.

сколько-нибудь удовлетворительно учесть влияние электродов и перераспределение плотности зарядов вдоль трубы.

Рассмотрим бесконечную прямую трубу.

Магнитное поле H и электрическое поле E направлены по оси z . Индукционное электрическое поле $E_z = -\frac{\dot{H}}{2c}r$ направлено по φ .

Уравнение размножения электронов имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = \nu n, \quad (1)$$

где \mathbf{j} — поток электронов; ν — коэффициент ионизации.

Коэффициент ионизации ν , а также температура электронов T определяются количеством энергии, выделяющейся в электронном газе в единицу времени, и так как продольная проводимость много больше поперечной, они определяются только продольным полем E . Тогда, как известно,

$$\begin{aligned} \nu\tau &= f_1\left(\frac{E}{p}\right); \\ T &= f_2\left(\frac{E}{p}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где p — давление газа; τ — среднее время между столкновениями для водорода; f_1, f_2 — экспериментально измеренные функции.

Поток \mathbf{j} состоит из двух частей:

$$\mathbf{j}_{\text{дифф}} = -D_{\text{м}} \frac{dn}{dr},$$

где $D_{\text{м}}$ — коэффициент диффузии поперек магнитного поля, для сильных полей

$$D_{\text{м}} = \frac{D}{\omega^2\tau^2} = \frac{1}{3} \frac{\nu^2\tau}{\omega^2\tau^2} = \frac{T}{3r_0\tau H^2}; \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_{\text{дрейф}} = -\frac{cE_{\varphi}}{H}n = -\frac{\dot{H}}{2H}rn. \quad (4)$$

В результате уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_{\text{м}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) - \frac{\dot{H}}{2H} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (nr^2) - \nu n = 0. \quad (5)$$

Так как мы рассматриваем пробой в сильном магнитном поле, то за время развития разряда H практически не меняется, несмотря на то, что $\dot{H} \neq 0$. Величину \dot{H} можно вообще считать постоянной.

Учитывая это, можно искать решение в виде

$$n = e^{pt} f(r).$$

Тогда для функции f получим уравнение

$$D_m \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{\dot{H}}{2H} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (fr^2) + (\nu - p)f = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями $f(R) = 0$ (R — радиус трубы). Введя переменную

$$\xi = \frac{\dot{H}}{4HD_m} r^2 = \frac{3}{4} \frac{r_0 \tau H \dot{H}}{T} r^2 \quad (7a)$$

и величину

$$\beta = \frac{H}{\dot{H}} (\nu - p), \quad (7b)$$

получим

$$\xi f'' + (1 + \xi) f' + (1 + \beta) f = 0. \quad (8)$$

Это есть уравнение для вырожденной гипергеометрической функции. Его решение будет

$$f = F(1 + \beta; 1; -\xi).$$

Воспользовавшись соотношением

$$F(\alpha; \gamma; z) = e^z F(\gamma - \alpha; \gamma; -z), \quad (9a)$$

получим

$$f = e^{-\xi} F(-\beta; 1; \xi), \quad (9b)$$

или

$$f(r) = e^{-\frac{3r_0}{4T} \frac{\dot{H}}{H} \tau H^2 r^2} F\left(-\frac{H}{\dot{H}} (\nu - p); 1; \frac{3r_0}{4T} \frac{\dot{H}}{H} \tau H^2 r^2\right). \quad (10)$$

Граничные условия определяют p как функцию параметров.

Условия пробоя имеют вид $|\beta_0 = \beta|_{p=0} = \frac{H}{\dot{H}}$,

$$F(-\beta_0; 1; \xi_m) = 0. \quad (11)$$

Пусть

$$\beta_0 = \varphi(\xi_m) \quad (12)$$

есть решение уравнения (11); тогда условие пробоя принимает вид

$$\nu\tau = \frac{\dot{H}}{H} \tau\varphi \left(\frac{3r_0}{4T} \frac{\dot{H}}{H} \tau H^2 R^2 \right). \quad (13)$$

Введем новую функцию

$$\Phi(z) = z\varphi(z);$$

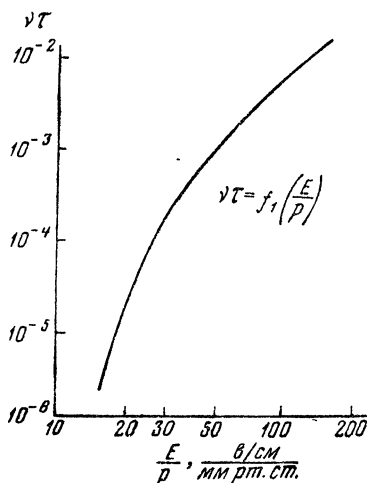


Рис. 1.

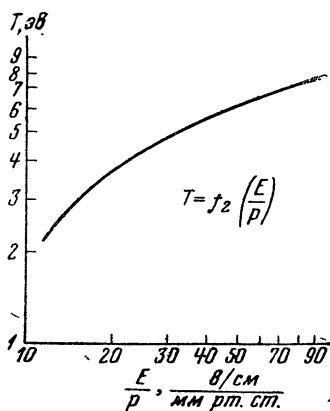


Рис. 2.

тогда

$$\nu\tau = \frac{4}{3} \frac{T}{H^2 R^2 r_0} \Phi \left(\frac{3}{4} \frac{r_0}{T} \frac{\dot{H}}{H} \tau H^2 R^2 \right). \quad (14)$$

На рис. 1—3 представлены графики

$$\Phi(z); \quad \nu\tau = f_1\left(\frac{E}{p}\right); \quad T = f_2\left(\frac{E}{p}\right).$$

Пользуясь этими графиками, можно вычислить необходимое для пробоя значение E/p .

Как видно из (14), E/p зависит от двух комбинаций четырех параметров H ; R ; \dot{H} ; τ , а именно: от HR и $\frac{\dot{H}}{H}\tau$.

При $\frac{\dot{H}}{H}\tau = 0$ получается обычное условие для пробоя: $\frac{\nu}{D}R^2 = 2,4^2$. При $\dot{H} > 0$ условия пробоя облегчаются. При $\dot{H} < 0$ пробой затрудняется.

Так как выражение (9) не обращается в нуль при $-1 < \beta_0 < 0$, а $\nu\tau = f_1\left(\frac{E}{p}\right)$ имеет максимум, то при достаточно большом отрицательном \dot{H} , а именно при

$$\left| \frac{\dot{H}}{H}\tau \right| > f_{\text{макс}},$$

пробой не может произойти ни при каких размерах системы.

Характерной особенностью является отсутствие минимума на кривой $E = E(p)$.

Пробойное напряжение непрерывно падает с падением давления. Это принципиальное отличие пробоя в магнитном

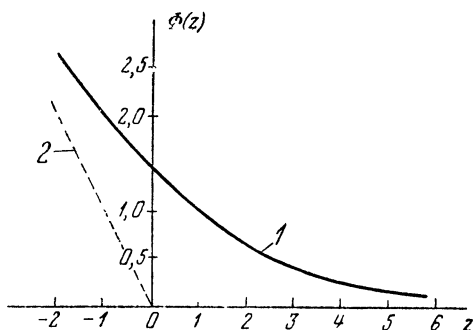


Рис. 3. 1 — $\Phi(z) \approx z^2 e^{-z}$ при $z \rightarrow \infty$; 2 — $\Phi(z) = |z| + \Phi(|z|)$ при $z < 0$.

ном поле от обычного пробоя обусловлено тем, что в отличие от обычного случая диффузия убывает, а не растет с уменьшением давления. Однако с уменьшением давления увеличивается время развития разряда.

При развитии разряда в магнитном поле при малой плотности газа нужно обратить особое внимание на напряженность электрического поля. Она должна быть выбрана так, чтобы электроны на длине пробега не набирали энергии, большей 100 эв, когда ионизация достигает максимума. В противном случае ионизация начнет падать, и разряд будет заглушаться. Последнее очень существенно при разряде в торе, где электроны большой энергии выходят из объема за счет усиленного центробежного дрейфа.

Прямая бесконечная труба представляет собой идеализацию. Наличие весьма малой кривизны может принципиально изменить результат.

Действительно, рассмотрим разряд в торе при постоянном магнитном поле. Вследствие дрейфа, обусловленного неоднородностью

родностью магнитного поля, все электроны уходят на одну из стенок, и только диффузия может воспрепятствовать этому. Вследствие этого постоянное магнитное поле не всегда значительно облегчает пробой в торе, и зависимость пробойного напряжения от давления совершенно отлична от рассмотренной выше.

Постоянное магнитное поле является в этой задаче в некотором смысле вырожденным случаем.

В возрастающем поле при достаточно малой кривизне задача становится полностью эквивалентной задаче о беско-

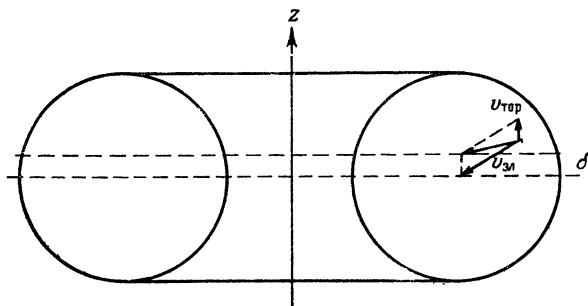


Рис. 4.

нечной трубе. Заряженные частицы в магнитном поле дрейфуют вследствие тороидальной неоднородности магнитного поля и вследствие наличия вихревого электрического поля.

Вследствие неоднородности магнитного поля и так называемого центробежного дрейфа частицы дрейфуют в торе вдоль оси z со скоростью, зависящей от скорости частицы вдоль и поперек магнитного поля. В среднем эта скорость порядка

$$v_{\text{тор}} = \frac{v_0^2}{\omega R},$$

где $\omega = \frac{eH}{mc}$; v_0 — скорость частицы.

Скорость дрейфа, вызванного электрическим полем, равна

$$v_{\text{эл}} = c \frac{[EH]}{H^2}.$$

Так как индукционное электрическое поле равно

$$E_{\varphi} = -\frac{\dot{H}}{2c} r,$$

то

$$\mathbf{v}_{\text{эл}} = -\frac{\dot{H}}{2H} \mathbf{r},$$

или

$$v_{\text{эл}x} = -\frac{\dot{H}}{2H} x; \quad v_{\text{эл}y} = -\frac{\dot{H}}{2H} y.$$

Полная дрейфовая скорость равна

$$v_x = -\frac{\dot{H}}{2H} x; \quad v_y = -\frac{\dot{H}}{2H} (y - \delta),$$

где

$$\delta = \frac{2v_0^2 H}{\omega R \dot{H}} = \frac{2mv_0^2 c}{e \dot{H} R}.$$

Таким образом, частицы дрейфуют так, как если бы никакого тороидального дрейфа не было, а центр магнитного поля был смещен на величину δ .

Если δ много меньше радиуса трубы, то все инжектируемые частицы соберутся к центру. Это требование накладывает следующее условие на скорость нарастания магнитного поля:

$$\dot{H} \gg \frac{2mv_0^2 c}{e R R_{\text{сеч}}},$$

где $R_{\text{сеч}}$ — радиус сечения.

При энергии электронов порядка нескольких десятков электрон-вольт не представляет труда создать соответствующее значение \dot{H} .

Если сделать стеклянную трубу, в которой находится газ, меньшего радиуса, чем соленоид, и совместить ее центр с эффективным магнитным центром, то задача о пробое в торе полностью сводится к задаче о пробое в прямой трубе.

Имело бы смысл рассмотреть вопрос о возможности экспериментального определения температуры электронов измерением необходимого смещения δ , которое зависит от температуры.

Электродный пробой в прямой трубе рассмотреть довольно сложно. Однако, если пробой осуществляется электрическим полем высокой частоты, так что за время изменения поля электроны мало смещаются, задача остается аналогичной предыдущей. Если, кроме того, период электрического поля больше времени между столкновениями, то и проводимость остается неизменной. Всегда существует такая частота, чтобы

удовлетворить обоим условиям, поскольку длина пробега электрона много меньше длины цилиндра.

Новым элементом по сравнению с бесконечной трубой является наличие неослабленной диффузии вдоль трубы.

Уравнение для пробоя имеет вид

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + D_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\dot{H}}{2H} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (nr^2) + \nu n = 0.$$

Оно сводится к уравнению типа (6) подстановкой $n = f(r) \cdot \cos \frac{\pi}{L} z$

$$D_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\dot{H}}{2H} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (nr^2) + \left(\nu - \frac{\pi^2 D}{L^2} \right) n = 0.$$

Условием пробоя является

$$\nu \tau = \frac{4}{3} \frac{T}{H^2 R^2 r_0} \Phi \left(\frac{3r_0}{4T} H^2 R^2 \frac{\dot{H}}{H} \tau \right) + \frac{\pi^2 T}{m} \left(\frac{\tau}{L} \right)^2.$$

Необходимое $\frac{E}{p}$ является функцией HR ; $\frac{\dot{H}}{H} \tau$; $\frac{\tau}{L}$.

Пробойное электрическое поле в данном случае имеет минимум по давлению. Этот минимум, однако, лежит много ниже минимума в отсутствие магнитного поля (при $L \gg R$).

Исследование пробоя в прямой трубе может представить интерес для определения вида функций $\nu \tau = f_1 \left(\frac{E}{p} \right)$; $T = f_2 \left(\frac{E}{p} \right)$, поскольку факт пробоя зависит от многих легко изменяемых и легко измеряемых параметров.

М. А. Леонтович

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ТОКА, ОКРУЖЕННОГО ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ ЦИЛИНДРОМ С РАЗЪЕМОМ *

Решается задача о нахождении магнитного поля внутри бесконечного круглого идеально проводящего цилиндра с разъемом для случая, когда внутри цилиндра параллельно его оси на расстоянии ξ от нее расположен прямой бесконечный линейный проводник с током I . При решении задачи принимаем, что смещение ξ мало по сравнению с радиусом цилиндра b , и длина разъема $2h$ мала по сравнению с b . Координаты точки пересечения тока $r = \xi$, $\varphi = 0$.

Для цельного идеально проводящего цилиндра без разъема поле легко находится и дается в цилиндрической системе координат (r, φ, z) следующими выражениями:

$$\begin{aligned}H_{\varphi}^0 &= \frac{2I}{cr} + \frac{2I}{c r b} \left(\frac{b}{r} + \frac{r}{b} \right) \xi \cdot \cos \varphi; \\H_r^0 &= \frac{2I}{c} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) \xi \sin \varphi; \\H_z^0 &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В дальнейшем нас будет интересовать только часть поля, зависящая от смещения ξ . Не зависящее от ξ и φ слагаемое $\frac{2I}{cr}$, очевидно, не изменится при наличии разъема, и мы его поэтому не будем писать, а будем искать поле в виде

$$H_{\varphi} = \cos \varphi h_{\varphi}(r, z); \quad H_r = \sin \varphi h_r(r, z); \quad H_z = \sin \varphi h_z(r, z).$$

* Работа выполнена в 1952 г.

Из уравнений $\text{rot } H = 0$ (вне тока) и $\text{div } H = 0$ вытекает, что это поле можно представить в виде

$$H'_\varphi = \cos \varphi \frac{u(r, z)}{r}; \quad H'_r = \sin \varphi \frac{\partial u(r, z)}{\partial r}; \quad H'_z = \sin \varphi \frac{\partial u(r, z)}{\partial z}, \quad (2)$$

причем u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

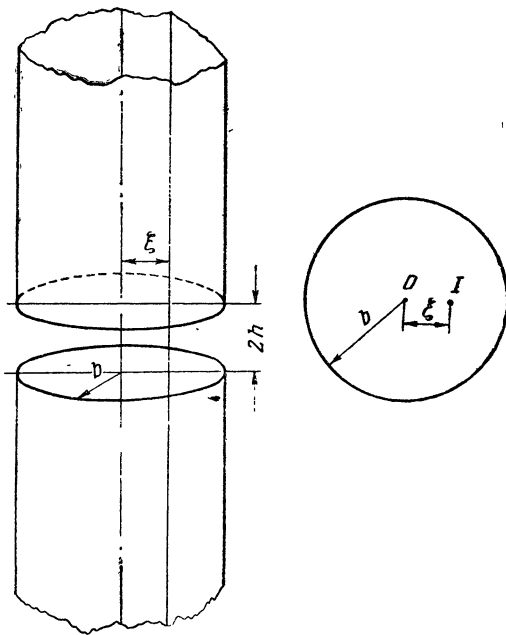


Рис. 1.

и должно на стенках при $r = b$ удовлетворять условию $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$. Легко видеть из (1), что без разъема имеем

$$u = u_0 = \frac{2I\xi}{cb} \left(\frac{b}{r} + \frac{r}{b} \right). \quad (4)$$

Для решения задачи с разъемом воспользуемся тем, что при $\frac{h}{b} \ll 1$ поле вблизи разъема можно считать приближенно

плоским, и для явного учета этого обстоятельства введем для этой части пространства координаты ρ, ζ

$$\rho = \frac{b-r}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}. \quad (5)$$

Тогда уравнение (3) при малом $\frac{h}{b}$ обратится в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (6)$$

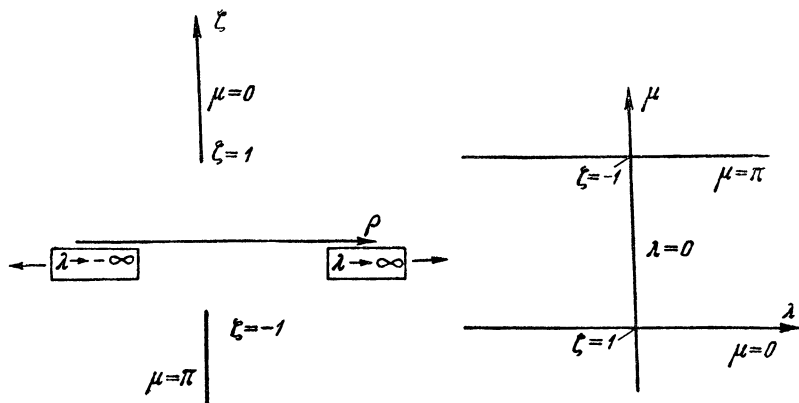


Рис. 2.

причем при $\rho = 0$ и $|\zeta| > 1$ $\frac{\partial h}{\partial \rho} = 0$.

С помощью конформного преобразования

$$\begin{aligned} \rho + i\zeta &= \frac{1}{i} \operatorname{ch}(\lambda + i\mu), \\ \rho &= \sin \mu \operatorname{sh} \lambda, \\ \zeta &= \cos \mu \operatorname{ch} \lambda \end{aligned} \quad (7)$$

преобразуем задачу в задачу для полосы $-\infty < \lambda < +\infty$, $0 < \mu < \pi$, причем концы щели преобразуются в точки $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\mu = \pi$.

Теперь имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0 \text{ при } \mu = 0 \text{ и } \mu = \pi.$$

Мы должны найти решение, обращающееся в нуль при $\lambda < 0$ далеко вне цилиндра и приближенно равное u_0 при удалении от щели на расстоянии порядка b при $\lambda > 0$. Решение, удовлетворяющее этому условию, имеет вид

$$u = \frac{u_0(b)}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + 1 \right). \quad (8)$$

При этом λ находится из условий

$$z_1 = h\zeta_{\lambda_1} = h \operatorname{ch} \lambda_1 \cong \frac{h}{2} e^{\lambda_1}, \quad (9)$$

$$z_1 = \frac{a}{2} b.$$

Мы считаем, что удаляемся от щели по поверхности цилиндра ($\mu = 0$, $r = b$), α — коэффициент порядка единицы. Легко видеть, что выражение (7) обращается в нуль при $\lambda = -\lambda_1$, т. е. на расстоянии $z_1 = \frac{ab}{2}$ с внешней стороны цилиндра, и обращается в $u_0(b)$ на этом же расстоянии внутри него. Находя λ_1 из (9), получаем $\lambda_1 = \ln \frac{ab}{h}$ и

$$u = \frac{u_0(b)}{2} \left(\frac{\lambda}{\ln \frac{ab}{h}} + 1 \right). \quad (10)$$

Это выражение, разумеется, годно только вблизи щели. Воспользуемся им, чтобы найти значение $\frac{\partial u}{\partial r}$ на щели. Дифференцируя (10) и используя при этом (7), находим на щели ($\lambda = 0$, $0 < \mu < \pi$)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{u_0(b)}{2 \sqrt{h^2 - z^2} \ln \frac{ab}{h}}.$$

Теперь, определив значение производной $\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=b} = f(z)$ всюду на поверхности цилиндра при $r = b$,

$$f(z) = 0, \quad |z| > h, \\ f(z) = - \frac{u_0(b)}{2 \sqrt{h^2 - z^2} \ln \frac{ab}{h}}, \quad |z| < h, \quad (12)$$

можем найти поле всюду внутри цилиндра. Для этого полагаем

$$u = u_0 + v, \quad (13)$$

где u_0 — решение при отсутствии разъема, так что $\frac{\partial u_0}{\partial r} = 0$ при $r = b$ и для всех z ; u_0 имеет особенности при $r = 0$; v — регулярно всюду внутри цилиндра и при $r = b$, $\frac{\partial v}{\partial r} = f(z)$. Очевидно, v дает возмущение поля, вызванное разъемом.

Решение уравнения для v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

удовлетворяющее этим условиям, может быть написано в виде интеграла

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} G(q) J_1(iqr) e^{iqz} dq.$$

При этом $G(q)$ находится из условия

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=0} = f(z) = i \int_{-\infty}^{+\infty} G(q) q J_1'(iqb) e^{iqz} dq,$$

так что

$$G(q) = \frac{u_0(b)}{4\pi i q J_1'(iqb) \ln \frac{ab}{h}} \int_{-h}^{+h} \frac{e^{iqz} dz}{\sqrt{h^2 - z^2}} = \frac{u_0(b) J_0(qh)}{4\pi i \ln \frac{ab}{h} q J_1'(iqb)}.$$

Следовательно,

$$v = -\frac{u_0(b)}{4i \ln \frac{ab}{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(qh) J_1(iqr) e^{iqz}}{q J_1'(iqb)} dq. \quad (14)$$

Для $z > h$ это выражение преобразуется в ряд по вычетам

$$v = -\frac{\pi u_0(b)}{2 \ln \frac{ab}{h}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x_n J_0\left(ix_n \frac{h}{b}\right) J_1\left(x_n \frac{r}{b}\right)}{(x_n^2 - 1) J_1(x_n)} \cdot e^{-x_n \frac{z}{b}}, \quad (15)$$

где κ_n — корни уравнения

$$J'_1(\kappa_n) = 0, \quad (16)$$

или, что то же, уравнения

$$\kappa_n J_0(\kappa_n) = J_1(\kappa_n). \quad (17)$$

Имеем $\kappa_1 = 1,84$; $\kappa_2 = 5,34$; $\kappa_3 = 8,54$ и т. д. При $z = 0$ и для $r \ll b$ получим

$$v = -\frac{u_0(b) \cdot r}{8 \ln \frac{ab}{h} \cdot b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{J'_1(ix)}. \quad (18)$$

Приближенно ограничиваясь в (15) первым членом, имеем

$$v = -\frac{1,9ru_0(b)}{b \ln \frac{ab}{h}} \cdot e^{-\frac{1,84z}{b}}. \quad (19)$$

Здесь всюду

$$u_0(b) = \frac{4I\xi}{cb}.$$

Чтобы учесть влияние разьема на силу, действующую на линейный ток (равную $-\frac{JI'_\varphi}{c}$, где H'_φ — поле в цилиндре за вычетом собственного поля тока), нужно, очевидно, сравнивать v с величиной $u' = u_0 - \frac{2I\xi}{r}$, т. е. с

$$u' = \frac{2I\xi}{cb^2} r = u_0(b) \frac{r}{2b}.$$

При этом для $z = 0$, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{J'_1(ix)} = 5,2,$$

получаем

$$\frac{v}{u'} = -\frac{1,3}{\ln \frac{ab}{h}}. \quad (20)$$

Для $z \gg h$ получаем при $r \ll b$

$$\frac{v}{u'} = - \frac{3,7}{\ln \frac{ab}{h}} e^{-\frac{1,84z}{b}}.$$

Эти отношения и дают относительную величину вызванного разъемом изменения силы F , тянущей ток к центру цилиндра, т. е. $\frac{v}{u'} = \frac{\Delta F}{F}$. Как видно из знака выражения (20), наличие разьема вблизи него уменьшает силу, тянущую ток к центру цилиндра.

С. И. Брагинский

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕВОЙ ОБЛАСТИ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА *

Рассмотрим однородный вдоль оси цилиндр из полностью ионизированной плазмы, по которому течет ток. Магнитные силы этого тока стягивают плазму, уравнивая ее давление. Такой плазменный шнур при одинаковых температурах ионов и электронов рассмотрен в [1].

Представляет интерес рассмотреть, что происходит вблизи оси шнура. Вблизи самой оси, где магнитное поле проходит через нуль, траектории частиц имеют вид змеек, а не кружков, как в остальных частях шнура, поэтому здесь можно ожидать некоторых особенностей. Необходимость специального изучения области около оси была впервые отмечена Г. И. Будкером, указавшим также, что при высокой температуре ωt может быть велико даже внутри области змеевидных траекторий. Мы сделаем попытку рассмотреть приосевую область с помощью макроскопических уравнений.

Можно указать простое условие, выполнение которого обеспечивает в среднем по шнуру близость друг к другу температур ионов и электронов $T_e \approx T_i$. Это условие было получено в работе автора, опубликованной впоследствии в [2]. Оно имеет вид $\Pi \gg 1$, где $\Pi = \frac{e^2 N}{m_i c^2}$. Здесь e — заряд электрона; c — скорость света; m_i — масса иона; N — число ионов в плазменном шнуре на единицу длины. Оказывается однако, что даже при выполнении этого условия в области вблизи оси получается небольшой отрыв температур, учет которого в этой области является существенным.

* Работа выполнена в 1952 г.

Будем считать магнитное поле большим и температуру плазмы высокой, так что циклотронная частота частиц ω велика по сравнению с частотой столкновений $1/\tau$. В рассматриваемой геометрии все градиенты и электрическое поле направлены перпендикулярно к магнитному полю. Уравнения для плазмы с разными температурами электронов и ионов при этих условиях получены в [3] [см. там уравнения (10), (11), (17), (19)]. Для стационарного случая система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{1}{r} \frac{drH}{dr} = \frac{4\pi}{c} j = -\frac{4\pi}{H} \frac{dn(T_e + T_i)}{dr}; \quad (1a)$$

$$(T_e + T_i) \frac{dn}{dr} + n \frac{dT_i}{dr} - \frac{n}{2} \frac{dT_e}{dr} + \frac{\sigma_1}{c} EHT_e^{3/2} = 0; \quad (1б)$$

$$\frac{1}{r} \frac{drq_e}{dr} + \frac{cE}{H} \frac{dn(T_e + T_i)}{dr} + \Delta Q = 0; \quad (1в)$$

$$\frac{1}{r} \frac{drq_i}{dr} - \Delta Q = 0; \quad (1г)$$

$$q_e = -\frac{2,41c^2n^2}{\sigma_1 H^2 T_e^{1/2}} \frac{dT_e}{dr} - \frac{3}{2} \frac{cE}{H} nT_e; \quad (1д)$$

$$q_i = -\left(\sqrt{\frac{m_i}{2m_e}} + \frac{15}{4} \frac{T_i^{3/2}}{T_e^{3/2}} \right) \frac{2c^2n^2}{\sigma_1 H^2 T_i^{1/2}} \frac{dT_i}{dr}; \quad (1е)$$

$$\Delta Q = \frac{3e^2n^2}{\sigma_1 m_i T_e^{3/2}} (T_e - T_i). \quad (1ж)$$

Обозначения здесь те же, что и в [1]; индексами e, i отмечены электроны и ионы.

Уравнение (1а) есть уравнение Максвелла; (1б) получается, если приравнять нулю радиальный поток частиц; (1в) и (1г) — балансы тепла электронов и ионов; (1д), (1е) — выражения для радиальных потоков тепла электронов и ионов. Выражение для передачи тепла от электронов к ионам ΔQ было впервые получено Л. Д. Ландау [4].

Теплопроводность ионов значительно больше, чем электронов, поэтому температуру ионов можно считать в центральной области постоянной и не рассматривать ионного потока тепла. Приведем уравнения к безразмерному виду, приняв за единицу плотности плотность в центре n_0 , за единицу температуры T_0 (пока эту величину не фиксируем),

а за единицы магнитного поля и длины примем $H_1 = (4\pi n_0 T_0)^{1/2}$, $r_1 = cH_1/E 4\pi\sigma_1 T_0^{3/2}$. Уравнения для H , n , T_e , q_e примут в этих единицах вид

$$\frac{1}{r} \frac{drH}{dr} = -\frac{1}{H} \frac{dn(T_e + T_i)}{dr}; \quad (2a)$$

$$(T_e + T_i) \frac{dn}{dr} - \frac{n}{2} \frac{dT_e}{dr} + HT_e^{3/2} = 0; \quad (2б)$$

$$\frac{1}{r} \frac{drq_e}{dr} + \frac{1}{H} \frac{dn(T_e + T_i)}{dr} + \delta \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_e - T_i) = 0; \quad (2в)$$

$$q_e = -\frac{2,41n^2}{H^2 T_e^{1/2}} \frac{dT_e}{dr} - \frac{3}{2} \frac{nT_e}{H}. \quad (2г)$$

Эта система содержит параметр

$$\delta = \frac{3e^2 n_0^2}{m_i c^2 \sigma_1 E^2 T_0^2} = \frac{12\pi e^2 n_0 r_1^2}{m_i c^2}, \quad (3)$$

равный по порядку величины Π . Будем считать этот параметр большим и искать решение системы в виде разложения по его обратным степеням. Сделаем подстановку

$$x = \delta^{1/2} r^2/2; \quad \vartheta = \delta^{1/2} (T_e - T_i); \quad y = \delta^{1/2} (1 - n); \quad u = H/r \quad (4)$$

и положим

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta^{1/2} \vartheta_1 + \delta \vartheta_2 + \dots \text{ и т. д.}$$

Примем $T_i = T_0$; в выбранных единицах $T_i = 1$. Для нулевых приближений получим (индексы нуль опущены)

$$\begin{aligned} 2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\vartheta}{dx} &= u; \\ 2u \frac{dxu}{dx} &= u - \frac{3}{2} \frac{d\vartheta}{dx}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dq}{dx} = \vartheta$$

$$q = \frac{2,41}{u^2} \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{3}{2u}.$$

Граничные условия для этой системы следующие: при $x=0$; $y=0$, $q=0$; условие аналитичности в нуле дает $u(0) \equiv u_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{4 \cdot 2,41} \right) = 0,967$, величина $\vartheta(0) \equiv \vartheta_0$ подбирается так, чтобы при $x \rightarrow \infty$ $\vartheta \rightarrow 0$ (так как на большом расстоянии от оси $T_e - T_i \sim \delta^{-1}$, а не $\delta^{-1/2}$). Численные расчеты показывают, что это имеет место при некотором значении ϑ_0 , лежащем в пределах 1,034 и 1,045. Решение уравнений

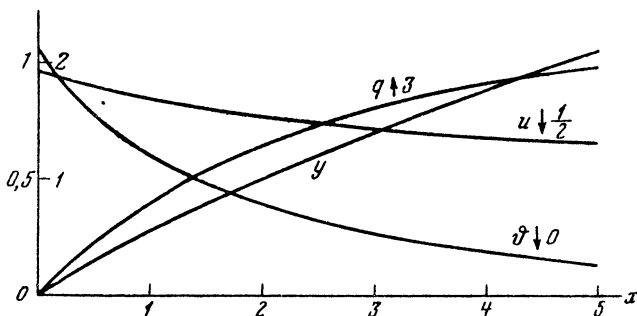


Рис. 1.

(5) для $\vartheta_0 = 1,0343$ представлено на рис. 1. Асимптотически при $x \rightarrow \infty$ $\vartheta \sim \exp(-x/2\sqrt{2,41})$. Величина u пропорциональна $r^{-2} \int_0^r j r dr$. При $x=0$ $u = 0,967$, при $x \rightarrow \infty$ $u \rightarrow 0,5$.

Таким образом, в центре плотность тока больше, чем «на бесконечности»; в 1,93 раза. Любопытно отметить, что отношение электропроводностей вдоль и поперек магнитного поля с хорошей точностью равно этой величине.

Для ширины «центральной области» и магнитного поля в ней в обычных единицах имеем $r_{ц}^2 \sim r_1^2 \delta^{-1/2}$, $H_{ц} \sim j r_{ц} / c$. Это дает

$$r_{ц} \sim \frac{(m_i T_0)^{1/2} c}{e H_{ц}} = \rho_i. \quad (6)$$

Таким образом, центральная область, в которой имеются отрыв температур и повышенная плотность тока, простирается до того места, где замедляются ионы. У электронов лорнморовские радиусы малы по сравнению с $r_{ц}$, чем и оправдывается применение уравнений (1) в этой области.

Далее можно с хорошим приближением пользоваться «одно-температурным» решением.

Если величина Π мала, то сильный отрыв температур будет по всему сечению. «Центральная область» как бы распространяется на весь шнур. При этом можно в системе (2) положить в первом приближении $\delta=0$, $T_i=0$. Численное интегрирование показывает, что плотность и температура электронов при этом монотонно падают по радиусу и на краю обращаются в нуль с вертикальной касательной.

Приношу глубокую благодарность Б. И. Давыдову за руководство работой и Г. И. Будкеру за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Брагинский, см. настоящий том, стр. 115.
 2. С. И. Брагинский, ЖЭТФ, 33, 645 (1957).
 3. С. И. Брагинский, см. настоящий том, стр. 178.
 4. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).
-

В. С. Комельков, В. И. Синицын

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МОЩНОГО ГАЗОВОГО РАЗРЯДА *

§ 1. Введение

В настоящей работе описан метод регистрации формы и величины импульсов давления, приходящих на стенки разрядной камеры в процессе развития и прохождения внутри нее газового разряда. Этот метод позволяет установить фазовые соотношения между током разряда и давлением на стенках камеры, а также, при определенных допущениях, произвести оценку энергии частиц плазмы.

В качестве датчика давления использован титанат бария $BaTiO_3$, который обладает рядом преимуществ по сравнению с другими пьезокристаллами (кварц, турмалин, сегнетова соль). Конструкция держателя и кожуха датчика подобрана экспериментально применительно к конструкции узлов, на которых он закрепляется. Размеры и материалы конструкции выбраны так, чтобы погрешности датчика были минимальными.

Импульсы от датчика подавались на катодный повторитель и затем на вход усилителя двухлучевого импульсного катодного осциллографа ОК-17. С помощью такого быстродействующего пьезоманометра были измерены импульсы давления на стенки в тороидальной камере ($D=1000$ мм, $d=60$ мм) и в прямой трубе ($L=1000$ мм, $d=60$ мм). Обе камеры были изготовлены из кварца. Эксперименты были выполнены при различных начальных плотностях нейтраль-

* Работа выполнена в 1952 г.

ного газа и различных величинах тока, текущего через плазму. Градуировка датчика производилась механическими импульсами, возникающими при ударе груза о поверхность датчика.

Полученные результаты сопоставлены с данными теории.

§ 2. Измерительное устройство и градуировка датчика

Первым вопросом, возникшим при изучении быстро меняющихся давлений, был вопрос о конструировании манометра, пригодного для регистрации давлений, изменяющихся с частотой порядка нескольких десятков килогерц. Такая частота соответствовала в наших условиях собственной частоте колебательного контура с разрядным промежутком. В этом отношении удобнее всего было бы использовать пьезоэлектрический эффект в некоторых кристаллах, способных с достаточно малой инерцией преобразовывать прикладываемое к их граням давление в электрические заряды.

Так как величина давления была по сути дела неизвестной, то понятно, что с целью повышения чувствительности следовало остановиться на пьезоэлементе с наибольшим пьезоэлектрическим модулем. Как известно, в случае продольного пьезоэлектрического эффекта количество электричества, возникающее на гранях кристалла при его сдавливании, будет выражаться равенством

$$Q = \alpha Sp, \quad (2.1)$$

где Q — возникающий заряд; α — пьезоэлектрический модуль; S — площадь пластинки, подвергаемой сдавливанию; p — давление.

Если Q выражено в ед. $CGSE$, p — в динах на 1 см^2 , S — в квадратных сантиметрах, то α измеряется в $CGSE/\text{дин}$. Для кварца $\alpha = 6,45 \cdot 10^{-8} \text{ CGSE}/\text{дин}$. Знак заряда меняется с изменением направления действия силы.

Существует много кристаллов, обладающих пьезоэффектом и применяемых на практике в различных целях (кварц, турмалин, сегнетова соль и др.). В настоящей работе использован образец из пьезокерамики BaTiO_3 (титанат бария); его чувствительность на два порядка выше, чем у кварца

$$\alpha_{\text{BaTiO}_3} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ CGSE}/\text{дин}.$$

Цилиндрический образец титаната бария диаметром 10 мм и высотой 5 ÷ 10 мм обладает достаточной прочностью. Его рабочие поверхности покрываются серебром (вжиганием последнего в процессе технологической обработки). Такое

серебрение более надежно, чем катодное распыление или наклейка металлических электродов. Следует отметить, что в наших условиях, когда кристалл приходится крепить в специальную оправку датчика, плотный механический и электрический контакт оправки с рабочими поверхностями кристалла приобретает существенное значение. В этом отношении перечисленные достоинства BaTiO_3 дают ему преимущество перед другими кристаллами.

Собственная частота образца пьезоэлемента определяется формулой

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.2)$$

где l — длина образца; ρ — плотность; E — модуль Юнга. Для титаната бария $\rho = 6,2 \text{ г/см}^3$, $E = 1,15 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$. Таким образом, для титаната бария

$$fl = \text{const} = 215 \text{ кгц.}$$

В опытах, рассмотренных ниже, были использованы образцы длиной 5 мм, следовательно,

$$f_{\text{собств.}} = 430 \text{ кгц.}$$

Частота колебаний газоразрядного тока была близка к 10 кгц, и поэтому можно было не опасаться явления резонанса.

Всю измерительную систему можно представить в виде следующей блок-схемы (рис. 1).

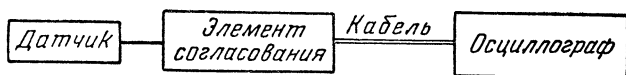


Рис. 1.

Принципиальная схема датчика показана на рис. 2.

В этой конструкции торцевые поверхности пьезоэлемента являются рабочими.

При воздействии импульса давления на дно датчика на этих поверхностях кристалла, зажато между дном и свинцовым стержнем, возникает импульс напряжения. Далее этот импульс подается на измерительную схему. Вся конструкция надежно экранирована медными стенками корпуса

датчика. Дно датчика имеет толщину 0,2 мм. Звуковая волна проходит это расстояние за время

$$t = \frac{h}{v} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{3,5 \cdot 10^5} = 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ сек},$$

где h — толщина дна датчика; v — скорость звуковой волны и меди.

По сравнению с продолжительностью импульса нашего процесса (50 мксек) эта погрешность несущественна и находится далеко за пределами точности измерений.

Некоторое сглаживание фронта волны напряжения, получаемой от датчика при воздействии ударного импульса давления, возникает за счет неполного сжатия датчика в тот момент, когда по нему движутся звуковые волны. Время движения звуковых волн по образцу толщиной 5 мм составляет около 1,5—5 мксек, т. е. практически может не приниматься в расчет. Однако, при регистрации коротких импульсов с этим необходимо считаться.

Выбор свинца в качестве материала стержня, поджимающего кристалл, обусловлен стремлением к снижению помех от отраженных звуковых волн, которые, возвращаясь обратно к кристаллу, вызывают вторичные импульсы давления. Эта цель будет достигнута, если первый отраженный импульс звуковой волны возвратится к рабочей поверхности кристалла через промежуток времени, много больший, чем время исследуемого явления. Только при этом условии можно избавиться от влияния вторичных импульсов давления. Резиновая шайба служит своеобразным демпфером звуковых волн, препятствующим их прохождению от стержня через корпус датчика к кристаллу. Свинцовый стержень, кроме того, играет роль внутреннего электрода, соединенного непосредственно с сеткой лампы измерительной схемы.

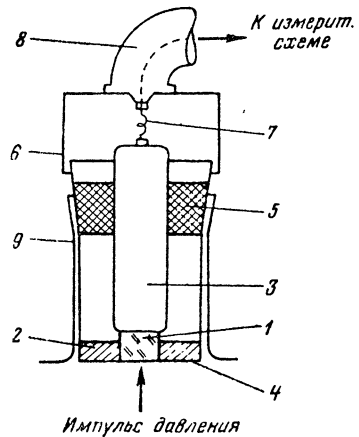


Рис. 2.

1 — кристалл; 2 — центрирующая шайба; 3 — свинцовый стержень; 4 — торец датчика, являющийся чувствительной поверхностью; 5 — резиновая шайба; 6 — кожух — медный экран; 7 — соединительный проводник; 8 — кабель; 9 — кварцевый патрубок.

Все эксперименты по определению чувствительности датчика, а также по подбору наиболее приемлемых конструктивных размеров, велись с помощью искрового разрядного промежутка, который являлся источником ударной волны в воздухе. В дальнейшем в опытах по исследованию импульсов давления внутри газовых камер, датчик крепился в специальном патрубке на пьезине таким образом, чтобы он своим торцом был обращен внутрь газоразрядного объема на уровне стенки камеры.

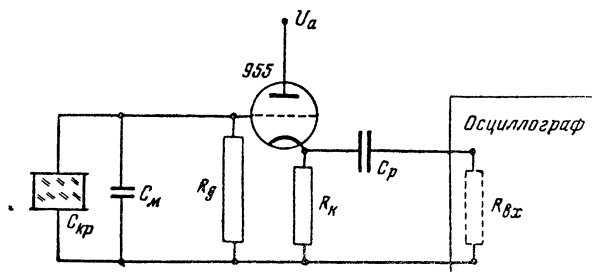


Рис. 3. $V_a = 150$ в; $R_g = 4,3$ Мом; $R_k = 1,5$ ком; $R_{вх} = 100$ ом; $C_{кр} = 100$ мккф; $C_p = 4$ мкф; C_m — масштабная емкость.

Работа на установке с большими токами и высоким напряжением требовала удаления измерительных приборов и самих экспериментаторов на некоторое расстояние от газоразрядной камеры. Связь датчика и осциллографа осуществлялась при помощи кабеля длиной 10—15 м. Для усиления возникающих сигналов был использован собственный усилитель осциллографа, на входе которого, для лучшего согласования с кабелем, включалось сопротивление $R_{вх} = 100$ ом. При этом, однако, возникала трудность в согласовании высокоомного выхода пьезоэлектрического датчика с входом осциллографа.

Для передачи сигнала без искажения необходимо, чтобы входные RC осциллографа и согласующего элемента были много больше длительности передаваемого импульса. Для надежного выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$RC \geq 10\tau_{имп.}$$

Этому требованию, с учетом согласования схемы с кабелем, удовлетворяет катодный повторитель, принципиальная схема которого изображена на рис. 3.

Величина импульсов напряжения на датчике определяется равенством

$$U = \frac{Q}{C_{кр} + C_M} = \frac{\alpha S p}{C_{кр} + C_M}, \quad (2.3)$$

которое показывает, что для получения максимальной чувствительности необходимо уменьшать C_M . Однако это ведет к уменьшению RC входной цепи повторителя: $\tau_{вх} = R_g (C_{кр} + C_M)$. В этом случае для выполнения условия $\tau_{имп} \ll \tau_{вх}$ требуется увеличение R_g , что влечет за собой необходимость постановки лампы в электрометрический режим с некоторым недокалом и пониженным сеточным током. В данном случае, если даже положить $C_M = 0$, на входе катодного повторителя получается: $\tau_{вх} = 4,3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-10} = 430 \text{ мксек}$. На входе усилителя осциллографа: $\tau_{вх} = 100 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 400 \text{ мксек}$. Таким образом, для импульсов, регистрируемых в наших условиях ($\tau_{имп} = 50 \text{ мксек}$), требование неискаженной их передачи через согласующий и усилительный тракт можно считать выполненным.

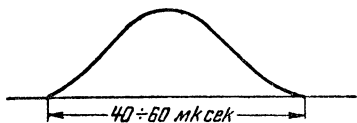


Рис. 4.

Для количественного измерения регистрируемого давления была произведена градуировка датчика механическим путем. Шарик известной массы падал с определенной высоты под действием силы тяжести на чувствительную плоскость датчика. Появляющийся при этом импульс напряжения подавался на измерительную схему и фиксировался на фотопленке. Осциллограмма такого импульса имеет вид, изображенный на рис. 4.

Если бы был известен закон изменения во времени, описываемый этой кривой, то нетрудно было бы ее пронормировать и найти масштаб перехода от электрических величин, регистрируемых осциллографом, к величинам импульсов давления, которым подвергается датчик. При любом механизме удара справедливо соотношение

$$A \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = kmv, \quad (2.4)$$

A — масштабный коэффициент, зависящий от выбора единиц.

k — коэффициент, характеризующий степень упругости удара:

$k=1$ — удар неупругий, $k=2$ — удар упругий; m — масса шарика; v — его скорость в момент касания дна датчика.

Из рассмотрения градуировочных осциллограмм видно, что можно принять $k=1$, так как вторичные импульсы от последующих ударов шарика по поверхности датчика незначительны.

По форме кривая (рис. 4) близка к синусоиде. Исходя из этого предположения и проведем нормировку. Выражение (24) можно теперь написать так:

$$\begin{aligned}
 mv &= \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin \omega t \, dt = -\frac{A}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
 &= -\frac{AT}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{AT}{\pi}, \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

или

$$A = \frac{mv\pi}{T}.$$

Для проверки правильности подсчета импульса, появляющегося при ударе шарика о торец датчика, т. е. для подтверждения правильности применения соотношения

$A \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt = mv$, были проведены опыты при различных значениях t_1 и t_2 .

В результате получено хорошее согласие экспериментальных и расчетных данных. Так, например, при падении шарика с различных высот h с хорошей точностью удовлетворяется соотношение

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} f^*(t) \, dt} = \sqrt{\frac{h}{h^*}}.$$

§ 3. Описание экспериментов и анализ результатов

Рассмотренный метод был применен к измерению давления на стенках камеры в условиях прохождения мощного импульсного разряда. Опыты были выполнены на двух установках.

Первая установка представляла собой тороидальную кварцевую камеру с диаметром тора, равным 1000 мм, и диаметром трубы 60 мм. Разряд в камере зажигался при разрядке на медный тороидальный кожух, охватывающий камеру, батареи конденсаторов емкостью 240 мкф при рабочем напряжении 25—30 кв. Камера заполнялась водородом, и эксперименты велись при начальных давлениях водорода от 0,1 до 1 мм рт. ст.

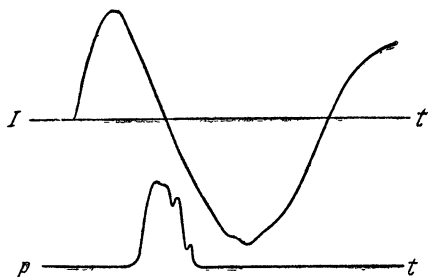


Рис. 5. Тор: $P_{\text{нач}} = 1$ мм рт. ст.;
 $V_{\text{бат}} = 25$ кв; $I_{\text{макс}} = 72$ ка;
 $P_{\text{имп. макс}} = 0,8$ атм.

Другая установка представляла собой прямую кварцевую трубу длиной 1000 мм и диаметром 60 мм, окруженную медным кожухом. Питание осуществлялось от батареи конденсаторов емкостью 42 мкф, рабочее напряжение составляло 15—20 кв. Эксперименты проводились на водороде при начальных давлениях водорода от 0,04 до 1 мм рт. ст.

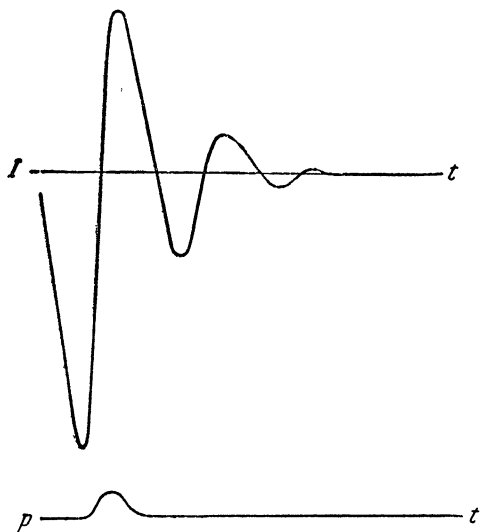


Рис. 6. Прямая труба: $P_{\text{нач}} = 1,5$ мм рт. ст.;
 $V_{\text{бат}} = 18$ кв; $I_{\text{макс}} = 80$ ка; $P_{\text{имп. макс}} = 1,3$ атм.

Питание осуществлялось от батареи конденсаторов емкостью 42 мкф, рабочее напряжение составляло 15—20 кв. Эксперименты проводились на водороде при начальных давлениях водорода от 0,04 до 1 мм рт. ст.

На фотопленке осциллографа одновременно регистрировались изменения во времени производной разрядного тока I и давления. После интегрирования кривой $\dot{I} = f(t)$ можно было установить фазовые соотношения между импульсом тока и импульсом давления. На рис. 5 и 6 показаны типичные осциллограммы.

Ниже приводится сводная таблица результатов измерений, выполненных при различных начальных плотностях нейтрального газа и величинах тока, текущего через плазму.

| Тип разрядной камеры | Начальное давление в камере, мм рт. ст. | Ток, μa | Импульс давления на стенку, полученный экспериментально | Тип разрядной камеры | Начальное давление в камере, мм рт. ст. | Ток, μa | Импульс давления на стенку, полученный экспериментально |
|----------------------|---|--------------------|---|----------------------|---|--------------------|---|
| | | | | | | | |
| Прямая труба | 0,75 | 40 | 0,47 | Прямая труба | 0,06 | 114 | 1,00 |
| | 0,06 | 44 | 0,35 | | 0,18 | 115 | 1,15 |
| | 0,75 | 47 | 0,77 | | 0,20 | 115 | 0,92 |
| | 0,04 | 60 | 0,77 | | 0,60 | 116 | 1,15 |
| | 1,50 | 80 | 1,30 | 0,60 | 116 | 1,30 | |
| | 0,05 | 85 | 0,77 | Тор | * 0,15 | 72 | 0,90 |
| | 0,75 | 85 | 0,90 | | 1,00 | 72 | 0,80 |
| | 1,00 | 113 | 1,10 | | 1,00 | 100 | 1,45 |

* Результаты измерений в тороиде при давлении 0,15 мм следует рассматривать как весьма приближенные.

Полученные результаты наглядно представлены на графике $p = f(I)$ (рис. 7).

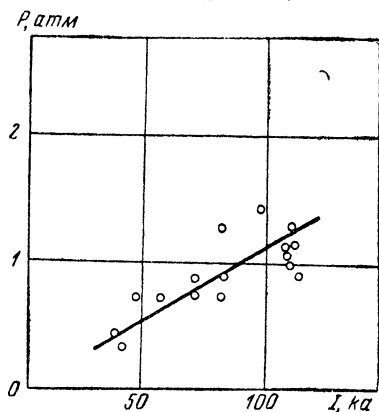


Рис. 7.

§ 4. Выводы

1. Импульс давления на стенки камер сдвигнут по фазе относительно тока разряда на угол, достигающий $\pi/2$.

2. Нагрев газа происходит в некотором удалении от стенок камеры. В противном случае импульс давления нарастал бы непрерывно вместе с током. Сдвиг импульса по фазе показывает наличие магнитной термоизоляции нагреваемой плазмы. Уход газа на стенки, по-видимому, начинается или при превышении

газодинамического давления над магнитным, или из-за нарушения устойчивости канала разряда.

Проведенная серия опытов показывает пригодность данного метода для изучения некоторых свойств газоразрядной плазмы. Однако требуются дальнейшие эксперименты как для усовершенствования метода, так и для согласования его с другими способами изучения плазмы.

Г. И. Бুদ্ধер

ТЕРМОЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЗАРЯДА *

Объем, заполненный электронами, представляет собой потенциальную яму для ионов, в которой могут, вообще говоря, происходить термоядерные реакции. Попытка создать облако электронов необходимой плотности при помощи внешних электродов, по-видимому, полностью обречена на неудачу. Действительно, в этом случае мы вынуждены компенсировать давление электронного и ионного газов давлением внешнего электрического поля, при этом должно быть

$$\frac{E^2}{8\pi} \geq (nT)_{\text{эл}} + (nT)_{\text{ион}}. \quad (1)$$

Создание таких полей при плотностях плазмы и размерах системы, представляющих практический интерес, невозможно.

Заряженное электронное облако большой плотности можно, по-видимому, создать при помощи пучка релятивистских электронов, в котором сила кулоновского расталкивания почти полностью компенсируется силой магнитного стягивания. Глубина ямы в таком пучке, если количество ионов много меньше количества электронов, равна

$$W_{\text{ям}} = v_1 \left(1 + 2 \ln \frac{R}{R_0} \right) mc^2,$$

где $v_1 = \frac{e^2}{mc^2} w$; w — количество электронов на единице длины пучка; R_0 — радиус сечения электронного пучка; R — радиус металлической трубы, в которой находится пучок.

* Работа выполнена в 1952 г.

Нейтральный газ в объеме, при отсутствии натекания, очень быстро ионизируется пучком. Существует, однако, некоторое стационарное количество нейтрального газа, обусловленное рекомбинацией ионов на стенках. Если S есть поток ионов на стенку, то количество нейтральных частиц в объеме равно $N_0 = St_0$, где t_0 — время жизни нейтральной частицы.

Несмотря на то, что N_0 очень мало, его наличие играет важную роль.

Передача тепла от ионного газа стенкам происходит главным образом через нейтральные атомы. Действительно, ион, достигнув стенки, обладает почти нулевой скоростью и поэтому почти не передаст ей энергию. На стенке он нейтрализуется и в качестве нейтрального атома входит в объем. В объеме он несколько раз перезаряжается, причем образовавшийся быстрый нейтральный атом каждый раз уносит на стенку энергию порядка температуры ионного газа. Наконец, нейтральный атом ионизируется, и образовавшийся электрон уносит на стенку энергию порядка высоты барьера $|R \gg R_{и}|$. Таким образом, поток энергии на стенку выражается через поток ионов на стенку следующим образом

$$Q = \left(\frac{\sigma_{пер}}{\sigma_{ион}} T + W_{ям} \right) S. \quad (2)$$

Представляет интерес отношение величины Q к числу ядерных реакций за 1 сек. в объеме цилиндра длиной 1 см. Это отношение характеризует энергию, которая уходит на один нейтрон.

Число ядерных реакций в 1 сек. равно

$$N = \pi R_{и}^2 n_{и}^2 \sigma_{яд} v_{и} = \frac{\sigma_{яд}}{\pi r_0^2} \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{\frac{T}{mc^2}} \frac{c v_2^2}{R_{и}}, \quad (3)$$

где $v_2 = \frac{e^2}{mc^2} N_2$ (N_2 — число ионов на единице длины пучка), а $R_{и}$ — средний радиус ионного распределения.

Для оценки потока ионов на стенку S решим следующую вспомогательную задачу. Пусть в пространстве импульсов в плазме задано условие, что плотность частиц равна нулю при некотором значении абсолютной величины импульса p_m , много большем среднего значения импульса. Требуется найти поток частиц на эту границу. Можно рассматривать стационарную задачу, считая, что вблизи нуля имеются такие источ-

ники, что распределение частиц по энергиям близко к максвелловскому. Считая плотность не зависящей от координат (при отсутствии сил), получаем из уравнения Ландау

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div}_p \mathbf{I}; \quad (4)$$

здесь

$$I_i = \pi e^4 L \sum_{1,2} \int \left\{ f \frac{\partial f'}{\partial p'_k} - f' \frac{\partial f}{\partial p_k} \right\} \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} d\tau', \quad (5)$$

где

$$u_i = v_i - v'_i.$$

Так как нас интересует рассеяние частиц со скоростью, много большей средней, то, сделав предположение, что в их рассеянии главную роль играют частицы с энергией порядка средней (поскольку их много больше), можем разложить выражение (5) по степеням $\frac{v_{cp}}{v}$, приняв при этом распределение рассеивающих частиц за максвелловское.

После несложных выкладок получаем

$$I_i = \sum_{1,2} \frac{\pi e^4 L n'}{v} \left\{ \left[\frac{v_i v_k - v^2 \delta_{ik}}{v^2} \frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{2f v_i}{m' v^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{T'}{m' v^2} \cdot \frac{3v_i v_k - \delta_{ik} v^2}{v^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_k} \right\}. \quad (6)$$

При этом мы, кроме членов нулевого порядка (в квадратных скобках), сохраним также и второй член разложения

$$\operatorname{div}_p \mathbf{I} = \frac{\partial I_i}{\partial p_i} = \sum_{1,2} \pi e^4 L n' \left\{ 2 \left(1 - \frac{m}{m'} \right) v_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \right. \\ \left. + \frac{v_i v_k - v^2 \delta_{ik}}{v^3} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} - \frac{T'}{m' v^2} \cdot \frac{3v_i v_k - \delta_{ik} v^2}{v^3} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} \right\}. \quad (7)$$

Перейдя в пространстве импульсов к сферической системе координат

$$p_x = p \sin \vartheta \cos \varphi; \quad p_y = p \sin \vartheta \sin \varphi; \quad p_z = p \cos \vartheta$$

и считая функцию f не зависящей от φ , получим

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = \sum_{1,2} \pi e^4 L n' m \left\{ -\frac{2m}{m' p^2} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{p^3 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2m^2 T'}{m' p^3} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2p^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Для общности мы сохраняли члены, зависящие от ϑ . Если f не зависит от ϑ , то уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{1,2} \pi e^4 L n' m \left\{ \frac{2m^2 T'}{m' p^3} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \left(\frac{2m}{m' p^2} - \frac{2m^2 T'}{m' p^4} \right) \frac{\partial f}{\partial p} \right\}. \quad (9)$$

Из уравнения (9) видно, зачем понадобилось сохранять члены второго порядка малости наряду с нулевыми. Если отбросить член $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ с малым коэффициентом $\frac{2m T'}{p^2}$, то уравнение (9) превратится в механическое уравнение движения частиц с трением, решение которого не имеет дисперсии по энергиям и уже во всяком случае не может дать частиц с энергией, большей начальной.

Иначе говоря, в приближении, в котором выводится уравнение фоккер-планковского типа, частицы в холодном газе рассеиваются с одинаковой потерей энергии.

В интересующем нас случае (ионы рассеиваются только на ионах) стационарное уравнение (9) имеет вид

$$\frac{MT}{p} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial f}{\partial p} \left(1 - \frac{MT}{p^2} \right) = 0, \quad (10)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial p} = C e^{-\frac{p^2}{2MT}} p \quad (11)$$

и

$$f = C_1 e^{-\frac{p^2}{2MT}} + C_2. \quad (12)$$

Граничное условие при $p = p_m$ дает

$$e = C_1 \left(e^{-\frac{p^2}{2MT}} - e^{-\frac{p_m^2}{2MT}} \right). \quad (13a)$$

Если $p_{\max}^2 \gg 2MT$, то решение (13a) удовлетворяет также граничным условиям при малых p , ибо оно с экспоненциальной

точностью переходит в максвелловское распределение, если выбрать

$$C_1 = \frac{n}{(2\pi MT)^{3/2}}. \quad (136)$$

Выражения (6) для потока в сферической системе координат в случае независимости от углов имеют вид

$$I_r = -2\pi l^4 L n M \left[\frac{1}{p^2} f + \frac{NT}{p^3} \frac{\partial f}{\partial p} \right]. \quad (14)$$

Подставляя из (13) значение f и умножая на $4\pi p_m^2$, получаем полный поток на поверхность

$$S = \frac{2\sqrt{2}\pi e^4 L n^2}{\sqrt{M} T^{3/2}} e^{-\frac{p_m^2}{2MT}}. \quad (15)$$

Полученный результат можно применить к интересующему нас вопросу следующим образом. В потенциальной яме плотность, вообще говоря, зависит от координат и импульсов, и граничные условия заданы на некоторой координатной поверхности.

Однако, поскольку длина пробега между столкновениями много больше размеров системы, можно считать, что интересующие нас частицы рассеиваются на средней плотности остальных. Так как нас интересуют частицы, почти достигающие стенки, то средняя плотность тех частиц, на которых рассеиваются быстрые частицы, равна полному числу частиц, деленному на полный объем.

Поскольку максимально достижимое рассеяние определяется максимальной энергией, то и граничное условие оказывается заданным в пространстве импульсов. Таким образом, задача о потоке частиц, находящихся в яме, с точностью до численного множителя эквивалентна задаче, решенной выше. В этом случае поток ионов из объема равен

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2\pi)^{3/2} e^4 L n_2^2 R_4^4}{\sqrt{M} T^{3/2} R^2} e^{-\frac{W_{ЯМ}}{T}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}L}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m}{M}} v_2^2 \left(\frac{mc^2}{T}\right)^{3/2} \frac{c}{R^2} e^{-v_1 \left(1 + 2 \ln \frac{R}{R_2}\right) \frac{mc^2}{T}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Наконец, интересующий нас коэффициент q , представляющий собой количество энергии, которая тратится на один

нейтрон в единицах $2mc^2$ (в мегаэлектрон-вольтах), получаем из (2), (3) и (16)

$$q_{Mэв} = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sigma_{пер}}{\sigma_{ион}} + \frac{\nu_1 \left(1 + 2 \ln \frac{R}{R_0} \right)}{2T_{Mэв}} \right] \frac{\pi r_0^2 R_i^2}{\sigma_{дд} T_{Mэв} \cdot R^2} e^{-\nu_1 \left(1 + 2 \ln \frac{R}{R_0} \right)} \cdot (17)$$

Так как $\frac{\sigma_{пер}}{\sigma_{ион}} \sim 10$; $\frac{\pi r_0^2}{\sigma_{дд}} \sim 1$, то, как нетрудно видеть, при $T = 0,2 Mэв$ величина q становится порядка $1 Mэв$ при показателе экспоненты порядка 5. Высота барьера в $1 Mэв$ обеспечивает самоподдерживающуюся термоядерную реакцию с точки зрения ионного газа, ибо тогда уходящее тепло будет примерно компенсироваться теплом термоядерных реакций (внутри объема не будут оставаться только тяжелые продукты реакции, энергия которых составляет несколько мегаэлектрон-вольт).

К сожалению, электромагнитное излучение электронов оказывается значительно большим, чем энергия, выделяемая при реакциях. Поэтому в целом такая система не является реактором с положительным выходом энергии.



Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ МАГНИТНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА*

Рассмотрены стационарные режимы магнитного термоядерного реактора с учетом тормозного излучения и ядерных реакций в DD и DT-системах.

§ 1. Введение

1) Вопрос о возможности осуществления термоядерных реакций в тороидальной системе с замкнутым током, поддерживаемым внешним вихревым электрическим полем, распадается на две проблемы. Первая проблема: можно ли при помощи газового разряда поднять температуру плазмы до таких значений, которые обеспечили бы полную ионизацию плазмы и начало ядерных реакций. Вторая проблема касается использования энерговыделения начавшихся реакций для дальнейшего повышения температуры плазмы и тем самым для дальнейшего усиления ядерных процессов.

Для разрешения этих проблем прежде всего необходимо знать, какие высокотемпературные режимы возможны в плазме при различных значениях параметров: плотности плазмы, ее температуры в центре и на границе, внешнего электрического поля, полного тока в плазме, теплового потока на стенку и т. д. Здесь необходимо различать две качественно различные картины. Если сила тока не слишком велика, то быстрые частицы, получающиеся в результате ядерных реакций, беспрепятственно уходят на стенку, отдавая ей свою энергию.

* Работа выполнена в 1952 г.

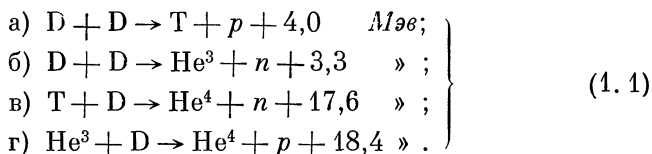
В таком высокотемпературном разряде ядерные реакции не оказывают никакого влияния на тепловой баланс плазмы, и весь процесс происходит так, как если бы ядерных реакций не было бы вовсе («обычный разряд»). Если же сила тока достаточно высока, то получающиеся в результате ядерных реакций быстрые заряженные* частицы, многократно завиваясь по спирали в собственном магнитном поле тока и сталкиваясь с относительно «холодными» частицами плазмы, отдают им в той или иной мере свою энергию. Тем самым ядерное энерговыделение включается в тепловой баланс плазмы и начинает влиять на самый характер высокотемпературного разряда («ядерный разряд»).

Рассмотрение указанных двух типов высокотемпературного разряда (в стационарных условиях) составляет содержание настоящей работы, причем ядерный разряд берется в предельном случае очень большого тока, когда передача ядерной энергии плазме осуществляется полностью, в непосредственной близости от места своего освобождения («полный ядерный разряд»).

2) Специфика обычного разряда состоит в том, что допустимые значения полного тока имеют некоторую верхнюю границу, определяемую тормозным излучением. Как показывается ниже, для однозарядной тяжелой компоненты плазмы (водород, дейтерий, тритий) это граничное значение по порядку величины равно $2 \cdot 10^6$ а.

Специфика ядерного разряда состоит в том, что верхней границы для полного тока у него не существует. Предельно возможный ток при заданной температуре в центре монотонно возрастает с увеличением температуры и обращается в бесконечность при таком нагреве, когда ядерное энерговыделение сравнивается по интенсивности с тормозным излучением. Однако, как отмечалось выше, ядерный разряд обладает нижней границей для полного тока, ниже которой, вследствие слабости магнитного поля, ядерный разряд переходит в обычный.

Оценка нижней границы для полного тока в ядерном разряде может быть получена непосредственно (без детального рассмотрения самого разряда) для каждого конкретного вида ядерных реакций, из которых мы будем рассматривать следующие четыре:



* Быстрые нейтроны во всех случаях уносят свою энергию на стенку.

Если E_0 — энергия реакции, распределяющаяся между двумя вторичными частицами $i = 1, 2$, то для ларморовского радиуса частицы имеем

$$R_{\text{л}}^{(i)} = \frac{c}{e^{(i)}H} \sqrt{2m_0 E_0}, \quad i = 1, 2; \quad m_0 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

где M_i — масса частицы; $e^{(i)}$ — ее заряд; H — магнитное поле.

Принимая для магнитного поля его среднее значение, равное половине его значения на границе $H = \frac{1}{2} H_{\text{гр}} = \frac{I}{cR_{\text{гр}}}$; условие полного ядерного разряда запишем в виде

$$\frac{R_{\text{л}}^{(i)}}{R_{\text{гр}}} = \frac{c^2}{e^{(i)}I} \sqrt{2m_0 E_0} \ll 1,$$

или

$$I \gg I_0^{(i)} = \frac{10c}{e^{(i)}} \sqrt{2m_0 E_0} \text{ а.} \quad (1.2)$$

Следовательно, нижняя граница для тока равна

$$I_0^{(i)} = 1,445 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{\mu_0 E_{\text{МэВ}}}}{Z^{(i)}} \text{ а,}$$

где μ_0 — приведенная масса в единицах массы протона; $Z^{(i)}$ — заряд частицы в единицах элементарного заряда и $E_{\text{МэВ}}$ — энергия реакции в мегаэлектрон-вольтах, или для каждой из реакций (1.1 а, б, в, г):

$$\left. \begin{aligned} I_0^{(\text{а}; \text{p}, \text{T})} &= 2,50 \cdot 10^6 \text{ а} \\ I_0^{(\text{б}; \text{He}^3)} &= 1,14 \cdot 10^6 \text{ »} \\ I_0^{(\text{в}; \text{He}^4)} &= 2,71 \cdot 10^6 \text{ »} \\ I_0^{(\text{г}; \text{p})} &= 5,55 \cdot 10^6 \text{ »} \\ I_0^{(\text{г}; \text{He}^4)} &= 2,77 \cdot 10^6 \text{ »} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Таким образом, нижняя грань (1.3) для тока в ядерном режиме и верхняя в обычном оказываются практически одинаковыми.

3) Высокотемпературный ядерный разряд рассматривается в системах с двумя типами ядерного «горючего»: в системе из чистого дейтерия (DD-система) и в системе из смеси двух

компонент — дейтерия и трития (DT-система). В DD-системе основным ядерным процессом является горение дейтерия (1.2 а, б). Кроме того, в качестве побочного процесса имеет место горение продуктов основных реакций, согласно (1.1 в, г), что также играет важную роль. В DT-системе преобладающей по скорости энерговыделения является реакция (1.1 в); в связи с этим для рассмотрения берется наиболее оптимальный состав смеси по 50% дейтерия и трития. При таком составе реакции (1.1 а, б, г) дают лишь небольшую добавку к энергии, выделяющейся благодаря (1.1 в), и поэтому не учитывается вовсе*.

Отличие DT-системы от DD-системы заключается в значительно большей скорости ядерного энерговыделения при тех же температурах. Параллельное рассмотрение обеих систем позволяет выяснить влияние интенсивности энерговыделения на общий характер процессов в ядерном разряде.

4) Поскольку рассматриваемые режимы являются высокотемпературными (температура в центре берется 5—50 кэВ), газ считается полностью ионизированным, и во всех случаях учитывается объемный теплоотвод за счет тормозного излучения.

В качестве первого этапа работы условия процессов принимаются стационарными. Тороидальными эффектами пренебрегаем; рассмотрение ведения в бесконечном цилиндре с заданным продольным электрическим полем.

Вопросы устойчивости стационарных режимов в настоящей статье не рассматриваются.

§ 2. Тормозное излучение и ядерное энерговыделение

1) Энергоотвод $Q_{\text{торм}}$ из 1 см³ плазмы в 1 сек. за счет тормозного излучения электронов на электронах и однозарядных ядрах с одинаковой плотностью $n^{(e)} = n^{(i)} = n$ при температуре T , равен

$$Q_{\text{торм}} = B n^2 F_1(T), \quad B = 10^{-22} \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}, \quad (2.1)$$

где

$$F_1(T) = F_0(T) \frac{1 + 0,00624 T_{\text{кэВ}}}{1 + 0,00208 T_{\text{кэВ}}}, \quad (2.2)$$

причем для $0 \leq T < 30 \text{ кэВ}$

$$F_0(T) = 0,0532 \sqrt{T_{\text{кэВ}}} (1 + 0,0009 T_{\text{кэВ}}), \quad (2.3)$$

* Не учитывается также возможная реакция $T(T, 2n) \text{He}^4$; поскольку достоверных сведений о ее сечении в настоящее время не имеется.

для $T > 30$ кэв значения $F_0(T)$ приводятся ниже.

| $T, \text{кэв}$ | 50 | 80 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 400 | 500 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $F_0(T)$ | 0,401 | 0,541 | 0,632 | 0,872 | 1,135 | 1,432 | 1,739 | 2,44 | 3,20 |

2) В DD-системе, в полном ядерном режиме, каждый акт ddp -реакции (1.1а) отдает плазме энергию

$$q_{ddp} = \left(4,0 + \frac{17,6}{5} \alpha_1\right) Mэв, \quad (2.4)$$

где α_1 — вероятность для возникшего ядра трития сгореть согласно (1.1 в); каждый акт ddn -реакции (1.1 б) отдает энергию

$$q_{ddn} = \left(\frac{3,3}{4} + 18,4\alpha_2\right) Mэв, \quad (2.5)$$

где α_2 — вероятность для возникшего ядра He^3 сгореть согласно (1.1 г). Поскольку сечение DT-реакции (1.1 в) σ_{DT} значительно превосходит сечения DD-реакций (1.1 а, б) σ_{ddp} , σ_{ddn} , а сечение DHe^3 -реакции (1.1 г) заметно меньше сечения DT-реакции (1.1 в), мы положим для расчетов $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и будем считать, что не только энергия DD-реакции, но также и энергия DT-реакции (1.1 в) передается плазме в непосредственной окрестности акта соответствующей DD-реакции. Тогда для ядерного энерговыделения $Q_{\text{яд}}^{(DD)}$ в 1 см³ плазмы в DD-системе за 1 сек. получим

$$Q_{\text{яд}}^{(DD)} = \frac{n^2 \langle v \sigma_{ddn} \rangle_{\text{ср}}}{2} \cdot 8,35 \cdot 1,602 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}, \quad (2.6)$$

где $\langle v \sigma_{ddn} \rangle_{\text{ср}}$ — усредненное по максвелловскому распределению произведение относительной скорости v на σ_{ddn} и для сечения реакции $D(d, p)T$ принято $\sigma_{ddp} = \sigma_{ddn}$. Иначе

$$Q_{\text{яд}}^{(DD)} = B n^2 F_2(T), \quad B = 10^{-22} \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}, \quad (2.7)$$

где значения функции $F_2(T) = 0,668 \cdot 10^{17} \text{ сек/см}^3 \cdot \langle v \sigma_{ddn} \rangle_{\text{ср}}$ приводятся ниже*:

| $T, \text{кэв}$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-----------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F_2(T)$ | 0,0391 | 0,1584 | 0,313 | 0,485 | 0,666 | 0,854 | 1,045 | 1,235 | 1,424 | 1,611 |

* Значения $\langle v \sigma_{ddn} \rangle_{\text{ср}}$ в зависимости от температуры, основанные на данных работах [1], см. в табл. 1. (Таблицы и пояснения к ним помещены на стр. 283—287, в «Приложении».)

Сопоставление (2.7) и (2.1) показывает, что в DD-системе ядерное энерговыделение сравнивается с тормозным энергоотводом при температуре примерно в 32 кэВ.

3) В DT-системе, в полном ядерном режиме, каждый акт DT-реакции (1.2 в) отдает плазме энергию

$$q_{\text{DT}} = \frac{17.6}{5} M \text{эв}. \quad (2.8)$$

Энерговыделением за счет прочих ядерных реакций пренебрегаем. В результате для ядерного энерговыделения $Q_{\text{яд}}^{(\text{DT})}$

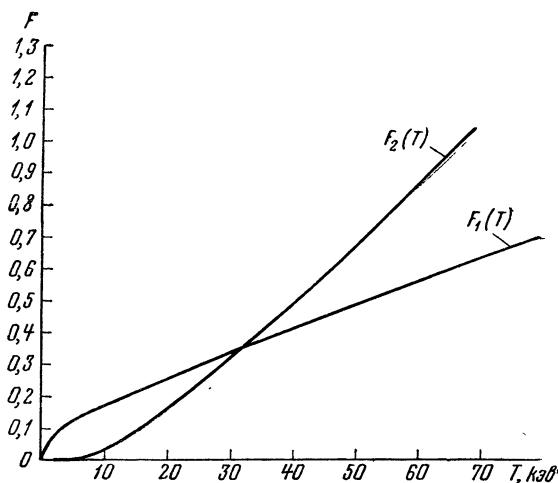


Рис. 1. Выделяемая энергия и энергия тормозного излучения. DD-система*.

в 1 см³ плазмы в 50%-ной DT-системе (смесь дейтерия и трития по 50% каждого) за 1 сек. получаем

$$Q_{\text{яд}}^{(\text{DT})} = \frac{n^2 \langle v \sigma_{\text{DT}} \rangle_{\text{ср}}}{4} \cdot 3,52 \cdot 1,602 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}, \quad (2.9)$$

где n — суммарная плотность ядер T и D; смысл $\langle v \sigma_{\text{DT}} \rangle_{\text{ср}}$ тот же, что $\langle v \sigma_{\text{ddn}} \rangle_{\text{ср}}$ в (2.6). Иначе

$$Q_{\text{яд}}^{(\text{DT})} = B n^2 F_3(T), \quad B = 10^{-22} \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{сек}, \quad (2.10)$$

* Пояснения к рисункам даны на стр. 288, в «Приложении».

где значения функции $F_3(T) = 1,410 \cdot 10^{16} \text{ сек/см}^3 \cdot \langle v\sigma_{DT} \rangle_{\text{ср}}$ приводятся ниже*.

| $T, \text{кэв}$ | 3 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 70 | 100 |
|-----------------|---------|--------|-------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $F_3(T)$ | 0,01695 | 0,1238 | 1,214 | 5,44 | 8,88 | 11,03 | 12,08 | 12,53 | 11,76 |

Сопоставление (2.10) и (2.1) показывает, что в DT-системе ядерное энерговыделение сравнивается с тормозным энергоотводом при температуре примерно в 5 кэв.

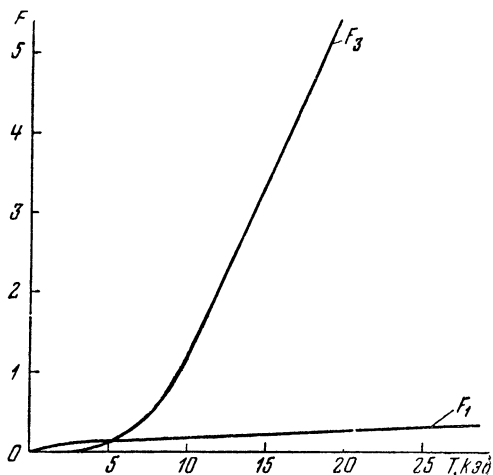


Рис. 2. Выделяемая энергия и энергия тормозного излучения. DT-система.

4) функции $F_1(T)$, $F_2(T)$, $F_3(T)$ представлены на рис. 1 и 2.

5) При расчете $\langle v\sigma_{\text{дан}} \rangle_{\text{ср}}$, $\langle v\sigma_{DT} \rangle_{\text{ср}}$ пользуемся максвелловским распределением, поскольку обрезание горячей части спектра, за счет ухода быстрых частиц на стенку, в случае полного ядерного разряда предполагается практически отсутствующим.

§ 3. Формулировка задачи и система уравнений

1) Рассматриваем модель магнитного термоядерного реактора с осевым током. Геометрия задачи — бесконечный цилиндр радиуса R , наполненный полностью ионизированным

* Значения $\langle v\sigma_{DT} \rangle_{\text{ср}}$ в зависимости от температуры, основанные на данных работы [2], см. в табл. 1.

дейтерием или смесью дейтерия и трития. Вдоль оси цилиндра (ось z) течет ток с плотностью j_z , поддерживаемый электрическим полем E_z , постоянным во времени и по объему.

Электрический ток создает магнитное поле \mathbf{H} , направленное по концентрическим окружностям вокруг оси цилиндра. Плотности n и температуры T электронов и тяжелых ионов одинаковы в каждой точке и зависят только от радиуса r ($0 \leq r \leq R$). Таким образом, поля \mathbf{E} , \mathbf{H} и градиента n (или T) попарно ортогональны.

В скрещенных полях \mathbf{E} и \mathbf{H} создается дрейф частиц, направленный к центру цилиндра, что приводит к уплотнению плазмы в окрестности центральной оси. Температура плазмы также спадает к периферии. В результате создается градиент давления nT , направленный к центру, что приводит к дрейфовому электрическому току, текущему вдоль вектора $[\mathbf{H} \times \nabla n T]$, т. е. по направлению \mathbf{E} . Таким образом, текущий вдоль \mathbf{E} электрический ток j_z в установившемся режиме не определяется непосредственно электрическим полем \mathbf{E} , а имеет дрейфовую природу.

Вдоль по радиусу течет диффузионный поток частиц, компенсирующий их дрейф к центру, а также диффузионный тепловой поток, частично компенсируемый дрейфом частиц к центру и частично отводимый со стенки внешними средствами. Кроме того, значительная доля выделяющейся энергии (джоулево тепло и ядерные реакции) уносится из системы на стенку тормозным излучением электронов на электронах и ядрах.

2) При совпадении плотностей и температур электронов и ионов для материальных и тепловых потоков имеют место следующие выражения, справедливые для сильного магнитного поля, перпендикулярного к \mathbf{E} , ∇n и ∇T [3]:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \mathbf{q}^{(e)} &= \frac{c}{eH^2} [(ne\mathbf{E} + \nabla n T) \times \mathbf{H}] - \frac{\zeta}{H^2 T} \nabla n^2 \sqrt{T}; \\ \text{б) } \mathbf{q}^{(i)} &= \frac{c}{eH^2} [(ne\mathbf{E} - \nabla n T) \times \mathbf{H}] - \frac{\zeta}{H^2 T} \nabla n^2 \sqrt{T}; \\ \text{в) } \Pi &= \frac{5cnT}{H^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] - 97,2 \frac{\zeta}{H^2} \frac{n}{\sqrt{T}} \{n\nabla T + 0,072T\nabla n\}. \end{aligned} \right\} (3.1)$$

Здесь $\mathbf{q}^{(e)}$, $\mathbf{q}^{(i)}$ — плотность потока электронов и ионов, соответственно; Π — плотность суммарного потока энергии, переносимой электронами и ионами; c — скорость света, e — элементарный заряд; $\zeta = 4,17 \cdot 10^{-10} \frac{3}{e^2} \cdot \text{см}^5 \cdot \text{сек}^{-4}$; T — в энергетических единицах. Приведенные формулы относятся к случаю чистого дейтерия и применимы, строго говоря, только

к DD-системе. С некоторой погрешностью будем пользоваться ими также и при расчете DT-системы.

Для плотности электрического тока $\mathbf{j} = e(\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^{(e)})$ из (3.1 а, б) имеем $\mathbf{j} = \frac{2c}{H^2} [\mathbf{H} \times \nabla n T]$ с единственной отличной от нуля компонентой

$$j_z = -\frac{2cnT}{H} \left\{ \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} + \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right\}. \quad (3.2)$$

Радиальные компоненты $\mathbf{q}^{(e)}$ и $\mathbf{q}^{(i)}$ одинаковы

$$q_r = q_r^{(e)} = q_r^{(i)} = -\left\{ \frac{cnE_z}{H} + \frac{\zeta}{H^2 T} \frac{d}{dr} (n^2 \sqrt{T}) \right\}. \quad (3.3)$$

Для Π_r из (3.1 в)

$$\Pi_r = -\frac{5cnTE_z}{H} - \frac{\zeta}{H^2} n^2 \sqrt{T} \left[97,2 \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} + 7 \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right]. \quad (3.4)$$

Радиальный поток частиц у нас отсутствует, $q_r = 0$, так что из (3.3)

$$-\frac{cnTE_z}{H} = \frac{\zeta}{H^2} n^2 \sqrt{T} \left[\frac{1}{2T} \frac{dT}{dr} + \frac{2}{n} \frac{dn}{dr} \right]. \quad (3.5)$$

С учетом (3.5) получаем

$$\Pi_r = -\frac{3\zeta n^2 \sqrt{T}}{\lambda H^2} \left[\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dr} \right], \quad (3.6)$$

где $\lambda = 0,0317$.

Соотношения (3.2), (3.5), (3.6), наряду с уравнением Максвелла $(\text{rot } \mathbf{H})_z = \frac{4\pi}{c} j_z$ и законом сохранения энергии

$$\text{div } \Pi = E_z j_z + Q_{\text{яд}} - Q_{\text{торм}}, \quad (3.7)$$

составляют полную систему из пяти уравнений для пяти неизвестных функций $n = n(r)$, $T = T(r)$, $j_z = j_z(r)$, $H = H(r)$, $\Pi_r = \Pi_r(r)$, поскольку $Q_{\text{яд}}$ и $Q_{\text{торм}}$ у нас выражены через n и T согласно (2.1), (2.7) и (2.10). Исключая в этих уравнениях j_z и учитывая явные выражения для $Q_{\text{яд}}$, $Q_{\text{торм}}$, приводим систему к виду

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{d\sqrt{T}}{dr} + \frac{2}{n} \frac{dn}{dr} &= -\frac{cE_z H \sqrt{T}}{\zeta n}; \\ \text{б) } \frac{2}{\sqrt{T}} \frac{d\sqrt{T}}{dr} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{dr} &= -\frac{\lambda}{3\zeta} \frac{\Pi H^2}{n^2 \sqrt{T}}; \\ \text{в) } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH) &= -\frac{8\pi n T}{H} \left\{ \frac{2}{\sqrt{T}} \frac{d\sqrt{T}}{dr} + \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right\}; \\ \text{г) } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\Pi) &= \frac{cE_z}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH) + Bn^2 [F_{2,3}(T) - F_1(T)], \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

где, как и в дальнейшем, $\Pi = \Pi_r$.

Разрешая (3.8) относительно производных и вводя безразмерную переменную t и безразмерные неизвестные функции $v(t)$, $z(t)$, $\chi(t)$, $p(t)$, согласно

$$r = r_0 \sqrt{t}, \quad n = n_0 v, \quad T = T_0 z^2, \quad H = H_0 \chi \sqrt{t}, \quad \Pi = \Pi_0 \frac{p}{\sqrt{t}}, \quad (3.9)$$

где n_0 , T_0 — плотность и температура в центре. r_0 , H_0 , Π_0 — единицы для измерения соответствующих величин, получим систему уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{dv}{dt} &= -a_1 \chi z + \lambda_1 \frac{\chi^2 p}{v z}; \\ \text{б) } \frac{dz}{dt} &= -\lambda_2 \frac{\chi z^2}{v} - \lambda_3 \frac{\chi^2 p}{v^2}; \\ \text{в) } t \frac{d\chi}{dt} &= -\chi + a_1 z^3 + \lambda_4 \frac{\chi p z}{v}; \\ \text{г) } \frac{dp}{dt} &= \beta_0 v^2 [f_{2,3}(z) - f_1(z)] + a_3 z^3 + \lambda_5 \frac{\chi p z}{v}, \end{aligned} \right\} (3.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4+\lambda} \frac{c E_z H_0 \sqrt{T_0} r_0}{\zeta n_0}; & a_2 &= \frac{8\pi(1+\lambda)}{4+\lambda} \frac{c E_z r_0 T_0^{\frac{3}{2}}}{\zeta H_0}; \\ a_3 &= \frac{2(1+\lambda)}{4+\lambda} \frac{c_2 E_z^2 r_0 T_0^{\frac{3}{2}}}{\zeta \Pi_0}; \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda}{6(4+\lambda)} \frac{1}{\zeta} \frac{\Pi_0 H_0^2 r_0}{n_0^2 \sqrt{T_0}}; & \lambda_2 &= \frac{\lambda}{2(4+\lambda)} \frac{c E_z H_0 r_0 \sqrt{T_0}}{\zeta n_0}; \\ \lambda_3 &= \frac{\lambda}{3(4+\lambda)} \frac{1}{\zeta} \frac{\Pi_0 H_0^2 r_0}{n_0^2 \sqrt{T_0}}; \\ \lambda_4 &= \frac{4\pi\lambda}{4+\lambda} \frac{1}{\zeta} \frac{\Pi_0 r_0 \sqrt{T_0}}{n_0}; & \lambda_5 &= \frac{\lambda}{4+\lambda} \frac{c E_z H_0 r_0 \sqrt{T_0}}{\zeta n_0}; \\ \beta_0 &= \frac{B n_0^2 r_0}{2 \Pi_0}; \end{aligned} \right\} (3.11)$$

$$f_{1,2,3}(z) \equiv F_{1,2,3}(T_0 z^2).$$

Тремя независимыми величинами из (3.11) можем распорядиться по произволу — соответствующим подбором $r_0 H_0 \Pi_0$. Примем $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, откуда, в частности,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &\equiv \frac{\lambda(1+\lambda)}{3} \frac{a_1^2}{a_3} = \frac{\lambda}{3} (1+\lambda); \quad \lambda_3 = \frac{2\lambda(1+\lambda)}{3} \frac{a_1^2}{a_3} = \\ &= \frac{2}{3} \lambda (1+\lambda); \\ \lambda_2 &\equiv \frac{\lambda}{2} a_1 = \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda_4 \equiv \lambda \frac{a_1 a_2}{a_3} = \lambda; \quad \lambda_5 \equiv \lambda a_1 = \lambda; \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &\equiv \frac{B}{4(1+\lambda)(4+\lambda)} \frac{1}{\zeta} \frac{H_0^2 r_0^2 a_3}{\sqrt{T_0} a_1^2} = \\ &= \frac{B}{(1+\lambda)(4+\lambda)} \frac{1}{\zeta c^2 \sqrt{T_0}} \left(\frac{1}{2} c H_0 r_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из $a_1 a_2 = 1$, $\frac{a_2}{a_1} = 1$, $\frac{a_2}{a_3} = 1$ непосредственно следует:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{4+\lambda}{\sqrt{8\pi(1+\lambda)}} \frac{\zeta}{c E_z} \frac{\sqrt{n_0}}{T_0}; \quad H_0 = \sqrt{8\pi(1+\lambda)} n_0 T_0; \\ \Pi_0 &= c E_z \sqrt{\frac{(1+\lambda) n_0 T_0}{2\pi}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Вместо E_z введем в качестве третьего (наряду с n_0 , T_0) свободного параметра задачи величину I_0 , связанную с полным током в цилиндре радиуса соотношением

$$I(r) = 2\pi \int_0^r j_z r dr = \frac{c H r}{2} = I_0 \chi t, \quad I_0 = \frac{c H_0 r_0}{2}, \quad (3.15)$$

и выразим через n_0 , T_0 , I_0 величины E_z , r_0 , H_0 , Π_0 , β_0 . Из $a_1 = 1$ и (3.15)

$$E_z = \frac{(4+\lambda)\zeta}{2} \frac{n_0}{I_0 \sqrt{T_0}}; \quad (3.16)$$

из (3.14), (3.16)

$$\text{а) } r_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\lambda)}} \frac{I_0}{c \sqrt{n_0 T_0}}; \quad \text{б) } H_0 = \sqrt{8\pi(1+\lambda)} n_0 T_0;$$

$$\text{в) } \Pi_0 = \frac{(4+\lambda)\zeta}{2} \sqrt{\frac{1+\lambda}{2\pi}} \frac{c n_0^{\frac{3}{2}}}{I_0}; \quad (3.17)$$

из (3.13) и (3.15)

$$\beta_0 = \frac{B}{(1+\lambda)(4+\lambda)} \frac{I_0^2}{\zeta c^2 \sqrt{T_0}}. \quad (3.18)$$

Параметры n_0 , T_0 , I_0 будем задавать в единицах 10^{15} см^{-3} , 50 кэВ , 10^6 а , т. е. числами μ , θ , i , введенными согласно

$$\begin{aligned} n_0 &= 10^{15} \mu \text{ см}^{-3}; \quad T_0 = 1,602 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot \theta \text{ эрг}; \\ I_0 &= \frac{c}{10} \cdot 10^6 i \text{ абс. ед.} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Тогда, с учетом $\lambda = 0,0317$, $\zeta = 4,17 \cdot 10^{-10} \text{ э}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{см}^5 \cdot \text{сек}^{-4}$, $B = 10^{-22} \text{ э} \cdot \text{см}^5 \cdot \text{сек}^{-3}$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 2,97 \cdot 10^{-4} \mu i^{-1} \theta^{-\frac{1}{2}} \text{ в/см}; \quad r_0 = 4,39 \mu^{-\frac{1}{2}} i \theta^{-\frac{1}{2}} \text{ см} \\ H_0 &= 4,56 \cdot 10^4 \mu^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{1}{2}} \text{ эс}; \quad \Pi_0 = 10,79 \mu^{\frac{3}{2}} i^{-1} \text{ вт/см}^2 \end{aligned} \right\} (3.20)$$

$$\beta_0 = 2,03 i^2 \theta^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

3) Таким образом, при заданных параметрах μ , θ , i задача о нахождении величин n , T , H , Π , I , в зависимости от радиуса r , разрешается численным интегрированием системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{dv}{dt} &= -\chi z + \lambda_1 \frac{\chi^2 p}{vz}; \\ \text{б) } \frac{dz}{dt} &= -\lambda_2 \frac{\chi z^2}{v} - \lambda_3 \frac{\chi^2 p}{v^2}; \\ \text{в) } t \frac{d\chi}{dt} &= -\chi + z^3 + \lambda \frac{\chi p z}{v}; \\ \text{г) } \frac{dp}{dt} &= v^2 \cdot \varphi_{1,2,3}(z) + z^3 + \lambda \frac{\chi p z}{v}, \end{aligned} \right\} (3.22)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{3} (1 + \lambda), \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3} \lambda (1 + \lambda); \quad \lambda = 0,0317;$$

$$\varphi_1(z) = \beta_0 F_1(50 \cdot \theta z^2); \quad \varphi_2(z) = \beta_0 [F_2(50 \cdot \theta z^2) - F_1(50 \cdot \theta z^2)]; \quad (3.23)$$

$$\varphi_3(z) = \beta_0 [F_3(50 \cdot \theta z^2) - F_1(50 \cdot \theta z^2)]; \quad \beta_0 = 2,03 i^2 \theta^{-\frac{1}{2}},$$

с граничными условиями

$$v|_{t=0} = 1; \quad z|_{t=0} = 1; \quad p|_{t=0} = 0; \quad \chi|_{t=0} = 1, \quad (3.24)$$

из которых три первых следуют из определения (3.9), последнее — из (3.22 в) в точке $t=0$. В (3.22 г) функция $\varphi_1(z)$

берется для случая обычного разряда; функции $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ — для случая ядерного разряда в DD- и DT-системе, соответственно. Относительно F_1 , F_2 , F_3 см. § 2.

Получаемые в результате численного интегрирования функции $v(t)$, $z(t)$, $\chi(t)$, $p(t)$ приводят к искомым величинам $n(r)$, $T(r)$, $H(r)$, $\Pi(r)$, $I(r)$ при помощи соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } n &= n_0 v, & n_0 &= 10^{15} \mu \text{ см}^{-3}; \\ \text{б) } T &= T_0 z^2, & T_0 &= 50 \cdot \theta \text{ кэв}; \\ \text{в) } H &= H_0 \chi \sqrt{t}, & H_0 &= 4,56 \cdot 10^4 \mu^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{1}{2}} \text{ гс}; \\ \text{г) } \Pi &= \Pi_0 \frac{p}{\sqrt{T}}, & \Pi_0 &= 10,79 \mu^{\frac{3}{2}} i^{-\frac{1}{2}} \text{ вт/см}^2; \\ \text{д) } I &= I_0 \chi t, & I_0 &= 10^6 i \text{ а}; \\ \text{е) } r &= r_0 \sqrt{t}, & r_0 &= 4,39 \mu^{-\frac{1}{2}} i \theta^{-\frac{1}{2}} \text{ см}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Для продольного электрического поля

$$E_z = 2,97 \cdot 10^{-4} \mu i^{-10} \theta^{-\frac{1}{2}} \text{ в/см}. \quad (3.26)$$

Для средней плотности плазмы в цилиндре радиуса r

$$\bar{n} = \frac{2\pi}{\pi r^2} \int_0^r n(r) r^2 dr = 10^{15} \mu \cdot \frac{1}{i} \int_0^i v(t) dt \text{ см}^{-3}. \quad (3.27)$$

Для отношения избытка ядерного энерговыделения над тормозным энергоотводом к джоулеву теплу в центре системы

$$\gamma_{1,2,3} = \frac{Q_{\text{яд}} - Q_{\text{торм}}}{E_z j_z} \Big|_{r=0} = \frac{v^2 \varphi_{1,2,3}(z)}{z^3 + \lambda \frac{\chi p z}{v}} \Big|_{t=0} = \varphi_{1,2,3}(1) \quad (3.28)$$

или — для «обычного» разряда

$$\gamma_1 = -\beta_0 F_1(50 \cdot \theta) = -2,03 \frac{F_1(50 \cdot \theta)}{\sqrt{\theta}} i^2, \quad (3.29)$$

в частности при $\theta = 1$, $F_1(50 \cdot \text{кэв}) = 0,476$:

$$\gamma_1 = -0,966 i^2; \quad (3.30)$$

для «ядерного»

$$\begin{aligned} \gamma_{2,3} &= \beta_0 [F_{2,3}(50 \cdot \theta) - F_1(50 \cdot \theta)] = \\ &= 2,03 \frac{F_{2,3}(50 \cdot \theta) - F_1(50 \cdot \theta)}{\sqrt{\theta}} i^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

откуда для DD -системы при $\theta = 1$, $F_2(50 \text{ кэв}) = 0,666$, $F_1(50 \text{ кэв}) = 0,476$, и для DT -системы при $\theta = \frac{2}{5}$, $F_3(20 \text{ кэв}) = 5,44$, $F_1(20 \text{ кэв}) = 0,262$:

$$\gamma_2 = 0,385i^2; \quad \gamma_3 = 16,62i^2. \quad (3.32)$$

Имеем также

$$\left. \begin{aligned} p_{\text{тепл}} &= 2\pi r \Pi = e \cdot p; \\ p_{\text{изл}} &= 2\pi \int_0^r Q_{\text{горм}} r dr = e \cdot \beta_0 \int_0^t v^2 f_1(z) dt; \\ q_{\text{яд}} &= 2\pi \int_0^2 Q_{\text{яд}} r dr = e \cdot \beta_0 \int_0^t v^2 f_{2,3}(z) dt; \\ q_{\text{дж}} &= 2\pi \int_0^r E_z j_z r dr = e \cdot \chi t; \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$e = \frac{(4 + \lambda)\zeta}{2} \frac{n_0}{\sqrt{T_0}} = 0,297 \mu \theta^{-\frac{1}{2}} \text{ кэвт/см},$$

где $p_{\text{тепл}}$, $p_{\text{изл}}$ — потоки тепловой и лучистой энергии через боковую поверхность цилиндра высотой 1 см, радиуса r ; $q_{\text{яд}}$, $q_{\text{дж}}$ — ядерное и джоулево энерговыделение внутри того же цилиндра.

4) Задача в целом является трехпараметрической, определяется тремя параметрами μ , θ , i . Однако система уравнений (3.22) является двухпараметрической, зависит от двух параметров θ , i , причем оба они входят только в функции $\varphi_{1,2,3}(z)$ в (3.22 г). Третий параметр μ влияет лишь на масштабы (3.25), (3.26).

В случае «обычного» разряда с не слишком высокой температурой, $T < 10 \text{ кэв}$, в силу (2.2), (2.3), (3.25 б), имеем

$$\varphi_1(z) \approx -\beta_0 \cdot 0,0532 \sqrt{50 \cdot \theta} z = -\beta_0 z; \quad \beta_1 = 0,766i^2. \quad (3.34)$$

Таким образом, трехпараметрическая задача сводится в этом случае к однопараметрической системе уравнений (3. 22), в которой функция $\varphi_1(z)$ определяется единственным параметром i из трех μ , θ , i , определяющих задачу в целом.

Наконец, в случае обычного разряда с током $I \ll 10^6$ а, когда величиной $v^2\varphi_1(z)$ в (3. 22 г) можно пренебречь по сравнению с $z^3 + \lambda \frac{\chi pz}{v}$, задача оказывается автомодельной с единой системой уравнений (3. 22), $\varphi_1(z) \equiv 0$, для всех значений параметров μ , θ , i , входящих здесь только в масштабы.

5) При температурах $T < 10$ кэв для величины (3. 29), в силу (3. 28), (3, 34), имеем не зависящее от θ значение

$$\gamma_1 = -\beta_1 = -0,766i^2, \quad (3. 35)$$

что, разумеется, следует также из (3. 29), (2. 2).

§ 4. Результаты расчета

А. Качественное рассмотрение

1) На рис. 5 штрих-пунктирными линиями представлено распределение n , T , H в зависимости от радиуса r в автомодельном случае (3. 26), $\varphi_1(z) \equiv 0$. Почти по всему сечению разряда температура T удерживается практически постоянной, равной своему значению в центре; затем резко спадает до весьма малых значений («плато» температуры). Плотность n спадает от центра по параболическому закону, затем, достигая минимума, начинает возрастать в области малых температур. Суммарный электрический ток в пределах от 0 до r сначала возрастает пропорционально r^2 , затем, минуя плато температуры, достигает «насыщения», удерживаясь далее постоянным. В соответствии с этим магнитное поле H в области плато растет пропорционально r , затем начинает спадать по закону $\frac{1}{r}$. Плотность теплового потока Π ведет себя так же, как магнитное поле H , возрастая пропорционально r и затем спадая, как $\frac{1}{r}$.

2. Учет функций $\varphi_{1,2,3}(z)$ в (3. 22), сохраняя общий характер кривых, вносит в их поведение ряд новых черт в зависимости от значения параметров системы.

Свойства кривых $v(t)$, $\chi(t)$, $p(t)$ в области плато $z(t) \approx 1$ могут быть качественно установлены непосредственным рассмотрением системы уравнений (3. 22). Коэффициенты λ , χ_1 , λ_2 , λ_3 являются малыми величинами порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$; полагая

их равными нулю и обозначая идеализированные функции ν , z , χ , p индексом $^{\circ}$, получаем

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{d\nu^{\circ}}{dt} &= \chi^{\circ} z^{\circ}; & \text{б) } \frac{dz^{\circ}}{dt} &= 0; & \text{в) } \frac{d}{dt}(t\chi^{\circ}) &= z^{\circ 3}; \\ \text{г) } \frac{dp_0}{dt} &= \nu^{\circ 2} \cdot \varphi_{1,2,3}(z^{\circ}) + z^{\circ 3}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из (4.16), (3.24) следует $z^{\circ}(t) \equiv 1$ (плато), так что [ср. (3.28)]

$$\text{а) } \frac{d\nu^{\circ}}{dt} = -\chi^{\circ}; \quad \text{б) } \frac{d}{dt}(t\chi^{\circ}) = 1; \quad \text{в) } \frac{dp^{\circ}}{dt} = \gamma\nu^{\circ 2} + 1, \quad \gamma = \varphi_{1,2,3}(1), \quad (4.2)$$

откуда, с учетом (3.24),

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \chi^{\circ}(t) &\equiv 1; & \text{б) } \nu^{\circ}(t) &= 1 - t; \\ \text{в) } \frac{dp^{\circ}}{dt} &= \gamma(t-1)^2 + 1; & p^{\circ}(t) &= \frac{\gamma}{3} [(t-1)^3 + 1] + t. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

В автомодельном случае $\gamma = 0$ (4.3), (3.9) дает

$$\begin{aligned} \text{а) } T(r) &\equiv T_0; & \text{б) } n(r) &= n_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right); \\ \text{в) } H(r) &= H_0 \frac{r}{r_0}; & \text{г) } \Pi(r) &= \Pi_0 \frac{r}{r_0}; & \text{д) } I(r) &= I_0 \frac{r^2}{r_0^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

в соответствии со сказанным в начале параграфа для области постоянной температуры.

В силу (4.4 б) идеализированное решение (4.4) сохраняет смысл только в области $0 \leq r \leq r_0$ ($0 \leq t \leq 1$). Из (4.4) виден смысл используемых нами единиц r_0 , H_0 , Π_0 , I_0 : они дают, соответственно, радиус системы, значения магнитного поля и теплового потока на границе и полный электрический ток для идеализированного решения $\lambda = 0$ в автомодельном случае $\gamma = 0$.

Заметим, что пренебрежение членами, пропорциональными λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ (в 3.22), законно только в тех случаях, когда χ , p , ν в интересующей нас области t сохраняются по порядку величины около единицы. Ввиду (4.3в) это требование исключает рассмотрение в идеализированной картине (4.2) значений γ , для которых $|\gamma| \gg 1$. Случай $\gamma \ll -1$, как видно из дальнейшего, невозможен в рамках нашей физической задачи. Случай $\lambda \gg 1$ отражает вполне определенные физиче-

ские условия (превышение ядерного энерговыделения над тормозным энергоотводом $F_{2,3} - F_1 > 0$, и большие значения полного тока, $i \ll 1$), но должен рассматриваться только на основе полной системы (3.22). Быстрое возрастание p делает невозможным отбрасывание в этом случае члена $-\lambda_3 \frac{\chi^2 p}{\nu^2}$ в (3.22б), который приводит к заметному спаду температуры уже на сравнительно небольших расстояниях от центра, т. е. к размыванию резкого плато температуры, что будет ниже подтверждено результатами численного интегрирования.

3. Поскольку (4.3а, б), (4.16) не зависят от γ , характер функций $z(t)$, $\nu(t)$, $\chi(t)$ в случае $0 < |\gamma| \ll$ порядка 1 не меняется существенно по сравнению с автономным случаем $\gamma = 0$, т. е. учет в (3.22) функций $\varphi_{1,2,3}(z)$ (~ 1 по модулю) не меняет общих черт поведения температуры, плотности и магнитного поля в основной области системы (область плато). Однако учет $\varphi_{1,2,3}(z)$ существенно влияет на вид функции $p(t)$, т. е. на поведение теплового потока; именно: функция $p^\circ(t)$ из линейной преобразуется в кубическую параболу.

Для экстремумов кубической параболы (4.3г) имеем

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что для каждого $\gamma \geq -1$ функция $p^\circ(t)$ монотонно возрастает во всем интересующем нас интервале $0 \leq t \leq 1$ и в этом отношении не отличается от функции $p^\circ(t) \equiv t$, в автономном случае $\gamma = 0$. Качественные отличия начинаются со значений γ , меньших -1 . При $\gamma \leq -1$ кривая $p^\circ(t)$ в интервале $0 \leq t \leq 1$ меняет знак, приобретая отрицательные значения в окрестности центра. Это означает наличие настолько интенсивного тормозного энергоотвода в центре системы, что дрейфовый перенос энергии к центру начинает во внутренней области превалировать над диффузионным теплоотводом к стенке. При не слишком больших $-\gamma \geq 1$ значение $p^\circ(t)$ на границе $t = 1$ ($\nu = 0$) остается положительным, и соответствующие решения описывают вполне определенные режимы в нашей физической системе. Если же $-\gamma$ превосходит некоторое критическое значение $-\tilde{\gamma}$, то значение $p^\circ(t)$ на границе $t = 1$ становится отрицательным, что означает подвод энергии в систему извне, и, следовательно, критическое значение $-\tilde{\gamma}$ является предельно достижимым для рассматриваемой нами физической системы без внешнего подогрева. Поскольку $-\gamma = -\varphi_{1,2,3}(1) = \beta_0 [F_1(T_0) - F_{2,3}(T_0)]$,

критическое значение приводит, с учетом (3.18), (3.15), к предельно возможному значению полного тока $I_{\text{пред}} = I_0 \text{ пред} \cdot \chi^t|_{\text{ГР}}$ при заданной температуре в центре. Уже из изложенного следует, что предельное значение для полного тока I существует только в случае отрицательного $F_{2,3} - F_1$, т. е. при тормозном излучении, более сильном, чем ядерное энергоделение.

Чтобы получить критическое значение $\tilde{\gamma}$ в идеализированной задаче (4.1), решаем совместно уравнения $\nu^\circ(t) = 0$, $p^\circ(t) = 0$ (4.3б, в)

$$\tilde{\gamma} = -3. \quad (4.6)$$

Б. Предельный электрический ток

1. На рис. 3 представлены полученные численным интегрированием полной системы уравнений (3.22) для «обычного разряда», $\varphi_1(z) = -\beta_0 f_1(z)$, кривые ν , z^2 и $\chi\sqrt{t}$, как функции \sqrt{t} в зависимости от параметра $\beta_1 = -\gamma_1$, вблизи критического значения $\tilde{\beta}_1 = -\tilde{\gamma}_1$. Жирные ($\beta_1 = 0,43$), жирный пунктир ($\beta_1 = 0,91$) и штрих-пунктирные ($\beta_1 = 1,82$) кривые соответствуют докритическим режимам $\beta_1 < \tilde{\beta}_1$, пунктирные ($\beta_1 = 4,56$) — сверхкритическому $\beta_1 > \tilde{\beta}_1$. Из графика видно, что по мере возрастания $\beta_1 < \tilde{\beta}_1$ минимум кривой ν заостряется, приближаясь к оси абсцисс; при $\beta_1 \geq \tilde{\beta}_1$ минимум исчезает, и функция обращается в нуль при некотором значении t . Точка $\nu = 0$ является особой точкой системы уравнений (3.22). Кривые $z(t)$ при $\beta_1 \rightarrow \tilde{\beta}_1$, $\beta_1 < \tilde{\beta}_1$ приближаются снизу к горизонтали $z = 1$, переходя через нее при $\beta_1 > \tilde{\beta}_1$ с обращением в бесконечность в точке $\nu = 0$. Анализ особой точки $\nu = 0$ для $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$ показывает, что в этом случае функция $z(t)$ в окрестности точки $\nu = 0$ равна единице. На основании совокупности этих данных можем заключить, что в критическом режиме $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$ соотношение $z(t) = 1$ соблюдается с весьма высокой точностью во всем интервале $0 \leq t \leq t_{\text{ГР}}$, где $t_{\text{ГР}}$ соответствует $\nu(t_{\text{ГР}}) = 0$. Кроме того, в случае $\beta_1 = \tilde{\beta}_1$ одновременно с ν обращается в нуль также p ; $\nu(t_{\text{ГР}}) = p(t_{\text{ГР}}) = 0$.

Все это указывает путь расчета предельно возможного полного электрического тока в системе $\tilde{I}(T_0)$ (при заданной температуре в центре T_0), который мы определяем как полный ток I в критическом режиме $\gamma = \tilde{\gamma}$. Вводя отмеченное выше свойство критического режима $\frac{dz}{dt} \approx 0$, как допущение

$\frac{dz}{dt} \equiv 0$, в полную систему (3.22) и разрешая ее с учетом (3.24), получаем в качестве очень хорошего приближения функции $\tilde{v}(t)$, $\tilde{z}(t) \equiv 1$, $\tilde{p}(t)$, $\tilde{\chi}(t)$ для критического режима $\gamma = \tilde{\gamma}$, из которых $\tilde{\gamma}$ находится совместным разрешением уравнений $\tilde{v}(t_{\text{гр}}) = 0$, $\tilde{p}(t_{\text{гр}}) = 0$. Наличие же явного решения системы

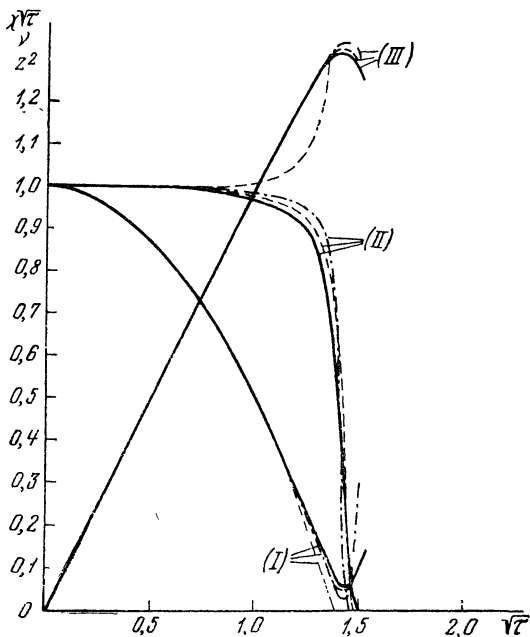


Рис. 3. Распределение плотности, температуры и магнитного поля.

————— $\beta_1 = 0,43$
 - - - - - $\beta_1 = 0,91$
 ······ $\beta_1 = 1,82$
 - - - - - $\beta_1 = 4,56$

(I) v — плотность; (II) z^2 — температура;
 (III) $\chi \sqrt{\tau}$ — магнитное поле.

(3.22) для критического режима приводит, в силу (3.15), к соответствующему значению для полного тока $I(r_{\text{гр}}) = \tilde{I}(T_0)$.

Поскольку в критическом режиме температура постоянна по всему сечению разряда, $z \equiv 1$, характер зависимости $\varphi_1(z)$ от z не играет роли, и поэтому указанный способ расчета $\tilde{I}(T_0)$ в равной мере применим как к «обычному» разряду $\varphi_1(z) = -\beta_0 f_1(z)$, так и к «ядерным» разрядам с отрицательными $\varphi_{2,3}(z) = \beta_0 [f_{2,3}(z) - f_1(z)]$ в центре системы.

2. Учитывая в (3.22) для критического режима $\frac{d\tilde{z}}{dt} = 0$, т. е. $\frac{\tilde{\chi}\tilde{p}}{\tilde{v}} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, получаем

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{d\tilde{z}}{dt} = 0; \quad \text{б) } \frac{d\tilde{v}}{dt} = -\alpha\tilde{\chi}; \quad \text{в) } \frac{d}{dt}(t\tilde{\chi}) = \beta; \\ \text{г) } \frac{d\tilde{p}}{dt} = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{v}^2 + \beta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3} = 1 + \frac{\lambda}{4}; \quad \beta = 1 - \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \lambda}. \quad (4.8)$$

Из (4.7в): $\tilde{\chi}(t) = \beta + \frac{c}{t}$, где $c = \text{const}$. Строго удовлетворить граничному значению (3.24) для $\tilde{\chi}(t)$ мы не можем. Удовлетворим ему приближенно, положив $c = 0$:

$$\tilde{\chi}(t) = \beta \ (\approx 1 \text{ с точностью в } 2,5\%). \quad (4.9)$$

$$\text{Из (4.7б), (4.9), (3.24) и затем из (4.7г),} \quad (3.24)$$

$$\tilde{v}(t) = 1 - \alpha\beta t; \quad \tilde{p}(t) = \frac{\tilde{\gamma}}{3\alpha\beta} [(\alpha\beta t - 1)^3 + 1] + \beta t, \quad (4.10)$$

откуда, в силу $\tilde{v}(t_{\text{гр}}) = \tilde{p}(t_{\text{гр}}) = 0$,

$$t_{\text{гр}} = \frac{1}{\alpha\beta}; \quad \tilde{\gamma} = -3\beta; \quad \tilde{\chi}(t_{\text{гр}}) t_{\text{гр}} = \frac{1}{\alpha}, \quad (4.11)$$

или

$$\text{а) } \tilde{\gamma} = -\frac{3}{4} \frac{4 + \lambda}{1 + \lambda}; \quad \text{б) } (\tilde{\chi}t)_{\text{гр}}^2 = \frac{16}{(4 + \lambda)^2}. \quad (4.12)$$

В силу (3.23), (3.18), (3.15) и определения (3.28) для γ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} = \tilde{\beta}_0 [F_{2,3}(T_0) - F_1(T_0)]; \\ \frac{\tilde{I}_0^2}{c^2} = \frac{(1 + \lambda)(4 + \lambda)\zeta\sqrt{T_0}}{B} \tilde{\beta}_0; \quad \tilde{I}^2 = \tilde{I}_0^2 (\tilde{\chi}t)_{\text{гр}}^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

так что, с учетом (4.12)*,

$$\tilde{I}(T_0) = 20 \sqrt{\frac{3\zeta}{B} \frac{\sqrt{T_0}}{F_1(T_0) - F_{2,3}(T_0)}} a. \quad (4.14)$$

* Заметим, что выражение (4.14) не зависит от λ . Благодаря этому факту ориентировочный расчет в приближении $\lambda = 0$, выполненный для величины (4.15) С. И. Брагинским, дал значение $1,9 \cdot 10^6 a$, совпадающее с нашим. См. Брагинский, Стягивание плазмы под действием собственного магнитного поля [4].

В обычном разряде, $F_{2,3}(T_0) \equiv 0$, вследствие более быстрого по сравнению с $\sqrt{T_0}$ возрастания $F_1(T_0)$, величина предельного тока $\tilde{I}(T_0)$ убывает с ростом T_0 . Однако вплоть до температуры $T_0 \sim 10$ кэв, пока справедливо $F_1(T) = 0,0532 \sqrt{T}$ кэв, [см. (2. 2), (2. 3)], функция $\tilde{I}(T_0)$ удерживается практически постоянной, равной своему максимальному значению.

$$\tilde{I}_{\text{макс}} = 1,94 \cdot 10^6 \text{ а.} \quad (4. 15)$$

При $T_0 = 50$ из (4. 14) получаем [$F_1(50 \text{ кэв}) = 0,476$; $F_{2,3}(T_0) \equiv 0$]:

$$\tilde{I}(50 \text{ кэв}) = 1,72 \cdot 10^6 \text{ а.} \quad (4. 16)$$

В ядерном разряде, начиная с температур T_0 , для которых $F_{2,3}(T_0)$ заметно отличается от нуля, функция $\tilde{I}(T_0)$ монотонно возрастает, обращаясь в бесконечность при значении T_0 , сравниваемом ядерное энерговыделение $F_{2,3}(T_0)$ и тормозной энергоотвод $F_1(T_0)$. При более высоких температурах, когда $F_{2,3}(T_0) > F_1(T_0)$, предельного тока типа (4. 14) в ядерном разряде не существует*. Функции (4. 14) для DD- и для DT-системы в единицах (4. 15) представлены графически на рис. 4а.

В. Система с тормозным излучением (обычный разряд)

1. При расчетах высокотемпературного разряда с тормозным излучением, но без ядерных реакций, входящая в (3. 22) функция бралась в виде (3. 34), справедливом при $T < 10$ кэв, т. е. вместо (3. 22 г)

$$\frac{dp}{dt} = -\beta_1 v^2 z + z^3 + \lambda \frac{\chi P z}{v}; \quad \beta_1 = 0,766 i^2. \quad (4. 17)$$

Решение системы (3. 22), (3. 24) с фиксированным i пригодено в этом случае для любых значений μ , θ (n_0 , T_0), определяющих только масштабы. Критическое значение $\tilde{\beta}_1$, согласно (4. 12 а), равно

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{3}{4} \frac{4 + \lambda}{1 + \lambda} = 2,93. \quad (4. 18)$$

2. Расчет системы (3.22 а, б, в), (4. 17) был выполнен для следующих значений i :

$$i^{(1)} = 0,75; \quad i^{(2)} = 1,09; \quad i^{(3)} = 1,54; \quad i^{(4)} = 2,44, \quad (4. 19)$$

* В такого рода режимах имеется верхний предел для полного тока, налагаемый требованием определенных условий на границе разряда. См. ниже.

которым соответствуют

$$\beta_1^{(1)} = 0,43; \quad \beta_1^{(2)} = 0,91; \quad \beta_1^{(3)} = 1,82; \quad \beta_1^{(4)} = 2,44. \quad (4.20)$$

Последний случай относится к сверхкритическому режиму.

Графики функций ν , z^2 , $\chi\sqrt{t}$, $\frac{P}{\sqrt{t}}$, χt от \sqrt{t} , дающие зависимость плотности n , температуры T , магнитного поля H , плотности теплового потока Π и электрического тока I (3.15), от радиуса r , представлены на рис. 3 и 4. В докритических случаях $\beta_1^{(1)}$, $\beta_1^{(2)}$, $\beta_1^{(3)}$ функции ν , z^2 , $\chi\sqrt{t}$ и χt примерно воспроизводят поведение соответствующих величин в автомодельном случае $\beta_0 = 0$ (см. рис. 5), весьма незначительно изменяясь вместе с β_1 ; в частности, максимальное значение χt , соответствующее полному электрическому току в системе, при всех β_1 практически одинаково и равно 0,99, что находится в хорошем согласии со значением (4.126), принятом нами для критического режима. Кривая $\frac{P}{\sqrt{t}}$ в случае $\beta_1^{(1)} = 0,43$ также мало отличается от соответствующей автомодельной кривой $\beta_0 = 0$ (см. на рис. 5 тождественную ей кривую $\chi\sqrt{t}$). Однако с ростом β_1 наклон кривой $\frac{P}{\sqrt{t}}$ в точке $t = 0$ уменьшается, переходя через нуль при $\beta_1 = 1$ (ср. $\beta_1^{(2)} = 0,91$ на рис. 4). При $1 < \beta_1 < \tilde{\beta}_1$ (например, $\beta_1^{(3)} = 1,82$; на графике не изображено) кривая $\frac{P}{\sqrt{t}}$ уходит из точки $t = 0$ в отрицательную область, вновь пересекая ось абсцисс на увеличивающемся с ростом β_1 расстоянии от центра. При $\beta_1 = \tilde{\beta}_1 = 2,93$ кривая $\frac{P}{\sqrt{t}}$ становится отрицательной во всей области положительных ν , обращаясь в нуль вместе с монотонно убывающей функцией ν ; кривая z^2 , незначительно убывая вначале, возвращается к единице в точке $\nu = 0$ (критический режим). Наконец, при $\beta_1 > \tilde{\beta}_1$ (например, $\beta_1^{(4)} = 4,56$) функция $\frac{P}{\sqrt{t}}$ отрицательна вплоть до $\nu = 0$; кривая z^2 , пройдя через едва уловимый минимум, уходит в бесконечность вместе с обращением в нуль функции ν . Таким образом, случай $\beta_1 > \tilde{\beta}_1$ не только не может быть реализован в системе без внешнего подогрева, но вообще лишен какого-либо физического содержания («бесконечная температура» на границе).

3. Результаты численного интегрирования (3.22), (4.17) для $\beta_1^{(1)}$, $\beta_1^{(2)}$, $\beta_1^{(3)}$ могут быть применены к системе с любыми

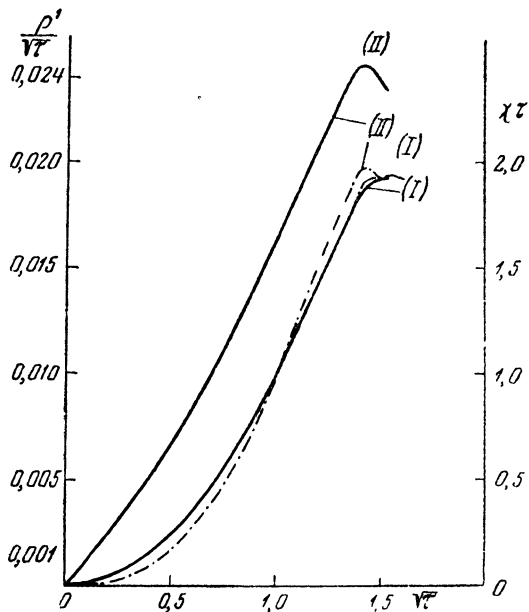


Рис. 4. Распределение плотности потока энергии и полного тока.

- - - - - (I) $\beta_1 = 1,82$
 - - - - - (II) $\beta_1 = 0,91$
 ——— (I) $\beta_1 = 0,43$
 ——— (II) $\beta_1 = 0,43$
 (I) — $\chi\tau$ — электрический ток;
 (II) — $\frac{\rho'}{\sqrt{\tau}}$ — плотность потока энергии

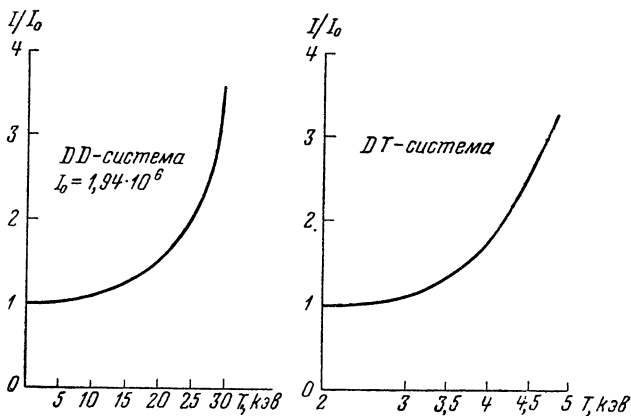


Рис. 4а. Предельный ток.

значениями n_0 и $T_0 < 10$ кэв в центре. Рассмотрим, к примеру, случай $n_0 = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $T = 5$ кэв:

$$\mu = 2; \theta = 0.1. \quad (4.21)$$

Для масштабов (3.25), (3.33) параметры (4.19), (4.21) дают:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } n_0 = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}; T_0 = 5 \text{ кэв}; \\ H_0 = 2,04 \cdot 10^4 \text{ эс}; e = 1,188 \text{ квт/см}; \\ \text{б) } \Pi_0^{(1)} = 40,7; \Pi_0^{(2)} = 28,0; \\ \Pi_0^{(3)} = 19,8 \text{ вт/см}^2; \\ \text{в) } I_0^{(1)} = 0,75 \cdot 10^6; I_0^{(2)} = 1,09 \cdot 10^6; \\ I_0^{(3)} = 1,54 \cdot 10^6; \\ \text{г) } r_0^{(1)} = 7,36; r_0^{(2)} = 10,7; r_0^{(3)} = 15,1 \text{ см}; \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

для электрического поля (3.26)

$$E_z^{(1)} = 2,51 \cdot 10^{-3}; E_z^{(2)} = 1,72 \cdot 10^{-3}; E_z^{(3)} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ в/см}. \quad (4.23)$$

Граничное значение t_1 , определяющее радиус системы $R = r_0 \sqrt{t_1}$, находим по условию [5]

$$T|_{r=R} = 10 \text{ эв}, \quad (4.24)$$

т. е. $z(t_1) = \frac{1}{10\sqrt{5}} = 0,0447$. Получающиеся из условия (4.24)

и результатов численного интегрирования системы уравнений (3.22) значения $\sqrt{t_1}$, $z_1^2 = z^2|_{t=t_1}$, $(\chi t)_1 = \chi t|_{t=t_1}$, $\left(\frac{p}{\sqrt{t}}\right)_1 = \frac{p}{\sqrt{t}}|_{t=t_1}$,

а также $\int_0^{t_1} v(t) dt$, $\int_0^{t_1} v^2 z dt$ для $i^{(1)}$, $i^{(2)}$ (4.19), приведены в табл. 2.

Используя указанную таблицу, для радиуса системы R и средней плотности \bar{n} из (3.25е), (4.22г) и (3.27), (4.21) имеем

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } R^{(1)} = 8,0; R^{(2)} = 11,4 \text{ см}; \\ \text{б) } \bar{n}^{(1)} = 0,89 \cdot 10^{15}; \bar{n}^{(2)} = 0,91 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}; \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

для значений магнитного поля $H_1 = H(R)$ и плотности теплового потока $\Pi_1 = \Pi(R)$ на границе, а также полного электрического тока $I_2 = I(R)$ из (3.25 в, г, д.), (4.22 а, б, в)]

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } H_1^{(1)} = 1,85 \cdot 10^4; H_1^{(2)} = 1,89 \cdot 10^4 \text{ эс}; \\ \text{б) } \Pi_1^{(1)} = 31,4; \Pi_1^{(2)} = 17,8 \text{ вт/см}^2; \\ \text{в) } I_1^{(1)} = 0,74 \cdot 10^6; I_1^{(2)} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ а}; \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

для джоулева энерговыделения в 1 пог. см системы и его распределения на тепловой и лучистый потоки на стенку из (3.33), (4.22 а), (4.20) имеем

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } q_{\text{дж}}^{(1)} = 1,86; \quad q_{\text{дж}}^{(2)} = 1,86 \text{ квт/см} \\ \text{б) } p_{\text{тепл}}^{(1)} = 1,58; \quad p_{\text{тепл}}^{(2)} = 1,28 \quad \gg \\ \text{в) } p_{\text{изл}}^{(1)} = 0,28; \quad p_{\text{изл}}^{(2)} = 0,58 \quad \gg \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

Наконец, для плотности лучистого потока на стенку $\Pi_{\text{изл}} = \Pi_1 \frac{P_{\text{изл}}}{P_{\text{тепл}}}$ и для плотности суммарного потока энергии $\Pi_{\text{сумм}} = \Pi_1 + \Pi_{\text{изл}}$ из (4.26б), (4.27 в, б) получим

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \Pi_{\text{изл}}^{(1)} = 5,6; \quad \Pi_{\text{изл}}^{(2)} = 8,1 \text{ вт/см}^2 \\ \text{б) } \Pi_{\text{сумм}}^{(1)} = 37; \quad \Pi_{\text{сумм}}^{(2)} = 26 \quad \gg \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

Отвод энергии (4.28б) со стенки должен быть обеспечен внешними средствами.

Отношение тормозного излучения к джоулеву теплу в центре системы, $-\gamma_1$ (3.28), в рассматриваемом случае обычного разряда с $T = 5 \text{ кэв} < 10 \text{ кэв}$ совпадает, в силу (3.35), с величиной β_1 .

4. Полученные нами физические характеристики (4.23)—(4.28) обычных разрядов с параметрами $i^{(1)}$, $i^{(2)}$ (4.19), (4.21) собраны вместе в табл. 3. Расчет систем с другими значениями n_0 , T_0 , но с теми же i , производится, исходя из табл. 2, по вполне аналогичной схеме.

Г. Системы с тормозным излучением и ядерными реакциями (ядерный разряд)

1. При расчетах ядерного разряда в DD - и DT -системе система уравнений (3.22) берется с функцией $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, (3.23), соответственно, в которой должны быть заданы параметры θ , i . Результаты численного интегрирования (3.22) могут быть применены для любого значения μ , определяющего только масштабы.

Расчет DD -системы был выполнен для следующих значений θ , i :

$$\theta = 1; \quad i^{(1)} = 2,97, \quad i^{(2)} = 9,39; \quad (4.29)$$

а расчет для DT -системы

$$\theta = 0,4; \quad i^{(1)} = 0,784; \quad i^{(2)} = 1,68, \quad (4.30)$$

которым соответствуют

$$\left. \begin{aligned} \beta_0^{(1)} &= 17,9, & \beta_0^{(2)} &= 179 \quad [\text{DD}]; \\ \beta_0^{(1)} &= 1,97, & \beta_0^{(2)} &= 9,06 \quad [\text{DT}]. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

При взятых θ имеем $\varphi_2(1) > 0$, $\varphi_3(1) > 0$ (превышение ядерного энерговыделения над тормозным излучением в центре), поэтому предельного тока типа (4.14), дающего верхнюю границу для параметра i , в обоих случаях не существует. При выводе функций $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, входящих в уравнение (3.22г) со множителем v^2 , нами было использовано ограничение (1.2), обеспечивающее ядерный характер разряда в оптимальных условиях (полный ядерный разряд), когда энергия быстрых заряженных частиц, возникающих в результате ядерных реакций, передается плазме практически на том же расстоянии от оси тока, на котором произошло ее освобождение. Условие (1.2) указывает нижнюю границу для значений параметра i ($i \gg 1$), при которых можно пользоваться четвертым уравнением (3.22) с функциями $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ в виде (3.23). За исключением $i^{(2)}$ [DD] взятые нами для i значения (4.29), (4.30) этому условию не удовлетворяют. Тем не менее выполненные с указанными значениями параметров расчеты позволяют выяснить основные свойства, присущие ядерному разряду.

2. На рис. 5, 6 представлены графически результаты численного интегрирования уравнений для DD-системы с параметрами (4.29) вместе с соответствующими кривыми для автоматического случая $\beta_0 = 0$. Минимум функции v (плотность плазмы) с ростом β_0 повышается и становится менее резким. Функция z^2 (температура) для $\beta_0^{(1)}$ сохраняет основные черты автоматической кривой. Однако с дальнейшим ростом β_0 (случай $\beta_0^{(2)}$) характерное для автоматического решения и обычного разряда плато температуры начинает исчезать — функция z^2 заметно спадает уже на небольших расстояниях от центра. Вместе с этим меняется поведение z^2 на периферии — температура T длительно удерживается со значениями порядка сотен электрон-вольт, не опускаясь ниже 400 эв. Наклон кривой $\frac{P}{\sqrt{t}}$ (плотность теплового потока) в точке $t = 0$ увеличивается с ростом β_0 , причем в случае $\beta_0^{(2)}$ тепловой поток, текущий через плазму, достигает колоссальных размеров по сравнению со случаем $\beta_0 = 0$ и даже с $\beta_0^{(1)}$. Пройдя область ядерного энерговыделения (см. кривую IV на рис. 5), тепловой поток для $\beta_0^{(2)}$ начинает резко убывать благодаря про-

должающемуся при $T \sim 500$ эв тормозному энергоотводу. Поскольку удовлетворить условию (4. 24) на границе для $\beta_0^{(2)}$ невозможно, интегрирование велось до обращения в нуль величины p . Функции тока (χt) и магнитного поля ($\chi \sqrt{t}$) существенных изменений с ростом β_0 не испытывают.

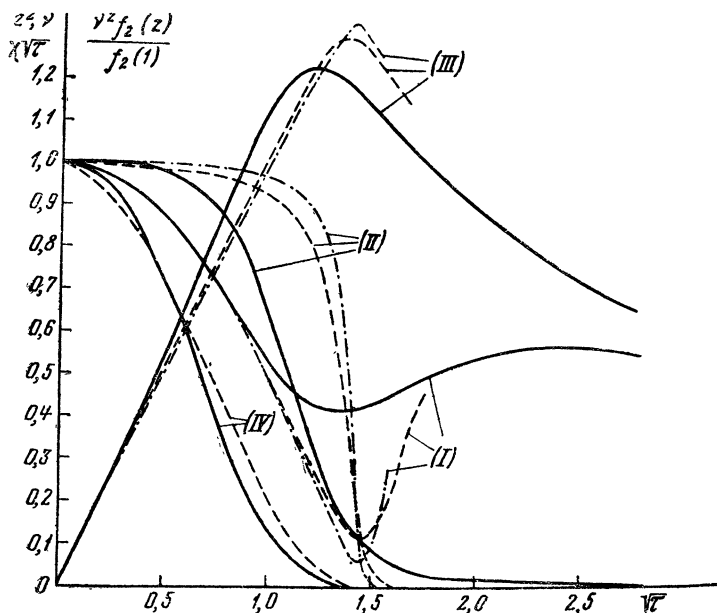


Рис 5. Распределение плотности температуры и магнитного поля. DD-система; $T_0 = 50$ кэв.

- - - - - $\beta_0 = 0$
 - - - - - $\beta_0 = 17,9$
 - - - - - $\beta_0 = 179$
 (I) ν — плотность;
 (II) z^2 — температура;
 (III) $\chi \sqrt{t}$ — магнитное поле;
 (IV) $\frac{\nu^2 f_2(z)}{f_2(1)}$ — плотность источников энергии.

3. Функции ν , z^2 , $\chi \sqrt{t}$, $\frac{p}{\sqrt{t}}$, χt , описывающие DT-систему с параметрами (4. 30), изображены на рис. 7, 8. Как видно из графиков, влияние на кривые значения β_0 в основном то же, что в случае DD-системы. Наличие подобного $\beta_0^{(2)}$ [DD] плавного температурного «хвоста» в случае $\beta_0^{(2)}$ [DT] ясно из рис. 9, дающего распределение температур в логарифмическом

масштабе. Поскольку этот «хвост» для $\beta_0^{(2)}$ [DT] расположен значительно ниже, чем для $\beta_0^{(2)}$ [DD], имеется также различие в поведении соответствующих кривых теплового потока $\frac{P}{\sqrt{t}}$: кривая $\frac{P}{\sqrt{t}}$ для $\beta_0^{(2)}$ [DT], пройдя максимум, убывает по закону

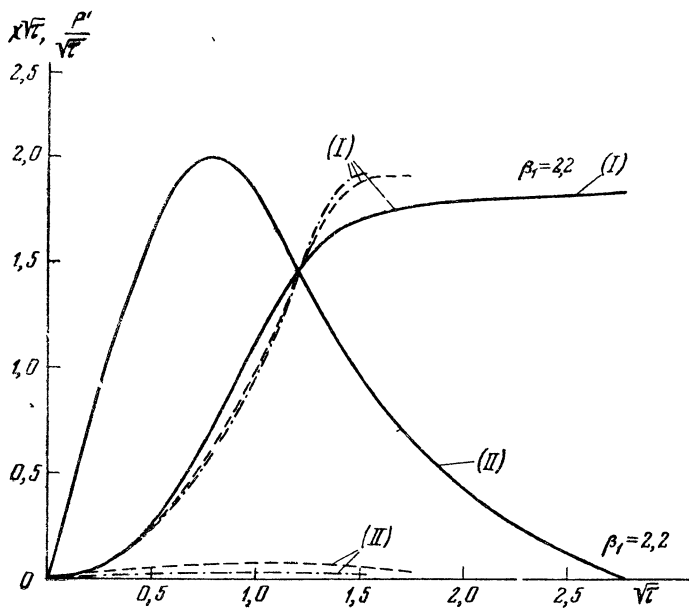


Рис. 6. Распределение плотности потока энергии и полного тока. DD-система; $T_0 = 50$ кэВ

----- $\beta_0 = 17,9$
 - · - · - · $\beta_0 = 0$
 _____ $\beta_0 = 179$

(I) $\chi\tau$ — электрический ток;
 (II) $\frac{P'}{\sqrt{\tau}}$ — плотность потока энергии.

$\frac{1}{r}$ вследствие отсутствия в этой области не только энерговыделения, но и тормозного энергоотвода (T удерживается ~ 10 эв). Более низкое значение z^2 на температурном «хвосте» в случае $\beta_0^{(2)}$ [DT] по сравнению с $\beta_0^{(2)}$ [DD] отнюдь не является отличительным свойством DT-системы, а связано с выбором параметра $\beta_0^{(2)}$ [DT]. При бóльших значениях β_0 мы, бесспорно,

получили бы для DT-системы ту же картину, что и в случае $\beta_0^{(2)}$ [DD].

4. Таким образом, рассмотрение свойств интегральных кривых системы (3.22) для ядерного разряда показывает (см. рис. 9), что для значений температуры T_0 , обеспечиваю-

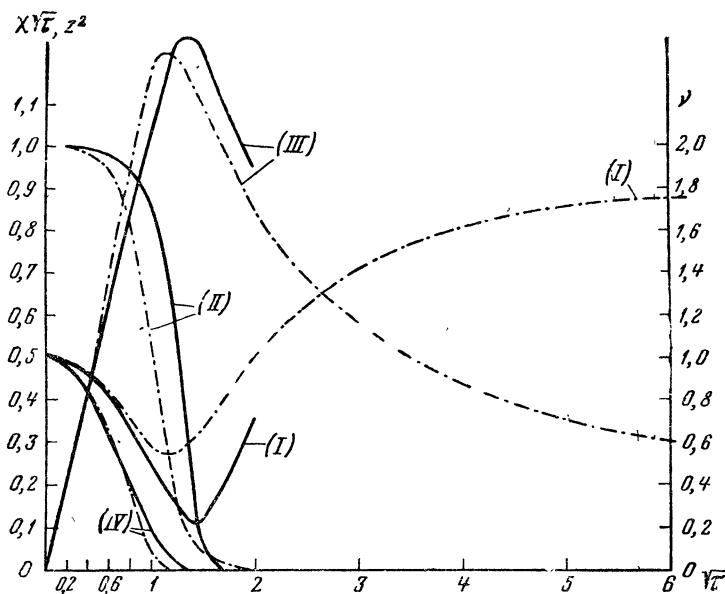


Рис. 7. Распределение плотности температуры и магнитного поля. DT-система; $T_0 = 20$ кэв

- - - - $\beta_0 = 9,06$
 ————— $\beta_0 = 1,97$
 (I) ν — плотность;
 (II) z^2 — температура;
 (III) $\chi \sqrt{z}$ — магнитное поле;
 (IV) $\frac{\nu^2 f_3(z)}{f_3(1)}$ — плотность источников энергии.

щих превышение ядерного энерговыделения над тормозным излучением в центре системы, $\varphi_{2,3}(z)|_{z=1} > 0$, существует значение полного тока (значение i), выше которого достижение малой температуры на границе становится невозможным. Это устанавливает в области высоких температур верхнюю границу для параметра i в ядерном режиме, $i_{\text{пред}}(\theta)$, зависящую от θ (температуры в центре) по-разному для DD- и DT-системы и определяемую требованием конкретных граничных условий,

которые должны задаваться на основе специального рассмотрения*. Если принять, что использованное нами условие (4.24) действительно является необходимым, то из рассмотрения случая $\beta_0^{(2)}$ [DD] вытекает, что для DD-системы параметр i должен быть по крайней мере $< 9,39$. Вместе с условием

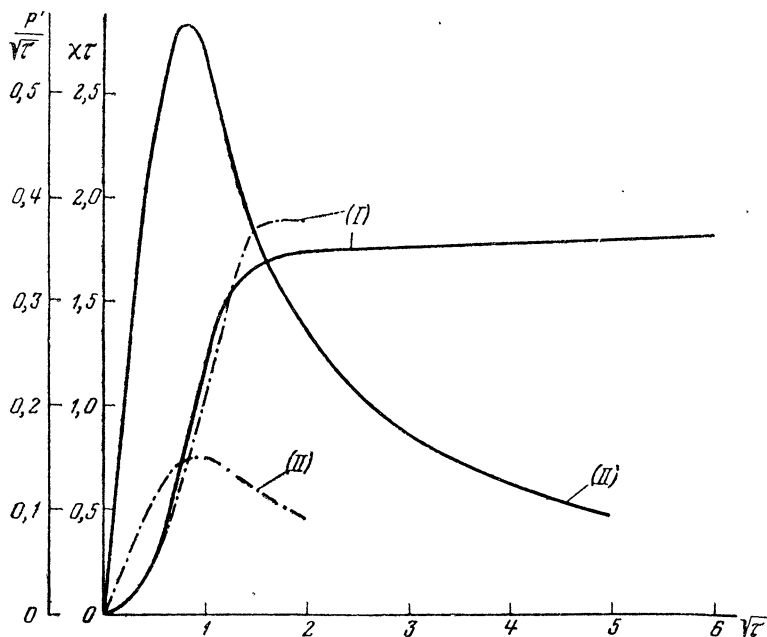


Рис. 8. Распределение плотности потока энергии и полного тока. DT-система.

$\cdots \beta_0 = 1,97$
 $\text{—} \beta_0 = 9,06$
 (I) $\chi\tau$ — электрический ток;
 (II) $\frac{P'}{\sqrt{z}}$ — плотность потока энергии.

$i \gg 1$ (1.2) это исключает тогда возможность осуществления изучаемого нами полного ядерного режима (1.1) в DD-системе с температурой в центре $T_0 = 50$ кэв. При понижении температуры T_0 значение $i_{\text{пред}}(\theta)$ возрастает, обращаясь в бесконечность в точке пересечения кривых $F_1(T)$, $F_{2,3}(T)$ рис. 1, 2 и затем вновь спадает по закону (4.14) для режима с отри-

* См., например, Зубарев и Климов. К теории температурного скачка на границе плазмы в магнитном поле (наст. том) [5].

цательным $\varphi_{2,3}(z)|_{z=1}$. Отсюда следует, что условие $i \gg 1$, необходимое для обеспечения «полного ядерного» режима (1.2) в DD- и DT-системах, во всяком случае может быть выполнено при значениях T , близких к точке пересечения кривых $F_1(T)$, $F_{2,3}(T)$, т. е. при температурах в центре, при которых

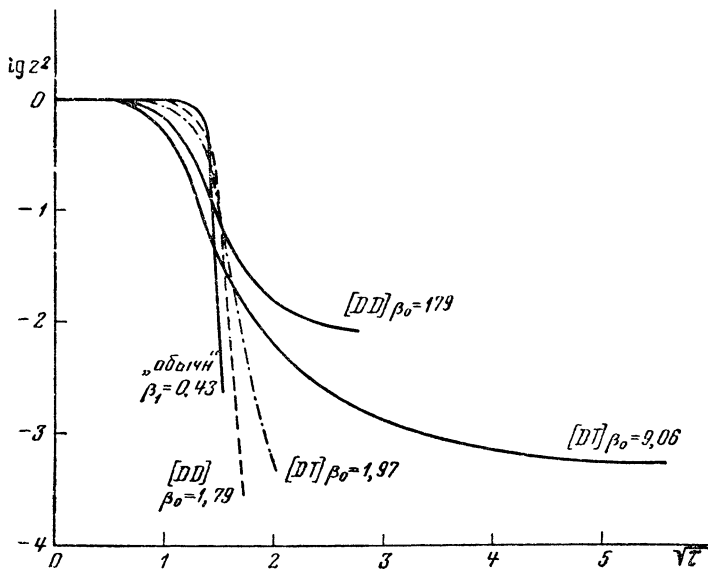


Рис. 9. Распределение температуры.

ядерное энерговыделение и тормозной энергоотвод в основном компенсируют друг друга. Как показывают случаи $\beta_0^{(1)}$ [DD]; $\beta_0^{(1)}$, $\beta_0^{(2)}$ [DT], при не очень больших токах допустимый интервал значений θ может быть довольно широким.

5. В табл. 4 приведены основные численные результаты интегрирования системы уравнений (4.23) для DD- и DT-систем с параметрами (4.29), (4.30).

Расчет физических характеристик был выполнен со значением n_0 , равным 10^{15} см^{-3} для DD-системы и $2,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ для DT-системы, т. е.

$$\mu = 1 \text{ [DD]}; \quad \mu = 2,5 \text{ [DT]}. \quad (4.32)$$

Ход вычислений вполне аналогичен детально разобранному нами случаю обычного разряда (4.22)—(4.28). Получаемые физические характеристики ядерного разряда для каждого

из случаев (4.29), (4.30), с учетом (4.32), представлены в табл. 5.

В отличие от табл. 3 здесь добавляется величина ядерного энерговыделения $q_{\text{яд}}$, рассчитываемая, подобно $p_{\text{изл}}$, из (3.23). Величина $\gamma_{2,3}$, дающая отношение избытка ядерного энерговыделения над тормозным энергоотводом к джоулеву теплу в центре системы, вычисляется по полной формуле (3.31) и (3.32)

$$\begin{aligned} \gamma_2^{(1)} &= 3,4; & \gamma_2^{(2)} &= 34 \quad [\text{DD}], \\ \gamma_3^{(1)} &= 10,2; & \gamma_3^{(2)} &= 47 \quad [\text{DT}], \end{aligned} \quad (4.33)$$

Наконец, величину N_n , выражающую число нейтронов, покидающих систему в 1 сек с 1 пог. см цилиндра, получаем по формуле $N_n = \frac{q_{\text{яд}}}{q_n}$, где q_n — энергия возникающих быстрых заряженных частиц (передаваемая в конце концов плазме), приходящаяся на один испущенный нейтрон. Энергия 8,345 Мэв, входящая в (2.6), сопровождается испусканием двух нейтронов, за счет реакций (1.16), (1.1в). Поэтому для DD-системы

$$q_n = \frac{8,345}{2} \cdot 1,602 \cdot 10^{-16} \text{ квт/сек нейтрон}. \quad (4.34)$$

Энергия 3,52 Мэв, входящая в (2.9), сопровождается испусканием одного нейтрона $T(d, n) \text{He}^4$. Поэтому для DT-системы

$$q_n = 3,52 \cdot 1,602 \cdot 10^{-16} \text{ квт/сек нейтрон}. \quad (4.35)$$

В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} N_n &= \frac{q_{\text{яд}}}{6,68} \cdot 10^{16} \text{ нейтрон/см} \cdot \text{сек} \quad [\text{DD}]; \\ N_n &= \frac{q_{\text{яд}}}{5,64} \cdot 10^{16} \text{ нейтрон/см} \cdot \text{сек} \quad [\text{DT}], \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

где значения $q_{\text{яд}}$, выраженные в киловаттах на сантиметр, берутся из соответствующей графы табл. 5. Величина L связана с N_n соотношением $L = \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{24 \cdot 3600 \cdot N_n \cdot 100}$ и дает в метрах длину цилиндра, производящего 1 г нейтронов при непрерывной работе соответствующей модели МТР в течение суток.

§ 5. Выводы

1. Рассмотрено два типа высокотемпературного разряда: обычный разряд с учетом тормозного энергоотвода, но без ядерного энерговыделения в плазму, и полный ядерный разряд (1. 2), когда вся энергия возникающих заряженных частиц полностью передается плазме. Во втором случае качественно важную роль играет значение температуры T^* , при которой ядерное энерговыделение в плазму сравнивается с тормозным энергоотводом $F_{2,3}(T^*) = F_1(T^*)$,

$$T^* = 32 \text{ кэВ [DD]}; \quad T^* = 5 \text{ кэВ [DT]}. \quad (5.1)$$

В режиме с температурой в центре $T_0 < T^*$ ядерному разряду присуще наличие предельного тока (4. 14), аналогичного по своей природе предельному току (4. 14), $F_{2,3} \equiv 0$, в обычном разряде. В режиме с $T_0 > T^*$ также существует верхний предел для полного тока, имеющий, однако, совершенно иное происхождение — требование определенных условий на границе разряда. Верхний предел для тока в режимах $T_0 > T^*$ мало изучен и, по-видимому, в сильной степени зависит от состояния технических средств, обеспечивающих внешний теплоотвод от стенки. При $T_0 \rightarrow T^*$ с любой стороны, верхний предел для тока обращается в бесконечность.

Нижняя граница для i в полном ядерном разряде (1. 2) — общая для всех случаев и формулируется, в силу (1. 3), равенством $I \gg 10^6 a$ ($i \gg 1$).

2. В результате можем примерно очертить границы, в пределах которых могут задаваться параметры μ , θ , i (3. 19), определяющие тот или иной режим разряда.

Формально говоря μ , значение μ может быть произвольным в интервале $0 \leq \mu < \infty$, как в обычном разряде, так и в ядерном, причем задание μ не оказывает никакого влияния на допустимые значения θ , i .

В обычном разряде значение θ произвольно в интервале $0 \leq \theta < \infty$. Однако задание θ предопределяет интервал допустимых i , именно $0 \leq i \leq i_{\text{пред}}^{(об)}(\theta)$, где $i_{\text{пред}}^{(об)}(\theta)$ — значение параметра i , соответствующее предельному току (4. 14), $F_{2,3} \equiv 0$, при заданной температуре в центре θ . Область существования обычного разряда изображена двойной штриховкой на рис. 10.

* Само собой разумеется, допущения, положенные в основу рассмотрения задачи (в частности, конкретный вид (3. 1) выражений для материальных и тепловых потоков), налагают определенные ограничения на значения параметров μ , θ , i . В тех случаях, когда данное исследование не вводит дополнительных ограничений на параметр, указываем интервал от 0 до ∞ .

В полном ядерном разряде значение i произвольно в интервале $1 \ll i < \infty$. При заданном i область допустимых значений θ ограничена конечным интервалом $\theta_1(i) \leq \theta \leq \theta_2(i)$, заключающим в себе значение θ^* , соответствующее температуре (5.1)

$$\theta^* = 0,64 \text{ [DD];}$$

$$\theta^* = 0,1 \text{ [DT].} \quad (5.2)$$

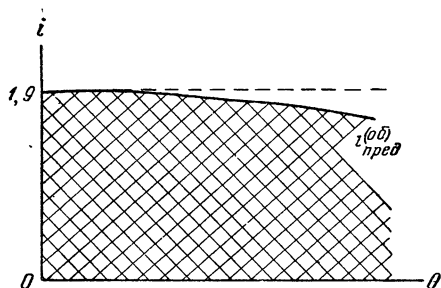


Рис. 10. Область существования обычного разряда.

Нижняя граница интервала $\theta_1(i)$ определяется значением предельного тока (4.14) в режиме $\theta < \theta^*$. Верхняя граница $\theta_2(i)$ налагается требованием определенных условий на границе разряда в режиме $\theta > \theta^*$. При $i \rightarrow \infty$ интервал $\theta_1(i) \leq \theta \leq \theta_2(i)$ сжимается в точку, совпадающую с θ^* . Область существования «полного ядерного» разряда ориентировочно изображена двойной штриховкой на рис. 11.

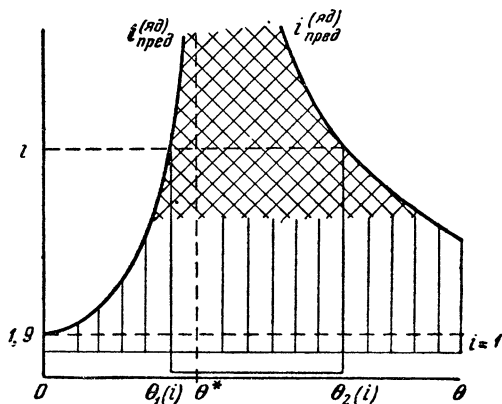


Рис. 11. Область существования ядерного разряда.

Двойная штриховка — полный ядерный разряд.
Вертикальная штриховка — промежуточная область.

3. Представляет особый интерес рассмотрение критических режимов для обычного разряда и ядерного разряда в области $\theta < \theta^*$ — с током (4.14), в точности отвечающим значению $i_{\text{пред}}(\theta)$. Соответствующие решения системы (3.22) дают при

этом постоянство температуры по сечению разряда и, что более важно, обращение в нуль плотности на определенном расстоянии от оси тока. Если окружающую разряд цилиндрическую стенку отнести на еще более далекое расстояние, то будет иметь место отрыв плазмы от стенки, с полной теплоизоляцией при помощи вакуума. Кроме того, вылетающие за пределы разряда ядерные заряженные частицы, пройдя в вакууме траекторию, предписываемую магнитным полем, смогут вновь вернуться в плазму, что уменьшит нижний предел (1.3) для полного тока, требующегося для придания разряду черт, присущих полному ядерному разряду.

За ряд ценных советов и помощь при выборе значений основных параметров приносим благодарность И. Е. Тамму и А. Д. Сахарову, которым была поставлена перед нами настоящая задача, Благодарим И. Н. Головина, важные указания которого были нами учтены на завершающей стадии работы. Исследование особой точки системы уравнений принадлежат А. А. Бунатяну. Все численные расчеты были выполнены бригадой вычислителей под руководством инженера Т. В. Васькиной в составе: т. т. Л. Д. Никитина, Л. Е. Дзюбы, М. М. Никитиной, В. Н. Злобиной и В. М. Левшаковой, весьма инициативно относившихся к своей работе. Благодарим также лаборанта Л. А. Хрулькову, оказавшую нам помощь при оформлении графиков.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Таблица 1. В таблице приведено усредненное по максвелловскому распределению произведение относительной скорости взаимодействующих частиц v на эффективное сечение σ для двух реакций $D(d, n)He^3$ и $T(d, n)He^4$ в зависимости от температуры T в интервале $0,1 \text{ кэв} \leq T \leq 200 \text{ кэв}$.

Зависимость $\sigma_{DD}(E_D)$ бралась по формуле

$$\sigma_{DD}(E_D) = \frac{140}{E_{Mэв}} e^{-\frac{1,43}{\sqrt{E_{Mэв}}}} \cdot 10^{-27} \text{ см}^2, \quad E_D < 0,150 \text{ Мэв};$$

$$\sigma_{DT}(E_D) = 105 \left(1 - e^{-\frac{E_{Mэв} - 0,025}{0,5}} \right) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2, \quad E_D \geq 0,2 \text{ Мэв},$$

приведенной в работе [1].

Зависимость $\sigma_{DT}(E_D)$ в интервале $40 \text{ кэв} \leq E_D \leq 225 \text{ кэв}$ снималась с графика, приведенного в работе [2], при нормировке кривой на 5 барн в максимуме*. Экстраполяция в область малых энергий проводилась

* В [2] кривая $\sigma_{DT}(E_D)$ дана лишь в относительных единицах.

Таблица 1

Скорости реакций $D(d, n)He^3$, $T(d, n)He^4$

| $T, \text{кэв}$ | $\langle v\sigma_{DT} \rangle_{\text{ср}},$ $\text{см}^2/\text{сек}^{-1}$ | $\langle v\sigma_{DD} \rangle_{\text{ср}},$ $\text{см}^2/\text{сек}^{-1}$ | $\frac{\langle v\sigma_{DT} \rangle_{\text{ср}}}{\langle v\sigma_{DD} \rangle_{\text{ср}}}$ |
|-----------------|--|--|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0,1 | 0,21 · 10 ⁻²⁹ | 0,128 · 10 ⁻³⁰ | 16 |
| 0,2 | 0,98 · 10 ⁻²⁶ | 0,38 · 10 ⁻²⁷ | 26 |
| 0,3 | 0,57 · 10 ⁻²⁴ | 0,117 · 10 ⁻²⁵ | 32 |
| 0,4 | 0,73 · 10 ⁻²³ | 0,197 · 10 ⁻²⁴ | 37 |
| 0,5 | 0,44 · 10 ⁻²² | 0,103 · 10 ⁻²³ | 41 |
| 0,6 | 0,173 · 10 ⁻²¹ | 0,40 · 10 ⁻²³ | 44 |
| 0,7 | 0,51 · 10 ⁻²¹ | 0,110 · 10 ⁻²² | 46 |
| 0,8 | 0,125 · 10 ⁻²⁰ | 0,26 · 10 ⁻²² | 49 |
| 0,9 | 0,27 · 10 ⁻²⁰ | 0,52 · 10 ⁻²² | 51 |
| 1,0 | 0,51 · 10 ⁻²⁰ | 0,96 · 10 ⁻²² | 53 |
| 2,0 | 0,20 · 10 ⁻¹⁸ | 0,30 · 10 ⁻²⁰ | 67 |
| 3,0 | 0,120 · 10 ⁻¹⁷ | 0,153 · 10 ⁻¹⁹ | 76 |
| 4,0 | 0,38 · 10 ⁻¹⁷ | 0,44 · 10 ⁻¹⁹ | 86 |
| 5,0 | 0,88 · 10 ⁻¹⁷ | 0,89 · 10 ⁻¹⁹ | 99 |
| 6,0 | 0,170 · 10 ⁻¹⁶ | 0,152 · 10 ⁻¹⁸ | 112 |
| 7,0 | 0,29 · 10 ⁻¹⁶ | 0,23 · 10 ⁻¹⁸ | 124 |
| 8,0 | 0,44 · 10 ⁻¹⁶ | 0,33 · 10 ⁻¹⁸ | 136 |
| 9,0 | 0,64 · 10 ⁻¹⁶ | 0,45 · 10 ⁻¹⁸ | 142 |
| 10 | 0,86 · 10 ⁻¹⁶ | 0,58 · 10 ⁻¹⁸ | 147 |
| 20 | 0,39 · 10 ⁻¹⁵ | 0,24 · 10 ⁻¹⁷ | 163 |
| 30 | 0,63 · 10 ⁻¹⁵ | 0,47 · 10 ⁻¹⁷ | 135 |
| 40 | 0,78 · 10 ⁻¹⁵ | 0,72 · 10 ⁻¹⁷ | 108 |
| 50 | 0,86 · 10 ⁻¹⁵ | 1,00 · 10 ⁻¹⁷ | 86 |
| 60 | 0,89 · 10 ⁻¹⁵ | 0,128 · 10 ⁻¹⁶ | 69 |
| 70 | 0,89 · 10 ⁻¹⁵ | 0,156 · 10 ⁻¹⁶ | 57 |
| 80 | 0,88 · 10 ⁻¹⁵ | 0,185 · 10 ⁻¹⁶ | 48 |
| 90 | 0,86 · 10 ⁻¹⁵ | 0,21 · 10 ⁻¹⁶ | 40 |
| 100 | 0,83 · 10 ⁻¹⁵ | 0,24 · 10 ⁻¹⁶ | 35 |
| 120 | 0,87 · 10 ⁻¹⁵ | 0,30 · 10 ⁻¹⁶ | 29 |
| 140 | 0,92 · 10 ⁻¹⁵ | 0,35 · 10 ⁻¹⁶ | 26 |
| 160 | 0,96 · 10 ⁻¹⁵ | 0,40 · 10 ⁻¹⁶ | 24 |
| 180 | 1,00 · 10 ⁻¹⁵ | 0,45 · 10 ⁻¹⁶ | 22 |
| 200 | 0,103 · 10 ⁻¹⁴ | 0,50 · 10 ⁻¹⁶ | 21 |

по барьерной формуле $\frac{\text{const}}{E} e^{-\frac{1,41}{\sqrt{E_{\text{Мэв}}}}$ с множителем, обеспечивающим

непрерывность кривой при $E_D = 40 \text{кэв}$. Экстраполяция в область больших энергий проводилась по формуле $\sigma_{DT} = 0,17 + B e^{-kE_D}$ (барн) с константами B и k , обеспечивающими непрерывность кривой и ее первой производной при $E_D = 225 \text{кэв}$.

| № системы | μ | θ | i | β_1 | $\sqrt{I_1}$ | z_1^2 | $(\chi t)_1$ | $\left(\frac{p}{\sqrt{t}}\right)_1$ | $\int_0^{t_1} v dt$ | $\int_0^{t_1} v^2 dt$ | %, мин |
|-----------|-------|----------|------|-----------|--------------|-------------------|--------------|-------------------------------------|---------------------|-----------------------|--------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 2 | 0,1 | 0,75 | 0,43 | 1,09 | $2 \cdot 10^{-3}$ | 0,99 | 0,77 | 0,53 | 0,349 | 0,055 |
| 2 | 2 | 0,1 | 1,09 | 0,91 | 1,07 | $2 \cdot 10^{-3}$ | 0,99 | 0,635 | 0,52 | 0,341 | 0,045 |

Таблица 3

Физические характеристики рассчитанных обычных разрядов

| № системы | R , см | n_0 , см $^{-3}$ | \bar{n} , см $^{-3}$ | T_0 , кэВ | T_1 , эВ | I_1 , а | E_z , в/см | H_1 , эс | П $_1$ | П $_{изл}$ | П $_{сум}$ | QДЖ | тепл | | изл |
|-----------|----------|--------------------|------------------------|-------------|------------|-------------------|----------------------|-------------------|--------|------------|------------|------|--------|--------|------|
| | | | | | | | | | | | | | квт/см | квт/см | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1 | 8,0 | $2 \cdot 10^{15}$ | 0,89 | 10^{15} | 10 | $0,74 \cdot 10^6$ | $2,5 \cdot 10^{-3}$ | $1,85 \cdot 10^4$ | 31,4 | 5,6 | 37 | 1,86 | 1,58 | 0,28 | 0,43 |
| 2 | 11,4 | $2 \cdot 10^{15}$ | 0,91 | 10^{15} | 10 | $1,08 \cdot 10^6$ | $1,72 \cdot 10^{-3}$ | $1,89 \cdot 10^4$ | 17,8 | 8,1 | 26 | 1,86 | 1,28 | 0,58 | 0,91 |

Таблица 2. В таблице даны результаты численного интегрирования системы (3. 22) для обычного разряда с (3. 34) в качестве $\varphi_1(z)$. Нумерация в столбце 1 соответствует (4. 19); μ , θ , i — основные параметры (3. 19); $\beta_1 = 0,766i^2$ (3. 34); t_1 — граничное значение t , соответствующее $r = R$; $z_1 = z|_{t=1}$, $(\chi t)_1 = \chi t|_{t=1}$ и т. д.; ν_{\min} — минимальное значение $\nu(t)$ в интервале $0 \leq t \leq t_1$.

Таблица 3. В таблице приведены физические характеристики для просчитанных обычных разрядов. Нумерация систем та же, что и в табл. 2.

- R — радиус цилиндра;
- n_0 — плотность электронов (ядер) в центре;
- \bar{n} — средняя плотность электронов (ядер) по сечению цилиндра;
- T_0 — температура в центре;
- T_1 — температура на границе;
- I_1 — полный электрический ток в системе;
- E_z — продольное электрическое поле;
- H_1 — магнитное поле на границе;
- Π_1 — плотность теплового потока на стенку;
- $\Pi_{\text{изл}}$ — плотность потока лучистой энергии на стенку;
- $\Pi_{\text{сум}} = \Pi_{\text{изл}} + \Pi_1$;
- $q_{\text{днк}}$ — джоулево энерговыделение в 1 пог. см цилиндра;
- $R_{\text{тепл}}$ — тепловой поток через 1 пог. см цилиндрической стенки;
- $R_{\text{изл}}$ — поток лучистой энергии через 1 пог. см цилиндрической стенки;
- $-\gamma_1$ — отношение тормозного энергоотвода к джоулеву тепловыделению в центре системы (3. 28).

Таблица 4. В таблице даны результаты численного интегрирования системы уравнений (3. 22) для «ядерного разряда» в DD-системе, $\varphi_2(z)$, и DT-системе, $\varphi_3(z)$. Состав DT-системы; 50% дейтерия, 50% трития. Нумерация в столбце 2 соответствует (4. 29) для DD- и (4. 30) для DT-системы; $\beta_0 = 2,03 \frac{i^2}{\sqrt{\theta}}$ (3. 23); смысл остальных обозначений тот же, что в табл. 2.

Таблица 5. В таблице приведены физические характеристики для просчитанных «ядерных разрядов». Нумерация систем та же, что и в табл. 4. Смысл повторяющихся обозначений тот же, что в табл. 3.

В соответствии с этим величины n_0 , \bar{n} в случае DT-системы выражают суммарную плотность ядер дейтерия и трития (плотность ядер D и T в отдельности: $\frac{n_0}{2}$ в центре, $\frac{\bar{n}}{2}$ — среднее).

- $q_{\text{яд}}$ — ядерное энерговыделение в 1 пог. см цилиндра;
- $\gamma_{2,3}$ — отношение избытка ядерного энерговыделения над тормозным энергоотводом к джоулеву тепловыделению в центре системы (3. 28);
- N_n — число нейтронов, испускаемых системой в 1 сек из 1 пог. см цилиндра;
- L — длина цилиндра, обеспечивающая производство 1 г нейтронов при непрерывной работе соответствующей модели МТР в течение суток.

| Тип системы | № системы | μ | θ | i | β_0 | $\sqrt{t_1}$ | z_i^2 | $(\lambda t)_1$ | $\left(\frac{p}{\sqrt{t}}\right)_1$ | $t_1 \int_0^{t_1} v dt$ | $t_1 \int_0^{t_1} v^2 f_1 dt$ | $t_1 \int_0^{t_1} v^2 f_2 dt$ | $\chi_{\text{МПН}}$ |
|-------------|-----------|-------|----------|-------|-----------|--------------|---------------------|-----------------|-------------------------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| DD | 1 | 1 | 1 | 2,97 | 17,9 | 1,26 | $2 \cdot 10^{-4}$ | 0,98 | 1,63 | 0,716 | 0,157 | 0,217 | 0,115 |
| | 2 | 1 | 1 | 9,39 | 179 | 2,0 | $8,3 \cdot 10^{-3}$ | 0,94 | 0 | 2,20 | 0,208 | 0,202 | 0,415 |
| DT | 1 | 2,5 | 0,4 | 0,784 | 1,97 | 1,44 | $0,5 \cdot 10^{-3}$ | 0,966 | 2,91 | 0,99 | 0,0877 | 1,725 | 0,22 |
| | 2 | 2,5 | 0,4 | 1,68 | 9,06 | 4,02 | $0,5 \cdot 10^{-3}$ | 0,935 | 2,46 | 24,5 | 0,409 | 1,40 | 0,54 |

Таблица 5

Физические характеристики рассчитанных ядерных разрядов

| Тип системы | № системы | $R, \text{ см}$ | $n_0, \text{ см}^{-3}$ | $n, \text{ см}^{-3}$ | $T_{\text{нв}}, \text{ нэв}$ | $T_{\text{ав}}, \text{ ав}$ | $I_1, \text{ а}$ | $E_z, \text{ вт/см}$ | $H_{1, \text{ сс}}$ | вт/см ² | | | квт/см | | | $T_2, \text{ з}$ | $N_{\text{ней}} / \text{см} \cdot \text{сек.}$ | $L, \text{ м}$ | |
|-------------|-----------|-----------------|------------------------|----------------------|------------------------------|-----------------------------|-------------------|----------------------|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------|-----------------|-------------------|------------------|--|---------------------|-----|
| | | | | | | | | | | Π_1 | $\Pi_{\text{изл}}$ | $\Pi_{\text{сум}}$ | $q_{\text{вд}}$ | $q_{\text{пж}}$ | $q_{\text{тепл}}$ | | | | изл |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| DD | 1 | 16,4 | 10^{15} | $0,45 \cdot 10^{15}$ | 50 | $10,2,9 \cdot 10^6$ | $3,5 \cdot 10^4$ | 10^{-4} | $3,5 \cdot 10^4$ | 5,9 | 8,1 | 14 | 1,16 | 0,29 | 0,61 | 0,84 | 3,4 | $1,7 \cdot 10^{15}$ | 41 |
| | 2 | 82 | 10^{15} | $0,55 \cdot 10^{15}$ | 50 | $415,8,8 \cdot 10^6$ | $2,1 \cdot 10^4$ | $0,32 \cdot 10^{-4}$ | $2,1 \cdot 10^4$ | 0 | 21 | 21 | 10,72 | 0,28 | 0 | 11,0 | 34 | $1,6 \cdot 10^{16}$ | 4,4 |
| DT | 1 | 5,0 | $2,5 \cdot 10^{15}$ | $1,2 \cdot 10^{15}$ | 20 | $10,0,76 \cdot 10^6$ | $3,1 \cdot 10^4$ | $1,5 \cdot 10^{-3}$ | $3,1 \cdot 10^4$ | 153 | 6,5 | 165 | 4,0 | 1,133 | 4,93 | 0,203 | 10,2 | $0,7 \cdot 10^{16}$ | 10 |
| | 2 | 30 | $2,5 \cdot 10^{15}$ | $3,8 \cdot 10^{15}$ | 20 | $10,1,57 \cdot 10^6$ | $1,06 \cdot 10^4$ | $0,7 \cdot 10^{-3}$ | $1,06 \cdot 10^4$ | 62 | 24 | 86 | 14,9 | 1,1 | 11,6 | 4,4 | 47 | $2,6 \cdot 10^{16}$ | 2,7 |

Пояснения к рисункам

Рис. 1, 2. На рис. 1 и 2 представлены функции $F_1(T)$, $F_2(T)$, $F_3(T)$, определяющие через (2.1), (2.7), (2.10) тормозной энергоотвод $Q_{\text{торм}}$ и ядерное энерговыделение $Q_{\text{яд}}$ в DD- и DT-системах, соответственно. Ядерное энерговыделение рассчитано в предположении полной отдачи плазме энергии заряженных продуктов реакций.

Рис. 3—9. На рис. 3—9 показаны результаты численного интегрирования системы уравнений (3.22). Величины v , z , x на графиках тождественны соответствующим величинам в (3.22). Величина p' и переменная τ на графиках связаны с величиной p и переменной t в (3.22) соотношениями: $p = 23,25p'$; $t = 0,512\tau$.

Рис. 3 и 4 относятся к обычному разряду, рис. 5 и 6 — к ядерному разряду в DD-системе; рис. 7—8 — к ядерному разряду в DT-системе.

Рис. 4а. На рис. 4а представлена зависимость предельного тока (4.14) от температуры T_0 в условиях ядерного разряда в DD- и DT-системах. За единицу принято максимальное значение (4.15) для предельного тока в обычном разряде.

Рис. 9 дает распределение температуры для разных случаев в логарифмическом масштабе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Давиденко, А. М. Кучер, И. С. Погребов, Ю. Ф. Тутуров, Определение полных сечений реакции $D(d, n)He^3$ в интервале энергий 20—220 кэв. Отчет АН СССР, 1951 г.; опубликовано в сборнике «Ядерные реакции на легких ядрах», М. Атомиздат, 1957.

2. В. А. Давиденко, И. С. Погребов, А. И. Сауков, Исследование реакции $T(d, n)He^4$. Отчет АН СССР, 1951 г.; опубликовано в журнале Атомная энергия, II, 386, 1957.

3. И. Е. Тамм, см. настоящий том, стр. 3.

4. С. И. Брагинский, см. настоящий том, стр. 115.

5. Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов, см. настоящий том, стр. 138.

Б. А. Трубинов

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРА ПЛАЗМЫ *

Рассматривается устойчивость стационарного цилиндрического столба полностью ионизованной плазмы с продольным током, равномерно распределенным по сечению. Методом малых возмущений показано, что аксиально симметричные деформации, имеющие вид периодических вдоль оси сужений, экспоненциально нарастают за времена порядка $\tau \sim \sqrt{a\lambda_z}/v_T$ (a — невозмущенный радиус цилиндра; λ_z — длина волны возмущений; v_T — тепловая скорость ионов). Это может привести к полному обрыву тока в цепи.

§ 1. Введение

Как известно, при пропускании сильного тока по плазме она стягивается магнитными силами к оси разрядной трубки в цилиндрический столб («пинч-эффект»). В стационарном состоянии ток распределяется по всему сечению столба: плотность плазмы при этом оказывается максимальной на оси и убывает к периферии. В настоящей работе исследуется устойчивость такого стационарного цилиндра плазмы с равномерно распределенным по сечению током относительно возмущений типа перетяжек, когда сечение цилиндра в некоторых местах сужается. Поскольку магнитное давление, создаваемое продольным током, будет возрастать в месте сужения, выталкивая плазму, такие возмущения должны нарастать.

Будем исходить из уравнений магнитной гидродинамики. Температуры электронов и ионов для простоты считаем оди-

* Работа выполнена в 1952 г.

наковыми, постоянными по всему сечению и не меняющимися при возмущениях. Инерцией электронов пренебрегаем, плазму считаем квазинейтральной, проводимость σ считаем постоянной. В этих предположениях уравнения магнитной гидродинамики можно записать в виде:

$$Mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2T\nabla n + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]; \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n\mathbf{v} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{Mc}{e} \text{rot } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}.$$

Здесь M и \mathbf{v} — масса и скорость ионов. Последнее уравнение получено путем применения операции rot к уравнению движения ионов.

Стационарное решение этой системы имеет вид

$$n^{(0)} = n_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad H^{(0)} = H_0 \frac{r}{a}, \quad v = 0. \quad (1.2)$$

Здесь H_0 — магнитное поле на границе цилиндра, определяемое полным током; $n_0 = \frac{H_0^2}{8\pi T}$ — плотность на оси; a — радиус цилиндра. Это стационарное решение примем за нулевое приближение.

В следующем приближении полагаем $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{H}^{(1)}$, $n = n^{(0)} + n^{(1)}$ и для поправок $(H^{(1)}, n^{(1)}, v \sim f_a(r) e^{i(kz - \omega t)})$ из системы (1.1) в линейном приближении получим уравнения

$$Mn^{(0)} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -2T\nabla n^{(1)} + \frac{1}{4\pi} ([\text{rot } \mathbf{H}^{(1)}\mathbf{H}^{(0)}] + [\text{rot } \mathbf{H}^{(0)}\mathbf{H}^{(1)}]); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} = -\text{div } (n^{(0)}\mathbf{v}); \quad \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{v}\mathbf{H}^{(0)}].$$

Последнее уравнение здесь получается из третьего уравнения системы (1.1) при условии пренебрежения двумя членами. Во-первых, в уравнении для поправок отбрасывается член $\frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H}^{(1)}$, поскольку мы считаем проводимость плазмы достаточно большой. Таким образом, конечность проводимости сказывается лишь на начальном распределении поля, тогда как при относительно быстрых возмущениях плазма ведет себя, как идеально проводящая. Во-вторых, в указанном уравнении пренебрегаем членом с инерцией ионов, ограничиваясь рассмотрением не слишком высоких частот. Указанные ограничения справедливы при выполнении неравенств

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma a^2} \ll \omega \ll \frac{eH_0}{Mc}. \quad (1.4)$$

Исключая из системы (1.3) $H^{(1)}$ и $n^{(1)}$, получим уравнение

$$\hat{L}(\mathbf{v}) = \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \nabla(\mathbf{v} \nabla r^2) + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \nabla r^2 = -\lambda(1 - r^2) \mathbf{v}, \quad (1.5)$$

где $\lambda = \frac{M}{2T} (a\omega)^2$ и радиус цилиндра a принят за единицу. Исследование устойчивости сводится, таким образом, к определению спектра собственных значений λ в полученном уравнении: если λ может быть отрицательным, то среди решений будут нарастающие возмущения.

Естественно потребовать конечности возмущений на всем отрезке $(0, 1)$, что оказывается достаточным для однозначной формулировки граничных условий к уравнению (1.5) и, следовательно, для полного определения спектра λ . Так, поделив z — компоненту уравнения (1.5) на ix ($x = ka$), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{v} - 2rv_r = -\frac{\lambda}{ix} (1 - r^2) v_z(r). \quad (1.6)$$

Требование конечности v_z (1) приводит к условию при $r = 1$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}|_{r=1} - 2v_r(1) = 0. \quad (1.7)$$

Можно убедиться, что это условие эквивалентно требованию сохранения при возмущениях полного тока, текущего по плазме.

Оператор $\hat{L}(\mathbf{v})$ в уравнении (1.5) при конечных \mathbf{v} оказывается самосопряженным, и, следовательно, значения λ могут быть только действительными. Нормированные собственные функции \mathbf{v}_λ , соответствующие различным λ , будут ортогональны с весом $(1 - r^2)$.

Подставляя в условие самосопряженности соотношение (1.6), получим полезную формулу

$$\langle \mathbf{v}^* \hat{L}(\mathbf{v}) \rangle = -\lambda = \int 4r^2 |v_r|^2 dV - \frac{\lambda^2}{x^2} \int (1 - r^2) |v_z|^2 dV, \quad (1.8)$$

из которой можно заключить, что положительные λ должны превышать x^2 (т. е. $\lambda^{(+)} > x^2$ при $\lambda^{(+)} > 0$).

§ 2. Определение спектра колебаний

Рассмотрим вначале случай $x = 0$. Уравнение (1.5) для возмущений при этом имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_r) \right] = -\lambda(1 - r^2) v_r; \quad 0 = -\lambda(1 - r^2) v_z. \quad (2.1)$$

Очевидно, возможны два случая: $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$. В первом случае $v_z = 0$. Введя новую переменную $x = r^2$ и новую функцию $M(x) = rv_r$, получим уравнение

$$M'' + \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1-x}{x} M = 0 \text{ с условиями } M(0) = 0, \\ M'(1) = M(1). \quad (2.2)$$

Последнее условие следует из (1.7). Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию в нуле, является функция

Уиттекера $M(x) = M_{\frac{\sqrt{\lambda}}{4}, \frac{1}{2}}(x\sqrt{\lambda})$. Удовлетворяя второму граничному условию, получим для λ трансцендентное уравнение

$$\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) {}_1F_1\left(2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{4}, 2, \sqrt{\lambda}\right) = \\ = \left(1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) {}_1F_1\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{4}, 2, \sqrt{\lambda}\right), \quad (2.3)$$

корни которого можно найти, пользуясь таблицами вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$. Для больших λ можно воспользоваться асимптотикой функции $M(x)$, что приводит к приближенному уравнению для λ

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \sqrt{\lambda}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{10}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (2.4)$$

Отсюда находим $\lambda^{(+)} \cong 44, 120, 200 \dots$ и т. д., что соответствует устойчивым колебаниям ($\lambda^{(+)} > 0$).

При $\lambda = 0$ находим v_r из уравнения

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_r) \right] = 0, \text{ откуда } v_r = \text{const} \cdot r. \quad (2.5)$$

Это решение удовлетворяет обоим граничным условиям и соответствует наименьшему значению λ . При этом компонента v_z оказывается неопределенной, и для отыскания ее необходимо более детально рассмотреть предельный переход при $x \rightarrow 0$ от общего уравнения возмущений (1.5) к уравнениям (2.1).

Исходное векторное уравнение (1.5) можно привести к уравнению с одной неизвестной, для чего введем переменную

$x = r^2$ и новую функцию $\varphi(x) = (1 - r^2)v_z$. Тогда, исключая v_r , получим после некоторых преобразований уравнение для $\varphi(x)$

$$x \left[x + \frac{\lambda}{4}(1-x) \right] \varphi'' + \frac{\lambda}{4} \varphi' + \left\{ \frac{\lambda}{4} - x \left[x + \frac{\lambda}{4}(1-x) \right] + \right. \\ \left. + \left[x + \frac{\lambda}{4}(1-x) \right]^2 \left[1 - \frac{x^2}{\lambda(1-x)} \right] \right\} \varphi = 0. \quad (2.6)$$

При $\kappa \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow 0$ это уравнение принимает вид

$$\varphi'' + \frac{L}{4(1-x)} \varphi = 0, \quad \text{где } L = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left(\frac{-4\kappa^2}{\lambda} \right). \quad (2.7)$$

Поскольку $\varphi(x) = (1-x)v_z$, из требования конечности v_z (1) следует условие $\varphi(1) = 0$. Решением, удовлетворяющим этому условию, будет функция Бесселя

$$\varphi(x) = \text{const} \sqrt{1-x} J_1(\sqrt{(1-x)L}), \quad (2.8)$$

которая при $x \rightarrow 0$ регулярна тривиальным образом, поскольку при получении уравнения (2.7) из уравнения (2.6) была утрачена особенность в точке $x=0$ вследствие сокращения на x^2 . Таким образом, необходимо более сильное условие, чем простое требование конечности $\varphi(0)$.

Если в уравнении (2.6) не делать предельный переход $\kappa \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$, то вблизи точки $x=0$ оно будет иметь приближенный вид

$$x\varphi'' + \varphi' + \varphi \left(1 + \frac{\lambda}{4} - \frac{x^2}{4} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Здесь сохранена особенность при $x=0$. Решениями этого уравнения являются функции Бесселя и Неймана, причем последняя должна быть отброшена вследствие требования конечности $\varphi(0)$. Таким образом, при $\kappa \neq 0$ функция $\varphi(x)$ вблизи $x=0$ должна иметь вид

$$\varphi(x) \approx \text{const} J_0 \left(2 \sqrt{x \left(1 + \frac{\lambda}{4} - \frac{x^2}{4} \right)} \right) \quad (2.10)$$

Потребуем, чтобы решение (2.8) было правильно «счито» с граничным видом $\varphi(x)$, определяемым формулой (2.10), в которой для нашего случая нужно положить $\kappa=0$, $\lambda=0$. Тогда получим

$$\sqrt{1-x} J_1(\sqrt{(1-x)L}) \cong \text{const} J_0(2\sqrt{x}) \quad \text{при } x \ll 1. \quad (2.11)$$

Из равенства функций при $x=0$ найдем $\text{const} = J_1(\sqrt{L})$. Приравнявая производные при $x=0$, находим уравнение для определения L

$$\sqrt{L} J_1(\sqrt{L}) = 2J_0(\sqrt{L}). \quad (2.12)$$

Решая это уравнение, находим \sqrt{L}

$$\sqrt{L} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-4x^2}{\lambda} \right)} = 0; 5,135; \dots$$

$$\left(\approx \frac{3\pi}{4} + \pi n \text{ при } n \gg 1 \right). \quad (2.13)$$

Таким образом, в случае $x=0$ наименьшее значение $\lambda=0$ оказывается вырожденным с бесконечной кратностью. При $x \neq 0$ это вырождение снимается, и появляется бесконечный спектр отрицательных собственных значений $\lambda^{(-)}$, которые при $x \ll 1$ в соответствии с (2.13) определяются выражениями

$$\lambda_1^{(-)} = -\frac{4x^2}{(5,135)^2}, \dots \quad \lambda_n^{(-)} \approx -4x^2 \left(\frac{4}{3\pi + 4\pi n} \right)^2. \quad (2.14)$$

Эти формулы не дают лишь основной гармоник, для которой $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\lambda} = 0$. Собственная функция, отвечающая этой гармонике, при $x=0$ в соответствии с (2.8), очевидно, равна

$$\varphi_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \text{const}(x) \sqrt{1-x} J_1 \left(\sqrt{(1-x) \left(\frac{-4x^2}{\lambda} \right)} \right) =$$

$$= \text{const}(1-x). \quad (2.15)$$

При $x \neq 0$ (но $x \ll 1$) будем искать поправки к этой функции вместе с $\lambda_0^{(-)}$ в виде разложения по x

$$\varphi_0 = (1-x) + x f_1(x) + x^2 f_2(x) + \dots,$$

$$\lambda_0^{(-)} = x \mu_1 + x^2 \mu_2 + \dots \quad (2.16)$$

Подставив эти выражения в (2.6) и приравнявая члены при одинаковых степенях x , получим систему уравнений для функций $f_1(x), f_2(x), \dots$, которые должны быть конечны на всем отрезке $(0 \div 1)$. Величины μ_1, μ_2, \dots следует подобрать так, чтобы члены в разложении $\varphi_0(x)$, расходящиеся при $x=0$ или при $x=1$, исчезли. Таким путем можно в первом приближении найти

$$\mu_1 = -2\sqrt{3} \text{ и, следовательно, } \lambda_0^{(-)} = -2\sqrt{3} \kappa \quad (\text{при } \kappa \ll 1). \quad (2.17)$$

Это собственное значение соответствует возмущению, растущему наиболее быстро.

В обратном предельном случае, при $\kappa \gg 1$, решение уравнения (2.6) можно получить с помощью так называемого метода ВКБ (ср. квазиклассическое приближение в квантовой механике). Этот метод дает

$$\varphi_{\text{ВКБ}}(x) \approx \text{const} \sin \left\{ \frac{x}{\sqrt{-\lambda}} \int_{\frac{\lambda}{\lambda-4}}^x \sqrt{\frac{1}{1-x} + \frac{\lambda}{4x}} dx + \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (2.18)$$

Это выражение применимо при $x^2 \gg |\lambda|$.

Граничное условие $\varphi(1) = 0$ будет выполнено, если

$$\frac{x}{\sqrt{-\lambda}} \int_{\frac{\lambda}{\lambda-4}}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x} + \frac{\lambda}{4x}} dx = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Это условие аналогично правилу квантования Бора в квантовой механике. Входящий сюда интеграл можно выразить через полные эллиптические интегралы E и K . В предельных случаях его асимптотики имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_{\frac{\lambda}{\lambda-4}}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x} + \frac{\lambda}{4x}} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\lambda}} & \text{при } |\lambda| \ll 1 \\ -\frac{\pi}{\lambda} & \text{при } |\lambda| \gg 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Для спектра λ это дает

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(-)} &= -4x^2 \left(\frac{4}{3\pi + 4\pi n} \right)^2 & \text{при } |\lambda| \ll 1; \\ \lambda_n^{(-)} &= -\frac{4x}{3 + 4n} & \text{при } |\lambda| \gg 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поскольку этот расчет применим при $x^2 \gg |\lambda|$, первая формула пригодна для высших гармоник (большие n). Отметим, что она совпадает с найденной ранее формулой (2.14), полученной для случая $\kappa \ll 1$. Вторая формула справедлива при $\kappa \gg 1$ и не слишком больших n .

Уравнение (2.6) в несколько иной форме было решено также численно на электронной машине Института точной механики АН СССР. При этом были получены значения $\lambda^{(-)}$

трех первых гармоник. Для сравнения приведем таблицу значений λ , полученных численно (первый столбец) и по формулам (2.17), (2.14) и (2.21) (второй столбец):

| x | $\lambda_0^{(-)}$ | | $\lambda_1^{(-)}$ | | $\lambda_2^{(-)}$ | |
|-----|-------------------|-------|-------------------|--------|-------------------|---------|
| 0,5 | -1,62 | -1,73 | -0,0376 | -0,038 | -0,015 | -0,0135 |
| 1 | -3,22 | -3,46 | (Нет) | -0,156 | -0,054 | -0,054 |
| 4 | -9,75 | -13,8 | -2,84 | -2,48 | -0,738 | -0,86 |

Отсюда видно, что наши формулы достаточно хорошо применимы вплоть до $x \sim 1$.

В проделанном расчете мы считали температуру плазмы постоянной. Покажем, что учет изменений температуры не приводит к заметному искажению спектра $\lambda_{\text{из}}$ рассмотренных выше изотермических колебаний.

Наиболее просто рассмотреть другой предельный случай — адиабатические колебания. Для этого к исходной системе уравнений (1.1) добавим уравнение баланса энергии в форме уравнения адиабаты для ионов

$$\frac{1}{\gamma-1} n \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \left(\approx \frac{5}{3} \right). \quad (2.22)$$

Уравнение для возмущений \mathbf{v} принимает тогда вид

$$\hat{L}(\mathbf{v}) + (\gamma - 1) \hat{A}(\mathbf{v}) = -\lambda_{\text{ад}} (1 - r^2) \mathbf{v}, \quad (2.23)$$

где $\hat{A}(\mathbf{v}) = (1 - r^2) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - (\operatorname{div} \mathbf{v}) \nabla r^2$, а $\hat{L}(\mathbf{v})$ — прежний оператор. Если формально считать $(\gamma - 1)$ малым параметром, то в первом приближении теории возмущений получим

$$-\lambda_{\text{ад}} = -\lambda_{\text{из}} + (\gamma - 1) \langle \mathbf{v}_0^* \hat{A}(\mathbf{v}_0) \rangle,$$

где

$$\langle \mathbf{v}_0^* \hat{A}(\mathbf{v}_0) \rangle = - \int (1 - r^2) |\operatorname{div} \mathbf{v}_0|^2 dV < 0. \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что $\lambda_{\text{ад}} > \lambda_{\text{из}}$, т. е. весь спектр $\lambda_{\text{ад}}$ смещен в сторону положительных λ . Подобно тому как это было сделано ранее, можно получить соотношение, аналогичное (1.8), и из него заключить, что $\lambda_{\text{ад}}^{(+)} > x^2$. Отсюда следует, что при изменении $(\gamma - 1)$ от нуля до некоторого положительного значения (в частности, до $\frac{2}{3}$) «отрицательный» спектр $\lambda^{(-)}$ (являвшийся изотермическим при $\gamma - 1 = 0$) не может перейти через точку $\lambda = 0$ и стать положительным.

Итак, качественно характер спектра λ не меняется при

учете изменений температуры, хотя устойчивые колебания в этом случае будут обладать большей частотой, а неустойчивые нарастать несколько медленнее, чем в изотермическом случае.

Следовательно, мы имеем следующую картину собственных колебаний плазменного цилиндра с током, равномерно распределенным по сечению. До тех пор, пока нет зависимости по z ($\kappa = 0$), цилиндр либо покоится, либо колеблется устойчивым образом по закону $v \sim e^{i\omega t}$ с частотами

$$\omega = \frac{v_T}{a} \sqrt{\lambda^{(+)}}, \quad \text{где } v_T = \sqrt{\frac{2T}{M}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi M n_0}}, \quad (2.25)$$

и $\lambda^{(+)}$ может принимать значения $\lambda^{(+)} = 0; 44; 120; 200 \dots$. Нулевое значение $\lambda = 0$ оказывается вырожденным с бесконечной кратностью. При появлении зависимости от z (по мере увеличения $\kappa = \kappa a$) это вырождение снимается и появляется бесконечный спектр отрицательных значений $\lambda^{(-)}$, соответствующих возмущениям, нарастающим по закону

$$v \sim e^{\alpha t}, \quad \text{где } \alpha = \frac{v_T}{a} \sqrt{|\lambda^{(-)}|}, \quad (2.26)$$

а $\lambda^{(-)}$ может принимать значения

$$\lambda_0^{(-)} = \begin{cases} -2\sqrt{3} \kappa & \kappa \ll 1 \\ -\frac{4}{3} \kappa & \kappa \gg 1 \end{cases} \quad \lambda_{1,2,3}^{(-)} \cong -4\kappa^2 \left(\frac{4}{3\pi + 4\pi n} \right)^2. \quad (2.27)$$

Положительные $\lambda_{1,2,3}^{(+)} = 44; 120; 200 \dots$ будут при $\kappa \neq 0$ сдвигаться, оставаясь положительными в соответствии с условием $\lambda^{(+)} > \kappa^2$. Новые положительные λ не появляются.

В заключение найдем условие, при котором выполняется второе из неравенств (4): $\omega \ll \frac{eH_0}{Mc}$. Пользуясь выражениями (2.27), найдем, что это требование приводит к условию $\lambda \ll \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{M} \right) \frac{a^2}{c}$, которое выполняется при достаточно больших плотностях n_0 (например, для $\kappa \sim 1$, $a \sim 1$ см — при $n_0 > 10^{15}$ см⁻³).

§ 3. Заключение

Рассмотренные выше деформации типа перетяжек плазменного цилиндра нарастают, по-видимому, быстрее, чем возмущения, связанные с изгибанием цилиндра (образование «змей», закручивание и т. п.). Такие перетяжки представляют особый интерес еще и потому, что при своем развитии могут

привести к полному пережатию плазменного цилиндра, т. е. к обрыву цепи тока, чего не происходит при других видах возмущений.

Можно предложить следующую качественную картину поведения газового разряда при большой величине тока.

Вслед за начальным пробоем, по мере нарастания тока, плазменный цилиндр под действием магнитных сил отрывается от стенок камеры и стягивается к оси. В ходе этого стягивания возмущения типа перетяжек будут экспоненциально нарастать. Уменьшение радиуса шнура и развитие перетяжек на нем приводят в некоторый момент к резкому возрастанию его индуктивности, вследствие чего прохождение тока по нему затрудняется. Энергетически более выгодным оказывается образование для тока нового пути с меньшей индуктивностью. Если снаружи шнура существует не полный вакуум, а нейтральный газ с некоторой плотностью (что всегда имеет место в реальных условиях), то, естественно, должен последовать повторный пробой газа по периферии разрядной камеры.

По-видимому, экспериментально наблюдаемые «особенности» на осциллограммах тока и напряжения объясняются именно этим повторным пробоем, происходящим в момент, когда индуктивность первичного шнура становится достаточно большой. Вслед за этим моментом в течение некоторого времени могут одновременно существовать и первичный шнур в центре, и новая цилиндрическая оболочка с током у стенок камеры. Развитие перетяжек на первичном шнуре продолжается и вскоре приводит к полному его пережатию. В местах таких разорванных перетяжек должны возникать сильные перенапряжения, поскольку в окружающем шнур магнитном поле запасена значительная энергия. Это поле стремится поддерживать ток в уже разорванном шнуре, и поэтому в местах разрывов будут возникать сильные токи смещения $\frac{\partial E}{\partial t}$. В возникающих при этом электрических полях некоторое число ионов и электронов может быть ускорено до значительных энергий*.

Настоящая работа была проделана под непосредственным руководством академика М. А. Леонтовича, которому автор приносит глубокую благодарность за весьма ценные советы и критические замечания.

Автор благодарит также академика С. Л. Соболева за организацию численного расчета задачи.

* *Примечание при корректуре.* В последнее время получены экспериментальные данные, качественно подтверждающие описанную картину разряда (частное сообщение Б. Г. Брежнева).

СО Д Е Р Ж А Н И Е

| | |
|---|-----|
| И. Е. Тамм. Теория магнитного термоядерного реактора. (Часть I) | 3 |
| А. Д. Сахаров. Теория магнитного термоядерного реактора. (Часть II) | 20 |
| И. Е. Тамм. Теория магнитного термоядерного реактора. (Часть III) | 31 |
| А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, С. Ю. Лукьянов, С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров, И. М. Подгорный, Н. А. Явлинский. Исследование нагревания водородной плазмы в малых тороидальных системах | 42 |
| Г. И. Будкер. Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном магнитном термоядерном реакторе | 66 |
| Б. И. Давыдов. О влиянии колебаний плазмы на ее электропроводность и теплопроводность | 77 |
| Б. И. Давыдов. О зажигании безэлектродного разряда | 89 |
| А. М. Андрианов, С. М. Осовец. Теория и опыты по зажиганию безэлектродного разряда в магнитном поле | 95 |
| М. А. Леонтович. О силах, действующих на прямолинейный ток, находящийся внутри проводящей цилиндрической трубы | 110 |
| С. И. Брагинский. Стягивание плазмы под действием собственного магнитного поля | 115 |
| Г. И. Будкер. Бетатронный метод разогрева плазмы до высоких температур | 122 |
| В. И. Коган. О скорости выравнивания температур заряженных частиц в плазме | 130 |
| Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов. К теории температурного скачка на границе плазмы в магнитном поле | 138 |
| В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал. Диэлектрическая постоянная высокотемпературной замагниченной плазмы и оценка лучистой теплопроводности | 161 |
| В. И. Коган, А. Б. Мигдал. Зависимость спектра тормозного излучения от электронной температуры плазмы | 172 |
| С. И. Брагинский. Потоки частиц и тепла поперек сильного магнитного поля в полностью ионизованной двухтемпературной плазме | 178 |

| | |
|---|-----|
| С. И. Брагинский, Г. И. Будкер. Физические явления в процессе разгорания разряда при неполной ионизации . . | 186 |
| М. А. Леонтович, В. Д. Шафранов. Об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле | 207 |
| Г. И. Будкер. Электрический пробой в газе при наличии сильного внешнего магнитного поля, переменного во времени . . | 214 |
| М. А. Леонтович. Магнитное поле линейного тока, окруженного идеально проводящим цилиндром с разъемом | 222 |
| С. И. Брагинский. Исследование осевой области плазменного шнура | 229 |
| В. С. Комельков, В. И. Синицын. Пьезоэлектрический метод исследования мощного газового разряда | 234 |
| Г. И. Будкер. Термоядерные реакции в потенциальной яме отрицательного заряда | 243 |
| Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов. Стационарные режимы магнитного термоядерного реактора | 249 |
| Б. А. Трубников. О неустойчивости цилиндра плазмы | 289 |



**Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций
Том I**

Утверждено к печати Институтом атомной энергии Академии наук СССР

Слано в набор 23/IV 1958 г. Подписано к печати 21/VII 1958 г. Формат 60×92¹/₁₆.
Печ. л. 18,75. Уч.-издат. л. 15. Тираж 3000 экз. Т-08810. Изд. № 3291.
Тип. зак. № 784.

Цена 11 р.

Издательство Академии наук СССР, Москва, Б-64, Подсосенский пер., 21
4-я типография Издательства АН СССР, Ленинград, В-34, 9 линия, дом 12