

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ

ТОМ

II

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ

Т О М
II

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1 9 5 8

Ответственный редактор
академик М. А. ЛЕОНТОВИЧ

С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов

ПЛАЗМЕННЫЙ ШНУР С ПОТЕРЕЙ ТЕПЛА НА ЭЛЕКТРОДЫ*

§ 1. Введение

В настоящей работе делается попытка рассмотреть плазменный шнур с электродами. Наличие электродов приводит к тому, что физические величины меняются вдоль оси, в отличие от того, что должно было бы происходить в бесконечном шнуре, рассматривавшемся в [1, 2].

Легко показать, что в случае, когда инерцией и вязкостью плазмы можно пренебречь и собственное электрическое поле шнура мало по сравнению с магнитным полем, давление, плотность тока и магнитное поле в шнуре не меняются вдоль оси.

Рассматривается стационарная задача, в которой температура ионов и электронов и электрическое поле изменяются вдоль оси шнура (ось z). Шнур считается оторванным от стенки: все выделяющееся в нем тепло передается на электроды. Рассмотрен также случай, когда существенен уход тепла посредством тормозного излучения.

Задача решалась для двух предельных случаев: «сильный отрыв» ($T_e \gg T_i$) и «слабый отрыв» ($|T_e - T_i| \ll T_e$). При слабом отрыве температура плазмы меняется вдоль оси по закону $T \sim (l - z)^{2/5}$. На аноде ($z = 0$) переход от высокой температуры к температуре анода происходит в тонком слое практически скачком. По радиусу температура меняется слабо благодаря большой теплопроводности ионов. Как и для бесконечного шнура, условием слабого отрыва является $\Pi = \frac{e^2 N}{Mc^2} \gg 1$. Получены формулы, дающие радиус стационар-

* Работа выполнена в 1953 г.

ного шнура и ток в нем в зависимости от приложенного напряжения. При сильном отрыве температура электронов изменяется вдоль оси по тому же закону, что и при слабом. Условием сильного отрыва во всех точках шнура является

$$\Pi \ll \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Температура плазмы оказывается по порядку величины равной приложенному к шнуру напряжению. Вольтамперная характеристика в рассматриваемом случае — возрастающая ($I \sim \sqrt{V}$) до тех пор, пока не начинает сказываться излучение. Как и в случае бесконечного шнура, наличие излучения приводит к тому, что в стационарном режиме ток не может превзойти некоторой предельной величины.

Полный поток энергии вдоль оси шнура складывается из конвективного потока, связанного с электрическим током — $\frac{5}{2} \frac{j}{e} T$, и из дрейфовых потоков электронов и ионов («замагниченной» теплопроводностью можно пренебречь). При сильном отрыве дрейфовый поток электронов имеет тот же порядок величины, что и конвективный, и направлен в ту же сторону (к аноду). В наиболее интересном практически случае слабого отрыва дрейфовые потоки ионов и электронов почти точно взаимно компенсируются (с точностью до $\Delta T/T$), так что остается лишь электронный конвективный поток. Этот поток энергии идет на анод.

Естественно ожидать, что и в нестационарном случае, особенно при слабом отрыве, когда нет дрейфовых потоков, потеря энергии на электроды будет того же порядка величины, что и в стационарном.

§ 2. Основные уравнения

Задача о шнуре с электродами имеет осевую симметрию $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. В этом случае можно положить $j_{\varphi} = en(v_{i\varphi} - v_{e\varphi}) = 0$ и считать, что магнитное поле имеет одну компоненту H_{φ} . Покажем, что при некоторых дополнительных условиях можно считать, что давление $p = p_e + p_i$, плотность тока $j = en(v_i - v_e)$ и магнитное поле $H_{\varphi} = H$ не меняются вдоль оси шнура, т. е. аксиальная симметрия сводится к цилиндрической.

Если пренебречь инерцией и вязкостью (анизотропией давления), то уравнение равновесия плазмы принимает вид

$$-\nabla p + \frac{1}{c} [jH] = 0. \quad (2.1)$$

Применяя к этому уравнению операцию rot и пользуясь уравнениями Максвелла, нетрудно получить $j_r = 0$. Следовательно, $\partial H_\varphi / \partial z = 0$ и $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

В стационарном случае, который рассматривается в настоящей работе, из уравнений непрерывности получим $v_{r,i} = v_{r,e} = 0$. Будем также считать скорости ионов вдоль оси z равными нулю $v_{z,i} = 0$, так что $j = -en v_{z,e}$. Система уравнений значительно упрощается. Выпишем ее, введя предварительно безразмерные величины, равные отношению истинных значений к соответствующим единицам измерения, которые выберем следующим образом (обозначения такие же, как в [1]):

$$\begin{aligned} H_0 &= \sqrt{4\pi p_0}; \quad E_0 T_0^{3/2} = \frac{c \sqrt{p_0}}{\sqrt{4\pi} \sigma_1 r_0}; \quad p_0 = n_0 T_0; \\ q_0 &= c p_0 \frac{E_0}{H_0} = \frac{c^2 p_0}{4\pi \sigma_1 T_0^{3/2} r_0}; \quad \sigma_1 = \frac{3}{4 \sqrt{2\pi m} \lambda_{\text{кул}} e^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Заметим вытекающее отсюда соотношение

$$\frac{T_0}{e r_0 E_0} = \frac{\sqrt{4\pi} \sigma_1 T_0^{3/2}}{e c \sqrt{p_0}} = (\omega_e \tau_e)_0 = \omega_0 \tau_0. \quad (2.3)$$

В выбранных единицах систему уравнений для стационарного шнура можно записать в таком виде (см. [2] или [3]):

$$\text{div} \left(\mathbf{q}_e - \frac{5}{2} \omega_0 \tau_0 \mathbf{j} T_e \right) = j E_z - \Delta Q - Q_{\text{н}}; \quad (2.4)$$

$$\text{div} \mathbf{q}_i = \Delta Q; \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}; \quad (2.6)$$

$$j = \frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = - \frac{1}{H} \frac{d(p_e + p_i)}{dr}. \quad (2.7)$$

Здесь передача тепла

$$\Delta Q = 12\pi r_0^2 n_0 \frac{e^2}{Mc^2} \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_e - T_i), \quad (2.8)$$

потеря на излучение

$$Q_{\text{н}} = \beta n^2 \sqrt{T_e} = \frac{4\pi \sigma_1 p_0 r_0^2 \beta}{c^2} n^2 \sqrt{T_e}. \quad (2.9)$$

Член $-\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\mathbf{j}T_e$ в уравнении (2.4) представляет собой конвективный тепловой поток электронов. Он, как будет видно, главным образом ответственен за передачу тепла электродам. При сильном отрыве играет роль также дрейфовый поток электронов (первый член в выражении q_e), имеющий такую же структуру, как и конвективный поток. Поскольку дрейфовый поток связан с градиентом температуры по радиусу, то при большой радиальной теплопроводности, как это имеет место, например, в безотрывном случае, он не существенен.

Выпишем в компонентах выражение для безразмерного потока тепла

$$q_{er} = -\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_e}{H}\frac{\partial T_e}{\partial z} - 4,66\frac{n^2}{H^2T_e^{1/2}}\frac{\partial T_e}{\partial r} + \\ + \frac{3}{2}\frac{n}{H^2T_e^{1/2}}\frac{\partial [n(T_e + T_i)]}{\partial r}; \quad (2.10)$$

$$q_{ez} = \frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_e}{H}\frac{\partial T_e}{\partial r} - 4,66\frac{n^2}{H^2T_e^{1/2}}\frac{\partial T_e}{\partial z}; \quad (2.11)$$

$$q_{ir} = \frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_i}{H}\frac{\partial T_i}{\partial z} - \left(\sqrt{\frac{2M}{m}} + \frac{15}{2}\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n^2}{H^2T_i^{1/2}}\frac{\partial T_i}{\partial r}; \quad (2.12)$$

$$q_{iz} = -\frac{5}{2}\omega_0\tau_0\frac{nT_i}{H}\frac{\partial T_i}{\partial r} - \left(\sqrt{\frac{2M}{m}} + \frac{15}{2}\frac{T_i}{T_e}\right)\frac{n^2}{H^2T_i^{1/2}}\frac{\partial T_i}{\partial z}. \quad (2.13)$$

Выражения для электрических полей имеют вид

$$E_r = \omega_0\tau_0\frac{1}{n}\frac{\partial (nT_i)}{\partial r} - \frac{3}{2}\frac{n}{HT_e^{3/2}}\frac{\partial T_e}{\partial z}; \quad (2.14)$$

$$E_z = \omega_0\tau_0\frac{1}{n}\frac{\partial (nT_i)}{\partial z} + \frac{3}{2}\frac{n}{HT_e}\frac{\partial T_e}{\partial r} - \frac{1}{HT_e^{3/2}}\frac{\partial [n(T_e + T_i)]}{\partial r}. \quad (2.15)$$

Граничные условия для оторванного от стенок шнура следующие: потоки тепла q_{er} и q_{ir} должны обращаться в нуль в центре, а также на краю шнура, где обращается в нуль давление; условия на торцах шнура (у электродов) могут быть получены лишь после детального изучения процессов на электродах. Простейшим случаем является требование обращения в нуль на электродах температур частиц.

§ 3. Сильный отрыв

Рассмотрим сначала случай сильного отрыва электронной температуры от температуры ионов $T_e \gg T_i$. В этом случае, пренебрегая всюду в уравнениях для электронов температурой

ионов, можно найти температуру электронов, поле H , давление $p = nT_e$, а затем из уравнения переноса тепла ионов найти температуру ионов и из требования $T_i \ll T_e$ определить условия, при которых в стационарном случае возможен сильный отрыв.

Решить нелинейную систему уравнений в частных производных второго порядка весьма затруднительно. Можно, однако, сильно упростить систему, опустив в выражении для потока по оси второй член («замагниченная» теплопроводность). Это, очевидно, можно сделать, когда этот член, равный по порядку величины $\partial T / \partial z$ (длина измеряется в единицах r_0), играет несущественную роль по сравнению с первым членом в выражении для q_z («дрейфовая» теплопроводность), имеющим порядок величины $\omega_0 \tau_0 \frac{\partial T}{\partial r}$. Соответственно этому нужно принять $E_r = 0$, и из уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ следует тогда, что продольное электрическое поле есть функция только z

$$E_z = E(z). \quad (3.1)$$

Пренебрежение членами с $\frac{\partial T}{\partial z}$ в выражениях для q_z и E_r означает отбрасывание членов со вторыми производными $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ в уравнении переноса тепла и уравнении $\text{rot } \mathbf{E} = 0$; поэтому решением оставшейся системы уравнений нельзя будет удовлетворить граничным условиям на обоих электродах. Это не вносит, однако, принципиальных затруднений, так как приближенное решение оказывается годным во всей области шнура, за исключением узких приэлектродных областей, где затруднения связаны уже с незнанием приэлектродных явлений, а не с трудностью решения уравнений. Можно показать, что решение системы уравнений, в которой опущены члены со вторыми производными по z , должно иметь вид

$$T(r, z) = T(r) \cdot T_1(z). \quad (3.2)$$

С этой целью преобразуем уравнение (1.4), заменяя в нем производные $\frac{\partial H}{\partial r}$, $\frac{\partial p}{\partial r}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$, с помощью соотношений

$$j = \frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr} = -\frac{1}{H} \frac{dp}{dr} \quad (3.3)$$

и

$$E_z = \frac{3}{2} \frac{n}{HT^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{HT^{3/2}} \frac{\partial(nT)}{\partial r} = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{T^{3/2}} \right) \quad (3.4)$$

к виду

$$q_r \left(\frac{2}{r} - \frac{i}{H} \right) + \frac{iE}{2} + \left(\frac{2}{3} 4,66 - \frac{3}{2} \right) \frac{P}{HT^{3/2}} \frac{dj}{dr} = 0. \quad (3.5)$$

Члены ΔQ и Q_{II} здесь опущены, так как при сильном отрыве они пренебрежимо малы.

Как нетрудно видеть, первый член в (3.5) обращается при $r=0$ в нуль. Сумму двух оставшихся членов можно поэтому при $r=0$ приравнять нулю

$$\frac{i_0 E}{2} + 1,6 \left(\frac{P}{HT^{3/2}} \frac{dj}{dr} \right)_0 = 0. \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) результат интегрирования (3.4)

$$\frac{P}{T^{3/2}} = -E(z)W(r) + C(z), \quad (3.7)$$

где

$$\frac{dW}{dr} = H(r),$$

получим

$$\frac{i_0}{2} + 1,6W(0) \left(\frac{1}{H} \frac{dj}{dr} \right)_0 = -1,6 \left(\frac{1}{H} \frac{dj}{dr} \right)_0 \frac{C(z)}{E(z)}. \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что $C(z)/E(z) = \text{const}$ (так как j и H не зависят от z), а из (3.7) получаем тогда, что решение должно иметь вид (3.2). За функцию $T(z)$ можно взять $E^{2/3}(z)$ и искать, таким образом, решение в виде

$$T(r, z) = T(r) E^{-2/3}(z). \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.5) или (1.4), из условия разделения получим

$$\frac{5}{2} \omega_0 \tau_0 \frac{\partial T}{\partial z} \frac{1}{E(z)} = -\lambda, \quad (3.10)$$

откуда

$$E(z) = \left(\frac{\omega_0 \tau_0}{\lambda} \right)^{3/5} \frac{1}{(l-z)^{3/5}}; \quad (3.11)$$

$$T(r, z) = \left(\frac{\lambda}{\omega_0 \tau_0} \right)^{3/5} (l-z)^{3/5} T(r). \quad (3.12)$$

Здесь l — константа интегрирования; λ — параметр разделения, который должен определиться из граничных условий в нуле и на краю шнура.

(Остающаяся после разделения система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{H}{r} \frac{d(rH)}{dr} + \frac{dp}{dr} &= 0, \\ H + \frac{d}{dr} \left(\frac{p}{T^{3/2}} \right) &= 0, \\ q &= \left(\lambda T - \frac{3}{2} \right) \frac{p}{H} - \frac{2,41}{H^2} \frac{p^2}{T^{3/2}} \frac{dT}{dr}, \\ \frac{1}{r} \frac{d(rq)}{dr} + \frac{1}{H} \frac{dp}{dr} - \frac{\lambda}{H} \frac{d(pT)}{dr} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

интегрировалась при следующих условиях:

$$\begin{aligned} p(0) &= 1; & T(0) &= 1; & q(0) &= 0; \\ p(a) &= 0; & H(0) &= 0; & q(a) &= 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где a — радиус шнура и параметр λ подбирались так, чтобы удовлетворялись эти условия. В результате получилось $\lambda = 1$, $a = 1,8$.

Значение константы l зависит от явлений в прикатодной области. Если имеется узкая область, в которой холодные электроны, вышедшие из катода, приобретают температуру $T_k \sim 1$, то l должно определяться из условия, что при $z = L$ $T(r, L) = T_k$. Ниже будем предполагать $l = L$. Определим в этом случае значения давления, тока, электрического поля и радиуса шнура, считая заданным среднее число частиц на единицу длины трубки $N = N_{\text{полн}}/L$ и напряжение V , приложенное к шнуру, точнее — напряжение в области, где применимо наше решение, так как в приэлектродных областях возможно значительное падение напряжения, которое нельзя учесть в приближенном решении.

Заметим прежде, что из трех независимых величин, взятых в качестве единиц измерения, за которые можно принять E_0 , T_0 , p_0 , мы распорядились только двумя, приняв за p_0 давление на оси шнура и за $E_0 T_0^{3/2}$ значение произведения $ET^{3/2}$, не зависящего от z , на оси шнура. Остается еще произвол в выборе T_0 . Для удобства дальнейших расчетов примем за T_0

максимальное значение температуры (при $z = 0$) на оси шнура. Тогда из (3.12) и (3.11) получаем

$$\frac{\omega_0 \tau_0 r_0}{\lambda L} = 1; \quad (3.15)$$

$$T = T_{\text{макс}} \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{2/5} T(r); \quad (3.16)$$

$$E = E_0 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{3/5}. \quad (3.17)$$

Для определения $T_0 = T_{\text{макс}}$, E_0 , p_0 , r_0 , I , кроме (3.15), имеются следующие очевидные условия:

$$V = \int_0^L Edz; \quad (3.18)$$

$$N = \frac{1}{L} \int_0^a 2\pi r dr \int_0^L n(r, z) dz; \quad (3.19)$$

$$H(a) = 2I/ca, \quad (3.20)$$

а также соотношения (2.2).

Выполняя в (3.18) и (3.19) интегрирование, находим

$$E_0 = \frac{2}{5} \frac{V}{L}; \quad (3.21)$$

$$\frac{10}{3} \pi \gamma_1 \frac{p_0}{T_0} r_0^2 = N. \quad (3.22)$$

Здесь $\gamma_1 = \left(\int_0^a \frac{p}{T} r dr \right)_{\text{безразм}} = 0,8$.

Из (3.20) и (2.2) следует

$$\begin{aligned} \pi c^2 p_0 r_0^2 \gamma_2^2 &= I^2; \\ \gamma_2 &= (H(a) a)_{\text{безразм}} = 1,63. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из соотношений (2.3), (3.15), (3.21) находим связь температуры с приложенным напряжением

$$T_{\text{макс}} = \lambda e E_0 L = \frac{2}{5} \lambda e V, \quad (3.24)$$

а из (3.22) и (3.23) следует, что

$$I^2 = \frac{3}{10} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} c^2 N T_{\text{макс}} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 10} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \lambda c^2 N e V, \quad (3.25)$$

т. е. стационарный шнур имеет возрастающую вольтамперную характеристику. Наконец, непосредственно из (3.15) и (3.22) получаем

$$\frac{r_0^2}{p_0} = \frac{e^2 c^2 \lambda^2}{4\pi \sigma_1^2} \frac{L^2}{T_{\text{макс}}^5}; \quad (3.26)$$

$$r_0^2 = \lambda L \frac{N^{5/2}}{I_A^4} \frac{\gamma_2^4}{\gamma_1^{5/2}} 5,25 \cdot 10^{-28} = \frac{L N^{1/2}}{\lambda (eV)_0^2} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} 1,42 \cdot 10^{-6}; \quad (3.27)$$

$$p_0 = \frac{I_A^6}{N^{5/2} L} \frac{\gamma_1^{5/2}}{\lambda} 9,5 \cdot 10^{22}. \quad (3.28)$$

В этих формулах ток выражается в амперах, напряжение — в вольтах. При вычислении считалось $c^2 \sigma_1 = 3,12 \cdot 10^{-10}$, что соответствует значению кулоновского логарифма, который входит в выражение для σ_1

$$\lambda_{\text{кул}} = \ln \frac{T}{\hbar \omega_{\text{ленгм}}} = 15; \quad \omega_{\text{ленгм}}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}. \quad (3.29)$$

Полный поток тепла, идущий вдоль оси z , определяется интегрированием плотности потока

$$\begin{aligned} q &= q_0 \left(q_z - \frac{5}{2} \omega_0 \tau_0 j T \right)_{\text{безразм}} = \\ &= \frac{5}{2} \lambda \frac{L}{r_0} q_0 \left(\frac{1}{H} \frac{d(pT)}{dr} \right)_{\text{безразм}} \left(1 - \frac{z}{L} \right)^{3/5}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

по всему сечению шнура

$$\begin{aligned} q_{\text{полн}} &= -\frac{5}{2} \lambda \frac{L}{r_0} 2\pi \gamma_3 q_0 r_0^2 \left(1 - \frac{z}{L} \right)^{2/5} = \\ &= -\frac{\gamma_3}{\gamma_2} \frac{5}{2} \frac{IT_{\text{макс}}}{e} \left(1 - \frac{z}{L} \right)^{2/5}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где $\gamma_3 = - \left(\int_0^q \frac{1}{H} \frac{d(pT)}{dr} r dr \right)_{\text{безразм}} = 1,63 = \gamma_2.$

По порядку величины этот поток равен обычному, нормальному потоку тепла в ионизованной плазме без магнитного поля. Это следует из сопоставления дивергенции конвективного потока с остальными членами уравнения переноса тепла. Если ограничиться учетом зависимости от z , то это сопоставление дает (в безразмерных единицах)

$$\omega_0 \tau_0 \frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{1}{T^{3/2}}.$$

Отсюда $T \sim \omega_0 \tau_0 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}$, и конвективный поток

$$q_{\text{конв}} = -\frac{5}{2} \omega_0 \tau_0 j T \sim -(\omega_0 \tau_0)^2 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Нормальный поток в соответствующих единицах равен

$$q_{\text{норм}} = -3,61 (\omega_0 \tau_0)^2 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

То же получается и для дрейфового потока. В стационарном оторванном шнуре отсутствие радиального потока через поверхность шнура требует установления таких градиентов температуры, чтобы, как это видно из сравнения дрейфового и замагниченного потоков, в выражении радиального потока (1. 10)

$$\frac{\partial T}{\partial r} \sim \omega_0 \tau_0 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Дрейфовый осевой поток равен тогда

$$q_{z\text{др}} \sim -\omega_0 \tau_0 \frac{\partial T}{\partial r} \sim -(\omega_0 \tau_0)^2 T^{5/2} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Поток (3. 31) направлен от катода к аноду, где он максимален. У катода он равен нулю. Требование отсутствия теплового потока с электродов, которое, безусловно, должно быть выполнено в нашем решении, осуществляется без дополнительных предположений о процессах в приэлектродных областях. Этим оправдывается наш выбор константы интегрирования l . Если окажется, что $l > \bar{L}$ (это будет при наличии прикатодной области, в которой электроны приобретают температуру $T_{\text{к}} \sim T_{\text{макс}}$, см. стр. 9), то полученные выше результаты для значений потока, радиуса шнура, связи температуры и тока с напряжением все же качественно не изменяются, так как получаются из энергетического баланса.

Проведенное рассмотрение справедливо, если температура ионов во всем шнуре мала по сравнению с температурой электронов. Расчеты показывают, что это имеет место при выполнении условия

$$\Pi = \frac{e^2 N}{Mc^2} \ll \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (3.32)$$

В безэлектродном шнуре условием сильного отрыва является [1]

$$\Pi \ll 1. \quad (3.33)$$

Разница объясняется тем, что ионы отводят тепло по оси хуже, чем электроны, из-за небольшого градиента температуры по радиусу, а именно:

$$\frac{q_{iz}}{q_{ez}} \sim \delta = \sqrt{\frac{2m}{N}}. \quad (3.34)$$

Поэтому для отрыва температур по всему шнуру требуется, чтобы электроны передавали ионам тепла в δ раз меньше, чем в безэлектродном шнуре; отсюда и вытекает условие (3.32) вместо (3.33).

§ 4. Слабый отрыв

Полагая сначала $T_e = T_i = T$, сложим тепловые уравнения электронов и ионов в одно

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{q} - \frac{5}{2} \omega_0 \tau_0 j T \right) = j E_z - Q_{\text{и}}. \quad (4.1)$$

«Замагниченной» осевой теплопроводностью здесь снова можно пренебречь по сравнению с конвективным потоком электронов.

Выражения для потоков тепла и электрического поля имеют следующий вид:

$$q_r = q_{ir} + q_{er} = - \left(\sqrt{\frac{2M}{m}} + \frac{15}{2} + 2,41 \right) \times \\ \times \frac{p^2}{H^2 T^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{3}{2} E \frac{p}{H}; \quad (4.2)$$

$$q_z = q_{iz} + q_{ez} = 0; \quad (4.3)$$

$$E_r = \omega_0 \tau_0 \frac{T}{p} \frac{dp}{dr}; \quad (4.4)$$

$$E_z = \frac{3}{2} \frac{p}{HT^{3/2}} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{HT^{3/2}} \frac{dp}{dr}. \quad (4.5)$$

Здесь обозначено $p = nT_e = nT_i = nT$. При этом остаются пригодными без изменения формулы для перехода от безразмерных величин к размерным, полученные в предыдущем параграфе.

Отличие системы уравнений для слабого отрыва от уравнений для сильного отрыва заключается в наличии радиального электрического поля и отсутствии дрейфового потока. Будем по аналогии со случаем сильного отрыва искать решение, разделяющееся в переменных r и z (заметим, что из-за большого коэффициента теплопроводности в радиальном потоке температура в первом приближении вообще не меняется по радиусу, являясь только функцией z). Положим

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= \varepsilon(z) E(r); \\ T(r, z) &= T_1(z) T(r). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из условия разделения тогда следует, что

$$T(z) = \frac{1}{[\varepsilon(z)]^{2/5}} = \left(\frac{\lambda}{\omega_0 \tau_0} \right)^{2/5} (L - z)^{2/5}. \quad (4.7)$$

Остающаяся после разделения система, где пренебрегается излучением

$$(\lambda T - E) j + \frac{1}{r} \frac{d(rq)}{dr} = 0; \quad (4.8)$$

$$q = -95,6 \frac{p^2}{H^2} \frac{1}{T^{5/2}} \frac{dT}{dr} - \frac{3}{2} \frac{E}{H} p; \quad (4.9)$$

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{2}{5} \lambda T \frac{1}{p} \frac{dp}{dr}; \quad (4.10)$$

$$E = \frac{3}{2} \frac{p}{HT^{5/2}} \frac{dT}{dr} - \frac{2}{HT^{3/2}} \frac{dp}{dr}; \quad (4.11)$$

$$j = -\frac{2}{H} \frac{dp}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d(rH)}{dr}, \quad (4.12)$$

может быть проинтегрирована численно с условиями

$$\begin{aligned} p(0) &= 1, \quad E(0) = 1; \quad T(0) = 1; \quad H(0) = 0; \\ p(a) &= 0; \quad q(0) = 0; \quad q(a) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Приближенное решение можно получить с хорошей точностью, интегрируя (4.10), (4.11), (4.12), считая $T = \text{const} = 1$. Пользуясь этим приближенным решением, из (4.8) можно

найти радиальный поток и из (4.9) — поправку к температуре. Параметр λ определится из условия

$$\int_0^a (\lambda T - E) j r dr = 0. \quad (4.14)$$

Найдя решение в предположении $T_e = T_i$, можно вычислить разность температур $\Delta T = T_e - T_i$ и из требования $\Delta T/T \ll 1$ определить условие безотрывности.

Разность ΔT можно определить из уравнения переноса тепла для ионов, которое, если опустить «замагниченный» осевой поток, имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d(rq_{ir})}{dr} + \lambda \frac{p}{H} \frac{dT}{dr} = 12\pi r_0^2 n_0 \frac{e^2}{Mc^2} \frac{p^{2\pi}}{T^{7/2}} \frac{\Delta T(r, z)}{T_1^2(z)}. \quad (4.15)$$

Здесь уже произведено отделение части, зависящей от z .

Так как $\frac{dT}{dr} \sim \delta = \sqrt{\frac{2m}{M}}$, то в первом приближении дрейфовый поток вдоль оси (второй член слева) можно опустить. Требование $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$ приводит к условию

$$\Pi = \frac{e^2 N}{Mc^2} = 2\pi\gamma_1 r_0^2 n_0 \frac{e^2}{Mc^2} \gg 1. \quad (4.16)$$

Так как q_{ir} обращается при $r=0$ и $r=a$ в нуль, то член $\frac{1}{r} \frac{d(rq_{ir})}{dr}$ меняет знак, следовательно, и $\Delta T = T_e - T_i$ имеет в сечении разные знаки. Более подробное исследование, аналогичное исследованию слабого отрыва в безэлектродном шнуре [1], показывает, что в центральной области радиусом $r_c \sim \frac{a}{\Pi^{1/4}}$ температура электронов превышает температуру

ионов примерно на величину $\frac{1}{\sqrt{\Pi}} T$; в остальной части сечения температура электронов ниже температуры ионов примерно на $\frac{1}{\Pi} T$.

В центре электроны греют ионы, в остальной части ионы отдают полученное тепло электронам. В среднем по сечению ионы отдают тепла больше, чем получают от электронов, на величину порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$, за счет подвода тепла дрейфовым способом со стороны анода, где они должны получать этот избыток от электронов.

Примерное распределение температур по сечению и вдоль оси изображено на рис. 1 и 2.

Стрелками показаны направления потоков. На рис. 2 T_i — температура ионов вне центральной области. Разность $\Delta T = T_e - T_i$, как видно из (4.15), меняется вдоль оси по закону

$$\Delta T \sim T_1^2(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{4/3}.$$

До сих пор мы не учитывали потерь на тормозное излучение. В безэлектродном шнуре эти потери приводят к тому,

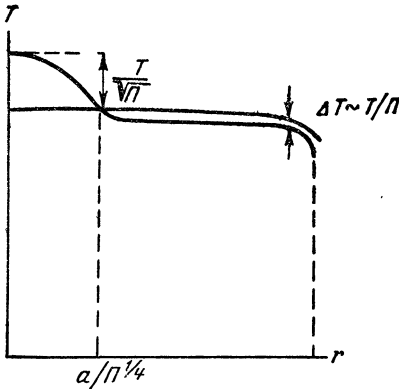


Рис. 1.

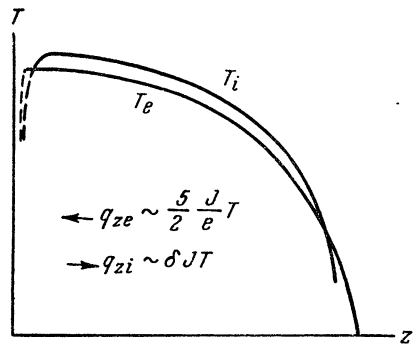


Рис. 2.

что стационарный ток не может превышать некоторой предельной величины $I_{\text{изл}}$. Посмотрим, к чему приводят потери на излучение при наличии потерь на электроды. В выражении для потерь на излучение

$$Q_{\text{и}} = \beta n^2 \sqrt{T} = \beta' \frac{p^2}{T^{3/2}}, \quad (4.17)$$

Температура входит с таким же показателем степени, как и в остальных членах уравнения переноса тепла, и поэтому не мешает разделению переменных. Записывая коэффициент

$\beta' = \frac{4\pi p_0 r_0^2 \sigma_1}{c^2} \beta$, с помощью (3.23) в виде квадрата отношения токов

$$\beta' = \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = \left(\frac{I_A}{\gamma_{12} \cdot 2,4 \cdot 10^5}\right)^2, \quad (4.18)$$

получим вместо (4.8) уравнение

$$(\lambda T - E) j + \frac{1}{r} \frac{d(rq)}{dr} + \left(\frac{I_A}{I_0} \right)^2 \frac{p^2}{T^{3/2}} = 0, \quad (4.19)$$

в котором параметр λ , характеризующий долю тепла, уносимого на электроды, зависит от величины приложенного к шнуру напряжения, так как [см. (3.25)]

$$I^2 = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 10} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \lambda c^2 NeV. \quad (4.20)$$

Интегрируя (4.19) по сечению, получим для λ выражение

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_3 \left(\frac{I_V}{I_0} \right)^2}, \quad (4.21)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \left(\int_0^a j T r dr \right)_{\text{безразм}}; \quad \alpha_2 = \left(\int_0^a j E r dr \right)_{\text{безразм}};$$

$$\alpha_3 = \left(\int_0^a \frac{p}{T^{3/2}} r dr \right)_{\text{безразм}}; \quad (4.22)$$

$$I_V^2 = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 10} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} c^2 NeV. \quad (4.23)$$

Вольтамперная характеристика теперь определяется формулой

$$I^2 = \frac{\alpha_2 I_V^2}{\alpha_1 + \alpha_3 \left(\frac{I_V}{I_0} \right)^2} = \frac{\alpha_2 I_0^2}{\alpha_1 \left(\frac{I_0}{I_V} \right)^2 + \alpha_3}, \quad (4.24)$$

из которой видно, что при увеличении напряжения $i_V^2 \rightarrow \infty$ значение тока стремится к пределу

$$I_{\text{изл}}^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} I_0^2. \quad (4.25)$$

Значения α_2 и α_3 при этом такие же, как и в безэлектродном шнуре, так как при $I_V^2 \rightarrow \infty$ $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, при учете потерь на электроды предельный ток такой же, как и в безэлектродном шнуре. При значении кулоновского логарифма $\lambda_{\text{кул}} = 15$

$$I_{\text{изл}} = 1,65 \cdot 10^6 a. \quad (4.26)$$

Для радиуса с учетом (4.21) вместо (3.27) имеем выражение

$$r_0^2 = A \frac{N^{1/2} L}{v^2} (1 + BNV). \quad (4.27)$$

Здесь V выражается в вольтах,

$$A = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^{1/2}} 1,42 \cdot 10^{-6}, \quad B = \frac{\gamma_2 \alpha_3}{\gamma_1 \alpha_1} \frac{1,92 \cdot 10^{-11}}{I_{0A}^2}.$$

Оценим величину стационарного радиуса $a = a_{\text{безразм}} \cdot r_0$, пользуясь приближенным решением системы (4.8)–(4.12). При токе, малом по сравнению с предельным током (4,26), получаем

$$a^2 = 2,5 \cdot 10^{-26} \frac{N^{3/2} L}{I_A^4}.$$

При $I_A = 1,5 \cdot 10^5$ а, $L = 100$ см, $N = 0,5 \cdot 10^{18}$ $a \approx 1$ см.

В заключение приведем качественный вывод основных полученных соотношений непосредственно из теплового баланса. Главным механизмом потерь тепла на электроды является конвекция, связанная с током

$$Q_3 = \frac{5}{2} \frac{I}{e} T = \frac{5}{8} \frac{I^3}{c^2 c N}.$$

Здесь использовано соотношение

$$I^2 = 4c^2 NT.$$

Баланс энергии имеет вид

$$Q_I = Q_3 + Q_{\text{изл}},$$

где

$$Q_I = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma} = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma_1 T^{3/2}} = \frac{8c^3 N^{3/2} L}{\pi \sigma_1 a^2 I} = IV;$$

$$Q_{\text{изл}} = \beta \cdot \pi a^2 L n^2 \sqrt{T} = Q_I (I/I_{\text{изл}})^2;$$

$$I_{\text{изл}} = \frac{4c^2}{\sqrt{\sigma_1 \beta}} \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ а};$$

отсюда

$$I^2 = \frac{\frac{8}{5} c^2 e N V}{1 + \frac{8}{5} \frac{c^2 e N V}{I_{\text{изл}}^2}}; \quad T = \frac{\frac{2}{5} e V}{1 + \frac{8}{5} \frac{c^2 e N V}{I_{\text{изл}}^2}}.$$

Из равенства $IV = \frac{I^2 L}{\pi a^2 \sigma}$ находим радиус

$$a^2 = \frac{8c^3 N^{3/2} L}{\pi \sigma_1 I^2 V} = \frac{5c}{\pi \sigma_1 e} \frac{N^{1/2} L}{V^2} \left(1 + \frac{\frac{8}{5} c^2 e N V}{I_{\text{изл}}^2} \right).$$

Для сравнительно небольших токов, когда еще не сказывается излучение $\left(\frac{8}{5} c^2 e N V \ll I_{\text{изл}}^2 \right)$,

$$a^2 = \frac{5c}{\pi \sigma_1 e} \frac{N^{1/2} L}{V^2} = 5 \cdot 10^{-25} \frac{N^{1/2} L}{I_A^4}.$$

С ростом напряжения ток растет и при $V \rightarrow \infty$ стремится к значению $I = I_{\text{изл}}$. Оно таково же, как и в случае безэлектродного шнура, так как при большом электрическом поле в балансе энергии потеря тепла на электроды играет малую роль, почти вся получаемая от электрического поля энергия уносится тормозным излучением.

Если имеется значительное падение потенциала ($V_a \sim V$) в приэлектродных областях, так что в основной части шнура падение равно $V_{\text{шнур}} = V - V_a$, то

$$Q_I = \frac{8c^3 N^{3/2}}{\pi \sigma_1 a^2 I} = IV_{\text{шнур}}.$$

Баланс энергии выглядит так:

$$IV = Q_a + IV_{\text{шнур}} \left(\frac{I}{I_{\text{изл}}} \right)^2.$$

Соответственно изменяются формулы для I , T , a :

$$I^2 = \frac{\frac{8}{5} c^2 e N V}{1 + \frac{\frac{8}{5} c^2 e N V_{\text{шнур}}}{I_{\text{изл}}^2}}; \quad T = \frac{\frac{2}{5} e V}{1 + \frac{\frac{8}{5} c^2 e N V_{\text{шнур}}}{I_{\text{изл}}^2}};$$

$$a^2 = \frac{5c}{\pi \sigma_1 e} \frac{N^{1/2} L}{V V_{\text{шнур}}} \left(1 + \frac{\frac{8}{5} c^2 e N V_{\text{шнур}}}{I_{\text{изл}}^2} \right),$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Брагинский, см. т. I настоящего издания, стр. 178.
2. С. И. Брагинский, ЖЭТФ, 33, 459 (1957).
3. С. И. Брагинский, см. т. I настоящего издания, стр. 229.

С. И. Брагинский, А. Б. Мигдал

ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕННОМ СТОЛБЕ ПРИ БЫСТРОМ НАРАСТАНИИ ТОКА *

Кратко рассмотрены физические процессы, существенные в мощном импульсном разряде: ионизация, скин-эффект, движение ионов к оси и увлечение ими нейтрального газа, сходящаяся ударная волна и кумуляция на оси, сжатие плазменного столба с учетом роста движущейся массы, температура ионов и атомов.

Экспериментальные исследования мощного импульсного разряда показали, что при быстром нарастании тока в цилиндрической разрядной камере образуется плазменный столб, сжимающийся к оси. Качественная теория сжатия была развита М. А. Леонтовичем и С. М. Осовцом [2], на основе представления об инерционном характере этого процесса. Эти результаты хорошо согласуются с экспериментом. В настоящей работе делается попытка качественного рассмотрения основных явлений, происходящих в процессе формирования плазменного столба, и некоторое уточнение физической картины его сжатия. Все вычисления носят оценочный характер. Для простоты принято, что ток линейно растет со временем $I = \dot{I}t$. В качестве типичных значений для иллюстрации и сравнения с экспериментом приняты следующие: радиус разрядной камеры $r = 20$ см, скорость нарастания тока $\dot{I} = 10^{11}$ а/сек, давление газа в камере $p = 0.05$ мм рт. ст. (рассматриваемый газ — дейтерий). При подсчете числовых коэффициентов в формулах предполагается, что ток выражен в амперах, давление газа в миллиметрах ртутного столба, время в секундах, длина в сантиметрах.

* Работа выполнена в 1953 г. [1] и частично переработана при подготовке к печати в 1956 г.

Ионизация. Количество электронов в плазме возрастает в результате ионизации. Его можно оценить с помощью соотношения:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I^2 R}{\tilde{\epsilon}}, \quad (1)$$

где N — число электронов на единицу длины шнура; R — активное сопротивление единицы длины. «Цена электрона» $\tilde{\epsilon}$ равна энергии ионизации плюс потеря энергии на те несколько возбуждений, которые приходится на каждый акт ионизации, и на нагрев «рождающегося» электрона. Точное вычисление этой величины затруднительно. Однако, согласно [3], она меняется не очень сильно, если электрическое поле в плазме не очень мало ($E/p \gtrsim 50$ в/см · мм рт. ст.), и для оценок можно принять $\tilde{\epsilon} = 100$ эв. Температура электронов из-за большой потери энергии на возбуждение тоже меняется не сильно. Она составляет около 3 эв, так что лишь небольшая часть выделяющегося джоулева тепла идет на нагрев электронов. Это подтверждается также данными [4].

Проводимость плазмы должна вычисляться по обычной формуле

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}, \quad (2)$$

где n — число электронов в 1 см^3 . Активное сопротивление равно

$$R = \frac{m}{e^2 N \tau}. \quad (3)$$

Время свободного пробега электронов, согласно [3], равно $\tau = 1,7 \cdot 10^{-10}/p$. Подставив (3) в (1), найдем закон нарастания ионизации

$$N = A I^{3/2}, \quad A = (2m/3e^2 \tilde{\epsilon} \tau I)^{1/2} = 9 \cdot 10^{14} (p/I)^{1/2}. \quad (4)$$

Оценка электрического поля в шнуре $E = IR$ с помощью (3), (4) дает $E/p = 2,3 \cdot 10^{-2} (I/pI)^{1/2}$. При быстром нарастании тока эта величина будет достаточно большой, что оправдывает принятое значение $\tilde{\epsilon} = 100$ эв. Например, при $I = 10^{11}$, $p = 0,05$ и при токе $I = 10^5$ получается $E/p = 100$. С увеличением степени ионизации начинают сказываться столкновения электронов с ионами. Их нетрудно учесть в рамках принятого грубого метода и можно показать, что это не сильно изменяет значения интересующих нас величин, если не заходить слишком далеко в область больших токов. Когда

степень ионизации становится более нескольких процентов, столкновения с ионами становятся преобладающими. При этом электропроводность перестает зависеть от числа электронов и определяется лишь их температурой:

$$\sigma = 1.3 \cdot 10^{13} T_{e0}^{3/2} \text{сек}^{-1},$$

Температура электронов, пока ионизация неполная, определяется потерями на возбуждение и ионизацию и имеет более или менее постоянное значение порядка нескольких электрон-вольт. Соответственно и электропроводность тоже мало меняется. При $T = 3 \text{ эв}$, $\sigma = 7 \cdot 10^{13} \text{сек}^{-1}$. Дополнительное усложнение в расчете ионизации возникает из-за того, что с ростом тока и ионизации, с одной стороны, уменьшается \bar{E}/p , что приводит к сильному росту $\bar{\epsilon}$, а с другой — увеличивается роль ступенчатой ионизации, что снижает $\bar{\epsilon}$.

Скин-эффект. Быстрое нарастание тока приводит к скин-эффекту. Толщина скин-слоя δ может быть оценена из обычного соотношения $\delta = (c^2/2\pi\sigma)^{1/2}$. Пользуясь (2), (4) и $N = 2\pi a d n$, получим

$$\delta/a = (I_{\text{ск}}/I)^{1/2}, \quad I_{\text{ск}} = 3\bar{\epsilon} m c^2 / 2e^2 \tau I = 5 \cdot 10^{14} p/I. \quad (5)$$

Отсюда видно, что толщина скин-слоя уменьшается с ростом тока, причем скин-слой становится тонким довольно рано. Если $I = 10^{11}$, $p = 0,05$, то $\delta \sim a/2$ при токе 10^3 а .

Движение ионов. Плазма, образуемая в результате ионизации, стягивается к оси шнура под действием силы jH/c . Эта сила действует непосредственно на электроны, которые переносят ток, и радиальным электрическим полем, возникающим от небольшого сдвига электронов относительно ионов, передается ионам, а затем, посредством столкновений, нейтральному газу. Ионы двигаются к оси, причем их скорость лимитируется трением о нейтральный газ. Суммарная радиальная сила, действующая на плазму, равна

$$F = 2\pi a (H^2/8\pi) = I^2/c^2 a, \quad (6)$$

Скорость ионов определяется энергией, набираемой ими на одном свободном пробеге: $v_i = \frac{1}{2} (2Fl/MN)^{1/2}$, где M — масса иона. Свободный пробег ионов l определяется главным образом резонансной перезарядкой. Сечение этого процесса $q \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ [5, 6]. Расстояние, на которое смещаются ионы, равно

$$\Delta = v_i t = BI^{3/4}; \quad B = (l/2c^2 M A a)^{1/2} / I = 1,2 \cdot 10^2 / a^{1/2} I^{3/4} p^{3/4}. \quad (7)$$

Позади уходящих ионов остается неионизованный газ. Так как он подвергается интенсивному ультрафиолетовому облучению из разряда и электрическое поле в наружной области не ослаблено скин-эффектом, то в этом газе может вновь происходить ионизация. Результаты экспериментов [7] указывают, что это действительно имеет место. Таким образом, после того, как смещение ионов станет больше скин-толщины (5), ширина плазменного кольца будет определяться выражением (7) и будет расти со временем. Плазменное кольцо имеет минимальную толщину, когда $\delta \sim \Delta$, при токе $I_1 = (aI_{\text{СК}}^{1/2}/B)^{4/7}$

$$I_1 = 10^3 a^{9/7} I^{1/7} p^{5/7}; \quad (\delta/a)_{\text{мин}} = 7 \cdot 10^5 p^{1/7} / a^3 I^{1/7}. \quad (8)$$

Для $a = 20$, $I = 10^{-11}$, $p = 0,05$ это дает $I_1 = 5,7 \cdot 10^4$, $(\delta/a)_{\text{мин}} = 1/15$.

Увлечение нейтрального газа. По мере того, как число ионов растет, они начинают увлекать при своем движении нейтральные частицы. Условие непрозрачности ионного кольца для нейтралов имеет вид

$$Nq \geq 2\pi a. \quad (9)$$

Это условие выполняется, когда степень ионизации еще мала: $N/2\pi a \Delta n_0 = l/\Delta$. Пользуясь (4), найдем ток I_2 и ширину плазменного кольца Δ_2 в момент начала увлечения

$$I_2 = (2\pi a/qA)^{2/5} = 1,7 a^{2/5} I^{1/5} p^{1/5}; \quad \Delta_2/a = 2,4 \cdot 10^2 / a^{2/5} I^{1/5} p^{1/5}. \quad (10)$$

При $a = 20$, $I = 10^{11}$, $p = 0,05$ это дает $I_2 = 1,6 \cdot 10^5$, $\Delta_2/a = 0,23$.

Чтобы плазменный шнур оторвался от стенки и начал сжиматься, магнитное давление должно быть больше давления газа, которое возрастает из-за нагрева джоулевым теплом $\int I^2 R dt = I^2 t / 2\pi a \Delta \sigma$ и трением ионов $\int F v_i dt$. Это условие приводит к $\eta \delta^2 < \Delta^2$, где η — доля джоулева тепла, переходящая в кинетическую энергию частиц. При малых давлениях это условие менее жестко, чем (9). При больших давлениях, когда η возрастает, может оказаться, что сжатие начнется при токе I_1 , который определяется условием $\delta \sim \Delta$ и при больших давлениях превосходит I_2 .

Ударная волна. После того как ионное кольцо стало непроницаемым, оно сжимает нейтральный газ, подобно поршню. Известно, что при движении поршня со сверхзвуковой скоростью в газе возникает ударная волна. Скорость движения плазменного кольца значительно превосходит скорость звука в холодном нейтральном газе. В результате возникает силь-

ная ударная волна. Плотность и температуру на фронте ударной волны a_c можно по обычным формулам [8] выразить через скорость фронта \dot{a}_c

$$\rho_c = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad T_c = \frac{4(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{M \dot{a}_c^2}{2}. \quad (11)$$

Кумуляция. Интенсивность ударной волны сильно возрастает, когда она сходится к оси (кумуляция). Для расчета кумуляции надо решить задачу о движении газа в цилиндрической области, ограниченной наружным радиусом шнура, причем на этой наружной поверхности $a(t)$ задано давление в виде $p = \frac{H^2}{8\pi} = \text{const} \frac{t^2}{a^2(t)}$. Для грубой оценки эффекта воспользуемся решением задачи о сходящейся автомодельной ударной волне, принадлежащим Л. Ландау и К. П. Станюковичу [9]. Согласно их результатам, при уменьшении радиуса фронта a_c до нуля скорость волны растет, как $a_c^{-\alpha}$, где степень зависит от показателя адиабаты. Для цилиндрической волны $\alpha = 0,20$ при $\gamma = 7/5$ и $\alpha = 0,23$ при $\gamma = 3$. Соответственно, температура в волне растет, как $a_c^{-2\alpha}$. Применимость гидродинамики на малых расстояниях лимитируется длиной свободного пробега l . Поэтому максимальное возрастание температуры газа вблизи оси из-за кумуляции, по сравнению с температурой основной массы газа, порядка $(a/l)^{2\alpha} \approx (a/l)^{0,4}$. Этот эффект ослабляется тем, что сама длина пробега растет с температурой.

Сжатие шнура и рост движущейся массы. По мере продвижения фронта ударной волны масса газа, принимающего участие в движении, увеличивается. Рассмотрим простой способ, позволяющий, хотя и грубо, найти зависимость радиуса шнура от времени*. Считая, что вся масса приведенного в движение газа сосредоточена в «точке» $a(t)$ и равна $\rho_0 \pi (a_0^2 - a^2)$, напишем для нее уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\rho_0 \pi (a_0^2 - a^2) \frac{da}{dt} \right] = F = - \frac{I^2}{c^2 a}. \quad (12)$$

Принтегрируем (12) приближенно, вынося при первом интегрировании по времени справа из-под интеграла значение радиуса на верхнем пределе. Это дает

$$a^2 = a_0^2 (1 - I^2/I_0^2); \quad (13)$$

$$I_0 = (3\pi\rho_0 c^2)^{1/4} a_0 I^{1/4} = 0,12 a_0 I^{1/2} p^{1/4}. \quad (14)$$

* Аналогичным образом «сгребание» вещества учитывалось в работе Колгейта и других, доложенной на конференции в Венеции в 1957 г.

Момент схождения ударной волны на оси соответствует примерно току (14). Этот результат лишь числовым коэффициентом отличается от найденного в [2]. Энергия, полученная газом при сжатии, равна

$$\int F da = - \int_{a_0}^a (I^2/c^2 a) da = \frac{I_0^2}{c^2} \left(\ln \frac{a_0}{a} - \frac{1 - a^2/a_0^2}{2} \right).$$

Существенная часть ее идет на увеличение температуры газа. Без точного решения задачи трудно определить, какова эта часть, поэтому ограничимся весьма грубой оценкой температуры из соотношения $\frac{3}{2} T (\rho_0/M) \pi a_0^2 \sim I_0^2/c^2$. Это дает

$$T = 2MI (3\pi\rho_0 c^2)^{-1/2} = 3 \cdot 10^{-10} I/p^{1/2} \text{ (эв)}. \quad (15)$$

При $a_0 = 20$, $I = 10^{11}$, $p = 0,05$ получим $I_0 = 3,6 \cdot 10^5$, $t_{сх} = I_0/I = 3,6 \cdot 10^{-6}$, что согласуется с результатами экспериментов [10]: (15) дает $T = 130$ эв. В отраженной (расходящейся) ударной волне происходит дальнейший рост температуры. Эти оценки температуры относятся к ионам и атомам. Электроны же, с одной стороны, не нагреваются в ударной волне, а с другой — испытывают большие потери на возбуждение и ионизацию. Поэтому здесь, в отличие от обычного газового разряда, температура тяжелых частиц значительно превосходит температуру электронов.

Авторы выражают благодарность М. А. Леонтовичу и С. М. Осовцу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Брагинский, А. Б. Мигдал, отчет АН СССР, 1953 г.
2. М. А. Леонтович, С. М. Осовец, отчет АН СССР, 1953; Атомная энергия, 1, 81 (1956).
3. L. J. Varnerin, S. C. Brown. Phys. Rev., 79, 946 (1950).
4. В. И. Коган, отчет АН СССР, 1954; Атомная энергия, 4, 178 (1958).
5. О. Б. Фирсов, ЖЭТФ, 21, 1001 (1951).
6. A. Dalgarno, H. N. Yadau, Proc. Phys. Soc., 66, 173 (1953).
7. А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, см. настоящий том, стр. 185.
8. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Механика сплошных сред, М., ГИТТЛ, 1954.
9. К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, М., ГИТТЛ, 1955.
10. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов, Атомная энергия, 1, 76 (1956).

С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов

ПЛАЗМЕННЫЙ ШНУР ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

В настоящей работе рассматривается плазменный шнур при наличии внешнего продольного магнитного поля. Предварительно излагаются основные результаты, относящиеся к шнуру без продольного поля.

Предполагается, что плазма в шнуре полностью ионизована. Число частиц в шнуре считается заданной величиной, не меняющейся со временем.

Решение задачи о поведении шнура требует, вообще, знания начальных условий. Так как процесс формирования полностью ионизованного плазменного шнура в настоящее время еще мало изучен, то эти условия сколько-нибудь точно не известны. Мы принимаем, что в некоторый начальный момент имеется уже готовый шнур, радиус которого равен a_0 и температура T_0 . Для числовых оценок берется $a_0 = 10$ см, $T_0 = 7$ эв.

Явления, связанные с инерцией радиального движения плазмы, не учитываются. Инерцией можно пренебречь, если кинетическая энергия радиального движения много меньше тепловой $nMv^2 \ll nT$, т. е. $v^2/v_T^2 \ll 1$ ($v_T = \sqrt{\frac{T}{M}}$ — тепловая скорость). Практически инерция в ряде случаев может играть существенную роль, особенно в начале процесса. Мы, однако, ограничиваемся рассмотрением безинерционного шнура.

В главе I излагаются основные физические идеи, на которых основывается теория безинерционного полностью иони-

* Работа выполнена в 1953 г.

зованного плазменного шнура. В этой главе содержатся изложение и дальнейшее развитие результатов, полученных ранее в работе С. И. Брагинского [1]; в главе II рассматривается плазменный шнур при наличии обоих магнитных полей: собственное поле тока и продольное магнитное поле. В § 14 рассматривается шнур, создаваемый нарастающим внешним продольным полем. Этот случай является обратным по отношению к рассмотренному в гл. I; электрическое и магнитное поле здесь «поменялись местами».

Большинство вопросов, затронутых в настоящей работе, обсуждалось совместно с М. А. Леонтовичем, которому авторы приносят благодарность за помощь в работе и внимание. Благодарим также Г. И. Бирюк за проведение численных расчетов.

Г л а в а I

ШНУР ПРИ ОТСУТСТВИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Уравнения, описывающие шнур

Плазменный шнур описывается уравнениями Максвелла и уравнениями переноса, представляющими собой обобщение уравнений гидродинамики. Система уравнений переноса состоит из уравнения непрерывности, уравнений переноса импульса (уравнения движения) и уравнения переноса тепла. Шнур считаем цилиндрически симметричным (рис. 1) и однородным вдоль оси, пренебрегая влиянием электродов. Из компонент полей в этом случае отличны от нуля H_φ , E_z , E_r .

Уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ в такой геометрии имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_z; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Плотность тока связана с электрическим полем $E_z^* = E_z + \frac{v}{c} H_\varphi$, действующим в системе, движущейся вместе с плазмой, законом Ома

$$j_z = \sigma E_z^* = \sigma \left(E_z + \frac{v}{c} H_\varphi \right). \quad (1.3)$$

Проводимость плазмы σ зависит только от температуры (см., например, [2])

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m} = \sigma_1 T^{3/2}.$$

Если температуру выражать в электрон-вольтах, σ — в абсолютных единицах, то

$$\sigma_1 = 8,8 \cdot 10^{12} \text{ эв}^{-3/2} \cdot \text{секек}^{-1}$$

(«кулоновский логарифм» принят равным $\lambda = 10$). Уравнение непрерывности, очевидно, имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r n v)}{\partial r} = 0, \quad (1.4)$$

где v — радиальная скорость плазмы (она одинакова для ионов и электронов).

В уравнении движения в наиболее интересных случаях, когда температура плазмы не слишком мала, можно пренебречь инерцией радиального движения плазмы по сравнению с действующими на плазму силами давления и магнитного стягивания. При этом уравнение движения принимает вид уравнения равновесия радиальных сил

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c} j_z H_\varphi. \quad (1.5)$$

Если в это уравнение подставить плотность тока из закона Ома $j_z = \sigma \left(E_z + \frac{v}{c} H_\varphi \right)$, то для радиальной скорости частиц плазмы получится выражение

$$v = -c \frac{E_z}{H_\varphi} - \frac{c^2}{\sigma H_\varphi^2} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.6)$$

Первый член в этом выражении — скорость дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях; этот член отрицательный, что означает, что скорость дрейфа направлена к центру. Второй член — скорость диффузии. Сжатие шнура или его расширение зависит от соотношения этих двух членов.

Уравнение переноса тепла следующее:

$$2n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} = Q. \quad (1.7)$$

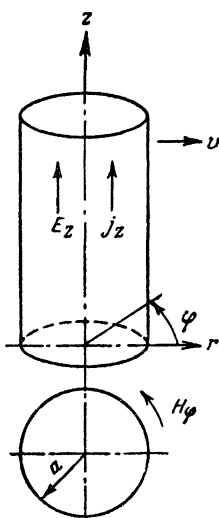


Рис. 1.

Первый член представляет изменение внутренней энергии данного элемента объема, второй — работу сжатия, третий дает изменение энергии за счет потоков тепла. В правой части стоит выделение тепла. Уравнение написано в предположении равенства температур электронов и ионов. Джоулево тепло равно

$$Q = jE^* = \frac{j^2}{\sigma}. \quad (1.8)$$

Уравнения (1.1)—(1.8) представляют собой полную систему уравнений, описывающих плазменный шнур.

§ 2. Связь тока с температурой

Из уравнения равновесия сил вытекает важное соотношение между протекающим по плазме током, числом частиц N на единицу длины шнура и температурой. Если в уравнение равновесия (1.5) подставить плотность тока из уравнения Максвелла (1.1), то получится уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{4\pi r} \frac{\partial (rH)}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

выражающее тот факт, что в каждой точке давление плазмы уравновешивается максвелловским натяжением магнитного поля. Умножим это уравнение на r^2 и проинтегрируем по r от 0 до a (радиус шнура). Заменяя поле на краю через ток $H_\varphi(a) = \frac{2\mathcal{J}}{ca}$, получим формулу

$$2c^2N(\bar{T}_i + \bar{T}_e) = \mathcal{J}^2 + 2c^2\pi a^2 p(a), \quad (2.2)$$

где $T = \frac{1}{N} \int_0^a T n 2\pi r dr$ — среднее значение температуры. Если шнур оторван от стенки, то давление на краю равно нулю $p(a) = 0$, и мы получаем связь тока с температурой и числом частиц N .

В наиболее интересном случае равенства электронной и ионной температур $T_e = T_i$ получаем простую формулу

$$4c^2NT = \mathcal{J}^2. \quad (2.3)$$

Если температуру выражать в электрон-вольтах, а ток в килоамперах, то эта формула примет вид

$$6,4 \frac{N}{10^{16}} T_{эв} = \mathcal{J}^2 \text{ ка}. \quad (2.4)$$

Эта формула показывает, что при заданном числе частиц температура зависит только от величины достигнутого тока.

Пользуясь соотношением (2.4), можно в очень простом и удобном виде записать энергию частиц в шнуре

$$W_T^* = \frac{3}{2} Nl(T_e + T_i) = \frac{3}{4} \frac{l}{c^2} \mathcal{J}^2 = \frac{1}{2c^2} L_T \mathcal{J}^2, \quad (2.5)$$

где $L_T = \frac{3}{2} l$ — естественно называть тепловой самоиндукцией (l — длина шнура).

§ 3. Быстрые и медленные процессы

Уравнение, определяющее магнитное поле, можно получить, исключив из уравнений (1.1)—(1.3) электрическое поле. Дифференцируем (1.1) по радиусу и подставляем $\frac{\partial E_x}{\partial r}$ из (1.2). При этом получается уравнение типа диффузии с конвекцией

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial (vH_\varphi)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} \right). \quad (3.1)$$

Магнитное поле в данной точке изменяется вследствие того, что оно как бы приносится сюда частицами, движущимися со скоростью v (конвективный член $\frac{\partial (vH_\varphi)}{\partial r}$), а также за счет диффузии из соседних точек. Роль коэффициента диффузии играет величина $D = c^2/4\pi\sigma$. Если $v=0$ и $\sigma = \text{const}$, то получается обычное уравнение для скин-эффекта. Глубина проникновения магнитного поля внутрь шнура (скин-эффект) определяется величиной \sqrt{Dt} , где t — время процесса. Явление проникновения магнитного поля внутрь шнура будет протекать различным образом в зависимости от того, будет ли эта величина большой или малой по сравнению с радиусом шнура, т. е. будет ли $\frac{a^2}{Dt} < 1$ или $\frac{a^2}{Dt} > 1$. Здесь удобно ввести полезную для дальнейшего величину $s = \frac{a^2}{4D}$, имеющую размерность времени

$$s = \frac{\pi\sigma a^2}{c^2} = \frac{\pi\sigma_1 T^{3/2} a^2}{c^2}.$$

Величина $(c^2s)^{-1}$ есть активное сопротивление единицы длины шнура (при равномерном распределении тока). Если s

выражать в секундах, a в сантиметрах, T в электрон-вольтах, то (см. также номограмму, стр. 80)

$$\begin{aligned} s_{\text{сек}} &= s_1 a^2 T^{1/2}; \\ s_1 &= 3 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если подставить температуру из (2.4), то

$$s_{\text{сек}} = \frac{\pi \sigma_1 a^2 \mathcal{J}^3}{8c^5 N^{3/2}} = 1,9 \cdot 10^{15} \frac{a^2_{\text{см}} \mathcal{J}^3_{\text{ка}}}{N^{3/2}}. \quad (3.4)$$

Величина s характеризует собой время, необходимое для проникновения магнитного поля внутрь шнура. За время порядка s магнитное поле может «продиффундировать» на расстояние порядка радиуса. Если, например, магнитное поле на краю шнура возрастает, изменяясь значительно за время $t \ll s$ (т. е. $Dt \ll a^2$), то поле внутри шнура будет много меньше, чем на поверхности. При этом почти весь ток течет в тонком поверхностном слое толщиной $\delta \approx \sqrt{Dt}$ (скин-эффект). Если же магнитное поле изменяется за время $t \gg s$, то оно полностью успевает продиффундировать внутрь. Плотность тока при этом постоянна по радиусу, поле пропорционально радиусу.

Величину s будем в дальнейшем называть «скин-временем», или «временем магнитной диффузии».

Заметим, что, поскольку инерция пренебрежимо мала, распределение плотности, как это видно из уравнения (2.1), жестко связано с распределением магнитного поля. Перераспределение магнитного поля (диффузия поля) приводит к перераспределению плотности (диффузия частиц в этом магнитном поле). Таким образом, ясно, что время, в течение которого частицы в магнитном поле шнура диффундируют на расстояние порядка радиуса, есть то же самое время s . Это непосредственно видно из формулы (1.6). Так как $p \approx \frac{H^2}{8\pi}$ [см. (2.1)], то скорость диффузии $v_{\text{дифф}} = \frac{c^2}{\sigma H^2} \frac{\partial p}{\partial r} \approx \frac{a}{s}$, так что $\frac{a}{v_{\text{дифф}}} \approx s$.

Время магнитной диффузии интересно записать еще в одном виде, выразив его через время τ между столкновениями электронов с ионами. Воспользовавшись соотношением $\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m}$, получим

$$s = \frac{e^2 N}{m c^2} \tau. \quad (3.5)$$

Величину $\frac{e^2 N}{mc^2}$ всегда будем считать очень большим числом; это необходимо для того, чтобы можно было пользоваться макроскопическими уравнениями. Таким образом, всегда $s \gg \tau$.

Рассмотрим два предельных случая $\frac{s}{t} \gg 1$ и $\frac{s}{t} \ll 1$. В первом случае можно опустить правую часть уравнения (3.1) (это формально соответствует $\sigma = \infty$). Оставшееся уравнение можно записать в виде уравнения непрерывности для величины H_φ/r

$$\frac{\partial (H_\varphi/r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rvH_\varphi/r)}{\partial r} = 0. \quad (3.6)$$

Из этого уравнения и уравнения непрерывности легко получить

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_\varphi}{rn} \right) = 0, \quad \frac{H_\varphi}{rn} = \text{const}, \quad (3.7)$$

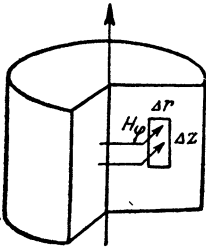


Рис. 2.

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}$ — полная производная — выражает изменение в элементе объема, движущемся с частицами, а не в фиксированной точке пространства. Величина $\frac{H_\varphi}{rn}$ пропорциональна потоку магнитного поля $H_\varphi \Delta r \Delta z$, пронизывающему площадку $\Delta r \Delta z$ (рис. 2), связанную с движущимися частицами. Действительно,

$$\frac{H_\varphi}{rn} = \frac{H_\varphi \Delta r \Delta z}{\frac{1}{2\pi} (2\pi nr \Delta r \Delta z)} = \frac{2\pi H_\varphi \Delta r \Delta z}{n \Delta V}.$$

В знаменателе стоит число частиц в элементе объема, связанном с движущимися частицами, т. е. неизменяющаяся величина.

Таким образом, уравнение (3.7) показывает, что магнитный поток через любой выделенный контур, связанный с движущимися частицами, остается неизменным. Магнитные силовые линии как бы «примерзают» к частицам. Это связано с тем, что любое изменение потока вызвало бы электродвижущую силу, которая привела бы в среде с бесконечной проводимостью к бесконечному току.

Если в начальный момент поле внутри шнура отсутствует $H_\varphi^{(i)} = 0$, то и в последующие моменты $H_\varphi^{(i)} = 0$ внутри шнура. При этом весь ток течет по поверхности шнура, и давление плазмы выравнено и постоянно по радиусу, так как магнит-

ная сила $\frac{1}{c} j_z H_\varphi$ [см. (1.5)] равна нулю всюду внутри шнура.

Сила, уравнивающая давление плазмы, действует на поверхность шнура там, где протекает ток, так как если бы плазма была окружена твердой стенкой (магнитная стенка).

Магнитное поле на краю быстро возрастает от 0 до $\frac{2\mathcal{J}}{ca}$. Подлетающие к краю электроны круто заворачиваются в этом магнитном поле и отражаются обратно внутрь шнура аналогично тому, как они отражались бы от настоящей твердой стенки.

Если процесс быстрого изменения начался уже при наличии поля внутри шнура, то в последующие моменты поле внутри $H_\varphi^{(t)}$ изменяется обратно пропорционально радиусу

$$H_\varphi^{(t)} \sim rn \sim a \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a}.$$

При этом, очевидно, на границе шнура поле терпит скачок, как и в предыдущем случае, так как поле внутри и вне шнура меняется по различным законам. Ток течет как по поверхности, так и внутри шнура. Давление плазмы не вполне выравнено по радиусу.

Рассмотренный сейчас случай, когда $\frac{s}{t} \gg 1$, будем называть случаем быстрых процессов, или случаем бесконечной проводимости.

В противоположном предельном случае при медленном изменении поля $\frac{s}{t} \ll 1$ можно пренебречь левой частью уравнения (3.1). Приравнивая левую часть этого уравнения нулю, получим для магнитного поля (с учетом граничного условия $H_\varphi(a) = \frac{2\mathcal{J}}{ca}$)

$$H_\varphi^{(t)} = \frac{2\mathcal{J}}{ca} \frac{r}{a}. \quad (3.8)$$

При этом скин-эффект отсутствует, плотность тока постоянна по радиусу $j = \frac{\mathcal{J}}{\pi a^2}$.

Интегрируя уравнение равновесия (1.5) $\frac{\partial p}{\partial r} = 2T \frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{1}{c} jH$ с этими значениями плотности тока и магнитного

поля, получим (с условием $n(a) = 0$) параболическое распределение плотности

$$n(r) = \frac{\mathcal{I}^2}{2\pi c^2 a^2 T} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{2N}{\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (3.9)$$

Этот случай будем называть случаем медленных процессов.

§ 4. Уравнение баланса тепла

Здесь рассматривается шнур, из которого тепло не теряется; случай, когда потери существенны, будет рассмотрен далее (§ 7).

Плазма состоит из ионов и электронов; их температуры могут, вообще, быть разными. В настоящей работе всюду считается, что температуры ионов и электронов равны друг другу. Условия отсутствия отрыва температур ($T_e = T_i = T$) рассматриваются в § 9.

Теплопроводность плазмы сравнительно велика, и это приводит к хорошему выравниванию температуры по сечению. Можно показать [1], что время выравнивания температуры по сечению меньше в $\sqrt{M/m}$ раз, чем время диффузии s . Ввиду этого температуру плазмы можно считать постоянной по радиусу и пользоваться уравнением баланса тепла (1.7), усредненным по сечению.

Проинтегрировав уравнение (1.7) по сечению, получим

$$\begin{aligned} 3 \int_0^a n \cdot \frac{dT}{dt} \cdot 2\pi r dr + 2 \int_0^a n T \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rv)}{\partial r} \cdot 2\pi r dr + \int_0^a \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rqr)}{\partial r} \cdot 2\pi r dr = \\ = \int_0^a \frac{i^2}{\sigma} 2\pi r dr. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если шнур оторван от стенки и не имеет потерь тепла, то третий член обращается в нуль. Первый член при постоянной по сечению температуре обращается в $3N \frac{dT}{dt}$. Второй член проинтегрируем, считая скорость линейной $v = \dot{a} \frac{r}{a}$ *, тогда $\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 2 \frac{\dot{a}}{a}$, и он обращается в $4Nt \frac{\dot{a}}{a}$. Джоулево тепло, выделяемое на единицу длины шнура (правая часть

* Это соотношение является точным для медленных процессов, для быстрых процессов и в автомоделных режимах.

уравнения), можно записать в виде $\frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} f$, где f — множитель, учитывающий скин-эффект. При полном отсутствии скин-эффекта $f=1$. Если существенен скин-эффект, то $f > 1$; например, при сильном скин-эффекте f по порядку величины равняется отношению радиуса к толщине скин-слоя*.

В так называемых автомодельных режимах (см. § 8), когда величина k^2 , характеризующая отношение радиуса к скин-слою

$$k^2 = 4s \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}} = \frac{4\pi\sigma a^2 \mathcal{J}}{c^2 \mathcal{J}}, \quad (4.2)$$

остаётся постоянной, f не зависит от времени и равняется

$$f = \frac{k^2 I_0^2(k) - I_1^2(k)}{4 I_1^2(k)}, \quad (4.3)$$

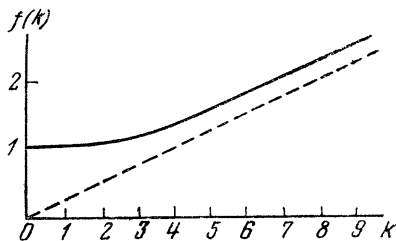


Рис. 3.

где $I(k)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента (рис. 3). Уравнение (4.1) принимает, таким образом, вид

$$3N \frac{dT}{dt} + 4NT \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} f. \quad (4.4)$$

Если обе части уравнения поделить на T , то уравнение принимает вид

$$2N \frac{d}{dt} \ln a^2 T^{3/2} = \frac{Q_{\text{джн.}}}{T}. \quad (4.5)$$

Смысл этого уравнения очевиден. Слева здесь стоит изменение энтропии, справа — тепло, выделенное в системе за единицу времени, деленное на температуру. Учитывая, что время

* При сильном скин-эффекте можно считать, что весь ток течет по скин-слою толщиной $\delta \approx \sqrt{4Dt}$, так что плотность тока $j = \frac{\mathcal{J}}{2\pi a \delta}$. Таким образом, выделяемое джоулево тепло можно оценить следующим образом:

$$\int_0^a \frac{j^2}{\sigma} 2\pi r dr = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\mathcal{J}}{2\pi a \delta} \right)^2 2\pi a \delta = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} \frac{a}{2\delta}.$$

По порядку величины $f = \frac{a}{2\delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{t}}$.

магнитной диффузии $s \sim a^2 T^{3/2}$, можно написать $\frac{d}{dt} \ln a^2 T^{3/2} = \frac{d}{dt} \ln s = \frac{1}{s} \frac{ds}{dt}$. Энтропия шнура (на единицу длины) с точностью до несущественной постоянной совпадает, таким образом, с $\ln s$. Полная проводимость шнура (без учета скин-эффекта) с точностью до постоянного множителя также совпадает со временем магнитной диффузии $\pi a^2 \sigma = c^2 s$, так что

$$Q_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi \sigma a^2} f = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 s} f. \quad (4.6)$$

Поэтому при введении величины s в уравнение (4.5) оно принимает наиболее простой вид

$$2NT \frac{1}{s} \frac{ds}{dt} = Q_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 s} f, \quad (4.7)$$

или, если воспользоваться связью тока с температурой,

$$\frac{ds}{dt} = 2f. \quad (4.8)$$

При не очень быстрых процессах, когда можно считать $f = 1$, это уравнение легко интегрируется

$$s = s_0 \left(1 + 2 \frac{t}{s_0} \right). \quad (4.9)$$

Для очень быстрых процессов, когда $\sqrt{\frac{t}{s_0}} \ll 1$, по порядку величины $f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{t}}$ (см. сноску на стр. 35). Тем не менее изменением s во времени можно пренебречь и считать $s = s_0$. Действительно, из уравнения (4.8) следует, что $s - s_0 \sim \sqrt{\frac{s}{t}} t$ и $\frac{s - s_0}{s_0} \sim \sqrt{\frac{t}{s_0}} \ll 1$. Решение уравнения (4.8) для быстрых процессов

$$s = s_0 \quad (4.10)$$

представляет собой не что иное, как уравнение адиабаты $T^{3/2}/n = \text{const.}$

Величина s_0 представляет собой то значение s , которое имеется в момент отрыва шнура от стенки. Если положить для этого момента $a = a_1 = 10$ см, $T = T_0 = 7$ эв, то $s_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ сек.

Из уравнения (4.9) видно, что время магнитной диффузии s увеличивается в два раза за время процесса при

$t = \frac{s}{2}$. Можно считать, что при временах такого порядка лежит граница между быстрыми и медленными процессами.

§ 5. Изменение радиуса шнура со временем

Изменение радиуса шнура во времени определяется уравнением (1. 6), в правую часть которого нужно подставить значения всех величин на краю шнура. Электрическое поле на краю шнура, однако, нельзя считать заданным. Удобнее выражать все величины через ток, который можно считать заданной величиной, определяемой внешней цепью. Связь радиуса с током можно получить из уравнения баланса тепла

$$\frac{ds}{dt} = 2f \quad (5. 1)$$

Из решения этого уравнения для медленных процессов

$$s = s_0 \left(1 + 2 \frac{t}{s_0} \right) \quad (5. 2)$$

следует, если учесть, что $\frac{s}{s_0} = \frac{a^2 T^{3/2}}{a_0^2 T_0^{3/2}} = \frac{a^2 \mathcal{J}^3}{a_0^2 \mathcal{J}_0^3}$,

$$a^2 = a_0^2 \mathcal{J}_0^3 \frac{1 + 2 \frac{t}{s_0}}{\mathcal{J}^3(t)}. \quad (5. 3)$$

При быстрых процессах $s = s_0$

$$a^2 = a_0^2 \frac{\mathcal{J}_0^3}{\mathcal{J}^3(t)}. \quad (5. 4)$$

Из уравнения $\frac{ds}{dt} = 2f$ можно получить условие отрыва шнура от стенки. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{ds}{dt} = 2 \frac{\dot{a}}{a} + 3 \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}} = 2 \frac{f}{s}. \quad (5. 5)$$

Отсюда можно найти скорость сжатия \dot{a}

$$2 \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2f}{s} - 3 \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}. \quad (5. 6)$$

Необходимым условием отрыва, очевидно, является условие $\dot{a} < 0$, т. е. скорость края шнура должна быть направлена к центру. Для выполнения этого условия требуется, как

следует из этого уравнения, определенная скорость нарастания тока: $s \cdot \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}} > \frac{2}{3} f$. Так как при значениях величины $s \cdot \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}} = \frac{2}{3}$ можно принять с хорошей точностью $f=1$, то условие отрыва можно написать в виде

$$\left(s \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}\right) \text{ при отрыве } > \frac{2}{3}. \quad (5.7)$$

Например, если принять начальные значения $s_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ сек, $\mathcal{J}_0 = 6 \cdot 10^4$ а, то производная тока по времени должна быть в начальный момент $\dot{\mathcal{J}}_0 > 0,8 \cdot 10^9$ а/сек. Условие отрыва зависит от начального радиуса шнура (так как $s_0 \sim a_0^2$); чем меньше радиус, тем больше должна быть скорость нарастания тока.

При малых $\dot{\mathcal{J}}$ отрыв задерживается и начинается, когда $s\dot{\mathcal{J}}/\mathcal{J}$ достигает значения $2/3$, т. е. при токе

$$\mathcal{J}_{\text{отр}} = \left(\frac{2}{3} \frac{\mathcal{J}_0^3}{s_0 \dot{\mathcal{J}}}\right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

§ 6. Замечания относительно нагрева плазмы и сжатия шнура

а) Нагревание плазмы происходит в общем случае, как это следует из уравнения баланса тепла (4.4), из-за выделения джоулева тепла и из-за сжатия. Как мы уже видели (см. конец § 4), в быстрых процессах выделением джоулева тепла за время процесса можно пренебречь по сравнению с работой сжатия. Изменение температуры при этом происходит по адиабатическому закону

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{4/3}.$$

При не очень быстрых процессах $t \sim s_0$ джоулево тепло сравнимо по величине с работой сжатия.

В случае, когда $s \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}} < \frac{2}{3}$ шнур не отрывается от стенок, и нагрев происходит за счет выделяющегося в плазме джоулева тепла, часть которого при этом отводится на стенки трубы. Тот или иной механизм нагрева будет преобладающим, таким образом, в зависимости от времени процесса (времени наращивания тока). Окончательная температура в любом случае определяется только достигнутой величиной тока и не связана с механизмом нагрева.

б) На первый взгляд может показаться странным, что зависимость радиуса шнура от времени определяется из энергетического уравнения, в то время как скорость сжатия дается уравнением (1. 6). Смысл этого, однако, ясен. Благодаря жесткой связи температуры с током $\mathcal{J}^2 = 4c^2NT$, которой требует условие равновесия сил, температура нагреваемой плазмы определяется значением тока в данный момент. Все же остальные величины должны подбираться так, чтобы обеспечить нагрев до температуры $T = \frac{\mathcal{J}^2}{4c^2N}$. В частности, соответствующим образом подбирается сжатие, обеспечивающее вместе с джоулевым теплом необходимый нагрев плазмы; это сжатие в свою очередь обеспечивается соответствующим изменением электрического поля внутри плазмы.

§ 7. Шнур с потерями тепла

При наличии потерь тепла из шнура уравнение баланса тепла имеет вид

$$3N \frac{dT}{dt} + 2NT \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} f - Q_{\text{пот}}, \quad (7. 1)$$

или

$$\frac{ds}{dt} = 2f - \frac{Q_{\text{пот}}}{2Nt} s. \quad (7. 2)$$

Отсюда можно найти скорость сжатия \dot{a}

$$2 \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2f}{s} - 3 \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}} - \frac{Q_{\text{пот}}}{2NT}. \quad (7. 3)$$

Как видно из этого уравнения, любые потери тепла из шнура приводят к более быстрому сжатию шнура. Это опять-таки связано непосредственно с тем, что температура определяется из условия равновесия, скорость сжатия подбирается такой, чтобы обеспечить нагрев до этой температуры. При больших потерях нужны, соответственно, бóльший нагрев и, стало быть, более сильное сжатие.

Для того чтобы судить о поведении шнура, необходимо иметь явное выражение для $Q_{\text{пот}}$. Разберем отдельно случаи потерь энергии из шнура путем теплопроводности на стенки, потери посредством тормозного излучения электронов и электродные потери.

Потери тепла на стенки. Здесь некоторые результаты можно получить без знания явного выражения для $Q_{\text{пот}}$.

Очевидно, этот случай имеет место, если не выполнено условие отрыва, т. е. если

$$s \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}'} < \frac{2}{3}, \quad (7.4)$$

и шнур касается стенок. При этом можно считать $f=1$. Как следует из уравнения (7.3), величина потерь должна иметь равновесное значение

$$Q_{\text{равн}} = 2NT \left(\frac{2}{s} - 3 \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}'} \right) = \frac{\mathcal{J}^2}{2c^2} \left(\frac{2\mathcal{J}_0^3}{s_0\mathcal{J}^3} - 3 \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}'} \right). \quad (7.5)$$

Плотность и температура около стенки автоматически подберутся такими, чтобы ударами частиц о стенку на нее передавалось именно такое количество тепла $Q_{\text{равн}}$, которое необходимо для поддержания температуры $T = \mathcal{J}^2/4c^2N^*$.

Действительно, если $Q_{\text{пот}} > Q_{\text{равн}}$, то шнур начнет сжиматься, так как в этом случае $\dot{a} < 0$

$$4NT \frac{\dot{a}}{a} = Q_{\text{равн}} - Q_{\text{пот}} < 0, \text{ если } Q_{\text{равн}} < Q_{\text{пот}}. \quad (7.6)$$

При сжатии передача тепла на стенку уменьшается, так как плотность плазмы вблизи стенки становится меньше. Сжатие будет происходить до тех пор, пока $Q_{\text{пот}}$ не примет значения $Q_{\text{пот}} = Q_{\text{равн}}$. Таким образом, потери на стенки определяются практически не теплопроводностью плазмы, а условием равновесия.

Потери посредством тормозного излучения. Рассмотрим теперь потери тепла из плазменного шнура вследствие тормозного излучения электронов при столкновении с ионами. Выражение для потери энергии из единицы объема дается формулой (см., например, [1])

$$Q_{\text{пот}} = \beta n^2 \sqrt{T \epsilon}; \quad \beta = \frac{32 \sqrt{2} e^4}{3 \sqrt{\pi} 137 m^{3/2} c^2}. \quad (7.7)$$

Усредняя по сечению, получим для излучения на единицу длины шнура выражение

$$Q_{\text{пот}} = \beta \frac{N}{\pi a^2} \sqrt{T}. \quad (7.8)$$

* Точнее говоря, условие равновесия требует даже несколько большей температуры $4c^2NT = \mathcal{J}^2 + 2\pi a^2 c^2 p(a)$. Однако, так как передача тепла путем ударов о стенку частиц, движущихся с тепловыми скоростями, весьма велика, количество тепла $Q_{\text{равн}}$ передается уже при сравнительно малом давлении плазмы около стенки $p(a) \ll p(0)$.

Это выражение можно записать в следующем виде (используя связь тока с температурой):

$$Q_{\text{пот}} = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} \left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_n} \right)^2 = Q_{\text{дж}} \left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_n} \right)^2, \quad (7.9)$$

где

$$\mathcal{J}_n = \sqrt{\frac{12c^4}{\sigma_1 \beta}} = 1,5 \cdot 10^6 a, \quad (7.10)$$

Отсюда сразу видно, что излучением можно пренебречь при токах, малых по сравнению с $\mathcal{J}_n = 1,5 \cdot 10^6 a$; в стационарном режиме, когда плазма нагревается только за счет джоулева тепла, по ней не может протекать ток, больший \mathcal{J}_n (иначе потери на излучение были бы больше, чем выделение тепла, чего не может быть в стационарном случае). В стационарном случае $\mathcal{J} = \sigma \pi a^2 \frac{V}{l}$, где $\frac{V}{l}$ — напряжение на единицу длины шнура. Стационарный радиус шнура при токе, равном \mathcal{J}_n , определяется из условия $\mathcal{J}_n = \sigma \pi a^2 V/l$, откуда

$$a = \left(\frac{\mathcal{J}_n}{\pi \sigma V/l} \right)^{1/2} = 1,7 \cdot 10^{-14} \frac{l^{1/2} N^{3/4}}{V_{\text{вольт}}^{1/2}}. \quad (7.11)$$

Увеличение приложенного к шнуру напряжения приведет лишь к соответствующему уменьшению радиуса, росту сопротивления и одинаковому увеличению как джоулева тепла, так и излучения, ток же не увеличится.

В нестационарных процессах «пределный ток» может быть превзойден, так как при этом к джоулевскому теплу добавляется нагрев за счет сжатия.

Потери на электроды. Чтобы решить задачу о шнуре с учетом потерь энергии на электроды, необходимо иметь граничные условия на электродах. Эти условия в настоящее время не известны.

Так как по шнуру течет ток, то вдоль шнура от катода к аноду имеется конвективный поток тепла $\frac{5}{2} \frac{\mathcal{J}}{e} T$, связанный с током электронов. Мы предполагаем, что, подходя к аноду, электроны не теряют своих тепловых скоростей, так что этот поток свободно проходит на анод. В этом случае решена стационарная задача [3]. Тепловой поток, уносящий энергию из шнура, при этом равен $\frac{5}{2} \frac{\mathcal{J}}{e} T$; остальными тепловыми потоками оказывается возможным пренебречь. По-

теря энергии, приходящаяся на единицу длины шнура, равна $Q_3 = \frac{5}{2} \frac{\mathcal{J} T}{e l}$, где l — длина шнура.

Естественно считать, что и в нестационарном случае потери тепла на электроды даются формулой

$$Q_3 = \frac{5}{2} \frac{\mathcal{J} T}{e l}. \quad (7.12)$$

Если это так, то уравнение баланса тепла имеет вид

$$3N \frac{dT}{dt} + 4NT \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} - \frac{5}{2} \frac{\mathcal{J} T}{e l}, \quad (7.13)$$

или

$$\frac{ds}{dt} = 2 - \frac{5}{4} \frac{\mathcal{J} s}{Nel}. \quad (7.14)$$

Здесь мы снова положили $f=1$, так как потери существенны при не очень быстрых процессах. Это — линейное уравнение относительно s ; его решение можно написать в общем виде. В простейшем случае $\mathcal{J} = \text{const}$ решение имеет вид

$$s = s_0 e^{-\frac{5}{4} \frac{\mathcal{J} t}{Nel}} + \frac{32}{5} \frac{Nel}{\mathcal{J}} \left(1 - e^{-\frac{5}{4} \frac{\mathcal{J} t}{Nel}} \right). \quad (7.15)$$

При достаточно больших временах

$$\frac{5}{4} \frac{\mathcal{J} t}{Nel} > 1 \quad (7.16)$$

s стремится к постоянному значению

$$s_{\text{стац}} = \frac{32}{5} \frac{Nel}{\mathcal{J}}. \quad (7.17)$$

Отсюда можно определить стационарный радиус

$$a_{\text{см}}^2 = \frac{64}{5} \frac{ec^5}{\pi \sigma_1} \frac{LN^{5/2}}{\mathcal{J}^4} = 1,4 \cdot 10^{-25} \frac{l_{\text{см}} N^{5/2}}{\mathcal{J}^4 a}. \quad (7.18)$$

Последние выражения пригодны и при любой (но достаточно медленной) зависимости тока от времени. Как непосредственно следует из уравнения (7.14), s сначала возрастает, затем падает (рис. 4), стремясь к значению

$$s_{\text{стац}}(t) = \frac{32Nel}{5\mathcal{J}(t)}. \quad (7.19)$$

Это наступает при временах, когда производной

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{32Nel\dot{\mathcal{J}}}{5\mathcal{J}^2} = -s\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}$$

можно пренебречь по сравнению с каждым членом правой части уравнения, т. е. когда

$$\left| \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}} \right| \ll \frac{5}{4} \frac{\mathcal{J}}{Nel}. \quad (7.20)$$

Это же условие можно записать в виде $s\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}} \ll 2$. Таким образом, потери на электроды при условии $\frac{\mathcal{J}t}{Nel} \gg 1$ приводят к квазистационарному режиму, в котором распределение всех величин в шнуре такое же, как в стационарном случае, а радиус изменяется обратно пропорционально квадрату тока по формуле (7.18).

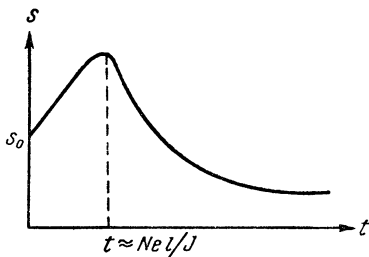


Рис. 4.

В заключение отметим, что в то время как при отсутствии потерь условие малости величины $s\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}$ означало: 1) отсутствие скин-эффекта, 2) увеличение радиуса шнура со временем [см. (5.6)], при наличии потерь второе уже не всегда верно. При малом $s\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}$ радиус шнура может не меняться, как, например, при потерях на стенку, или даже уменьшаться, как в оторванном шнуре с потерями на электроды. Скин-эффект при малом $s\frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}$, конечно, несущественен, независимо от того, есть потери или нет.

§ 8. Автомодельные режимы

Уравнения, описывающие плазменный шнур, представляют собой нелинейные уравнения в частных производных. Все величины $n(r, t)$, $H(r, t)$, ... зависят от радиуса и времени. Эти уравнения могут быть точно решены в том частном случае, когда возможно разделение переменных (так называемые автомодельные решения). Пусть радиальная скорость плазмы пропорциональна радиусу

$$v = \frac{\dot{a}}{a} r. \quad (8.1)$$

Все линейные размеры шнура изменяются при этом со временем пропорционально друг другу, а распределение плотности по сечению со временем не меняется. Если все величины в шнуре рассматривать как функции переменных t и $x = \frac{r}{a}$, то оказывается возможным разделить переменных, т. е. все величины можно представить в виде $f(t)\varphi(x)$, так что распределение всех величин по шнуру остается со временем подобным самому себе. Магнитное поле представится в виде $H = H_a(t)z(x)$, где $H_a = \frac{2\mathcal{J}}{ca}$ — магнитное поле на краю шнура, $z(x)$ — «форма» распределения поля внутри шнура. Уравнение для магнитного поля (3.1) в автомодельных координатах x , t имеет вид (с учетом $v = \dot{a}x$)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial (xz)}{\partial x} \right) = 4s \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial (z\mathcal{J})}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Условие разделения переменных (независимость z от времени) требует постоянства величины

$$k^2 = 4s \frac{\dot{\mathcal{J}}}{\mathcal{J}}. \quad (8.3)$$

Уравнение $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d(xz)}{dx} \right) = k^2 z$ есть уравнение Бесселя первого порядка; решение его, удовлетворяющее очевидному граничному условию $z(0) = 0$, $z(1) = 1$, есть

$$z = \frac{I_1(kx)}{I_1(k)}, \quad (8.4)$$

где $I_1(kx)$ — бesselева функция мнимого аргумента (рис. 5). Из уравнения равновесия (2.1) легко найти плотность

$$n(x_1 t) = \frac{N}{\pi a^2} \frac{I_0^2(k) - I_0^2(kx)}{I_1^2(k)}. \quad (8.5)$$

При этом используются условия

$$n(1, t) = 0; \quad \int_0^a n 2nr dr = N. \quad (8.6)$$

Показатель автомодельности k , который должен оставаться постоянным в автомодельных режимах, имеет простой физический смысл. Он равен отношению радиуса шнура к толщине скин-слоя.

Коэффициент f в выражении для джоулева тепла $Q_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{J}^2}{\pi a^2 \sigma} f$ в автомодельном решении равен

$$f(k) = \frac{k^2}{4} \frac{I_0^2(k) - I_1^2(k)}{I_1^2(k)}. \quad (8.7)$$

Он не зависит от времени, поэтому уравнение теплового баланса при отсутствии потерь $\frac{ds}{dt} = 2f$ легко интегрируется

$$s = s_0 \left(1 + 2f(k) \frac{t}{s_0} \right). \quad (8.8)$$

Из условия $k^2 = 4s \frac{\mathcal{J}}{\sigma}$ находим, по какому закону должен изменяться ток в автомодельном режиме (при отсутствии

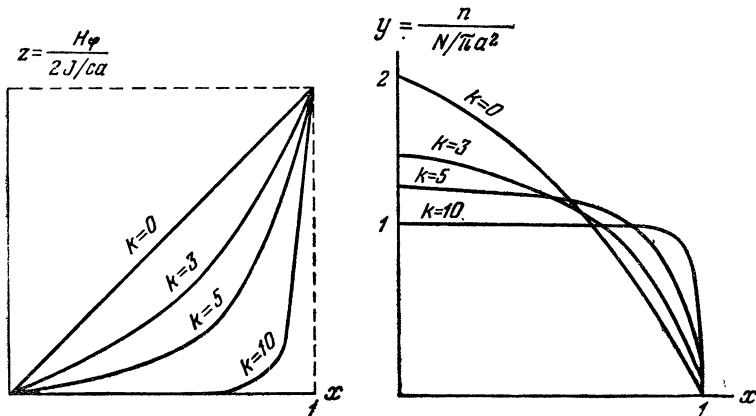


Рис. 5.

потерь тепла из шнура), чтобы величина k оставалась с течением времени постоянной

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \left(1 + 2f(k) \frac{t}{s_0} \right)^{\nu(k)} = \mathcal{J}_0 \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\nu(k)}, \quad (8.9)$$

где

$$\nu(k) = k^2/4 \frac{ds}{dt} = \frac{k^2}{28} = \frac{I_1^2(k)/2}{[I_0^2(k) - I_1^2(k)]}. \quad (8.10)$$

Например, при токе, линейно нарастающем со временем, $\nu = 1$, что соответствует $k^2 = 9,08$.

Так как

$$s = s_0 \mathcal{J}^3 a^2 / \mathcal{J}_0^3 a_0^2, \quad (8.11)$$

то для радиуса получим

$$a^2 = a_0^2 \left(1 + 2f \frac{t}{s_0}\right)^{1-3\nu} = a_0^2 \left(\frac{s}{s_0}\right)^{1-3\nu}. \quad (8.12)$$

Магнитное поле меняется по закону

$$H = \frac{2\mathcal{J}}{ca} = \frac{2\mathcal{J}_0}{ca_0} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\frac{5\nu-1}{2}}. \quad (8.13)$$

Случай постоянного радиуса соответствует $\nu = \frac{1}{3}$, т. е. нарастанию тока по закону $\mathcal{J} \sim t^{1/3}$. Соответствующее значение $k = 1,65$.

Таким образом, при отсутствии потерь для автомодельности необходимо, чтобы ток изменялся по степенному закону. Если имеются потери тепла из шнура, то закон изменения тока, необходимый для автомодельности, будет, вообще говоря, другим. Условие постоянства $k^2 = 4s \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}}$ требует, чтобы было

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \exp\left(\frac{k^2}{4} \int_0^t \frac{dt}{s(t)}\right). \quad (8.14)$$

Зависимость же s от времени определяется балансом тепла.

Автомодельные решения представляются семейством решений, зависящих от трех параметров. Пусть ток изменяется по закону

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\nu, \quad (8.15)$$

тогда этими тремя параметрами являются \mathcal{J}_0 , t_0 , ν . Для того чтобы осуществлялся автомодельный режим, необходимо, кроме степенной зависимости тока от времени, еще выполнение определенных начальных условий, так как все остальные величины, например a_0 , s_0 и т. д., выражаются через три указанных параметра.

Действительно, заданному ν вполне соответствует определенное значение k . Условие, необходимое для автомодельности [ср. (8.9) и (8.15)]

$$\frac{s_0}{2f(k)} = t_0,$$

где

$$s_0 = 1,9 \cdot 10^{15} \frac{a_0^2 \mathcal{J}_0^3 k a}{N^{3/2}}, \quad (8.16)$$

будет тогда выполняться только в случае, если начальный радиус шнура равен вычисленному на основании известных величин \mathcal{J}_0 , t_0 , k из этого уравнения*.

§ 9. Условия безотрывности

Как было уже указано (см. § 4), нагревание плазмы происходит за счет выделяемого в шнуре джоулева тепла и за счет работы сжатия. Так как ток переносится электронами, то все джоулево тепло выделяется в электронном газе. Работа сжатия пропорциональна давлению; поэтому энергия, получаемая при сжатии ионами и электронами, пропорциональна их температурам. Если температуры электронов и ионов равны между собой, то оба газа нагреваются от сжатия одинаково.

Так как за счет джоулева тепла электроны греются сильнее ионов, то их температура всегда выше, и при некоторых условиях разность может быть большой — отрыв температур. Столкновения электронов с ионами приводят к передаче тепла от электронного газа к ионному, способствуя уменьшению отрыва.

Найдем условия, при которых отрыв температур невелик (величина $\delta = 2T_i/(T_e + T_i)$ близка к единице).

Передача тепла от электронов к ионам на единицу объема определяется выражением

$$\Delta Q = \frac{3m}{M} \frac{n}{\tau} (T_e - T_i), \quad (9.1)$$

где τ — время свободного пробега для столкновений электронов с ионами — можно выразить через макроскопическую характеристику — проводимость σ ,

$$\tau = \frac{m\sigma}{e^2 n}. \quad (9.2)$$

* Строго говоря, для осуществления автоматического режима необходимо, чтобы в начальный момент распределение всех величин по радиусу шнура описывалось приведенными выше выражениями.

Уравнения переноса тепла для электронов и ионов, усредненные по сечению шнура, имеют вид

$$\frac{3}{2} N \frac{dT_e}{dt} + NT_e \overline{\text{div v}} = Q_{\text{дж}} - \overline{\Delta Q} - Q_{\text{пот } e}; \quad (9.3)$$

$$\frac{3}{2} N \frac{dT_i}{dt} + NT_i \overline{\text{div v}} = \overline{\Delta Q} - Q_{\text{пот } i}, \quad (9.4)$$

где Джоулево тепло

$$Q_{\text{дж}} = \frac{\vartheta^2}{\pi a^2 \sigma_1 T^{3/2}} f, \quad (9.5)$$

передача тепла от электронов к ионам *

$$\Delta Q = \frac{4\Pi}{s} N (T_e - T_i), \quad (9.6)$$

где

$$\Pi = \frac{e^2 N}{Mc^2} \quad (9.7)$$

число частиц на длине шнура, равной $\frac{e^2}{Mc^2}$ («классический радиус» частицы).

Умножая первое уравнение на $-\frac{2T_i}{(T_e + T_i)^2}$, а второе на $\frac{2T_e}{(T_e + T_i)} \frac{T_e}{T_i}$, получим после сложения для величины

$$\vartheta = \frac{2T_i}{T_i + T_e}, \quad (9.8)$$

характеризующей отрыв, следующее уравнение

$$\frac{3}{2} \frac{d\vartheta}{dt} = -\vartheta \frac{Q_{\text{дж}}}{N(T_e + T_i)} + \frac{8\Pi}{s} (1 - \nu) + \frac{\vartheta T_e}{N(T_e + T_i)} \left(\frac{Q_{\text{пот}}^e}{T_e} - \frac{Q_{\text{пот}}^i}{T_i} \right). \quad (9.9)$$

Это уравнение можно привести к виду

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\vartheta - \vartheta^*}{\tau^*}, \quad (9.10)$$

* При усреднении предполагалось параболическое распределение плотности по сечению; при постоянной плотности вместо коэффициента 4 будет коэффициент 3.

где величины τ^* и ϑ^* , если пренебречь потерями, равны

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{2}{3} \frac{Q_{\text{дж}}}{N(T_e + T_i)} + \frac{16}{3} \frac{\Pi}{s} = \frac{4}{3} \frac{f}{s} + \frac{16}{3} \frac{\Pi}{s}; \quad (9.11)$$

$$\vartheta^* = \left(1 + \frac{s}{8\Pi} \frac{Q_{\text{дж}}}{N(T_e + T_i)}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{f}{4\Pi}\right)^{-1}. \quad (9.12)$$

Уравнение (9.10) показывает, что ϑ приближается к значению, равному ϑ^* , за время порядка τ^* . Для того чтобы не было отрыва температур, должны, очевидно, выполняться следующие условия:

$$\tau^* \ll t; \quad (9.13)$$

$$|1 - \vartheta^*| \ll 1. \quad (9.14)$$

t — время процесса. Для не очень быстрых процессов, когда $f=1$ и $s=2t$, оба условия выполняются при $\Pi \gg \frac{1}{4}$.

Для быстрых процессов, когда $f \approx \sqrt{\frac{2s}{t}}$ и $s=s_0 \gg t$, условие (9.13) выполняется при

$$\Pi \gg \frac{3}{16} \frac{s_0}{t}, \quad (9.15)$$

и условие (9.14) выполняется при

$$\Pi \gg \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s_0}{t}}. \quad (9.16)$$

Для безотрывности должны выполняться оба условия; при очень быстрых процессах первое из них является более жестким. Если эти условия не выполнены ($s_0/t > \frac{16}{3} \Pi$), то отношение температур не успевает измениться и определяется начальными условиями. Потери тепла электронами уменьшают отрыв, тогда как ионные потери увеличивают его.

Заметим, что, как следует из формулы (9.9), наличие потерь тепла у ионов и электронов, пропорциональных их температурам, не влияет на отрыв.

Глава II

ШНУР С ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

§ 10. Система уравнений при наличии продольного поля

В этом параграфе будет получена система уравнений, описывающих плазму при наличии продольного магнитного поля. Будем снова рассматривать бесконечно длинный шнур с ци-

линдрической симметрией. Наличие продольного магнитного поля, изменяющегося во времени, приводит к появлению φ -ой компоненты электрического поля E_φ , так что отличными от нуля компонентами электрического и магнитного полей теперь будут

$$E_r, E_\varphi, E_z; H_\varphi, H_z.$$

Полная система уравнений содержит, кроме уравнений Максвелла, определяющих эти поля, уравнение непрерывности, уравнения переноса импульса и уравнение переноса тепла. Магнитное поле будем предполагать достаточно сильным, так что

$$\omega_e \tau_e \gg 1, \\ r_H/a \ll 1,$$

где $r_H = \frac{mvc}{eH}$, $\omega_e = \frac{eH}{mc}$ — ларморовский радиус и частота электрона. Будем также считать, что все величины меняются мало за время столкновений между частицами. Эти же предположения делались при рассмотрении шнура без продольного поля.

Вместо уравнений переноса импульса для электронов и ионов в отдельности удобнее взять их сумму и уравнение для ионов

$$Mn \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}]; \\ Mn \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + en \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) - \mathbf{R}. \quad (10.1)$$

Здесь опущен электронный инерционный член, а также дивергенция тензора вязкости. \mathbf{R} — сила трения электронов об ионы, зависящая от их относительных скоростей. Будем считать температуру постоянной по радиусу и отбрасывать ту составляющую силы трения, которая зависит от градиента температуры (термо-эдс).

Тогда при условии $\omega_e \tau_e \gg 1$ можно записать

$$\mathbf{R} = \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}_\perp + 0,51 \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}_\parallel, \quad (10.2)$$

где \mathbf{j}_\parallel и \mathbf{j}_\perp — векторы плотности тока в направлениях, параллельном и перпендикулярном к направлению магнитного поля

$$\mathbf{j}_\parallel = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{j}\mathbf{H})}{H^2}; \quad \mathbf{j}_\perp = \frac{[\mathbf{H}[\mathbf{j}\mathbf{H}]]}{H^2}; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_\parallel + \mathbf{j}_\perp. \quad (10.3)$$

«Коэффициенты трения» для поперечного и продольного направлений различны. Это связано с анизотропией функции распределения в магнитном поле. Коэффициент трения для параллельной составляющей примерно вдвое меньше, чем для поперечной; причем проводимость плазмы при отсутствии магнитного поля равна $\frac{\sigma}{0,51} = 1,96 \frac{e^2 n \tau}{m}$.

Проектируя уравнение (10. 2) на направления, параллельное и перпендикулярное к полю, найдем

$$j_{\perp} = \frac{\sigma}{en} R_{\perp}; \quad j_{\parallel} = \frac{\sigma}{0,51en} R_{\parallel}. \quad (10. 4)$$

Отсюда следует

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} = \frac{\sigma}{en} \left(\mathbf{R}_{\perp} + \frac{1}{0,51} \mathbf{R}_{\parallel} \right) = \frac{\sigma}{en} (\mathbf{R} + (\beta - 1) \mathbf{R}_{\parallel}),$$

где введен коэффициент, учитывающий анизотропию

$$\beta = \frac{1}{0,51} \approx 2. \quad (10. 5)$$

Так как $\mathbf{R}_{\parallel} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{R}\mathbf{H})}{H^2}$, то выражение для плотности тока

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{en} \left(\mathbf{R} + (\beta - 1) \frac{\mathbf{H}(\mathbf{R}\mathbf{H})}{H^2} \right) \quad (10. 6)$$

можно написать в виде

$$j_{\alpha} = \frac{1}{en} \sigma_{\alpha\beta} R_{\beta} \quad (\alpha, \beta = \varphi, z), \quad (10. 7)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор проводимости

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma (\delta_{\alpha\beta} + (\beta - 1) \frac{H_{\alpha} H_{\beta}}{H^2}). \quad (10. 8)$$

В правую часть выражения для плотности тока нужно подставить выражение из второго уравнения системы (10. 1). При этом получим

$$j_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \mathbf{E}^* - \frac{1}{en} \nabla P_i - \frac{M}{e} \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right\}_{\beta}. \quad (10. 9)$$

Для бесконечного цилиндрически симметричного шнура радиальный ток отсутствует $j_r = 0$, что следует из условия квазинейтральности плазмы. Последнее уравнение служит

при этом для определения радиального электрического поля (если пренебречь инерцией)

$$E_r = E_r^* = \frac{1}{en} \frac{\partial p_i}{\partial r}. \quad (10.10)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, а также $v_{iz} = v_{i\varphi} = 0$, то для φ -ой и z -ой компонент плотности тока имеем $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta^*$

$$\begin{aligned} j_\varphi &= \sigma \left\{ E_\varphi^* + (\beta - 1) \frac{H_\varphi (\mathbf{E}^* \mathbf{H})}{H^2} \right\}; \\ j_z &= \sigma \left\{ E_z^* + (\beta - 1) \frac{H_z (\mathbf{E}^* \mathbf{H})}{H^2} \right\}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Приведем также выражения E_φ^* , E_z^* через j_φ , j_z :

$$\begin{aligned} E_\varphi^* &= \frac{1}{\beta\sigma} \left(1 + (\beta - 1) \frac{H_z^2}{H^2} \right) j_\varphi - \frac{\beta - 1}{\beta c} \frac{H H_z}{H^2} j_z; \\ E_z^* &= -\frac{\beta - 1}{\beta\sigma} \frac{H H_z}{H^2} j_\varphi + \frac{1}{\beta\sigma} \left(1 + (\beta - 1) \frac{H_\varphi^2}{H^2} \right) j_z. \end{aligned} \quad (10.11a)$$

Полная система уравнений имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_z)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left\{ E_z^* + (\beta - 1) \frac{H_z}{H^2} (\mathbf{E}^* \mathbf{H}) \right\}; \quad (10.12a)$$

$$c \frac{\partial E_z^*}{\partial r} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial (vH_\varphi)}{\partial r}; \quad (10.12б)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \left\{ E_\varphi^* + (\beta - 1) \frac{H_\varphi}{H^2} (\mathbf{E}^* \mathbf{H}) \right\}; \quad (10.12в)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad (10.12г)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rnv)}{\partial r} = 0; \quad (10.12д)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} + \frac{H_z \partial H_z}{\partial r} + 4\pi \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (10.12e)$$

$$3n \frac{dT}{dt} + 2nT \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} = Q_{\text{дж}}; \quad (10.12ж)$$

$$Q_{\text{дж}} = j_z E_z^* + j_\varphi E_\varphi^* = \frac{j_z^2 + j_\varphi^2}{\beta\sigma} + \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{(j_z H_\varphi - j H_z)^2}{H^2}. \quad (10.12з)$$

Преобразуя последнее уравнение с помощью уравнений Максвелла и уравнений непрерывности и равновесия, можно получить закон сохранения энергии для частиц и поля в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(3nT + \frac{H_{\varphi}^2 + H_z^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left\{ \mathbf{q} + 5nT\mathbf{v} + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \right\} = 0. \quad (10.13)$$

Следует заметить, что уравнение переноса тепла занимает в системе (10.12) несколько особое положение. Как уже указывалось в § 1, теплопроводность плазмы сравнительно велика, так что температуру можно считать постоянной по радиусу. Это дает возможность решать первые шесть уравнений системы независимо от теплового уравнения, считая температуру некоторой (неизвестной, конечно, заранее) функцией времени $T(t)$, так же как и ток $I(t)$ и внешнее магнитное поле $H(t)$. Проинтегрировав последнее уравнение по радиусу, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $T(t)$. Если тепло из шнура не теряется, то это уравнение имеет вид

$$3N \frac{dT}{dt} + 2T \int_0^a n \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} 2\pi r dr = Q_{\text{дж}} = \int_0^a Q'_{\text{дж}} \cdot 2\pi r dr. \quad (10.14)$$

Это уравнение представляет собой баланс энергии в шнуре. Входящие сюда интегралы можно вычислить, если из предыдущих уравнений найдены n , v , $Q_{\text{дж}}$.

Из уравнений (10.1), (10.3), (10.6) нетрудно получить выражение для радиальной скорости плазмы

$$v = \frac{c}{H^2} (H_z E_{\varphi} - E_z H_{\varphi}) - \frac{c^2}{\sigma H^2} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad H^2 = H_{\varphi}^2 + H_z^2. \quad (10.15)$$

В уравнениях Максвелла можно исключить электрическое поле. Для магнитных полей получатся уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial(vH_z)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\beta\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[1 + (\beta - 1) \frac{H_{\varphi}^2}{H^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_z)}{\partial r} + \right. \\ \left. + (\beta - 1) \frac{H_{\varphi} H_z}{H^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\}; \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rvH_z)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\beta\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left\{ (\beta - 1) \frac{H_{\varphi} H_z}{H^2} \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_z)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \left[1 + (\beta - 1) \frac{H_z^2}{H^2} \right] \frac{\partial H_z}{\partial r} \right\}. \end{aligned}$$

Из уравнения равновесия [см. (10.12)] видно, что при наличии продольного магнитного поля нарушается та жесткая связь температуры с током $4c^2NT = \mathcal{J}^2$, которая имеет место при отсутствии продольного поля. Если проинтегрировать уравнение переноса импульса аналогично тому, как это делается при выводе формулы (2, 3), то получим следующее соотношение:

$$\bar{p} + \frac{\bar{H}^2}{8\pi} = \frac{H_\varphi^2(a)}{8\pi} + \frac{H_a^2}{8\pi},$$

или

$$4c^2NT = \mathcal{J}^2 + \frac{H_a^2 - \bar{H}^2}{4} a^2 c^2. \quad (10.17)$$

Здесь H_a — продольное магнитное поле на границе шнура;

$\bar{H}^2 = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a H_z^2 2\pi r dr$ — среднее значение квадрата продольного

поля по сечению шнура. Предполагается равенство температур ионной и электронной и постоянство их по радиусу; в противном случае слева стояло бы выражение $2c^2N(\bar{T}_e + \bar{T}_i)$. Из этой формулы видно прежде всего, что если продольное поле внутри больше, чем снаружи, то температура окажется меньше, чем определяемая из формулы (10.16): $T < \frac{\mathcal{J}^2}{4c^2N}$, и, наоборот, если поле снаружи больше, чем внутри, то $T > \frac{\mathcal{J}^2}{4c^2N}$. Это связано с тем, что если магнитное давление про-

дольного поля $\frac{H_z^2}{8\pi}$ внутри шнура больше, чем снаружи, то разность давлений добавляется к давлению плазмы и вместе с ним должна уравновешиваться максвелловыми натяжениями φ -го поля.

В отличие от того случая, когда имеется одно лишь φ -ое магнитное поле, при наличии z -го поля температура зависит не только от тока, но и от радиуса шнура, а также от распределения продольного поля по сечению.

Поскольку особый интерес представляет выяснение возможности нагрева плазмы до высокой температуры, задача о шнуре с продольным магнитным полем заключается в том, чтобы найти, как меняются радиус шнура и поле внутри него при заданном изменении тока и внешнего продольного поля.

Как и при отсутствии продольного поля, возможны два предельных случая — медленные процессы (квазистационарный случай) и быстрые процессы («бесконечная проводимость»).

В этих случаях уравнения значительно упрощаются и могут быть решены. Критерием медленных процессов является условие $\frac{s}{t} \ll 1$, а быстрых $\frac{s}{t} \gg 1$.

§ 11. Стационарный случай

Полагая в основной системе уравнений (10.12) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, найдем прежде всего

$$E_{\varphi} = 0; E_z = \text{const} = E_0. \quad (11.1)$$

Система уравнений для стационарного случая принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dH_z}{dr} &= -\frac{4\pi}{c} (\beta - 1) \sigma E \frac{H_z H_z}{H^2}; \\ \frac{1}{r} \frac{d(rH_{\varphi})}{dr} &= \frac{4\pi}{c} \sigma E \left[1 + (\beta - 1) \frac{H_z^2}{H^2} \right]; \\ EH_{\varphi} + \frac{c}{\sigma} \frac{dp}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Для численного интегрирования этих уравнений удобно ввести безразмерные величины, приняв за единицу магнитного поля продольное поле на оси шнура $H_1 = H_z(0)$ и за единицу радиуса величину

$$r_1 = \frac{H_z(0) c}{4\pi \sigma E}. \quad (11.3)$$

Положив

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= H_z(0) u, \\ H_z &= H_z(0) v, \end{aligned} \quad (11.4)$$

приведем два первых уравнения к виду (считаем $\beta = 2$)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= -\frac{uv}{u^2 + v^2}; \\ \frac{1}{x} \frac{d(xu)}{dx} &= 1 + \frac{v^2}{u^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Эти уравнения интегрировались численно при условиях $u(0) = v$; $v(0) = 1$. Распределение давления по сечению получится интегрированием последнего уравнения системы

$$p(x) = p_0 \left(1 - \frac{H_z^2(0)}{4\pi p_0} \int_0^x u(x) dx \right). \quad (11.6)$$

Постоянная интегрирования (давление на оси шнура p_0) определяется из условия обращения в нуль давления на краю шнура: при $x = x_a$ $p(x_a) = 0$

$$p_0 = -\frac{H_z^2(0)}{4\pi} \int_0^{x_a} u(x) dx. \quad (11.7)$$

Графики функций u, v приведены на рис. 6.

Распределение полей по сечению зависит от задаваемого отношения полей на краю шнура $h = \frac{H_z(a)}{H_\varphi(a)} = \frac{u(x_a)}{v(x_a)}$. Радиус

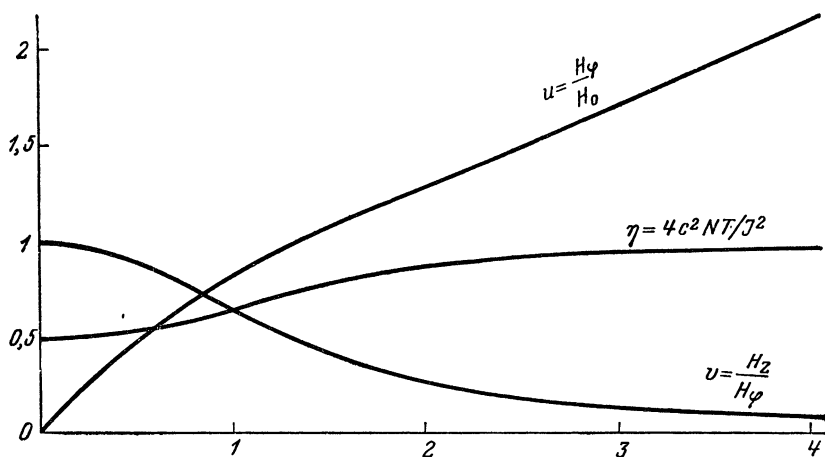


Рис. 6.

шнура x_a в единицах r_1 определяется из графиков по этому отношению. При $h \gg 1$, когда $x_a \ll 1$, продольное поле, как видно из рис. 6, практически постоянно по сечению. При $h < 1$ поле внутри значительно отличается от поля на краю шнура, именно: поле в центре больше, чем поле на краю. Имеем, таким образом, дело со своеобразным эффектом парамагнетизма. Как следует из поведения $v(x)$, этот эффект может быть как угодно велик. Однако, поскольку величина его определяется величиной обоих полей, причем эффект мал, когда $h = \frac{H_z}{H_\varphi} \gg 1$, и велик, когда $h \ll 1$, влияние продольного магнитного поля в стационарном случае на температуру ока-

зывается не очень большим. Для характеристики этого влияния введем коэффициент

$$\eta = \frac{4c^2NT}{\mathcal{J}^2}, \quad (11.8)$$

характеризующий эффективность использования тока для удержания плазмы. При h , меняющемся от 0 до 1, η изменяется в пределах $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$. Используя асимптотическое поведение полей при $x_a > 1$,

$$\begin{aligned} u &\sim x/r, \\ v &\sim 1/x^2, \end{aligned} \quad (11.9)$$

можно в случае $h \ll 1$ выразить продольное магнитное поле в центре $H_z(0)$ через поля $H_z(a)$ и $H_\varphi(a) = \frac{2\mathcal{J}}{ca}$ на краю шнура следующим образом:

$$H_z(0) = \sqrt[3]{H_{za}H_{\varphi a}^2}. \quad (11.10)$$

Из этой формулы видно, что уже при слабом внешнем продольном поле, в центре шнура продольное поле может быть сравнительно велико. Так, например, при $H_{za} = 10 \text{ гс}$, $H_{\varphi a} = 10^4 \text{ гс}$ будет $H_z(0) = 10^3 \text{ гс}$. При сравнимых по величине полях на краю усиление получается значительно меньше, а при $H_{za} \gg H_{\varphi a}$ усиление ничтожно мало.

Если $H_z \gg H_\varphi$, то уравнения (11.2) могут быть легко решены. В этом случае $x \ll 1$, так что приближенно имеем для произвольного β (в обычных единицах)

$$H_\varphi = \frac{4\pi\beta\sigma E}{c} \frac{r}{2} = \frac{4\pi\sigma_{||}E}{c} \frac{r}{2} - \frac{2\mathcal{J}}{ca} \frac{r}{a}; \quad (11.11)$$

$$H_z = H_z(a) \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma a E}{c} \right)^2 \frac{\beta(\beta-1)}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right]; \quad (11.12)$$

$$p = \frac{\pi\beta\sigma^2 a^2 E^2}{c^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) = \frac{(2\mathcal{J}/ca)^2}{8\pi\beta} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (11.13)$$

Коэффициент использования тока получается равным $\eta = \frac{1}{\beta}$.

§ 12. Быстрые процессы

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда $\frac{s}{l} \gg 1$. Как указывалось ранее (см. § 3), этот случай формально соответствует бесконечно большой проводимости $\sigma = \infty$.

При этом в системе координат, движущейся вместе с плазмой, электрическое поле должно отсутствовать, так как любое отличное от нуля поле приводило бы к появлению бесконечно больших токов. Таким образом, можно написать

$$E_z^* = E_z + \frac{v}{c} H_\varphi = 0; \quad (12.1)$$

$$E_\varphi^* = E_\varphi - \frac{v}{c} H_z = 0. \quad (12.2)$$

Исключая электрическое поле E_z и E_φ с помощью уравнений Максвелла

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (12.3)$$

получим для магнитных полей уравнения, имеющие вид уравнений непрерывности

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_z}{r} \right) + \frac{H_\varphi}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0; \quad (12.4)$$

$$\frac{dH_\varphi}{dt} + H_z \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0. \quad (12.5)$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}$ — полная производная по времени. Эти уравнения можно сразу получить из (10.15), если положить там $\sigma = \infty$. При этом анизотропия проводимости перестает играть роль.

Если исключить из этих уравнений скорость с помощью уравнения непрерывности

$$\frac{dn}{dt} + n \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0, \quad (12.6)$$

то получим простые уравнения, связывающие магнитное поле с плотностью плазмы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_\varphi}{rn} \right) = 0; \quad (12.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H_z}{n} \right) = 0. \quad (12.8)$$

Из уравнений (12.7) и (12.8) следует, что магнитный поток через любую площадку, связанную с движущимися частицами, остается неизменным. Магнитные силовые линии как бы «примерзают» к частицам («вмороженное поле»). Уравнения

(12.7) и (12.8) немедленно интегрируются в лагранжевых координатах

$$\frac{H_\varphi}{rn} = \frac{H_\varphi^0}{r_0 n_0} = C_\varphi(r_0); \quad (12.9)$$

$$\frac{H_z}{n} = \frac{H_z^0}{n_0} = C_z(r_0) \quad (12.10)$$

(r_0 — положение частиц; n_0 , H_φ^0 , H_z^0 — плотность и поля в начальный момент времени). Мы видим, таким образом, что распределение полей внутри шнура при быстрых процессах существенным образом определяется начальными условиями.

Уравнения, описывающие шнур в случае быстрых процессов, имеют простое решение, когда в начальный момент продольное поле внутри шнура постоянно, а φ -ое поле равно нулю (полный скин-эффект). Из уравнения равновесия при этом следует, что и плотность в начальный момент постоянна по шнуру. Нетрудно сообразить, как будут изменяться все величины в шнуре с течением времени. Поле H_φ , как это следует из (12.9), останется равным нулю. Плотность и поле H_z останутся постоянными по радиусу шнура, а их величины будут изменяться так, чтобы отношение H_z/n не менялось. При этом тривиальным образом удовлетворяется уравнение равновесия внутри шнура и уравнения (12.9) и (12.10). Итак, внутри шнура

$$n = \frac{N}{\pi a^2}; \quad H_\varphi^{(i)} = 0; \quad H_z^{(i)} = H_z^0 \frac{n}{n_0} = H_z^0 \frac{a}{a^2}. \quad (12.11)$$

Снаружи (на границе шнура) магнитные поля имеют другие значения: $H_\varphi(a) = \frac{2\mathcal{J}}{ca}$; продольное поле снаружи $H_{za}(t)$ определяется создающим его соленоидом и в общем случае не обязано, конечно, совпадать с $H_z^{(i)}$. На границе шнура будут, таким образом, скачки полей и связанные с ними поверхностные токи, а также скачок плотности. Условие скачка можно получить, проинтегрировав уравнение равновесия по тонкому слою на границе шнура. Оно имеет вид

$$\frac{H_\varphi^{(i)2} + H_z^{(i)2}}{8\pi} + 2n(a)T = \frac{H_{\varphi a}^2 + H_{za}^2}{8\pi}. \quad (12.12)$$

В рассматриваемом случае, когда $H_\varphi^{(i)} = 0$, $n = \text{const} = n(a)$, $H_z^{(i)2} = \text{const}$, оно просто совпадает с полученным ранее соотношением (10.17)

$$4c^2 NT = \mathcal{J}^2 + (H_z^2 - \overline{H_z^2}) \frac{a^2 c^2}{4}, \quad (12.13)$$

Здесь $\overline{H_z^2} = H_z^{(i)^2}$, $H_z(t)$ — внешнее магнитное поле [значки (i), (e) будем для краткости опускать].

Уравнение баланса тепла дает связь температуры с радиусом. Пользуясь этой связью и соотношением (12.13), можно выразить температуру, радиус и поле внутри шнура через ток и внешнее магнитное поле.

Так как при быстрых процессах можно пренебречь джоулевым теплом, то усредненное по радиусу тепловое уравнение дает

$$\frac{3}{2} N \frac{dT}{dt} + 2NT \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 0. \quad (12.14)$$

Усреднение выполняется просто, так как плотность постоянна. Таким образом, температура изменяется по адиабате

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} = \frac{n}{n_0} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^2. \quad (12.15)$$

Магнитное поле, испытывающее на краю шнура скачок — «магнитная стенка», сжимает плазму и адиабатически нагревает ее.

Исключив из (12.13) a и $\overline{H_z^2}$ с помощью (12.11) и (12.15), выразим температуру через ток и внешнее поле

$$4c^2NT = \mathcal{J}^2 + \left[H_z^2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} - H_0^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \right] \frac{a_0^2 c^2}{4}, \quad (12.16)$$

где H_0 — поле внутри шнура в начальный момент.

Рассмотрим два частных случая: а) внешнее продольное поле не зависит от времени; б) внешнее продольное поле пропорционально току. Второй случай может, например, осуществляться при условии, если шнур соединен последовательно с соленоидом, создающим продольное поле.

Температура существенно зависит от того, проникло ли продольное поле в шнур в начальный момент, т. е. от величины H_0 . Пусть в начальный момент продольное поле внутри такое же, как и снаружи. Тогда $4c^2NT_0 = \mathcal{J}_0^2$, и (12.16) принимает вид

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}\right)^2 + \left(\frac{H_z}{H_{\varphi_0}}\right)^2 \left[\left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \right]. \quad (12.17)$$

В случае а) $h_0 = \frac{H_z}{H_{\varphi_0}}$ — постоянная величина. С ростом тока температура растет, однако $\frac{T}{T_0} < \left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}\right)^2$ (т. е. $4c^2NT < \mathcal{J}^2$). Если

продольное поле очень велико, то из (12.17) можно получить (при $\mathcal{J}/\mathcal{J}_0 \ll h_0$)

$$T/T_0 = 1 + \frac{(\mathcal{J}/\mathcal{J}_0)^2 - 1}{3h_0^2}. \quad (18)$$

Если в течение всего процесса $\frac{\mathcal{J}/\mathcal{J}_0}{h_0} = \frac{2\mathcal{J}}{ca_0H_z} < 1$, то температура все время остается близкой к своему начальному значению. Радиус шнура при этом почти не меняется. Например, если $H_z = 10^4$, $T_0 = 7$ эв, $a_0 = 10$ см, $\mathcal{J} = 300$ ка, то $T/T_0 = 1,12$; $aa_0 = 0,9$.

При меньшем продольном поле (или большем достигнутом токе), когда $2\mathcal{J}/ca_0H_z > 1$, температура возрастет значительно. При достаточно большом возрастании тока получим из (12.17) (так как последний член растет быстрее, чем T/T_0)

$$T/T_0 = (\mathcal{J}/h_0\mathcal{J}_0)^{4/3} = \left(\frac{2\mathcal{J}}{ca_0H_z}\right)^{4/3}. \quad (12.19)$$

Температура при этом растет пропорционально $\mathcal{J}^{4/3}$, а не \mathcal{J}^2 . Продольное магнитное поле внутри шнура в этом случае много больше, чем снаружи, так как при сжатии шнура оно сильно возрастает. Если при отсутствии H_z максвелловы натяжения φ -го поля $H_\varphi^2/8\pi$ уравнивают давление плазмы (что и дает $\mathcal{J}^2 = 4c^2NT$), то в рассматриваемом случае имеет место почти полное равновесие между давлением $H_z^{(s)2}/8\pi$ и давлением $H_\varphi^2/8\pi$, и лишь небольшая их разница идет на уравнивание давления плазмы. Температура плазмы при этом гораздо меньше, чем $\mathcal{J}^2/4c^2N$.

Остановимся несколько подробнее на механизме нагрева. Его можно рассматривать либо феноменологически — нагрев плазмы происходит в результате сжатия ее под действием давления «магнитной стенки», либо с точки зрения движения отдельных частиц: в нарастающем магнитном поле частицы, вращающиеся по ларморовским кружкам, набирают энергию (так называемый бетатронный нагрев).

При отсутствии продольного поля все давление $\frac{H_\varphi^2}{8\pi}$ идет на сжатие и нагрев газа; при наличии продольного поля внутри шнура большая часть работы сжатия идет на увеличение этого продольного поля и лишь небольшая доля — на нагрев плазмы. Температура определяется условием равновесия магнитных давлений

$$H_\varphi \approx H_z^{(s)} = H_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = H_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}. \quad (12.20)$$

Если выразить здесь H_φ через ток, то получится формула (12. 19).

Соотношение $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{H_\varphi}{H_0}\right)^{2/3} = \left(\frac{H_z^{(i)}}{H_0}\right)^{2/3}$ непосредственно указывает на механизм нагрева — бетатронный нагрев в растущем магнитном поле

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H}. \quad (12. 21)$$

Коэффициент $2/3$ появляется вследствие того, что лишь энергия движения в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю (две степени свободы), увеличивается при нарастании поля. Перекачка энергии в третью степень свободы (движение вдоль поля) происходит посредством столкновений частиц.

Чтобы можно было пользоваться формулой (12. 19) вместо общего выражения (12. 16), должны быть выполнены условия

$$\frac{2\mathcal{J}/ca_0}{H_z} \gg 1 \gg \frac{2\mathcal{J}_0/ca_0}{H_z} \sqrt{\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}}}, \quad (12. 22)$$

При достаточно большом токе эти условия всегда будут выполнены. Если, наоборот, для максимального тока, достигнутого в рассматриваемом процессе, будет справедливо соотношение

$$H_z \ll \frac{2\mathcal{J}_0}{ca_0} \sqrt{\frac{\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}_{\max}}}, \quad (12. 23)$$

то влиянием продольного магнитного поля на величину температуры можно вообще пренебречь. Например, если $\mathcal{J}_0 = 5 \cdot 10^4$ а, $\mathcal{J}_{\max} = 5 \cdot 10^5$ а; $a_0 = 10$ см, то можно пренебречь продольным полем и пользоваться формулой $\mathcal{J}^2 = 4c^2NT$ при $H_z \ll 300$ гс.

Рассмотрим теперь второй случай — внешнее продольное поле нарастает пропорционально току

$$H_z = \frac{4\pi m\mathcal{J}}{c}, \quad (12. 24)$$

где m — число витков соленоида на 1 см. Вместо формулы (12. 16) теперь получим, считая опять, что в начальный момент продольное поле внутри такое же, как и снаружи,

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}\right)^2 + h_0^2 \left[\frac{\mathcal{J}^2}{\mathcal{J}_0^2} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2} - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \right], \quad (12. 25)$$

где

$$h_0 = \frac{H_{z0}}{2\mathcal{J}_0/ca_0} = 2\pi ma_0. \quad (12.26)$$

Здесь опять возможны три предельных случая: если $h_0^2 \gg \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}$, то $T/T_0 = (\mathcal{J}/\mathcal{J}_0)^{2/3}$, — это бетатронный нагрев в продольном поле, создаваемом катушкой; если, наоборот, $h_0^2 \ll \mathcal{J}_0/\mathcal{J}$, то $\mathcal{J}^2 = 4c^2NT$. В наиболее интересном случае, при

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}_0 \gg h_0^2 \gg \mathcal{J}_0/\mathcal{J}, \quad (12.27)$$

температура определяется формулой

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\mathcal{J}}{h_0\mathcal{J}_0} \right)^{4/3}. \quad (12.28)$$

Физическая картина здесь такая же, как и в соответствующем случае при постоянном внешнем поле [см. формулу (12, 19)], т. е. «вмороженное» продольное поле внутри шнура возрастает до тех пор, пока не сравняется с полем тока. Оно при этом обгоняет внешнее продольное поле, так что последнее становится уже совершенно несущественным. Это иллюстрируется табл. 1, где для $h_0 = 1$ приведены значения $(\mathcal{J}/\mathcal{J}_0)^2$, которые требуются для получения одних и тех же значений T/T_0 для случаев, когда внешнее продольное поле постоянно или пропорционально току.

Т а б л и ц а 1

T/T_0	1	1,5	2	4	9	16
$H_z = \text{const } (\mathcal{J}/\mathcal{J}_0)^2$	1	2,8	4,25	12	36	80
$H_z = \text{const } \mathcal{J} (\mathcal{J}/\mathcal{J}_0)^2$	1	2,2	3,5	11	35	80

Табл. 1 показывает также, насколько сильно наличие «вмороженного поля» ухудшает условия нагрева плазмы. Так, при

$$(\mathcal{J}/\mathcal{J}_0)^2 = 80 \quad \eta = \frac{4c^2NT}{\mathcal{J}^2} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}.$$

Наиболее благоприятные условия нагрева будут в том случае, если вначале продольное поле не проникло внутрь шнура, например, если на начальной стадии продольное поле вообще отсутствует, и оно создается соленоидом, начиная

с того момента, когда плазма уже имеет высокую проводимость. В этом случае продольное поле внутри шнура будет и в дальнейшем равно нулю. Температура плазмы при этом определяется выражением

$$4c^2 NT = \mathcal{J}^2 + H_z^2 \frac{a_0^2 c^2}{4} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2} = \mathcal{J}^2 \left(1 + \frac{H_z^2(t)}{(2\mathcal{J}/ca)^2} \right). \quad (12.29)$$

Полученные выше результаты, в частности выражение (12.16) для температуры, строго верны лишь при специальных начальных условиях: φ -ое поле внутри шнура отсутствует, а продольное поле постоянно по радиусу. В общем случае можно ожидать, что эти результаты будут справедливы приближенно. Для получения точных результатов надо решить систему уравнений для быстрых процессов с конкретными начальными условиями. Удобно записать эти уравнения в лагранжевых координатах, так как, пользуясь интегралами (12.9) и (12.10), можно выразить магнитные поля в шнуре через плотность. Система уравнений имеет вид

$$2q \frac{H_{\varphi 0}^2}{r_0} + \frac{\partial}{\partial r_0} \left[q^2 \left(H_{z0} + \frac{r^2}{r_0^2} H_{\varphi 0}^2 \right) + 16\pi T n_0 q \right] = 0;$$

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{1}{q} \frac{r_0}{r}; \quad (12.30)$$

$$T = T_0 \exp \left\{ \frac{2}{3N} \int_0^a \ln q \cdot n_0 2\pi r_0 dr_0 \right\}.$$

Здесь $q = n/n_0$ — относительное уплотнение. Первое уравнение получено исключением магнитного поля H_z и H_{φ} из уравнения равновесия, второе есть уравнение непрерывности. Третье уравнение представляет собой соотношение, аналогичное адиабате; оно получается из энергетического уравнения, если пренебречь джоулевым теплом и потерями. Если шнур сжимается равномерно, т. е. $q = \frac{n}{n_0}$ не зависит от радиуса, а есть лишь функция времени, то это уравнение принимает вид $T/T_0 = q^{2/3} = (n/n_0)^{2/3}$ — адиабата. Если же сжатие происходит неравномерно, например относительное сжатие края больше, чем середины, то различные части шнура будут по-разному нагреваться от сжатия — край шнура будет нагреваться сильнее; но так как теплопроводность плазмы велика, то возникнут потоки тепла, и температура будет выравниваться. Наличие этих потоков приводит к тому, что адиабатическое соотношение $T/n^{2/3} = \text{const}$ не выполняется в каждой точке, а вместо этого получается аналогичное соотношение,

усредненное по радиусу. Оно дает связь температуры с радиусом в виде $T/T_0 = (a_0/a)^{1/2} \gamma$, где γ — коэффициент порядка единицы, зависящий от формы распределения плотности по радиусу в данный момент времени и в начальный момент. Например, если в начальный момент плотность распределена по параболе, а в рассматриваемый момент — постоянна по сечению, то $\gamma = \sqrt[3]{\frac{e}{4}} = 0,88$. Аналогичные коэффициенты порядка единицы должны появиться в тех членах формулы для температуры, которые были получены с помощью соотношений (12. 11) (члены в квадратных скобках).

§ 13. Автономные решения *

Уравнения, описывающие плазменный шнур при наличии продольного поля, допускают автономные решения (сравни § 8), в которых форма распределения всех величин по радиусу шнура остается со временем неизменной, а изменяются лишь масштабы. Введем в качестве новой единицы длины величину $r_1(t)$ и перейдем от переменных t, r к переменным $t, x = r/r_1(t)$. Автономность решения означает, что переменные t, x разделяются. Из уравнения непрерывности при этом следует, что скорость пропорциональна радиусу

$$v = v_1(t) x = \frac{a}{a} r = \frac{\dot{r}_1}{r_1} r. \quad (13. 1)$$

Отношение $x = a/r_1$ для разделения должно быть, конечно, постоянным. Поля H_z и H_φ должны со временем изменяться одинаково, так что $H_z \sim H_\varphi \sim \mathcal{J}/a$. Температура в автономном режиме должна быть пропорциональна $\mathcal{J}^2 \sim H^2 a^2$. Автономные решения с продольным полем представляют более специальный случай, чем без поля, так как в этом случае, кроме определенного хода тока во времени, требуется также вполне определенный закон изменения внешнего продольного поля. Сделаем замену переменных $t, r \rightarrow t, x$ в уравнениях (10. 12) и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} H_{\varphi, z} &= H_1(t) H_{\varphi, z}(x); \quad E_{\varphi, z}^* = E_1(t) E_{\varphi, z}(x); \\ p(r, t) &= p(x) H_1^2/4\pi. \end{aligned} \quad (13. 2)$$

* Этот параграф переработан при подготовке к печати.

Величины H_1 , E_1 примем за единицы измерения, так что $H(x)$, $E(x)$ — безразмерные функции. Переменные разделяются, если выполнены условия

$$E_1 = \frac{cH_1}{4\pi\sigma r_1}, \quad (13.3)$$

$$v = \frac{4\pi\sigma r_1^2}{c^2} \frac{1}{H_1 a} \frac{d(H_1 a)}{dt} = \text{const};$$

$$v' = \frac{4\pi\sigma r_1^2}{c^2} \frac{1}{H_1 a^2} \frac{d(H_1 a^2)}{dt} = \text{const}. \quad (13.4)$$

Условия (13.4) вместе с условием $H_1 \sim \mathcal{J}/a$ дают

$$a = \text{const} \mathcal{J}^{\frac{v'}{v} - 1}.$$

Если еще воспользоваться $\sigma \sim T^{3/2} \sim \mathcal{J}^3$, то получим, что ток должен изменяться со временем по степенному закону, а величина s должна быть линейной функцией времени ($ds/dt = \text{const}$):

$$s = \frac{\pi a^2 \sigma}{c} = s_0 + \frac{ds}{dt} \cdot t. \quad (13.5)$$

Выберем единицу длины r_1 следующим образом:

$$r_1^2 = \frac{a^2}{4ds/dt}; \quad (13.6)$$

тогда получим степенные законы изменения всех величин со временем

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}_0 \left(\frac{s}{s_0}\right)^v; & E &= E_0 \left(\frac{s}{s_0}\right)^{v-1}; & a &= a_0 \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\frac{1-3v}{2}}; \\ H &= H_0 \frac{s^{\frac{5v-1}{2}}}{s_0^{\frac{5v-1}{2}}} \end{aligned} \quad (13.7)$$

и соотношение $v' = \frac{1-v}{2}$.

Уравнения (10.12) принимают вид

$$\frac{d(xH_z)}{x dx} = E_z + (\beta - 1) \frac{H_z}{H_\varphi^2 + H_z^2} (E_\varphi H_\varphi + E_z H_z); \quad (13.8a)$$

$$- \frac{dH_z}{dx} = E_\varphi + (\beta - 1) \frac{H_\varphi}{H_\varphi^2 + H_z^2} (E_\varphi H_\varphi + E_z H_z); \quad (13.8b)$$

$$\frac{dE_z}{dx} = \nu H_\varphi; \quad (13.8\text{в})$$

$$-\frac{d(xE_z)}{x dx} = \frac{1-\nu}{2} H_z; \quad (13.8\text{г})$$

$$\frac{dp(x)}{dx} + \frac{H_z}{x} \frac{d(H_z x)}{dx} + H_z \frac{dH_z}{dx} = 0. \quad (13.9)$$

Величина ds/dt определяется уравнением баланса тепла (сравни § 4). В отсутствие потерь [см. (4.7) и (10.14)]

$$\frac{2NT}{s} \frac{ds}{dt} = Q_{\text{дж}} = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 s} f, \quad (13.10)$$

где при наличии продольного поля f имеет вид (в безразмерных переменных)

$$f = \frac{1}{4H_\varphi^2(x_a)\beta} \int_0^{x_a} \left(\frac{d(xH_z)}{x dx} \right)^2 + \left(\frac{dH_z}{dx} \right)^2 + \frac{\beta-1}{H^2} \left(H_\varphi \frac{d(xH_\varphi)}{x dx} + H_z \frac{dH_z}{dx} \right)^2 2x dx. \quad (13.11)$$

Воспользовавшись уравнением (12, 13), получим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2f}{\eta}, \quad (13.12)$$

где

$$\eta = \frac{4c^2 NT}{\mathcal{J}^2} = 1 + \frac{1}{H_\varphi^2(x_a)} \left\{ H_z^2(x_a) - \frac{1}{x_0^2} \int_0^{x_a} H_z^2(x) 2x dx \right\}. \quad (13.13)$$

В автомодельном режиме f и η постоянны, так что условие (13.5) согласуется с уравнением нагрева. Именно это обстоятельство, связанное в конечном счете с тем, что электропроводность $\sigma \sim T^{3/2}$, и приводит в данном случае к существованию автомодельных решений.

Уравнения (13.8) интегрировались численно (при $\beta=2$) для $\nu=1/3$, что соответствует $\mathcal{J} \sim t^{1/3}$, $H \sim t^{1/3}$, $a = \text{const}$, и для $\nu=1$, что соответствует $\mathcal{J} \sim t$, $H \sim t^{-2}$, $a \sim t^{-1}$. Единица измерения магнитного поля $H_1(t)$ оставалась до сих пор произвольной. Для численного интегрирования удобно принять за H_1 продольное поле на оси шнура $H_1 = H_z(t; r=0)$. Граничные условия принимают вид при $x=0$

$$H_\varphi = 0, \quad H_z = 1, \quad E_\varphi = 0, \quad E_z = E_0. \quad (13.14)$$

Интегрировать следует до края шнура $x = x_a = \frac{a}{r_1}$, опреде-

ляемого, согласно (13.6), (13.12), условием

$$x_a^2 = \frac{a^2}{r_1^2} = \frac{8f}{\eta}. \quad (13.15)$$

Каждому значению параметра E_0 соответствует определенное отношение полей на краю шнура $h = H_z(x_a)/H_\varphi(x_a)$. Результаты численного интегрирования приведены на рис. 7, 8а и 8б и в табл. 2. Если имеются потери тепла из шнура, составляющие некоторую постоянную долю от $Q_{\text{дж}}$, то величина f соответствующим образом уменьшится, так что точка x_a , соответствующая на графике краю шнура, сдвинется влево

Т а б л и ц а 2

	$\nu = 1/2$			$\nu = 1$	
E_0	0,2	0,3	0,75	0,2	0,3
h	3,66	1,89	0,408	0,197	0,099
η	2,63	1,53	0,98	0,86	0,93
f	0,69	0,68	0,83	1,23	1,15
x_a	1,45	1,89	2,60	2,925	2,94

Уравнения (13.8) легко интегрируются, если отсутствует анизотропия проводимости ($\beta = 1$). В этом случае получается (в обычных единицах):

$$H_\varphi = \frac{2\mathcal{J}}{ca} \frac{I_1(\sqrt{\nu}x)}{I_1(\sqrt{\nu}x_a)}; \quad H_z = H_z(a) \frac{I_0(\sqrt{\nu}x)}{I_0(\sqrt{\nu}x_a)}; \quad (13.16)$$

$$p = \frac{(2\mathcal{J}/ca)^2}{8\pi} \eta \left\{ \frac{I_0^2(\sqrt{\nu}x_a) - I_0^2(\sqrt{\nu}x)}{I_1^2(\sqrt{\nu}x_a)} + \right. \\ \left. + h^2 \frac{I_0^2(\sqrt{\nu}x_a) - I_0^2(\sqrt{\nu}x)}{I_1^2(\sqrt{\nu}x_a)} \right\}, \quad (13.17)$$

$$x = \frac{r}{a}; \quad \nu = \frac{1-\nu}{2}.$$

При этом

$$\eta = 1 + h^2 \frac{I_1^2(\sqrt{\nu}x_a)}{I_0^2(\sqrt{\nu}x_a)}; \quad (13.18)$$

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\nu x_a^2}{I_1^2(\sqrt{\nu}x_a)} [I_0^2(\sqrt{\nu}x_a) - I_1^2(\sqrt{\nu}x_0)] + \right. \\ \left. + h^2 \frac{\nu^2 x_a^2}{I_0^2(\sqrt{\nu}x_a)} [I_1^2(\sqrt{\nu}x_a) - I_0(\sqrt{\nu}x_a) I_2(\sqrt{\nu}x_a)] \right\}. \quad (13.19)$$

Значение x_a определяется по (13.15) с помощью (13.18) и (13.19). На рис. 9 показана зависимость $\sqrt{\nu} x_a$ от h , для $\nu = 1/3$ и 1.

Анизотропия проводимости приводит к увеличению продольного поля внутри шнура, конкурирующему со скин-эффектом.

С учетом анизотропии проводимости можно получить простые аналитические решения для случая, когда продольное магнитное поле велико по сравнению с полем тока шнура $h = H_z/H_\varphi \gg 1$.

В этих автомодельных решениях силы сжатия, создаваемые обоими полями, примерно одного порядка величины; поэтому изменение продольного магнитного поля по сечению шнура мало: $H_\varphi^2/H_z = H_\varphi/h$, так что в первом приближении $H_z \approx 1$. Плотность азимутального тока много меньше, чем осевого $j_\varphi \ll j_z$. Уравнения (13.8а, в) при $H_\varphi/H_z \ll 1$ принимают вид

$$\frac{d(xH_\varphi)}{xdx} = \beta E_z; \quad (13.20a)$$

$$-\frac{dH_z}{dx} = E_\varphi + (\beta - 1)H_\varphi E_z. \quad (13.20б)$$

Интегрируя (13.20а) и (13.8в), получим

$$H_\varphi = \left(\frac{\beta}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} E_0 I_1(\sqrt{\beta\nu} x);$$

$$E_z = E_0 I_0(\sqrt{\beta\nu} x). \quad (13.24)$$

На краю шнура $h = H_z/H_\varphi \approx 1/H_\varphi(x_a)$, так что

$$E_0 = \frac{1}{h \sqrt{\beta/\nu} I_1(\sqrt{\beta\nu} x_a)}.$$

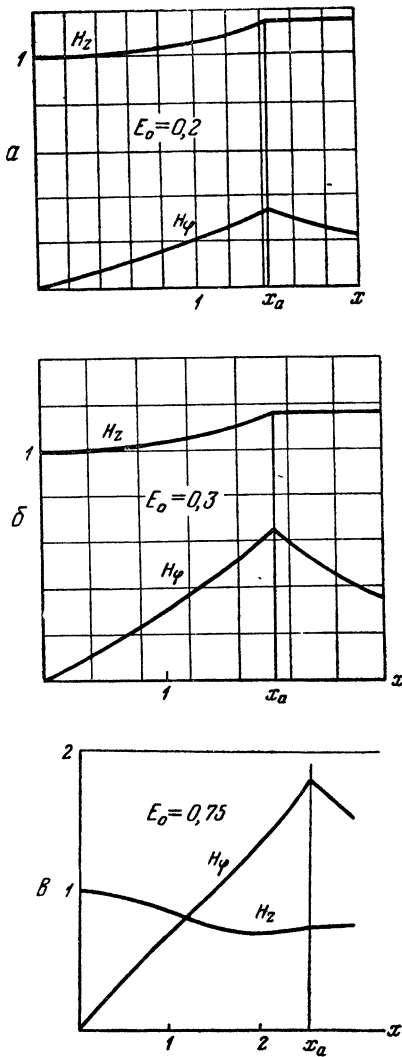


Рис. 7.

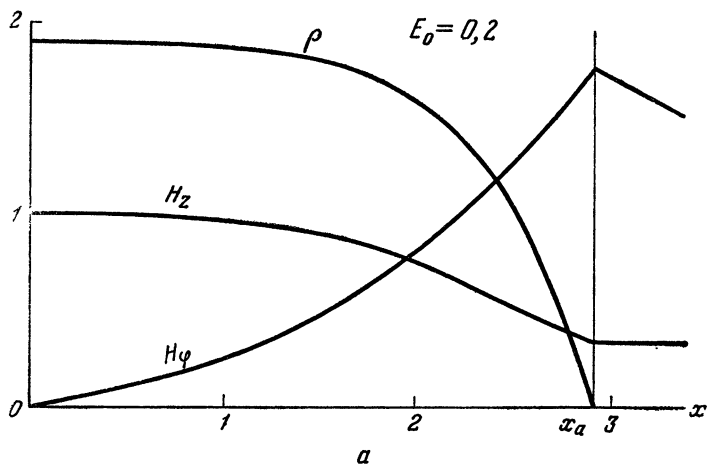


Рис. 8а.

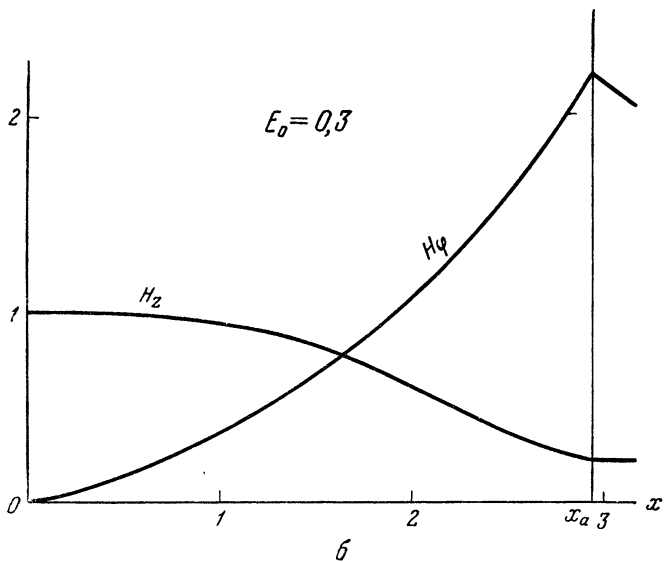


Рис. 8б.

Решение системы (13. 8) принимает вид

$$E_z = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu'}{\beta}} \frac{I_0(\sqrt{\beta\nu} x)}{I_1(\sqrt{\beta\nu} x_a)}; \quad E_\varphi = -\frac{1-\nu}{4} x; \quad (13. 22)$$

$$H_z = H_z(x_a) \frac{I_1(\sqrt{\beta\nu} x)}{I_1(\sqrt{\beta\nu} x_a)}; \quad H_\varphi(x_a) = \frac{1}{h}; \quad (13. 23)$$

$$\Delta H_z = H_z - H(x_a) = \frac{1-\nu}{8} (x^2 - x_a^2) + \frac{\beta-1}{2\beta h^2} \frac{I_0^2(\sqrt{\beta\nu} x_a) - I_0^2(\sqrt{\beta\nu} x)}{I_1^2(\sqrt{\beta\nu} x_a)}. \quad (13. 24)$$

Давление, согласно (13. 9), равно

$$p(x) = \frac{H_\varphi^2(x_a)}{2\beta} \frac{I_0^2(\sqrt{\beta\nu} x_a) - I_0^2(\sqrt{\beta\nu} x)}{I_1^2(\sqrt{\beta\nu} x_a)} + \frac{1-\nu}{8} (x_a^2 - x^2). \quad (13. 25)$$

Выражение для η отличается от соответствующего стационарного наличием члена, учитывающего «диа- (или «пара-) магнитный эффект», связанный с изменением потока продольного магнитного поля со временем,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\beta} + \frac{(1-\nu) h^2 x_a^2}{8} = \\ &= \frac{1}{\beta} + \frac{1}{Ha^2} \frac{d(Ha^2)}{dt} \frac{h^2 x_a^2}{4}. \end{aligned} \quad (13. 26)$$

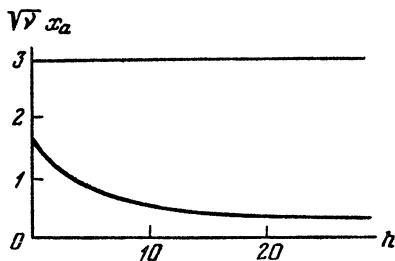


Рис. 9.

Джоулево тепло выделяется в основном осевым током, поэтому коэффициент f имеет такой же вид, как и без продольного поля [сравни (8. 7)], с поправкой на продольную проводимость

$$f = \frac{\nu x_a^2}{4} \frac{I_0^2(\sqrt{\beta\nu} x_a) - I_1^2(\sqrt{\beta\nu} x_a)}{I_1^2(\sqrt{\beta\nu} x_a)}. \quad (13. 27)$$

Значение x_a определяется из соотношения (13. 15), принимающего вид

$$\frac{x_a^2}{\beta} + \frac{(1-\nu) h^2 x_a^4}{8} = 8f, \quad (13. 28)$$

На рис. 10 представлены графики $x_a(h)$ для различных значений ν при $\beta = 2$.

Условием применимости полученного приближенного решения является $|\Delta H_z| = |H_z - 1| \ll 1$. Из (13.24) видно, что

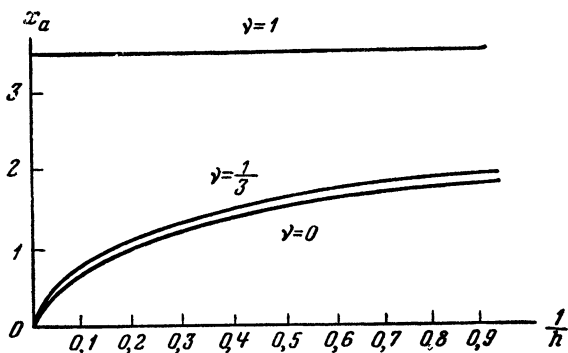


Рис. 10.

для этого должно быть $(1 - \nu) x_{a1}^2/8 \ll 1$ и $h^2 \gg 1$. Первое из этих условий, как видно из (13.28), автоматически удовлетворяется при $h^2 \gg 1$.

§ 14. Шнур, создаваемый продольным магнитным полем

В предыдущих параграфах рассматривался плазменный шнур, по которому течет ток, при наличии внешнего продольного магнитного поля. В самом шнуре отличны от нуля компоненты полей H_z , H_r , E_r , E_φ , E_z . Частный случай, когда продольного магнитного поля нет, рассматривался в главе I. В настоящем параграфе, наоборот, рассматривается случай, когда вдоль шнура не течет ток $\mathcal{J} = 0$, так что из компонент полей отличны от нуля H_z , E_r , E_φ ($H_\varphi = E_z = 0$). При нарастании внешнего магнитного поля со временем создающееся вихревое электрическое поле имеет такой знак, что дрейф частиц в этих полях направлен к оси, так что при этом возможно стягивание плазмы и образование шнура. Получать результаты, соответствующие этому случаю, из общих формул (при $h \rightarrow \infty$) неудобно, поэтому рассмотрим этот случай отдельно. При этом оказывается возможным получить весьма общие результаты относительно нагрева плазмы.

Система уравнений (10.12) для шнура, создаваемого продольным магнитным полем, принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} \sigma \left(E - \frac{v}{c} H_\varphi \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (rE)}{\partial r} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rnv)}{\partial r} &= 0; \\ 2T \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Здесь $H = H_z$, $E = E_\varphi$ — значки для краткости опущены. Исключив из двух первых уравнений электрическое поле, получим для магнитного поля уравнение диффузии с конвекцией

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rvH)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right). \quad (14.2)$$

Уравнение равновесия сразу интегрируется

$$2nT + \frac{H^2}{2\pi} = \frac{H_a^2}{8\pi}, \quad (14.3)$$

где H_a — магнитное поле на краю шнура (внешнее поле). Проинтегрировав уравнение (14.3) по сечению шнура, получим для температуры плазмы выражение [ср. (10.17)]

$$T = \frac{(H_a^2 - \overline{H^2}) a^2}{16N}, \quad (14.4)$$

или

$$T = \frac{H_a^2 a^2}{16N} (1 - \overline{z^2}), \quad (14.5)$$

где $z = H/H_a$. Черта означает усреднение по сечению шнура.

Уравнение баланса энергии удобнее получить из закона сохранения энергии для частиц и поля (10.13)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(3nT + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} r \left\{ q + 5nTv + \frac{c}{4\pi} EH \right\} = 0. \quad (14.6)$$

Здесь первый член есть изменение полной энергии, а второй — дивергенция потока энергии, состоящего из потока энергии частиц и потока энергии поля (вектор Пойнтинга).

Интегрируя (14.6) по сечению шнура, пользуясь при этом уравнением равновесия (14.3), получим

$$\frac{d(NT)}{dt} + \frac{\pi a^2}{8\pi} \frac{d(H^2 a^2)}{dt} + 2\pi a \cdot \frac{c}{4\pi} \cdot E_a H_a = 0. \quad (14.7)$$

Предположено, что шнур оторван от стенки, и потерь тепла из него нет. Электрическое поле на краю шнура можно выразить с помощью второго уравнения системы (14.1)

$$E_a = -\frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} r dr = -\frac{1}{ca} \frac{d}{dt} \left(\frac{\overline{H} a^2}{2} \right) + \frac{H}{c} \frac{da}{dt}.$$

Объединяя оба последних члена в (14. 7), получим

$$\frac{\pi a^2}{8\pi} \frac{d(H^2 a^2)}{dt} + 2\pi a \frac{c}{4\pi} E_a H_a = \frac{H_a}{4} \frac{d}{dt} [(H_a - \bar{H}) a^2],$$

так что (14. 7) принимает вид

$$N \frac{dT}{dt} + \frac{H_a}{4} \frac{d}{dt} [H_a a^2 (1 - \bar{z})] = 0. \quad (14. 8)$$

Можно представить уравнение баланса еще в одном виде, наглядно показывающем механизм нагрева плазмы. Если в правую часть уравнения баланса тепла (10. 13) подставить выражение для тока, получающееся из уравнения равновесия

$$j_\varphi = \frac{2c}{H} \frac{\partial(nT)}{\partial r}, \quad (14. 9)$$

то после несложных преобразований, заключающихся в интегрировании по частям и некоторой перегруппировке членов, получим

$$3N \frac{dT}{dt} = \int_0^a 2nT \left(\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{cE}{H^2} \frac{\partial H}{\partial r} \right) 2\pi r dr. \quad (14. 10)$$

Здесь первый член справа дает «бетатронный нагрев», а второй — работу вихревого электрического поля на «магнитном дрейфе» частиц.

Внешнее магнитное поле H_a больше, чем поле внутри шнура, так как часть внешнего поля экранируется токами в плазме. Уравнение (14. 4) показывает, что при полной экранировке (когда $\bar{H}^2 = 0$) $16NT = H_a^2 a^2$, вообще же $16NT \leq \leq H_a^2 a^2$. Уравнения (14. 1) можно просто решить в случаях, когда: а) внешнее поле достаточно велико, так что экранировка мала; б) при полной экранировке.

В первом случае $1 - z \ll 1$, во втором $z \ll 1$. Случай а) может иметь место как при быстрых процессах, так и при медленных; случай б) может осуществляться только при быстрых процессах $t/s \ll 1$. Если, например, в некоторый начальный момент в трубе имеется плазма и затем достаточно быстро, за время $t \ll s$, наращивается магнитное поле, то оно не успевает продиффундировать внутрь шнура. В результате, если поле внутри плазмы равно нулю в начальный момент, то оно останется равным нулю и в дальнейшем.

В случае а) можно считать магнитное поле внутри шнура приблизительно постоянным и равным внешнему. Электрическое поле при этом сразу находится

$$E = - \frac{\dot{H}r}{2c}. \quad (14. 11)$$

Пользуясь первым и последним уравнениями системы (14. 1), получим обычное выражение для скорости плазмы [ср. (10. 14)]

$$v = c \frac{E}{H} - \frac{2c^2 T}{\pi H^2} \frac{\partial n}{\partial r}. \quad (14. 12)$$

Здесь первый член справа пропорционален радиусу. Очевидно, что, приняв для плотности выражение

$$n = \frac{2N}{\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (14. 13)$$

мы сможем удовлетворить уравнению непрерывности, так как тогда оба члена в (14. 12) пропорциональны радиусу $v = \frac{\dot{a}}{a} r$, и плотность изменяется автомодельным образом. Изменение радиуса шнура со временем определяется уравнением

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2H} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{8NT}{H^2 a^2} \frac{a}{s}. \quad (14. 14)$$

В уравнении (14. 10) можно опустить второй член, оставив лишь член, дающий бетатронный нагрев, так что после интегрирования получаем для температуры

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{2/3}. \quad (14. 15)$$

Подставив (14. 15) в (14. 14), можно, проинтегрировав, найти радиус шнура

$$a^4 = a_0^4 \frac{1 + \frac{8NT_0}{H_0^2 a_0^2} \frac{4}{s_0} \int_0^t \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/3} dt}{(H/H_0)^2}. \quad (14. 16)$$

Интересно проследить, как изменяется время магнитной диффузии s . Эта величина должна монотонно возрастать, так как она связана с энтропией. Действительно, так как $s \sim a^2 T^{3/2}$, то, вследствие (14. 15) $\frac{s}{s_0} = \frac{a^2 H}{a_0^2 H_0}$ и пользуясь (14. 23),

получаем

$$\frac{s^2}{s_0^2} = 1 + \frac{8NT_0}{H_0^2 a_0^2} \frac{4}{s_0} \int_0^t \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/3} dt. \quad (14. 17)$$

При быстрых процессах ($t \ll s_0$) изменение s мало, при медленных процессах s может значительно изменяться, однако

$s \ll t$. Нетрудно убедиться, что относительная величина экранировки со временем уменьшается. Действительно,

$$\frac{16NT}{H^2 a^2} = \frac{16NT_0}{H_0^2 a_0^2} \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/2} \frac{H_0 a_0^2}{H a^2},$$

и так как $H a^2$ монотонно растет, то при нарастании магнитного поля это отношение падает. Таким образом, если в начальный момент экранировка мала, то она останется малой и в дальнейшем.

Во втором случае (полная экранировка) магнитное поле внутри шнура отсутствует, на краю оно скачком возрастает до величины H_a («магнитная стенка»); экранирующий ток течет по поверхности шнура. Очевидно, что плотность плазмы при этом постоянна по сечению шнура и равна $n = \frac{N}{\pi a^2}$. Температура плазмы и радиус шнура находятся из уравнений (14.5) и (14.8), где надо положить $\bar{z} = \bar{z}^2 = 0$. Подставив (14.5) в (14.8), получим

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{4}{5} \frac{1}{H_a} \frac{dH_a}{dt}, \quad (14.18)$$

или

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{4/5}. \quad (14.19)$$

Подставив (14.19) в (14.5), найдем радиус

$$a^2 = \frac{16NT_0}{H_0^5 H^{6/5}}. \quad (14.20)$$

Связь радиуса с температурой, как и следовало ожидать, адиабатическая

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{3/5} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/4}. \quad (14.21)$$

Рассмотрим теперь нагрев в общем случае, когда экранировка имеет произвольную величину. В формулах (14.5) и (14.8), определяющих нагрев и изменение радиуса, содержатся величины $1 - \bar{z}$ и $1 - \bar{z}^2$, которые можно найти, лишь решив задачу о распределении поля по радиусу шнура. Можно, однако, всегда написать

$$1 - \bar{z}^2 = (1 - \bar{z})(1 + \bar{z}), \quad (14.22)$$

где $0 < \bar{z} < 1$; \bar{z} — некоторое промежуточное значение z . Исключив затем из (14.8) радиус с помощью (14.5), получим

$$\frac{dT}{dt} = -4H \frac{d}{dt} \left[\frac{T}{H(1+z)} \right],$$

или

$$\frac{5+z}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{4}{H(1+\bar{z})} \frac{d}{dt} [H(1+\bar{z})]. \quad (14.23)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{T}{T_0} = \left[\frac{H(1+\bar{z})}{H_0(1+\bar{z}_0)} \right]^{5+\bar{z}}. \quad (14.24)$$

Здесь интегрирование левой части (14.23) произведено формально, так что \bar{z} есть некоторое промежуточное значение величины z . Полученная формула содержит неопределенные величины \bar{z} , \bar{z}_0 , \bar{z} , однако неопределенность результата не особенно велика. С неопределенностью порядка двойки можно пользоваться формулой

$$\frac{T}{T_0} \approx \left(\frac{H}{H_0} \right)^{5+\bar{z}} \approx \left(\frac{H}{H_0} \right)^{0,73}. \quad (14.25)$$

Эта формула дает результат, промежуточный по сравнению с формулами (14.15) и (14.19), причем отличие от них обеих невелико.

Для оценки температуры, до которой можно нагреть плазму в нарастающем продольном поле, необходимо знать T_0 и H_0 . Мы примем $T_0 = 7$ эв. Значение H_0 лимитируется при быстрых процессах условием

$$H_0^2 \geq \frac{16NT_0}{a_0^2}, \quad (14.26)$$

а при медленных процессах H_0 лимитируется условием отрыва от стенки — дрейф к центру должен быть больше диффузии наружу [см. (14.14)]

$$H_0 \geq \frac{16NT_0}{a_0^2 \dot{H} s_0}. \quad (14.27)$$

Для H_0 надо брать наибольшее из значений (14.26) и (14.27). Пусть, например, максимальное поле $H = 5 \cdot 10^4$ гс, $N = 10^{16}$, $a_0 = 10$ см, $T_0 = 7$ эв и пусть поле нарастает быстро, так что (14.27) не лимитирует. Тогда, пользуясь формулой (14.19) и подставив $H_0 = \sqrt{16NT_0/a_0} = 130$ гс, получим $T = T_0 \left(\frac{5 \cdot 10^4}{130} \right)^{4/5} =$

≈ 1270 эв. Для того чтобы выполнялось условие (14.27), необходимо $\dot{H} > 3 \cdot 10^6$ гс/сек.

Получение высоких температур в шнуре, создаваемом продольным полем, требует значительно больших энергий, чем в случае шнура с током. Это связано с тем, что продольное магнитное поле приходится создавать во всем объеме катушки (соленоида), тогда как при нагреве током магнитное поле эффективно создается в объеме, лишь в несколько раз превосходящем объем, занимаемый шнуром $(\pi a^2 \cdot 2l \ln \frac{b}{a})$. При быстрых процессах, когда нагрев шнура связан с сильным его сжатием, энергия, необходимая на создание продольного поля, во много раз больше, чем энергия поля тока

$$\frac{W_z}{W_\varphi} \approx \frac{b^2}{a^2 2 \ln \frac{b}{a}} \gg 1.$$

При медленных процессах нагрев в продольном магнитном поле меньше, чем при быстрых [ср. формулы (14.15) и (14.19)]. При нагреве током получение высокой температуры требует при медленных процессах несколько меньшей энергии, чем при быстрых (пока не начнут сказываться потери), так как при медленном процессе шнур слабее сжимается, и его самоиндукция меньше.

Остановимся еще вкратце на условиях безотрывности в шнуре, создаваемом продольным полем. Уравнение (9.10)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = - \frac{\vartheta - \vartheta^*}{\tau^*}, \quad (14.28)$$

где

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{2}{3} \frac{Q_{\text{дж}}}{N(T_e + T_i)} + \frac{16}{3} \frac{\Pi}{s}, \quad (14.29)$$

$$\vartheta^* = \left(1 + \frac{s}{8\mu N(T_e + T_i)} \right)^{-1}, \quad (14.30)$$

верно и в этом случае. Джоулево тепло, выделяющееся в шнуре при быстром процессе с полным скин-эффектом, можно оценить следующим образом:

$$Q_{\text{дж}} = \int \frac{l^2}{\sigma} 2\pi dr \sim \frac{l^2}{\sigma} 2\pi a \delta \sim \left(\frac{cH}{4\pi\delta} \right)^2 \frac{2\pi a \delta}{\sigma}.$$

Учитывая, что толщина скин-слоя имеет порядок

$$\delta \sim a \sqrt{\frac{t}{s}},$$

получаем

$$Q_{\text{дж}} \sim \frac{H^2 a^2}{\sqrt{ts}} = \frac{8N(T_e + T_i)}{\sqrt{ts}}. \quad (14.31)$$

Условие $\tau^* \ll t$ приводит к требованию

$$\Pi \gg \frac{3}{16} \frac{s}{t}, \quad (14.32)$$

а условие $|1 - \vartheta^*| \ll 1$ — к требованию

$$\Pi \gg \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{t}}. \quad (14.33)$$

Оба эти условия такие же, как и в случае обычного токопроводящего шнура.

При медленных процессах, когда шнур нагревается в основном за счет джоулевского тепла,

$$Q_{\text{дж}} \approx \frac{2N(T_e + T_i)}{t}. \quad (14.34)$$

Условие $\tau^* \ll t$ опять приводит к требованию (14.32), которое в этом случае может быть удовлетворено даже при малых Π . Условие $|1 - \vartheta^*| \ll 1$ приводит к еще более слабому условию.

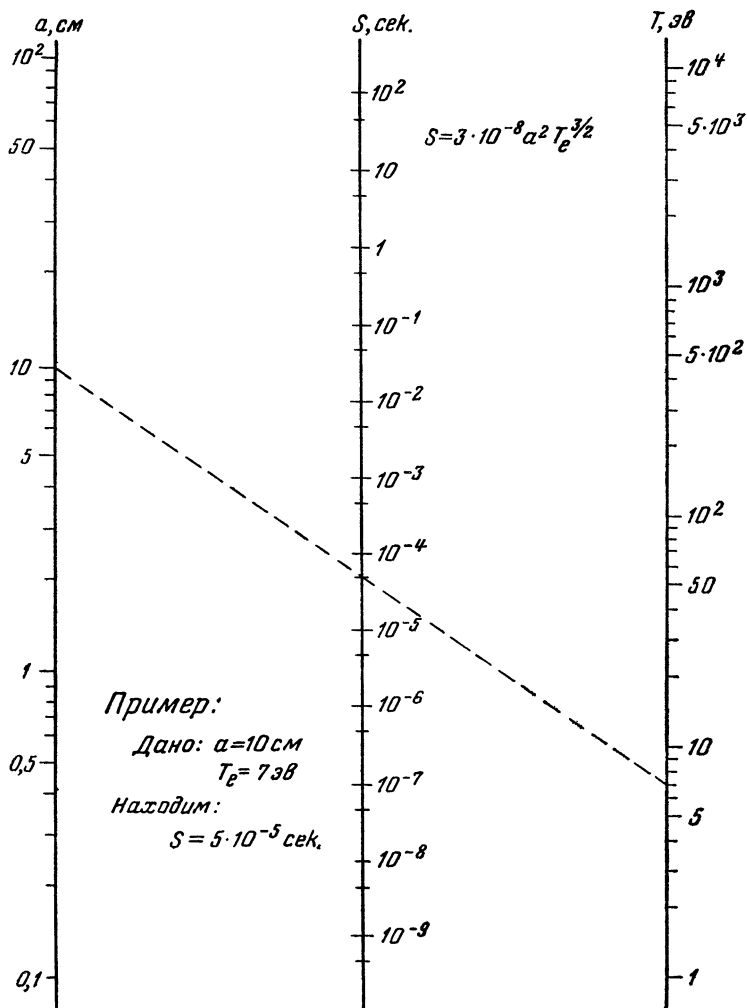
$$\Pi \gg \frac{s}{8t}. \quad (14.35)$$

Таким образом, условия безотрывности в шнуре, создаваемом продольным магнитным полем, при быстрых процессах такие же, как в токопроводящем шнуре, а при медленных процессах — более слабые.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Брагинский, отчет АН СССР, 1952; ЖЭТФ, 33, 645 (1957).
2. Л. Спитцер, Физика полностью ионизированных газов, М., ИЛ, 1957.
3. С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов, см. настоящий том, стр. 3.

П Р И Л О Ж Е Н И Е
Номограмма для определения s .



Л. А. Аримович

О ПРОХОЖДЕНИИ БОЛЬШИХ ТОКОВ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

Рассматривается вопрос о поведении плазменного шнура, создаваемого сравнительно большими токами, проходящими через плазму, в случае, когда вся система находится в постоянном или почти постоянном магнитном поле. Предполагается, что газокINETическим давлением плазмы можно пренебречь (быстрый импульсный процесс). Проводимость плазмы считается бесконечной.

Катушка, создающая магнитное поле напряженностью H , имеет радиус R_0 ; ионизированный шнур при токе $I = 0$ имеет радиус a_0 .

Плазменный шнур получает энергию UI от конденсаторной батареи емкостью C . Эта энергия расходуется на создание магнитного поля $\frac{d LI^2}{dt 2}$, на преодоление сил инерции $\frac{d M \dot{a}^2}{dt 2}$ и на работу против сил поля $\frac{d}{dt} W_{\parallel}$. Уравнение энергии запишется в следующем виде:

$$UI = \frac{d LI^2}{dt 2} + \frac{d}{dt} W_{\parallel} + \frac{d M \dot{a}^2}{dt 2}. \quad (1)$$

При этом $U = \frac{d}{dt} LI$, где индуктивность на единицу длины шнура $L = 2 \ln \frac{R_R}{a}$ (R_R — радиус обратного коаксиального провода), а $\frac{dL}{dt} = -\frac{2\dot{a}}{a}$. Уравнение (1) при подстановке этих зна-

* Работа выполнена в 1953 г.

чений, примет вид

$$\frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} W_{\parallel} + \frac{d}{dt} \frac{Ma^2}{2},$$

или

$$- I^2 \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt} W_{\parallel} + \frac{d}{dt} \frac{Ma\dot{a}^2}{2}. \quad (2)$$

Энергия внешнего магнитного поля равна

$$W_{\parallel} = \frac{H_1^2 a^2}{8} + \frac{H_2^2 (R_0^2 - a^2)}{8}, \quad (3)$$

где H_1 — напряженность поля в газовом шнуре, а H_2 — вне его.

Имея в виду, что конденсаторная батарея, работающая на создание магнитного поля, обладает малым сопротивлением, можно считать, что катушка короткозамкнута и, значит, поток внутри нее остается неизменным, т. е.

$$H_0 R_0^2 = H_1 a^2 + H_2 (R_0^2 - a^2). \quad (4)$$

И, наконец, запишем условие сохранения магнитного потока в шнуре

$$H_1 a^2 = H_0 a_0^2. \quad (5)$$

Пользуясь выражениями (4) и (5), можно представить напряженность поля внутри и вне шнура в следующем виде:

$$H_1 = H_0 \frac{a_0^2}{a^2};$$

$$H_2 = H_0 \frac{R_0^2 - a_0^2}{R_0^2 - a^2}.$$

Тогда

$$W_{\parallel} = \frac{H_0^2}{8} \left[\frac{a_0^4}{a^2} + \frac{(R_0^2 - a_0^2)^2}{R_0^2 - a^2} \right];$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \frac{H_0^2}{8} \left[-\frac{2a_0^4}{a^3} + \frac{2a(R_0^2 - a_0^2)^2}{(R_0^2 - a^2)^2} \right] \dot{a}.$$

Выполнив простейшие преобразования, получим

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = -\frac{H_0^2 \dot{a}}{4a^3} \frac{R_0^2 (a_0^2 - a^2)}{(R_0^2 - a^2)^2} [R_0^2 (a_0^2 + a^2) - 2a_0^2 a^2]. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала процесс сжатия при условии $a_0 = R_0$, ограничившись при этом анализом начальной стадии процесса, когда $a_0 - a$ мало по сравнению с R_0 . При этом условии

$$\frac{dW_{||}}{dt} = -\frac{H_0^2 \dot{a}}{4a^3} R_0^4, \quad (7)$$

и уравнение равновесия принимает вид

$$-I^2 \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{H_0^2 \dot{a}}{4a^3} R_0^4 + \frac{d}{dt} \frac{M \dot{a}^2}{2}.$$

а) Для случая, когда $|\dot{a}^2 M| < |d\dot{a}M|$, т. е. когда приращение массы мало по сравнению с приращением скорости, т. е. $\left| \frac{\dot{M}}{M} \right| < \left| \frac{\dot{a}}{a} \right|$, уравнение (2) может быть представлено следующим образом:

$$I^2 = \frac{H_0^2 R_0^4}{4a^2} - M \ddot{a} a.$$

В этом случае a будет равно R_0 до тех пор, пока I достигнет величины $I_0 = \frac{H_0 R_0}{2}$, т. е. до момента времени, когда поле тока при $a = R_0$ будет равно H_0 . Пусть это произойдет в момент времени $t = \tau$. Тогда в момент времени $\tau + t$

$$2I_0 \left(\frac{dI}{dt} \right)_0 \cdot t = -\frac{H_0^2 R_0}{2} x - M \ddot{x} R_0 \quad (x = a - R_0).$$

Принимая линейный закон нарастания тока, т. е. $I = I_0 \frac{t}{\tau}$, получим

$$2I_0^2 \frac{t}{\tau} = -\frac{H_0^2 R_0}{2} x - M \ddot{x} R_0,$$

или

$$\frac{H_0^2 R_0^2}{2} \frac{t}{\tau} = -\frac{H_0^2 R_0 x}{2} - M \ddot{x} R_0;$$

Обозначив $-\frac{x}{R_0} = z$, получим

$$\frac{t}{\tau} = z + \frac{2M}{H_0^2} \ddot{z}.$$

Решение этого уравнения ищем в форме

$$z = \frac{t}{\tau} + A \sin \frac{H_0 t}{\sqrt{2M}}.$$

Постоянная A определится из условия, что $\dot{z} = 0$ при $t = 0$, т. е.

$$\frac{AH_0}{\sqrt{2M}} + \frac{1}{\tau} = 0; \quad A = -\frac{\sqrt{2M}}{H_0 \tau}.$$

Следовательно, инерционный член будет влиять на ход процесса при временах

$$\tau_k \sim \frac{\sqrt{M}}{H_0}.$$

Если $M \sim 10^{-6}$ г и $H_0 \sim 10^4$ э, то $\tau_k \sim 10^{-7}$ сек.

Дальнейшее развитие процесса определяется только сжатием продольного поля.

б) В случае, когда $|a^2 \dot{M}| > |M \ddot{a}|$, уравнение (2) принимает вид

$$I^2 = \frac{H_0^2 R_0^4}{4a^2} - \frac{\dot{a}a}{2} \dot{M}.$$

При изменении I вблизи I_0 получаем

$$2I_0^2 \frac{t}{\tau} = -\frac{H_0^2 R_0}{2} x - \frac{1}{2} \dot{x} R_0 \dot{M},$$

или

$$\frac{t}{\tau} = -\frac{x}{R_0} - \frac{\dot{x}}{R_0} \frac{\dot{M}}{H_0^2}.$$

Вводя переменную z , получим

$$\frac{t}{\tau} = z + \dot{z} \frac{\dot{M}}{H_0^2}.$$

Здесь опять будет играть роль характеристическое время

$$t_k = \frac{M}{H_0^2}.$$

Пусть $\dot{M} \sim 10$, т. е. 10^{18} частиц захватывается за 10^{-7} сек, тогда

$$t_k \sim 10^{-7} \text{ сек.}$$

Таким образом и при переменном M инерция может иметь значение только на самом начальном участке кривой. Следовательно, в рассматриваемом идеализированном случае ($a_0 = R_0$, полный скин-эффект) инерционный член должен играть роль только в начале процесса сжатия. Пренебрегая им, получим

$$a = a_0 \quad \text{при} \quad I \leq I_0;$$

$$\frac{a}{R_0} = \frac{H_0 R_0}{2I} \quad \text{при} \quad I > I_0,$$

или

$$a = \frac{I_0}{I} R_0.$$

Рассмотрим теперь начальную стадию процесса для случая, когда $a_0 \neq R_0$ и $M = \text{const}$. В начальной стадии, когда a близко к a_0 , уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$-I^2 \frac{\dot{x}}{a_0} = \frac{R_0^2}{R_0^2 - a_0^2} H_0^2 x \dot{x} + M \dot{x} \ddot{x},$$

или, после замены переменной и преобразования,

$$I_0^2 \frac{t^2}{\tau^2} = \frac{R_0^2 a_0^2}{R_0^2 - a_0^2} H_0^2 z + M a_0^2 \ddot{z}, \quad (8)$$

где $z = \frac{x}{a_0}$, $a I = I_0 \frac{t}{\tau}$ — как это было обусловлено ранее.

Обозначим

$$\frac{I_0^2}{\tau^2} = \beta; \quad M a_0^2 = p \quad \text{и} \quad \frac{R_0^2 a_0^2 H_0^2}{R_0^2 - a_0^2} = q.$$

При этих обозначениях уравнение (8) запишется в форме

$$\beta t^2 = qz + p\ddot{z}. \quad (9)$$

Таким образом, во всех случаях в начальной стадии процесса сжатия возникают инерционные колебания с характерными частотами, зависящими от массы газа и напряженности поля. Как показывает более детальный анализ, эти колебания должны сохраняться в течение всего процесса сжатия (см. следующую работу).

Полное решение этого уравнения имеет вид

$$z = \frac{\beta}{q} t^2 - \frac{2p\beta}{q^2} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{q}{p}} \cdot t \right). \quad (10)$$

И в этом случае инерция будет играть роль только для времен $t < t_k$; характерное время t_k определяется следующим образом:

$$\frac{\beta}{q} t_k^2 = \frac{2p\beta}{q^2} \quad \text{и} \quad t_k = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Подставив значения p и q , получим

$$t_k = \frac{\sqrt{M}}{H_0} \sqrt{\frac{R_0^2 - a_0^2}{R_0^2}} \sim \frac{\sqrt{M}}{H_0},$$

Л. А. Арцимович

МАГНИТНЫЙ ПОТОК В СЖИМАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ *

В работе рассматриваются процессы в сжимающемся проводящем цилиндре, находящемся в магнитном поле. Даются формулы для нескольких случаев изменения радиуса цилиндра в функции времени. Кроме этого анализируются интерпретация экспериментальных данных и возможность определения проводимости цилиндра.

Рассмотрим изменение магнитного потока в цилиндре, испытывающем равномерное сжатие. Пусть в некоторый начальный момент цилиндр находится в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси цилиндра. Затем начинается сжатие, при котором радиус цилиндра изменяется по закону

$$a = a_0 F(t).$$

Удельная проводимость внутри сжимающегося цилиндра в общем случае может являться функцией r (расстояние до оси) и времени t . Скорость сжатия также будет функцией r и t . В обычных обозначениях уравнения, характеризующие процесс сжатия, будут иметь следующий вид:

$$j = \sigma \left(E - \frac{v}{c} H \right);$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = - \frac{4\pi j}{c}; \quad (1)$$

$$2\pi r E = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r 2\pi r H dr.$$

* Работа выполнена в 1953 г.

Найдем полную производную магнитного потока Φ по времени

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{dr}{dt} = -2\pi rcE + 2\pi rH \frac{dr}{dt} = \\ &= -2\pi rc \left(E - \frac{H}{c} \frac{dr}{dt} \right) = -\frac{2\pi rc}{\sigma} j. \end{aligned} \quad (2)$$

Заменяя j его выражением через $\frac{\partial H}{\partial r}$, находим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{c^2}{2\sigma} r \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (3)$$

Таким образом, изменение потока в области радиуса r определяется градиентом H на границе этой области. Преобразуя формулу (3), получим дифференциальное уравнение для H

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r rH dr + rH \frac{dr}{dt} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} r \frac{\partial H}{\partial r}; \\ r \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(rH \frac{dr}{dt} \right) &= \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что проводимость σ не зависит от r . При этом она может быть произвольной функцией времени. Поэтому уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rvH) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H}{\partial r}. \quad (5)$$

Для того чтобы можно было решать это уравнение, необходимо знать зависимость v от r . Предположим, что имеет место равномерное сжатие, при котором отношение расстояний двух любых точек внутри цилиндра до его оси остается неизменным во время сжатия (т. е. происходит подобное изменение всех размеров внутри цилиндра). При этом предположении:

$$v(r) = \frac{r}{a} v(a). \quad (6)$$

В случае подобного изменения всех размеров уравнение (4) можно значительно упростить путем перехода к новым переменным.

Для того чтобы выбрать новые переменные, рассмотрим некоторую материальную точку внутри цилиндра, находя-

щуюся в момент времени t на расстоянии r от оси. В начальный момент времени ($t=0$) эта точка находилась от оси на расстоянии r_1 . Так как все размеры изменяются подобно, то между r и r_1 должно существовать такое же соотношение, как между a и a_0 . Следовательно,

$$r = r_1 F(t) = r_1 \frac{a}{a_0}. \quad (7)$$

Функция $F(t)$ связана с $v(a)$ следующим очевидным соотношением:

$$v(a) = F'(t) a_0. \quad (8)$$

Перейдем теперь в уравнении (5) от переменных r и t к переменным r_1 и t . Напряженность поля в этих переменных будет иметь вид $H_1(r_1, t)$. Очевидно,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{F'(t)}{F(t)} \frac{\partial H_1}{\partial r_1} r_1; \quad (9a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H_1}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial r} = \frac{\partial H_1}{\partial r_1} \frac{1}{F(t)}; \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{F(t)} \frac{\partial H_1}{\partial r_1} = \frac{\partial}{\partial r} r_1 \frac{\partial H_1}{\partial r_1} = \\ &= \frac{\partial_1}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial H_1}{\partial r_1} \frac{1}{F(t)}. \end{aligned} \quad (9b)$$

Преобразуя уравнение (5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rvH) &= \frac{\partial H_1}{\partial t} - r_1 \frac{F'(t)}{F(t)} \frac{\partial H_1}{\partial r_1} + \\ + v(a) \frac{r_1}{a_0} \frac{\partial H_1}{\partial r_1} \frac{1}{F(t)} + H_1 2 \frac{v(a)}{a} &= \frac{\partial H_1}{\partial t} + 2 \frac{v(a)}{a} H_1 = \\ = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{1}{F^2(t)} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial H_1}{\partial r_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Это уравнение можно еще упростить, умножив все его члены на a^2

$$a^2 \frac{\partial H_1}{\partial t} + 2a \frac{da}{dt} H_1 = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{1}{F^2(t)} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial H_1 a^2}{\partial r_1} \right). \quad (11)$$

В левой части сумма членов равна частной производной по времени от $H_1 a^2$. Следовательно,

$$\frac{\partial H_1 a^2}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{1}{F^2(t)} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial H_1 a^2}{\partial r_1} \right). \quad (12)$$

Обозначим через σ_0 начальное значение проводимости σ и введем вместо t новую переменную t_1

$$t_1 = \sigma_0 \int_0^t \frac{dt}{\sigma F^2(t)} = \sigma_0 a_0^2 \int_0^t \frac{dt}{a^2 \sigma}. \quad (13)$$

В качестве функции, подлежащей определению, будем рассматривать $H_1 a^2$. Введем обозначение

$$H_1 a^2 = u. \quad (14)$$

Уравнение (12) принимает теперь следующий простой вид,

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial u}{\partial r_1} \right). \quad (15)$$

По своему виду оно теперь ничем не отличается от обычного уравнения для скин-эффекта в геометрически неизменяемом цилиндре или от уравнения теплопроводности для цилиндра. Для решения уравнения (15) необходимо знать начальные и граничные условия.

В начальный момент времени ($t_1 = 0$) напряженность магнитного поля во всех точках равна H_0 . Величина a^2 в этот момент времени равна a_0^2 . Поэтому начальное значение u равно $a_0^2 H_0$. Для того чтобы найти граничное условие, заметим, что на внешней границе цилиндра (т. е. при $r_1 = a_0$) напряженность поля равна H_0 в любой момент времени. Следовательно, при $r_1 = a_0$ искомая функция u равна $a^2 H_0$. Таким образом, условия, которым должна подчиняться функция u в начальный момент времени и на границе цилиндра, установлены. Для упрощения дальнейших вычислений введем новую функцию u_1 , которая отличается от u только на постоянную величину

$$u_1 = u - a_0^2 H_0.$$

Функция u_1 также удовлетворяет уравнению (15). Очевидно,

$$u_1 = 0 \quad \text{при} \quad t_1 = 0; \quad (16a)$$

$$u_1 = (a^2 - a_0^2) H_0 \quad \text{при} \quad r_1 = a_0. \quad (16b)$$

Получив уравнение (15) и условия (16а) и (16б), мы свели поставленную задачу к классической задаче о нагревании однородного цилиндра, начальная температура которого равна нулю и поверхность которого, начиная с момента времени $t_1 = 0$, находится при температуре, изменяющейся по заданному закону при изменении t . Решение этой классической задачи получается путем разложения искомой функции u_1 в ряд по функциям Бесселя.

Однако этот метод решения обладает одним существенным недостатком: получающийся ряд хорошо сходится только при больших значениях коэффициента теплопроводности, роль которого в нашем уравнении играет величина $\frac{c}{4\pi\sigma_0}$. Это означает, что полученным решением удобно пользоваться лишь при слабом скин-эффекте (т. е. при малых значениях проводимости). Нас, однако, интересует в первую очередь случай сильного скин-эффекта, так как для предельного случая очень слабого скин-эффекта решение задачи можно найти достаточно простым путем, без помощи полученного дифференциального уравнения.

Постараемся поэтому при решении задачи для сильного скин-эффекта обойтись без разложения в ряды по функциям Бесселя. Заметим, что при сильном скин-эффекте напряженность поля будет сильно изменяться только вблизи границы цилиндра. Так как H_1 и $\frac{\partial H_1}{\partial r_1}$ должны сильно изменяться на расстояниях, малых по сравнению с a_0 , то в правой части уравнения (15) величиной $\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_1}{\partial r_1}$ можно пренебречь по сравнению с величиной $\frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1^2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1^2},$$

и уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_1} = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial r_1^2}, \quad (17)$$

где k обозначает величину $\frac{c^2}{4\pi\sigma_0}$.

Замена уравнения (15) уравнением (17) означает, что наша цилиндрическая задача сведена к плоской. Математически решение уравнения (17) с начальным условием (16а) и граничным условием (16б) эквивалентно решению простой задачи об изменении температуры в полупространстве огра-

ничением справа плоскостью $r_1 = a_0$, на которой температура равна

$$\varphi(t) = (a^2 - a_0^2) H_0. \quad (18)$$

Решение уравнения (17) имеет следующий вид:

$$u_1(r_1, t_1) = - \frac{(a_0 - r_1) H_0}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^{t_1} \frac{a_0^2 - a^2(\tau)}{(t_1 - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{(a_0 - r_1)^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau. \quad (19)$$

Пользуясь равенством (14) и обозначая $a_0 - r_1$ через y , получим следующее выражение для напряженности поля:

$$H = \frac{a_0^2}{a^2} H_0 - \frac{y H_0}{2\sqrt{\pi k}} \frac{1}{a^2} \int_0^{t_1} \frac{a_0^2 - a^2(\tau)}{(t_1 - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{y^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau. \quad (20)$$

Последняя формула при заданном законе изменения $a(t)$ дает полное решение поставленной задачи для случая сильного скин-эффекта. Первый член в выражении для H соответствует случаю бесконечной проводимости, а второй член дает поправку на неполный скин-эффект. Как следует из рассмотрения подынтегральной функции, второй член становится очень малым при достаточно больших значениях y . Условие малости второго члена является

$$y \gg 2\sqrt{kt_1}. \quad (21)$$

Переходя к переменным r и t , можем записать это условие в следующем виде:

$$a - r \gg c \sqrt{\frac{a_0^2}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{\sigma a^2}}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что толщина скин-слоя δ по порядку величины составляет

$$\delta \sim c \sqrt{\frac{a_0^2}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{\sigma a^2}}. \quad (23)$$

Условием, при котором наши вычисления можно считать правильными, будет, очевидно,

$$\frac{\delta}{a_0} \ll 1.$$

Согласно (23), это эквивалентно неравенству

$$\frac{c^2}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{\sigma a^2} \ll 1. \quad (24)$$

При экспериментальном исследовании сжатия величиной, наиболее удобной для измерения, является изменение магнитного потока в цилиндре, т. е. $\frac{d\Phi}{dt}$.

Согласно формуле (3), полная производная потока определяется градиентом H при $r = a$. Мы можем написать следующее выражение для $\frac{d\Phi}{dt}$ [пользуясь соотношениями (7) и (9б)]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{r=a} &= \frac{c^2}{2\sigma} a \frac{\partial H_1}{\partial r_1} \frac{1}{F(t)} = \frac{c^2}{2\sigma} a_0 \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \frac{1}{a^2} = \\ &= \frac{c^2}{2\sigma_0 a_0} \frac{\sigma_0 a_0^2}{\sigma a^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right)_{r_1=a_0} = \frac{c^2}{2\sigma_0 a_0} \frac{dt_1}{dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right)_{r_1=a_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, для определения $\frac{d\Phi}{dt}$ нужно найти градиент u_1 при $r_1 = a_0$. Для этого нужно продифференцировать выражение (19) по r_1 . При этом нужно соблюдать некоторую осторожность, учитывая, что $r_1 = a_0$ является особой точкой. Перепишем сначала выражение (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1(r_1, t_1) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{(t_1 - \tau)^{3/2}} y e^{-\frac{y^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau = \\ &= -\frac{k}{\sqrt{\pi k}} \int_0^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{(t_1 - \tau)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{y^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Дифференцируя это выражение по r_1 , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} &= - \frac{\partial u_1}{\partial y} = + \frac{k}{\sqrt{\pi k}} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} \frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{y^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau = \\ &= \frac{k}{\sqrt{\pi k}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} e^{-\frac{y^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как функция, стоящая под знаком дифференцирования, удовлетворяет уравнению (17) (подынтегральная функция удовлетворяет (17), а производная по верхнему пределу обращается в нуль), то оператор $k \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ может быть заменен оператором $\frac{\partial}{\partial t_1}$. В результате получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_0^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} e^{-\frac{y^2}{4k(t_1 - \tau)}} d\tau. \quad (28)$$

Теперь имеем право при определении $\frac{\partial u_1}{\partial r_1}$ в точке $r_1 = a_0$ полагать в подынтегральной функции $y = 0$. В результате находим следующее выражение для градиента u_1 :

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right)_{r_1 = a_0} = - \frac{H_0^2}{\sqrt{\pi k}} \frac{d}{dt_1} \int_0^{t_1} \frac{a_0^2 - a^2(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau. \quad (29)$$

Подставим это выражение в формулу (25)

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_a = - \frac{c^2}{2\sigma_0 a_0} \frac{dt_1}{dt} \frac{H_0}{\sqrt{\pi k}} \frac{d}{dt_1} \int_0^{t_1} \frac{a_0^2 - a^2(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau; \quad (30)$$

окончательно

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_a = - a_0 H_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0}} \frac{d}{dt} \int_0^{t_1} \frac{1 - \frac{a^2(\tau)}{a_0^2}}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau. \quad (31)$$

Отсюда

$$\Phi = \Phi_0 - a_0 H_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0}} \int_0^{t_1} \frac{1 - \frac{a^2(\tau)}{a_0^2}}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau. \quad (32)$$

В этой формуле Φ_0 равно $\pi a_0^2 H_0$. Второй член определяет уменьшение захваченного потока, происходящее за счет неполного скин-эффекта (из-за диффузии магнитного поля через поверхность цилиндра при его сжатии). Пользуясь приведенной формулой, а также соотношением

$$t_1 = \sigma_0 a_0^2 \int_0^t \frac{dt}{\sigma a^2},$$

можем определить Φ в любой момент времени при заданном законе изменения a и $\sigma(t)$. При этом следует иметь в виду, что в формулу (32) нужно подставлять a как функцию t_1 , а не как функцию t . В формуле, связывающей t_1 с t , напротив, a следует рассматривать как функцию t . Вычисление Φ очень упрощается в том частном случае, когда σ изменяется обратно пропорционально a^2 . В этом случае $t_1 = t$, и формула (32) приобретает вид

$$\Phi = \Phi_0 - a_0 H_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0}} \int_0^t \frac{1 - \frac{a^2(\tau)}{a_0^2}}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad (33)$$

Интерес, который может представить исследование указанного случая, обусловлен не только упрощением вычисления. Постоянство σa^2 для полностью ионизованной плазмы означает адиабатическое сжатие, так как проводимость плазмы пропорциональна $T^{3/2}$, и поэтому условие

$$\sigma a^2 = \text{const}$$

эквивалентно условию

$$VT^{3/2} = \text{const},$$

которое соответствует адиабатическому сжатию.

Рассмотрим для этого частного случая три конкретных примера:

а) $a = a_0 \sqrt{1 - vt}$;

б) $a = a_0 \sqrt{1 - (vt)^2}$;

в) $a = a_0 (1 - vt)$ (сжатие с постоянной скоростью).

Во всех этих примерах полное время процесса равно $\frac{1}{v}$.

Из формулы (33) для первого примера следует

$$\Delta\Phi = -a_0 H_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0}} \int_0^t \frac{v\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = -\frac{4}{3} a_0 H_0 vt \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}};$$

отсюда

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = -\frac{4}{3\pi} (vt) \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{a_0}. \quad (34)$$

Для второго примера

$$\Delta\Phi = -a_0 H_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0}} \int_0^t \frac{v^2 \tau^2 d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = -\frac{16}{15} a_0 H_0 (vt)^2 \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}};$$

отсюда

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = -\frac{16}{15} \frac{1}{\pi} (vt)^2 \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}}. \quad (35)$$

Для третьего примера

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = -\left[\frac{8}{3} vt - \frac{16}{15} (vt)^2 \right] \frac{1}{\pi a_0} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}}. \quad (36)$$

Предположим теперь, что проводимость не меняется при сжатии (нагрев только за счет джоульса тепла, работа внешних сил идет на увеличение энергии магнитного поля). В качестве примера для этого случая рассмотрим сжатие с постоянной скоростью.

Согласно (13), при сжатии с постоянной скоростью и неизменной проводимостью

$$t_1 = \frac{t}{1 - vt}, \quad t = \frac{t_1}{1 + vt_1},$$

и, следовательно,

$$a(\tau) = \frac{a_0}{1 + v\tau}, \quad 1 - \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{2v\tau + v^2\tau^2}{(1 + v\tau)^2}.$$

Вычисление интеграла в формуле (32) дает

$$\int_0^{t_1} \frac{1 - \frac{a^2(\tau)}{a_0^2}}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau = 2z - \frac{1}{\sqrt{2}b^2} \left\{ \frac{z}{b^2 - z^2} + \frac{1}{2b} \ln \frac{b+z}{b-z} \right\},$$

где для сокращения принято

$$z = \sqrt{t_1} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{\frac{1 + \nu t_1}{\nu}}.$$

Переходя к переменной t и определяя $\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}$, находим

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = -\frac{1}{\pi a_0} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \left\{ \frac{1 + \nu t}{\sqrt{1 - \nu t}} - \frac{(1 - \nu t)^{3/2}}{\sqrt{\nu t}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\nu t}}{1 - \sqrt{\nu t}} \right\}.$$

При $\nu t \ll 1$ получаем следующее выражение, характеризующее начальную фазу сжатия:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = -\frac{8}{3\pi} (\nu t) \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{a_0} \quad \left(t \ll \frac{1}{\nu} \right).$$

При νt , близком к 1, вторым членом в фигурных скобках можно пренебречь, и относительное изменение потока будет выражаться формулой

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = -\frac{2}{\pi a_0} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \nu t}} \quad (1 - \nu t \ll 1).$$

На первый взгляд кажется, что разнообразие формул для $\Delta\Phi$, полученных при различных частных предположениях, чрезвычайно затрудняет интерпретацию экспериментов, так как для определения σ из опытов по измерению потока необходимо задаться определенным видом зависимости σ от t . На самом деле, однако, положение не столь уж безнадежное.

Величиной, измеряемой на опыте, является

$$\Phi_1 = \Phi - \pi a^2 H_0 = \pi (a_0^2 - a^2) H_0 + \Delta\Phi.$$

Первый член в этом выражении соответствует идеальному скин-эффекту при $a_0 \ll R$. Если a известно как функция времени, то первый член может быть вычислен и $\Delta\Phi$ определено из опыта. Из опыта можно определить отношение $\Delta\Phi$ к первому члену и сравнить это отношение с его теоретическим

выражением. Найдем это отношение для рассмотренных выше конкретных примеров.

При $\sigma a^2 = \text{const}$

а) для первого примера

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{a_0}; \quad (37)$$

б) для второго примера

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{16}{15\pi} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{a_0}; \quad (38)$$

в) для третьего примера

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{\frac{4}{3} - \frac{8}{15} \nu t}{1 - \frac{1}{2} \nu t} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{a_0}. \quad (39)$$

При $\nu t \ll 1$ численный коэффициент равен $4/3$, а при $\nu t \rightarrow 1$ численный коэффициент стремится к $\frac{8}{5}$.

При $\sigma = \text{const}$ для сжатия с постоянной скоростью

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0}} \frac{1}{a_0} \quad \text{при } \nu t \ll 1; \quad (40)$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{c^2 t}{\sigma_0} \frac{t}{1 - \nu t}} \frac{1}{a_0} \quad \text{при } \nu t \rightarrow 1. \quad (41)$$

Заметим теперь, что для трех примеров с $\sigma a^2 = \text{const}$ время t совпадает с t_1 . При $\nu t \ll 1$ и $\sigma = \text{const}$ величины t и t_1 также равны друг другу. Поэтому в формулах (37), (40) можем вместо t подставить t_1 . В формуле (41) под знаком корня стоит

$$\frac{t}{1 - \nu t} = t_1.$$

Поэтому, если отношение $\Delta\Phi$ к $\pi(a_0^2 - a^2)H_0$ во всех случаях рассматривать как функцию t_1 , то можно написать

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{c^2 t_1}{\sigma}} \frac{1}{a_0}. \quad (42)$$

В рассмотренных нами конкретных примерах коэффициент α составляет от 1,07 до 2. Вряд ли можно ожидать, что он будет значительно выходить за указанные пределы и при других законах изменения a и σ .

Установленный нами путем рассмотрения конкретных случаев факт слабой зависимости коэффициента α от конкретных особенностей процесса сжатия нетрудно понять и из общих соображений, рассматривая поведение функции $u(r_1, t_1)$ вблизи границы и пользуясь при этом уравнением (17). Такой анализ показывает, что формула (42) действительно имеет общий характер. Для грубой оценки можем просто положить $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{2}$

и считать, что полученная величина отношения $\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0}$ будет отличаться от истинной не более чем в полтора раза (не зависимо от конкретных особенностей процесса).

Можем теперь сформулировать окончательный вывод: величина $\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0}$ с относительной точностью около 1,5 определяется в каждый данный момент формулой

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi(a_0^2 - a^2)H_0} = -\frac{1}{2a_0} \sqrt{\frac{c^2 t_1}{\sigma_0}}, \quad (43)$$

где t_1 — «приведенное время» процесса

$$t_1 = \sigma_0 a_0^2 \int_0^t \frac{dt}{\sigma a^2},$$

и σ_0 — проводимость при $t_1 = t = 0$.

Формула (43) относится к случаю сильного скин-эффекта и справедлива только в том случае, когда выражение, стоящее в ее правой части, значительно меньше единицы.

Следует отметить, что полученная формула может быть применена и к случаю, когда σ является функцией r , если только в пределах толщины скин-слоя проводимость можно считать одинаковой.

Нетрудно также распространить полученные результаты на тот случай, когда величина H_0 изменяется во время сжатия. В реальных условиях эксперимента это всегда выполняется. Наиболее простой результат получится, если предположить, что полный поток в области радиуса a_0 сохраняется. Это будет иметь место, если поле создается катушкой с радиусом a_0 и постоянная времени контура, питающего катушку, достаточно велика по сравнению с длительностью процесса

сжатия. Обозначим через $H_0(0)$ величину напряженности поля на границе цилиндра в начальный момент времени и через $H_0(t_1)$ — ту же величину в момент времени t_1 . Тогда можно положить

$$u_1 = u - a_0^2 H_0(\mathcal{C}).$$

Вместо условий (16а) и (16б) получим $u_1 = 0$ при $t_1 = 0$ и $u_1 = a^2 H_0(t_1) - a_0^2 H_0(0)$ при $r_1 = a_0$. Формула (32) примет вид

$$\Phi = \Phi_0 - a_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0}} \int_0^{t_1} \frac{H_0(0) - \frac{a^2(\tau)}{a_0^2} H_0^2(\tau)}{\sqrt{t_1 - \tau}} d\tau. \quad (44)$$

Так как мы считаем цилиндр хорошо проводящим, то при процессе сжатия должен захватываться почти весь поток, который первоначально находился внутри радиуса a_0 . Поэтому величина $H_0(t_1)$ вскоре после начала сжатия должна стать значительно меньше $H_0(0)$. Если пренебречь этой величиной в подынтегральном выражении, то получатся следующие простые формулы для $\Delta\Phi$:

$$\Delta\Phi = 2a_0 H_0 \sqrt{\frac{c^2}{\sigma_0} \cdot t_1},$$

или

$$\Delta\Phi = 2a_0^2 H_0 \sqrt{c^2 \int_0^t \frac{dt}{\sigma a^2}}.$$

Л. А. Арцимович

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ СЖАТИЯ ШНУРА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ *

Анализируется уравнение, описывающее сжатие газового столба при наличии постоянного продольного магнитного поля.

Рассматривается случай, когда «магнитное время» мало по сравнению со временем изменения тока, и приводятся приближенные формулы для определения радиуса шнура.

Из полного уравнения (с учетом инерции) выводятся формулы для частоты и амплитуды колебаний радиуса шнура. Во всех случаях давление плазмы не учитывается.

1) Если масса постоянна, начальный радиус мал по сравнению с радиусом катушки, создающей поле, и проводимость идеальная, то уравнение, описывающее процесс, имеет следующий вид:

$$j^2(t) = \frac{1-y''}{y^2} - 4\tau^2 y y'' \quad (1)$$

Здесь $j(t)$ — сила тока в безразмерных единицах. За единицу силы тока принимается ток, создающий поле H_0 на радиусе a_0 (H_0 — начальное значение поля, a_0 — начальный радиус). Таким образом,

$$j(t) = \frac{2y(t)}{H_0 a_0}.$$

Величина y обозначает отношение радиуса сжимающегося цилиндра к его начальному значению

$$y = \frac{a}{a_0}.$$

* Работа выполнена в 1954 г.

Постоянная величина τ определяется формулой

$$\tau = \frac{\sqrt{M}}{H_0},$$

где M обозначает массу сжимающегося вещества.

Если τ очень мало по сравнению со временем, характеризующим изменение $j(t)$, то в первом приближении можно вычислять $j(t)$, пренебрегая вторым членом в правой части уравнения (1).

При этом получим

$$j^2(t) = \frac{1 - y^4}{y_0^2}; \quad (2)$$

$$y_0 = \sqrt{-\frac{j^2(t)}{2} + \sqrt{\frac{j^4(t)}{4} + 1}}. \quad (3)$$

Значок при y введен для того, чтобы отметить, что формулы (2) и (3) дают величину y в первом приближении.

Из формулы (3) следует, что при $j \ll 1$

$$y_0 = 1 - \frac{j^2(t)}{4}; \quad (4)$$

при $j \gg 1$

$$y_0 = \frac{1}{j(t)}. \quad (5)$$

2. Поток, измеряемый витком, расположенным так, что его радиус равен b ($b > a_0$), определяется формулой

$$\Delta\Phi = \pi a_0^2 H_0 (1 - y^2) \quad (6)$$

(при идеальной проводимости и соблюдении условия малости по сравнению с радиусом катушки, создающей поле H_0).

При достаточно малом τ , согласно (3) и (6),

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi a_0^2 H_0} = 1 + \frac{j^2(t)}{2} - \sqrt{1 + \frac{j^4(t)}{4}}. \quad (7)$$

Если $j(t) \ll 1$, то

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi a_0^2 H_0} = \frac{j^2(t)}{2}. \quad (8)$$

Если $j(t) \gg 1$, то

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi a_0^2 H_0} = 1. \quad (9)$$

На опыте непосредственно измеряется $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ при синусоидально изменяющемся токе.

При этом

$$\frac{\Delta\Phi}{\pi a_0^2 H_0} = 1 + \frac{j_0^2 \sin^2 \omega_e t}{2} - \sqrt{1 + \frac{j_0^4 \sin^4 \omega_e t}{4}}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi a_0^2 H_0} \frac{d}{dt} \Delta\Phi &= \frac{j_0^2 \omega_e}{2} \sin 2\omega_e t - \\ &- \frac{j_0^4 \omega_e}{4} \sin 2\omega_e t \sin^2 \omega_e t \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{j_0^4 \sin^4 \omega_e t}{4}}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В более удобном виде

$$\frac{1}{\pi a_0^2 H_0} \frac{d}{dt} \Delta\Phi = \frac{j_0^2 \omega_e}{2} \sin 2\omega_e t \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{j_0^2 \sin^2 \omega_e t}{\sqrt{1 + \frac{j_0^4 \sin^4 \omega_e t}{4}}} \right\}. \quad (11a)$$

Если $j_0 \ll 1$, то

$$\frac{d}{dt} \Delta\Phi = \frac{j_0^2 \omega_e}{2} \sin 2\omega_e t. \quad (12)$$

Вид функции $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ для этого случая изображен на рис. 1. Это синусоида с двойной частотой.

Амплитуда $\frac{d\Delta\Phi}{dt}$ равна

$$Am = \frac{j_0^2 \omega_e}{2} \pi a_0^2 H_0. \quad (13)$$

Максимальное значение $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ достигается при фазовом угле 45° .

Если $j_0 \gg 1$, то вид функции $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ изменяется. Максимум смещается в область малых фазовых углов, и кривая принимает вид, изображенный на рис. 2. Фаза, которой в этом случае соответствует максимум $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$, определяется формулой

$$\varphi = \frac{0,89}{j_0} \quad (\text{в радианах}), \quad (14)$$

а амплитуда — формулой

$$Am = 0,57j_0\omega_\epsilon\pi a_0^2 H_0. \quad (15)$$

3. Влияние инерции в начальной части процесса описывается уравнением

$$y = 1 - \frac{j_0^2\omega_\epsilon^2 t^2}{4} + \frac{j_0\omega_\epsilon^2}{2\omega_m^2(0)} [1 - \cos \omega_m(0) t], \quad (16)$$

где $\omega_m(0) = \frac{1}{\tau}$.

В формуле (16) второй член в правой части обусловлен только наличием магнитного давления, а третий член — влиянием инерции. Отношение третьего члена ко второму равно

$$q = \frac{2}{\omega_m^2(0)} \frac{1}{t^2} [1 - \cos \omega_m(0) t], \quad (17)$$

При $\omega_m(0) t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2} \tau$

$$q = \frac{8}{\pi^2} \cong 0,8;$$

при $\omega_m(t) = \pi$, $t = \pi\tau$

$$q = \frac{4}{\pi^2} \cong 0,4;$$

при $\omega_m(0) t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{2} \tau$

$$q = \frac{8}{9\pi^2} \cong 0,09.$$

Все эти соотношения, начиная с формулы (16), справедливы только для начальной части процесса, т. е. при y , близком к 1. Поэтому, в частности, и приведенные значения q для различных значений t от $\frac{\pi}{2} \tau$ до $\frac{3\pi}{2} \tau$ могут считаться верными только в том случае, если в указанной области величин $t \cdot y$ очень мало отличается от единицы.

Выражение для y , учитывающее влияние инерции и описывающее весь процесс сжатия (а не только его начальную часть), может быть получено в явном виде для случая, когда $\omega_\epsilon \ll \omega_m(0)$. Это выражение имеет следующий вид:

$$y = y_0 - \frac{y_0''}{\omega_m^2(0)} - \frac{j_0^2}{2} \frac{\omega_\epsilon^2}{\omega_m^2(0)} \sqrt{\frac{\omega_m(0)}{\omega_m(t)}} \cos \int_0^t \omega_m(t) dt. \quad (18)$$

Здесь y_0 есть решение уравнения (1) без инерционного члена, т. е. функция, определяемая формулой (3). Величина $\omega_m(t)$ определяет частоту колебаний в момент времени t . Она определяется выражением

$$\omega_m(t) = \omega_m(0) \sqrt{1 + \frac{i_0^2 \sin^2 \omega_e t}{2y_0^2}}. \quad (19)$$

Из формулы (18) следует, что на всем протяжении процесса сжатия имеют место колебания, налагающиеся на плавно изменяющуюся функцию $y_0(t)$. Частота колебаний

возрастает по мере сжатия цилиндра и достигает максимума при минимальном значении радиуса цилиндра, т. е. при

$\omega_e t = \frac{\pi}{2}$. Амплитуда колебаний

уменьшается обратнопропорционально квадратному корню из частоты, т. е. обратно пропорционально $\sqrt{\omega_m(t)}$. Выражение для амплитуды имеет следующий вид:

$$S = \frac{i_0^2 \omega_e^2}{2 \omega_m^2(0)} \times \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{i_0^2 \sin^2 \omega_e \tau}{2y_0^4}}}. \quad (20)$$

В частности, при t , близком к нулю,

$$S = \frac{i_0^2 \omega_e^2}{2 \omega_m^2(0)}. \quad (21)$$

При $\omega_e(t) = \frac{\pi}{2}$, т. е. при максимальном сжатии,

$$S = \frac{i_0^2 \omega_e^2}{2 \omega_m^2(0)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{i_0^2}{2y_0^2}}}. \quad (22)$$

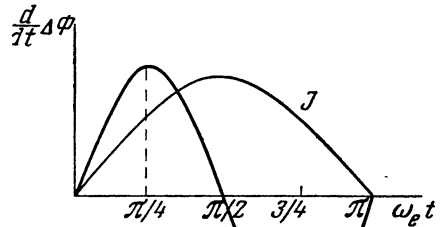


Рис. 1.

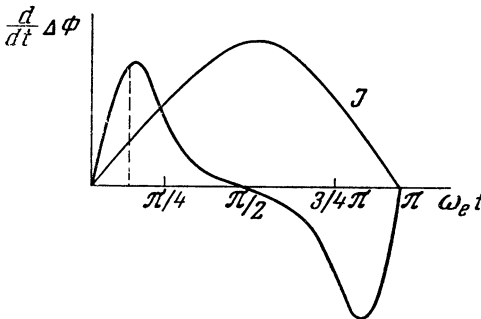


Рис. 2.

Если $j_0 \gg 1$, то последнюю формулу можно упростить, и выражение для S в точке максимального сжатия принимает вид

$$S = 0,6 \frac{j_0 \omega_e^2}{\omega_m^2(0)}. \quad (23)$$

В практических единицах формула (20) принимает следующий вид:

$$S = 0,36 \cdot 10^{-8} n A p \frac{I_0^2 \omega_e^2}{H_0^4} \sqrt[4]{\frac{1}{2 \cdot 10^{-2} I_0^2 \sin^2 \omega_e t + H_0^2 a_0^2 y_0^2(t)}}. \quad (24)$$

Здесь n — число атомов в молекуле; A — атомный вес; p — начальное давление в миллиметрах ртутного столба и I_0 — амплитуда тока в амперах.

Если амплитуда колебаний мала, то эти колебания трудно обнаружить на экспериментальных кривых, дающих величину y (а тем более на осциллограммах тока и напряжения). Однако их гораздо легче обнаружить на первичных осциллограммах напряжения, индуцируемого изменением потока в витке, который служит для определения $\Delta\Phi$. Так как $\Delta\Phi$ пропорционально $1 - y^2$, то производная $\Delta\Phi$ пропорциональна произведению $y y'$. В этом произведении $y_0 y_0'$ характеризует ту часть $\frac{d\Delta\Phi}{dt}$, которая определяется магнитным давлением,

При $\omega_e \ll \omega_m(0)$ второе слагаемое в выражении для $\frac{d\Delta\Phi}{dt}$, связанное с наличием колебаний, будет иметь вид

$$y_0 \frac{j_0^2}{2} \frac{\omega_e^2}{\omega_m(0)} \sqrt{\frac{\omega_m(t)}{\omega_m(0)}} \sin \int_0^t \omega_m(t) dt. \quad (25)$$

Благодаря тому, что колебания происходят с частотой $\omega_m(t)$, они будут гораздо резче проявляться в выражениях, зависящих от y' , по сравнению с выражениями, содержащими только y .

Амплитуда осциллирующего члена в выражении для $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ определяется следующей формулой:

$$B = y_0 j_0^2 \frac{\omega_e^2}{\omega_m(0)} \sqrt{\frac{\omega_m(t)}{\omega_0(t)}} \pi a_0^2 H_0. \quad (26)$$

Следует ожидать, что в наиболее отчетливой форме колебания на осциллограмме $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ должны проявляться при $\omega_e t = \frac{\pi}{2}$, т. е. вблизи точки максимального сжатия, так как в этой области y'_0 проходит через нуль, и поэтому $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ содержит только осциллирующий член. Амплитуда осциллирующего члена при $\omega_e t = \frac{\pi}{2}$ равна

$$B_1 = y_0 j_0^2 \frac{\omega_e^2}{\omega_m(0)} \sqrt[4]{1 + \frac{j_0^2}{2y_0^2}} \pi a_0^2 H_0. \quad (27)$$

Отношение B_1 к максимальному значению $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$, определяемому слагаемым $y_0 y'$, может служить характеристикой роли колебаний на осциллограмме $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$.

Согласно формулам (14) и (15), получаем

а) при $j_e \ll 1$

$$\frac{B_1}{A_{\text{макс}}} = 2 \frac{\omega_e}{\omega_m(0)}; \quad (28)$$

б) при $j_0 \gg 1$

$$\frac{B_1}{A_{\text{макс}}} = 1,45 \frac{\omega_e}{\omega_m(0)}. \quad (29)$$

Следует отметить, что колебания будут иметь место на всем протяжении кривой $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$, а не только при $\omega_e t = \frac{\pi}{2}$. В самой начальной части кривой, т. е. при $\omega_m(0) t \sim \pi$, первое колебание должно существенно уменьшать производную потока. Поэтому рост величины $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ в начальной фазе сжатия должен быть гораздо более медленным, а затем значительно более быстрым, чем это следует из формулы (11). Если инерция не учитывается, то выражение для $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ в начальной фазе сжатия имеет вид

$$\frac{1}{\pi a_0^2 H_0} \frac{d}{dt} \Delta\Phi = j_0^2 \omega_e^2 t. \quad (30)$$

Учитывая влияние инерции, получаем следующую формулу для $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$ в начальной фазе:

$$\frac{1}{\pi a_0^2 H_0} \frac{d}{dt} \Delta\Phi = j_0^2 \omega_e^2 t - j_0^2 \omega_e^2 \frac{\sin \omega_m(0) t}{\omega_m(0)}. \quad (31)$$

Если разделить выражение (31) на выражение (30), то можно получить коэффициент, характеризующий относительную величину изменения $\frac{d}{dt} \Delta\Phi$, обусловленного влиянием инерции. Этот коэффициент равен

$$c = 1 - \frac{\sin \omega_m(0) t}{\omega_m(0) t}. \quad (32)$$

При $t = 0$ величина c также обращается в нуль.

При $\omega_m t = \frac{\pi}{2}$ величина c равна 0,36.

При $\omega_m t = \pi$ величина c равна 1.

При $\omega_m t = \frac{3\pi}{2}$ величина c равна 1,2.

Чем меньше $\omega_m(0)$, тем больше начальный участок осциллограммы, на котором будет существенно сказываться влияние инерции.

В. И. Коган

О ВЫХОДЕ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ *

В работе рассматриваются некоторые вопросы, касающиеся выхода термоядерных реакций $D-D$, а именно: 1) область применимости простого аналитического выражения для выхода (формула Бете—Аткинсона); 2) влияние «обрезания хвостов» максвелловского распределения ионных скоростей; 3) наиболее выгодное (при заданной вложенной энергии) число частиц для политропического закона сжатия реагирующей плазмы; 4) наиболее выгодное (при заданном токе) погонное число частиц в системе с плазменным током, работающей в автомодельном режиме (с учетом температурного отрыва ионов от электронов).

§ 1. Область применимости формулы Бете—Аткинсона. Эффективная энергия реагирующих ионов

Для последующего рассмотрения изложим (в удобных для нас обозначениях) вывод известной формулы Бете—Аткинсона для выхода термоядерных реакций.

Рассмотрим однородную высокотемпературную дейтериевую плазму с плотностью ионов (и электронов) n и температурой (в энергетической шкале) T . В этом случае ядерные реакции происходят между частицами равной массы, и для числа их в единице объема плазмы за единицу времени можно прямо воспользоваться известной газокинетической формулой [1]

$$R_1 = n^2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{M}{\pi T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{Mu^2}{4T}} \sigma(u) u^3 du. \quad (1.1)$$

* Работа выполнена в 1953 г.

Здесь M — масса иона; $\sigma(u)$ — эффективное сечение рассматриваемой реакции как функция относительной скорости ионов u . Во всей интересующей нас здесь области энергий $\sigma(u)$ имеет «кулоновский подбарьерный» вид

$$\sigma(u) \approx \frac{a}{u^2} e^{-\frac{2\pi e^2}{\hbar u}}, \quad (1.2)$$

где a — постоянная, характерная для данной реакции.

В частности, для реакции $D + D \rightarrow He^3 + n$ при энергиях дейтронов $E_d < 150$ кэв имеем [2]

$$\sigma = \frac{140}{E_d(\text{кэв})} \exp\left(-\frac{44,4}{\sqrt{E_d(\text{кэв})}}\right) \cdot 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (1.3)$$

Подстановка (1.2) в (1.1) и замена переменной $\frac{Mu^2}{4T} = x$ (в дальнейшем будем называть x «номером относительного хвоста») дает

$$R_1 = A \int_0^{\infty} \exp\left[-x - \frac{b(T)}{\sqrt{x}}\right] dx, \quad (1.4)$$

где

$$A = \frac{1}{2} n^2 \left(\frac{M}{\pi T}\right)^{1/2} a; \quad b(T) = \frac{\pi}{\hbar} \sqrt{\frac{Me^4}{T}} \approx \sqrt{\frac{980}{T(\text{кэв})}} \quad (1.5)$$

(мы подставили $M = M_d = 3,34 \cdot 10^{-24}$ г).

Подынтегральное выражение в (1.4) имеет максимум при

$$x_m(T) = \left[\frac{1}{2} b(T)\right]^{2/3} = \frac{6,25}{T^{1/3}_{\text{кэв}}}. \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что, например, при $T = 1$ кэв наибольший вклад в выход реакций дают взаимные столкновения ионов с относительной энергией около 6 кэв*.

Как известно, интеграл (1.4) при не слишком высоких температурах может быть аппроксимирован простой функцией температуры. Выясним условия применимости такой аппроксимации. Обозначим показатель экспоненты в (1.4) через

* *Примечание при корректуре.* В известном обзоре Поста [5] не произведен переход к относительной энергии в выражении для сечения и как следствие получен неправильный результат: коэффициент 8,1 вместо 6,25 в (1.6).

$\varphi_T(x)$ и разложим его в ряд по степеням $(x - x_m)$ до членов четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \varphi_T(x) \approx & \varphi_T(x_m) + \frac{1}{2} \varphi_T''(x_m)(x - x_m)^2 + \\ & + \frac{1}{6} \varphi_T'''(x_m)(x - x_m)^3 + \frac{1}{24} \varphi_T^{(IV)}(x_m)(x - x_m)^4, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_T(x_m) = -3x_m = -18,75T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{-1/3}; \quad \varphi_T''(x_m) \approx -0,24T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{1/3} \\ \varphi_T'''(x_m) \approx 0,096T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{2/3}; \quad \varphi_T^{(IV)}(x_m) \approx -0,054T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Эффективная «полуширина» подынтегральной функции $e^{\varphi_T(x)}$ определяется в основном вторым членом разложения (1.7) и равна

$$|x - x_m|_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{2}{|\varphi_T''(x_m)|}} \approx \frac{2,9}{T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{1/6}}. \quad (1.9)$$

На этой полуширине третий и четвертый члены разложения (1.7) достигают значений $0,385 T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{1/6}$ и $0,155 T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{1/3}$, соответственно, т. е. даже при «низких» температурах ($\sim 1 \kappa\varepsilon\varepsilon$) изменяются не намного меньше второго члена; иначе говоря, отличие формы кривой $e^{\varphi_T(x)}$ от гауссовой довольно значительно. Однако на величине интеграла (1.4) это отличие сказывается мало, в чем мы сейчас убедимся. «Опуская» в предэкспоненту более медленно меняющийся сомножитель функции $e^{\varphi_T(x)}$ и распространяя пределы интегрирования по $(x - x_m)$ от $-\infty$ до ∞ , получаем

$$\begin{aligned} R_1 \approx & A e^{\varphi_T(x_m)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} |\varphi_T''| y^2} \left[1 + \frac{1}{6} \varphi_T''' \cdot y^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \varphi_T^{(IV)} \cdot y^4 + \frac{1}{72} (\varphi_T''')^2 y^6 \right] dy. \end{aligned}$$

Первый поправочный член, очевидно, дает при интегрировании нуль, а оба следующих дают поправки одинакового порядка величины. Результат имеет вид

$$R_1 = A \frac{5,1}{T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{1/6}} (1 + 0,022 T_{\kappa\varepsilon\varepsilon}^{1/3}) e^{-3x_m(T)}. \quad (1.10)$$

Таким образом, поправка к формуле Бете—Аткинсона, обусловленная отличием функции $e^{\varphi_T(x)}$ от гауссовой, во всей

области температур, в которой справедлива формула (1.3) ($T \ll 100$ кэв), незначительна, и всюду в дальнейшем будем ею пренебрегать. С учетом (1.5), (1.6) и (1.3) окончательно получаем следующее выражение для интенсивности реакций $D + D \rightarrow He^3 + n$:

$$R_1 \approx 8,9 \cdot 10^{-15} \frac{n^2}{T_{кэв}^{3/2}} \exp\left(-\frac{18,75}{T_{кэв}^{1/2}}\right) \text{ см}^{-3} \text{ сек}^{-1}, \quad (1.11)$$

где n — в см^{-3} . Полная интенсивность D—D-реакций, включая и реакцию $D + D \rightarrow H^3 + p$, получается, с хорошей точностью, удвоением величины (1.11).

Для последующего важно отметить, что при температурах, представляющих практический интерес ($T \geq 1$ кэв), максимум подынтегральной функции в (1.4) оказывается довольно широким. Действительно, отношение ширины области спада этой функции в e раз, $2|x - x_m|_{\text{эфф}}$, к «номеру оптимального относительного хвоста» x_m , согласно (1.6) и (1.9), равно $0,93 T_{кэв}^{1/6} \sim 1$.

§ 2. Влияние «обрезания хвостов» максвелловского распределения ионных скоростей на выход реакций

Формулы § 1 относились к плазме со строго максвелловским распределением ионных скоростей. В реальных условиях газового разряда могут существовать факторы, обуславливающие более или менее значительное отличие распределения скоростей от максвелловского. К числу таких факторов относятся сильные электрические поля, электроды, нейтральная «шуба» вокруг горячей плазмы и др. Для выхода ядерных реакций основную роль играет вид функции распределения в ее «хвостовой» части, где она может спадать как медленнее, так и быстрее, чем в максвелловском случае. Рассмотрим лишь второй случай — так называемое «обрезание хвостов» максвелловского распределения. При этом не будем рассматривать какого-либо конкретного механизма обрезания хвостов, а рассчитаем выход реакций, отвечающий некоторому упрощенному распределению скоростей. Результаты такого расчета вполне достаточны для оценок выхода реакций в реальных случаях, когда истинная функция распределения известна, скажем, из решения соответствующей кинетической задачи (см. также замечание на стр. 117).

Итак, рассмотрим два распределения скоростей (в неподвижной системе координат), отвечающие одним и тем же

значениям полной плотности ионов n и средней энергии иона $\bar{\epsilon}$: 1) максвелловское распределение $f_0(\mathbf{v})$ при температуре $T = \frac{2}{3} \bar{\epsilon}$; 2) обрезанное максвелловское распределение $f(\mathbf{v})$, имеющее вид

$$f(\mathbf{v}) = \begin{cases} B e^{-\frac{Mv^2}{2\theta}} & \text{при } v \leq v_0, \\ 0 & \text{при } v > v_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Постоянные B и θ определяются (как функции заданных T и v_0) указанными выше условиями нормировки*

$$\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n; \quad \int \frac{Mv^2}{2} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{3}{2} nT. \quad (2.2)$$

Подставляя сюда (2.1), получаем после простого вычисления следующее уравнение для величины $v_0 = \frac{\epsilon_0}{\theta} \left(\epsilon_0 \equiv \frac{1}{2} Mv_0^2 \right)$:

$$\frac{3}{2v_0} \left[1 - \frac{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} v_0^{3/2} e^{-v_0}}{\operatorname{erf}(\sqrt{v_0}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0^{1/2} e^{-v_0}} \right] = \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0}, \quad (2.3)$$

где $\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — функция Крампса. Постоянные B и θ выражаются через v_0 по формулам

$$B = n \left(\frac{M}{2\pi\epsilon_0} \right)^{3/2} \frac{v_0^{3/2}}{\operatorname{erf}(\sqrt{v_0}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0^{1/2} e^{-v_0}}; \quad (2.4)$$

$$\theta = \frac{\epsilon_0}{v_0} = T \left[1 - \frac{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} v_0^{3/2} e^{-v_0}}{\operatorname{erf}(\sqrt{v_0}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0^{1/2} e^{-v_0}} \right]^{-1}. \quad (2.5)$$

При $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ (т. е. и $v_0 \rightarrow \infty$) θ и B стремятся к максвелловским значениям: $\theta \rightarrow T$, $B \rightarrow n \left(\frac{M}{2\pi T} \right)^{3/2}$, и $f(\mathbf{v})$ переходит в $f_0(\mathbf{v})$.

* Отметим, что в соотношения между макроскопическими величинами часто входит не температура в строгом смысле, а именно средняя энергия частиц. Это относится часто, например, к формуле $\mathcal{E}^2 = 4c^2 N_1 T$ для плазменного шнура, где под T надо понимать, в общем случае, $\frac{2}{3}\bar{\epsilon}$.

Для иллюстрации приведем следующую таблицу.

Таблица 1

$\varepsilon_0/\bar{\varepsilon}$	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,50	4,00
$v_0 = \varepsilon_0/\theta$	1,44	2,19	2,85	3,43	3,96	4,91	5,80
θ/T	2,07	1,56	1,32	1,20	1,13	1,07	1,03

Найдем распределение относительных скоростей, отвечающее распределению «абсолютных» скоростей (2.1). Распределение скоростей для пар частиц, нормированное на единицу, имеет вид

$$dw(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left(\frac{B}{n}\right)^2 e^{-\frac{M}{2\theta}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2} d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \quad (2.6)$$

Отсюда получаем следующее распределение по скоростям центра инерции $\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ и относительным $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$:

$$dw(\mathbf{V}, \mathbf{u}) = \left(\frac{B}{n}\right)^2 e^{-\frac{M}{2\theta}\left(2V^2 + \frac{1}{2}u^2\right)} dV d\mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Искомое распределение $dw(\mathbf{u})$ получается интегрированием этого выражения по углам вектора \mathbf{u} и по пространству вектора \mathbf{V} , определяемому неравенствами $0 \leq v_1 \leq v_0$, $0 \leq v_2 \leq v_0$, или

$$0 \leq \left| \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \right| \leq v_0; \quad 0 \leq \left| \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{u} \right| \leq v_0. \quad (2.8)$$

Для интегрирования по \mathbf{V} выберем сферические координаты с полярной осью вдоль \mathbf{u} . После тривиального интегрирования по азимуту остается произвести интегрирование по V и по $\cos \theta_V = \frac{\mathbf{uV}}{uV}$. Пределы интегрирования определяются из (2.8); возведение в квадрат и т. д. дает

$$0 \leq V \leq \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{4} u^2}, \quad (2.9)$$

а также

$$-\frac{\left(V^2 + \frac{1}{4}u^2\right)}{uV} \leq \cos \theta_V \leq \frac{v_0^2 - \left(V^2 + \frac{1}{4}u^2\right)}{uV},$$

$$-\frac{\left[v_0^2 - \left(V^2 + \frac{1}{4}u^2\right)\right]}{uV} \leq \cos \theta_V \leq \frac{V^2 + \frac{1}{4}u^2}{uV}.$$

Кроме того, $-1 \leq \cos \theta_V \leq 1$. Имея в виду, что $V^2 + \frac{1}{4}u^2 \geq uV$ и что $v_0^2 - \left(V^2 + \frac{1}{4}u^2\right) = uV$ при $V = v_0 - \frac{1}{2}u$, получаем следующие пределы интегрирования по $\cos \theta_V$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } 0 \leq V \leq v_0 - \frac{1}{2}u: \quad -1 \leq \cos \theta_V \leq 1; \\ \text{при } v_0 - \frac{1}{2}u \leq V \leq \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{4}u^2}: \\ -\frac{\left[v_0^2 - \left(V^2 + \frac{1}{4}u^2\right)\right]}{uV} \leq \cos \theta_V \leq \frac{v_0^2 - \left(V^2 + \frac{1}{4}u^2\right)}{uV}. \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Выполняя вышеуказанным образом интегрирование выражения (2.7), находим окончательно следующее распределение относительных скоростей:

$$dw(u) = \left(\frac{B}{n}\right)^2 \cdot 4\pi^{5/2} \left(\frac{\theta}{M}\right)^{3/2} u^2 e^{-\frac{Mu^2}{4\theta}} \left\{ \operatorname{erf} \left[\sqrt{\frac{M}{\theta}} \left(v_0 - \frac{u}{2} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{4\theta}{\pi M}} \frac{1}{u} \left[e^{-\frac{M}{\theta} \left(v_0 - \frac{u}{2} \right)^2} - e^{-\frac{M}{\theta} \left(v_0 - \frac{u}{2} \right)^2} \right] \right\} du. \quad (2.11)$$

При $v_0 \rightarrow \infty$ распределение (2.11) переходит в обычное максвелловское распределение относительных скоростей

$$dw_0(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{T}\right)^{3/2} u^2 e^{-\frac{Mu^2}{4T}} du,$$

а при $u = 2v_0$ оно обращается в нуль (как и должно быть, поскольку максимальная относительная скорость равна удвоенной максимальной абсолютной скорости).

Интенсивность ядерных реакций от распределения $f(v)$ получается с помощью (2.11) по формуле, аналогичной (1.1) и (1.4). Интенсивность реакций, отвечающая распределению $f_0(v)$, дается прямо формулой (1.4). Для отношения этих интенсивностей получаем, вводя снова $\nu_0 = \frac{\varepsilon_0}{\theta}$,

$$\gamma(T; \varepsilon_0) \equiv \frac{R_1}{(R_1)_0} = \sqrt{\frac{T}{\theta}} \times$$

$$\times \frac{\int_0^{2\nu_0} \exp \left\{ -x - \frac{1}{\sqrt{x}} b(\theta) + \ln \left[\operatorname{erf}(\sqrt{2\nu_0} - \sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left(e^{-(\sqrt{2\nu_0} - \sqrt{x})^2} - e^{-(2\nu_0 - x)} \right) \right] \right\} dx}{\left[\operatorname{erf}(\sqrt{\nu_0}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \nu_0^{1/2} e^{-\nu_0} \right]^2 \int_0^{\infty} \exp \left[-x - \frac{1}{\sqrt{x}} b(T) \right] dx} \quad (2.12)$$

где функция b определена второй из формул (1.5), а ν_0 и θ выражаются через T и ε_0 по формулам (2.3) и (2.5). При $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$, очевидно, $\gamma \rightarrow 1$.

Численное значение γ определяется в основном соотношением между $2\nu_0$ и $x_m(\theta) \approx x_m(T)$ [ср. (1.6) и табл. 1]. Поскольку обрезавший подынтегральный множитель $[\operatorname{erf}(\sqrt{2\nu_0} - \sqrt{x}) - \dots]$ заметно отличается от единицы лишь при $|x - 2\nu_0| \leq 1$, ясно, что при ν_0 , заметно превышающим $\frac{1}{2} x_m$, положение максимума x_m^* подынтегральной функции числителя и ее ход вблизи x_m^* будут мало отличаться от соответствующих величин знаменателя, так что γ будет близко к единице. Поэтому те значения $\varepsilon_0/\bar{\varepsilon}$, которым отвечают, согласно (2.3), значения $\nu_0 > \frac{1}{2} x_m \approx 3T_{\kappa\varepsilon}^{-1/3}$, практически безопасны с точки зрения снижения выхода реакций, и дополнительного рассмотрения требуют лишь распределения с небольшими $\varepsilon_0/\bar{\varepsilon}$, для которых $\nu_0 \leq 3T_{\kappa\varepsilon}^{-1/3}$. Таким образом, для практически интересных температур $T \geq 1 \kappa\varepsilon$ опасные значения $\varepsilon_0/\bar{\varepsilon} \leq 2,5$ (ср. табл. 1), что соответствует очень сильному обрезанию распределения скоростей.

Числитель выражения (2.12) вычисляем, разлагая показатель экспоненты в ряд вблизи x_m^* и т. д. (ср. § 1). Довольно громоздкий численный расчет приводит к следующей табл. 2 значений γ для нескольких значений $T = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}$ и $\varepsilon_0/\bar{\varepsilon}$.

Таблица 2

Отношение интенсивностей ядерных реакций от распределения (2.1) и максвелловского распределения (при одинаковых значениях n и $\varepsilon \equiv \frac{3}{2}T$).

$T, \text{эв}$	200	500	1000
$\varepsilon_0/\bar{\varepsilon}$			
2,0	0,0026	0,043	0,22
2,5	0,0090	0,12	0,34
3,0	0,033	0,24	0,49

Как видно из этой таблицы, при $T \geq 500$ эв даже сильное обрезание хвостов не приводит к резкому снижению выхода реакций по сравнению со случаем строго максвелловского распределения. Этот результат связан с тем, что в этой области температур «номер оптимального относительно хвоста» сравнительно невелик (так, при $T \geq 1$ кэв $x_m \leq 6$, т. е. соответствующий интервал «абсолютных хвостов» $\leq 3 \div 4$), а эффективная область энергий около x_m довольно широка (см. конец § 1). Таким образом, приходим к следующему окончательному выводу: при всех средних энергиях ионов, представляющих практический интерес, обрезание хвостов не может резко снизить выход термоядерных реакций; проблема обрезания хвостов существенна лишь при столь низких средних энергиях, которые и при строго максвелловском распределении дают незначительный выход реакций.

Из изложенного, между прочим, следует, что любой метод нахождения конкретной функции распределения $f(v)$, основанный на выборе максвелловского распределения в качестве нулевого приближения, имеет отношение к вопросу о выходе ядерных реакций только в практически безопасной, с точки зрения снижения выхода, области (для $T \geq 1$ кэв). При исследовании же «опасного» обрезания хвостов ($\varepsilon_0/\bar{\varepsilon} \leq 2$) максвелловское распределение уже не может служить хорошим нулевым приближением при решении кинетической задачи. Впрочем, столь резко искаженные распределения едва ли могут осуществляться в условиях эксперимента.

Интенсивность реакций в газе моноэнергетических частиц.*
В заключение вычислим интенсивность ядерных реакций в воображаемом газе, все частицы которого обладают, при

* Добавлено при подготовке к печати.

изотропном распределении скоростей, одной и той же энергией $E_0 \equiv \frac{Mv_0^2}{2}$. Для такого газа распределение относительных скоростей v , нормированное на единицу, имеет вид

$$dw_{\perp}(v) = \begin{cases} \frac{vdv}{2v_0^2} & (0 \leq v \leq 2v_0), \\ 0 & (v > 2v_0). \end{cases} \quad (2.13)$$

Соответственно, интенсивность ядерных реакций, сечение которых зависит от v по закону

$$\sigma(v) = \frac{a}{v^2} e^{-\frac{b}{v}}, \quad (2.14)$$

пропорциональна величине [угловые скобки означают усреднение по распределению (2.13)]

$$\langle v\sigma(v) \rangle_{\perp} = \frac{ab}{2v_0^2} \int_{b/2v_0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^2} = \frac{ab}{2v_0^2} \left[\frac{2v_0}{b} e^{-\frac{b}{2v_0}} + Ei\left(-\frac{b}{2v_0}\right) \right], \quad (2.15)$$

где Ei — интегральная экспонента. В области применимости формулы (2.14) имеем $\frac{b}{2v_0} \gg 1$, так что

$$\langle v\sigma(v) \rangle_{\perp} \approx \frac{2a}{b} e^{-\frac{b}{2v_0}}. \quad (2.16)$$

Сравним эту интенсивность с интенсивностью реакций в газе с максвелловским распределением скоростей для одинаковых значений плотности числа частиц и энергии на одну частицу. Для максвелловского газа $\langle v\sigma \rangle_M$ даётся формулами § 1, причем температура T связана с v_0 , по условию, соотношением $\frac{3}{2}T = \frac{1}{2}Mv_0^2$. Вычисленные отношения интенсивности реакций $D-D$ для максвелловского и моноэнергетического распределений сведены в таблицу:

$T, \text{кэВ}$	0,1	0,3	1,0	3,0	10	30	100
$\langle v\sigma \rangle_M / \langle v\sigma \rangle_{\perp}$	$3,9 \cdot 10^{10}$	$6,3 \cdot 10^4$	57	4,0	1,1	0,74	0,67

Эта таблица дает наглядное представление о роли, которую играет для протекания термоядерных реакций наличие «хво-

стов» энергетического распределения. При малых энергиях выход реакций в «моноэнергетическом» газе пренебрежимо мал вследствие более резкой зависимости интенсивности (2.16) от средней энергии, чем это имеет место в максвелловском газе. То, что обе интенсивности сравниваются вблизи $T = 10 \text{ кэВ}$, можно пояснить следующим образом. В максвелловском газе, согласно § 1, эффективная относительная энергия реагирующих ионов близка к $\frac{6,25}{T_{\text{кэВ}}^{1/3}} \cdot T$, а в моноэнергетическом газе, согласно (2.13)—(2.16), $v_{\text{эфф}} \approx 2v_0$, так что указанная энергия близка к $3T$; обе энергии сравниваются при $T \approx 9 \text{ кэВ}$.

§ 3. Зависимость выхода реакций от числа частиц и закона изменения объема плазмы. Оптимальное число частиц

Настоящий параграф посвящен выяснению оптимальных значений некоторых величин для термоядерного реактора, работающего в импульсном режиме. Пусть плазма, являющаяся «рабочим телом» реактора, испытывает импульс нагрева. Полное число ядерных реакций $D(d, n) \text{He}^3$ во всем объеме плазмы за время импульса равно, согласно (1.11),

$$R = 8,9 \cdot 10^{-15} \int \frac{N^2}{V T_{\text{кэВ}}^{2/3}} \exp\left(-\frac{18,75}{T_{\text{кэВ}}^{1/3}}\right) dt, \quad (3.1)$$

где N — полное число ионов в объеме плазмы V .

Подынтегральное выражение в (3.1) зависит от времени. Изменением числа частиц N за время импульса нагрева будем пренебрегать ($R \ll N$). Примем, далее, что температура и объем плазмы в процессе ее нагрева связаны соотношением

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\kappa, \quad (3.2)$$

где V_0 , T_0 — начальные объем и температура; κ — постоянная*. Для изохорического процесса $\kappa = 0$, для адиабатического процесса $\kappa = -\frac{3}{2}$, для так называемого линейного автомобильного режима работы реактора с плазменным шнуром [3, 4] $\kappa = -1$, и т. д.

* Она связана с n — показателем политропы $pV^n = \text{const}$ — соотношением $\kappa = \frac{1}{1-n}$.

Подынтегральное выражение во всей интересующей нас области значений T (< 100 кэв) и κ (примерно от $\kappa = -2$ до $\kappa = \frac{1}{2}$) есть быстро возрастающая функция температуры. Поскольку сама температура является, по предположению, более или менее сильно меняющейся функцией времени с максимумом, подынтегральное выражение как функция времени имеет узкий максимум. Таким образом, выход нейтронов за один импульс нагрева равен

$$R \approx 8,9 \cdot 10^{-15} \frac{T_0^{\kappa}}{V_0} N^2 T_{\text{макс}}^{-\kappa - \frac{2}{3}} \exp\left(-\frac{18,75}{T_{\text{макс}}^{1/3}}\right) \tau, \quad (3.3)$$

где $T_{\text{макс}}$ — максимальная температура (кэв); τ — эффективная длительность импульса реакций*.

Рассмотрим вопрос о выборе оптимальных значений N в следующей постановке: при каком N максимален выход реакций R для фиксированных значений V_0 , T_0 , τ , κ и W — максимальной тепловой энергии плазмы? **

Подчеркнем, что условия, оптимальные с точки зрения максимальной величины выхода реакций, не являются таковыми с точки зрения, например, энергетического самоподдерживания реакций, и обратно. Большая целесообразность той или другой постановки задачи на оптимум зависит, очевидно, от характера работы реактора (в частности, от эффективности использования получающихся нейтронов).

Величина W , разумеется, меньше полной энергии, затрачиваемой внешними источниками в импульсе (скажем, энергии конденсаторов $\frac{1}{2} CV^2$). Для целей оценки будем считать, что отношение этих энергий (т. е. к.п.д. реактора) не зависит от N . По определению W имеем

$$W = \frac{3}{2} N (T_e + T_i)_{\text{макс}}. \quad (3.4)$$

При «безотрывном» режиме $T_i = T_e \equiv T$, так что

$$T_{\text{макс}} = \frac{W}{3N} \quad (3.5)$$

* Оценка τ для системы с плазменным шнуром приводится в § 4.

** Нахождение оптимума при заданном W имеет особенно простой смысл для реактора с плазменным шнуром, когда W связано соотношением (4.5) с током $\mathcal{I}_{\text{макс}}$.

(значок «макс» в дальнейшем опускаем). Подставляя (3.5) в (3.3), получаем

$$R_x(N) = \text{const} \cdot N^{x + \frac{8}{3}} \exp \left[-18,75 \left(\frac{3N}{W} \right)^{1/3} \right]. \quad (3.6)$$

Для интересующих нас значений x имеем $x + \frac{8}{3} > 0$, так что функция $R_x(N)$ имеет максимум при некотором оптимальном $N = \tilde{N}$ (при $N \gg \tilde{N}$ выход реакций мал из-за низкой температуры, а при $N \ll \tilde{N}$ — в основном из-за малой плотности плазмы).

Поскольку \tilde{N} , как легко сообразить, пропорционально W , то для каждого x существует, в силу (3.5), своя оптимальная температура \tilde{T} , отвечающая максимальному (при заданных W , V_0 , T_0 и τ) выходу реакций. Подставляя N из (3.5) в (3.3) или (3.6) и находя максимум получающейся при этом функции $R_x(T)$, находим

$$\tilde{T}_x(\kappa\varepsilon v) = \frac{245}{\left(x + \frac{8}{3}\right)^3}. \quad (3.7)$$

В частности, для изохорического режима ($x = 0$): $\tilde{T} \approx 13 \text{ кэв}^*$; для режима адиабатического сжатия ($x = -\frac{3}{2}$): $\tilde{T} \approx 150 \text{ кэв}^{**}$; для линейного автомодельного режима ($x = -1$): $\tilde{T} \approx 53 \text{ кэв}$.

Оптимальное число частиц, согласно (3.5) и (3.7), равно

$$\tilde{N} = 0,85 \left(x + \frac{8}{3}\right)^3 10^{16} W, \quad (3.8)$$

где W выражено в килоджоулях. На основании (3.3), (3.5), (3.7) и (3.8) окончательно имеем (T_0 — в кэв, W — в кдж, V_0 — в см³, τ — в сек):

$$R_x(N) = 3,9 \cdot 10^{22} \frac{W^2 T_0^x}{V_0} \left(\frac{3x + 8}{18,75} \right)^{3x+8} \left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^{\frac{8}{3} + x} \times \\ \times \exp \left[-(3x + 8) \left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^{1/3} \right] \tau. \quad (3.9)$$

* Это условие, как нетрудно видеть, совпадает с условием оптимума при заданном давлении (последнее предложено С. И. Брагинским).

** Это значение имеет, разумеется, лишь порядковый смысл, так как при столь высоких температурах нарушается справедливость формулы Бете—Аткинсона (§ 1).

Максимально возможное при данных V_0 , T_0 , τ , κ и W число реакций равно

$$R_x(\tilde{N}) = 3,9 \cdot 10^{14} \frac{W^2}{V_0} (10^{-3} T_0)^\kappa \left(\frac{3\kappa + 8}{5,1} \right)^{3\kappa + 8} \tau; \quad (3.10)$$

оно пропорционально квадрату энергии, вложенной в плазму.

Во всем интересующем нас интервале κ — от режимов адиабатического сжатия или даже сжатия, несколько более близкого к изотермическому $\left[\kappa \approx (-2) \div \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$, до режимов слабого расширения $\left(0 < \kappa \leq \frac{1}{2} \right)$ — функция (3.10) быстро спадает с ростом κ . Для иллюстрации приведем отношение максимальных выходов реакций при адиабатическом и изохорическом режимах (для одних и тех же V_0 , T_0 , τ и W)

$$\frac{[R(\tilde{N})]_{\text{адиаб}}}{[R(\tilde{N})]_{\text{изохор}}} \approx \frac{8 \cdot 10^6}{[T_0(\text{эВ})]^{3/2}}. \quad (3.11)$$

Таким образом, даже при сравнительно высоких начальных температурах (скажем, $T_0 \sim 100$ эВ) различие максимальных выходов в пользу адиабатического режима весьма значительно.

Выясним, насколько широк максимум функции $R_x(N)$ вблизи $N = \tilde{N}$ и, следовательно, насколько чувствителен выход реакций к выбору полного числа частиц. Согласно (3.9) и (3.10), имеем

$$\frac{R_x(N)}{R_x(\tilde{N})} = \exp \left\{ -(3\kappa + 8) \left[\left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^{1/3} - \ln \left(\frac{N}{\tilde{N}} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\}. \quad (3.12)$$

Крутизна спада этой функции по обе стороны от максимума при $N = \tilde{N}$ сильно зависит от κ . Для иллюстрации сказанного приведем табл. 3.

Из этой таблицы видно, что режим адиабатического сжатия характеризуется широким максимумом функции $R(N)$ и потому мало чувствителен к отклонению от оптимального числа частиц на порядок в обе стороны, тогда как режим с постоянным объемом (и, тем более, режимы расширения) весьма чувствителен даже к сравнительно небольшим отклонениям \tilde{N} от \tilde{N} . Общей чертой максимумов функций $R_x(\tilde{N})$ для всех κ является, как и должно быть, значительно более быстрый спад в сторону $N > \tilde{N}$, чем в сторону $N < \tilde{N}$.

Таким образом, адиабатический и близкие к нему режимы нагрева обладают (при одинаковых W , T_0 , V_0 и τ) большим преимуществом перед изохорическим и тому подобными ре-

Отношение (3.12) выхода реакций при данном числе частиц N к максимально возможному для различных режимов изменения объема плазмы

N/\tilde{N}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3
x							
$-3/2$ (адиаб.)	0,0075	0,078	0,44	1	0,26	0,0008	$\sim 10^{-10}$
0 (изохор.)	$\sim 10^{-5}$	0,0025	0,15	1	0,05	$\sim 10^{-7}$	$\sim 10^{-23}$

жими как с точки зрения величины максимально возможного выхода реакций, так и с точки зрения наличия широкой области выгодных N . Даже при работе вдали от \tilde{N} преимущество режимов сжатия остается ощутимым. Так, если адиабатический и изохорический процессы происходят при одинаковых значениях T_0 , V_0 , τ , W и N , то «адиабатический» выход превышает «изохорический» в $\left(\frac{T_{\text{макс}}}{T_0}\right)^{3/2}$ раз; этот множитель в практически интересных случаях довольно велик.

§ 4. Оптимальное число частиц в плазменном шнуре с учетом температурного отрыва ионов от электронов. Эффективная длительность импульса ядерных реакций

Все сказанное в § 3 относилось к режимам «безотрывного» нагрева плазмы, когда температуры электронов и ионов одинаковы. Между тем при тех режимах, при которых существенную роль в нагреве ионов играет энергия, получаемая ими от электронов, соотношение между T_i и T_e зависит от числа частиц в плазме: при малых N , вследствие ослабления энергообмена электронов с ионами, эффективное отношение T_i/T_e может быть существенно меньше единицы [3]*. Поэтому для получения заметного выхода реакций при указанных режимах нужно работать с достаточно большим числом частиц. Заметим, впрочем, что и при режиме адиабатического сжатия, когда энергообмен электронов с ионами мал, достаточно большое N может оказаться необходимым для вырав-

* Напротив, при адиабатическом сжатии «магнитной стенкой», «бетатронном» нагреве и т. п. ионы получают энергию прямо от внешних полей, так что T_i/T_e не зависит от N .

нивания T_i и T_e на начальной, неадиабатической стадии разогрева плазмы, до ее отрыва от стенок.

Рассмотрим вопрос об оптимальном числе частиц в термоядерном реакторе применительно к системе с плазменным шнуром (в отсутствие продольного магнитного поля) в той же постановке, что и в § 3, но с учетом температурного отрыва ионов от электронов. Согласно теории автомодельных режимов работы такой системы, развитой С. И. Брагинским [3] и С. И. Брагинским и В. Д. Шафрановым [4], изменение величины $\vartheta \equiv \frac{2T_i}{T_i + T_e}$ в процессе нагрева описывается уравнением

$$\frac{3}{2} \dot{\vartheta} = \frac{2}{s} [3\Pi (1 - \vartheta) - \vartheta f(k)]. \quad (4.1)$$

Здесь $\Pi \equiv N_1 \frac{e^2}{M_d c^2}$ — безразмерное «погонное число» (M_d — масса дейтрона; $\frac{e^2}{M_d c^2} \equiv r_0 = 0,769 \cdot 10^{-16}$ см; N_1 — число дейтронов на единице длины шнура); $s \equiv \pi \sigma a^2 / c^2$ — «время магнитной диффузии» (a — радиус шнура; σ — проводимость); k — «показатель автомодельности», определяемый соотношением $k^2 = 4s\mathcal{J}/\mathcal{I}$ (\mathcal{J} — сила тока); функция $f(k)$ имеет вид

$$f(k) = \frac{k^2}{4} \left[\frac{I_0^2(k)}{I_1^2(k)} - 1 \right], \quad (4.2)$$

где I_0 , I_1 — бесселевы функции от мнимого аргумента. Величина s удовлетворяет уравнению $\dot{s} = 2f(k)$.

Приравнивая (4.1) нулю, находим стационарное (максимальное) значение $\vartheta = \vartheta_1$ (которым, очевидно, и определяется в основном выход реакций)

$$\vartheta_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3\Pi} f(k)}. \quad (4.3)$$

Отметим, что этот результат справедлив для не слишком больших k . При $k \rightarrow \infty$ (адиабатическое сжатие) совместное решение уравнений для ϑ и s приводит к асимптотическому результату $\vartheta(t) \rightarrow \vartheta(0)$. Однако для интересующих нас $k \leq 10^*$ и $\Pi \geq 1$ (4.3) дает хорошую оценку эффективного значения ϑ .

* Значение $k_{\max} \sim 10$ получаем, принимая $\mathcal{J} \sim 10^6$ а; $\mathcal{I} \sim 10^{12}$ а сек⁻¹, $s \sim 10^{-4}$ сек.

Найдем приближенную связь между величинами k и κ [ср. (3.2)], полагая $T_i \approx T_e$. Из приведенных формул для s , δ , k^2 и соотношений $\mathcal{J}^2 = 4c^2 N_1 T$, $\sigma a^2 \propto T^{3/2} V$ нетрудно получить уравнение

$$\frac{\dot{V}}{V} + \frac{3}{2} \frac{\dot{T}}{T} = \frac{4f(k) \dot{T}}{k^2 T},$$

интегрирование которого дает, в сопоставлении с (3.2),

$$\kappa = \frac{4f(k)}{k^2} - \frac{3}{2} = \frac{I_0^2(k)}{I_1^2(k)} - \frac{5}{2}. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.2) и (4.4) иллюстрируются табл. 4.

Т а б л и ц а 4

k	< 1	1	1,65 (ивохор.)	3,1	5	10	20	∞ (адиаб.)
$f(k)$	1	1,02	1,04	1,19	1,59	2,77	5,0	∞
κ	$4/\kappa^2$	2,6	0,0	-1,0	-1,25	-1,4	-1,45	-1,50

Найдем оптимальное (отвечающее наибольшему выходу реакций) погонное число ионов П. Введенная в § 3 величина W связана простым соотношением с током $\mathcal{J}_{\text{макс}}$. Действительно, сопоставляя формулу (3.4) с формулой $\mathcal{J}^2 = 2c^2 N_1 (T_e + T_i)$ [3], получаем (W_1 — максимальная тепловая энергия единицы длины шнура)

$$W_1 = \frac{3}{4} \frac{\mathcal{J}_{\text{макс}}^2}{c^2}. \quad (4.5)$$

Как и в § 3, воспользуемся формулой (3.3), в которую в качестве $T_{\text{макс}}$ подставим $(T_i)_{\text{макс}}$. Вводя далее $\vartheta_{\text{макс}} = \vartheta_1$ из (4.3), учитывая (3.4), (4.5) и (4.4) и выражая N через П, получаем

$$R_k(\Pi) = \text{const} \exp \left\{ -18,75 \left[\frac{4c^2}{\mathcal{J}_{\text{макс}}^2 r_0} \left(\Pi + \frac{1}{3} f(k) \right) \right]^{1/3} + \left(\frac{4f(k)}{k^2} - \frac{5}{6} \right) \ln \left[\Pi + \frac{1}{3} f(k) \right] + 2 \ln \Pi \right\}. \quad (4.6)$$

Здесь в постоянную включены, в частности, длина шнура и эффективная длительность импульса ядерных реакций τ . Последнее допустимо, поскольку τ очень слабо зависит от П.

Действительно, ограничиваясь учетом экспоненциальной зависимости выхода реакций от температуры, заменяя в этой экспоненте $T(t)$ на $\frac{\mathcal{J}^2(t)}{4c^2 N_1}$ и разлагая ее в ряд по $(t - t_1)$ вблизи максимума тока $\mathcal{J}(t_1)$ (изменение тока предполагается синусоидальным), нетрудно получить следующую, полезную для оценок, формулу:

$$R \approx R_1(t_1) \tau_{\text{эфф}}, \quad \tau_{\text{эфф}} = 0,225 T_{\text{кэв}}^{1/6} \frac{\pi}{\omega} = 0,5 \frac{\mathcal{J}_{\text{макс}}^{1/3}}{\Pi^{1/6}} \cdot \frac{\pi}{\omega}, \quad (4.7)$$

где $\frac{\pi}{\omega}$ — полупериод тока, а $\mathcal{J}_{\text{макс}}$ — его амплитудное значение в мегаамперах*.

Условие максимума функции (4.6) при заданных $\mathcal{J}_{\text{макс}}$ и k дает следующее уравнение для оптимального $\Pi = \check{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \check{\Pi} \left\{ \left[\check{\Pi} + \frac{1}{3} f(k) \right]^{7/3} - \left[\frac{12}{k^2} f(k) + \frac{7}{2} \right] \left(\frac{\mathcal{J}_{\text{макс}}}{\mathcal{J}_0} \right)^{2/3} \right\} = \\ = 2f(k) \left(\frac{\mathcal{J}_{\text{макс}}}{\mathcal{J}_0} \right)^{2/3}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где \mathcal{J}_0 — постоянная с размерностью тока, равная

$$\mathcal{J}_0 = 3\sqrt{3} \pi \frac{e}{\hbar} M_a c^2 \approx 7,7 \cdot 10^6 \text{ а} \quad (4.9)$$

При достаточно больших токах, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{J}_{\text{макс}} \gg \mathcal{J}_1(k) \equiv \mathcal{J}_0 \left[\frac{12f(k)}{k^2} + \frac{7}{2} \right]^{-2} \left| \frac{29f(k)}{6} - \frac{4f^2(k)}{k^2} \right|^{1/2}, \quad (4.10)$$

решением уравнения (4.8) является

$$\check{\Pi} \approx \left[\frac{12f(k)}{k^2} + \frac{7}{2} \right]^3 \left(\frac{\mathcal{J}_{\text{макс}}}{\mathcal{J}_0} \right)^2. \quad (4.11)$$

Поскольку это значение $\check{\Pi}$ достаточно велико (так что, согласно (4.3) и определению ϑ , T_i близко к T_e), оно, как и должно быть, в точности соответствует найденному в § 3 оптимальному числу частиц (3.8) в «безотрывном» случае; в этом легко убедиться с помощью (4.4), (4.5) и т. д.

Приведем табл. 5 значений $\mathcal{J}_1(k)$ для нескольких k .

* Заметим, что в интересующем нас интервале значений $\mathcal{J}_{\text{макс}}$ и Π величина $\tau_{\text{эфф}}$, согласно (4.7), не особенно мала по сравнению с π/ω .

k	$\ll 1$	1	1,65	3	5	10
\mathcal{J}_1, a	$10^5 \kappa^3$	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$

Таким образом, для таких режимов, когда нагрев плазмы сопровождается ее сжатием ($k > 1,65$ — ср. табл. 4), условие (4.10) выполняется лишь при очень больших токах. Поэтому уравнение (4.8) приходится решать численно. Соответствующие результаты сведены в табл. 6.

Для ионной и электронной температур легко получить, исходя из (4.3) и т. д., формулы

$$T_i \approx 120 \frac{\mathcal{J}^2}{\Pi + \frac{1}{3} f(k)}; \quad T_e = T_i \left[1 + \frac{2f(k)}{3\Pi} \right], \quad (4.12)$$

где T_i, T_e — в килоэлектрон-вольтах, \mathcal{J} — в мегаамперах. В табл. 7 приведены вычисленные по этим формулам для $\Pi = \check{\Pi}$ значения T_i и (в скобках) T_e , отвечающие значениям табл. 6.

Как видно из табл. 6,* $\check{\Pi}$ при данном $\mathcal{J}_{\text{макс}}$ слабо зависит от k . Это является результатом взаимной компенсации двух эффектов: отмеченного в § 3 влияния закона сжатия и отрыва T_i от T_e .

Как и должно быть, зависимость $\check{\Pi}$ от $\mathcal{J}_{\text{макс}}$ при учете отрыва оказывается более слабой, чем по «безотрывной» формуле (4.11). Так, вплоть до $\mathcal{J}_{\text{макс}} \sim 10^6 a$ $\check{\Pi}$ примерно пропорционально $\mathcal{J}_{\text{макс}}$; при этом в области $\mathcal{J}_{\text{макс}} \sim (2 \cdot 10^5 \div 1 \cdot 10^6) a$ имеем $\check{\Pi} \sim 1$.

Согласно табл. 7, оптимальные значения $\Pi = \check{\Pi}$ соответствуют более или менее существенному температурному отрыву ионов от электронов. Это показывает, что стремление к обеспечению полной безотрывности ($T_i = T_e$) лишено достаточных оснований и не может, само по себе, оправдать выбора режимов с типичным в настоящее время значением $\Pi \sim 100 \gg \check{\Pi}$ (при $\mathcal{J}_{\text{макс}} \leq 1$ млн. a). Как видно из табл. 3 (сохраняющей качественный смысл и при учете отрыва), уже снижение Π со 100 до 10 могло бы дать (при том же токе) увеличение выхода реакций на несколько порядков, тогда как дальнейшее снижение Π с 10 до $\check{\Pi} \sim 1$ дало бы уже

* Последующие замечания относятся в основном к режимам с $k \geq 3$.

Оптимальные значения числа дейтронов на 1 см плазменного шнура (\bar{N}_1) для некоторых режимов сжатия
(в скобках указаны соответствующие значения $\Pi = \Pi^*$)

\mathcal{J} k	$k\sigma, a$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
1,65 (изохор.)		$3,6 \cdot 10^{15}$ (0,28)	$8,3 \cdot 10^{15}$ (0,64)	$3,4 \cdot 10^{16}$ (2,65)	$1,2 \cdot 10^{17}$ (9,3)	$4,7 \cdot 10^{17}$ (36,5)	$2,9 \cdot 10^{18}$ (225)
3		$3,0 \cdot 10^{15}$ (0,23)	$5,5 \cdot 10^{15}$ (0,42)	$1,5 \cdot 10^{16}$ (1,15)	$3,9 \cdot 10^{16}$ (3,0)	$1,3 \cdot 10^{17}$ (10)	$7,4 \cdot 10^{17}$ (57)
5		$3,25 \cdot 10^{15}$ (0,25)	$5,85 \cdot 10^{15}$ (0,45)	$1,4 \cdot 10^{16}$ (1,05)	$3,2 \cdot 10^{16}$ (2,45)	$9,0 \cdot 10^{16}$ (6,9)	$4,55 \cdot 10^{17}$ (35)
10		$4,55 \cdot 10^{15}$ (0,35)	$7,8 \cdot 10^{15}$ (0,60)	$1,7 \cdot 10^{16}$ (1,3)	$3,4 \cdot 10^{16}$ (2,6)	$8,2 \cdot 10^{16}$ (6,3)	$3,5 \cdot 10^{17}$ (27)

* Величины N_1 и Π связаны соотношением $N_1 (\text{см}^{-1}) = 1,30 \cdot 10^{16} \Pi$.

Оптимальные температуры ионов и электронов ($k\sigma e$)

\mathcal{J} k	$k\sigma_{\text{макс}}, a$	10^5	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
1,65		1,9 (6,6)	4,8 (10)	10 (13)	12 (13)	13 (13)	13 (13)
3		1,9 (8,5)	5,9 (17)	19 (32)	35 (44)	46 (50)	52 (53)
5		1,5 (7,8)	4,9 (16)	19 (38)	40 (57)	65 (75)	84 (86)
10		0,95 (5,9)	3,2 (13)	13,5 (33)	34 (58)	66 (85)	108 (115)

гораздо меньший выигрыш. Таким образом, весьма желательно создание устойчивого вплоть до $\mathcal{I}_{\text{макс}} \sim (3 \div 5) \cdot 10^5$ а плазменного шнура хотя бы с $\Pi \sim 10$. При работе же с $\Pi \sim 100$ для получения температур, близких к оптимальным, необходимо пропускать через плазму токи порядка нескольких мегаампер (см. табл. 6).

В заключение приншу благодарность М. А. Леонтовичу за обсуждение результатов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М. ГТТИ, 1951.
2. В. А. Давиденко, А. М. Кучер, Н. С. Погребов, Ю. Ф. Тутуров, Отчет АН СССР, 1951 г.; Ядерные реакции на легких ядрах, М., Атомиздат, 1957.
3. С. И. Брагинский, отчет АН СССР, 1952 г.; ЖЭТФ, 33, 645 (1957).
4. С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов, см. настоящий том, стр. 26.
5. R. Post, Rev. Mod. Phys., 28, 338 (1956); УФН, 61, 491 (1957).

В. Д. Шафранов

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА
ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
И ПРОВОДЯЩЕГО КОЖУХА ***

Работа посвящена исследованию гидродинамической устойчивости плазменного шнура при использовании стабилизирующих средств. Такими стабилизирующими средствами являются:

- 1) применение хорошо проводящего кожуха, коаксиального с плазменным шнуром;
- 2) применение продольного магнитного поля.

На возможность использования проводящего кожуха для стабилизации плазменного шнура указал М. А. Леонтович [6]. Стабилизирующее действие продольного магнитного поля на несжимаемый шнур с током, изогнутый по винтовой линии, было ранее рассчитано М. А. Леонтовичем и В. Д. Шафрановым [7] для частного случая, когда продольное поле внутри шнура равно нулю.

Исследование устойчивости плазменного шнура производится на основе уравнений магнитной гидродинамики. Впервые этот метод применен Б. А. Трубниковым [8], исследовавшим неустойчивость плазменного шнура с однородным осевым током по отношению к перетяжкам. В настоящей работе предполагается, что проводимость плазмы и кожуха достаточно велика и ток течет только в тонком поверхностном слое (идеальная проводимость $\sigma = \infty$). В этом случае расчеты значительно проще, чем с распределенным по сечению током, и оказывается возмож-

* Работа выполнена в 1953 г. и переработана при подготовке к печати. Добавлены новые графики. В сжатом виде ее основные результаты были доложены и опубликованы ранее [1]. Аналогичным вопросам посвящены работы [2—5].

ным исследовать устойчивость по отношению к произвольным возмущениям при различном сочетании продольных полей и кожуха.

В данной работе исследованы: стабилизирующее действие идеально проводящего кожуха на возмущения, неоднородные по оси и азимуту; стабилизирующее действие внешнего продольного магнитного поля на возмущения произвольной формы; стабилизирующее действие замороженного в шнур продольного магнитного поля; совместное влияние на стабилизацию продольного поля и проводящего кожуха. Исследован также спектр колебаний в плазменном шнуре с продольным магнитным полем.

§ 1. Качественное рассмотрение

Многие результаты исследования устойчивости можно вывести из свойств магнитных силовых линий. Как известно, силы, создаваемые магнитным полем, таковы, что силовые линии магнитного поля имеют тенденцию сокращаться и одновременно отталкиваться друг от друга. В случае обычного пинч-эффекта, когда ток течет вдоль оси плазменного шнура, силовые линии — концентрические окружности. Силы, действующие на выделенный в плазме слой, показаны на рис. 1, *а* стрелками. Это силы радиального сжатия (из-за тенденции силовых линий к сокращению) и силы, сдавливающие слой вдоль оси шнура (из-за отталкивания силовых линий). При искривлении шнура сдавливающие силы имеют равнодействующую, направленную в сторону увеличения искривления (рис. 1, *б*), так что возникшие случайно возмущения продолжают нарастать.

Если в плазменном шнуре, кроме осевого тока, имеется азимутальный ток, то, наряду с азимутальной компонентой магнитного поля H_{φ} , имеется компонента магнитного поля, направленного вдоль шнура (продольное магнитное поле). Вопрос о создании такого поля в шнуре изучался теоретически в работе [9]. Силы, создаваемые этим продольным полем, показаны на рис. 2, *а*. Отталкивание силовых линий продольного поля приводит к радиальному расталкиванию шнура, а сокращение силовых линий — к растяжению слоя вдоль оси шнура. При искривлении шнура силы растяжения дают результирующую, направленную в сторону уменьшения искривления (рис. 2, *б*). На этом основана стабилизация замороженным продольным полем.

Суммарную силу, возникающую при искривлении, можно определить по формуле

$$f = \frac{\Delta l}{R} \int P_{zz} \cdot 2\pi r dr. \quad (1.1)$$

Здесь $P_{zz} = p + \frac{H_\varphi^2}{8\pi} - \frac{H_{zi}^2}{8\pi}$ — суммарное давление газа и магнитного поля на площадку, перпендикулярную к оси шнура; Δl — толщина слоя; R — радиус кривизны изгиба. В интеграле от $H_\varphi^2/8\pi$ интегрирование следует произвести до расстояний порядка длины искривления λ , так как на больших расстояниях искажение поля незначительно.

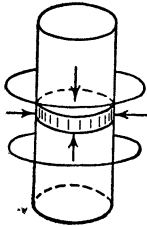


Рис. 1. Силы, действующие на плазменный шнур со стороны магнитного поля осевого тока.

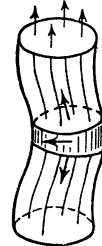
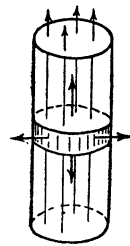
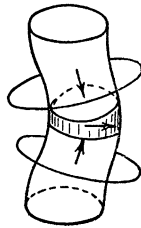


Рис. 2. Силы, действующие на плазменный шнур со стороны внутреннего продольного поля

В предположении $\lambda \gg a$ ошибка от неопределенности предела интегрирования невелика. Поле снаружи можно считать равным $H_\varphi(r) = H_\varphi(a) \cdot \frac{a}{r} = \frac{2I}{cr}$. Выполняя интегрирование, находим

$$f = \frac{\pi a^2 \Delta l}{R} \left\{ p + \frac{H_\varphi^2(a)}{4\pi} \ln \frac{\lambda}{a} - \frac{H_{zi}^2}{8\pi} \right\}. \quad (1.2)$$

Из условия равновесия, как известно [9], следует

$$p + \frac{H_{zi}^2}{8\pi} = \frac{H_\varphi^2(a)}{8\pi}. \quad (1.3)$$

Исключая из f давление p , находим (с логарифмической точностью)

$$f = \frac{\pi a^2 \Delta l}{R} \left\{ \frac{H_\varphi^2(a)}{4\pi} \ln \frac{\lambda}{a} - \frac{H_{zi}^2}{4\pi} \right\}. \quad (1.4)$$

Из требования $f < 0$ получаем условие устойчивости

$$\frac{H_{zi}^2}{H_\varphi^2} > \ln \frac{\lambda}{a}. \quad (1.5)$$

Так как из (1.3) следует, что $H_{zi}^2 < H_{\varphi}^2$, то ясно, что одним замороженным продольным полем нельзя стабилизировать длинноволновые возмущения $\lambda \gg a$. Эти возмущения можно стабилизировать проводящим кожухом, окружающим шнур [6].

Стабилизирующее действие проводящего кожуха основано на деформации силовых линий тока, смещенного из положения равновесия. Если шнур с током приближается к кожуху, то силовые линии сгущаются с одной стороны шнура и разрежаются с другой. Избыток давления магнитного поля возвращает шнур в центр кожуха.

Нетрудно получить также качественный критерий устойчивости относительно возмущений типа перетяжек шнура, неустойчивость которых в отсутствие продольного поля была показана Б. А. Трубниковым [8]. При изменении радиуса шнура на величину δa из условия сохранения тока $I = caH_{\varphi}(a)/2$ и потока продольного поля внутри шнура $\Phi = H_{zi}\pi a^2$ имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \pi a^2 \delta H_{zi} + 2\pi a \delta a H_{zi} = 0; \\ \frac{2}{c} \delta I &= H_{\varphi} \delta a + a \delta H_{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отсюда находим изменение величины магнитного поля

$$\delta H_{zi} = -H_{zi} \frac{2\delta a}{a}; \quad \delta H_{\varphi} = -H_{\varphi} \cdot \frac{\delta a}{a}. \quad (1.7)$$

Давление магнитного поля изменяется на величину $\frac{H_{\varphi}^2}{4\pi} \times \frac{\delta a}{a}$, а давление продольного поля — на величину $\frac{H_{zi}^2}{2\pi} \cdot \frac{\delta a}{a}$. Газокинетическое давление выравнивается вдоль шнура за счет перетекания плазмы из сужений в расширенные части шнура. Поэтому возмущения стабилизируются, если избыток давления продольного поля превосходит избыток давления азимутального поля, т. е.

$$H_{zi}^2 > \frac{1}{2} H_{\varphi}^2. \quad (1.8)$$

Если продольное магнитное поле имеется и вне шнура $H_{ze} \neq 0$, то результаты оказываются иными. В этом случае магнитные силовые линии вне шнура идут по винтам. В таком поле не всякое искривление шнура приводит к изменению магнитного поля между шнуром и кожухом. Так, если возмущения идут вдоль силовой линии, то деформации силовых линий не происходит. Поэтому такие возмущения являются неустойчивыми, шнур может искривиться в винтовую линию

с шагом, равным шагу винта магнитной силовой линии $2\pi a \times \frac{H_{ze}}{H_\varphi}$. Максимальный шаг винтовой линии, форму которой может принять шнур, ограничен, однако, размерами системы $\lambda_m \leq L$. Поэтому если взять продольное поле достаточно сильным, так чтобы шаг силовой линии был больше λ_m , то искривление шнура не возникнет. На этом основан метод стабилизации сильным продольным полем. Критерий устойчивости в этом случае имеет вид

$$\frac{H_{ze}}{H_\varphi} > \frac{\lambda_m}{2\pi a}. \quad (1.9)$$

Возможный вид неустойчивостей плазменного шнура не ограничен, однако, рассмотренными двумя типами возмущений (извивание и перетяжки). Учет всех возможных видов возмущений можно сделать в линейном относительно возмущений приближении методом, изложенным в следующем разделе.

§ 2. Метод исследования неустойчивости цилиндрического плазменного шнура

Предположим, что внутри круглой камеры с идеально проводящими стенками радиуса b имеется плазменный шнур. Идеализируя задачу, примем, что шнур имеет резкую границу и весь ток течет по цилиндрической поверхности шнура радиуса a

$$r = a. \quad (2.1)$$

Предположим теперь, что форма шнура изменилась так, что поверхность его приняла вид

$$r = a + \xi(z, \varphi, t), \quad (2.2)$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ — произвольная функция. Будет ли искажение шнура увеличиваться, так что шнур в конечном итоге потеряет свою первоначальную форму, коснется стенок и т. п.? Задачу о поведении шнура легко решить в предположении, что отклонение от первоначального состояния невелико

$$\xi \ll a. \quad (2.3)$$

В этом случае уравнения, описывающие поведение плазменного шнура, можно линеаризовать, смещение представить в виде суперпозиции волн $\exp \left\{ i \left(\frac{kz}{a} + m\varphi + \omega_{m,k} t \right) \right\}$:

$$\xi(z, \varphi, t) = \sum_{k, m} \xi_{k, m} e^{i \left(\frac{k}{a} z + m\varphi + \omega_{m, k} t \right)} \quad (2.4)$$

и рассматривать в отдельности возмущения типа (в комплексной форме)

$$\xi(z, \varphi, t) = \xi(a) \cdot e^{i\left(\frac{k}{a}z + m\varphi + \omega t\right)}. \quad (2.5)$$

$k/a = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; λ — длина волны возмущения.

При $m=0$ имеем возмущения типа перетяжек; при $m=1$ — возмущения, при которых ось шнура принимает форму синусоиды или винтовой линии; при $m=2, 3 \dots$ ось шнура не искривляется, но шнур принимает форму перекрученной

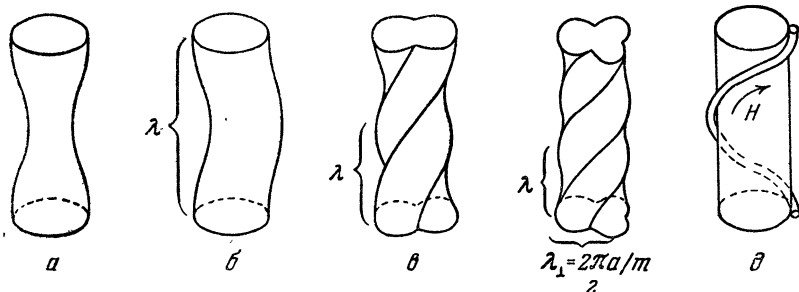


Рис. 3. Характер возмущений с различными значениями m :
 $a - m=0$; $b - m=1$; $c - m=2$; $d - m=3$; $e -$ возмущения, идущие вдоль силовой линии.

ленты ($m=2$) или разбивается на m жгутов ($m=3, 4 \dots$, рис. 3).

Исследование устойчивости этих возмущений основано на уравнениях магнитной гидродинамики идеально проводящей жидкости. Условия применимости этих уравнений к плазме хорошо известны. Отметим здесь только, что уравнение для определения искажений магнитного поля в плазме

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}] \quad (2.6)$$

справедливо лишь при частотах, значительно меньших циклотронной частоты ионов $\omega \ll \omega_H$ (см., например, [8]). Это ограничение существенно при исследовании спектра колебаний системы (§ 4); на критерий устойчивости оно, по-видимому, не влияет.

Решение уравнений для возмущений с применением граничных условий на поверхности возмущенного шнура и на поверхности кожуха приводит к дисперсионному соотношению, из которого определяется значение ω^2 . При $\omega^2 < 0$

имеется решение, нарастающее со временем. Условие устойчивости $\omega^2 > 0$ приводит к следующему критерию [1]:

$$k^2 h_i^2 / \varphi_1(k, m) + (m - kh_e)^2 / \tilde{\varphi}_2(k, m) > 1, \quad (2.7)$$

или

$$h_i > \frac{\varepsilon m \varphi_1 + \sqrt{(\tilde{\varphi}_2 + \varepsilon^2 \varphi_1 - m^2) \varphi_1 \tilde{\varphi}_2}}{k(\tilde{\varphi}_2 + \varepsilon^2 \varphi_1)}, \quad (2.8)$$

где

$$h_i = \frac{H_{zi}}{H_z}; \quad h_e = \frac{H_{ze}}{H_z}; \quad \varepsilon = \frac{h_e}{h_i} = \frac{H_{ze}}{H_{zi}}; \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(k, m) &= k \frac{I_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m; \quad \tilde{\varphi}_2(k, m) = \\ &= \frac{\varphi_2(k, m) - \gamma_m(kb) \varphi_1(k, m) I_m(k) / K_m(k)}{1 + \chi_m(kb) I_m(k) / K_m(k)}; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(k_1 m) &= k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m; \quad \chi(kb) = \\ &= \frac{kb K_{m-1}(kb) + m K_m(kb)}{kb I_{m-1}(kb) - m I_m(kb)}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

b —отношение радиуса кожуха к радиусу шнура.

§ 3. Результаты исследования устойчивости

1) В отсутствие продольного магнитного поля и проводящего кожуха неустойчивыми являются все возмущения с волновым числом $k > k_m$ [1]. Значения k_m приведены ниже:

m	0	1	2	3	4	$m \gg 1$
k_m	0	0	3,0	8,0	15,0	m^2

Проводящий кожух не влияет на неустойчивость возмущений типа перетяжек. Границы областей устойчивости и неустойчивости для $m = 1, 2, 3 \dots$ при наличии кожуха радиуса b изображены на рис. 4.

2) Чем ближе отношение радиусов кожуха и шнура к единице, тем более короткие длины волн стабилизируются кожухом. С другой стороны, короткие длины волн, вплоть до $\lambda = 2\pi a / 0,45 = 14 a$, стабилизируются замороженным продольным полем (см. [1]). При условии $ka \ll 1$ условие устойчивости относительно возмущений с $m = 1$ при наличии в моро-

женного поля (в отсутствие внешнего продольного поля) можно записать в виде

$$\frac{H_{zi}^2}{H_{\varphi}^2} > \ln \frac{2}{k} - 0,577 - \chi_1(kb).$$

При $kb \ll 1$ $\chi_1(kb) = \frac{2}{kb}$; при $kb \gg 1$ функция $\chi_1(kb)$ экспоненциально убывает. Таким образом, правая часть неравен-

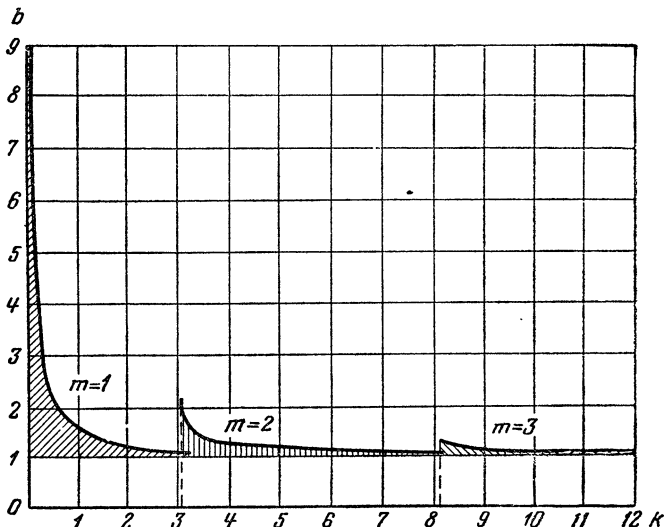


Рис. 4. Границы области устойчивости для $m \neq 0$ при наличии идеально проводящего кожуха при отсутствии продольного магнитного поля.

b — отношение радиуса кожуха к радиусу шнура a ; $k = \frac{2\pi a}{\lambda}$, λ — длина волны возмущений. Области устойчивости для $m = 1, 2, 3$ при $k > k_m$ заштрихованы. Кривая $m = 1$ при $k \rightarrow 0$ идет, как $b = \sqrt{2/k} \left(\ln \frac{2}{k} - 0,577 \right)^{1/2}$.

ства, рассматриваемая как функция k , имеет экстремум максимум. Если максимальное значение правой части неравенства меньше единицы, то необходимое для устойчивости отношение $H_{zi}/H_{\varphi} < 1$, и в принципе оказывается возможной стабилизация всех возмущений с $m = 1$. На рис. 5 представлена диаграмма устойчивости этих возмущений. Возмущения $m = 0, 2, 3 \dots$ стабилизируются полностью сравнительно небольшим продольным полем $H_{zi} \geq 0,707 H_{\varphi}$.

3) Если продольное поле имеется не только внутри, но и снаружи шнура, то условия устойчивости возмущений $m = 1$

ухудшаются вследствие того, что шнур получает возможность искривляться вдоль силовой линии суммарного внешнего поля, не искажая при этом внешнего поля. На рис. 6 в качестве примера показана диаграмма устойчивости для случая $H_{ze} = \frac{1}{2} H_{zi}$, $m = 1$.

Возмущения $m = 0, 2, 3 \dots$ стабилизируются при $h_i^2 \geq \geq 0,5 \{1 + \varepsilon^2 / (b^2 - 1)\}$.

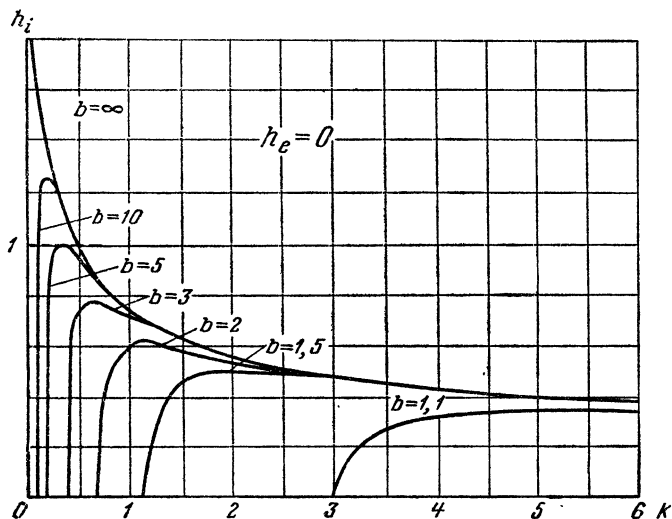


Рис. 5. Границы области устойчивости возмущений $m = 1$ при отсутствии внешнего продольного поля.

Приведены кривые минимальных значений отношения внутреннего продольного поля к полю осевого тока $h_i = H_{zd}/H_z$, необходимого для стабилизации возмущений с волновым числом $k = 2\pi a/\lambda$. Параметром кривых является отношение радиуса кожуха к радиусу шнура. Кривая $b = \infty$ при $k \rightarrow 0$ идет, как $h_i = \left(\ln \frac{2}{k} - 0,577\right)^{1/2}$.

4) Диаграмма абсолютной устойчивости (безотносительно к типам возмущения) изображена на рис. 7 для различных отношений внешнего продольного поля к внутреннему $\varepsilon = \frac{H_{ze}}{H_{zi}} < 1$. При $\varepsilon \rightarrow 1$ величина стабилизирующего поля неограниченно растет. При $b = 1$, например, должно выполняться условие $h_i^2 > 1/4(1 - \varepsilon^2)$. Отсюда следует, что для получения абсолютной устойчивости при $H_z \gg H_c$ необходимо некоторое превышение внутреннего продольного поля над внешним $1/\varepsilon^2 > 1 + 1/4h_i^2$.

5) Если внешнее продольное поле равно внутреннему полю или превосходит его, то области абсолютной устойчивости не существует. В этом случае, однако, возможна стабилизация шнура конечной длины. Длина шнура ограничивает максимальную длину волны возмущения. Более коротковолновые возмущения стабилизируются продольным полем.

При равенстве внутреннего и внешнего продольного поля критерий устойчивости имеет вид (при условии, что макси-

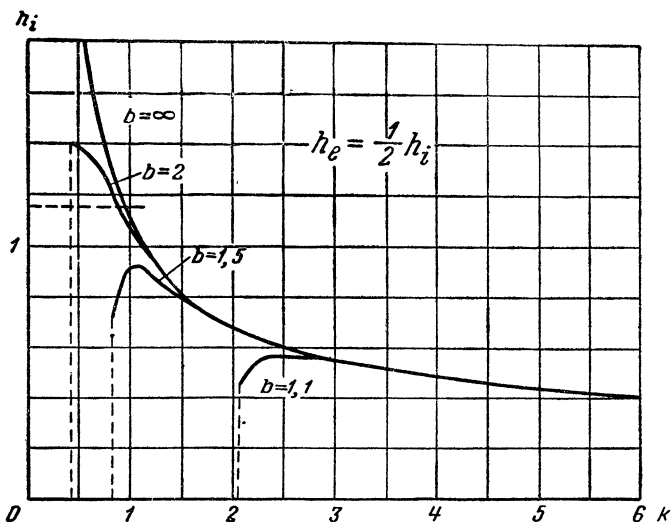


Рис. 6. Границы области устойчивости возмущений $m=1$ в случае, когда внешнее продольное поле в два раза меньше внутреннего.

Кривая $b = \infty$ при $k \rightarrow 0$ идет, как $h_i = 0,8/k$. Пунктиром отмечено максимальное значение $h_{i \text{ макс}}$, совместимое с условием равновесия.

мально возможная длина волны возмущения $\lambda_{\text{макс}}$ велика по сравнению с длиной окружности сечения шнура)

$$\frac{H_{ze}}{H_z} > \frac{\lambda_{\text{макс}}}{2\pi a}. \quad (3.1)$$

Если внутри шнура продольное поле полностью отсутствует, то критерий таков

$$\frac{H_{ze}}{H_z} > \frac{\lambda_{\text{макс}}}{2\pi a} (m + \sqrt{m}). \quad (3.2)$$

Для возмущений $m=1$ этот критерий был получен ранее в работе [7].

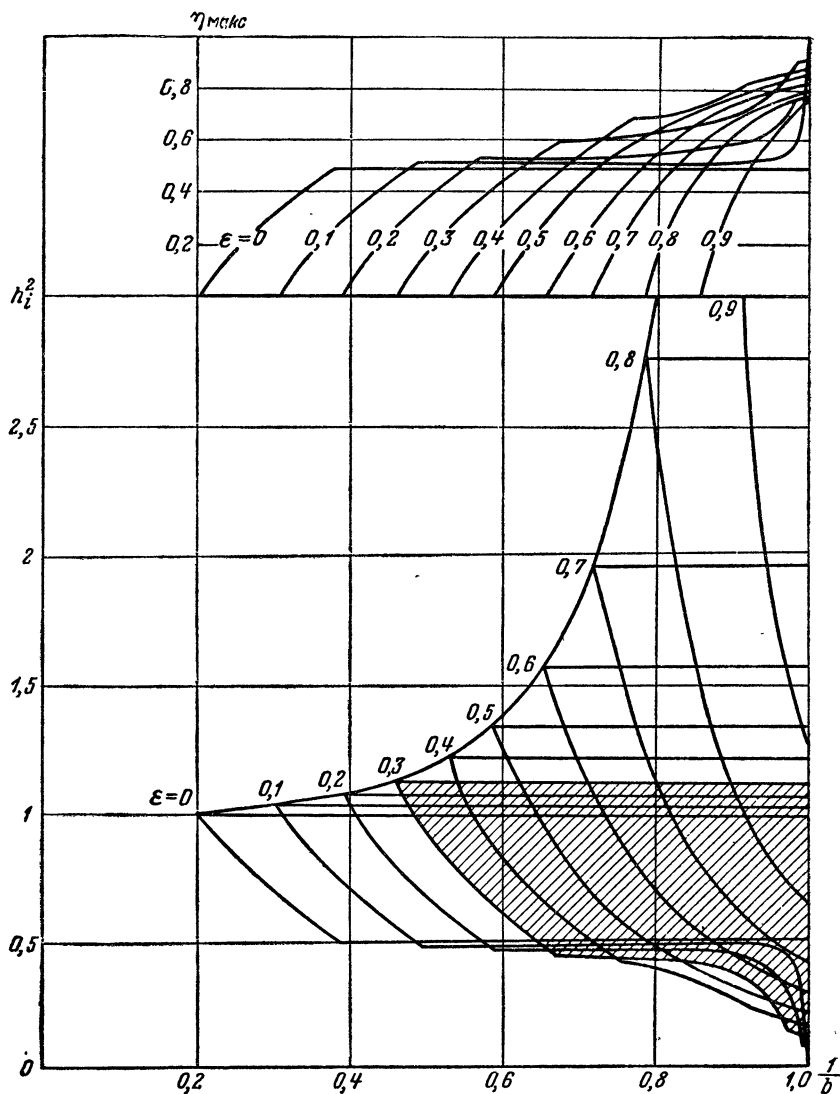


Рис. 7. Диаграмма абсолютной устойчивости (безотносительно к типам возмущений).

По оси абсцисс отложено отношение радиуса шипура к радиусу конуса. На нижнем графике по оси ординат отложено отношение квадратов внутреннего продольного поля и поля осевого тока $h_i^2 = H_{zi}^2 / H_\phi^2$. Параметром кривых является отношение внешнего продольного поля к внутреннему $\epsilon = H_{ze} / H_{zi}$. Заштрихована область устойчивости для $\epsilon = 0,3$. Области устойчивости ограничены сверху максимальным значением $h_i^2_{\max} = 1/(1 - \epsilon^2)$, совместным с условием равновесия. Снизу они ограничены минимальным значением $h_i^2_{\min}$, необходимым для стабилизации всех возмущений $m = 1$ или $m = 0$ (кривые $\epsilon = 0 \rightarrow 0,4$). На верхнем графике отложено максимальное значение отношения $\eta = 4e^2 \gamma T / I^2$, совместное с условием устойчивости $\eta_{\max} = 1 - (1 - \epsilon^2) h_i^2_{\min}$. При $b = 1$ и $\epsilon \rightarrow 1$ имеем $h_i^2_{\min} \rightarrow h_e^2 + 1/4$; $\eta_{\max} \rightarrow 0,75$.

Характер возмущений $m \geq 2$ виден из рис. 3. Шнур разбивается на m перевитых жгутов. Если жгуты идут вдоль силовых линий магнитного поля, то отношение λ_{\perp} (см. рис. 3) к длине волны возмущения λ равно

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda} = \frac{2\pi a/m}{\lambda} = \frac{H_{\phi}}{H_{z0}}. \quad (3.3)$$

При заданном отношении $H_{\phi}/H_{\phi 0}$ длина волны λ в m раз меньше шага силовой линии магнитного поля. Такие возмущения не деформируют силовых линий поля и являются, следовательно, неустойчивыми.

Условия (3.1) и (3.2) показывают, что при заданном отношении $H_{z0}/H_{\phi 0}$ возможны неустойчивые возмущения при достаточно больших значениях m . Эти возмущения, однако, при выполнении условия устойчивости по отношению к извиванию шнура (3.1), не приводят к смещению оси шнура и поэтому, возможно, не представляют опасности. Кажется естественным, что в нелинейном приближении нарастание этих неустойчивостей должно прекратиться, так как оно связано с разделением перевитых жгутов возмущений.

4. О спектре колебаний плазменного шнура

Дисперсионное уравнение для ω^2 имеет два типа решений. Один тип решений $\omega_m^2(k)$ связан с искажением формы плазменного шнура. Если возникающие при таком искажении силы направлены в сторону смещения, то такие возмущения неустойчивы; они экспоненциально нарастают ($\omega_m^2(k) < 0$). Если же силы направлены против смещения, возникают упругие колебания плазменного шнура. Эти колебания представляют собой поверхностные волны; их амплитуда убывает от края шнура к его центру. Другой тип решений — всегда положительный спектр частот $\omega_{mn}^2(k)$, соответствующий внутренним, объемным колебаниям столба плазмы. Эти колебания представляют собой стоячие волны со знакопеременной амплитудой, убывающей от центра шнура к периферии. Характер спектра проще всего уяснить на примере аксиально-симметричных колебаний. Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид [1]

$$\frac{\mathcal{J}_1(\beta a)}{\beta a \mathcal{J}_0(\beta a)} = \frac{\gamma}{2} (1 + h_e^2 - h_i^2) \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2 c^2} + h_i^2, \quad (4.1)$$

где

$$\beta^2 = \frac{(\omega^2 - k^2 c^2)(\omega^2 - k^2 c_H^2)}{\omega^2 (c^2 + c_H^2) - k^2 c^2 c_H^2}; \quad c^2 = \frac{\gamma \rho_0}{\rho_0}; \quad c_H^2 = \frac{H_i^2}{4\pi \rho_0}. \quad (4.2)$$

На рис. 8 сплошными линиями схематически изображена левая часть уравнения (4.1) как функция β^2 . Пунктиром показана правая часть уравнения. При $h_i^2 > \frac{1}{2}$ все корни $\beta_n^2 > 0$

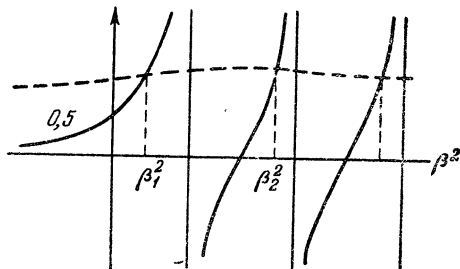


Рис. 8.

и, соответственно, $\omega_n^2 > 0$. Значения ω_n^2 , согласно (4.2), выражаются через β_n

$$\omega_n^2 = \frac{(c^2 + c_H^2)(k^2 + \beta_n^2)}{2} \pm \sqrt{\frac{(c^2 + c_H^2)(k^2 + \beta_n^2)^2}{4} - k^2 c^2 c_H^2 (k^2 + \beta_n^2)}. \quad (4.3)$$

Предположим для простоты, что $c^2 c_H^2 / (c^2 + c_H^2)^2 \ll 1$ (либо $c^2 \gg c_H^2$ либо $c_H^2 \gg c^2$), тогда одно решение

$$\omega_n^2 = (c^2 + c_H^2)(k^2 + \beta_n^2),$$

а другое

$$\omega_n^2 = \frac{k^2 c^2 c_H^2}{c^2 + c_H^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{k^2 c^2 c_H^2}{(c^2 + c_H^2)^2 (k^2 + \beta_n^2)} \right\}.$$

Эти решения представляют магнитозвуковые волны в плазменном шнуре (ср. [10]).

§ 5. Выводы

Исследование устойчивости плазменного шнура при наличии продольного магнитного поля показывает, что возможны два метода стабилизации шнура с помощью продольного магнитного поля:

1) стабилизация внутренним замороженным продольным полем, большим, чем внешнее продольное поле, при наличии кожуха. В этом случае имеется область устойчивости по отношению к любым возмущениям;

2) стабилизация при наличии сильного внешнего продольного поля. В этом случае расчет, сделанный в линейном приближении, показывает, что не все виды возмущений могут быть стабилизированы. Можно, однако, стабилизировать одновременно наиболее опасные возмущения типа перетяжек и возмущения, при которых ось шнура смещается из равновесного положения.

Я приношу глубокую благодарность академику М. А. Леонтовичу и С. И. Брагинскому за помощь и ценные советы. Я благодарю также Г. И. Бирюк за численные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Шафранов, *Атомная энергия*, 5, 38 (1956).
2. M. D. Kruskal, M. Schwarzschild, *Proc. Roy. Soc., A223*, 348 (1954).
3. R. J. Tayler, *Proc. Phys. Soc.*, B70, 31 (1957).
4. R. J. Tayler, *Proc. Phys. Soc.*, B70, 1049 (1957).
5. M. Rosenbluth, *Proc. 3rd Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Venice* (1957).
6. М. А. Леонтович, см. т. I настоящего издания, стр. 110.
7. М. А. Леонтович, В. Д. Шафранов, см. т. I настоящего издания, стр. 207.
8. Б. А. Трубников, см. т. I настоящего издания, стр. 289.
9. С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов, см. настоящий том, стр. 26.
10. С. И. Брагинский, *ДАН СССР*, 115, 475 (1957).

Т. Ф. Волков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРА ПЛАЗМЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

В работе исследован вопрос об устойчивости относительно возмущений типа перстяжек плазменного цилиндра с током во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси. Предполагается, что ток распределен равномерно по сечению. Показано, что при достаточно большом внешнем магнитном поле возмущения рассматриваемого типа устойчивы.

Как показано в работе Б. А. Трубникова [1], при колебаниях плазменного цилиндра с током, текущим вдоль оси, возможно возникновение неустойчивого движения типа перстяжек, т. е. такого, при котором сечение цилиндра в некотором месте сужается. Естественно ожидать, что продольное магнитное поле будет оказывать стабилизирующее действие. В предельном случае полного скин-эффекта, как видно из работы В. Д. Шафранова [2], наложение внешнего магнитного поля достаточной величины действительно приводит к устойчивости. Целью этой работы является выяснение влияния продольного магнитного поля на устойчивость малых колебаний плазменного цилиндра со стационарным током, равномерно распределенным по сечению.

1. Для возмущений стационарного состояния среду можно считать идеально проводящей. Уравнения задачи будут иметь вид (считая процесс изотермическим):

$$\begin{aligned} Mn \frac{dv}{dt} &= -T \nabla n + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } [v \mathbf{H}], \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n v &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

* Работа выполнена в 1953 г.

(M — масса иона; T — сумма температур электронов и ионов в энергетических единицах).

За нулевое приближение примем стационарное решение

$$n^{(0)} = N \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad H_{\varphi}^{(0)} = H_{\varphi} \frac{r}{a}, \quad H_z^{(0)} = H_z = \text{const}, \quad N = \frac{H_{\varphi}^2}{8\pi T}$$

(здесь H_{φ} — поле на краю цилиндра; N — плотность в центре; H_z — внешнее постоянное и однородное магнитное поле; a — радиус цилиндра). Это решение удовлетворяет уравнениям (1) при $\frac{d}{dt} = 0$ и $\mathbf{v} = 0$.

Уравнения (1) напомним в цилиндрических координатах, положив $H = H^{(0)} + H^{(1)}$, $n = n^{(0)} + n^{(1)}$. Считаем возмущения малыми, а зависимость от z , φ , t ищем в виде $e^{i(\omega t + k z + m \varphi)}$. Кроме деформаций типа перетяжек этим допускается возможность изменения формы поперечного сечения ($m > 1$) и скручивания оси цилиндра в винтовую линию ($m = 1$). Исключая магнитное поле $H^{(1)}$ и плотность $n^{(1)}$ и учитывая конкретный вид нулевого приближения, получим

$$[\lambda(1 - x^2) - (m + \chi h)^2] \mathbf{v} + \nabla A + \mathbf{F} = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (1 + h^2) \text{div } \mathbf{v} - i(m + \chi h)(xv_{\varphi} + hv_z), \\ F_x &= 2ix(xv_z - hv_{\varphi}), \\ F_{\varphi} &= 2ixhv_r - ix(m + \chi h) \text{div } \mathbf{v}, \\ F_z &= -2ixxv_r - ih(m + \chi h) \text{div } \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $x = \frac{r}{a}$, $\lambda = \frac{Ma^2}{T} \omega^2$, $h = \frac{H_z}{H_{\varphi}}$, $\chi = ka$.

К полученной системе следует добавить граничное условие, которое получится из требования, чтобы силы, действующие на поверхности цилиндра, уравнивались во все время колебаний. Пусть ξ — смещение границы, тогда должно быть

$$\left[Tn(a + \xi) + \frac{H^2(a + \xi)}{8\pi} \right]_{\text{внутри}} = \left[\frac{H^2(a + \xi)}{8\pi} \right]_{\text{снаружи}}. \quad (4)$$

Внешнее магнитное поле можно определить из уравнений $\mathbf{H} = \nabla \psi$, $\Delta \psi = 0$ и условия непрерывности его нормальной составляющей на поверхности цилиндра (см. работу [2]). Разлагая обе части равенства (4) в ряд по степеням ξ с удержа-

нием первых двух членов и подставляя значения полей снару́жи и внутри цилиндра, получаем

$$\left(2 - \frac{(m + \kappa h)^2}{\kappa \frac{K_{m-1}(\kappa)}{K_m(\kappa)} + m}\right) v_r \Big|_{x=1} = (1 + h^2) \operatorname{div} \mathbf{v} - i(m + \kappa h)(v_\varphi + h v_z) \Big|_{x=1} \quad (5)$$

(K_m — функция Макдональда).

Наиболее общие заключения о поведении λ в зависимости от κ и h можно сделать, если получить для него интегральное соотношение. Умножаем (2) на \mathbf{v}^* и интегрируем по слою цилиндра высотой в единицу. Объемный интеграл от дивергенции заменяем поверхностным, который выражается через граничные условия. В результате имеем

$$\lambda \int_V (1 - x^2) |\mathbf{v}|^2 d\tau = \int_V [(m + \kappa h)^2 |\mathbf{v}|^2 + (1 + h^2) |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2] d\tau + \left[\frac{(m + \kappa h)^2}{\kappa \frac{K_{m-1}(\kappa)}{K_m(\kappa)} + m} - 2 \right] \cdot \int_S |v_r|^2 ds. \quad (6)$$

2. Рассмотрим колебания, не зависящие от координат z и φ . Положив поэтому $m = \kappa = 0$, обозначив $\mu = \frac{\lambda}{1 + h^2}$ и введя переменные $x^2 = t$ и $xv_z = \varphi$, получим

$$\begin{aligned} \mu v_\varphi &= 0, \\ \mu v_z &= 0, \\ \varphi'' + \frac{\mu}{4} \left(\frac{1-t}{t} \right) \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и граничные условия

$$\varphi' = \frac{\varphi}{1 + h^2} \Big|_{t=1}, \quad \varphi(0) = 0.$$

Если $\mu = 0$, то v_z и v_φ произвольны, а $\varphi = 0$. При любом h имеется корень $\lambda = 0$, который вырожден с бесконечной кратностью и соответствует винтовому движению вещества цилиндра. Если же $v_z = v_\varphi = 0$, то λ может быть отлично от нуля. Решением третьего уравнения, удовлетворяющим условию при $t = 0$, является функция Уиттскера [3]

$$\varphi = M_{\frac{\sqrt{\mu}}{4}, \frac{1}{2}}(\sqrt{\mu}t) = \sqrt{\mu} t e^{-\frac{\sqrt{\mu}t}{2}} {}_1F_1\left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{4}, 2, \sqrt{\mu}t\right).$$

(${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция).

Из граничного условия при $t=1$ получаем трансцендентное уравнение для определения μ

$$\left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{4}\right) {}_1F_1\left(2 - \frac{\sqrt{\mu}}{4}, 2, \sqrt{\mu}\right) = \left(\frac{\sqrt{\mu}}{4} + \frac{1}{1+h^2}\right) {}_1F_1\left(1 - \frac{\sqrt{\mu}}{4}, 2, \sqrt{\mu}\right).$$

Пользуясь асимптотикой входящих сюда функций, можно получить спектр значений λ , соответствующих устойчивым колебаниям цилиндра. При $h=0$ имеется также корень $\lambda=0$. При $h \neq 0$ этот корень сдвигается в сторону положительных λ . Сдвиг пропорционален h^2 как при малых, так и при больших h ($\lambda \sim 24h^2$ при $h \ll 1$, $\lambda \sim 13h^2$ при $h \gg 1$).

3. Рассмотрим возмущения типа перетяжек ($m=0$). Из интегрального соотношения (6) получаем, что достаточным условием устойчивости будет:

$$xh^2 \frac{K_0(x)}{K_1(x)} - 2 > 0.$$

Отсюда видно, что труднее всего стабилизируются длинные волны (малые x). При небольших значениях h и $x \ll 1$ может быть неустойчивость. Существует такое значение $h \sim 1$, начиная с которого цилиндр будет устойчив при любых x .

Решая систему (2) при больших h ($m=0$), получаем, что собственные значения $\lambda(x, h)$ при $h \rightarrow \infty$ стремятся к $\lambda = x^2 > 0$.

Без магнитного поля имеется спектр отрицательных значений λ , пропорциональных x^2 . При больших h λ становится положительным. В промежуточной области при $h \sim 1$ функции $\lambda(x)$ обратятся в нуль при некоторых x . Найдем эти точки. Положим в системе (2) $\lambda=0$. Исключая v_z и v_φ , положив $x^2 = t$, $xv_r = \varphi$, получим уравнение для функции φ

$$t\varphi'' + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{x^2}{4}\right)\varphi = 0 \quad (8)$$

и граничные условия

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(1) = -\frac{x}{2} \frac{K_0(x)}{K_1(x)} \varphi(1).$$

Решением уравнения (8) является функция

$$\varphi = \sqrt{t} \mathcal{J}_1 \left(\sqrt{n \left(\frac{1}{h^2} - \frac{x^2}{4} \right) t} \right).$$

Обозначив $2\sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{x^2}{4}} = x$, находим из граничного условия при $t=1$

$$\frac{x\mathcal{J}_0(x)}{\mathcal{J}_1(x)} = -x \frac{K_0(x)}{K_1(x)}.$$

Уравнение легко можно решить графически. В предельном случае $x \ll 1$ получаем

$$h^2 \approx \frac{1}{\frac{\pi n}{16} + \frac{x^2}{4}}.$$

Для первой гармоники напишем точнее

$$h^2 \approx \frac{1}{\left(\frac{1}{0,8}\right)^2 + \frac{x^2}{4}}.$$

Максимальное поле требуется для стабилизации длинных волн. Необходимая для этого величина $h \approx 0,8$. Заметим, что в случае полного скин-эффекта соответствующая величина $h \approx 0,7$ ([2]), т. е. величина поля, создающего устойчивость, слабо зависит от распределения тока внутри цилиндра.

При $h=0$ кривые $\lambda(x)$, соответствующие неустойчивым колебаниям, линию $\lambda=0$ не пересекают ни при каком x . В случае $h \neq 0$ соответствующие кривые переходят при некоторых значениях x в положительную область. Начиная с $h \approx 0,8$ весь спектр лежит в области $\lambda > 0$, стремясь слиться с кривой $\lambda = x^2$ при $h \rightarrow \infty$.

Неустойчивая ветвь, для которой $\lambda \sim |x|$ (соответствующая радиальным колебаниям цилиндра) при $h \neq 0$ начинается не из нуля, а, как показано выше, из точки $\lambda \sim h^2 > 0$. Т. е. эти колебания будут устойчивыми по крайней мере для достаточно малых x . Кроме того, интегральное соотношение (6) гарантирует устойчивость этой ветви при достаточно больших h также и для любых x .

4. Укажем на следствия, которые могут быть получены из интегрального соотношения (6) для случая $m \neq 0$. Положив $h=0$, получаем, что для $m \geq 2$ и небольших x цилиндр будет устойчив за счет собственного поля. Достаточным условием устойчивости при любых m , x и h будет

$$\frac{(m + xh)^2}{x \frac{K_{m-1}(x)}{K_m(x)} + m} - 2 > 0.$$

Заметим, что когда $m = -\lambda h$, заключений об устойчивости сделать нельзя, не зная конкретной зависимости от x интегралов, входящих в (6).

Автор благодарит академика М. А. Леонтовича за обсуждение работы и советы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. А. Трубников, см. т. I настоящего издания, стр. 289.
 2. В. Д. Шафранов, см. настоящий том, стр. 130; Атомная энергия, 5, 38 (1956).
 3. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, М., ГТТИ, 1934.
-

Н. А. Борзнов, Д. В. Орлинский

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ НЕЙТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВДОЛЬ ОСИ ПРЯМОЙ ТРУБЫ ПРИ МОЩНОМ ИМПУЛЬСНОМ РАЗРЯДЕ В ДЕЙТЕРИИ *

Описаны опыты по определению распределения интенсивности нейтронного излучения вдоль оси прямой трубы. Приведены кривые зависимости нейтронного излучения от начального напряжения и от давления дейтерия.

§ 1. Введение

После обнаружения нейтронного излучения, возникающего при мощном электрическом разряде в дейтерии, была поставлена серия опытов по изучению основных свойств этого явления.

Чтобы иметь возможно более полные сведения о механизме рассматриваемого явления, было признано целесообразным исследовать распределение интенсивности излучения вдоль длины разрядного промежутка. Прежде всего необходимо выяснить степень равномерности этого распределения по оси разрядной камеры. Если нейтронное излучение имеет локальный характер, то важно установить место нахождения источника излучения, а также его протяженность и форму. Равномерное же излучение по всей длине разрядной камеры означало бы, что частицы с достаточной для ядерной реакции энергией распределены равномерно вдоль оси разряда.

С другой стороны, известно, что в условиях проводимых опытов средняя энергия частиц далеко не достаточна для получения термоядерной реакции с интенсивностью, близкой к наблюдаемой. Действительно, при токе 150 *ка*, при котором наблюдается излучение в настоящих опытах, когда число

* Работа выполнена в 1954 г.

частиц на 1 см длины разрядного промежутка составляет $N \simeq 10^{18}$ (это соответствует давлению $P = 0,06$ мм рт. ст.), температура частиц не может быть больше, чем $T = \frac{I^2}{400 \cdot N \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} \simeq 35$ эв. Эффективное сечение ядерной реакции при этой температуре настолько мало, что заметное нейтронное излучение не должно иметь место.

Следовательно, равномерное распределение нейтронного излучения по длине разряда (рис. 1, а) означало бы существование некоторого дополнительного механизма ускорения группы частиц, также равномерно распределенного вдоль оси разрядной камеры. Если же нейтронное излучение лока-

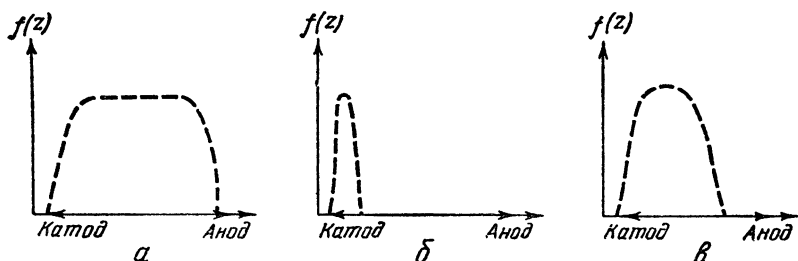


Рис. 1. Возможные кривые распределения.

лизировано в некоторой области, то это означает, что и механизм ускорения частиц также является локальным.

При этом чрезвычайно важно установить, связана ли такая локализация с наличием электродов, т. е. не получается ли ускорительный эффект в прикатодной области. В случае такого эффекта кривая распределения имела бы вид, изображенный на рис. 1, б. Если распределение излучения имеет какой-то другой вид (как, например, на рис. 1, в), то, очевидно, и механизм ускорения должен быть отличен от двух предыдущих.

Схематический чертеж разрядной камеры представлен на рис. 2. Ось z совпадает с геометрической осью трубы; l — расстояние между электродами; G — индикатор нейтронов, расположенный на высоте x и на расстоянии a от оси трубы.

Если источник нейтронов находится на оси трубы, то излучение можно представить функцией распределения $f(z)$. Число нейтронов, которое испускается с элемента длины dz , будет равно

$$dN = f(z) dz. \quad (1.1)$$

Тогда число нейтронов, попадающих на индикатор от элемента dz , равно

$$dn = \frac{AdN}{a^2 + (z-x)^2} = \frac{Af(z) dz}{a^2 + (z-x)^2}, \quad (1.2)$$

где A — некоторый фактор, зависящий от размеров индикатора.

Полное число нейтронов, падающих на индикатор во время разряда, можно найти, интегрируя выражение (1, 2), т. е.

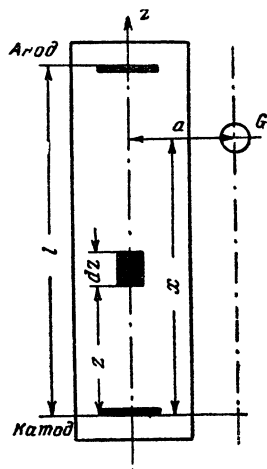


Рис. 2.

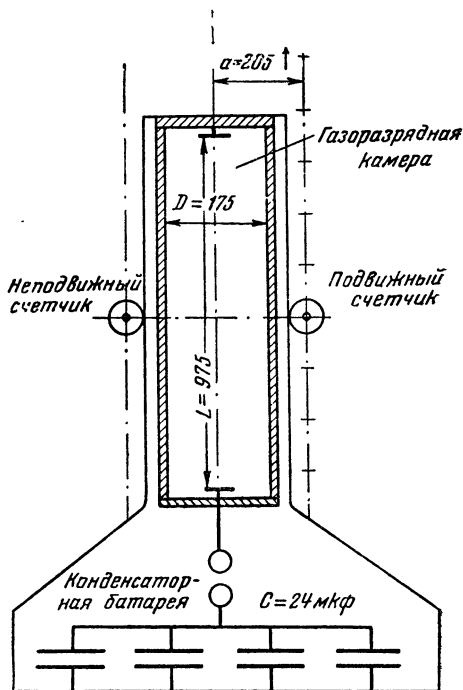


Рис. 3. Схематический чертеж трубы

$$F(x) = \int_0^l \frac{Af(z) dz}{a^2 + (z-x)^2}. \quad (1.3)$$

Цель настоящей работы заключается в экспериментальном определении интегральной функции $F(x)$ распределения интенсивности нейтронного излучения вдоль оси трубы.

Зная распределение $F(x)$, можно определить истинную (первообразную) функцию $f(z)$, по виду которой можно в какой-то степени судить о механизме исследуемого явления.

§ 2. Определение средней кривой распределения

А. Описание установки

В качестве газоразрядной камеры использовалась фарфоровая труба, закрытая с двух сторон фланцами. Расстояние между электродами равно 975 мм. Внутренний диаметр трубы 175 мм. Труба была помещена в коаксиальный фидер диаметром 350 мм. Конденсаторная батарея емкостью 24 мкф заряжалась от выпрямителя, дающего напряжение до 50 кв.

Для измерения тока плазмы между трубой и коаксиалом помещен интегрирующий пояс. Опыты по определению функции распределения нейтронного излучения производились при давлении дейтерия в трубе $P_0 = 0,06$ мм рт. ст. и напряжении на конденсаторах $U_0 = 45$ кв.

Парафиновые блоки с β -счетчиками устанавливались снаружи коаксиала (рис. 3).

Б. Измерения

Первоначально для получения интегральной кривой распределения $F(x)$ был принят следующий метод. На коаксиал устанавливались два одинаковых парафиновых блока: один блок был неподвижным и находился на расстоянии 50 см от анода, другой перемещался от опыта к опыту вдоль оси трубы. β -счетчики выбирались таким образом, что в одинаковых условиях они давали одинаковое число отсчетов.

После каждого опыта записывались показания подвижного $N_{\text{п}}$ и неподвижного $N_{\text{н}}$ счетчиков и вычислялось отношение α

$$\alpha = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{н}}}. \quad (2.1)$$

Если установить подвижный счетчик на одной высоте с неподвижным, то отношение показаний α , вообще говоря, должно быть равно единице. Это может служить контролем при измерениях. На рис. 4 показана статистическая кривая обработки 79 опытов, так называемых нулевых измерений, в которых подвижный счетчик был установлен против неподвижного. По оси абсцисс отложены интервалы значений α , по оси ординат — частота выпадения.

Имеющийся разброс можно объяснить, например, тем, что плазменный шнур во время разряда находился не на оси трубы, и его положение менялось от опыта к опыту. Однако, среднее значение $\alpha_{\text{ср}} = \frac{\sum \alpha_i}{n}$ для нулевого положения подвиж-

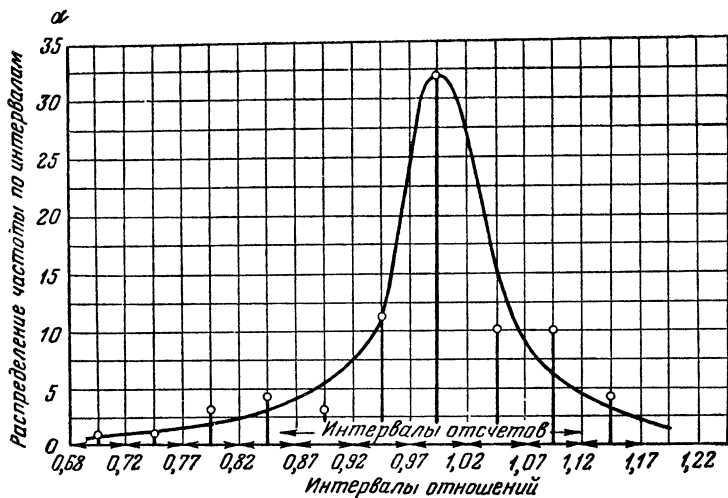


Рис. 4. Статистическая кривая.

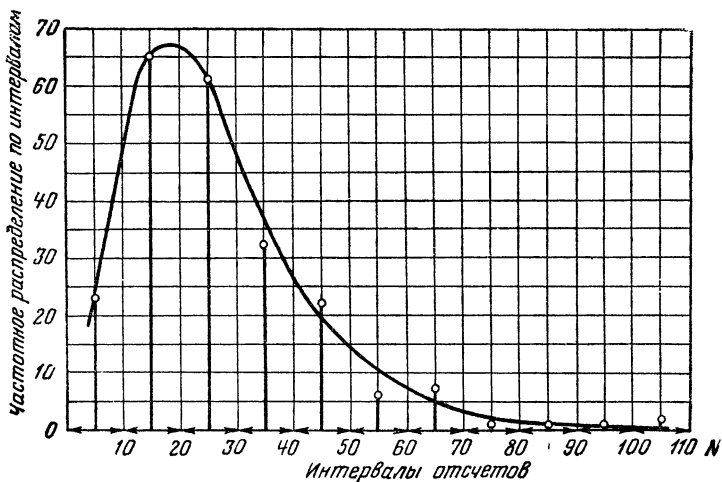


Рис. 5. Статистическая кривая распределения выхода нейтронов, зарегистрированных неподвижным счетчиком.

Общее число опытов $n = 220$. $N_{\text{макс}} = 1,9 \cdot 10^8$ нейтронов; $N_{\text{мин}} = 7 \cdot 10^7$ нейтронов.

ного блока для каждой серии проверочных опытов ($n=6$) очень близко к единице и устойчиво сохранялось в течение всего времени проведения опытов.

Кривая распределения $F(x)$ снималась следующим образом. Подвижный блок устанавливался на определенном расстоянии от нулевого положения. Для каждого положения подвижного блока проводилось 10 опытов, после чего счетчик возвращался в нулевое положение, и производилось 6 опытов для контроля относительной эффективности счетчиков $\alpha_0 = \frac{N_{п0}}{N_{н}}$. Такая периодическая проверка относительной чувствительности счетчиков устраняла возможность появле-

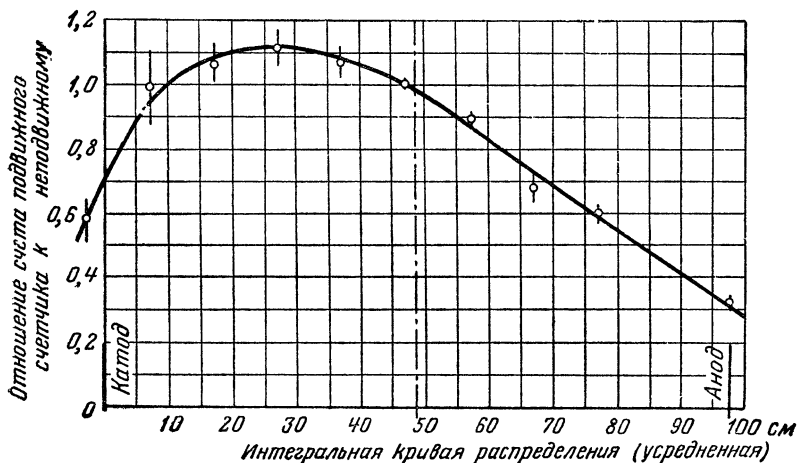


Рис. 6. Интегральная кривая распределения (усредненная).

ния грубой систематической ошибки, связанной с изменением чувствительности счетного устройства.

Перед началом измерений была произведена абсолютная градуировка неподвижного счетчика. Коэффициент перехода от числа отсчетов, даваемых счетчиком, к абсолютному числу нейтронов, выделившихся при разряде, равен $2,7 \cdot 10^4$,

$$t, \text{ е. } N = 2,7 \cdot 10^4 \cdot N_1, \quad (2.2)$$

где N — полное число нейтронов за разряд; N_1 — число отсчетов счетчика.

Таким способом было произведено 220 опытов. Каждый раз разряд сопровождался нейтронным излучением. Однако интенсивность нейтронного излучения сильно менялась от опыта к опыту. На рис. 5 представлена статистическая кривая рас-

пределения выхода нейтронов, зарегистрированных неподвижным счетчиком. По оси абсцисс отложены интервалы показаний счетчика, по оси ординат — частота выпадений. Общее количество опытов $n = 220$. Средний выход нейтронов за один опыт составил $4,7 \cdot 10^7$ нейтронов. Максимальный полученный выход составил $1,9 \cdot 10^8$ нейтронов.

В результате этих измерений была получена усредненная интегральная кривая распределения $F(x)$, показанная на рис. 6.

На чертеже указаны также средние квадратичные отклонения измерявшегося отношения $\alpha = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{к}}}$. Однако повторные измерения отдельных точек кривой дали другие результаты, которые плохо согласовывались с тем, что было получено ранее. Такая очевидная неповторяемость результатов, связанная с тем, что отдельные точки кривой измерялись в различное время, заставила отказаться от проведенных опытов и перейти к другим, по нашему мнению, более совершенным.

§ 3. Определение всей кривой распределения за один опыт

Результаты предыдущих опытов (рис. 5) показали, что интенсивность нейтронного излучения существенно меняется от опыта к опыту, хотя все опыты проводились в одних и тех же условиях. Это заставило принять другой метод — метод получения интегральной функции распределения за один разряд.

Вдоль коаксиала разрядной трубы было установлено восемь счетчиков. Сразу же после разряда включались одновременно все пересчетные схемы. Через 30 сек счетчики одновременно выключались и фиксировались их показания. Полученная таким образом кривая представляет собой такую же кривую распределения, что и раньше, но уже не усредненную, а отвечающую распределению излучения за один опыт.

При этих измерениях очень важно контролировать постоянство эффективности всех счетчиков. Ввиду того что счетчики имеют различную чувствительность, эффективности всех счетчиков приводились к эффективности одного, произвольно выбранного, контрольного счетчика. Для этого перед началом основных измерений и несколько раз между измерениями производилась следующая калибровка: каждый счетчик со своим парафиновым блоком помещался на определенном расстоянии от полоний-бериллиевого нейтронного источника. Определялись показания каждого счетчика за одно и то же время (10 мин). Полученные результаты пересчитывались на показания контрольного счетчика и таким образом находились коэффициенты, позволяющие сопоставлять показания счетчиков, имеющих

различную чувствительность. После такой калибровки счетчики устанавливались в рабочее положение на разрядной трубе.

На определенном расстоянии от оси трубы помещался тот же нейтронный источник. После этого записывались показания каждого счетчика за определенное время (10 мин). Полученные числа являлись контрольными. Поэтому можно было ежедневно, не снимая блоков с трубы, проверять постоянство относительной чувствительности всех счетчиков. Систематического изменения эффективности счета не наблюдалось.

§ 4. Результаты измерений

1) Помимо определения кривых распределения нейтронного излучения вдоль оси трубы на той же установке были получены зависимости нейтронного излучения от начального напряжения на электродах и от начального давления дейтерия. Выход нейтронов измерялся одновременно восемью счетчиками.

Первоначально опыты проводились в интервале напряжений от 31 до 47 кВ при давлении 0,06 мм рт. ст. Спустя два месяца после этих измерений была заменена фарфоровая труба и проведены опыты при напряжении 47 и 50 кВ. Связующим элементом при этих опытах, сделанных в различное время, должны быть результаты измерений при напряжении 47 кВ. Однако средний абсолютный выход нейтронов (рис. 7) во второй серии измерений при $U_0=47$ кВ оказался примерно в 3,5 раза меньше, чем это было раньше, хотя условия опытов и геометрические размеры установки и в том и в другом случаях были одинаковы.

Здесь, по-видимому, сказался эффект тренировки стенок камеры, о котором, в сущности, в настоящее время ничего определенного сказать нельзя.

Зависимость нейтронного выхода от напряжения показана на рис. 7. На оси ординат дано полное число нейтронов, образующихся за один опыт. Давление дейтерия при этих опытах составляло 0,06 мм рт. ст.; в скобках указано число опытов при данном напряжении. $J_{\text{макс}}$ — максимальный ток разряда в первом полупериоде. На рис. 7а представлена кривая зависимости нейтронного излучения от тока излома.

Зависимость интенсивности нейтронного излучения от давления дейтерия в камере показана на рис. 8. Опыты проводились при напряжении 47 кВ. Максимум излучения лежит в районе 0,06 мм рт. ст.

2) Некоторые типичные кривые распределения интенсивности нейтронного излучения, полученные каждая за один опыт, представлены на рис. 9—12 (эти кривые проведены

сплошной линией *). Несмотря на то, что в этих опытах были одинаковыми, кривые з одна от другой.

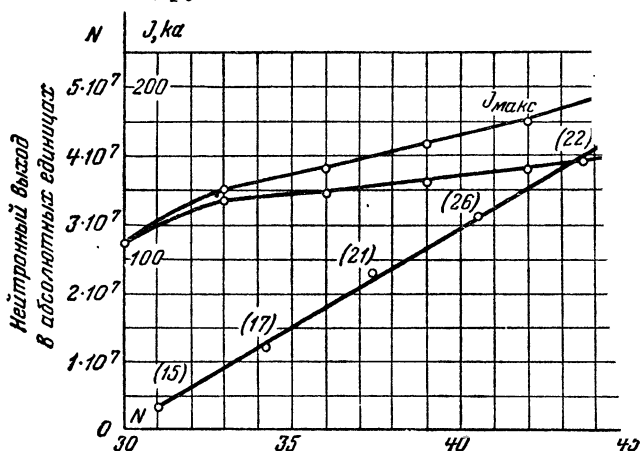


Рис. 7. Зависимость нейтронного излучения.

Математическое определение истинной функции $f(z)$ в соответствии с соотношением (1

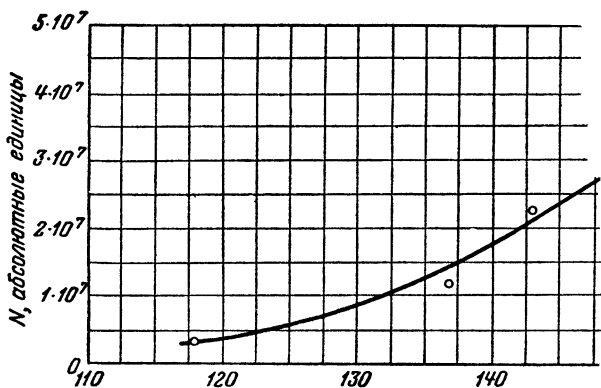


Рис. 7а. Зависимость нейтронного излучения от z .

серьезных затруднений. Это заставило в данном случае изменить способ, основанный на подборе вида

* Кривые $F(x)$ на рис. 9—12 построены в одинаковых единицах. Искомая функция $f(z)$ на всех графиках и в других одинаковых (относительных) единицах.

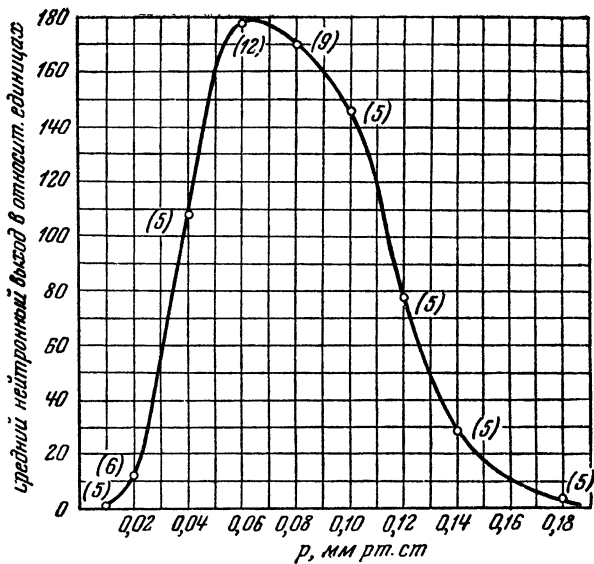


Рис. 8. Зависимость нейтронного излучения от давления
 $\epsilon = 24 \text{ мкб}$; $U = 47 \text{ кв.}$

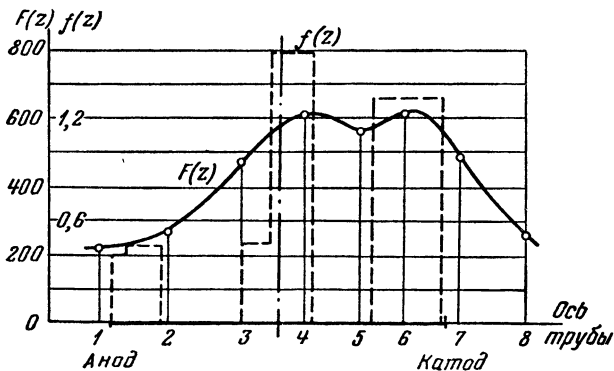


Рис. 9. Кривая распределения плотности нейтронного излучения. Опыт. 1.

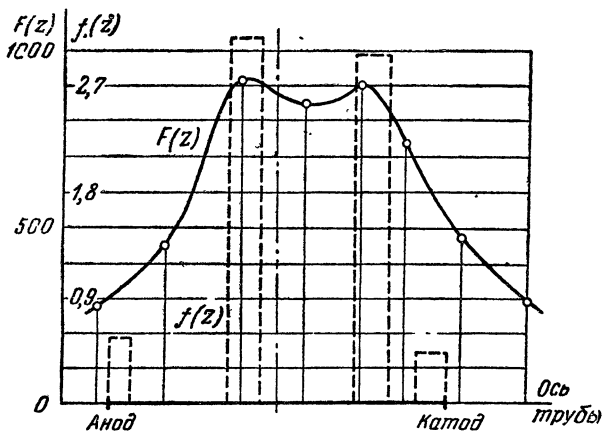


Рис. 10. Кривая распределения плотности нейтронного излучения. Опыт 4.

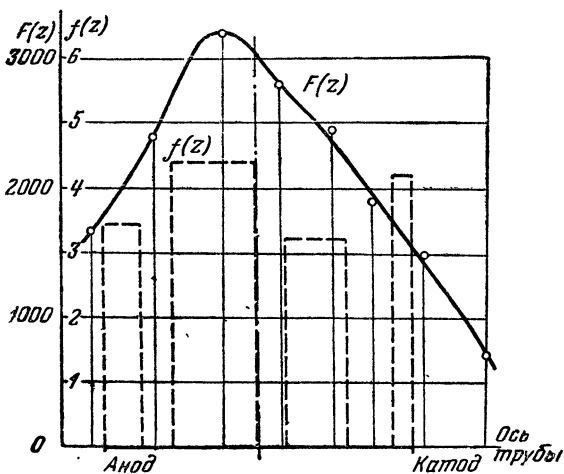


Рис. 11. Кривая распределения плотности нейтронного излучения. Опыт 6.

Математическая обработка кривых, изображенных на рис. 9—12, была выполнена Н. Я. Лященко. Найденная им функция обозначена пунктирной линией.

Из рассмотрения полученных результатов можно сделать следующие выводы:

а) Искомая функция распределения плотности нейтронного излучения вдоль оси трубы не непрерывна; в междуэлектродном промежутке имеются участки, которые не дают излучения. Излучение имеет, таким образом, локальный характер.

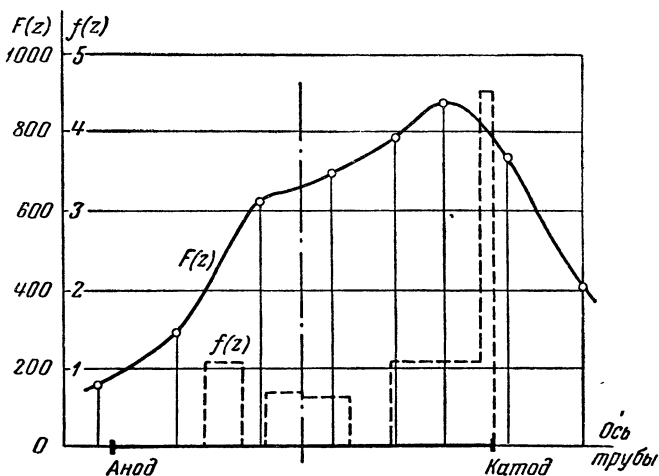


Рис. 12. Кривая распределения плотности нейтронного излучения. Опыт 7.

б) От опыта к опыту не наблюдается какой-либо общей закономерности в ходе функции $f(z)$, хотя условия опытов одинаковы. Различие кривых, полученных в одних и тех же условиях, указывает на статистический характер явления.

в) Полученные результаты вряд ли можно считать достаточно надежными в силу следующих причин:

примененный способ математической обработки путем подбора вида первообразной функции не дает уверенности в том что полученное решение является единственным;

сравнительно большое расстояние счетчиков до оси трубы ($a=20,5$ см) сглаживает ход интегральной функции.

Для получения более надежных результатов желательно было получить интегральную кривую распределения, которая полнее отображает истинную функцию $f(z)$.

Такие измерения были сделаны на другой трубе, длиной 90,0 см, внутренним диаметром 13,5 см и при расстоянии счетчиков до оси $a=10$ см. Кривые, полученные на такой трубе,

показаны на рис. 13 и 14. Так же как и прежде, ход интегральной функции сильно меняется от опыта к опыту. Первообразная функция распределения $f(z)$ определялась следующим образом. Межэлектродное расстояние разбивалось на девять равных интервалов. В каждом из интервалов функция $f(z)$ предполагалась неизменной. Интенсивность излучения в каждом из этих интервалов определялась из решения системы из девяти алгебраических уравнений с девятью неизвестными.

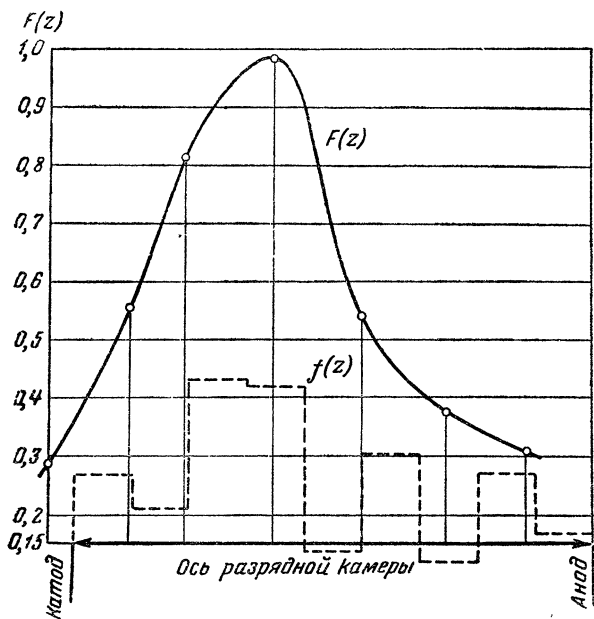


Рис. 13. Кривая распределения плотности нейтронного излучения. Опыт 10.

$\alpha = 90,0$ см; $D = 13,5$ см, $C = 24$ мкв, $U = 45$ кв; $p = 0,06$ мм рт. ст.

Две рассчитанные таким способом кривые представлены на рис. 13 и 14.

В некоторых случаях решение системы уравнений приводит к отрицательным значениям интенсивности излучения $f(z)$ на отдельных участках, что, очевидно, лишено физического смысла.

Из этого можно сделать вывод, что предположение о расположении источников излучения точно на оси трубы не является справедливым. Действительно, смещение источника излучения от оси трубы уже на 1 см (при расстоянии счетчиков до сси 10 см) дает разброс показаний в 1,5 раза, что, естественно,

сильно искажает интегральную кривую распределения. В том случае, когда расстояние от счетчиков до оси равно 20,5 см. смещение источника на 1 см вызывает ошибку в показаниях счета только на 2,5%.

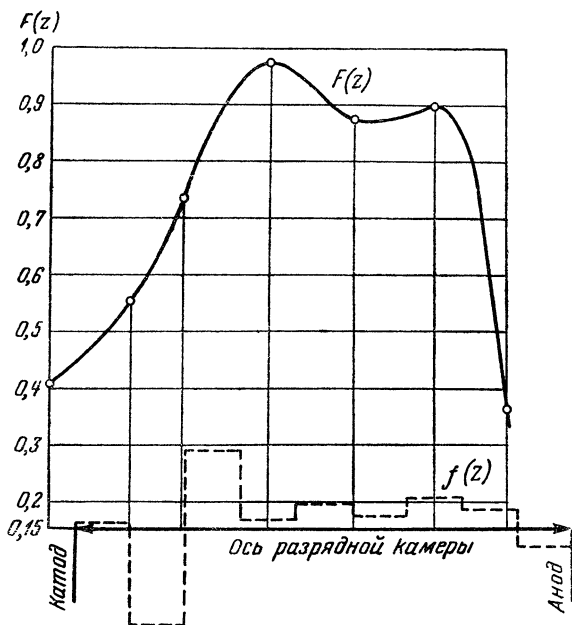


Рис. 14. Кривая распределения плотности нейтронного излучения. Опыт 11.

Из этого следует, что приближение счетчиков к оси делает измерение чрезвычайно чувствительным к отклонению источника излучения от оси трубы.

§ 5. Выводы

1. Интенсивность нейтронного излучения мощного импульсного разряда в дейтерии линейно возрастает с увеличением начального напряжения (от 30 до 50 кВ). Кроме того, нейтронное излучение разряда превышает космический фон в диапазоне $N \cong 1,5 \cdot 10^{17} \div 3,5 \cdot 10^{18}$ атомов на 1 см длины.

2. При определении кривой распределения не наблюдается повторяемости результатов. Это говорит о статистическом характере явлений, протекающих в разряде.

3. Результаты обработки опытов на широкой трубе (с расстоянием счетчиков до оси 20,5 см) дают основание сделать

вывод, что излучение нейтронов не распределено сколько-нибудь равномерно по длине, а концентрируется на определенных, сравнительно небольших, участках, которых может быть несколько.

Иными словами, нейтронное излучение при разряде имеет локальный характер и концентрируется в области порядка диаметра разрядной трубы.

Авторы выражают глубокую благодарность С. М. Осовцу, Л. А. Арцимовичу, А. М. Андрианову за интерес, проявленный ими к этой работе, и за ценные советы при обсуждении.

С. М. Осовец

О МЕХАНИЗМЕ НАБЛЮДАЕМОГО НЕЙТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ*

В процессе исследования явлений, возникающих при мощном импульсном разряде в дейтерии, было обнаружено, что в определенных условиях в таком разряде появляется заметное нейтронное излучение, обычно сопровождающееся испусканием жестких рентгеновских квантов [1, 2].

В настоящей заметке излагаются соображения, на основании которых можно сделать вывод о том, что в этих условиях механизм нейтронного излучения принципиально не может быть объяснен процессами, связанными с протеканием термоядерных реакций. Показано, что в такой системе ядерные реакции $D+D=He^3+n$ наблюдаемой интенсивности могут протекать только за счет взаимодействия дейтронов с энергиями, во много раз превышающими температуру плазмы. Приведем некоторые оценки для типичной установки, на которой отчетливо наблюдается нейтронное излучение. Основные параметры установки следующие.

Разрядный сосуд представляет собой фарфоровый или стеклянный цилиндр внутренним радиусом $r_0=10$ см и длиной 100 см. Система электрического питания разряда — батарея конденсаторов общей емкостью 24 мкф, заряженная до напряжения 40 кв, так что энергия, запасенная в питающей батарее, составляет $\sim 2 \cdot 10^4$ дж. При значении тока около 150 ка, соответствующем так называемому току особенности, при числе частиц в поперечном сечении $N=10^{18}$ атомов/см, имеет место нейтронное излучение с интенсивностью до 10^8 нейтронов за импульс.

* Работа выполнена в 1954 г.

В предположении, что к моменту нейтронного излучения процесс сжатия газового шнура закончился, температура частиц, соответствующая наблюдаемому в этот момент значению тока, не может существенно превышать величины, получающейся из соотношения

$$T = \frac{I^2}{4c^2N},$$

что при условиях данного эксперимента составляет 36 эв.

Эффективное сечение ядерной реакции при таких энергиях настолько мало, что никакими существующими в настоящее время методами индикации продукты ядерных реакций обнаружены быть не могут. Таким образом, для объяснения наблюдающегося излучения необходимо исходить из гипотезы о том, что имеет место некоторый механизм передачи дополнительной энергии (достаточной для интенсивного ядерного взаимодействия) лишь относительно небольшой группе частиц. Другими словами, помимо той энергии, которую приобретают частицы в газовом шнуре в процессе сжатия, существует какой-то механизм ускорения, действующий не на все эти частицы, а только на некоторую их долю.

В настоящей заметке не рассматривается механизм ускорения заряженных частиц. Здесь ограничимся выяснением вопроса о том, какое количество частиц должно быть ускорено и до каких значений энергии, с тем, чтобы вызвать нейтронное излучение наблюдаемой интенсивности в условиях проводившихся экспериментальных исследований. Предположим, что поток ионов (или атомов), ускоренных до энергии E , попадает в среду тех же атомов практически нулевой энергии и с плотностью $n = \frac{N}{\pi r^2}$. Число нейтронов, создаваемых при прохождении сквозь эту среду потоков ускоренных частиц, будет

$$N_{\Pi} = \frac{N_y N \sigma(E)}{\pi r^2} \text{ нейтронов/см,}$$

где N_y — полное число ускоренных частиц.

Для нахождения полного числа нейтронов необходимо ввести некоторую эффективную длину $l_{\text{эфф}}$, на которой наблюдается интенсивное излучение.

Из опытов Н. А. Борзунова и Д. В. Орлинского [3] по исследованию характера распределения нейтронного излучения по длине разрядной камеры следует, что этот эффект сосредоточен в некоторой области порядка диаметра трубы $l_{\text{эфф}} \approx 2r_0$. Местоположение источника излучения от опыта

к опыту меняется по длине, однако величину области эффективного излучения можно считать примерно постоянной. Следовательно, полное число ускоренных частиц при заданном полном числе нейтронов равно

$$N_y = \frac{\pi r^2 N_n}{N_{\sigma}(E) L_{\text{эфф}}}$$

и должно быть мало по сравнению с полным числом частиц в разрядной камере. Полная энергия, затрачиваемая на ускорение этих частиц, равна

$$W = \frac{\pi r^2 N_n E}{N_{\sigma}(E) L_{\text{эфф}}} 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$$

(E в кэв)

и должна составлять относительно небольшую долю энергии, запасенной в конденсаторной батарее, питающей разрядное устройство.

В таблице 6 приведена зависимость $\frac{E_{\text{кэв}}}{\sigma(E)} = f(E)$, из которой следует, что $f(E)$ имеет довольно пологий минимум в области значений энергии (100—200) кэв, причем $\left[\frac{E}{\sigma(E)} \right]_{\text{мин}} = 6 \cdot 10^{27} \text{ кэв/см}^2$.

В последней строке таблицы приведено отношение энергии, необходимой для ускорения, к энергии, запасенной в конденсаторной батарее (в %). Отсюда следует, что в условиях рассмотренного здесь эксперимента энергия ускоренных

Таблица 6

$E, \text{кэв}$	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	100	1000
$\sigma(E)$	$4 \cdot 10^{-41}$	10^{-36}	$4,3 \cdot 10^{-24}$	$1,8 \cdot 10^{-33}$	$5,5 \cdot 10^{-32}$	10^{-29}	$3 \cdot 10^{-28}$	10^{-27}	$3,2 \cdot 10^{-27}$	$5 \cdot 10^{-27}$	$1,6 \cdot 10^{-26}$	$9 \cdot 10^{-26}$
$\frac{E, \text{кэв}}{\sigma(E)}$	$2,5 \cdot 10^{40}$	$2 \cdot 10^{36}$	$7 \cdot 10^{33}$	$2,3 \cdot 10^{32}$	$9,1 \cdot 10^{31}$	10^{30}	$6,7 \cdot 10^{28}$	$3 \cdot 10^{28}$	$1,25 \cdot 10^{28}$	10^{28}	$6,25 \cdot 10^{-27}$	$1,1 \cdot 10^{28}$
$\frac{W}{W_{\text{бат}}}, \%$	—	—	—	—	—	50	3,35	1,5	0,62	0,5	0,31	0,5

частиц в основном должна находиться в интервале (20—1000) *кэв*. Минимальная энергия, которая должна быть затрачена на ускорение, соответствует $E \sim (100—200)$ *кэв* и составляет $\sim 0,3\%$ полной энергии батареи (равной 60 *дж*) при $N_n = 10^8$ нейтронов, $N = 10^{18}$ атомов/см, $r = 2$ см и $l_{эфф} = 20$ см.

Число ускоренных частиц при этом близко к $3 \cdot 10^{15}$, что составляет $3 \cdot 10^{-3}\%$ от полного числа частиц в разряде. Таким путем в условиях каждого конкретного эксперимента можно установить нижний предел энергии ускоренных частиц и сделать оценку их числа. Только в том случае, когда этот нижний предел энергии становится сравнимым с температурой плазмы, определенной из соотношения $I^2 = 4c^2NT$ для тока, соответствующего моменту нейтронного излучения, появляются основания для того, чтобы считать нейтронное излучение возникающим в результате термоядерных, а не ускорительных процессов. Однако это условие не является достаточным, и окончательное суждение о природе нейтронного излучения может быть сделано лишь после дополнительных прямых измерений.

Возникает вопрос, каков механизм ускорения частиц в плазме, какова природа сил, воздействующих на относительно небольшую группу частиц и ускоряющую ее до необходимых значений энергии, каковы условия, при которых это явление имеет место, и как они зависят от основных величин, характеризующих поведение системы?

Ускорение группы частиц до необходимых энергий может происходить в результате действия на эти частицы либо сил электромагнитного поля тока, либо сил электрического поля объемного заряда. Циклическое ускорение, аналогичное, например, бетатронному или циклотронному, здесь, по-видимому, не может иметь места, так как не видно условий, при которых столь значительное число частиц может подвергаться длительному регулярному воздействию, необходимому для того, чтобы они приобрели нужную энергию. Поле объемного заряда также не может являться непосредственным источником такой энергии, так как разность потенциалов, обусловленная некомпенсированным зарядом, как известно, не может значительно превышать величины, соответствующей либо температуре, либо кинетической энергии частиц в разряде. Для создания электрических полей, отвечающих столь большой разности потенциалов, необходимо, чтобы частицы с энергией, соответствующей такой разности потенциалов, уже существовали в разряде. Механизм ускорения этих частиц должен быть иным. Наличие быстрых частиц может в свою очередь привести к новым эффектам. Например, быстрое движение тяжелых частиц в ионизо-

ванном газе вызывает разности потенциалов, которые являются источниками ускорения легких частиц (электронов). Ускоренные до больших энергий в этих полях электроны при торможении излучают жесткие рентгеновские лучи. Механизм ускорения электронов в рассматриваемых условиях, который позволил бы дать исчерпывающее объяснение наблюдающимся эффектам рентгеновского излучения, сопровождающимися нейтронное излучение, до настоящего времени сколько-нибудь подробно не рассмотрен. Тем не менее причину возникновения электрических полей, вызывающих эти эффекты, следует искать в воздействии на разряд ионов, ускоренных до значительных энергий электромагнитными силами тока, текущего по плазме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов и др., Атомная энергия, 3 (1956).
 2. С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, Атомная энергия, 3 (1956).
 3. Н. А. Борзунов, Д. В. Орлинский, см. настоящий том, стр. 150.
-

**В. С. Комельков, Т. И. Морозова,
Ю. В. Скворцов**

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ДЕЙТЕРИИ *

Приводятся осциллограммы I , V для разряда в дейтерии при $C = 24 \div 36$ мкф, $I_{\text{макс}} = 650$ ка, диаметре камеры 630 мм для диапазона давлений $p_0 = 0,0025 \div 0,1$ мм рт. ст. и начальных напряжений $V_0 = 40 \div 100$ кв. Наблюдалось несколько «особенностей» на токе. Регистрировался интегральный выход нейтронов в зависимости от C , V_0 и p_0 . Определены моменты появления и длительность нейтронных импульсов. Исследовалось сопровождение нейтронного излучения рентгеновским излучением.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование мощного газового разряда в атмосфере дейтерия, при сравнительно быстро нарастающих токах $I \leq 1,4 \cdot 10^{11}$ а/сек, привело в июле 1952 г. к обнаружению нейтронного излучения [1, 2], интегральный выход которого менялся вместе с давлением, чистотой газа, напряжением и током в разряде. Представлялось целесообразным развитие этих работ в следующих направлениях:

а) исследование выхода нейтронов при давлениях ниже 10^{-2} мм рт. ст.;

б) исследование нейтронного выхода в камерах диаметром, значительно превышающим 30—40 см, что должно было, по существовавшим представлениям, повысить эффективность сжатия, температуру, а следовательно, и выход нейтронов в канале разряда;

* Работа выполнена в 1954 г.

в) исследование выхода нейтронов с ростом I и I в разряде с целью проверки зависимостей, теоретически полученных М. А. Леонтовичем и С. М. Осовцом [3].

§ 2. Описание установки

А. Общий вид установки (рис. 1)

Разрядная камера представляет собой фарфоровый изолятор внутренним диаметром $D=630$ мм, длиной $L=1200$ мм. Камера имеет медные электроды диаметром $d=400$ мм, укреп-

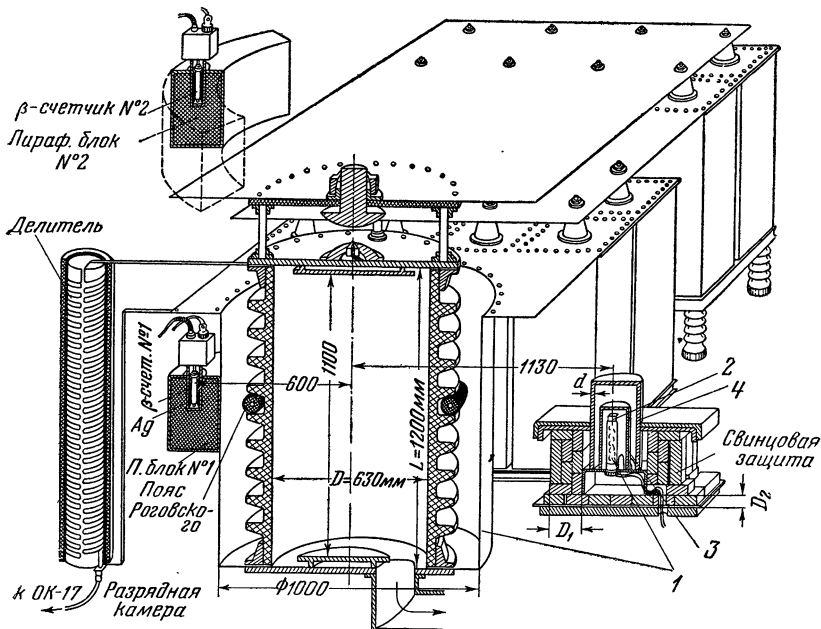


Рис. 1. Общий вид установки.

1 — фотоумножитель ФЭУ-19; 2 — кристалл (люминофор); 3 — дюралевый кожух; 4 — сменный свинцовый стакан переменной толщины d ; $D_1=8$ см, $D_2=4$ см; d меняется от 0,1 до 8 см.

ленные на фланцах из дюралюминия. Расстояние между электродами $L_p=1130$ мм. Камера до высоты 1000 мм окружена медным коаксиалом, имеющим диаметр $D_{\text{н}}=1000$ мм. Конденсаторные батареи состоят из двух параллельных групп конденсаторов ИМ-50, симметрично расположенных относительно разрядной камеры.

Б. Электрическая схема установки (рис. 2)

Установка представляет собой контур LC . В отличие от ранее применявшихся установок «каскадное» включение емкостей C_1 и C_2 при паразитной индуктивности контура

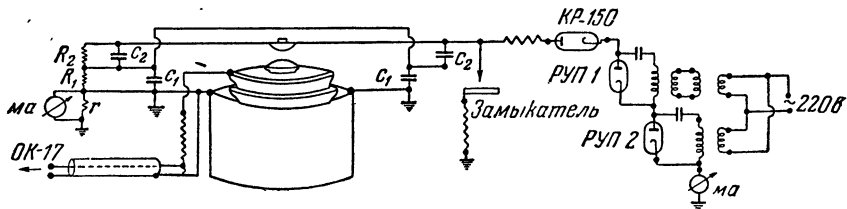


Рис. 2. Электрическая схема установки.

$L=0,5$ мкГн позволяет получать максимальную скорость нарастания тока $\frac{V}{L}=1,4 \cdot 10^{11}$ а/сек за счет увеличения рабочего напряжения до 110 кВ. Общая емкость батареи, собранной из конденсаторов ИМ-50, равнялась в начале работы 24 мкФ, а после увеличения емкости батареи — 36 мкФ.

В. Вакуумная система

Откачка разрядной камеры производилась форвакуумным насосом ВН-1 и диффузионным насосом со скоростью откачки 2000 л/мин. Получаемый предельный вакуум равнялся $1,3 \cdot 10^{-6} \div 1,5 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. Натекание составляло 0,3 см³/час. Рабочий газ для очистки от примесей пропускался через палладиевый натекатель. Применявшаяся система напуска газа в разрядную камеру позволяла устанавливать давление в камере с точностью порядка 5% при давлении $P_0=0,001$ мм рт. ст. Рабочее давление в опытах менялось от 0,0025 до 0,1 мм рт. ст.

§ 3. Методика измерений

А. Осциллографирование тока и напряжения разряда

Для измерения тока, протекающего через камеру во время разряда, служил интегрирующий пояс Роговского с обратным проводом (см. рис. 1). Точность измерения тока 8÷10%.

Для измерения падения напряжения на разрядной камере параллельно ей (см. рис. 1) подключался омический делитель с сопротивлением $R=1250$ ом.

Напряжение с шунта пояса и с $1/150$ части делителя подавалось на пластины двухлучевого импульсного осциллографа ОК-17М по коаксиальным кабелям РК-2, нагруженным на волновое сопротивление кабелей $\rho=100$ ом.

Для определения основной частоты контура f , паразитной индуктивности $L_{\text{пар}}$ (индуктивность конденсаторов и ошиновки) и проверки измерительных цепей (пояс и делитель) были проведены предварительные эксперименты с медными закоротками.

Б. Измерение интегрального выхода нейтронов

Абсолютный выход нейтронов, возникающих в процессе разряда, измерялся стандартной установкой типа Б (пересчетная схема ПС-64 с выносным блоком); β -счетчик, завернутый в серебряную фольгу помещался в парафиновый блок № 1. Размеры блока и его расположение показаны на рис. 1. Расстояние β -счетчика от оси разрядной камеры равнялось 60 см. Калибровка аппаратуры производилась Po—Be -источником известной активности.

В. Регистрация нейтронного и рентгеновского излучений

Аппаратура, применявшаяся для регистрации нейтронного и рентгеновского излучений во времени, была разработана Е. И. Доброхотовым. В нашем случае фотоумножитель с кристаллом находился на расстоянии 115 см от оси разрядной камеры (см. рис. 1). Фотоумножитель закрывался свинцовым экраном. Схема защиты приведена на рис. 1.

Изменение толщины свинцового экрана позволяло оценить жесткость рентгеновского излучения при исследовании разряда в водороде.

В качестве люминофоров использовались кристаллы нафталина с антраценом (3 см \times 3 см \times 3 см), NaJ и BrJ. Фотоумножитель с каскадом предварительного усиления в целях электромагнитной экранировки был смонтирован в дюралевом светонепроницаемом экране. Одновременно тщательно экранировались кабели, идущие от фотоумножителя к усилителю и блоку питания.

Перед началом эксперимента проводился контроль аппаратуры с помощью ториевого γ -источника. Сигнал с выхода усилителя подавался параллельно на оба луча осциллографа ОК-17М. Так как импульсы с фотоумножителя при облуче-

нии кристалла нафталина с антраценом γ -источником имели крутой фронт, такой метод позволял одновременно с проверкой аппаратуры контролировать синхронизацию лучей осциллографа. При проверке аппаратуры производилось снятие осциллограмм импульсов с фотоумножителя для люминофоров с различными временами высвечивания τ ($\tau_{\text{NaJ}} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ сек, $\tau_{\text{ВГ}} = 10^{-6}$ сек, $\tau_{\text{нафт}} = 10^{-8}$ сек). При исправной аппаратуре экспоненциальные задние фронты импульсов находились в соответствии с временами высвечивания люминофоров.

Для точной фазировки нейтронного (или рентгеновского) излучения с током разряда необходимо учитывать разницу во временах прохождения электрических сигналов через передающие тракты. Экспериментально определенное время запаздывания нейтронного импульса оказалось равным 0,4 мксек.

§ 4. Результаты эксперимента

Исследование газового разряда при $C = 24$ мкф проводилось в интервале начальных давлений в камере от 0,1 до 0,005 мм рт. ст. Это соответствует изменению числа частиц N в сечении камеры от $2,2 \cdot 10^{19}$ до $1,1 \cdot 10^{18}$ частиц на 1 см длины. Начальное напряжение на конденсаторах V_0 для каждого давления p_0 менялось через 10 кв от 40 до 100 кв. Максимальное значение тока в разряде менялось от 250 до 625 ка. Основной период контура составлял 24 мксек.

Несколько типичных осциллограмм тока и напряжения на фланцах камеры показаны на рис. 3—5. Впервые на этой установке в некоторых режимах* были получены не одна, а три «особенности» на токе, которым соответствуют резкие скачки напряжения. Число особенностей и время их появления связаны с начальными условиями разряда. Для заданного начального напряжения V_0 повышение давления приводит к сглаживанию кривой напряжения и уменьшению числа особенностей до одной. Аналогичный эффект наблюдается при понижении начального напряжения для заданного давления p_0 .

Время первой особенности $\tau_{\text{особ}}$ (при одинаковых V_0) пропорционально $\sqrt[4]{p_0}$ (см. таблицу).

Напряжение разряда кроме резких скачков, соответствующих особенностям, имеет характерную начальную стадию: старт затянут на время τ порядка нескольких мксек, и время τ уменьшается при увеличении давления p_0 .

* $C = 36$ мкф; $V_0 = 80 \div 100$ кв; $p_0 = 0,01 \div 0,03$ мм рт. ст.

Таблица

V_0	$\frac{P_0 \cdot \text{мм}}{\text{рт. ст.}}$	0,10	0,075	0,050	0,025	0,01	0,0075	0,005
100 мм	$\tau_I \text{ особ}$	5,0	4,35	4,10	3,00	2,6	2,4	—
	$\frac{\tau_I \text{ особ}}{\sqrt[4]{P_0}}$	8,6	8,35	8,7	7,6	8,2	8,15	—
90 мм	$\tau_I \text{ особ}$	6,5	4,8	4,35	3,7	3,2	3,0	2,6
	$\frac{\tau_I \text{ особ}}{\sqrt[4]{P_0}}$	10,9	9,1	9,2	9,2	10,0	10,4	9,8
60 мм	$\tau_I \text{ особ}$	—	—	5,45	4,1	3,5	3,5	3,0
	$\frac{\tau_I \text{ особ}}{\sqrt[4]{P_0}}$	—	—	11	10,4	11,1	11,7	11,5

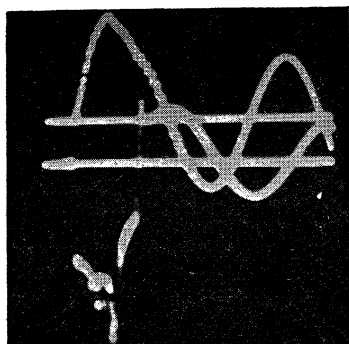


Рис. 3. Осциллограмма I , V при $C = 24$ мкф, $V_0 = 100$ кв, $p_0 = 0,1$ мм рт. ст.

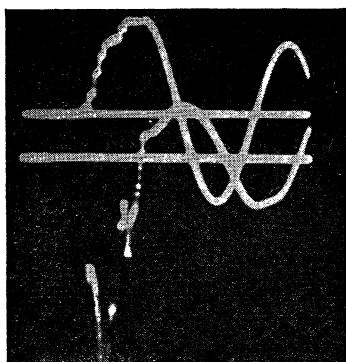


Рис. 4. Осциллограмма I , V при $C = 24$ мкф, $V_0 = 100$ кв, $p_0 = 0,05$ мм рт. ст.

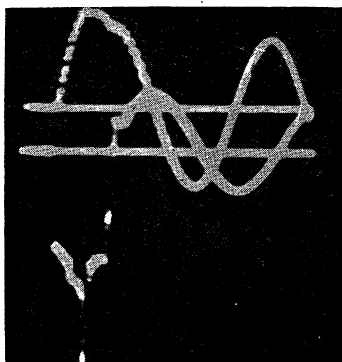


Рис. 5. Осциллограмма I , V при $C = 24$ мкф, $V_0 = 100$ кв, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст.

Из осциллограмм I , V для $C = 24$ мкф производилось вычисление диаметра газового шнура по известной индуктивности. Если пренебречь омическим падением напряжения внутри разрядного промежутка, то индуктивность шнура $L(t)$ находится численным интегрированием выражения

$$L(t) = \frac{\int_0^t V dt}{I} . \quad (4.1)$$

Зная $L=L(t)$, можно, в предположении полного скинирования и цилиндрической формы шнура, найти зависимость диаметра плазменного шнура от времени $D=D(t)$.

Пересчет $L(t)$ в $D(t)$ производился по формуле $L(t)=2l \ln \frac{D_0}{D(t)}$, где l — длина разрядного промежутка, а D_0 — диаметр коаксиала. Результаты вычислений представлены на графиках (рис. 6, 7). Видно, что подобные вычисления приводят к слишком малым значениям диаметра шнура

диаметра коаксиала. Результаты вычислений представлены на графиках (рис. 6, 7). Видно, что подобные вычисления приводят к слишком малым значениям диаметра шнура

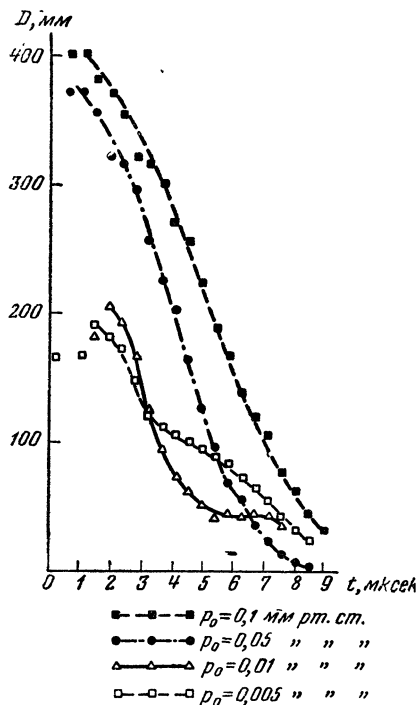


Рис. 6. Зависимость $D(t)$ при $V_0 = 60$ кв.

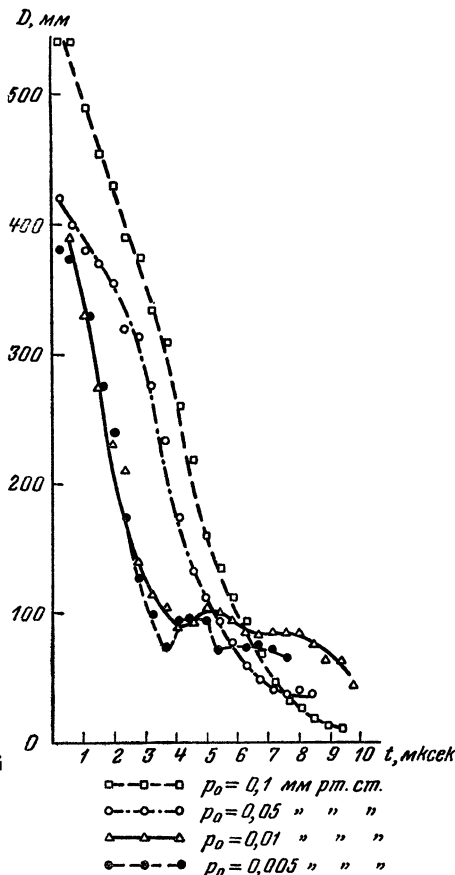


Рис. 7. Зависимость $D(t)$ при $V_0 = 100$ кв.

разряда. По-видимому, это связано с тем, что формула (4.1) верна до тех пор, пока основную роль в падении напряжения играет индуктивное сопротивление системы, а активными потерями можно пренебречь.

Была сделана попытка проверить формулу для тока особенности [3].

$$I_{\text{особ (теор.)}} = \dot{I}\tau_{\text{особ}} = 0,09a_0 (\mu p_0)^{1/4} \dot{I}^{1/2},$$

где a_0 — начальный радиус шнура; μ — молекулярный вес газа, p_0 — давление, мм. рт. ст.; \dot{I} — производная тока, а/сек.

Оказалось, что вычисленное теоретическое значение тока особенности больше экспериментального на $30 \div 40\%$.

А. Результаты опытов по регистрации нейтронного и рентгеновского излучений

Опыты по изучению нейтронного и рентгеновского излучений проводились на батареях емкостью $C = 24$ и 36 мкф. Зависимость интегрального выхода нейтронов от начального

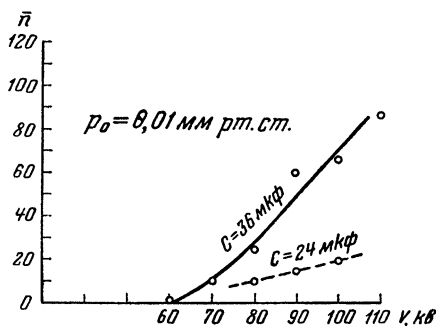


Рис. 8. Зависимость интегрального выхода нейтронов за разряд от V_0 .

напряжения V_0 на батарее снималась при $p_0 = \text{const}$. Результаты экспериментов представлены на рис. 8.

n — число отсчетов β -счетчика за вычетом фона, усредненное за несколько разрядов (1 отсчет = $3,55 \cdot 10^6$ нейтронов). Как видно из рис. 8, интегральный во времени выход нейтронов за разряд растет с увеличением C . При переходе от $C = 24$ мкф к усиленной батарее ($C = 36$ мкф) нейтронный

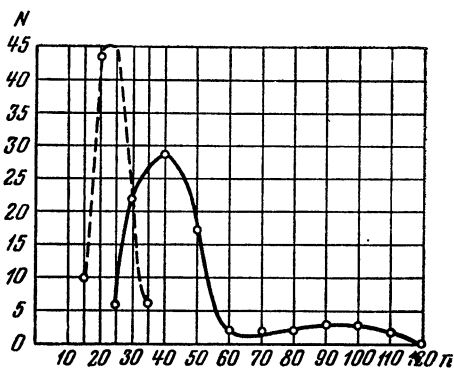


Рис. 9. Распределение выхода нейтронов для $C = 24$ мкф, $V_0 = 90$ кВ, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст.

— — — — распределение фона; n — число отсчетов β -счетчика (без вычета фона); 1 отсчет = $3,55 \cdot 10^6$ нейтронов; N — число случаев с данным выходом нейтронов (всего 86 разрядов).

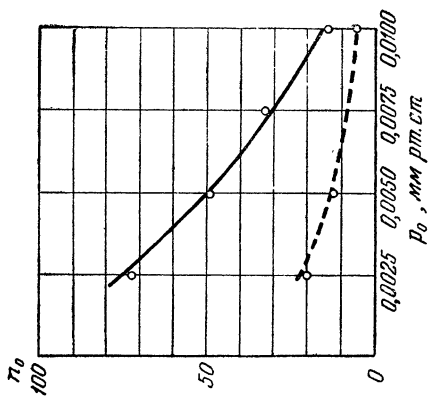


Рис. 11. Зависимость нейтронного выхода от начального давления при $C = 24$ мкэф.
 — $V_0 = 90$ кв; --- $V_0 = 80$ кв,
 * — число отсчетов β -счетчика (превышение над фоном).

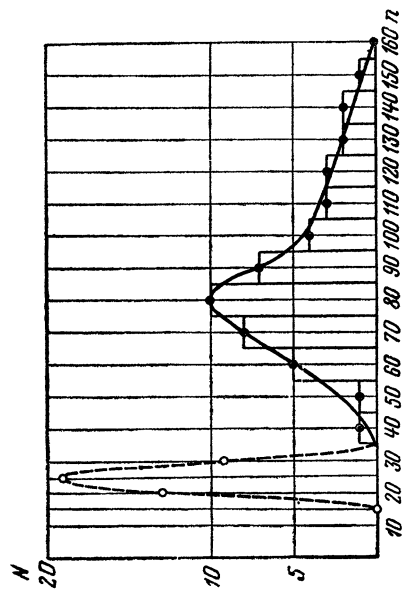


Рис. 10. Распределение выхода нейтронов для $C = 36$ мкэф, $V_0 = 90$ кв, $P_0 = 0,01$ мм рт. ст.
 --- распределение фона; * — число отсчетов β -счетчика (без вычета фона); 1 отсчет = 3,55 10^6 нейтронов;
 N — число случаев с данным выходом нейтронов.

выход возрос приблизительно в 3,5 раза (для $V_0 = 90$ кВ, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст. *).

Следует отметить, что при $C = 24$ мкф даже при 100 кВ нейтронный выход не был систематическим, т. е. не каждый разряд, в пределах чувствительности нашей аппаратуры, сопровождался нейтронным излучением. При $C = 36$ мкф выход стал регулярным, каждый разряд сопровождался устойчивым нейтронным излучением.

В процессе работы проводился набор статистики нейтронного выхода для одинаковых начальных условий разряда. Результаты показаны на рис. 9 и 10. Рис. 9 относится к емкости батареи $C = 24$ мкф, а рис. 10 — к $C = 36$ мкф.

Для $C = 24$ мкф снималась зависимость выхода нейтронов от начального давления p_0 ($V_0 = \text{const}$). Результаты представлены на рис. 11. Снять зависимость $n(p_0)$ для давления $p_0 < 0,0025$ мм рт. ст. не удалось из-за того, что напряжение на контуре при этих условиях было недостаточно для пробоя разрядной камеры. При давлении $p_0 > 0,03$ мм рт. ст. нейтронных импульсов не наблюдалось — β -счетчик практически считает только фон.

Б. Регистрация нейтронного и рентгеновского излучений во времени

Осциллограммы нейтронных импульсов, сфазированных с напряжением, показаны на рис. 12—17.

Нейтроны регистрируются ФЭУ-19 с кристаллом нафталина с антраценом. Для защиты от рентгеновского и γ -излучений весь измерительный блок закрывается свинцом толщиной Рв = 90 мм (рис. 1).

Как видно из осциллограмм (рис. 12—17), наблюдается несколько нейтронных импульсов, резко отличающихся по амплитуде и длительности. Основной импульс появляется после последней (второй или третьей, если она есть) особенности, где на осциллограмме напряжения нет резких выбросов. Следует подчеркнуть, что длительность основного импульса достигает 2 мксек (по полуширине). Иногда бывают импульсы и такого типа, как на рис. 14.

* При термоядерной реакции выход нейтронов $R = A \frac{N^2}{V \cdot T^{1/3}} \times e^{-\frac{18,75}{T^{1/3}}}$ при увеличении тока с 500 до 600 кА ($p_0 = 0,01$ мм рт. ст.) должен был бы увеличиться по крайней мере на порядок (см., напр., [5]).

При $C=36$ мкф в районе первой особенности наблюдается незначительный по амплитуде и длительности нейтронный импульс в сравнении с основным импульсом (рис. 15, 16).

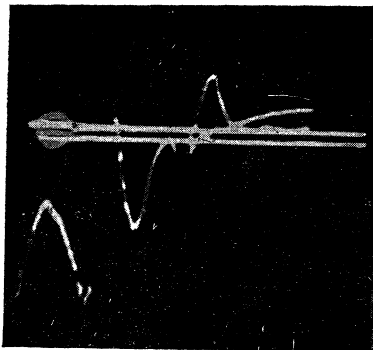


Рис. 12. Осциллограмма n, V при $V_0=94$ кВ, $p_0=0,01$ мм рт. ст., $N=2,7 \cdot 10^8$ нейтронов за разряд.

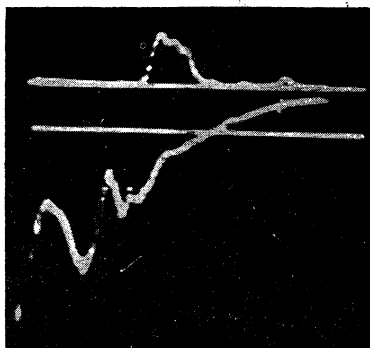


Рис. 13. Осциллограмма n, V при $V_0=90$ кВ, $p_0=0,05$ мм рт. ст., $N=4,7 \cdot 10^8$ нейтронов за разряд.

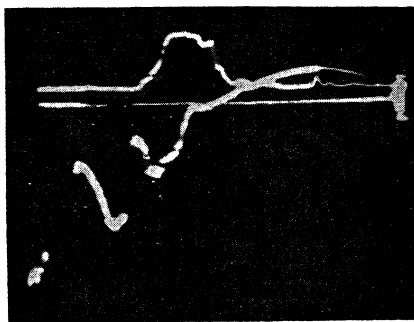


Рис. 14. Осциллограмма n, V при $V_0=90$ кВ, $p_0=0,005$ мм рт. ст., $N=5,5 \cdot 10^8$ за разряд.

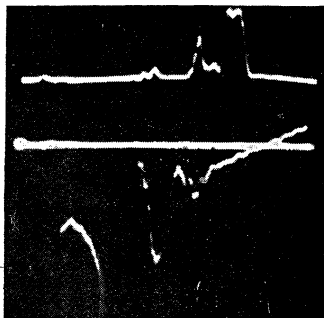


Рис. 15. Осциллограмма n, V при $V_0=80$ кВ, $p_0=0,01$ мм рт. ст., $N=1,7 \cdot 10^8$ за разряд.

Как уже ранее говорилось, момент возникновения нейтронного излучения можно указать с точностью до 0,1 мксек; указать же точно, какому состоянию (сжатие, развал) газового шнура соответствует появление нейтронов, не представляется возможным, так как одних осциллограмм тока и напряжения для этого недостаточно, а опыты по фазированию нейтронного

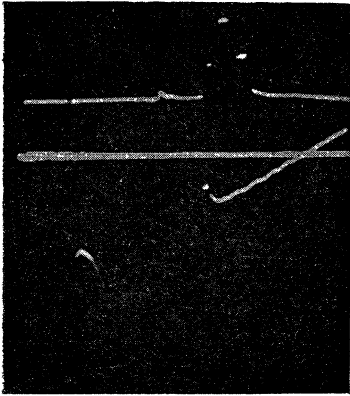


Рис. 16. Осциллограмма n , V при $V_0 = 110$ кэ, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст., $N = 5,8 \cdot 10^8$ за разряд.

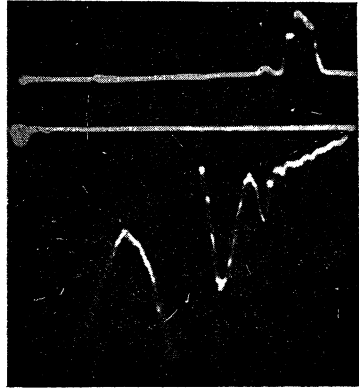


Рис. 17. Осциллограмма n , V при $V_0 = 90$ кэ, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст., $N = 3,4 \cdot 10^8$ за разряд.

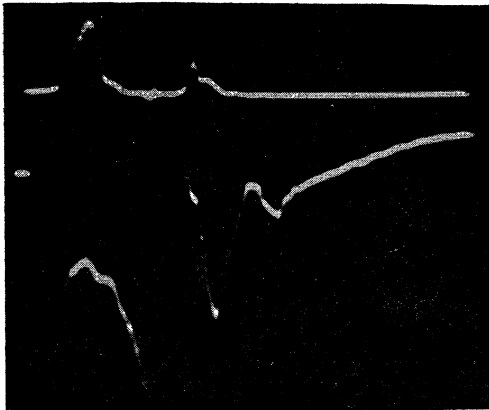


Рис. 18. Осциллограмма рентгеновского излучения и V разряда при $V_0 = 100$ кэ, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст., $C = 24$ мкф.

излучения с оптической картиной разряда, импульсами давления и т. д. не ставились.

Параллельно с нейтронными измерениями проводилась фазировка рентгеновского излучения с током и напряжением.

Так как сцинтилляционная методика не обладает избирательной чувствительностью к нейтронному или рентгеновскому

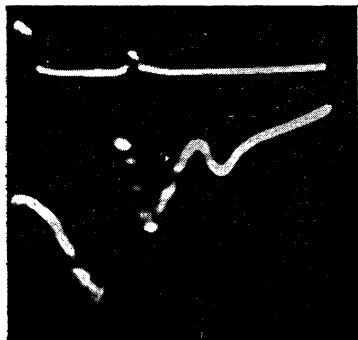


Рис. 19. Осциллограмма рентгеновского излучения и V разряда при $V_0 = 100$ кВ, $p_0 = 0,01$ мм рт. ст., $C = 36$ мкф.

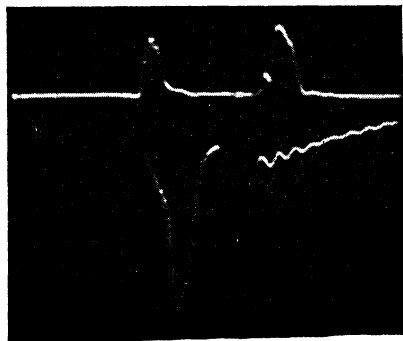


Рис. 20. Осциллограмма V и рентгеновского излучения при $V_0 = 100$ кВ, $p_0 = 0,04$ мм рт. ст., $C = 36$ мкф.

излучениям, то момент возникновения рентгеновского излучения определялся для разрядов в водороде при аналогичных начальных условиях. Типичные осциллограммы показаны на рис. 18—20.

Наблюдались три импульса излучения, связанных со следующими характерными фазами процесса:

первый импульс — начальное рентгеновское излучение (тормозное излучение электронов) соответствует началу тока и несколько предшествует ему (рис. 18, 19);

второй импульс рентгеновского излучения по времени соответствует району первой особенности; он наблюдается регулярно как при $C = 24$ мкф, так и при $C = 36$ мкф. Как указывалось, нейтронный импульс, связанный с первой особенностью, практически не регистрируется при $C = 24$ мкф и мал при $C = 36$ мкф;

третий рентгеновский импульс наблюдается только при $C = 36$ мкф в районе третьей особенности.

§ 5. Выводы

1. Изменение геометрии камеры (диаметр и длина) и увеличение I и I' в разряде, сравнительно с ранее проводившимися

экспериментами, позволили обнаружить многократные сжатия канала разряда, сопровождающиеся нейтронным излучением, достигавшим $8 \cdot 10^8$ нейтронов.

2. Так называемые особенности, отчетливо обнаруживаемые на осциллограммах I , V , сопровождаются нейтронным излучением и по фазе, видимо, соответствуют моменту расширения газоразрядного шнура. Наблюдается существенное увеличение нейтронного выхода на третьей особенности, т. е. при относительно меньшей амплитуде колебаний напряжения и больших значениях тока в разряде. Длительность основного нейтронного импульса в отдельных случаях достигала 2 *мксек*.

3. Обнаруженное нейтронное излучение во всех случаях сопровождается рентгеновским излучением (проверка по водороду). Это обстоятельство, видимо, указывает на то, что происхождение нейтронов не вызывается термоядерными реакциями в обычном представлении условий их возникновения. Не исключена, однако, возможность, что в исследуемых диапазонах давлений и режимах сжатия и распада газового канала сопутствующее рентгеновское излучение будет присутствовать при любых температурах дейтонов.

4. При прочих равных условиях опыта наблюдается возрастание среднестатистического значения выхода нейтронов с ростом тока в разряде (увеличению I в 1,3 раза соответствует рост выхода в 3,5 раза) и с ростом начального напряжения (выход растет почти линейно с ростом напряжения).

5. Проведенные эксперименты показывают, что наблюдавшиеся нейтроны возникают в газоразрядном шнуре и, видимо, на стенках камеры. Однако роль последних остается невыясненной и подлежит специальному изучению.

В заключение авторы выражают благодарность за советы и участие в обсуждении результатов А. М. Андрианову и С. М. Осовцу, а также за техническую помощь Г. Н. Арезову, А. Л. Безбатченко и лаборанту П. Т. Шевцову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов. Атомная энергия, 3, 76 (1956).
2. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов и др., Атомная энергия, 3, 84 (1956).
3. М. А. Леонтович, С. М. Осовец, Атомная энергия, 3, 84 (1956).
4. Е. И. Доброхотов, Отчет АН СССР, 1954 г.
5. В. И. Коган, см. настоящий том, стр. 109.

*А. М. Андрианов, О. А. Базилевская,
Ю. Г. Прохоров*

ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ РАЗРЯДОВ В ГАЗАХ ПРИ СИЛЕ ТОКА 500 *ка**

§ 1. Описание установки и аппаратуры

В настоящей статье излагаются результаты измерения распределения магнитных и электрических полей внутри мощного газового разряда. Эти измерения являются частью большого круга работ по исследованию импульсных разрядов в газах при большой силе тока [1, 2]. Основной задачей было исследование разрядов в дейтерии, но наряду с этим исследовались и разряды в других газах (водород, гелий, аргон, ксенон). Разряд создавался в цилиндрической разрядной камере, соединяемой через искровой разрядник с конденсаторной батареей (рис. 1). Искра в разряднике инициировалась с помощью специального устройства. Соединение земляной шины конденсаторной батареи с нижним электродом разрядной камеры было выполнено в виде медного цилиндра, окружающего камеру. В дальнейшем этот цилиндр будем называть «коаксиал» (на рис. 1 обозначено *K*). Конденсаторная батарея общей емкостью 82 *мкф* состояла из параллельно соединенных конденсаторов типа ИМ-50, которые можно было заряжать от специального выпрямителя до различных напряжений, вплоть до 50 *кв*. Разрядная камера представляла собой фарфоровый цилиндр внутренним диаметром 40 *см* и длиной 90 *см*, закрытый металлическими фланцами, которые служили электродами. Индуктивность соединительных шин вместе с искровым разрядником была 0,15 *мкгн*. В дальнейшем эту индуктивность будем называть

* Работа выполнена в 1954—1956 гг.

паразитной ($L_{\text{пар}}$). На этой установке при начальном напряжении на конденсаторах $V_0 = 40 \text{ кВ}$ амплитуда тока на первом полупериоде была 500 кА , начальная скорость нарастания тока около $2 \cdot 10^{11} \text{ а/сек}$ и длительность первого полупериода 17 мксек . Для измерения различных величин, характеризующих газовый разряд, использовался импульсный осциллограф,

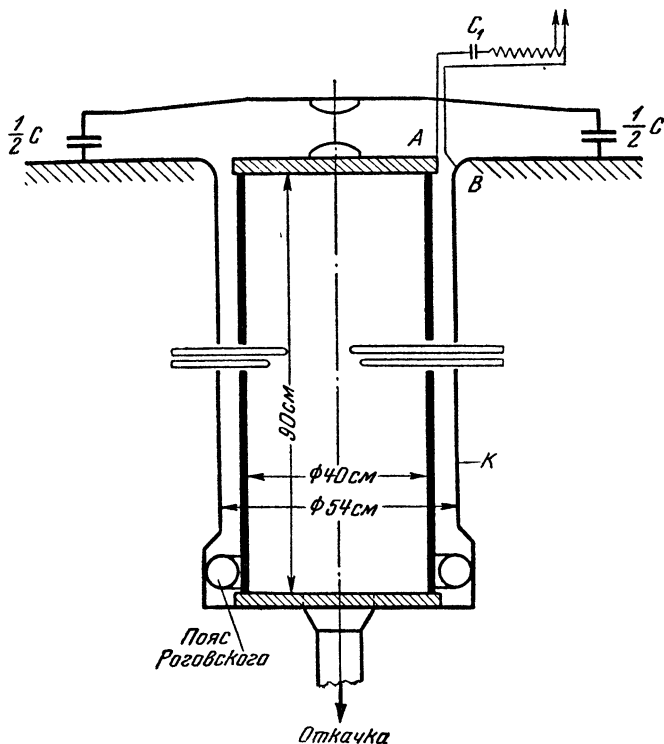


Рис. 1. Схема установки для получения импульсного разряда в газе.

имеющий три двухлучевые трубки (типа ЛО-47) с общим блоком развертки. Таким образом, было возможно одновременно фотографировать шесть осциллограмм. Фазирование осциллограмм с различных лучей осуществлялось по меткам времени, которые подавались одновременно на все лучи осциллографа. Метка времени представляла собой разрыв на нулевых линиях длительностью $0,1 \text{ мксек}$. Напряжения с различных датчиков подавались на осциллограф согласованным кабелем.

Для измерения напряжения на разрядном промежутке применялся делитель, один конец которого через разделительную

емкость $C_1 = \frac{2}{3}$ мкф подсоединялся к высоковольтному фланцу разрядной камеры. Другой конец делителя подсоединялся к краю коаксиала (точки *A* и *B* на рис. 1). Делитель состоял из 20 последовательно соединенных угольных сопротивлений по 33 ома и в наших условиях позволял регистрировать изменения напряжения, происходящие за времена меньшие, чем 10^{-7} сек.

Ток, протекающий через газ, измерялся поясом Роговского, помещенным в промежутке между разрядной камерой и коаксиалом, как указано на рис. 1. Пояс представлял собой тороидальную катушку с обратным витком, замкнутую на малое омическое сопротивление (шунт). Если омическим сопротивлением замкнутого пояса ($R_{\text{шунт}} + R_{\text{пояс}}$) можно пренебречь по сравнению с его индуктивным сопротивлением ($\omega L_{\text{пояс}}$) и если намотка пояса сделана плотно (рассеяние магнитного потока мало), то измеряемый ток \mathcal{I} определяется формулой

$$\mathcal{I} = \frac{V_{\text{ш}} N}{R_{\text{ш}}}, \quad (1.1)$$

где $V_{\text{ш}}$ — падение напряжения на шунте; $R_{\text{ш}}$ — сопротивление шунта; N — число витков пояса.

При расчете пояса размеры его (диаметр и число витков, а также диаметр провода) выбирались так, чтобы условие $\omega L_{\text{пояс}} \gg R_{\text{ш}} + R_{\text{п}}$ выполнялось для самой низкой частоты, наблюдаемой в нашем процессе. Используемый нами пояс имел 400 витков медного провода диаметром 2,7 мм при диаметре витка 4 см. Сопротивление шунта равнялось 0,1 ома. Специальные контрольные измерения показали, что для такого пояса формула (1.1) справедлива с большой точностью в интервале частот от $5 \cdot 10^3$ до 10^7 гц.

На первых же стадиях изучения мощного газового разряда в дейтерии было обнаружено, что такой разряд сопровождается излучением быстрых нейтронов и жестких рентгеновских лучей [3]. В настоящей работе мы не занимались детальным исследованием этих излучений, но во всех случаях точно регистрировали момент появления нейтронного излучения с помощью фотоумножителя с нафталин-антраценовым кристаллом (сцинтилляционный счетчик), заэкранированного 6 см свинца. Кроме того, величина нейтронного выхода при каждом разряде измерялась по β -активности серебряной фольги, помещенной в парафиновый блок. На нашей установке нейтронный выход наблюдался в узком диапазоне начальных давлений дейтерия (от $p_0 = 0,01$ до $p_0 = 0,2$ мм рт. ст.; $V_0 = 40$ кэ), причем наибольший средний выход нейтронов при-

ходился на $p_0=0,05$ мм рт. ст. При этом начальном давлении средний выход нейтронов на один разряд был около $5 \cdot 10^7$ с колебаниями от малой величины (ниже порога регистрации) до 10^9 нейтронов (порог регистрации нашей аппаратуры — 10^6 нейтронов на разряд). Детального исследования зависимости нейтронного выхода от начального напряжения на нашей установке не проводилось. Нейтронный эффект был очень чувствителен к малейшим примесям тяжелых газов и никогда не получался без предварительной тренировки камеры несколькими мощными разрядами в легких газах (водород, дейтерий). Наличие жесткого рентгеновского излучения на нашей установке проверялось на разрядах в водороде с помощью того же сцинтилляционного счетчика, не заэкранированного свинцом. Кроме того, для разрядов в дейтерии было проверено, что момент появления нейтронов совпадает с моментом появления жесткого рентгеновского излучения.

§ 2. Общая характеристика мощного газового разряда

Об общем характере развития газового разряда можно судить уже по виду осциллограммы тока, текущего через газ, и напряжения на разрядном промежутке. В разрядах в дейтерии при достаточно низком начальном давлении форма осциллограмм тока и напряжения на первом полупериоде резко отличается от синусоидальной. В следующих полупериодах ток и напряжение представляют сдвинутые по фазе синусоиды с довольно большим затуханием. Основная доля энергии конденсаторной батареи (от 60 до 80%) необратимо расходуется на первом полупериоде. При давлениях дейтерия в разрядной камере от 0,01 до 0,2 мм рт. ст. (напряжение на конденсаторной батарее $V_0=40$ кВ) на первой стадии разряда ток и напряжение растут (рис. 2), затем напряжение резко спадает, становясь на короткое время отрицательным, а на токе получается характерный излом. Это явление будем называть первой особенностью, причем моментом ее наступления будем считать точку, соответствующую минимуму тока. После первой особенности наблюдается опять рост тока и напряжения и снова срыв напряжения — вторая особенность. Отметим, что скорость нарастания тока после первой особенности раза в два больше, чем начальная. Иногда можно отметить слабо выраженную третью особенность. Момент появления нейтронного импульса приходится, как правило, на район второй особенности. В редких случаях нейтронное излучение наблюдалось как в районе первой, так и в районе третьей особенностей.

С повышением давления p_0 момент наступления первой особенности t_{oc} отодвигается от начала разряда. В табл. 1 приве-

Таблица 1

p_0 , мм рт. ст.	t_{0c} , мксек	$t_{0c}/\sqrt[4]{p_0}$
0,01	2,8	8,4
0,03	3,25	7,8
0,05	3,8	8,0
0,2	5,5	8,2

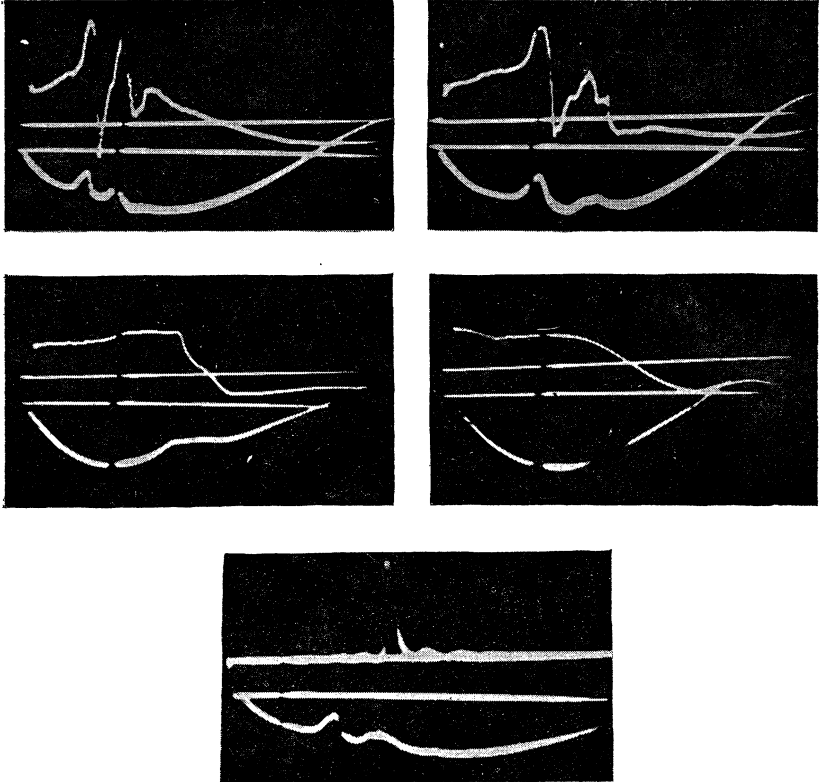


Рис. 2. Осциллограммы тока и напряжения для импульсного разряда в дейтерии при $V_0 = 40$ кв и начальных давлениях p_0 , равных соответственно 0,05; 0,2; 1 и 3 мм. рт. ст. (верхние 4 фотографии). Осциллограмма тока и нейтронного импульса при $p_0 = 0,05$ мм. рт. ст. (нижняя фотография).

дены моменты наступления первой особенности для разряда в дейтерии при различных p_0 и $V_0 = 40$ кв.

Из данных третьего столбца видно, что t_{oc} с большой степенью точности пропорционально $\sqrt[4]{p_0}$.

При повышении начального давления момент наступления первой особенности отодвигается за максимум тока ($p_0 = 1$ мм рт. ст.). При еще более высоких давлениях наблюдается только несимметричная форма первого полупериода тока, и при давлениях порядка 10 мм рт. ст. форма тока становится практически синусоидальной. Напряжение на камере при $p_0 = 1$ мм рт. ст. вначале слегка растет, затем

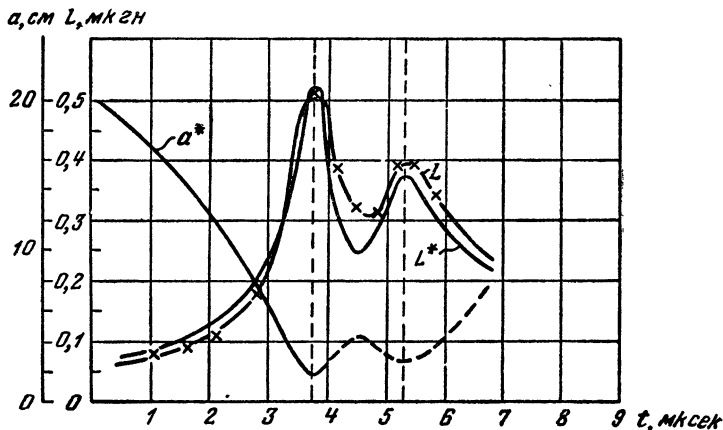


Рис. 3. Графики эффективной L^* и истинной L индуктивности газового промежутка и эффективного радиуса a^* токового шнура для разряда в дейтерии при $V_0 = 40$ кВ и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст.

довольно круто спадает (см. рис. 2). При более высоких давлениях напряжение приближается по форме к синусоиде.

Имея кривые тока и напряжения, можно рассчитать эффективную индуктивность L^* газового промежутка. Если пренебречь омическим падением напряжения внутри газового промежутка, то L^* определяется, как

$$L^* = \frac{\int_0^t V d\tau}{I}. \quad (2.1)$$

Ниже будет показано, что это пренебрежение можно принять для грубой оценки индуктивности в течение первой четверти периода. Из величины индуктивности L^* можно

оценить эффективный радиус токового шнура (в предположении цилиндрической симметрии) по формуле

$$L^* = 2l \ln \frac{b}{a^*}, \quad (2.2)$$

где l — длина разрядной камеры; b — радиус коаксиала; a^* — эффективный радиус токового шнура в момент t .

На рис. 3 изображены кривые изменения L^* и a^* , рассчитанные по формулам (2.1) и (2.2) для разряда в дейтерии при $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и $V_0 = 40$ кВ. Из этого графика видно, что эффективный радиус токового шнура уменьшается от 20 см (радиус камеры) до приблизительно 3 см ($L^* \simeq 0,55$ мкГн). Отсюда средняя скорость сжатия получается $4,5 \cdot 10^6$ см/сек. То же значение индуктивности, а следовательно, и эффективного радиуса в момент первой особенности получается и для других начальных давлений дейтерия, если первая особенность наступает до максимума тока. Средняя скорость сжатия убывает с повышением давления, так как при этом $t_{ос}$ увеличивается. После первой особенности наблюдаются резкое падение напряжения и рост тока, что указывает на уменьшение индуктивности газового промежутка. К моменту второй особенности индуктивность вторично достигает максимума.

При разрядах в водороде и гелии характер осциллограмм тока и напряжения такой же, как и в дейтерии. На более тяжелых газах (аргон, ксенон) также наблюдаются особенности на кривых тока и напряжения, но они более плавные (см. рис. 8). Максимальная индуктивность токового шнура в тяжелых газах меньше, чем в легких газах. Например, для разрядов в ксеноне при $p_0 = 0,005$ мм рт. ст. и $V_0 = 40$ кВ L^* к моменту первой особенности достигает величины 0,35 мкГн.

Сжимающийся токовый шнур был рассмотрен в работе М. А. Леонтовича и С. М. Осовца [4]. Ими была получена следующая зависимость между моментом наступления первой особенности и начальным давлением при заданных параметрах установки:

$$t_{ос} = 0,09 a_0 \sqrt[4]{p_0^\mu} \cdot \sqrt{\frac{L_{\max}}{V_0}}, \quad (2.3)$$

где a_0 — радиус разрядной камеры в сантиметрах, p_0 — начальное давление газа в миллиметрах ртутного столба; μ — молекулярный вес газа; L_{\max} — максимальная индуктивность токового шнура + паразитная индуктивность в генри; V_0 — начальное напряжение на конденсаторной батарее в вольтах.

Эта формула была получена в предположении линейного роста тока со временем. На нашей установке это условие не очень хорошо выполняется даже при разрядах в дейтерии при низких давлениях (0,01—0,2 мм рт. ст.). Однако совпадение расчетных значений времени особенности с экспериментально полученным временем первой особенности достаточно хорошее. Подставляя в формулу (2.3) значения $a_0 = 20$ см, $V_0 = 40$ кв, $L_{\text{макс}} = (0,15 + 0,55) \cdot 10^{-8}$ гн и $\mu = 4$ (дейтерий), получим для отношения $\frac{t_{\text{ос}}}{\sqrt[4]{P_0}}$ значение 10 ($t_{\text{ос}}$ в микросекундах), что хорошо согласуется со значением, приведенным в табл. 1.

§ 3. Распределение магнитного поля и плотности тока по сечению разряда

Для выяснения характера основных физических процессов, происходящих в плазме, важно было исследовать детальную картину распределения плотности тока и магнитного поля в различные моменты времени. Измерения магнитного поля производились так называемыми магнитными зондами. Магнитный зонд представлял собой миниатюрную плоскую катушку размером 3×4 мм² из восьми витков провода, приклеенную к подставке из оргстекла, которая укреплялась на конце тонкой медной трубки. Один конец катушки присоединялся к медной трубке, другой — к проводу, пропущенному внутри нее. Катушки вставлялись внутрь фарфоровых трубок, наружным диаметром 6 мм, вставленных в разрядную камеру, как указано на рис. 1. Измерение поля велось одновременно в четырех точках, как правило, на расстояниях $r=3; 5; 10; 15$ см от оси разрядной камеры. Кроме того, было известно поле у стенки разрядной камеры ($r=20$ см) по значению общего тока, измеряемого поясом. Э. д. с., возникающая в катушках, подавалась кабелем на усилитель с интегрирующим элементом (RC). Усилитель непосредственно присоединялся к осциллографу. Таким образом, отклонение луча осциллографа было пропорционально магнитному полю в том месте разряда, где находилась катушка. Особое внимание обращалось на экранировку всех подводящих кабелей, усилителей и осциллографа от электромагнитных помех, возникающих при импульсном разряде через газ, которые были особенно велики при работе на легких газах (водород, дейтерий) при низких давлениях (от 0,01 до 0,2 мм рт. ст.). Применяемые усилители были сделаны на сопротивлениях с коррекцией на высоких частотах и имели

полосу пропускания от 10^3 до 10^7 *гц*. Индуктивное сопротивление катушек на частоте 10^7 *гц* составляло 30% волнового сопротивления кабеля. Таким образом, наша система позволяла регистрировать изменения магнитного поля, происходящие за времена 0,1 *мксек*. Минимальная величина магнитного поля, которую могла регистрировать наша аппаратура, равнялась 200 *э*. В зависимости от ориентации катушек можно было измерять как H_φ , так и H_z (все рассмотрение ведется в цилиндрической системе координат с осью z вдоль оси разрядной камеры). Для дальнейших расчетов существенно предположение о цилиндрической симметрии распределения полей и токов в газовом разряде. Наличие цилиндрической симметрии проверялось специальными опытами. Именно: снимались осциллограммы H_φ в двух симметричных относительно оси точках. Кроме того, отклонение распределения магнитного поля от той картины, которая должна иметь место для симметричного распределения токов, текущих только в направлении оси z , можно было контролировать по появлению составляющей H_z . Такие измерения показали, что предположения о цилиндрической симметрии и наличии только аксиальной составляющей тока (J_z) достаточно хорошо выполняются для разрядов в тяжелых газах и для разрядов в легких газах при достаточно больших давлениях ($p_0=1$ *мм* и больше). Для разрядов в легких газах при низких давлениях (от $p_0=0,01$ до 0,2 *мм рт. ст.*) цилиндрическая симметрия сохраняется до второй особенности. После второй особенности отмечаются нарушения цилиндрической симметрии, причем, как правило, небольшие (значения H_φ в симметричных точках на расстояниях 3 и 5 *см* от оси отличаются не больше чем на 30%, и появляется H_z порядка 20% от H_φ). В редких случаях отмечаются сильные нарушения симметрии, когда можно предположить отклонение оси разряда от геометрической оси на расстояние порядка 3 *см*, и в центральной зоне регистрируется H_z того же порядка, что и H_φ .

Осциллограммы магнитного поля, полученные за различные разрядные импульсы, несколько отличаются друг от друга. Эти отличия наблюдались главным образом в районе второй особенности. В это время можно отметить небольшие отклонения и на осциллограммах общего тока и напряжения на разрядном промежутке. Несмотря на это, картина распределения плотности тока за различные импульсы получалась в основном та же самая. Небольшая разница была только в численных величинах поля и токов.

Введение внутрь разряда фарфоровых трубок могло внести искажения в распределение плотности тока. Для проверки того, насколько сильны могут быть эти искажения, была сделана серия контрольных опытов:

вместо четырех трубок в разряд вводилась одна трубка и проводилось сравнение осциллограмм H_φ , полученных в том и другом случае;

фарфоровая трубка вводилась до оси разрядной камеры, и катушка могла перемещаться внутри нее. Затем катушка помещалась у запаянного конца фарфоровой трубки и перемещалась внутри разряда вместе с трубкой. Серии осциллограмм, снятые тем и другим способом, сравнивались между собой.

Сравнение показало, что как в первом, так и во втором случаях осциллограммы H_φ достаточно хорошо совпадают друг с другом, по крайней мере на той стадии разряда, когда отсутствует разброс в H_φ от одного разрядного импульса к другому. Кроме того, средний нейтронный выход от введения в разряд четырех трубок не изменился. При помещении в разряд более толстых трубок (диаметром 2 см) средний нейтронный выход резко уменьшался.

Имея значения магнитного поля в пяти точках, можно было рассчитать силу тока, текущего внутри окружностей соответствующих кольцевых зонах. Кроме того, для любого момента времени можно было сосчитать (методом численного интегрирования) индуктивность газового промежутка L и энергию магнитного поля W_H . Индуктивность L в практических единицах равняется

$$L = \frac{10^{-8} l \int_0^b H_\varphi dr}{\mathcal{I}} . \quad (3.1)$$

В отличие от величины L^* эту величину L можно назвать «истинной» индуктивностью. Энергия магнитного поля равна

$$W_H = 10^{-7} \iiint \frac{H^2}{8\pi} d\Omega . \quad (3.2)$$

Для тех же моментов времени энергия W , вложенная в разряд, равна

$$W = \int_0^t \mathcal{I} V d\tau . \quad (3.3)$$

Для подсчета общей энергии, вложенной в разряд, необходимо было иметь, кроме осциллограммы тока (которая снималась одновременно с осциллограммами H_φ), еще и осциллограмму напряжения. Снять ее одновременно с осциллограммами H_φ не представляется возможным, так как при

фотографировании осциллограммы напряжения корпус осциллографа непосредственно подсоединяется к земляной шине (точка B на рис. 1). Так как катушки, включенные на осциллограф, вводились внутрь разряда, то разность потенциалов между катушкой и плазмой могла достигать нескольких десятков киловольт. При этом возникала опасность пробоя через стенки фарфоровых трубок (при работе с магнитными зондами вся аппаратура тщательно изолировалась от земли). Поэтому осциллограммы напряжения снимались отдельно от осциллограмм магнитного поля (в том и другом случае одновременно снимался ток). Осциллограммы напряжения достаточно хорошо воспроизводились от раза к разу. Небольшие отклонения, наблюдаемые в районе второй особенности и после нее, несущественны. С целью контроля аппаратуры аналогичная серия осциллограмм (H_{φ} в четырех точках \mathcal{J} и V) снималась при разряде конденсаторной батареи через медный стержень, помещенный вдоль оси разрядной камеры. При этом сосчитанная указанным способом энергия магнитного поля W_H [формула (3. 2)] должна была совпасть с энергией W [формула (3. 3)], что и имело место при расчетах.

На рис. 3 вместе с кривой L^* нанесена кривая хода индуктивности L , рассчитанная по формуле (3. 1). Небольшое отличие этих кривых объясняется теми значениями омического падения напряжения, которые вытекают из измерений электрического поля, изложенных в § 4, и лежит почти в пределах точности измерений, излагаемых в настоящем параграфе. Аналогичные результаты получаются и для разрядов при других начальных условиях.

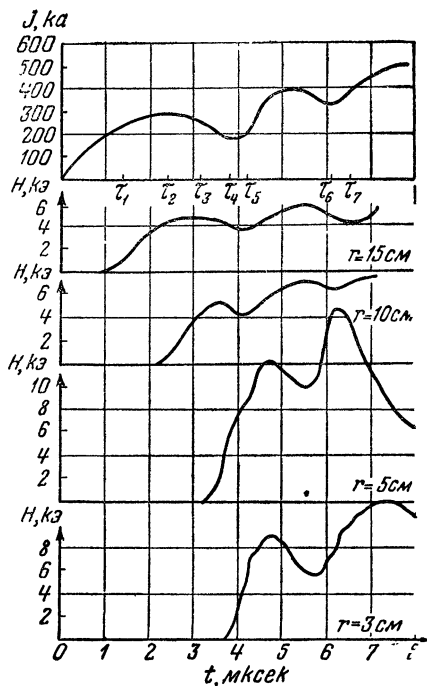


Рис. 4. Графики общего тока и магнитного поля на различных расстояниях от оси разрядной камеры для разряда в дейтерии при $V_0 = 40$ кэ и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст.

Перейдем к описанию картины распределения тока по сечению разряда в различные моменты времени. Остановимся сначала на разрядах в дейтерии при таких давлениях, когда наблюдается две или больше особенности. Изучению этих разрядов было посвящено наибольшее число экспериментов. Отметим прежде всего, что общий характер картины распределения токов в некоторый момент времени одинаков для всех начальных давлений, если за масштаб времени взять время до первой

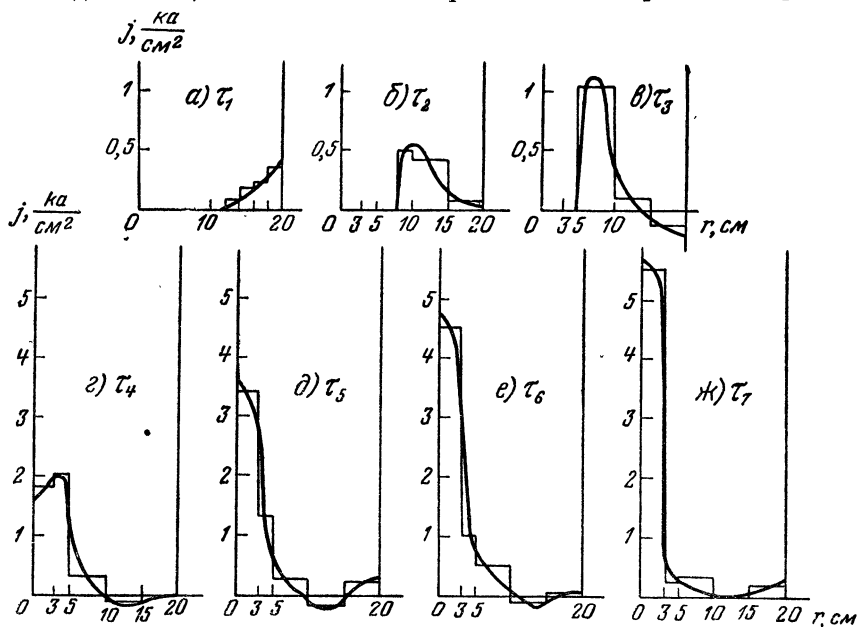


Рис. 5. Распределение плотности тока по сечению разряда для некоторых характерных моментов времени. Эти моменты отмечены на рис. 4.

особенности. С повышением давления возрастают только абсолютные величины полей и плотностей тока соответственно тому, что при больших давлениях особенность наступает при большой величине полного тока. Поэтому в дальнейшем подробно описывается развитие разряда при одном наиболее характерном давлении (0,05 мм рт. ст.). Для других давлений приводятся только некоторые цифры. На рис. 4 представлены графики магнитного поля в четырех точках и тока за первую четверть периода для разряда в дейтерии при $V_0=40$ кВ и $p_0=0,05$ мм рт. ст. Графики распределения плотности тока по сечению разрядной камеры для некоторых характерных моментов времени приведены на рис. 5.

Начальная стадия разряда исследовалась более детально. Катушки ставились на расстоянии 2; 4; 6 и 8 см от стенки разрядной камеры (т. е. на расстояниях $r=18; 16; 14$ и 12 см от оси). Таким способом было установлено, что разряд начинает развиваться у самой стенки разрядной камеры, причем первое время (примерно 1,5 мксек для разряда при $p_0=0,05$ мм, т. е. приблизительно 35% времени первой особенности) плотность тока максимальна у стенки и спадает по мере приближения к центру (рис. 5, а). Величина плотности тока у самой стенки в это время значительна (до $0,5$ ка/см²). На этой стадии в разряд может быть захвачено большое число атомов материала стенок и особенно адсорбированных на стенке газов. Так как даже незначительная примесь тяжелого газа заметно влияет на характер развития разряда (резко меняется характер перераспределения плотности тока по сечению разряда) и так как, очевидно, количество адсорбированного на стенке газа зависит от числа предшествующих разрядов через камеру, то становится понятным отмеченный выше эффект тренировки. Нестабильность нейтронного выхода при одинаковых начальных условиях, возможно, также определяется количеством примесей, которые попали в дейтерий как в начале развития разряда, так и после первой особенности, и изменением вследствие этого характера развития разряда.

При дальнейшем развитии разряда происходит отрыв тока от стенки разрядной камеры (рис. 5, б), причем значительная доля тока сосредоточивается в кольцевом слое толщиной примерно 5 см. Считая, что толщина этого слоя определяется скин-эффектом, можно оценить величину проводимости плазмы на данной стадии разряда. Для цилиндрического тока при линейном законе нарастания имеем

$$\sigma = \frac{c^2 t}{2\pi (\Delta r)^2}, \quad (3.4)$$

где σ — проводимость в CGSE единицах; t — время от начала процесса; Δr — толщина скин-слоя. Отсюда для времени порядка 2 мксек получим проводимость порядка 10^{13} CGSE единиц (для меди $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ CGSE).

Под действием электродинамических сил газовый шнур сжимается, причем скорость этого сжатия можно оценить по моментам начала регистрации магнитного поля катушками, помещенными на различных расстояниях от оси разрядной камеры. В табл. 2 приведены величины средних скоростей движения тока (точнее, его внутренней границы) к центру в разных интервалах расстояния и для разных давлений. Мы видим, что скорость сжатия увеличивается приблизительно в два раза по мере продвижения к центру. При возрастании начального дав-

ления в разрядной камере в 100 раз эта скорость уменьшается в 3—5 раз.

Таблица 2

Средние скорости сжатия $\times 10^{-6}$ (см/сек) для разрядов в дейтерии при $V_0 = 40$ кв

$r_1 - r_2$, см	20—15	15—10	10—5	5—3	5—0 *
r_0 , мм рт. ст.					
0,01	7,5	7,5	8,5	10	12
0,03	5,2	5,6	7,2	7,2	9,1
0,05	3,4	4,7	6,0	6,7	8,0
0,2	2,8	3,9	4,5	4,5	4,2
1	1,5	3,3	3,1	3,0	—
3	0,9	1,6	1,9	1,7	—

* Цифры этого столбца получены из разности моментов наступления первой особенности и момента начала регистрации катушки на расстоянии 5 см.

Перед моментом наступления первой особенности (когда ток еще не дошел до оси разрядной камеры) начинается спад общего тока, при этом магнитное поле в центральных зонах продолжает нарастать, а на краю падает, и в периферических зонах появляется ток обратного направления (рис. 5, в). Величина этого тока довольно значительна, но так как он сосредоточен в кольцевых зонах большой площади, то плотность его невелика. В момент первой особенности ток доходит до оси разрядной камеры. При этом начинается довольно резкое нарастание тока у самых стенок при продолжающемся росте тока в центральной зоне (рис. 5, г, д). Такое перераспределение тока приводит к падению индуктивности газового промежутка и, соответственно этому, к падению напряжения и росту общего тока. Благодаря наличию паразитной индуктивности при резком росте тока напряжение на разрядном промежутке может на некоторое время изменить знак.

Аналогичное перераспределение тока наблюдается в момент второй особенности (рис. 5, е, ж). В интервале между первой и второй особенностями в центральной зоне наблюдается сначала некоторый рост тока, затем спадание и новое нарастание тока. Начало нейтрального импульса лежит на росте тока в центральной зоне (район второй особенности). Некоторое время спустя после второй особенности, ток в центральной зоне плавно спадает до малой величины. В дальнейшем в цен-

тральной зоне в течение всего процесса значительного тока не наблюдается.

Вкладываемая в разряд энергия идет на повышение энергии магнитного поля и энергии частиц (как направленного, так и теплового движения). На рис. 6 показаны кривые полной энергии W , вкладываемой в разрядную камеру, и энергии магнитного поля W_H для разряда при $V_0=40$ кВ и $p_0=0,05$ мм рт. ст. Разность между этими кривыми дает энергию частиц и потери энергии на стенках разрядной камеры. Энергия, идущая на диссоциацию и ионизацию частиц при этом давлении, мала и ее можно не учитывать.

Энергия электронов, по-видимому, также невелика, так как проводимость плазмы низкая (порядка 10^{13} CGSE единиц). Такая проводимость означает, что температура электронов не превышает нескольких вольт. На первой стадии разряда, когда ток еще не оторвался от стенок, примерно $\frac{1}{2}$ вкладываемой в разряд энергии идет на повышение энергии частиц + потери на стенках, причем на потери может приходиться значительная доля энергии

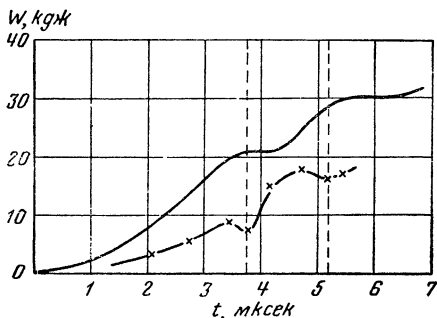


Рис. 6. Графики полной энергии W , вкладываемой в разряд (верхняя кривая), и энергии магнитного поля W_H (нижняя кривая) для разряда в дейтерии при $V_0=40$ кВ и $p_0=0,05$ мм рт. ст.

Однако за время нахождения тока у стенки энергия, вкладываемая в разряд, невелика. После отрыва тока от стенки потери на стенку не могут быть значительны. Таким образом, разность $W-W_H$ после отрыва тока от стенки дает приблизительную меру энергии частиц (ионов и нейтральных частиц). Эта энергия, рассчитанная на одну частицу ($w = \frac{W-W_H}{N}$, где N — полное число тяжелых частиц), к моменту первой особенности приведена в табл. 3. Там же приведена энергия направленного движения частиц (w_k) в этот момент, полученная из предположения, что скорость направленного движения частиц приблизительно равняется скорости внутренней границы тока.

Мы видим, что к моменту первой особенности значительная доля энергии частиц есть энергия теплового движения. После первой особенности энергия магнитного поля растет при приблизительно постоянной полной энергии, что указывает на уменьшение энергии частиц. Из рис. 6 видно, что в районе вто-

Т а б л и ц а 3

p_0 , мм рт. ст.	w , эв	w_k , эв
0,03	250	85
0,05	200	65
0,2	100	20

рой особенности ход графиков W и W_H такой же, как и в районе первой особенности. Следовательно, перед второй особенностью энергия частиц увеличивается, а за ней опять уменьшается. Отмеченное выше нарастание температуры в центре должно сопровождаться повышением давления. На нашей установке было произведено измерение давления в разных точках разряда по пьезоэффекту в кристаллах титаната бария. Эти измерения показали, что до первой особенности фронт давления движется от стенки к оси камеры вместе с фронтом тока. Когда ток достигает оси, там наблюдаются давления порядка 10—20 атм. Такие давления регистрируются только в центральной зоне (радиуса 3—5 см). В остальной части камеры давление существенно меньше (у стенки оно на порядок ниже, чем в центре). Считая, что при $p_0=0,05$ мм рт. ст. и $V_0=40$ кв температура в центре равна 200 эв и давление около 10 атм, получаем, что плотность частиц в эти моменты времени в девять раз больше начальной. Если считать, что такое уплотнение занимает зону радиусом 5 см, то там будет собираться примерно половина всех частиц.

Повышение энергии частиц при прохождении тока через газ может идти как за счет работы электродинамических сил ($A dt$), так и за счет джоулева тепла ($Q dt$). Имея распределение магнитного поля H_φ по сечению разряда, можно рассчитать работу электродинамических сил

$$A = \frac{1}{c} \iiint \mathbf{v}_r [jH] d\Omega. \quad (3.4)$$

Полагая, что H_φ не зависит от z , находим с помощью уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ (токами смещения пренебрегаем), что

$$A = v_r \frac{l}{4} \left\{ a H_\varphi^2(a) + \int_0^a H_\varphi^2(r) dr \right\}. \quad (3.5)$$

В § 4 будет показано, что до первой особенности радиальная скорость частиц равняется скорости внутренней границы тока. После первой особенности, по данным того же параграфа, можно сделать только приблизительные оценки радиальной скорости.

Для любого момента времени справедливо следующее уравнение:

$$\mathcal{J}V = \frac{dW_H}{dt} + A + Q. \quad (3.6)$$

Из этого уравнения можно найти величину Q , если известно $\frac{dW_H}{dt}$. Значение $\frac{dW_H}{dt}$ рассчитывается из графиков $W_H(t)$ (например, рис. 6). Так как точность графического дифференцирования невелика, то найти правильное значение $\frac{dW_H}{dt}$ можно только либо тогда, когда W_H растет приблизительно линейно, либо тогда, когда W_H достигает максимума (перед первой особенностью). В табл. 4 приведены величины $\mathcal{J}V$, A и $\frac{dW_H}{dt}$ для разрядов в дейтерии при $V_0 = 40$ кВ в те моменты времени, когда $\frac{dW_H}{dt}$ вычисляется с достаточной точностью.

Таблица 4

	$p_0 = 0,05$ мм рт. ст.		$p_0 = 0,2$ мм рт. ст.	
	$t = 2,4$ мксек	$t = 3,45$ мксек	$t = 2,8$ мксек	$t = 4,8$ мксек
$\mathcal{J}V \times 10^{-9}$ вт	5,9	7,0	7,5	8,5
$A \times 10^{-9}$ »	2,6	7,0	3,1	6,6
$\frac{dW_H}{dt} \times 10^{-9}$ »	2,8	0	4	0

Подставляя эти значения в уравнение (3.6), получаем, что Q меньше 10^9 вт, т. е. нагрев плазмы происходит главным образом за счет работы электродинамических сил. Так как, с другой стороны, Q можно подсчитать по известным значениям j в зонах по формуле $Q = \iiint \frac{j^2}{\sigma} d\Omega$, то отсюда

можно оценить минимальное значение σ . Предполагая, что σ постоянно по всему сечению разряда, получаем для взятых моментов времени σ большее, чем $2-5 \cdot 10^{13}$ CGSE.

Остановимся на некоторых характерных чертах развития разряда при достаточно больших давлениях дейтерия ($p_0=1-10$ мм рт. ст., $V_0=40$ кВ). При таких давлениях движение тока к центру продолжается и во второй четверти периода (рис. 7). Величины скоростей сжатия тока приведены в табл. 2. Слабо выраженная особенность наблюдается тогда, когда ток дойдет до оси разрядной камеры, причем в этот момент также отмечается некоторый рост тока на периферии разряда. Появление обратного тока у стенки разрядной камеры наблюдается в моменты, когда производная полного тока отрицательна. В момент, когда общий ток проходит через нуль, существует значительный ток в центре разрядной камеры и такой же величины ток обратного направления у стенки. При повышении начального давления величины тока, появляющегося в центре, уменьшается. При давлениях порядка 10 мм рт. ст. катушки перестают регистрировать ток в центре камеры.

В заключение укажем на некоторые характерные черты развития разряда в тяжелых газах. В качестве примера на рис. 8 показаны осциллограммы H_φ , \mathcal{J} и V для разряда в ксеноне при $V_0=40$ кВ и $p_0=0,005$ мм рт. ст. Характер распределения плотности тока по сечению разряда, полученный из этих данных, в общих чертах такой же, как и при разряде в дейтерии. Если сравнивать осциллограммы для таких давлений ксенона и дейтерия, когда массы газов в объеме камеры примерно одинаковы (например, ксенон при $p_0=0,005$ мм рт. ст. и дейтерий при $p_0=0,2$ мм рт. ст.), то можно отметить следующее: особенность при разряде в ксеноне наступает несколько раньше, чем при разряде в дейтерии, т. е. скорость сжатия тока в ксеноне несколько больше. При разрядах в дейтерии поле H_φ в центральных зонах раза в 3-4 больше, чем на периферии, в то время как при разрядах в ксеноне амплитуда магнитного поля по всему сечению разряда одинакова, и, следовательно, концентрация тока у оси камеры в ксеноне гораздо меньше, чем в дейтерии. Интересно отметить, что при разряде в ксеноне (когда есть все основания считать, что цилиндрическая симметрия не нарушается в течение всего процесса) на втором полупериоде отмечается также продвижение к центру образовавшегося у стенки токового слоя, как это происходит на первом полупериоде (рис. 9).

При разрядах в смесях ксенона и дейтерия, содержащих 1% атомов ксенона, все осциллограммы сходны с осциллограммами чистого ксенона. Отметим еще, что при разрядах в дейте-

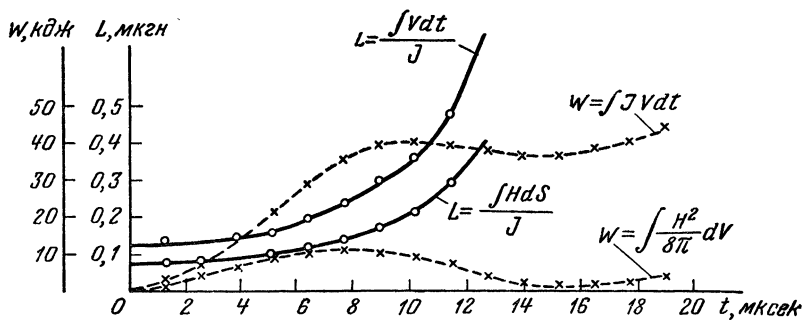
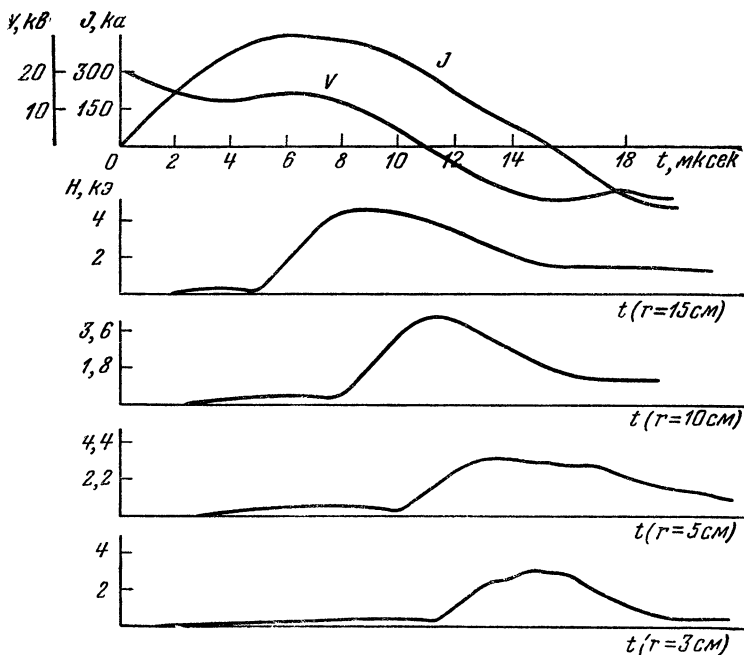


Рис. 7. Осциллограммы тока, напряжения и магнитного поля в различных точках разрядной камеры для разряда в дейтерии при $V_0 = 40 \text{ кВ}$ и $p_0 = 3 \text{ мм рт. ст.}$ Внизу приведены графики L и W в зависимости от времени.

рии в нетренированной трубе как осциллограммы H_{φ} , так и осциллограммы $\mathcal{J}V$ по характеру ближе к осциллограммам на тяжелых газах.

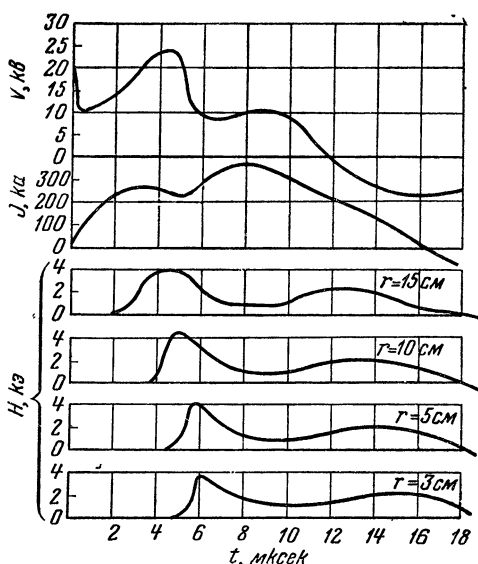


Рис. 8. Графики общего тока, напряжения на разрядном промежутке и магнитного поля на различных расстояниях от оси разрядной камеры для разряда в ксенеоне при $V_0 = 40$ кв и $p_0 = 0,005$ мм рт. ст.

методикой. Эта методика основана на следующих соображениях. Рассмотрим контур $ABCDE$ (рис. 10). Имеем

$$\oint_{ABCDE} E_i dl = -\frac{1}{c} \iint_s \dot{H}_{\varphi} ds. \quad (4.1)$$

Так как падение напряжения на участках BC , CD и EA (металлические фланцы и коаксиал) пренебрежимо мало, а на участке DE величина $\int_{DE} E_i dl$ дает напряжение, изме-

ряемое делителем, то левая часть сводится к $\int_{AB} E_z dz + V$.

Если предположить, что имеется цилиндрическая симметрия

§ 4. Продольное электрическое поле в газовом разряде

Описанная в предыдущих параграфах методика, дававшая распределение магнитного поля, не позволяла сделать какие-либо заключения о величине продольного электрического поля в разряде. Как уже было указано, влияние величины омического падения напряжения, определяемого этим электрическим полем, оказывалось сравнимым с ошибками измерения. Поэтому для того, чтобы измерить величину электрического поля E_z , мы пользовались несколько видоизмененной

столба тока (см. выше) и что E_z и H_φ не зависят от z , то уравнение (4.1) дает

$$E_z = \frac{V}{l} - \frac{1}{c} \int_r^{a_0} \dot{H}_\varphi dr - \frac{1}{c} \int_{a_0}^b \dot{H}_\varphi dr, \quad (4.2)$$

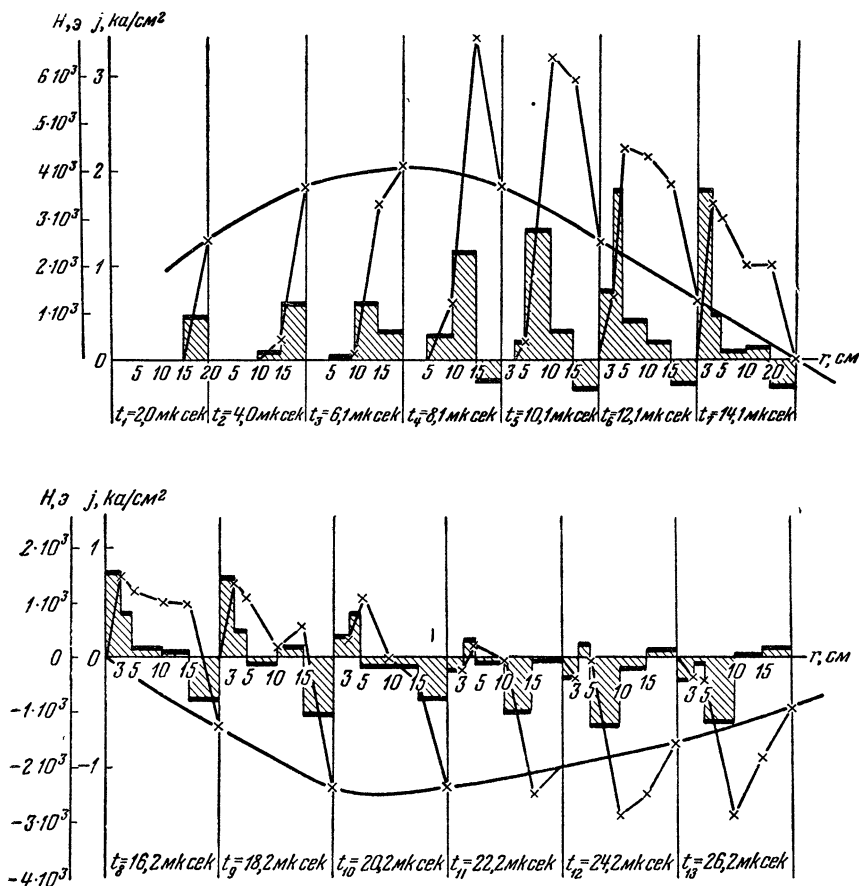


Рис. 9. Распределение плотности тока и магнитного поля в различные моменты времени для ксенона при $V_0 = 40 \text{ кВ}$ и $p_0 = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$ Сплошная линия — кривая полного тока. Каждый кадр соответствует правой точке отрезка кривой тока внутри данного кадра.

где a_0 — радиус разрядной камеры. Таким образом, для определения E_z необходимо было измерить величину $\int_r^{a_0} \dot{H}_\varphi dr$ и

напряжение V на разрядной камере. $\int_r^b \dot{H}_\varphi dr$ можно было рассчитать, зная производную полного тока. Последняя измерялась катушкой, размером $1 \times 2,5 \text{ см}^2$, состоящей из одного витка медной проволоки, помещенной между коаксиалом и разрядной камерой (рис. 10). $\int_r^{a_0} \dot{H}_\varphi dr$ измерялся петлей из одного витка провода, высотой $0,3 \text{ см}$ и длиной $(a_0 - r)$ (см. рис. 10), сигнал с которой кабелем подавался на осциллограф. Полоса пропускания всей системы (петля, согласованный кабель, осциллограф) была больше 10^7 гц . Петли вводились в разряд в фарфоровых трубках таким же способом, как и магнитные зонды. Величина $\int_r^{a_0} \dot{H}_\varphi dr$ одновременно измерялась на расстояниях $r = 1; 5; 10$ и 15 см с помощью петель разной длины. Иногда вместо $r = 1 \text{ см}$ бралось $r = 3 \text{ см}$; при этом существенного различия полей E_z в этих точках не наблюдалось. Величина поля E_z на геометрической оси разрядной камеры не определялась, так как ось разряда могла отклоняться от оси камеры. Это отклонение, оцененное из измерений \dot{H}_φ , как правило, не больше 1 см , по крайней мере до второй особенности. Одновременное измерение V и $\int_r^{a_0} \dot{H}_\varphi dr$ не проводилось из-за опасности пробоя через фарфоровые трубки (см. выше). Поэтому одновременно фотографировались четыре сигнала от петель, производная полного тока \dot{J} и нейтронный импульс n . В другой раз фотографировались \mathcal{J} , \dot{J} , V и n . Небольшие амплитудные колебания V от раза к разу несущественно сказывались на расчетной величине поля E_z . Но так как в районах особенностей V резко изменяется, необходима была точная фазировка (с точностью до $0,1 \text{ мксек}$) обеих серий осциллограмм. Такая фазировка осуществлялась следующим способом. Напряжение на фланцах разрядной камеры V равняется

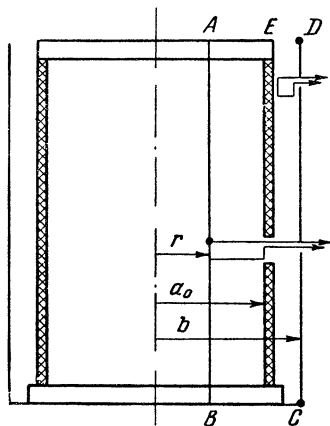


Рис. 10.

могла отклоняться от оси камеры. Это отклонение, оцененное из измерений \dot{H}_φ , как правило, не больше 1 см , по крайней мере до второй особенности. Одновременное измерение V и $\int_r^{a_0} \dot{H}_\varphi dr$ не проводилось из-за опасности пробоя через фарфоровые трубки (см. выше). Поэтому одновременно фотографировались четыре сигнала от петель, производная полного тока \dot{J} и нейтронный импульс n . В другой раз фотографировались \mathcal{J} , \dot{J} , V и n . Небольшие амплитудные колебания V от раза к разу несущественно сказывались на расчетной величине поля E_z . Но так как в районах особенностей V резко изменяется, необходима была точная фазировка (с точностью до $0,1 \text{ мксек}$) обеих серий осциллограмм. Такая фазировка осуществлялась следующим способом. Напряжение на фланцах разрядной камеры V равняется

$$V = V_0 - \frac{1}{C} \int_0^t \mathcal{I} dt - L_{\text{пар}} \dot{\mathcal{I}}, \quad (4.3)$$

где C — емкость конденсаторной батареи. Расчет показывает, что разность первых двух членов правой части до максимума тока положительна, и поэтому максимальное отрицательное значение V может быть только в момент максимального положительного значения $\dot{\mathcal{I}}$, которое наблюдается в районе между первой и второй особенностями. По этому моменту времени и фазировались осциллограммы разных серий. Внутри же каждой из них фазирование производилось по меткам времени на осциллографе. Для того чтобы оценить, не сильно ли влияют на развитие разряда четыре трубки, в разряд вставлялась только одна фарфоровая трубка с петлей. Осциллограммы, полученные в этом случае, аналогичны осциллограммам, полученным с четырьмя трубками.

Измерения величины $\int_r^b \dot{H}_\varphi dr$ и расчет электрического поля E_z были выполнены для разрядов в дейтерии в широком диапазоне давлений от 0,01 до 3 мм рт. ст. Так как на низких давлениях (0,01—0,2 мм рт. ст.) осциллограммы $\int_0^{a_0} \dot{H}_\varphi dr$ качественно не отличаются друг от друга, то здесь приводим результаты для одного наиболее характерного давления.

На рис. 11 приведены величины электрического поля E_z , рассчитанные по формуле (4.2) для разряда при $V_0 = 40$ кв и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. На начальной стадии развития разряда поле в центральных областях равно нулю. Затем поле плавно нарастает, причем это нарастание начинается тем позднее, чем ближе к оси разряда рассматриваемая зона. Перед первой особенностью, на спаде полного тока, поле E_z в центральных областях возрастает до величины порядка 500—700 в/см.

Из сравнения графиков H_φ (рис. 4) и E_z (рис. 11) видно, что в центральных областях поле E_z значительной величины (около 300 в/см) регистрируется раньше, чем начинает регистрироваться поле H_φ . Прямые измерения \dot{H}_z магнитными зондами без интегрирующего элемента показали, что перед фронтом магнитного поля (регистрируемого теми же зондами с интегрирующим элементом) имеется зона, где \dot{H}_z плавно нарастает. Скорость этого нарастания вначале мала (\dot{H}_z порядка $3 \cdot 10^8$ э/сек), поэтому момент начала регистрации \dot{H}_z отстоит примерно на 0,5—1 мксек от начала регистрации \dot{H}_φ .

Примерно на такое же время момент начала регистрации E_z опережает момент начала регистрации H_z . В районе первой особенности поле E_z круто падает и проходит через нуль.

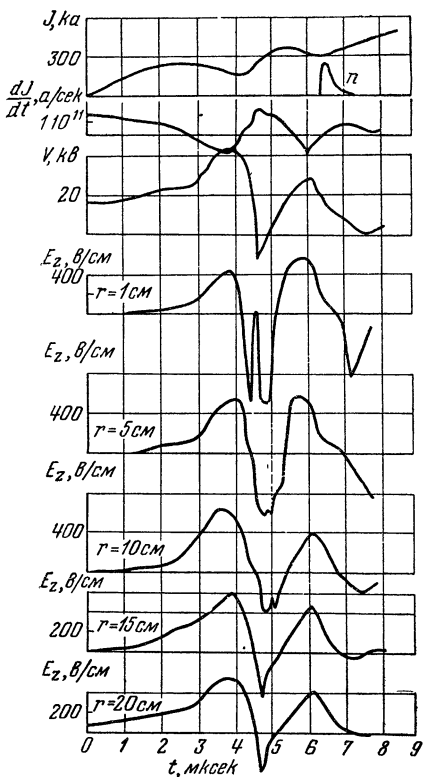


Рис. 11. Графики электрического поля на различных расстояниях от оси разрядной камеры для разряда в дейтерии при $V_0 = 40$ кВ и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. Приведены графики тока, нейтронного импульса, производной тока и напряжения на разрядном промежутке.

За первой особенностью, в районе крутого нарастания тока, поле E_z становится отрицательным по всему сечению раз-

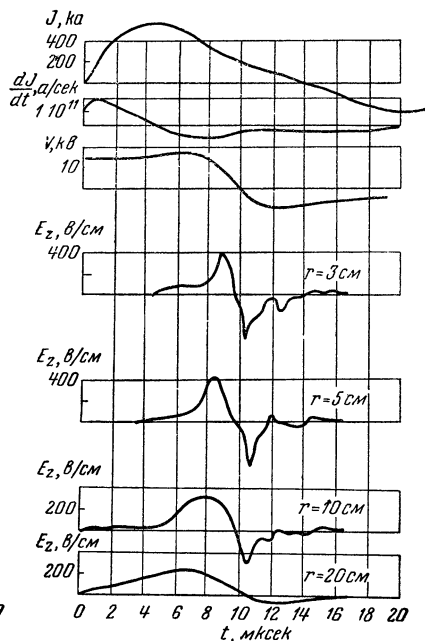


Рис. 12. Графики электрического поля на различных расстояниях от оси разрядной камеры для разряда в дейтерии при $V_0 = 40$ кВ и $p_0 = 1$ мм рт. ст. Приведены графики тока, производной тока и напряжения на разрядном промежутке.

ряда. Около оси разрядной камеры этот пик отрицательного поля (часто раздвоенный) приблизительно равняется 1000 в/см с отклонением на $20-30\%$ в обе стороны от одного разрядного импульса к другому. С увеличением расстояния от оси разрядной камеры величина отрицательного поля E_z уменьшается до ~ 400 в/см около стенки камеры. Отрицательное поле E_z появляется на всех расстояниях одновременно (с точ-

ностью 0,3 мксек), что особенно отчетливо видно из графиков электрического поля для разряда при $p_0 = 1$ мм рт. ст., представленных на рис. 12. В районе между первой и второй особенностями поле E_z становится положительным, достигая величин порядка 400—600 в/см по всему сечению разряда. Несколько позже второй особенности поле E_z становится опять отрицательным. Величина его в центре колеблется от импульса к импульсу очень сильно от 50 до 600 в/см. На периферии этот выброс либо очень мал, либо не наблюдается вообще. Начало нейтронного импульса, как уже неоднократно отмечалось, приходится на район второй особенности. В этот момент на всех расстояниях наблюдается спад положительного поля E_z , причем величина его колеблется в пределах 100—600 в/см, что дает приблизительно 10—60 кэ на всю длину разрядной камеры. Выше было отмечено, что момент появления жесткого рентгеновского излучения (в составе которого есть кванты с энергией до 400 кэв [3]) совпадает с моментом появления нейтронов. Из изложенного следует, что объяснить появление рентгеновского излучения с энергией, большей 100 кэв, торможением на аноде электронов, однократно ускоренных в продольном электрическом поле, не представляется возможным даже около оси разрядной камеры, где H_ϕ мало. Напомним, что наша методика не дает возможности измерять местные электрические поля, которые могут быть очень большими особенно в моменты нарушения цилиндрической симметрии токового столба (т. е. развития разного рода неустойчивостей).

В § 2 были приведены кривые индуктивности (рис. 3), рассчитанные по формулам (2.1) и (3.1). При учете омического падения напряжения уравнение (2.1) нужно заменить уравнением

$$L = \frac{\int_0^t V dt - l \int_0^t E_z dt}{\mathcal{I}},$$

где L — истинная индуктивность, определяемая формулой (3.1).

Расчет показывает, что $l \int_0^t E_z dt$ во все моменты времени мал

по сравнению с $\int_0^t V dt$. Наибольшая величина $l \int_0^t E_z dt$ наблюдается в момент первой и второй особенностей и составляет в это время около 30% величины $\int_0^t V dt$. Точность графиче-

ского интегрирования при расчете истинной индуктивности [формула (3.1)] не позволяет заметить такую разницу, особенно в моменты резкого изменения распределения магнитного поля (первая и вторая особенности).

Величина электрического поля E_z связана с величинами j_z и H_φ уравнением

$$j_z = \sigma \left(E_z + \frac{v_r H}{c} \right). \quad (4.4)$$

В этом уравнении неизвестны проводимость σ и величина радиальной скорости v_r . Задавая одну из этих величин, можно оценить другую. К такого рода оценкам мы и переходим.

1) В начальной стадии разряда, когда ток перемещается от периферии к центру, оценка проводимости по толщине скин-слоя дает величину порядка 10^{13} CGSE. При таком значении проводимости величина $\frac{j_z}{\sigma}$ мала по сравнению с имеющимся в это время электрическим полем E_z . Исходя из этого, с помощью уравнения (4.4) можно оценить величину радиальной скорости частиц. Такого рода оценки дают, что радиальная скорость частиц достаточно хорошо совпадает со скоростью внутренней границы тока. Например, для разряда в дейтерии при $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и $V_0 = 40$ кВ в момент $t = 2,5$ мксек на расстоянии $r = 10$ см, $E_z = 100$ в/см

и $H_\varphi = 2 \cdot 10^3$ э. Отсюда $v_r = -\frac{cE_z}{H_\varphi} = -5 \cdot 10^6$ см/сек. Из табл. 2 величина скорости внутренней границы тока в этот момент времени лежит между $-4,7 \cdot 10^6$ и $-6 \cdot 10^6$ см/сек.

2) Оценки величины или хотя бы направления радиальной скорости частиц по уравнению (4.4) можно делать и после первой особенности. В момент времени, когда E_z отрицательно, H_φ и j_z в центральной зоне всегда положительны.

Отсюда v_r положительно и $v_r \geq \frac{cE_z}{H_\varphi}$ (так как сделанное выше

предположение о малости $\frac{j_z}{\sigma}$ по сравнению с E_z выполняется, по-видимому, и после первой особенности). Подставляя наблюдаемые значения полей, получаем $v_r \geq 1,5 \cdot 10^7$ см/сек. Так как на расстоянии $r = 5$ см E_z несколько меньше, а H_φ несколько больше соответствующих величин на расстоянии 3 см, то можно сказать, что скорость разлета частиц в центральной зоне уменьшается с увеличением расстояния от оси. В зоне 5—10 см v_r также положительна и меньше, чем в зоне 3—5 см, так как знаки j_z , H_φ и E_z те же, что и в центре, но E_z с расстоянием уменьшается быстрее, чем H_φ . В зоне

отрицательного тока ($r = 10-15$ см) проследить за направлением v_r трудно. Но если предположить, что σ там больше, чем $2 \cdot 10^{11}$ CGSE (а она, по-видимому, порядка 10^{13} CGSE), то v_r направлена к периферии разрядной камеры и меньше чем 10^7 см/сек. Вблизи стенок разрядной камеры (зона 15—20 см) радиальная скорость также положительна и больше, чем $7 \cdot 10^6$ см/сек (так как $j_z > 0$, $E_z < 0$ и $H_\varphi > 0$). Следовательно, после первой особенности (когда $E_z < 0$) радиальная скорость частиц по всему сечению разрядной камеры направлена от центра к периферии. Эта скорость, по-видимому, убывает от оси разряда к периферии, причем в центральной зоне она больше, чем $1-2 \cdot 10^7$ см/сек. Все приведенные рассуждения относительно направления радиальных скоростей частиц применимы и к зоне отрицательных значений поля E_z после второй особенности, но величина скорости v_r там меньше, так как E_z имеет меньшее, а H_φ большее значение.

3) В момент времени между первой и второй особенностями, когда $E_z > 0$, j_z и H_φ в центральной зоне также больше нуля, и из уравнения (4.4) нельзя определить направление радиальной скорости. Однако из фотографий, полученных методом скоростной фотосъемки на аналогичной установке [5], следует, что в эти моменты времени светящийся столб стягивается к оси разряда. Естественно предположить, что стягивание светящегося столба связано с движением частиц к оси разряда. Полагая, что $v_r < 0$, получаем для проводимости в центре значения больше, чем 10^{13} CGSE.

Считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность академику Л. А. Арцимовичу и академику М. А. Леонтовичу за ценные советы и неизменный интерес к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов, Атомная энергия, № 3 (1956).
2. Л. А. Арцимович и др., Атомная энергия, 3 (1956).
3. С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, Атомная энергия, 3 (1956).
4. М. А. Леонтович, С. М. Осовец, Отчет АН СССР, 1953; Атомная энергия, № 3 (1956).
5. Н. А. Борзунов, Д. В. Орлинский, С. М. Осовец, Отчет АН СССР, 1953; Атомная энергия, № 2 (1958).

В. Д. Кириллов

ИЗМЕРЕНИЕ ПРОВОДИМОСТИ ПЛАЗМЫ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ПРОТЕКАНИИ ТОКА *

В работе описываются методика и экспериментальные результаты исследования мощного (при токах до 95 ка) низкочастотного ($f=270$ гц) разряда в дейтерии.

Приведены осциллограммы напряжения при разрядах с продольным магнитным полем и без него, кривые изменения межэлектродного сопротивления в функции времени, СФР-граммы (сверхскоростная фоторегистрация) для напряжения на конденсаторах $U_{\kappa}=6$ кэ и кривые распределения потенциала вдоль оси разрядной камеры.

§ 1. Установка

Описываемые измерения были проведены на установке, схема и электротехнические параметры которой представлены на рис. 1 и в таблице.

Через разрядную камеру R , наполненную дейтерием при давлении в десятые доли миллиметра ртутного столба, пропускался ток \mathcal{J} колебательного контура, состоящего из балластной индуктивности L_1 , батареи конденсаторов C_1 и разрядника P_1 .

Частота колебательного процесса равнялась $f_1=270$ гц.

Так как при всех условиях эксперимента (начальное давление, наличие магнитного поля и т. д.) междуэлектродное напряжение оставалось много меньше зарядного напряжения конденсаторов U_{κ} , то форма разрядного тока была близка

* Работа выполнена в 1954 г.

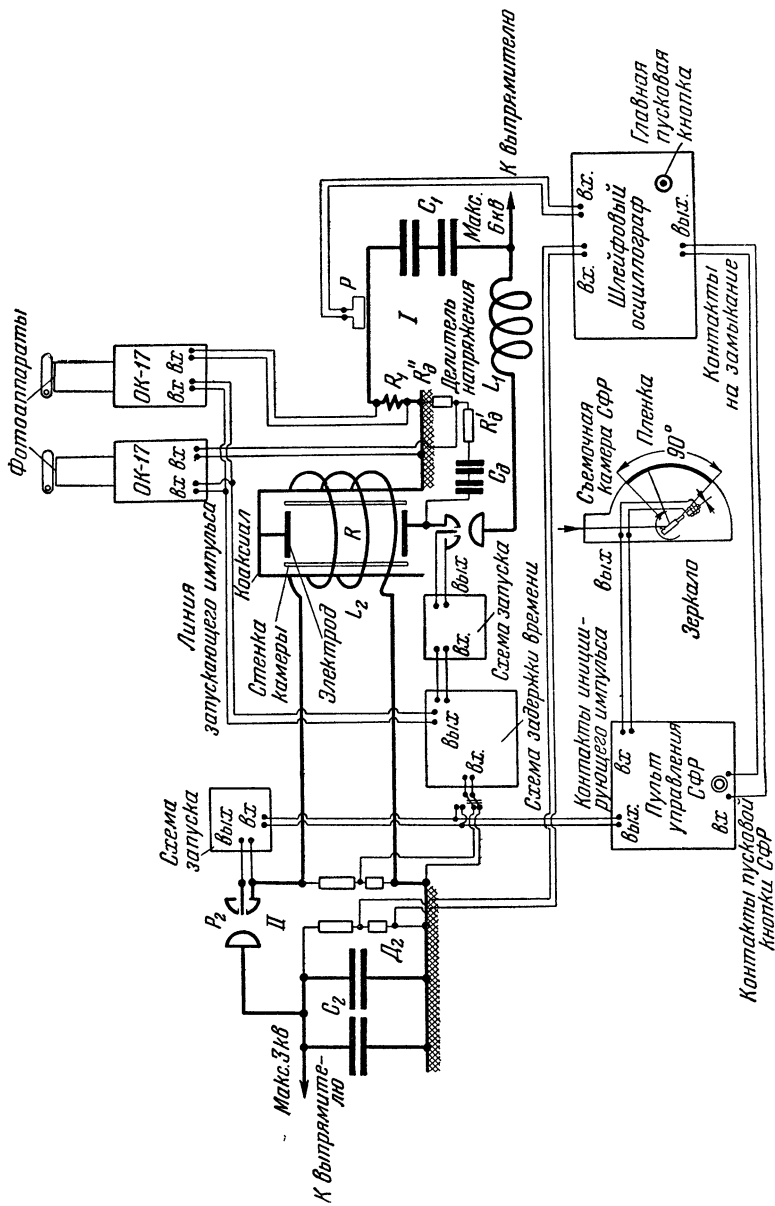


Рис. 1. Принципиальная схема установки.

к синусоидальной, и его амплитуда $\mathcal{J}_{\text{макс}}$ определялась только величиной U_k

$$\text{при } U_k = 2 \text{ кв} - \mathcal{J}_{\text{макс}} = 32 \text{ ка}$$

$$U_k = 4 \text{ »} - \mathcal{J}_{\text{макс}} = 64 \text{ »}$$

$$U_k = 6 \text{ »} - \mathcal{J}_{\text{макс}} = 96 \text{ »}$$

Т а б л и ц а

Обозначение	Наименование	Величина
C_1	Главная батарея конденсаторов ИМ-3-100	9250 мкф
L_1	Балластная индуктивность	37 мкГн
R_1	Безындуктивный шунт для измерения тока	$(2,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ ом}$
C_2	Батарея конденсаторов ИМ-3-100 для питания соленоида	18500 мкф
L_2	Соленоидальная катушка для создания продольного магнитного поля	200 мкГн
D_2	Делитель для записи напряжения на шлейфом осциллографе	1 ом
R_2''	Плечо делителя напряжения	30 ком + 1 ом
R_2'	Плечо делителя напряжения	748 ом
C_3	Последовательно включенные конденсаторы ИМ-3-100	50 мкф

Абсолютная погрешность в измерении тока оценивается в 15%.

Разрядная камера изображена на рис. 2. Расстояние между плоскими медными электродами равняется 70 см. Размер их почти совпадает с внутренним диаметром разрядной камеры, равным 18 см. В электродах по радиусу прорезаны щели, уменьшающие токи Фуко.

Межэлектродное сопротивление плазмы исследовалось без поля и с направленным вдоль оси камеры магнитным полем H . Магнитное поле создавалось с помощью надетой на разрядную камеру соленоидальной катушки L_2 , включенной в контур II . Конденсаторная батарея C_2 заряжалась до 2 кв, что обеспечивало максимальный ток ≈ 19 ка и магнитное поле в катушке с максимальной напряженностью в 10 кэ. Частота колебательного процесса в контуре II равнялась $f_2 \approx 80$ гц.

Зазоры между витками соленоидальной катушки и окно, вырезанное в коаксиале, позволяли фотографировать среднюю

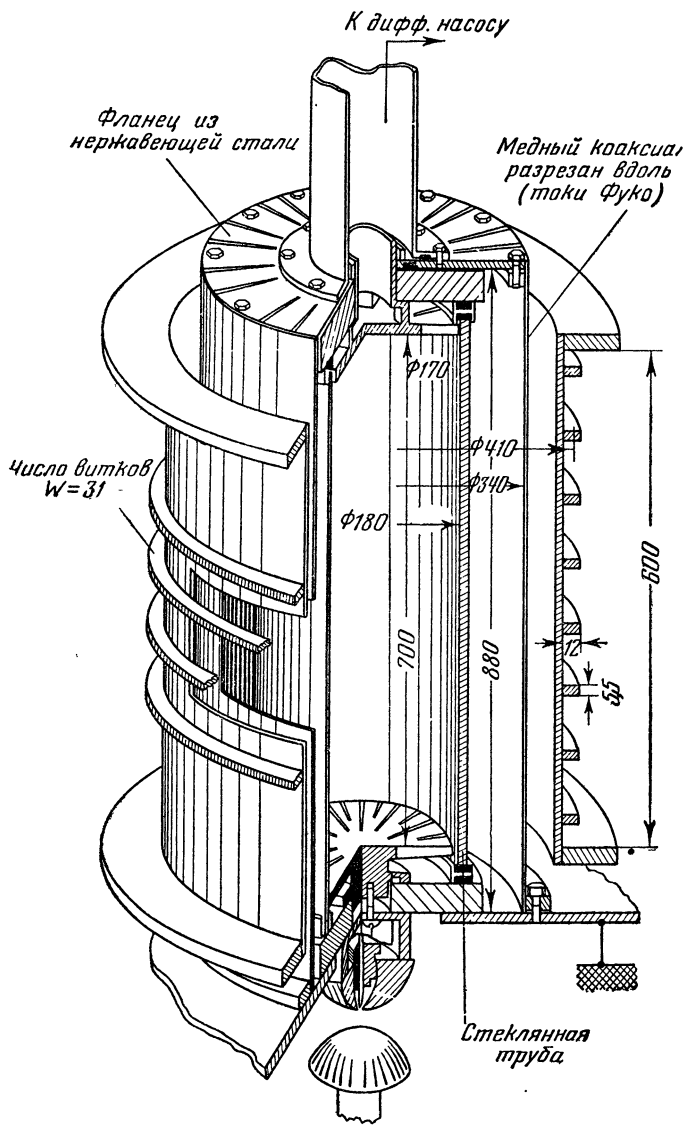


Рис. 2. Конструкция разрядной камеры.

часть газового разряда с помощью СФР. Был синхронизован пуск СФР и контуров *I* и *II*. Требовалось запускать контур *I* в момент, когда ток в контуре *II*, а следовательно, и напряженность магнитного поля приблизительно достигали максимума (рис. 3). Контроль за правильностью работы всей

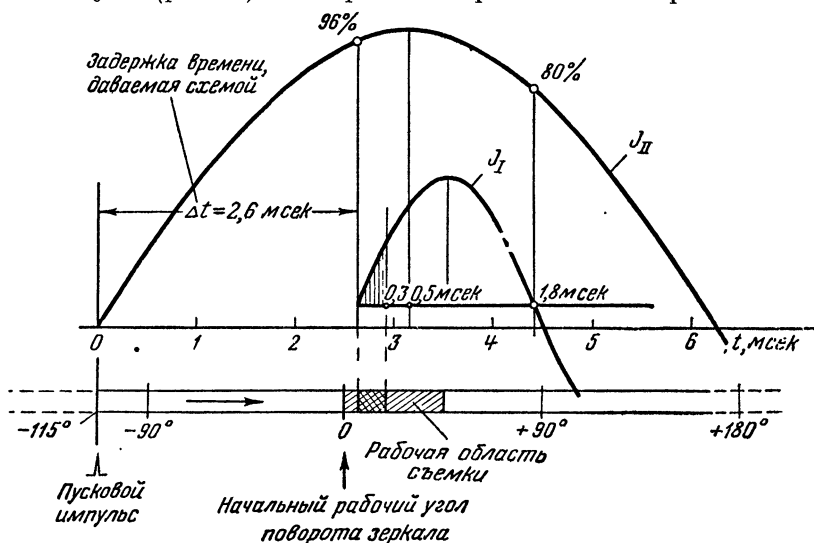


Рис. 3. Диаграмма синхронизации работы контуров *I* и *II* и скоростного фоторегистратора (СФР).

системы синхронизации осуществлялся с помощью магнитного осциллографа, на котором записывалось напряжение конденсаторных батарей C_1 и C_2 посредством рамки P и делителя напряжения D_2 .

Съемка СФР проводилась при скорости вращения зеркала $7,5 \cdot 10^3$ об/мин. Время между кадрами равнялось 4 мксек.

§ 2. Измерения

В экспериментах измерялись ток (посредством шунта R_1), межэлектродное напряжение (посредством делителя $C_2 R_2' R_2''$) и проводилось фотографирование.

Осциллограммы напряжения, снятые в одинаковых условиях, совпадают друг с другом с точностью 15%. Для построения графиков активного межэлектродного сопротивления в функции времени из усредненных осциллограмм напряжения вычиталась индуктивная составляющая $L \frac{dI}{dt}$ (~ 45 в при

$U_K = 6$ кэ; индуктивность разрядной камеры $L \sim 0,25$ мкген), которая также измеряется делителем.

Эксперименты проводились при трех режимах: $U_K = 2; 4$ и 6 кэ. В каждом из режимов первоначальное давление дейтерия было $p = 0,05; 0,1; 0,2$ и $0,4$ мм рт. ст. Почти каждый из перечисленных опытов проводился как с продольным

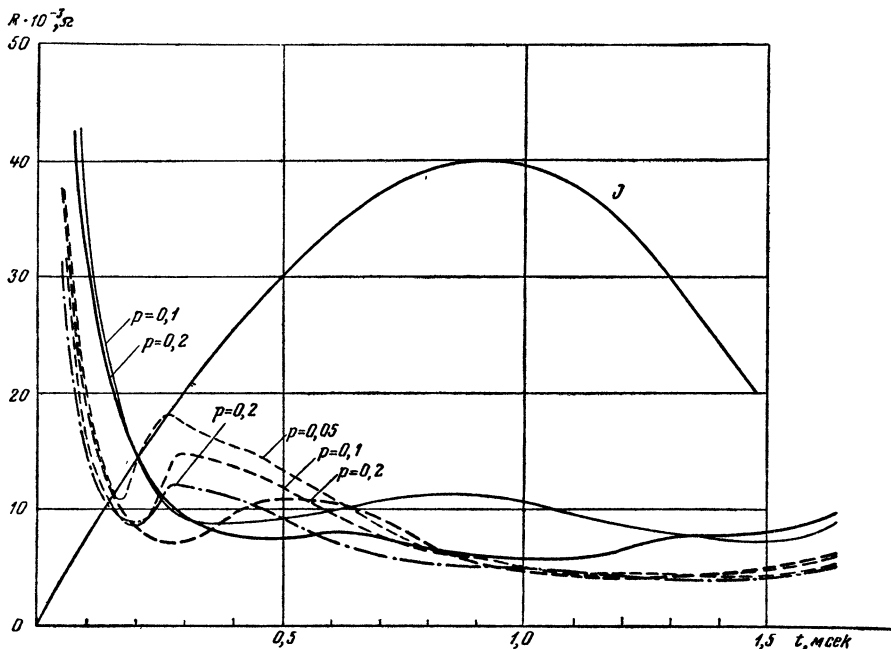


Рис. 4. Межэлектродное сопротивление разряда в функции времени при различных давлениях дейтерия, разных токах и $H = 0$.

————— 2 кэ.
 · · · · · $U_K = 4$ ·
 - . - . - 6 ·

магнитным полем ($H = 10$ кэ), так и без него по несколько раз.

Представленные на рис. 4 и 5 графики межэлектродного сопротивления есть результат обработки около 100 осциллограмм.

Для иллюстрации на рис. 6 показаны осциллограммы для разных режимов. Напряжение всюду меняет знак вместе с изменением направления тока. По своему характеру кривые напряжения могут быть разделены на два участка: начальный участок «площадку», где напряжение приближи-

тельно постоянно, и следующий за ним участок с более или менее круто возрастающим напряжением.

Это разделение особенно четко различается на осциллограммах с $H=0$. На рис. 7 построены зависимости напряжения $U_{пл}$ и продолжительности площадки τ от $\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{t=0}$. Видно,

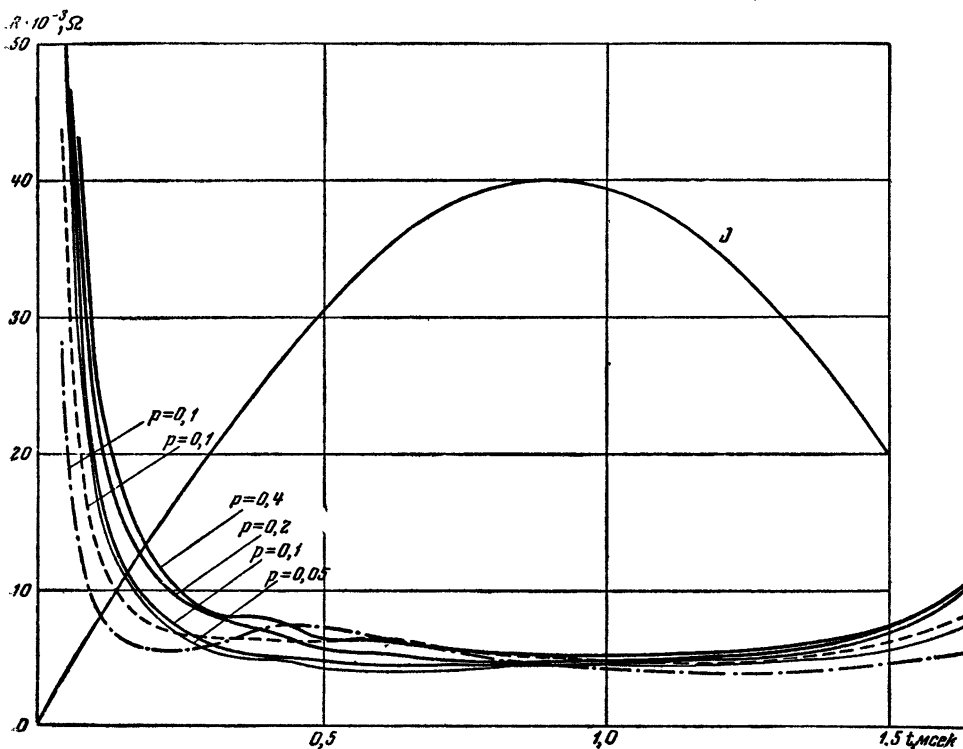


Рис. 5. Межэлектродное сопротивление разряда в функции времени при различных давлениях дейтерия, разных токах и $H = 10^4$ э.

— 2 кв.
 $U_k =$ - - - 4 »
 - · - · - 6 »

что при прочих равных условиях магнитное поле снижает напряжение площадки и делает ее продолжительней, так что при $U_k = 2$ кв. площадка растягивается на весь процесс.

Достаточно яркие, поддающиеся обработке СФР-граммы получились только при $U_k = 6$ кв и $H = 10^4$ э. Фазирование с током проводилось путем впечатывания на пленку вместе с рабочими кадрами искры от разрядника P_1 .

Из снимков следует, что разряд начинается в небольшом объеме по оси камеры. В дальнейшем плазменный столб расширяется, сохраняя продольную устойчивость, вплоть до соприкосновения со стенками. Это происходит приблизи-

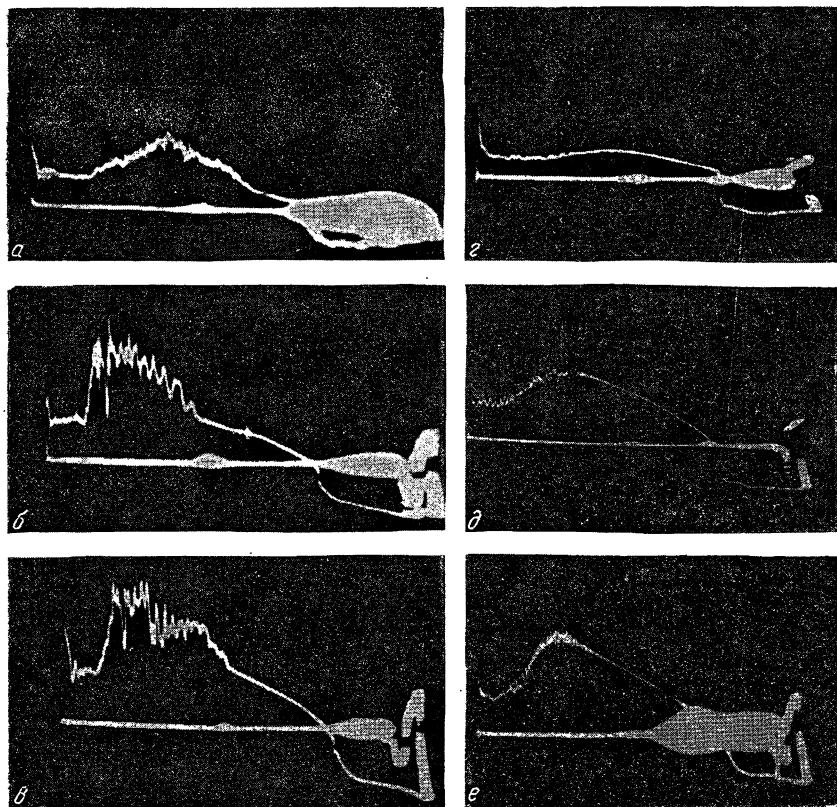


Рис. 6. Осциллограммы межэлектродного напряжения для разных токов при отсутствии магнитного поля и при $H = 10$ кэ.

а: $H = 0$, $p = 0,1$, $U_{\text{к}} = 2$ кэ; б: $H = 0$, $p = 0,1$, $U_{\text{к}} = 4$ кэ; в: $H = 0$, $p = 0,1$, $U_{\text{к}} = 6$ кэ; з: $H = 10$ кэ, $p = 0,1$, $U_{\text{к}} = 2$ кэ; д: $H = 10$ кэ, $p = 0,1$, $U_{\text{к}} = 4$ кэ; е: $H = 10$ кэ, $p = 0,1$, $U_{\text{к}} = 6$ кэ.

тельно через 250 мксек после начала разряда. На рис. 8 представлены кривые диаметра плазменного столба в функции времени.

Сопоставление кривых изменения диаметра с осциллограммами напряжения для этого режима показывает, что

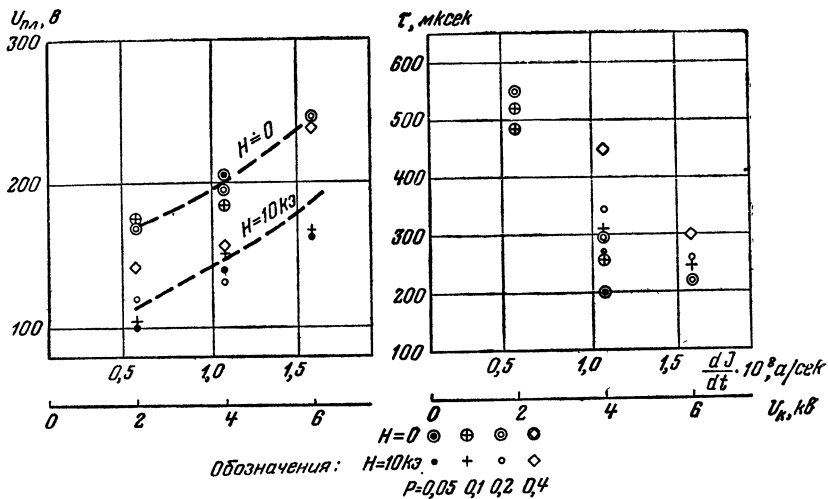


Рис. 7. Зависимость напряжения $U_{пл}$ и продолжительности площадки τ от $\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0}$ при разных давлениях при отсутствии магнитного поля и при $H = 10 \text{ кэ}$.

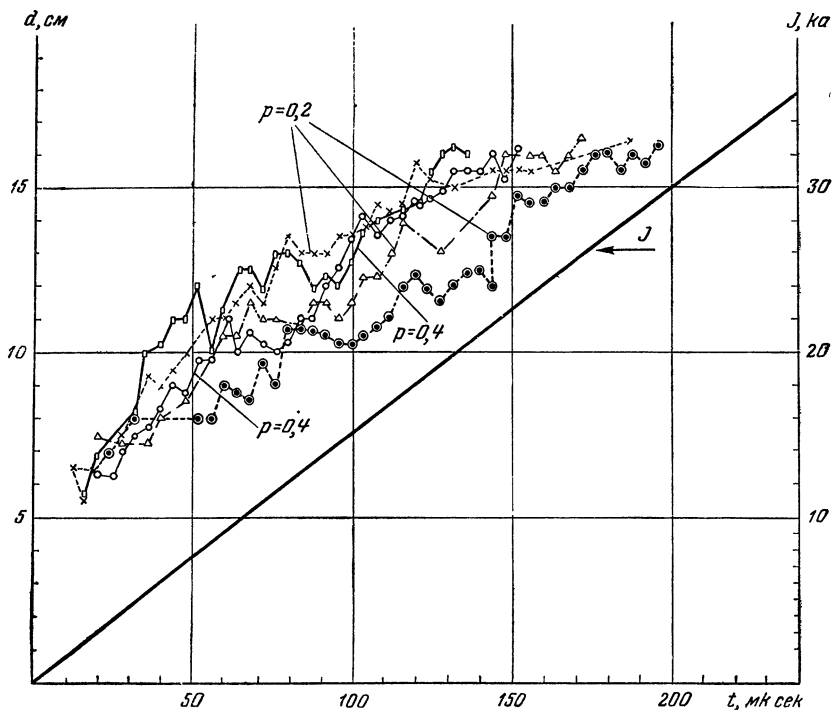


Рис. 8. Световой диаметр плазменного столба в функции времени при $U_{к}=6 \text{ кВ}$ и $H=10 \text{ кэ}$.

продолжительность площадки равна времени расширения плазменного столба до стенки камеры.

Так как, грубо, во время площадки ток пропорционален времени $\mathcal{I} \sim t$, а напряжение $U \sim \text{const}$, то проводимость $\sigma \sim \frac{\mathcal{I}}{U} \sim t$ линейно растет.

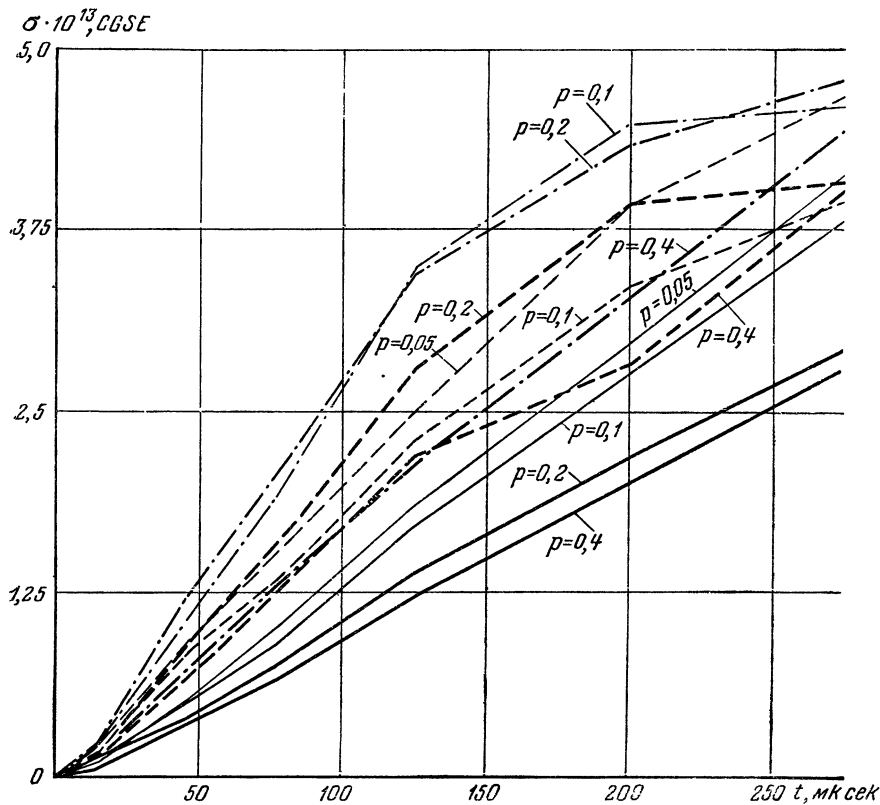


Рис. 9. Кривые средней по сечению и длине камеры удельной проводимости σ при различных токах, давлениях дейтерия и $H = 10 \text{ кэ}$.

————— 2 кВ.
 - - - - - 4 »
 - - 6 »

На графике рис. 9 представлены кривые средней по сечению и длине камеры удельной проводимости $\sigma = f(t)$ при $H = 10 \text{ кэ}$ для наиболее интересного интервала времени от $t = 0$ до $t \approx 300 \text{ мксек}$, где эти кривые различаются в зависимости от начального давления p и напряжения конденсаторов U_k .

В приведенных кривых наблюдается слабая зависимость проводимости от давления, но все же можно заметить, что проводимость растет быстрее при меньших p . При $U_k = 2$ кВ зависимость от давления наиболее наглядна.

Следующий за площадкой участок характерен приблизительно постоянством сопротивления разряда $R = \frac{U}{I} \sim \text{const}$ (рис. 5), причем это сопротивление одинаково для разных режимов в широком интервале давлений p (0,05—0,4 мм рт. ст.) и величин токов (от 15 до 95 кА), и установившаяся его величина слабо зависит от наличия магнитного поля.

При $H = 0$ в конце площадки сопротивление несколько возрастает (рис. 4), что можно интерпретировать как начало энергичного взаимодействия плазмы со стенкой. Резкие, неупорядоченные броски напряжения указывают на сильно возмущенное состояние плазмы в этой области. Напряжение в опытах с магнитным полем $H = 10$ кЭ тоже колеблется, но более упорядоченно и гармонично, чем в отсутствие поля. Из сопоставления осциллограмм для разного начального давления p при одинаковом U_k следует, что с увеличением давления частота и размах этих колебаний уменьшаются.

Как было показано, максимальная за время разряда усредненная по сечению и длине камеры проводимость плазмы ($\sigma = \frac{I l}{S U}$, где l и S — длина и площадь сечения камеры; U — межэлектродное напряжение) практически не зависит от условий эксперимента и оценивается в $4\text{—}5 \cdot 10^{13}$ CGSE. На самом деле, по-видимому, проводимость плазмы достигает величины, раза в 2—3 большей, так как распределение потенциала φ вдоль оси камеры нелинейно и напряженность электрического поля в средней части камеры раза в 2—3 меньше усредненной. Составить представление о распределении потенциала можно, скорее, по качественным, чем количественным данным, полученным из опытов с зондами. Эти кривые построены грубо по трем точкам, и поэтому трудно делать заключение об изменении напряженности электрического поля ($E \sim \frac{d\varphi}{dz}$) вдоль камеры и тем более о плотности объемных зарядов ($\rho \sim \frac{d^2\varphi}{dz^2}$). Зонды представляли собой медные диски диаметром 20 мм, вставленные в отверстия фарфоровой камеры заподлицо с внутренней поверхностью, как показано на рис. 10. Напряжение с них непосредственно, или через делитель, подавалось на отклоняющие пластины осциллографа. Потенциал зондов измерялся по отношению к верхнему электроду. Ввиду оче-

видной симметрии конструкции камеры относительно электродов прикатодные (или прианодные) явления должны быть совершенно одинаковыми вне зависимости от того, верхний или нижний электрод выбран в качестве катода (или анода).

При положительном потенциале нижнего электрода на зонды шел ионный ток. Эти измерения (в предположении,

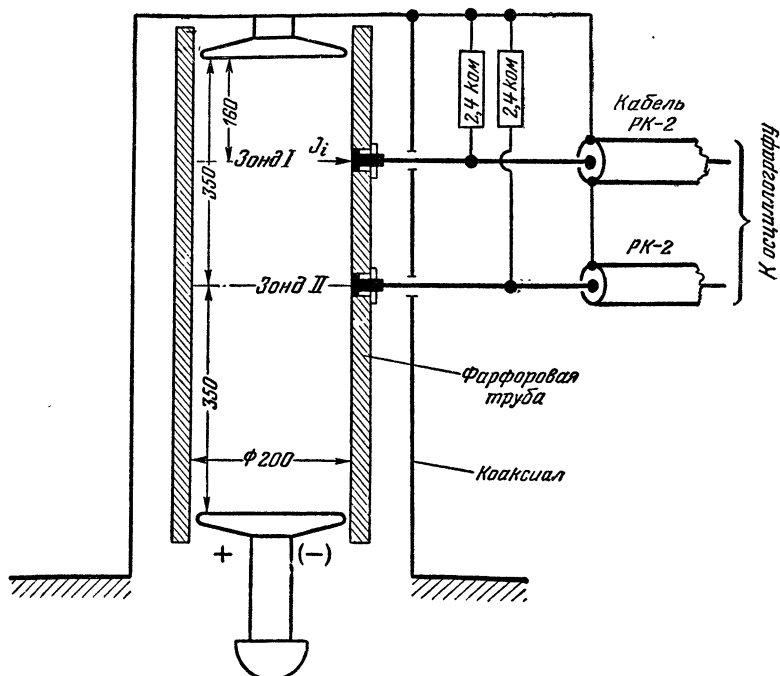


Рис. 10. Схема измерений зондами.

что потенциал зонда слабо отличается от потенциала плазмы в месте его установки) давали возможность судить о распределении потенциала в районе катода. Для аналогичных суждений о потенциалах плазмы в районе анода на нижний электрод подавался минус. Тогда на зонды шел электронный ток. Максимальные токи на зонд II достигали в режиме $U_k = 2 \text{ кВ}$, $N = 10^4 \text{ э}$ величины 50 ма (т. е. $\sim 16 \text{ ма/см}^2$; в режиме $U_k = 4 \text{ кВ}$, $N = 0$ величины 60 ма (т. е. $\sim 19 \text{ ма/см}^2$). Плотность тока в плазме была порядка 300 а/см^2 .

На рис. 11, а и б представлены усредненные кривые распределения потенциала по длине разрядной камеры для различных моментов времени и двух режимов разряда:

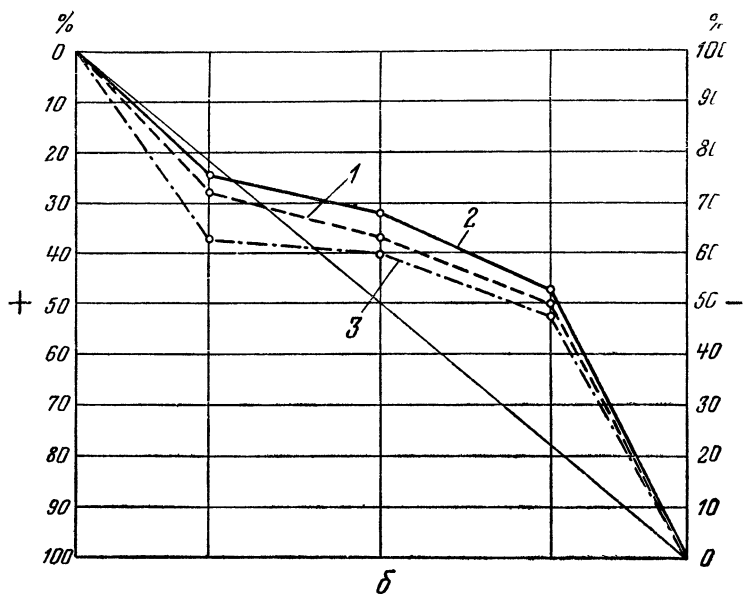
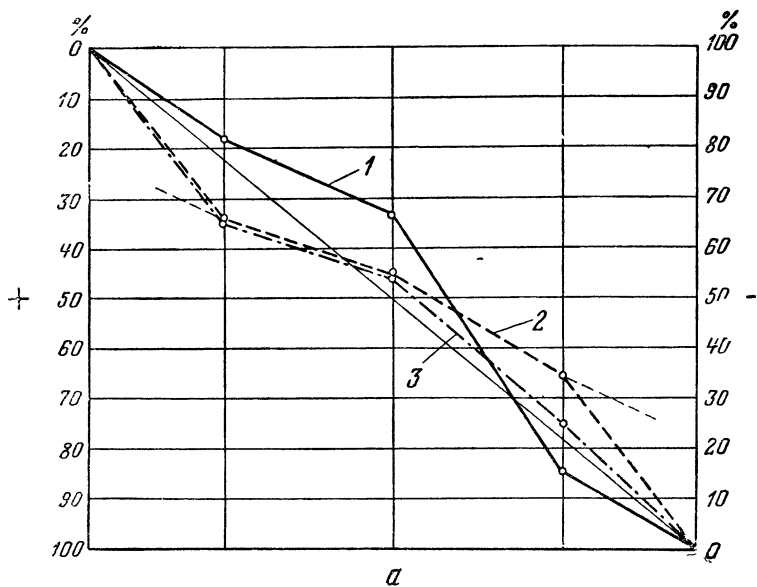


Рис. 11. Кривые распределения потенциала по длине разрядной камеры для различных моментов времени в двух режимах разряда
 а: $U_N = 4$ кВ, $H = 0$; 1 — 780 мксек, 2 — 155 мксек, 3 — 550 мксек; б: $U_N = 2$ кВ,
 $H = 10$ кВ; 1 — 270 мксек, 2 — 400 мксек, 3 — 800 мксек.

$U_{\text{к}} = 2 \text{ кв}$, $H = 10^4 \text{ э}$ и $U_{\text{к}} = 4 \text{ кв}$, $H = 0$. Так как закономерностей в функции от давления не наблюдалось, то произведено усреднение по давлениям.

§ 3. Выводы

Проведенные эксперименты с низкочастотным газовым разрядом показали, что:

1. Разряд начинается в центре камеры.
2. Плазменный пинур, сохраняя устойчивость, расширяется до стенки. Во время расширения полное сопротивление газового разряда падает.
3. В конце «площадки», соответствующей расширению, проводимость перестает увеличиваться, достигая величины $(5 \div 15) \cdot 10^{13} \text{ CGSE}$, независимо от режима.
4. С ростом $\frac{d\mathcal{J}}{dt}$ продолжительность площадки τ уменьшается.
5. Напряженность электрического поля E сильно неоднородна вдоль оси камеры.

Автор выражает благодарность Н. А. Явлинскому за внимание и помощь в работе.

В. В. Бабиков

К ТЕОРИИ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ *

Получены поправки к главным членам борновского и квазиклассического приближений для спектрального распределения интенсивности тормозного излучения электронов в кулоновском поле.

§ 1. Введение

При температурах плазмы, представляющих интерес в экспериментах с мощными импульсными разрядами в водороде (T порядка десятков или сотен электрон-вольт), спектр тормозного излучения электронов не описывается строго ни одной из двух простых предельных форм точной теории — квазиклассическим или борновским приближением. Целью настоящей работы является получение соответствующих разложений, с помощью которых можно с желаемой степенью точности установить и разграничить области применимости обоих приближений.

Точная квантовая теория тормозного излучения нерелятивистских электронов в поле кулоновского центра Ze , развита Зоммерфельдом [1], приводит к следующей формуле для спектральной интенсивности излучения (отнесенной к единичному потоку электронов):

$$dW = \frac{16\pi^2}{3\alpha} r_0^2 \frac{|n_1|^2}{(e^{2\pi|n_1|} - 1)(1 - e^{-2\pi|n_2|})} x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 d\Omega. \quad (1, 1)$$

Здесь $F(x_0) \equiv F(-n_1, -n_2, 1; x_0)$ — гипергеометрическая функция с параметрами $-n_1 = i \frac{Ze^2}{\hbar v_1}$, $-n_2 = i \frac{Ze^2}{\hbar v_2}$ и аргумен-

* Работа выполнена в 1954 г.

том $x_0 = -\frac{4n_1n_2}{(n_2 - n_1)^2}$; $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона; $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры; v_1, v_2 — начальная и конечная скорости электрона.

Однако точная формула (1.1) неудобна как для численных расчетов, так и для аналитического рассмотрения. Поэтому представляет интерес получить ее асимптотические выражения для двух предельных случаев больших и малых $|n_1|$ и $|n_2|$ в виде разложения по степеням соответствующих параметров. Ниже будут получены основные члены этих разложений и первые поправки к ним (два поправочных члена в случае борновского приближения и один — в квазиклассическом случае).

§ 2. Случай борновского приближения $|n_1| \ll 1$

Как будет показано ниже, основная доля излучения приходится в этом случае на область спектра, достаточно удаленную от коротковолновой границы $\hbar\omega = E_1$. Поэтому, полагая $|n_2| \sim |n_1|$, будем искать разложение выражения $x_0 \frac{d}{dx} |F(x_0)|^2$ в ряд по степеням n_1 и n_2 . Для этого запишем уравнение для функции $F(-n_1, -n_2, 1; x)$ в виде

$$(1-x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dF}{dx} \right) + (n_1 + n_2) x \frac{dF}{dx} - n_1 n_2 F = 0 \quad (2.1)$$

и заметим, что истинными параметрами разложения должны быть симметричные комбинации $(n_1 + n_2)$ и $n_1 n_2$. В соответствии с этим будем искать решение уравнения (2.1) (с точностью до членов $\sim n^6$ включительно) в виде

$$\begin{aligned} F(x) = & 1 + (n_1 + n_2) f_1(x) + (n_1 + n_2)^2 f_{21}(x) + n_1 n_2 f_{22}(x) + \\ & + n_1 n_2 (n_1 + n_2) f_{32}(x) + (n_1 + n_2)^3 f_{31}(x) + (n_1 + n_2)^4 f_{41}(x) + \\ & + n_1 n_2 (n_1 + n_2)^2 f_{42}(x) + n_1^2 n_2^2 f_{43}(x) + (n_1 + n_2)^5 f_{52}(x) + \\ & + n_1 n_2 (n_1 + n_2)^3 f_{52}(x) + n_1^2 n_2^2 (n_1 + n_2) f_{53}(x) + (n_1 + n_2)^6 f_{61}(x) + \\ & + n_1 n_2 (n_1 + n_2)^4 f_{62}(x) + n_1^2 n_2^2 (n_1 + n_2)^2 f_{63}(x) + n_1^3 n_2^3 f_{64}(x). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и приравнивая нулю коэффициенты при соответствующих степенях параметров $n_1 + n_2$ и $n_1 n_2$, получаем систему зацепляющихся уравнений для функций $f(x)$, которую последовательно решаем с начальными условиями $f(0) = 0$ (так как $F(0) = 1$). Найденное таким

образом (в виде суммы интегралов) решение для функции $F(x)$ подставляем в выражение $x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2$ и получаем для последнего с точностью до членов $\sim n^4$

$$x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 = 2 |n_1| |n_2| \ln(1-x_0) \times \\ \times [1 + a(x_0) |n_1|^2 + b(x_0) |n_1|^4], \quad (2.3)$$

где коэффициенты $a(x_0)$ и $b(x_0)$ равны $\left(\rho = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{1 - \frac{\hbar\omega}{E_1}}\right)$,

$$a(x_0) = -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^2 \ln^2(1-x_0) + \\ + \frac{2}{\rho} \int_0^{-x_0} \frac{\ln(1+t)}{t} dt - \frac{1}{\rho \ln(1-x_0)} \int_0^{-x_0} \frac{\ln^2(1+t)}{t} dt; \quad (2.4)$$

$$b(x_0) = \frac{1}{120} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^4 \ln^4(1-x_0) + \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)^2 \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \ln(1-x_0) \int_0^{-x_0} \frac{\ln^2(1+t)}{t} dt - \frac{1}{3} \ln^2(1-x_0) \int_0^{-x_0} \frac{\ln(1+t)}{t} dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \frac{1}{\ln(1-x_0)} \int_0^{-x_0} \frac{\ln^4(1+t)}{t} dt \right\} + \frac{2}{\rho^2} \left\{ \left(\int_0^{-x_0} \frac{\ln(1+t)}{t} dt \right)^2 - \right. \\ \left. - \ln(-x_0) \int_0^{-x_0} \frac{\ln^2(1+t)}{t} dt + \int_0^{-x_0} \frac{\ln t \ln^2(1+t)}{t} dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\ln(1-x_0)} \int_0^{-x_0} \frac{\ln^2(1-t_1)}{t_1} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{\ln(1+t_2)}{t_2} dt_2 \right\}. \quad (2.5)$$

Таким образом, при условии $|n_2| \sim |n_1|$ получаем (с точностью до членов $\sim |n_1|^4$) следующее выражение для спектральной плотности энергии излучения:

$$dW = \frac{64\pi^2}{3\alpha} r_0^2 \frac{|n_1|^3 |n_2|}{(e^{2\pi|n_1|} - 1)(1 - e^{-2\pi|n_2|})} \ln \left[\frac{E_1}{\hbar\omega} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\hbar\omega}{E_1}}\right)^2 \right] \times \\ \times \{1 + a |n_1|^2 + b |n_1|^4\} d\hbar\omega. \quad (2.6)$$

Точное вычисление интегралов (2.4) и (2.5) возможно только в предельных случаях $-x_0 = \infty$, $-x_0 = 0$, относящихся

(так как $-x_0 = \left[\frac{E_1}{\hbar\omega} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\hbar\omega}{E_1}} \right)^2 \right] - 1$), соответственно, к границам спектра $\hbar\omega = 0$ и $\hbar\omega = E_1$. При этом получаем

$$a(\infty) = \frac{10}{3}, \quad a(0) = \frac{\pi^2}{3}, \quad b(0) = \frac{196}{45}.$$

Вычисление указанных интегралов графическим методом показало, однако, что $a(x_0)$ с очень хорошей точностью, а $b(x_0)$ с точностью 15% не зависят от x_0 , т. е. от $\frac{\hbar\omega}{E_1}$.

Тот факт, что коэффициенты a и b практически не зависят от $\frac{\hbar\omega}{E_1}$, показывает, что полученная формула (2.6) справедлива и в коротковолновой области спектра (это подтверждается приведенным ниже специальным рассмотрением для коротковолновой границы). Первый член разложения (2.6) совпадает с известной формулой борновского приближения (см., например, [2]). Поправочные члены $\sim |n_1|^2$ и $\sim |n_1|^4$ были ранее получены Эльвертом [3], который, однако, ограничился только двумя границами спектра $\hbar\omega = 0$ и $\hbar\omega = E_1$.

При значениях $|n_1| \ll \frac{1}{2\pi}$ и $|n_2| \ll \frac{1}{2\pi}$ выражение (2.6) сильно упрощается

$$dW = \frac{16}{3\alpha} r_0^2 |n_1|^2 \ln \left[\frac{E_1}{\hbar\omega} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\hbar\omega}{E_1}} \right)^2 \right] d\hbar\omega. \quad (2.7)$$

Вблизи коротковолновой границы $\frac{\hbar\omega}{E_1} = 1$ условие «борновости» $|n_2| \ll 1$ для рассеянного электрона уже не выполняется. Но так как при $|n_2| \rightarrow \infty$ имеем $y_0 \equiv -n_2 x_0 \rightarrow 4n_1 \ll 1$, то можно перейти от полной гипергеометрической функции $F(-n_1, -n_2, 1; x_0)$ к вырожденной $F_1(-n_1, 1; y_0)$ и воспользоваться разложением последней при малых значениях аргумента

$$F_1(\alpha, \gamma; y) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} y + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{y^2}{2!} + \dots$$

Таким образом, ограничиваясь членами $\sim n_1^4$, имеем

$$F_1(-n_1, 1; y) = 1 - n_1 y - \frac{n_1 y^2}{2 \cdot 2!} - \frac{n_1 y^3}{3 \cdot 3!} + \frac{n_1^2 y^2}{4}$$

и, соответственно, с точностью до членов $\sim n_1^2$

$$x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 = y_0 \frac{d}{dy_0} |F_1(y_0)|^2 = 8 |n_1|^2 \left\{ 1 + \frac{10}{3} |n_1|^2 \right\}.$$

Окончательно получаем для спектрального распределения интенсивности излучения вблизи коротковолновой границы в борновском приближении ($|n_1| \ll 1$)

$$dW = \frac{128\pi^2}{3\alpha} r_0^2 \frac{|n_1|^4}{e^{2\pi|n_1|} - 1} \left\{ 1 + \frac{10}{3} |n_1|^2 \right\} d\hbar\omega. \quad (2.8)$$

У коротковолновой границы спектральное распределение постоянно. При $|n_1| \ll \frac{1}{2\pi}$ формула (2.8) принимает вид

$$dW = \frac{64\pi}{3\alpha} r_0^2 |n_1|^3 d\hbar\omega. \quad (2.9)$$

В случае очень быстрых электронов основная доля излучения приходится на область небольших частот, где $dW \sim |n_1|^2 d\hbar\omega$, в то время как область вблизи коротковолновой границы имеет интенсивность $\sim |n_1|^3$, так что для вычисления полной потери энергии электроном, т. е. полной энергии излучения, можно воспользоваться формулой (2.7). Интегрируя по всем частотам, получаем

$$W(E_1) = \int_0^{E_1} dW = \frac{32}{3\alpha} r_0^2 |n_1|^2 E_1 = \frac{16}{3} \alpha Z^2 r_0^2 mc^2. \quad (2.10)$$

Таким образом, в борновском приближении полная энергия тормозного излучения единичного потока электронов не зависит от энергии электронов. Кажущееся противоречие с излучением релятивистских электронов, для которых имеется логарифмический рост излучения с ростом энергии, объясняется тем, что здесь не учитывалось запаздывание, т. е. эффекты $\sim \frac{v_1}{c}$, которые должны увеличивать интенсивность излучения.

§ 3. Квазиклассический случай $|n_1| \gg 1$

Так как $|n_2| \gg |n_1|$, то условие квазиклассичности для рассеянного электрона $|n_2| \gg 1$ выполняется автоматически. Найдем асимптотическое представление выражения $x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2$ в этом случае для двух областей спектра: в достаточном удалении от длинноволновой границы $\omega = 0$ и вблизи нее.

Введем обозначения

$$-n_1 = ipn, \quad -n_2 = in, \quad pn \gg 1, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

и воспользуемся представлением гипергеометрической функции и ее производной через контурные интегралы в комплексной плоскости [1]

$$\begin{aligned}
 F(i\rho n, in, 1; x_0) &= \frac{e^{\pi\rho n}}{2\pi i} \oint u^{i\rho n-1} (1-u)^{-i\rho n} (1-ux_0)^{-in} du = \\
 &= \frac{e^{\pi\rho n}}{2\pi i} \oint e^{nf(u)} \varphi_1(u) du; \\
 \frac{d}{dx_0} F(i\rho n, in, 1; x_0) &= \frac{e^{\pi\rho n}}{2\pi} n \oint u^{i\rho n} (1-u)^{-i\rho n} \times \\
 &\times (1-ux_0)^{-in-1} du = \frac{e^{\pi\rho n}}{2\pi} n \oint e^{nf(u)} \varphi_2(u) du.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
 f(u) &= i \ln \frac{u^\rho}{(1-u)^\rho (1-ux_0)}, \\
 \varphi_1(u) &= \frac{1}{u}, \\
 \varphi_2(u) &= \frac{1}{1-ux_0},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

а контур интегрирования охватывает разрез между точками O и I , как показано на рис. 1.

Так как $n \gg 1$, то естественно воспользоваться методом перевала. Седловая точка u_0 находится из условия

$$f'(u_0) = i \left(\frac{\rho}{u_0} + \frac{\rho}{1-u_0} + \frac{x_0}{1-u_0 x_0} \right) = 0,$$

откуда, учитывая, что $x_0 = -\frac{4\rho}{(1-\rho)^2}$, получаем

$$u_0 = \frac{1-\rho}{2} \pm i0, \tag{3.3}$$

т. е. имеются две седловые точки с обеих сторон разреза на действительной оси. Но так как они имеют разные фазы, то существенна верхняя седловая точка, для которой $Ref(u_0)$ имеет максимальное значение

$$Ref(u_0) = 2\pi\rho$$

(для второй седловой точки $Ref(u_0) = -2\pi\rho$ минимально). Заметим, что верхняя седловая точка является наиболее существенной, и в предельном случае $\rho = 0$, так как $\rho n \gg 1$ всегда.

Исследование поведения функции $f(u)$ вблизи точки $u_0 = \frac{1-\rho}{2} + i0$ показывает, что линиями наиболее быстрого спада являются полупрямые, выходящие из точки u_0 под углами $\frac{1}{6}\pi$ и $\frac{5}{6}\pi$, так что для применения метода перевала необходимо провести контур интегрирования так, как показано на рис. 2.

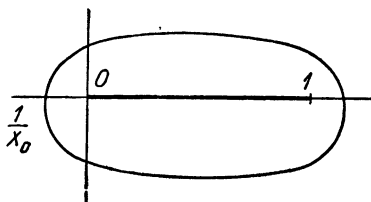


Рис. 1.

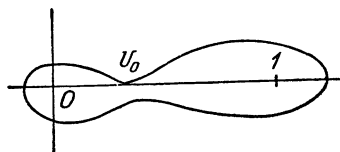


Рис. 2.

Вблизи точки u_0 функции $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ и $nf(u)$ разлагаются в ряд по степеням $(u - u_0)$

$$\varphi_1(u) = \frac{2}{1-\rho} \left\{ 1 - \frac{2}{1-\rho} (u - u_0) + \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^2 (u - u_0)^2 - \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^3 (u - u_0)^3 + \dots \right\}$$

$$\varphi_2(u) = \frac{1-\rho}{1+\rho} \left\{ 1 - \frac{4\rho}{1-\rho^2} (u - u_0) + \left(\frac{4\rho}{1-\rho^2} \right)^2 (u - u_0)^2 - \left(\frac{4\rho}{1-\rho^2} \right)^3 (u - u_0)^3 + \dots \right\}$$

$$nf(u) = nf(u_0) + i\alpha (u - u_0)^3 - i\beta (u - u_0)^4 + i\gamma (u - u_0)^5 + \dots, \quad (3.4)$$

где

$$\alpha = \frac{16}{3} \frac{\rho n}{(1-\rho^2)^2}, \quad \beta = \frac{32\rho^2 n}{(1-\rho^2)^3}, \quad \gamma = \frac{64}{5} \frac{\rho n (1+11\rho^2)}{(1-\rho^2)^4}. \quad (3.5)$$

Так как в интегралах по двум полупрямым $u - u_0 = te^{i\frac{\pi}{6}}$ и $u - u_0 = te^{i\frac{5\pi}{6}}$, которыми заменяем интегрирование по всему контуру, основную роль играют малые $t \sim \frac{1}{\alpha^{1/3}}$ и, следовательно, интегралы быстро сходятся, то можно распространить

интегрирование на интервал от нуля до бесконечности и, кроме того, при условиях

$$\beta\alpha^{-\frac{4}{3}} \ll 1, \quad \gamma\alpha^{-\frac{5}{3}} \ll 1 \quad (3.6)$$

можно опустить члены $i\beta(u-u_0)^4$ и $i\gamma(u-u_0)^5$ в предэкспоненту. Условия (3.6) совпадают с условием сходимости разложений для функций $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$

$$\frac{|u-u_0|}{1-\rho^2} \ll 1, \quad \frac{\alpha^{-1/3}}{1-\rho^2} \ll 1.$$

С учетом (3.5) их можно записать в виде

$$[\rho n(1-\rho^2)]^{-1/3} \ll 1. \quad (3.7)$$

В результате упомянутого интегрирования после несложных выкладок получаем

$$\begin{aligned} F(x_0) &\approx -\frac{4}{1-\rho} e^{nJ(u_0)} [A_0 - (\beta A_4 + a_1) i]; \\ F'(x_0) &\approx -2 \frac{1-\rho}{1+\rho} e^{nJ(u_0)} [A_0 - (\beta A_4 + a_2) i], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где введены обозначения

$$A_m = \frac{1}{\alpha^{\frac{m+1}{3}}} \cos \frac{m+1}{6} \pi \int_0^\infty e^{-t^3} t^m dt \quad m=0, 2, 4, \dots \quad (3.9)$$

$$B_m = \frac{1}{\alpha^{\frac{m+1}{3}}} \sin \frac{m+1}{6} \pi \int_0^\infty e^{-t^3} t^m dt \quad m=1, 3, 5, \dots$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{1-\rho} \left[B_1 - \frac{1}{2} \beta^2 B_9 + \gamma A_6 + \beta \left(\frac{2}{1-\rho} \right) A_6 + \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^2 B_3 \right]; \\ a_2 &= \frac{4\rho}{1-\rho^2} \left[B_1 - \frac{1}{2} \beta^2 B_9 + \gamma A_6 + \beta \left(\frac{4\rho}{1-\rho^2} \right) A_6 + \left(\frac{4\rho}{1-\rho^2} \right)^2 B_3 \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\alpha^{1/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), & B_1 &= \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\alpha^{2/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \\ A_6 &= -\frac{2\sqrt{3}}{27} \frac{1}{\alpha^{7/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), & B_3 &= \frac{\sqrt{3}}{18} \frac{1}{\alpha^{4/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\ & & B_9 &= -\frac{14\sqrt{3}}{81} \frac{1}{\alpha^{10/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

получаем

$$x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 = \frac{e^{2\pi\rho n}}{\pi\sqrt{3}} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{10\pi\sqrt{3}} \frac{1 + \rho^2}{[\rho n (1 - \rho^2)]^{2/3}} \right). \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) показывает, что мы имеем два члена разложения по степеням величины

$$\frac{1}{[\rho n (1 - \rho^2)]^{2/3}} \ll 1. \quad (3.11)$$

Условие (3.11) более слабое, чем (3.7). Так как $\rho n = |n_1|$ и $1 - \rho^2 = \frac{\hbar\omega}{E_1}$, то, подставляя (3.10) в (1.1), получаем окончательно в квазиклассическом приближении ($|n_1| \gg 1$) для спектрального распределения интенсивности излучения в области частот

$$\frac{\hbar\omega}{E_1} \gg \frac{1}{|n_1|}, \quad (3.12)$$

(т.е., почти для всего спектра, за исключением области вблизи длинноволновой границы $\omega = 0$, выражение

$$dW = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}\alpha} r_0^2 |n_1|^2 \left\{ 1 + \frac{\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{10\pi\sqrt{3}} \frac{1}{|n_1|^{2/3}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{E_1}{\hbar\omega}\right)^{2/3} \left(2 - \frac{\hbar\omega}{E_1}\right) \right\} d\hbar\omega. \quad (3.13)$$

Главный член и первая часть поправочного члена этой формулы являются первыми двумя членами разложения результата классической теории (см., например, [4]) по степеням $\frac{\omega_0}{\omega}$, где $\omega_0 = \frac{mv_1^2}{Ze^2}$. (Условию $\frac{\hbar\omega}{E_1} \gg \frac{1}{|n_1|}$ соответствует $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$). Член с $\frac{\hbar\omega}{E_1}$ является квантовой поправкой к классическому выражению.

Как показывает анализ (проведенный для коротковолновой границы спектра), рассматриваемое разложение фактически идет по степеням величины $\sim 0,2|n_1|^{-2/3}$, так что в качестве критерия применимости классического результата [главный член в (3.13)] можно условно (для унификации с предельным борновским критерием $|n_1| \ll \frac{1}{2\pi}$) принять: $|n_1| \gg \frac{1}{2\pi}$.

Заметим, что Зоммерфельд [1] получил выражение для эффективного излучения в случае медленных электронов, соответствующее первому члену формулы (3.13), исходя из предположения, что следует ожидать интенсивного излучения при отклонении электрона на большие углы. Однако это предположение несправедливо для мягких квантов, для которых наиболее существенны малые углы отклонения электронов, так как само сечение рассеяния на малые углы велико. Поэтому Зоммерфельд получил неверный результат, распространив первый член формулы (3.13) на весь спектр частот, включая и длинноволновую область [ср. условие (3.12)].

Необходимо отметить также, что В. Гайтлер [2] неправильно обобщил формулу (2.7), выведенную в предельном борновском приближении, на всю область, где это приближение нарушается, введением поправочного «множителя Зоммерфельда»

$$\frac{(2\pi)^2 |n_1| |n_2|}{(e^{2\pi|n_1|} - 1)(1 - e^{-2\pi|n_2|})}.$$

Этот же результат воспроизведен в [5]. Неправильность столь широкого обобщения* видна уже из того, что при малых скоростях v_1 этот множитель $\sim e^{-2\pi|n_1|}$, что резко уменьшает излучение и что можно интерпретировать как появление некоего потенциального барьера для электрона в кулоновском поле ядра (такой множитель появляется, как и должно быть, для кулоновского поля отталкивания). Легко видеть к тому же, что формула Гайтлера не переходит при $\hbar \rightarrow 0$ в классическую [см. (3.13)].

Чтобы найти спектральную интенсивность излучения вблизи длинноволновой границы, а именно в области частот

$$\frac{\hbar\omega}{E_1} \ll \frac{1}{|n_1|},$$

воспользуемся следующими асимптотическими выражениями для гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, 1; x_0)$ при больших значениях аргумента $|x_0| = \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \gg 1$:

$$F(\alpha, \beta, 1; x_0) = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \alpha)} (-x_0)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \beta)} (-x_0)^{-\beta}. \quad (3.14)$$

* В области же, где учет множителя Зоммерфельда имеет смысл $\left(\frac{1}{2\pi} < |n_1| < 1\right)$, необходимо учитывать также поправочные члены борновского разложения; см. (2.6).

Для Г-функций в свою очередь используем выражения

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \quad \text{при } |z| \ll 1; \quad (C = 0,577\dots \text{ — постоянная Эйлера});$$

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} e^{-z} e^{\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z} \quad \text{при } |z| \gg 1.$$

Вводя обозначения

$$n = \frac{|n_1| + |n_2|}{2} \gg 1, \\ \varepsilon = |n_2| - |n_1|$$

и подставляя выражения (3.15) в (3.14), получаем, в пренебрежении всюду членами $\sim \frac{1}{n}$,

$$F(i|n_1|, i|n_2|, 1; x_0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon i} e^{i\frac{\pi}{2} + \pi n} \left[e^{-i\varepsilon \ln \gamma n - i|n_1| \ln(-x_0)} - e^{i\varepsilon \ln \gamma n - i|n_2| \ln(-x_0)} \right],$$

где $\gamma = e^C = 1,78\dots$

Следовательно,

$$x_0 \frac{d}{dx_0} |F(x_0)|^2 = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon} e^{2\pi n} \sin\left(2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{-x_0}}{\gamma n}\right).$$

Учитывая, что $n \approx |n_1|$ и $-x_0 = \frac{4n^2}{\varepsilon^2}$, имеем, таким образом, вблизи длинноволновой границы $\frac{\hbar\omega}{E_1} \ll \frac{1}{|n_1|}$ (или $\varepsilon \ll 1$) следующее спектральное распределение интенсивности излучения:

$$dW = \frac{16}{3\alpha} r_0^2 |n_1| \frac{E_1}{\hbar\omega} \sin\left(|n_1| \frac{\hbar\omega}{E_1} \ln \frac{4E_1}{\gamma |n_1| \hbar\omega}\right) d\hbar\omega. \quad (3.17)$$

В области еще более низких частот, а именно, когда

$$\varepsilon \ln \varepsilon \ll 1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\hbar\omega}{E_1} \ln \frac{\hbar\omega}{E_1} |n_1| \ll \frac{1}{|n_1|}, \quad (3.18)$$

получаем более простое выражение

$$dw = \frac{16}{3\alpha} r_0^2 |n_1|^2 \ln \frac{4E_1}{\gamma |n_1| \hbar\omega} d\hbar\omega. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) совпадает с результатом классической теории для тормозного излучения электрона в инфракрасной области спектра [4].

Выражения (3.13) и (3.19) показывают, что в квазиклассическом случае ($|n_1| \gg 1$) почти во всей области спектра, за исключением области частот $\frac{\hbar\omega}{E_1} \ll \frac{1}{|n_1|}$, имеется весьма однородное распределение интенсивности по частотам. Логарифмический рост интенсивности в области самых малых частот интегрально вносит лишь очень малую поправку в результат, получающийся непосредственным интегрированием по частотам прямоугольного распределения интенсивности, соответствующего первому члену формулы (3.13). Последнее дает для полной потери энергии электрона на тормозное излучение в квазиклассическом случае

$$W(E_1) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \alpha Z^2 r_0^2 mc^2. \quad (3.20)$$

Сравнение (3.20) и (2.10) показывает, что отличие полной потери энергии «борновскими» и квазиклассическими электронами составляет всего $\approx 10^0\%$

$$\frac{W_{\text{Борн}}}{W_{\text{класс}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1,11.$$

В заключение приношу благодарность В. И. Когану за постановку вопроса и ценные советы.

Примечание при корректуре. Вопросы, аналогичные изложенным выше, рассмотрены в недавних работах: К. Куммергер, Z. Phys., 147, 373 (1957); Th. Guggenberger, Z. Phys., 149, 523 (1957).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig, 1939.
2. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., ГТТИ, 1940.
3. G. Elwert, Ann. d. Phys., 34, 178 (1939).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., ГТТИ, 1948.
5. А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., ГТТИ, 1952.

С. М. Осовец

ПЛАЗМЕННЫЙ ВИТОК В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ *

В настоящей статье излагаются основы теории безэлектродного газового разряда определенной конфигурации. В разряде такого типа могут осуществляться условия, до некоторой степени аналогичные тем, которые имеют место при ускорении электронов в вакуумном бетатроне. В то время как в бетатроне осуществляется возможность ускорения электронов, в рассматриваемом здесь газовом разряде появляется возможность нагрева плазмы.

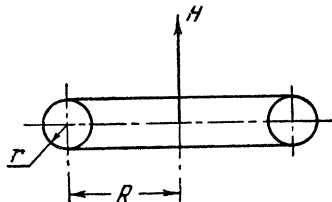


Рис. 1.

Рассмотрим плазменный виток с током в переменном аксиально-симметричном магнитном поле, пересекающем по нормали плоскость витка (рис. 1). Обозначим

коэффициент самоиндукции обмотки, создающей магнитное поле H , через L_{11} , коэффициент самоиндукции плазменного витка — через L_{22} . Создаваемый внешним током \mathcal{I}_1 переменный магнитный поток пронизывает плазменный виток и индуцирует в нем ток \mathcal{I}_2 .

Этот поток равен

$$\Phi = 2\pi \int_0^R H x dx = \frac{1}{c} L_{12} \mathcal{I}_1, \quad (1)$$

где L_{12} — коэффициент взаимной индукции обмотки и газового витка; R — радиус витка, который предполагается зна-

* Работа выполнена в 1953 г.

чительно бóльшим, чем радиус сечения витка r . Коэффициент самоиндукции витка равен

$$L_{22} = 4\pi R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right) = 2\pi R l, \quad (2)$$

где $l = 2 \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right)$ — индуктивность единицы длины витка. Считая, что индуктивное сопротивление плазменного витка значительно превышает его активное сопротивление, и учитывая (1), получим

$$L_{22} \mathcal{J}_2 = L_{12} \mathcal{J}_1 = -\pi R^2 c \bar{H}, \quad (3)$$

где $\bar{H} = \frac{2}{R^2} \int_0^R H x dx$ — среднее значение напряженности магнитного поля внутри витка. Равенство (3) можно представить в виде

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{cR}{2l} \bar{H}. \quad (4)$$

На плазменный виток с током, находящийся в магнитном поле, действуют следующие силы:

1) сила взаимодействия тока с внешним магнитным полем, стремящаяся стянуть виток к центру,

$$F_1 = \frac{2\pi R}{c} \mathcal{J}_2 H, \quad (5)$$

2) сила взаимодействия тока с собственным магнитным полем, расталкивающая виток,

$$F_2 = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial R} L_{22} \mathcal{J}_2^2 = -\frac{\pi \mathcal{J}_2^2}{c^2} (2 + l). \quad (6)$$

В бетатроне действие силы F_1 компенсируется центробежной силой

$$F_3 = -2\pi R N \frac{mv_e^2}{R} = -\frac{2\pi m \mathcal{J}_2^2}{Ne^2} \quad (7)$$

(N — число частиц на единице длины).

В бетатроне расталкивающее действие собственного поля тока мало по сравнению с центробежной силой, и им пренебрегают. Найдем условие применимости такого приближения, для чего разделим F_3 на F_2 . В результате получим, что центробежная сила велика по сравнению с F_2 , когда

$$\frac{2mc^2}{Ne^2(2+l)} \gg 1, \quad (8)$$

т. е. при $N \ll 10^{13}$ частиц/см. При выполнении этого требования условия равновесия витка являются «бетатронными».

Нас интересует здесь обратный предельный случай — условия равновесия при $N \gg 10^{13}$ см⁻¹. В этом случае пренебрегаем действием центробежной силы и, приравнивая (5) и (6), а также воспользовавшись (4), получаем

$$H = \frac{\dot{H}}{4} \left(1 + \frac{2}{l} \right). \quad (9)$$

Таким образом, мы нашли условие существования равновесного витка, которому должно удовлетворять магнитное поле на равновесном радиусе. Как известно, условие равновесия для бетатрона имеет вид

$$H = \frac{\dot{H}}{2}. \quad (10)$$

Из сравнения (9) с (10) видно, что в рассматриваемых условиях для равновесия требуется более крутой спад магнитного поля по радиусу, чем для бетатрона, поскольку численное значение $2/l$ обычно не превышает 0,2—0,3.

Для возможности реального существования плазменного витка в области равновесной орбиты должны удовлетворяться, кроме того, условия устойчивости. Компоненты суммарной силы, действующей на виток, можно представить в виде $F_R = -\frac{\partial U}{\partial R}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$, где U — потенциальная функция системы токов

$$U = -\frac{1}{2c^2} \sum_{ik} L_{ik} \mathcal{J}_i \mathcal{J}_k. \quad (11)$$

Условия равновесия и устойчивости сводятся к требованию минимума U в равновесном состоянии, т. е. при $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$ должно быть $\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} > 0$ и при $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ должно быть $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > 0$. В рассматриваемом случае это приводит к тому, что для устойчивости по отношению к радиальным отклонениям должно выполняться неравенство

$$\frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R} + \frac{3}{2} - \frac{l-2}{l(l+2)} > 0, \quad (12)$$

а по отношению к отклонениям по оси z — неравенство

$$\frac{\partial H}{\partial R} < 0. \quad (13)$$

Окончательно условие устойчивости можно записать в следующем виде:

$$0 > \frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R} > - \left[\frac{3}{2} - \frac{l-2}{(l+2)l} \right]. \quad (14)$$

При соблюдении условий (8) и (13) возможно существование устойчивого плазменного витка. Осуществление этих условий в принципе позволяет довести до достаточно большой величины энергию магнитного поля тока, текущего по витку. Если в некоторый момент нарушить условия равновесия так, чтобы виток сжался к центру разрядной камеры, то энергия магнитного поля тока перейдет в кинетическую энергию частиц, и при полном сжатии, когда виток превратится в плазменный ком, эта энергия превратится в тепловую. Максимальная температура может быть получена при полном переходе магнитной энергии в кинетическую, а затем кинетической — в тепловую. Эта максимальная температура в плазменном коме определится из условия

$$\frac{3}{2} \cdot 2\pi R N \kappa T = \frac{I_{22}^2 \mathcal{V}_2^2}{2c^2} = \frac{L_{11} \mathcal{V}_1^2}{2c^2} k^2, \quad (15)$$

где $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ — коэффициент связи обмотки, создающей магнитное поле, с плазменным витком, расположенным на равновесной орбите.

Устройство подобного типа может быть использовано для разогрева плазмы до значительных температур. На основании приведенных здесь соображений была построена установка, на которой проводились эксперименты, подтвердившие справедливость основных положений изложенной элементарной теории. Описание этих экспериментов и полученные результаты приводятся отдельно.

В заключение приношу глубокую благодарность А. Б. Мигдалу за большую помощь при выполнении настоящей работы.

*С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров,
Н. И. Щедрин*

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ *

В работе приведены результаты исследования газового разряда в односвязной области, возникающего под действием переменного магнитного поля. Показано, что в этом случае создается плазменный виток с током, сжимающийся к центру разрядного сосуда. Проведенные теоретические исследования показывают, что выбором специальной формы магнитного поля можно получить область, в которой такой плазменный виток находился бы в состоянии равновесия. Проведены исследования на системе с магнитным полем, удовлетворяющим этим условиям. На этой системе наблюдалось жесткое рентгеновское излучение (несколько сотен кило-электрон-вольт), указывающее на принципиальную возможность получения в устройствах подобного рода бетатронного ускорения электронов без предварительной инжекции.

Плазменные токи в газовом витке достигали значений 80 *ка* в первой четверти периода изменения первичного тока. Однако длительного существования плазменного витка в области устойчивой орбиты не было достигнуто, что объясняется наличием значительного активного сопротивления плазменного витка, которое не учитывалось при теоретическом рассмотрении.

Выводы, получающиеся в результате анализа приведенных экспериментов, позволяют наметить пути дальнейшего развития и совершенствования устройства такого типа.

* Работа выполнена в 1955 г.

§ 1. Введение

Начатые в 1951 г., по предложению А. Д. Сахарова и И. Е. Тамма, исследования по разогреву плазмы газового разряда до температур, при которых происходили бы ядерные взаимодействия между частицами плазмы, велись в нескольких различных направлениях. Одним из возможных путей получения в лабораторных условиях режима разряда, когда в принципе можно достичь интенсивного взаимодействия частиц между собой, является осуществление системы, описание и некоторые исследования которой представляют содержание настоящей работы.

Газовый разряд осуществляется в сосуде цилиндрической или сферической формы с помощью переменного магнитного поля, направленного по оси z . При этом в направлении φ возникает э.д.с., которая вызывает пробой газа и образование плазменного витка с током на периферии сосуда, также направленным по φ (рис. 1). Взаимодействие магнитного поля этого тока с приложенным полем приводит к движению плазменного витка к центру разрядной камеры. Частицы плазменного витка в процессе его сжатия приобретают энергию, соответствующую скорости сжатия витка, которая тем больше, чем, соответственно, больше поле и ток.

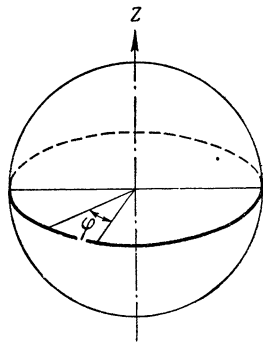


Рис. 1.

Таким образом, в момент сжатия витка в ком имеет место взаимодействие частиц, энергия которых определяется скоростью сжатия витка. Если эту скорость сделать достаточно большой и процесс сжатия настолько интенсивным, что все частицы плазменного витка соберутся в достаточно малом объеме, то взаимодействие частиц к моменту сжатия сможет привести к заметному ядерному взаимодействию с выделением продуктов ядерной реакции.

Для проверки исходных предположений с целью установления чисто феноменологической картины получающихся при этом явлений, были проведены следующие опыты.

§ 2. Предварительные эксперименты

Первые эксперименты по исследованию безэлектродного газового разряда в устройствах такого рода были начаты в 1951 г. Действующая установка представляла собой стеклян-

ный шар диаметром 32—35 см снаружи которого располагалась спиральная обмотка, по которой пропусклся импульсный ток, получающийся при разряде на эту обмотку конденсаторной батареи (рис. 2). Возникающий при этом газовый разряд фотографировался с помощью сверхскоростного фоторегистратора в двух перпендикулярных направлениях, что давало возможность стереоскопического исследования поведения такого разряда.

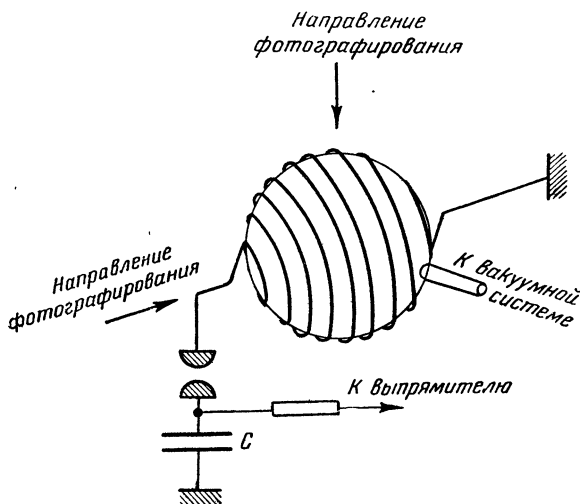


Рис. 2. Схема установки III.

Эксперименты проводились для широкой области изменения давления от 0,01 до 0,5 мм рт. ст. Напряжение на конденсаторной батарее с емкостью каждого конденсатора 3 мкф составляло 30—40 кв. Обмотка выполнялась в двух вариантах:

- 1) 8 витков круглого провода диаметром 5,5 мм;
- 2) 8 витков медной шины прямоугольного сечения 30×1 мм.

В обоих случаях индуктивности обмоток весьма близки и составляют около 16 мкгн. Частота процесса $f=23$ кГц, период $T=44$ мксек, четверть периода $\frac{T}{4}=11$ мксек.

Во всех проделанных экспериментах можно отметить следующие особенности, наиболее характерные для поведения газового разряда в таких условиях:

а) Разряд возникает в меридиональной плоскости шара на периферии вблизи стенок и формируется в виде плазменного кольцевого тока.

б) В конце первой четверти периода нарастания тока плазменный кольцевой ток стягивается в центр шара и затем вытя-

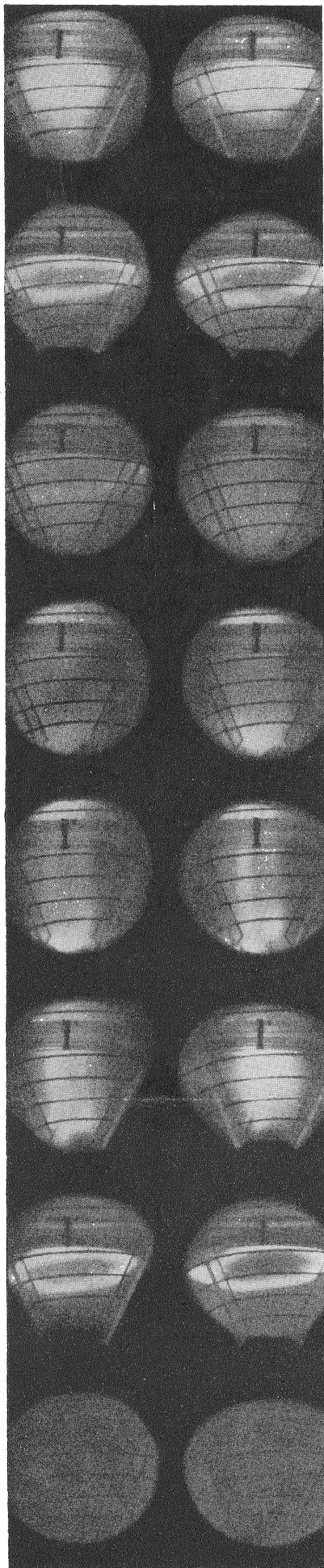


Рис. 3. Стадии формирования разряда.

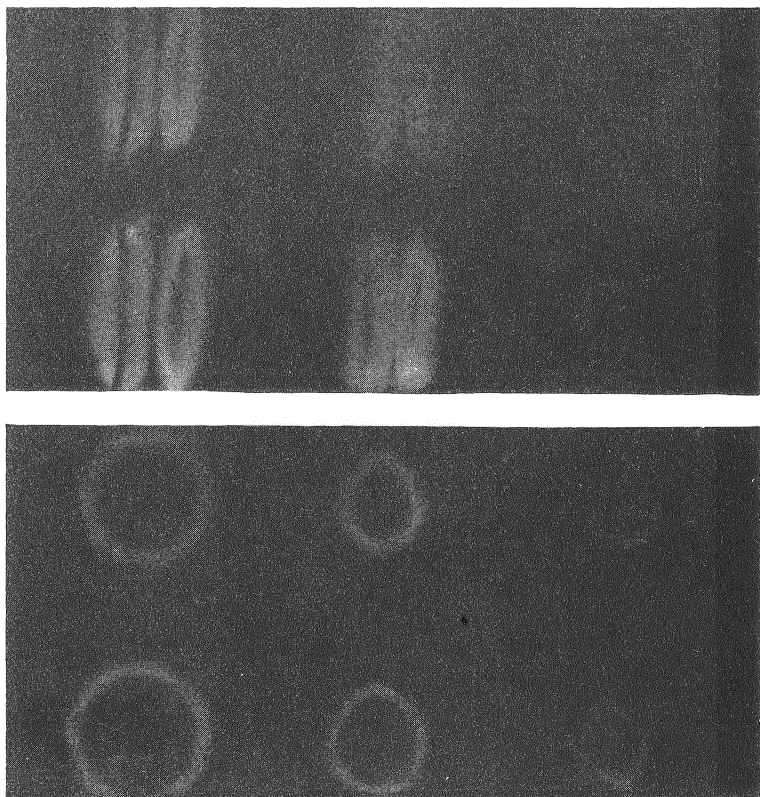


Рис. 4. Фотографии разряда, снятые в двух взаимноперпендикулярных направлениях, при давлении 0,3 мм рт. ст. и $V = 37$ кв.

гивается к полюсам. Время этого сжатия зависит от давления. При больших давлениях процесс сжатия происходит медленнее.

в) Во второй четверти периода при спаде тока существует плазменная область внутри шара, вытянутая к полюсам.

г) В дальнейшем это явление повторяется с основной частотой первичного тока. Однако в результате воздействия плазмы на стенки шара, следствием которого является интенсивное испарение материала стенок. Эта периодичность сказывается все менее резко, и к концу процесса мы имеем равномерное свечение всего шара в целом (рис. 3).

На отдельных снимках, относящихся к сравнительно высоким давлениям $0,3 \div 0,5$ мм рт. ст., можно заметить, что разряд развивается в виде двух токовых плазменных колец, расположенных симметрично относительно меридиональной плоскости. Однако наблюдение этого явления крайне затруднительно, так как яркость свечения газа в этой стадии процесса крайне мала. На рис. 4 представлены фотографии, снятые в двух взаимно перпендикулярных направлениях при давлении $0,3$ мм рт. ст. и напряжении 37 кВ.

Эти эксперименты, как видно из приведенного материала, подтвердили справедливость исходных предположений. Полученные результаты носят чисто качественный характер и позволяют сделать только довольно грубые выводы об общем характере протекания явлений.

§ 3. Получение устойчивой орбиты

Для проверки теории [1] была создана маленькая рабочая установка с диаметром разрядной камеры, равным 300 мм (Ж-300). Схема соединения обмоток и требуемое распределение магнитного поля показаны на рис. 5 и 6. Расстояние между центрами обмоток составляло 170 мм при внутренней высоте камеры равной 140 мм. При величине разрядной емкости 12 мкф, рабочем напряжении 26 кВ и первичном токе 45 ка амплитудное значение напряженности магнитного поля в центре составляло 4300 э, а на равновесной орбите ($R=130$) — 360 э. Таким образом, $\frac{H_{\text{центр}}}{H_{\text{орбита}}}=12$, а $H_{\text{средн}}=1100$ э. Необходимо отметить, что создание магнитного поля подобной формы представляет собой весьма трудную задачу. В частности, пришлось ввести специальный размагничивающийся виток, направление тока в котором было противоположным направлению основного тока. На рис. 5 этот виток обозначен «а». В табл. 1 приведены некоторые данные, характеризующие рабочий режим этой установки.

Так как пояс для измерения вторичных токов в этой установке отсутствовал, то вместо плазменного тока измерялся ток на короткозамкнутом медном витке, установленном на равновесном радиусе. Все расчетные и экспериментальные данные достаточно хорошо совпадают друг с другом.

Для определения положения плазменного витка тока применялся метод скоростного фотографирования. Вследствие малой мощности всей установки яркость процесса была очень невелика, и мы вынуждены были ограничиться работой лишь при

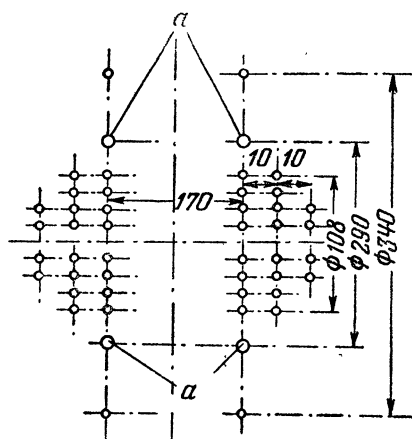


Рис. 5. Расположение витков магнитной катушки Ж-300.

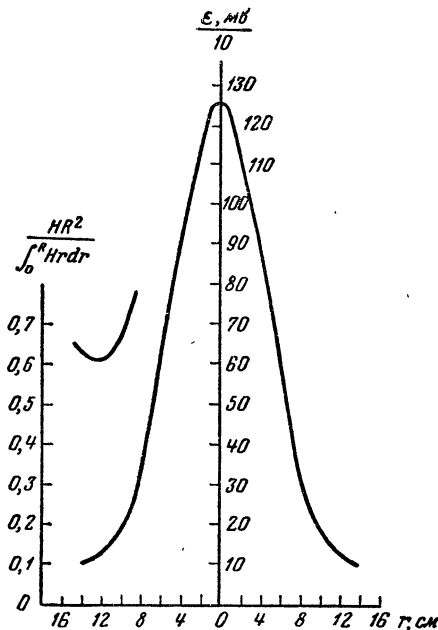


Рис. 6. Распределение магнитного поля в случае прямого контрвитка.

одном давлении, равном 0,1 мм рт. ст. Фотографирование производилось в двух направлениях. На рис. 7 представлены фотографии процесса, снятые под углом 90° к осевой линии цилиндрической камеры. Время, прошедшее между двумя последовательными фотоснимками, составляло 2 мксек. Каждая четверть периода первичного тока соответствует по времени 5,25 кадрам фотографии.

На рис. 8 показаны фотографии того же витка, снятые под небольшим углом ~ 15–20° к оси цилиндра. Из рассмотрения этих снимков видно, что плазменный виток тока существует в течение 6–8 мксек, т. е. примерно около 3/4 времени первой четверти периода нарастания первичного тока. На рис. 9 и 10

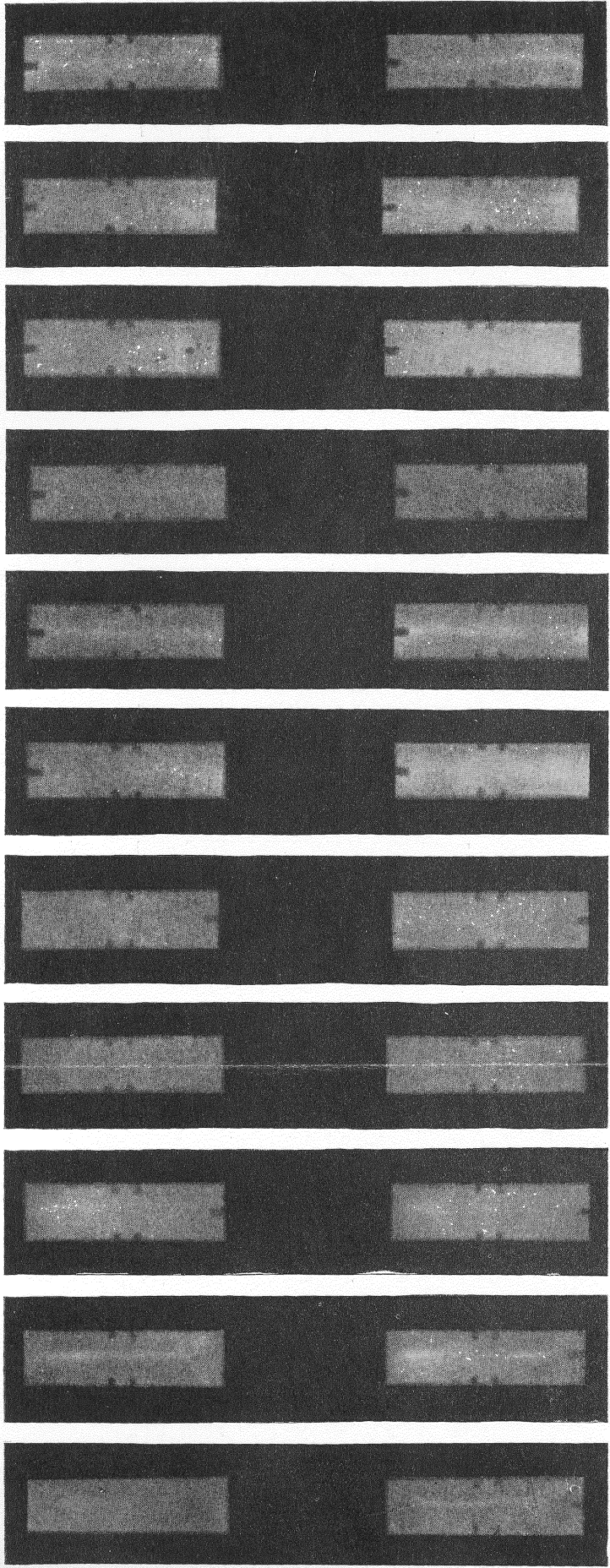


Рис. 7.

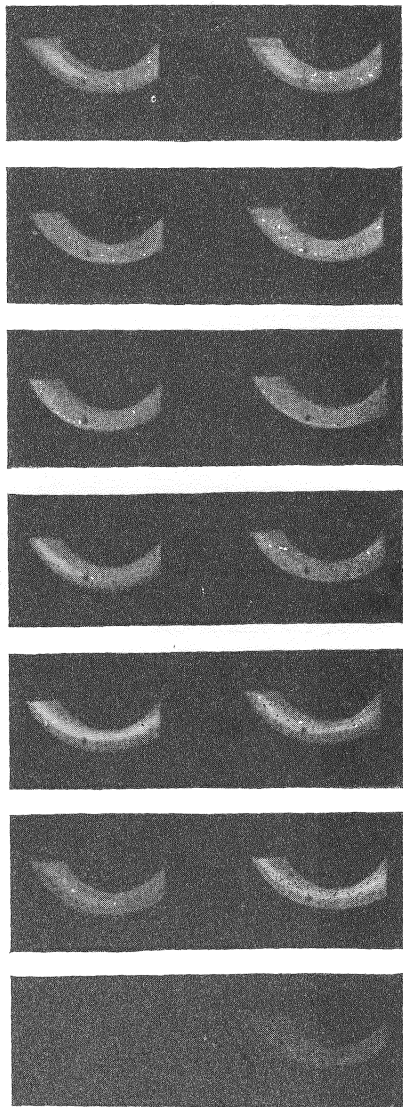


FIG. 8.

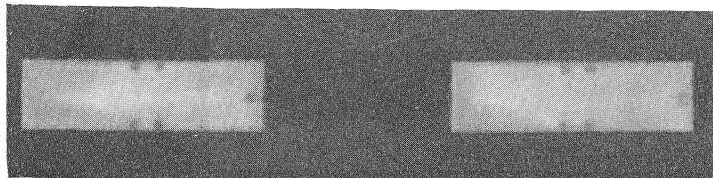
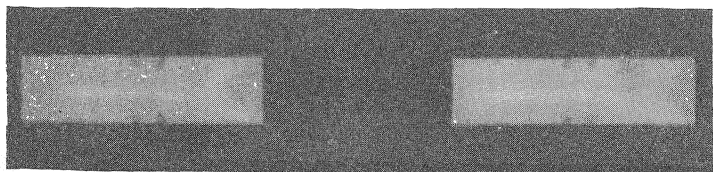
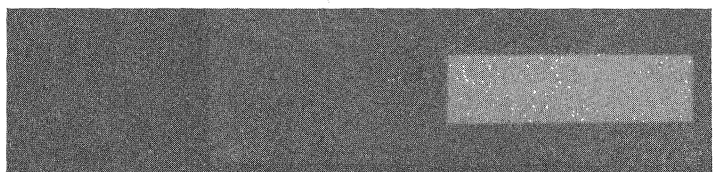
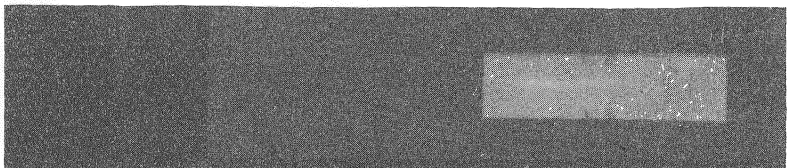
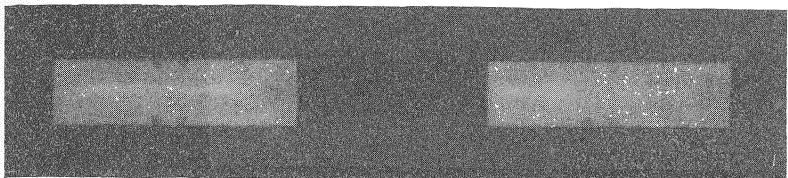
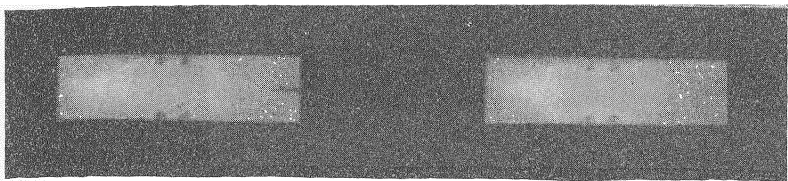


Рис. 10.

Рис. 9.

представлено еще несколько фотографий подобного типа. На каждой из этих фотографий процесс представлен только для первой четверти периода рабочего тока камеры.

Для большей убедительности этих экспериментов был поставлен контрольный опыт. Форма магнитного поля в рабочей камере была заведомо изменена таким образом, чтобы плазменный виток тока стягивался в центр объема. С этой целью компенсирующий виток был переключен так, что направление тока в нем совпадало с направлением тока в остальных витках. Распределение напряженности магнитного поля для этого случая показано на рис. 11. Вследствие изменения индуктивности обмотки при переключении компенсирующего витка рабочая частота процесса изменилась и составляла 19,3 кГц. Скоростные фотографии, снятые при этих условиях, представлены на рис. 12.

Каждая четверть периода первичного тока соответствовала по времени 6,5 кадрам фотограммы. Время, прошедшее между двумя последовательными фотоснимками, по-прежнему равно 2 мксек. Как и следовало ожидать, токовый виток в этом случае быстро стягивается к центру камеры, и устойчивого положения не наблюдается. Таким образом, первые опыты по эксплуатации установки Ж-300 достаточно убедительно показали, что конфигурация напряженности магнитного поля существеннейшим образом сказывается на поведении газового витка. Показано, что время существования витка в области устойчивой орбиты и момент сжатия его к центру определяются формой поля. Отсюда следует, что соответствующим выбором формы поля можно управлять положением витка и временем его существования. Для получения более определенных выводов в условиях протекания в плазменном витке больших токов была проведена серия экспериментов в камере диаметром, равным 600 мм, с полем, удовлетворяющим условиям равновесия и устойчивости.

В табл. 2 приведены основные данные установки Ж-600 с диаметром камеры, равным 600 мм.

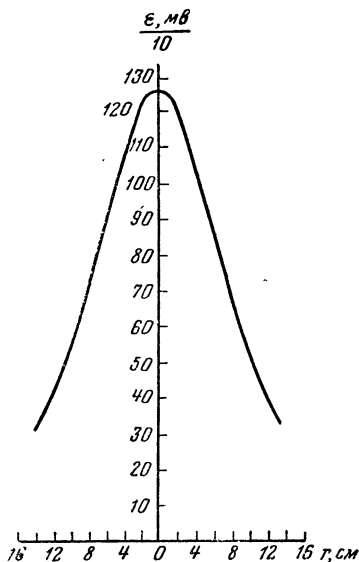


Рис. 11. Распределение магнитного поля установки Ж-300.

Таблица 1

l менду катуш- ками	l ва- куум	C	V раб	$L_{обм}$	f	σ_1	Φ	$H_{макс}$	$H_{орб}$	$H_{ср}$	$\frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R}$	$\frac{H_{орб}}{H_{макс}}$	$\sigma_2,$ $R = 13$	L_2	$E,$ $r = 13$
170 мм	140 мм	12 мкФ	26 кВ	4 мкГн	23,8 кГц	45 кА	$6,76 \cdot 10^5$	$4,3 \cdot 10^3$ э	360 э	$1,1 \cdot 10^3$ э	1,35	0,084	9,8 кА	0,582 мкГн	825 б

Таблица 2

Диаметр камеры	l между обмотка- ми	l вакуум	C	V	$L_{обм}$	f	σ_1	Φ через орбиту	$H_{ср}$	$H_{макс}$
600 мм	230 мм	174 мм	12 мкФ	80 кВ	7 мкГн	16,5 кГц	98 кА	$7,2 \cdot 10^6$	$2,55 \cdot 10^3$ э	$11,7 \cdot 10^3$ э

Продолжение

$H_{орб}$	$\frac{H_{макс}}{H_{орб}}$	$\frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R}$	$R_{орб}$	L_2	σ_2 расч	$E_2, R = 260$	Коэф. овяни	$\left(\frac{H R^2}{H_0} \int_0^R H r dr \right)_{орб}$
855 э	13,7	$1,2 \div 1,4$	260 мм	1,5 мкГн	48 кА	э	0,22	0,61

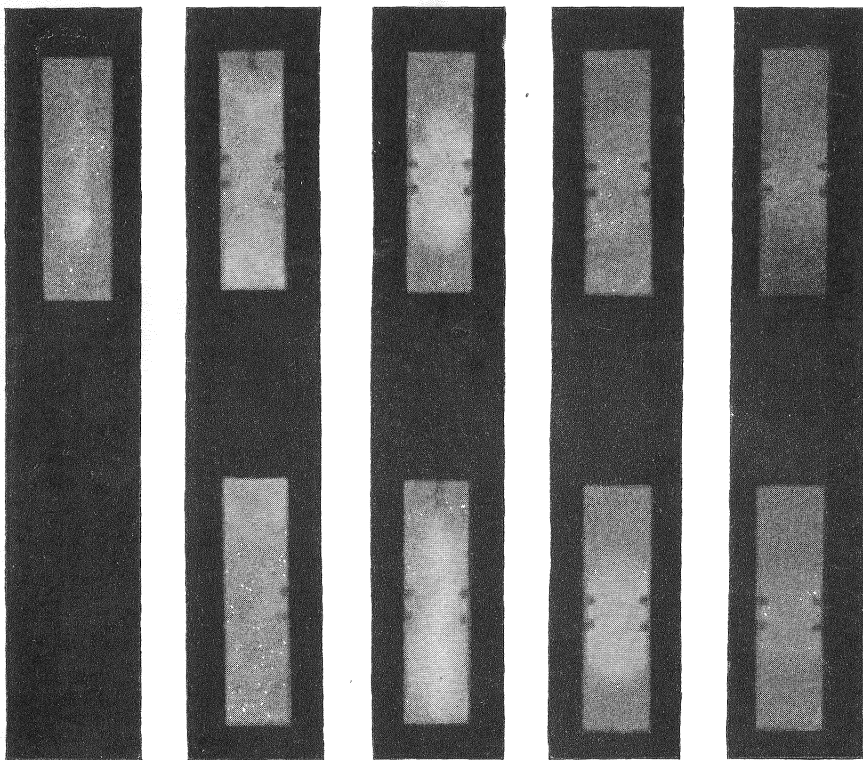


Рис. 12.

Распределение напряженности магнитного поля и конфигурация обмоток представлены на рис. 13. На этой установке были сняты скоростные фотографии разряда в широком диапазоне давлений от $p=5 \cdot 10^{-5}$ до 1 мм рт. ст. Можно отметить следующие характерные особенности поведения газового разряда в зависимости от давления:

1) На всех давлениях разряд начинается на периферии разрядной камеры.

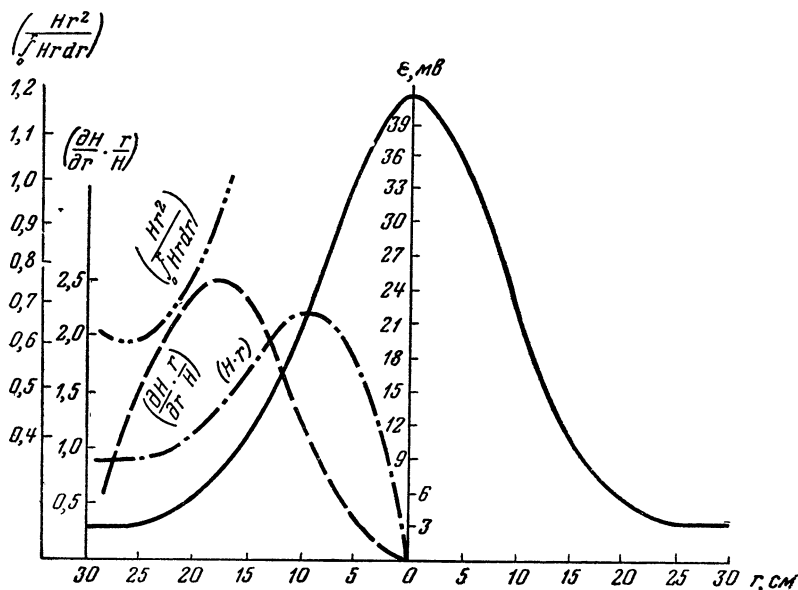


Рис. 13. Распределение магнитного поля в зависимости от положения [Ж-600 (1-й вариант)] контрвитка.

2) В области от 10^{-4} до 0,1 мм рт. ст. плазма быстро стягивается в центр. Практически уже к половине первой четверти периода нарастания первичного тока вся плазма сжата в центральной области. Время этого стягивания зависит от давления весьма слабо. На рис. 14 показаны фотографии этого сжатия для давления 0,1 мм рт. ст.

3) Начиная с давления 0,2 мм время стягивания плазмы резко увеличивается. На давлении 0,2 мм стягивание происходит в самом конце первой четверти периода. На давлениях 0,3 и 0,4 мм можно заметить формирование устойчивого плазменного витка к концу первой четверти периода. На давлениях 0,5; 0,6 и 0,8 мм существует устойчивый плазменный виток

Таблица 3

Величины	Положение контрвитка		
	I	II	III
Расстояние между контрвитками, мм	216	236	256
Расстояние между центрами обмоток, мм	216	216	216
Высота (вакуумной камеры), мм	154	154	154
Индуктивность обмоток, мкГн	7,1	7,1	7,1
Зарядная емкость, мкФ	12	12	12
Рабочее напряжение, кВ	80	80	80
Первичный ток, кА	95	95	95
Радиус устойчивой орбиты, мм	250	260	—
$H_{\text{макс}}, \vartheta$	15 700	14 800	17 100
$H_{\text{ср}}, \vartheta$	—	2900	} Теоретически устойчивой орбиты не существует
$H_{\text{орб}}, \vartheta$	925	1000	
$H_{\text{макс}}/H_{\text{орб}}$	17	14,5	
$\frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R}$ на орбите	1,1	1,2	
$\frac{HR^2}{\int_0^R Hrd r}$ на орбите	0,47	0,57	
Индуктивность плазменного витка, мкГн	1,4	1,5	}
Напряжение обхода на орбите, кВ	—	7,3	
Частота процесса, кГц	16,5	16,5	
Коэффициент связи	Не измерялся	0,2	—

в течение примерно $\frac{2}{3}$ первой четверти периода, т. е. около 10 мксек (рис. 15).

4) В течение второй четверти периода на всех давлениях существует плазменная область, сжатая в центре разрядной камеры. Необходимо отметить, что плазменный устойчивый виток имеет радиус всего 190 мм, т. е. находится значительно ближе к центру, чем расчетная устойчивая орбита.

Для данного витка значение величины $\frac{HR^2}{\int_0^R Hrd r}$ составляет 0,8, а $\left| \frac{R}{H} \frac{\partial H}{\partial R} \right| = 2,48$, что противоречит выводам приведенного теоретического рассмотрения. Это может иметь место, на-

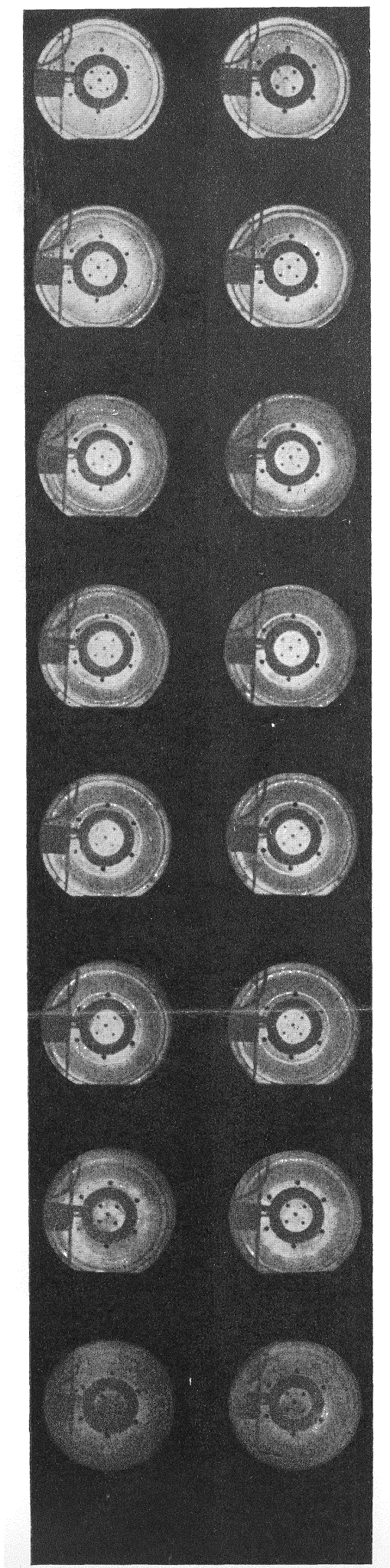


Рис. 14. Фотография сжатия разряда.

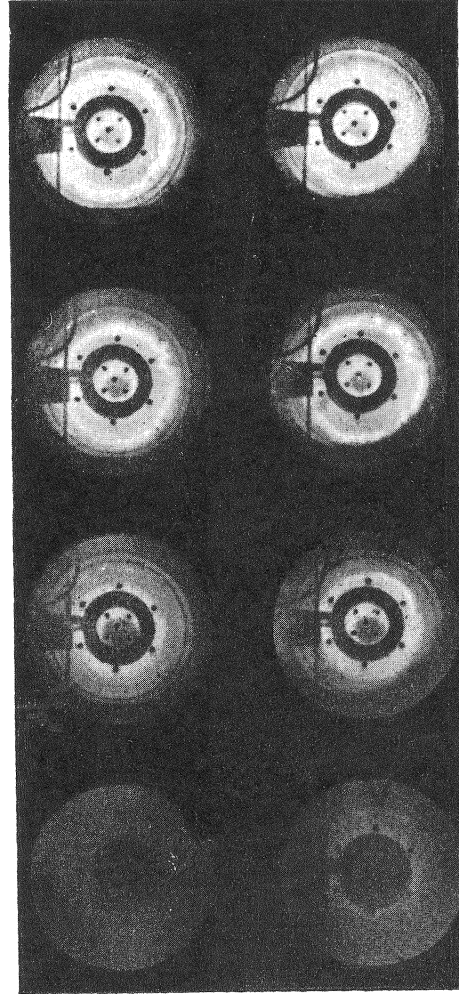


Рис. 15. Фотографии устойчивого плазменного витка.

пример, в том случае, если плазменный токовый виток имеет активное сопротивление, сравнимое или даже большее индуктивного. Некоторые экспериментальные данные, подтверждающие это, были нами получены позднее.

В новой конструкции установки Ж-600 была сделана попытка получить устойчивый плазменный виток на более низких давлениях при помощи некоторого изменения формы магнитного поля. С этой целью была использована новая разрядная камера с несколько меньшей высотой, а также изменено значение величины $\frac{HR^2}{\int^R Hr dr}$ до 0,47 т. е. была увеличена электродинамическая сила, распирающая виток. Форму магнитного поля можно было слегка изменять, не нарушая вакуума в системе, при помощи специального передвижного компенсирующего витка. Все эксперименты проводились нами для трех фиксированных положений этого компенсирующего витка, т. е. при трех несколько различных конфигурациях напряженности магнитного поля. На рис. 16 и 17 показано это распределение. В табл. 3 даны основные характеристики этой установки для трех положений компенсирующего витка. Положение контрвитка, обозначенное II, соответствует среднему нормальному положению, III — наибольшему расстоянию между двумя контрвитками и I — наименьшему расстоянию.

На данных фиксированных положениях контрвитка были сняты скоростные фотографии разряда в диапазоне давлений от 0,01 до 1 мм рт. ст. На рис. 18 и 19 показаны фотографии, снятые на двух давлениях 0,3 и 0,5 мм рт. ст. при трех положениях контрвитка. На давлениях 0,01—0,1 мм рт. ст. эти фотографии вполне аналогичны уже полученным ранее.

Из рассмотрения этих фотографий можно сделать следующий вывод: стабильная устойчивая орбита существует только на давлениях от 0,5 мм рт. ст. и выше; ее существование и положение в пространстве практически не зависят от некоторого,

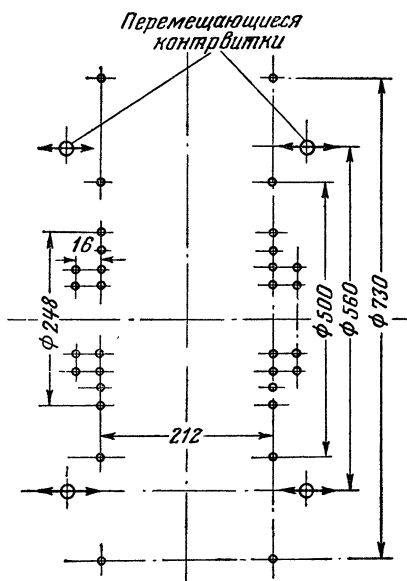


Рис. 16. Расположение витков магнитной катушки Ж-600 с перемещающимся контрвитком.

правда небольшого, изменения конфигурации напряженности магнитного поля. Радиус этой орбиты по-прежнему равен 190—200 мм, т. е. значительно меньше расчетного. Это стран-

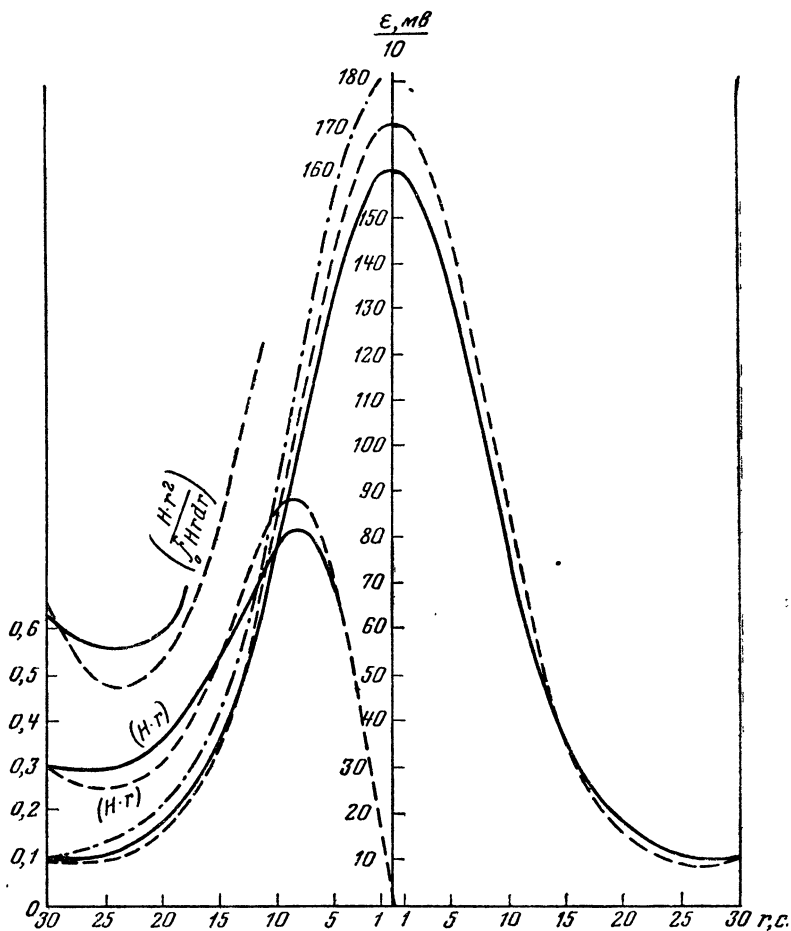


Рис. 17. Распределение магнитного поля в зависимости от положения [Ж-600 (2-й вариант)] контрвитка.

ное на первый взгляд обстоятельство может быть объяснено, если предположить наличие значительной активной составляющей сопротивления плазменного витка, а также то, что первоначально пробой газа, наполняющего камеру, происходит не в области стабильной орбиты, а значительно ближе к центру.

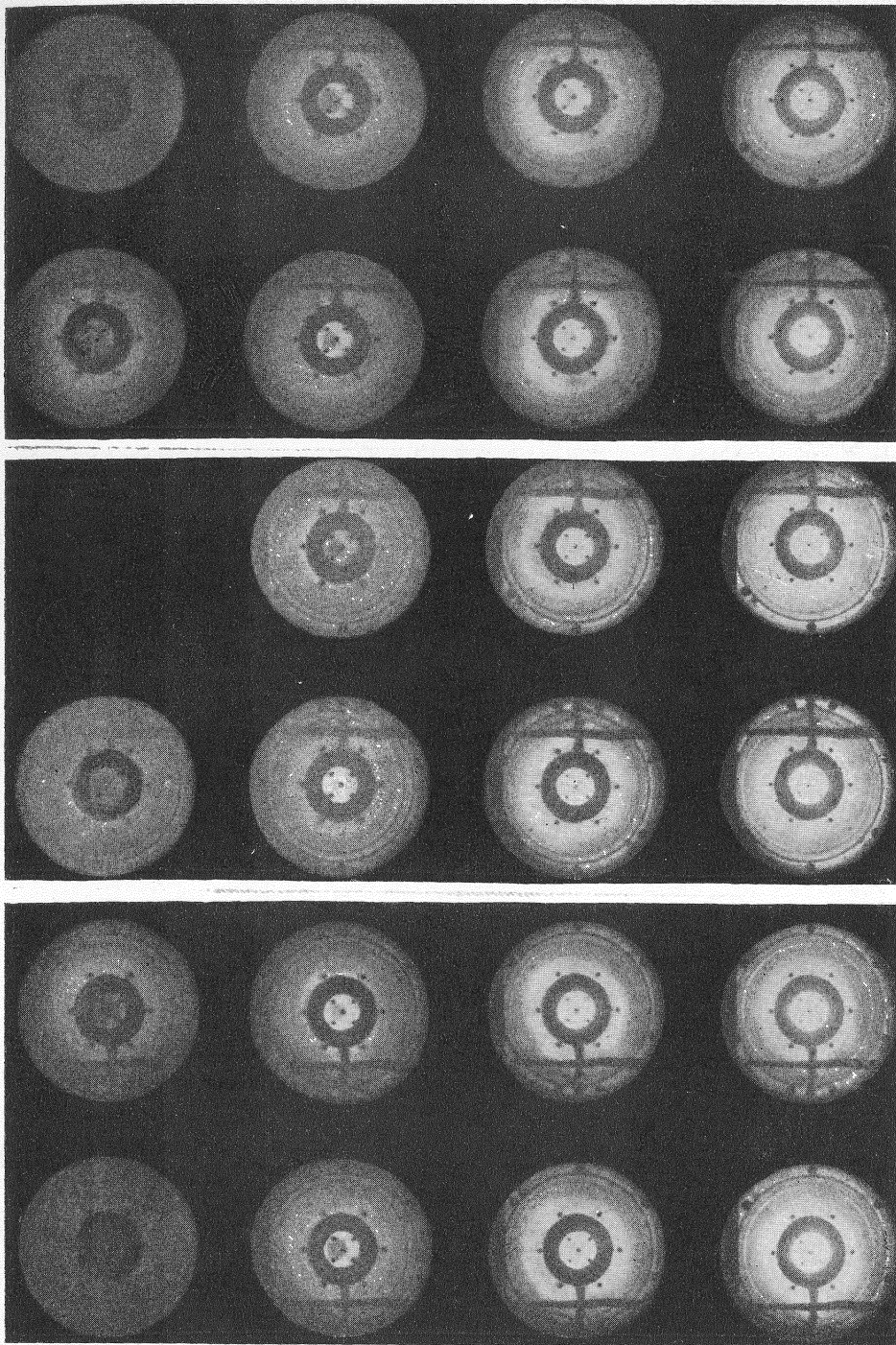


Рис. 18. Фотографии разряда при давлении 0,3 мм рт. ст. при различных положениях контрвитка.

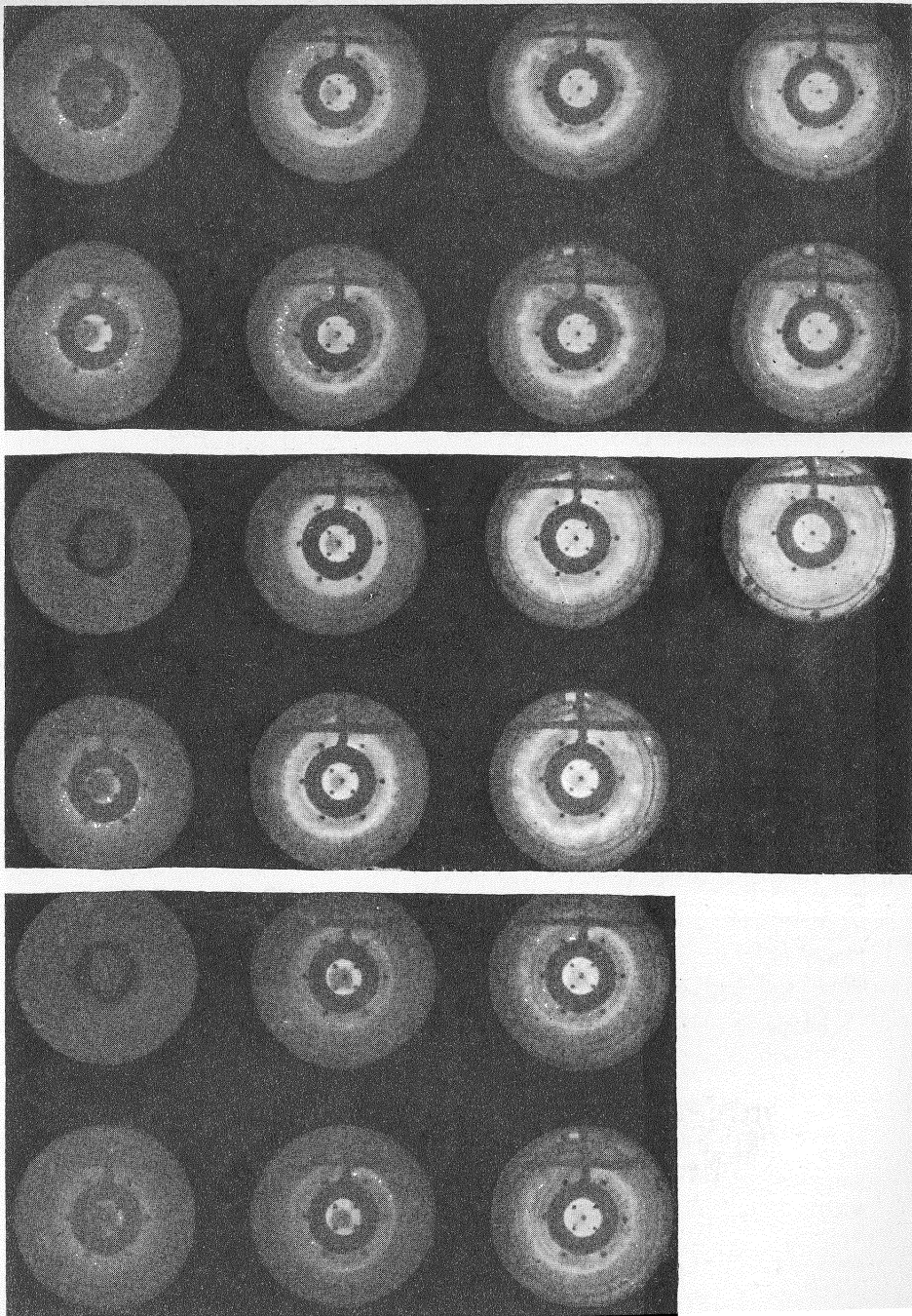


Рис. 19. Фотографии разряда при давлении 0,5 мм рт. ст. при различных положениях контрвитка.

На этой установке были измерены вторичные плазменные токи при давлениях от $1 \cdot 10^{-5}$ до 0,5 мм рт. ст. Значения этих токов приведены в табл. 4.

Таблица 4

№ кадра	Давление, мм рт. ст.	Амплитудное значение вторичного тока, ка							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	$1 \cdot 10^{-5}$	0	0	19	25	35	30	35	30
3	$5 \cdot 10^{-5}$	0	0	25	27,5	35	27,5	40	32,5
4	$1 \cdot 10^{-4}$	0	0	27,5	27,5	35	30	40	35
5	$5 \cdot 10^{-4}$	0	12,5	40	35	45	32,5	42,5	45
7	$1 \cdot 10^{-3}$	0	20	35	30	35	35	45	40
8	$5 \cdot 10^{-3}$	5	25	35	42,5	35	35	45	40
9	0,01	25	45	52,5	35	42,5	37,5	47,5	47,5
1	0,05	55	65	50	40	40	40	40	40
5	0,1	62,5	72,5	40	37,5	32,5	47,5	35	50
6	0,2	55	82,5	50	37,5	37,5	50	45	65
7	0,3	40	75	50	37,5	40	50	50	50
10	0,4	35	83	50	50	40	50	45	50
11	0,5	30	70	70	58	60	60	70	60
12	0,6	25	82,5	75	58	60	78	60	82,5

Как видно из табл. 4, время развития разряда на низких давлениях резко сократилось и составляет теперь 60—70 мксек. Величины вторичных токов также увеличились и достигли значений в несколько десятков килоампер, что примерно вдвое превышает соответствующие значения тока (считая максимальную величину тока за первый полупериод при одинаковых давлениях), приведенные в табл. 1. Кроме того, следует отметить, что форма кривой тока носит более плавный характер (рис. 20). Особо следует обратить внимание на уменьшение вторичного тока при увеличении давления от 0,1 до 0,6 мм рт. ст.

Для выяснения зависимости вторичного тока от напряжения был снят цикл осциллограмм первичного и вторичного токов на разных давлениях при напряжении 42 кэ; амплитудное значение первичного тока в этом случае равно 51 ка. Значения вторичных токов приведены в табл. 5, из которой видно, что амплитуда вторичного тока в первом полупериоде при этом уменьшается более чем вдвое. Например, при давлении 0,1 мм рт. ст. это соотношение составляет 2,5, при других давлениях — еще более.

На данной установке было обнаружено жесткое рентгеновское излучение, которое регистрировалось при помощи сцинтиляционной методики.

Фотоумножитель типа ФЭУ-19 вместе с кристаллом нафталина с антраценом помещался на расстоянии около одного метра от установки. Для защиты фотоумножителя от сильней-

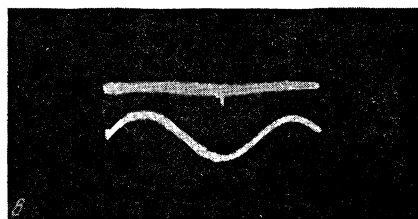
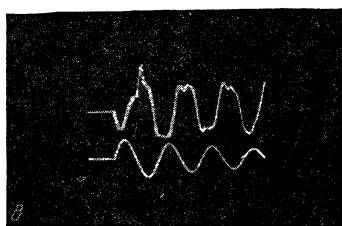
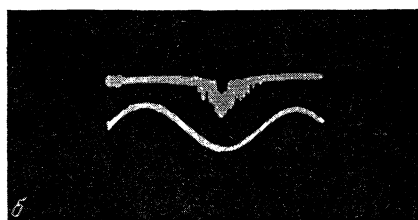
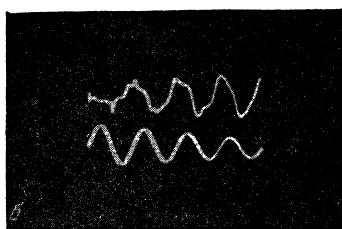
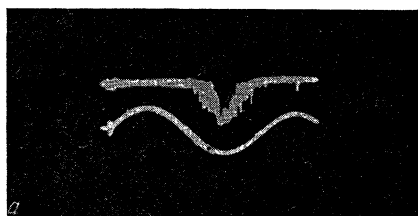
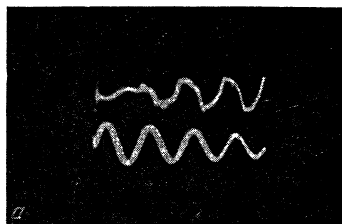


Рис. 20.

Рис. 21.

ших электромагнитных полей, возникающих при разряде конденсаторной батареи, он тщательно экранировался. Получающиеся импульсы регистрировались на экране осциллографа. Для проверки и контроля наличия рентгеновского излучения было поставлено несколько контрольных экспериментов. В одном из них фотоумножитель с кристаллом закрывался со всех сторон свинцом толщиной 5 см, что хорошо предохраняло кристалл от прямых и рассеянных рентгеновских квантов, идущих со всех направлений. Затем оставалась не-

Таблица 5.

№ кадра	Давление, мм рт. ст.	Амплитудные значения вторичных токов, ка							
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$1 \cdot 10^{-5}$	Нет разряда							
2	$5 \cdot 10^{-5}$								
4	$1 \cdot 10^{-4}$								
5	$5 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	10	12,5	15	12,5	20
6	$1 \cdot 10^{-3}$	0	12,5	17,5	15	12,5	12,5	15	15
8	$5 \cdot 10^{-3}$	0	15	17,5	15	17,5	17,5	17,5	17,5
9	0,01	7,5	12,5	20	20	17,5	17,5	17,5	17,5
3	0,02	15	20	25	27,5	25	25	20	25
10	0,05	22,5	30	25	25	22,2	25	17,5	17,5
11	0,1	25	37,5	35	25	27,5	25	22,5	20
12	0,3	10	35	45	37,5	35	30	25	20
13	0,5	0	35	50	45	45	35	30	30

закрытой свинцом небольшая щель, вырезающая узкий пучок рентгеновского излучения. После этого щель закрывалась куском металла той же толщины, но имеющим малый коэффициент поглощения рентгеновских квантов (Al). Во всех этих случаях фиксировались импульсы рентгеновского излучения. Полученные осциллограммы показаны на рис. 21*. Из рассмотрения этих осциллограмм можно сделать следующие выводы: при постановке алюминия рентгеновский импульс лишь немного меньше того же импульса в случае открытой щели; при полной экранировке свинцом толщиной 5 см импульс почти полностью исчезает.

Это достаточно убедительно указывает на наличие рентгеновского излучения. Некоторые выводы об энергии рентгеновских квантов можно было сделать из экспериментов по поглощению их в свинце различной толщины. Однако вследствие того, что относительные интенсивности рентгеновских импульсов мы могли оценивать лишь грубо ориентировочно, можно указать только порядок величины энергии рентгеновских квантов. Принимая, что свинец толщиной 5 см снижает интенсивность излучения в несколько тысяч раз, приходим

* В результате большой перегрузки фотоумножителя рентгеновские импульсы на рис. 21 сильно затянуты.

к выводу, что энергия рентгеновских квантов по порядку величины составляет $0,5 \text{ Мэв}$. При измерении рентгеновского излучения на разных давлениях газа, наполняющего рабочую камеру, выяснилось, что максимум этого излучения лежит на давлении $5 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ Общая область давлений, на которых существует рентгеновское излучение, простирается от $1 \cdot 10^{-5}$ до $0,1 \text{ мм рт. ст.}$

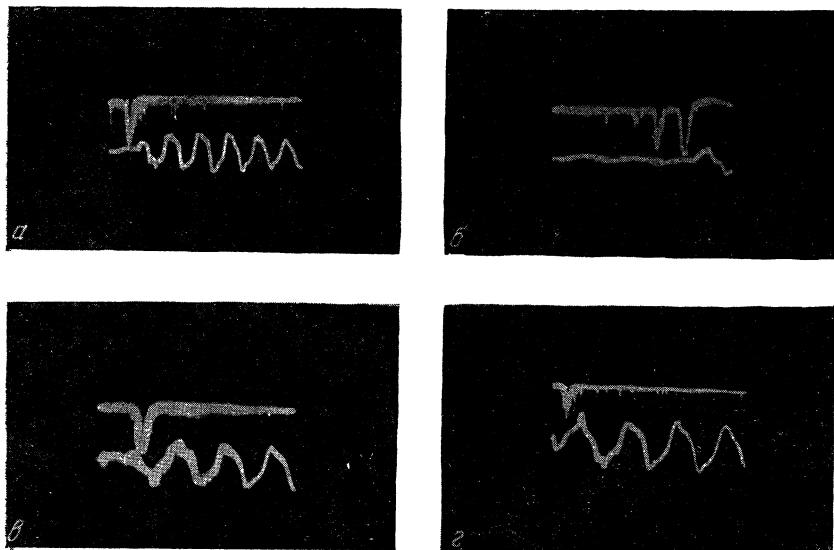


Рис. 22.

При увеличении давления от $5 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ эта интенсивность падает очень резко. Никаких измерений абсолютной интенсивности рентгеновского излучения нами не проводилось. Получающиеся рентгеновские импульсы фазировались нами со вторичным током, при этом отмечены следующие особенности:

1) На низких давлениях от $1 \cdot 10^{-5}$ до $5 \cdot 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$ импульс рентгеновского излучения появляется всегда до начала вторичного тока, точнее до величины тока, фиксировавшейся имеющимся измерительным устройством (рис. 22, а). При чувствительности используемой нами аппаратуры мы могли бы обнаруживать вторичные токи не менее 2 ка . Это говорит, по-видимому, об обычном бетатронном ускорении электронов, имеющем место в этом случае.

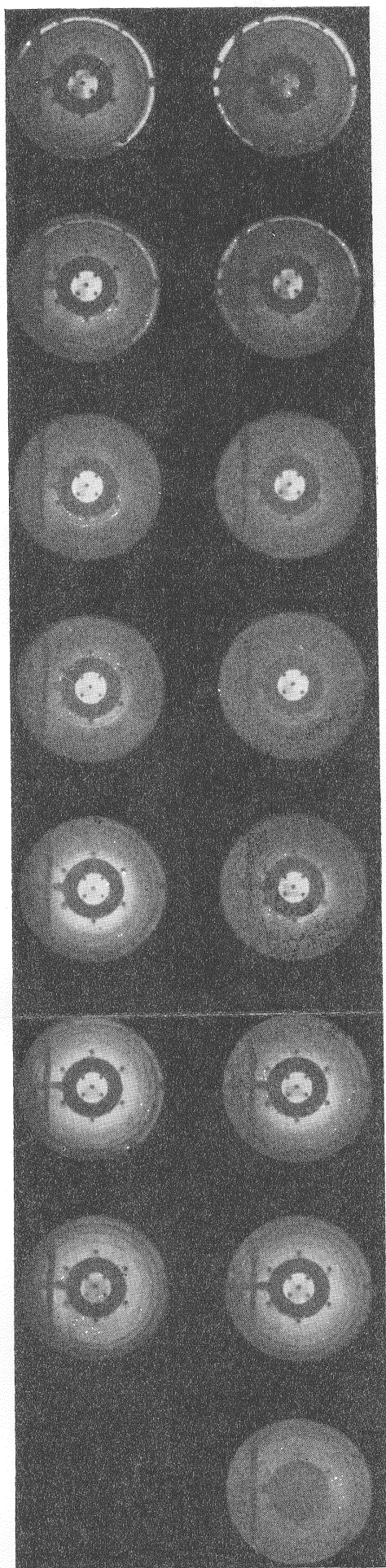
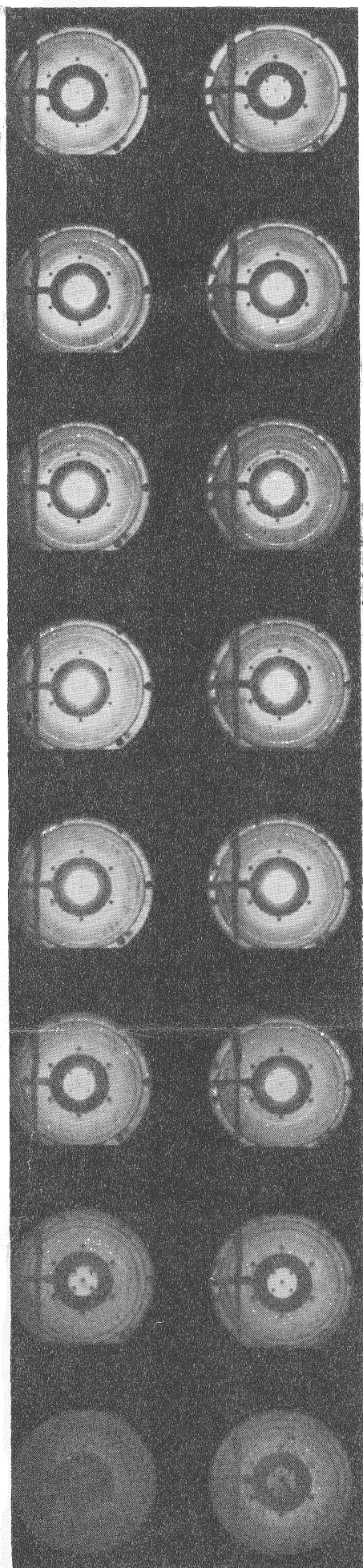


Рис. 23.

2) На давлениях от $5 \cdot 10^{-4}$ до $5 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. рентгеновский импульс появляется и до и после начала вторичного гока (рис. 22, б и в).

3) На давлениях 0,01—0,1 мм рт. ст. рентгеновский импульс возникает всегда после старта вторичного тока при прохождении последнего через нуль (рис. 22, г).

Момент появления рентгеновского импульса был сфазирован со скоростными фотографиями газового разряда при двух давлениях: 0,01 и 0,05 мм рт. ст. На давлениях ниже

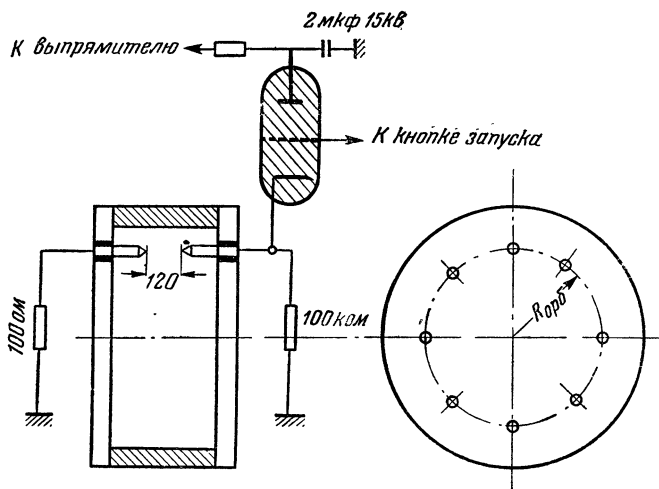


Рис. 24. Расположение поджигающих электродов в камере.

0,01 мм рт. ст. получение фотографий невозможно вследствие малой начальной яркости процесса, а на давлениях выше 0,1 мм рт. ст., как уже было сказано, рентгеновское излучение не наблюдается. Для обоих этих давлений рентгеновский импульс появляется в конце первой четверти периода нарастания первичного тока и соответствует тому моменту, когда существует устойчивый плазменный ком в центре разрядной камеры. Величина вторичного тока в этот момент близка к нулю (рис. 23).

Как уже было сказано, начальный пробой газа в газоразрядной камере при некоторых значениях начального давления происходит на меньшем радиусе, чем радиус устойчивой расчетной орбиты. Для того чтобы искусственно создать начальную ионизацию в области этой орбиты, было сделано специальное устройство. В разрядную камеру вводилось 8 пар молибденовых «штырей», расположенных по радиусу устойчивой орбиты (рис. 24). При помощи электронной схемы (рис. 25) к этим

штырям прикладывался импульс напряжения амплитудой в 8 кВ и вызывался искусственной пробой газа. Разброс во времени старта всех восьми пар штырей при одновременной подаче на них высоковольтного импульса не превышал 1 мксек. Амплитудное значение тока через каждую пару штырей составляло 100 а. Этот ток убывал экспоненциально с постоянной времени, равной 200 мксек. При помощи задерживающей линии

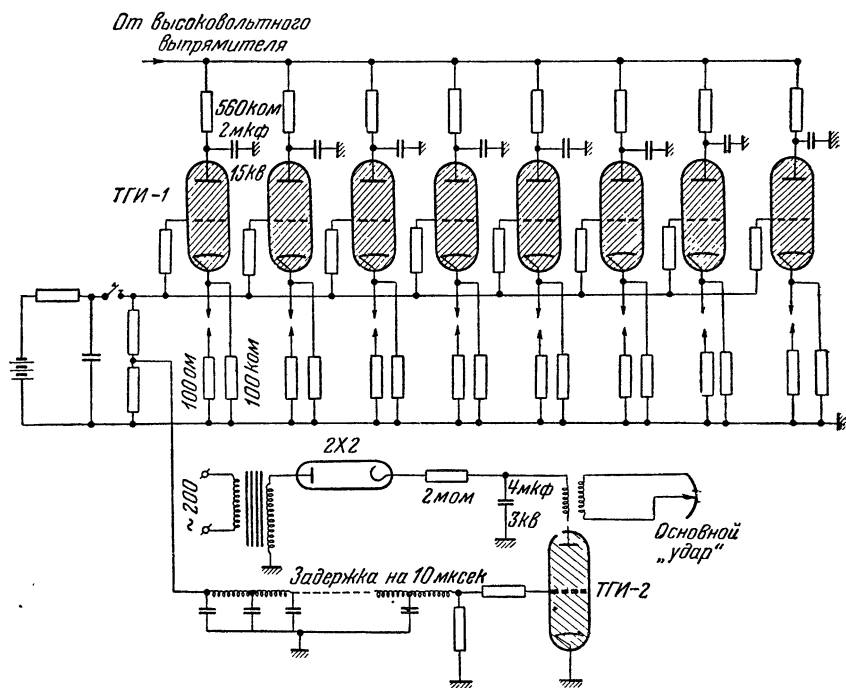


Рис 25. Схема поджигающего устройства

разряд основной конденсаторной батареи производился через 10 мксек после начала тока через все 8 пар штырей. Электронная схема была устроена таким образом, что пробой хотя бы одной пары штырей неизбежно вызывал пробой всех остальных. При проверке этого устройства оказалось, что безотказная его работа происходит только на давлениях от $1 \cdot 10^{-3}$ до 0,5 мм рт. ст.

При более низких давлениях, до $5 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст. включительно, пробой штырей происходит не всегда регулярно, и, кроме того, возможно, что ток с одного штыря попадет не на прямопротивоположный штырь, а на один из более удаленных,

т. е. происходит своеобразное перекрещивание токов различных штырей.

На этой установке были сняты осциллограммы первичных и вторичных токов на различных давлениях, причем для наглядности осциллограммы снимались для случая включенной и невключенной системы штырей.

Результаты измерений приведены в табл. 6.

Таблица 6

№ кадра	Давление, мм рт. ст.	Штыри	Амплитудное значение вторичного тока, <i>ка</i>							
			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
19	$1 \cdot 10^{-5}$	Включ.	Нет разряда							
18	$1 \cdot 10^{-5}$	Не включ.	Нет разряда							
17	$5 \cdot 10^{-5}$	Включ.	0	0	27	27	36	27	38	27
15	$5 \cdot 10^{-5}$	Не включ.	0	0	0	0	0	0	0	0
14	$1 \cdot 10^{-4}$	Включ.	0	0	0	22,5	31,5	24,7	31,5	31,5
13	$1 \cdot 10^{-4}$	Не включ.	0	0	0	0	22,5	38,3	36	27
12	$5 \cdot 10^{-4}$	Включ.	0	31,5	45	40,5	40,5	40,5	49,5	45,0
9	$5 \cdot 10^{-4}$	Не включ.	0	29,3	45	36	45	45	45	40,5
6	$1 \cdot 10^{-3}$	Включ.	0	32,5	36	45	40,5	45	49,5	54,0
5	$1 \cdot 10^{-3}$	Не включ.	0	22,5	49,5	45	40,5	40,5	49,5	54,0
4	$5 \cdot 10^{-3}$	Включ.	0	29,3	42,7	40,5	45	45	49,5	49,5
3	$5 \cdot 10^{-3}$	Не включ.	0	27,3	38,2	45	40,5	45	49,5	54,0
5	0,01	Включ.	38,3	63	52	54	54	67,5	54,0	63,0
4	0,01	Не включ.	15,7	58,5	61	67,5	65,2	72	67,5	67,5
7	0,05	Включ.	79,5	100	74,3	76	63	72	63	67,5
6	0,05	Не включ.	81	94,5	83,5	67,5	67,5	60,8	67,5	63,0
9	0,1	Включ.	78,7	108	78,7	81	63	67,5	60,8	63,0
8	0,1	Не включ.	78,7	108	78,7	81	76,5	76,5	67,5	67,5
11	0,2	Включ.	85,5	117	85,5	81	72	85,5	67,5	72,0
10	0,2	Не включ.	85,5	120	85,5	85,5	72	85,5	72	67,5

В этих экспериментах напряжение на конденсаторной батарее составляло 80 *кв*, разрядная емкость была равна 12 *мкф* и амплитудное значение первичного тока равнялось 105 *ка*.

Для улучшения азимутальной асимметрии конструкция первичной обмотки была несколько изменена, что сказалось на некотором уменьшении ее индуктивности. Таким образом, частота процесса несколько увеличилась и стала равна 17,5 *кГц*. Из рассмотрения таблицы можно сделать следующие выводы:

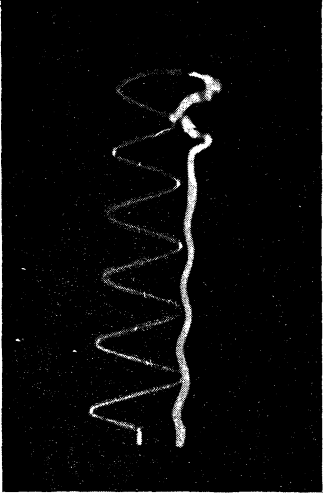
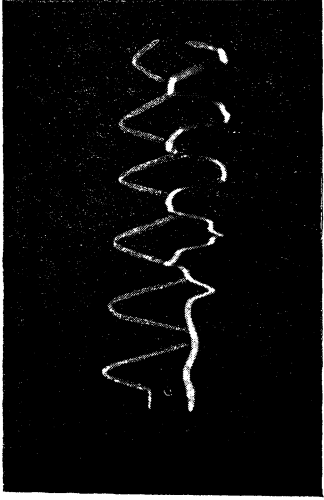


Рис. 26.

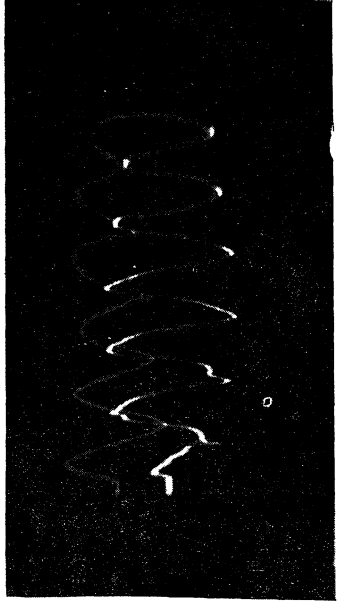
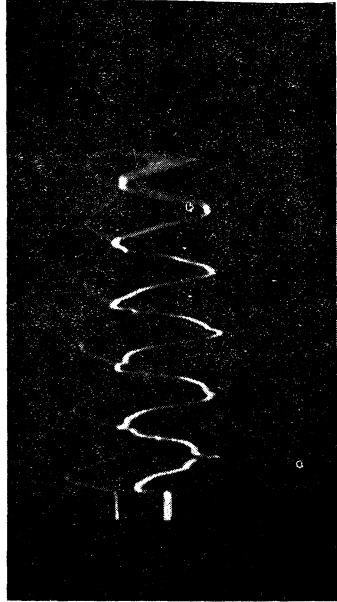


Рис. 27.

1) При включении принудительной системы поджига резко уменьшается время развития разряда на низких давлениях. Особенно ясно это видно на давлении $5 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст., где старт разряда сокращается с 220 до 55—60 мксек (рис. 26).

2) Амплитудное значение тока на первом полупериоде также возрастает при включении штырей. Однако надо принять во внимание, что правильная работа поджига возможна только для давления от $1 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. и выше. На давлениях, больших нескольких сотых миллиметра ртутного столба, поджиг не приводит к росту тока. На рис. 27 представлены осциллограммы тока на давлении 0,01 мм рт. ст., из которых видно, что при включении принудительного поджига вторичный плазменный ток возрастает в 2,5 раза. Следует только обратить особое внимание на то, что фазовый сдвиг между первичным и вторичным током указывает на наличие большого активного сопротивления в цепи вторичного тока. Это, вероятно, происходит из-за малой степени ионизации в плазменном токовом шнуре.

§ 4. Выводы

Приведенный экспериментальный материал позволяет сделать некоторые выводы и наметить пути дальнейшего совершенствования устройства исследуемого типа.

1. Форма магнитного поля оказывает существенное влияние на время существования плазменного витка и на величину тока, текущего в витке.

2. В условиях проводившихся экспериментов активное сопротивление играло значительную роль, что не учитывалось в теоретическом рассмотрении [1], и, следовательно, условия равновесия и устойчивости за период прохождения тока не выполнялись. Доказательством наличия значительной активной составляющей плазменного витка являются:

а) сдвиг фаз между первичным и вторичным токами;

б) уменьшение тока с ростом давления, начиная с некоторых значений начального давления 0,3—0,4 мм рт. ст. (табл. 4 и 5). Действительно, активное сопротивление в неполностью ионизованной плазме почти однозначно определяется степенью ионизации газа, которая в функции давления может спадать, начиная с некоторых значений давления, так как при этом, вследствие неупругих столкновений электронов с атомами и молекулами, уменьшается их энергия, а следовательно, и ионизирующая способность. То, что степень ионизации в условиях, близких к исследуемым, мала и не превышает нескольких процентов, подтверждается опытами Н. А. Борзунова и Д. В. Орлинского [2] и их теоретической интерпретацией данной В. И. Коганом [3];

в) то обстоятельство, что с ростом напряжения на конденсаторной батарее вторичный ток с напряжением растет быстрее, чем по линейному закону. Рост тока приводит к росту ионизации, а следовательно, и к уменьшению активного сопротивления, что в свою очередь ведет к дальнейшему росту тока.

3. Время существования плазменного витка, помимо всего прочего, зависит от места образования этого витка, т. е. от условий пробоя газа. Известно, что условия пробоя газа определяются электрическим полем и плотностью газа. Основным параметром, характеризующим условия возникновения разряда, является величина E/p . Число образующихся в единице объема в единицу времени заряженных частиц является функцией этого параметра, причем эта функция для водорода имеет максимум при $E/p=100$ (p , мм рт. ст., E , в/см). Для установки Ж-600 (см. табл. 3) напряжение на обходе в районе устойчивой орбиты составляло 7300 в, а следовательно, напряженность электрического поля $E=45$ в/см. Скоростные фотографии показывают, что устойчивая орбита появляется при давлениях, начиная примерно с 0,4 мм рт. ст., т. е. при $E/p \approx 100$. При меньших p оптимальные условия пробоя смещаются в сторону меньших E , т. е. внутрь камеры ближе к оси. Так как интерес представляет область давлений, значительно меньших, то для того, чтобы плазменный виток образовывался в области устойчивой орбиты, необходимо каким-то образом фиксировать образование разряда в заданном районе. Для этого необходимо ввести дополнительное устройство. Такое устройство в виде электродного поджига с помощью восьми электродов, расположенных по окружности в области устойчивой орбиты, и было осуществлено.

Результаты измерений показывают, что при этом в области низких давлений величина вторичного тока резко возрастает (при давлениях 0,01 мм рт. ст. и ниже). На более высоких давлениях она остается практически без изменений. Кроме того, как и следовало ожидать, сильно сокращается время развития разряда в области низких давлений.

Жесткое рентгеновское излучение, наблюдавшееся в настоящих экспериментах, указывает на существование некоторого механизма ускорения электронов. В области низких давлений порядка 10^{-4} мм рт. ст. это излучение, по-видимому, обусловлено ускорением бетатронного типа, что в свою очередь дает основания полагать, что в устройствах подобного рода принципиально возможно осуществить бетатрон без предварительной инжекции ранее ускоренных частиц. Что же касается природы рентгеновского излучения при более высоких давлениях (до 0,1 мм рт. ст.), то здесь не исключена возможность наличия других, пока не выясненных, механизмов ускорения заряжен-

ных частиц, например тех, которые обуславливают наблюдающееся излучение в прямых разрядных трубках.

Приведенные здесь выводы позволяют сформулировать пути дальнейшего развития устройств типа ЖО. Поскольку во всех проведенных экспериментах наличие активного сопротивления плазменного витка оказалось весьма существенным, прежде всего необходимо снизить влияние этого фактора. Здесь, по нашему мнению, следует идти двумя путями: во-первых, увеличить плазменный ток, что приведет к росту процента ионизации, а следовательно, и к уменьшению активного сопротивления; во-вторых, увеличить частоту изменения первичного тока, что вызовет увеличение индуктивного сопротивления.

В настоящее время разработана система питания таких установок с помощью так называемых распределенных обмоток, которые, обладая малой индуктивностью, приведут к значительному повышению частоты первичного контура, и, кроме того, предусмотрена такая конфигурация этих обмоток, при которой коэффициент связи значительно возрастает, что в свою очередь (при прочих равных условиях) должно приводить к существенному возрастанию величины вторичного тока. Такое устройство, можно полагать, уменьшит роль активного сопротивления настолько, что его влияние окажется мало существенным.

С точки зрения применимости выводов теоретического рассмотрения [1] проводится дальнейшее усовершенствование системы предварительной ионизации с тем, чтобы фиксировать возникновение плазменного витка в области устойчивой орбиты. Необходимо более тщательное и подробное исследование наблюдающегося рентгеновского излучения (определение условий и момента его возникновения, длительности существования рентгеновского импульса, энергии рентгеновских квантов и интенсивности излучения) с тем, чтобы дать однозначный ответ о природе механизма ускорения заряженных частиц, обуславливающего этот эффект. С другой стороны, должна быть проведена серия исследований, которая могла бы дать ориентировку в вопросе о возможности использования подобного рода устройства в качестве ускорителя электронов без предварительной инжекции.

Результаты проделанных исследований, по нашему мнению, позволяют сделать вывод о целесообразности проведения дальнейших работ в этом направлении.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. М. Осовец, см. настоящий том стр. 238.
2. Н. А. Борзунов, В. И. Коган, Д. В. Орлинский. Отчет АН СССР, 1954; Атомная энергия, 4, 180 (1958).
3. В. И. Коган. Там же, стр. 178.

Ю. Ф. Наседкин

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЬЦЕВОГО ГАЗОВОГО РАЗРЯДА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

С целью уменьшения влияния активного сопротивления газового витка на протекание разряда была создана описываемая здесь установка. Она обеспечивает необходимую форму магнитного поля и обладает малой индуктивностью ($L=0,15$ мкГн) и большим коэффициентом связи ($K=0,35$). На установке было изучено распределение вторичного тока по объему камеры.

Результаты экспериментов дают основание считать, что в течение первого полупериода вторичный ток оторван от стенок и расположен вблизи расчетной устойчивой орбиты. В районе максимума первичного тока вторичный ток срывается с орбиты и движется к центру, как единое целое. Во втором и последующих полупериодах разряд занимает весь объем.

§ 1. Введение

Теория явлений, имеющих место на установках типа Ж-0 [1], была построена в предположении малости активного сопротивления плазменного витка по сравнению с индуктивным. Наличие активного сопротивления витка приводит к нарушению условий равновесия сил, действующих на виток на устойчивой орбите. Если условия равновесия и устойчивости не соблюдаются, то энергия, забираемая плазменным током из первичной цепи, будет значительно меньше, чем при наличии равновесной устойчивой орбиты.

В работе [2] показано, что активное сопротивление витка играет существенную роль. Поэтому дальнейшее изучение га-

* Работа выполнена в 1955 г.

зового разряда на установках типа Ж-0 следует вести, стремясь по возможности уменьшить роль активного сопротивления. Этого можно достигнуть двумя путями.

Первый путь — увеличение частоты процесса, благодаря чему увеличивается индуктивное сопротивление плазменного витка. Прямым следствием этого является увеличение отношения $\frac{\omega L}{R}$ для плазменного витка, т. е. уменьшение роли активного сопротивления по сравнению с индуктивным.

Второй путь — увеличение вторичного тока благодаря увеличению коэффициента связи. При увеличении тока увеличивается степень ионизации, а следовательно, уменьшается R витка.

Однако увеличение коэффициента связи представляет самостоятельный интерес, так как с его увеличением энергия вторичного тока, забираемая из первичной цепи, возрастает пропорционально квадрату коэффициента связи K^2 .

Настоящая работа была посвящена созданию установок типа Ж-0 с быстрым нарастанием магнитного поля и формой поля, удовлетворяющей условиям равновесия и устойчивости. При этом было обращено особое внимание на увеличение коэффициента связи K .

§ 2. Описание магнитной системы

Магнитная система, представленная на рис. 1, состоит из медной полосы A , выполненной в виде цилиндра, и двух медных дисков B и C . Все эти детали соединяются параллельно при помощи перемычек D . Нужное распределение магнитного поля по радиусу можно получить, меняя размеры D_2 , D_3 , и H .

На рис. 2 показана кривая распределения магнитного поля для средней плоскости при $D_1=300$, $D_2=280$, $D_3=130$ мм, $H=90$ мм. При заданной форме магнитного поля равновесная орбита имеет радиус $R \approx 120$ мм.

В месте разъема обмотки, где подводится ток, нарушается азимутальная симметрия поля, так как в этом месте имеются радиальные токи, проходящие по перемычкам, которые искажают поле в этом месте. Возникающая в результате этого азимутальная асимметрия поля очень велика. На рис. 3 показано, как изменяется магнитное поле на данном радиусе в функции угла φ . Из рисунка видно, что поле в области разъема отличается от нормальной величины почти в четыре раза. Для исправления магнитного поля в области разъема в разъем вставлялся медный экран, имеющий форму скобы, который дает возможность получить азимутально симметричную систему с отклонением, не превышающим нескольких процентов.

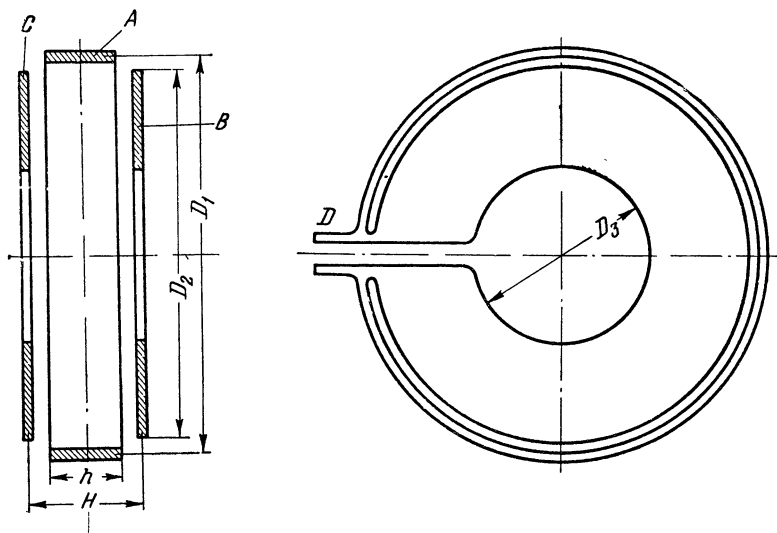


Рис. 1. Схема магнитной системы.

$D_1 = 300$; $D_2 = 280$; $D_3 = 130$; $H = 90$; $h = 70$.

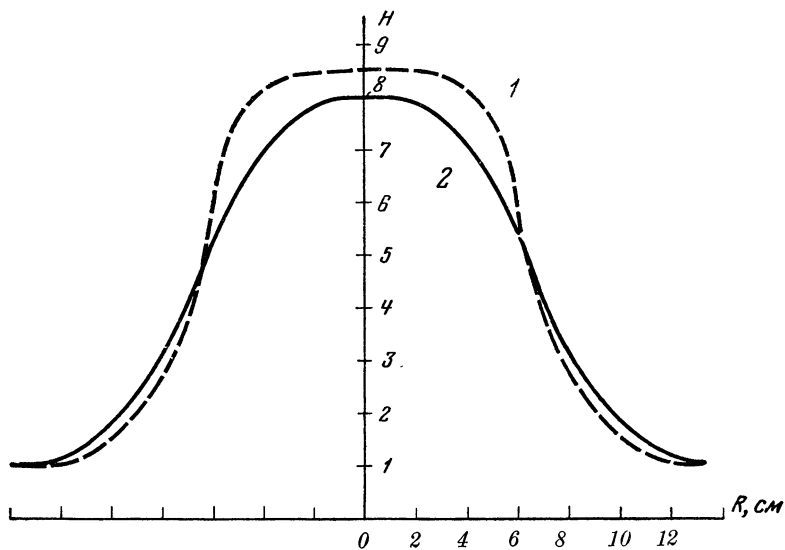


Рис. 2. Кривая распределения магнитного поля.

1 — поле у стенки вакуумной камеры; 2 — поле в средней плоскости.

Как указывалось, при создании магнитной системы особое внимание было обращено на увеличение коэффициента связи тока, расположенного на устойчивой орбите, с первичной цепью, так как энергия, забираемая токовым витком, находящимся на устойчивой орбите, определяется квадратом коэффициента связи.

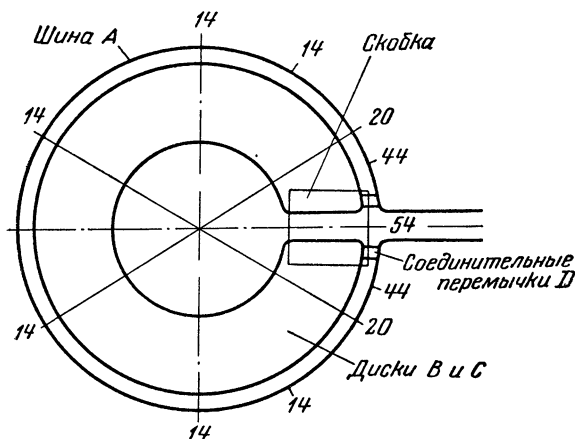


Рис. 3. Распределение магнитного поля по азимуту.

Действительно, ввиду малости R , для токового витка имеем

$$M\mathcal{J}_1 + L_2\mathcal{J}_2 = 0;$$

$$\frac{L_2\mathcal{J}_2^2}{2} = K^2 \frac{L_1\mathcal{J}_1^2}{2}.$$

Здесь M — коэффициент взаимной индукции; L_2 — коэффициент самоиндукции токового витка; $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ — коэффициент связи токового витка с первичной цепью.

На установке Ж-600 коэффициент связи составлял $K=0,2$. На описываемой здесь действующей установке коэффициент связи достигает значения $K=0,35$, т. е. при той же самой энергии, вкладываемой в первичную цепь, энергия, запасаемая вторичной цепью, будет примерно в три раза больше.

Коэффициент передачи напряжения от первичной обмотки к устойчивому витку для данной установки составляет $K_{\text{тр}}=0,75$. Индуктивность первичной обмотки составляет $L_1=0,15$ мкгн. Индуктивность ранее применявшихся обмоток составляла примерно 5—7 мкгн.

Условия равновесия и устойчивости, выведенные в работе [1], были основаны на том, что мы заранее имеем устойчивую орбиту, на которую помещаем гибкий проводник. В этом случае на проводник не будут действовать силы, выводящие его за пределы устойчивой орбиты.

В действительных условиях при зажигании кольцевого газового разряда в камере при наличии равновесной устойчивой орбиты картина осложняется. Это объясняется тем, что в начальной стадии развития разряда в камере ток протекает не в виде тонкого шнура, а занимает большую область разрядного сосуда.

Далее этот ток под действием собственных магнитных полей начинает сужаться и превращается в шнур, расположенный в средней плоскости камеры.

Во всем объеме камеры, где зарождается вторичный ток, внешнее магнитное поле должно быть фокусирующим, т. е. способствовать собиранию тока в средней плоскости. Для этого необходимо, чтобы поле спадало с увеличением радиуса ($-\frac{\partial H_z}{\partial R} < 0$) не только в средней плоскости, но и у боковых стенок вакуумной камеры, иначе токи, возникающие вблизи боковых стенок камеры, не будут собираться в средней плоскости, а останутся у стенки, искажая тем самым поля в средней плоскости. Таким образом, в реальном случае при зажигании кольцевого газового разряда необходимо, чтобы у стенок вакуумной камеры отсутствовали дефокусирующие магнитные поля, препятствующие току собираться в средней плоскости.

На рис. 2 показаны кривые распределения магнитного поля в средней плоскости и у стенки вакуумной камеры, из которых видно, что $-\frac{\partial H_z}{\partial R} < 0$ во всем объеме камеры. На прежней установке Ж-600 у боковых стенок вакуумной камеры магнитное поле было дефокусирующим.

Наличие сплошных масс меди в описываемой конструкции может способствовать дополнительной фокусировке витка за счет токов Фуко.

§ 3. Описание установки и предварительные опыты

На рис. 4 представлены чертеж разрядной камеры и ее основные размеры. Для изучения распределения вторичного тока по объему камеры была предусмотрена возможность постановки измерительных поясов в различных местах камеры.

Схема установки, на которой производилось исследование газового разряда, показана на рис. 5. Она состоит из конденсаторной батареи, разрядного устройства с подводными фидерами и вакуумной камеры с магнитной системой. Конденсатор-

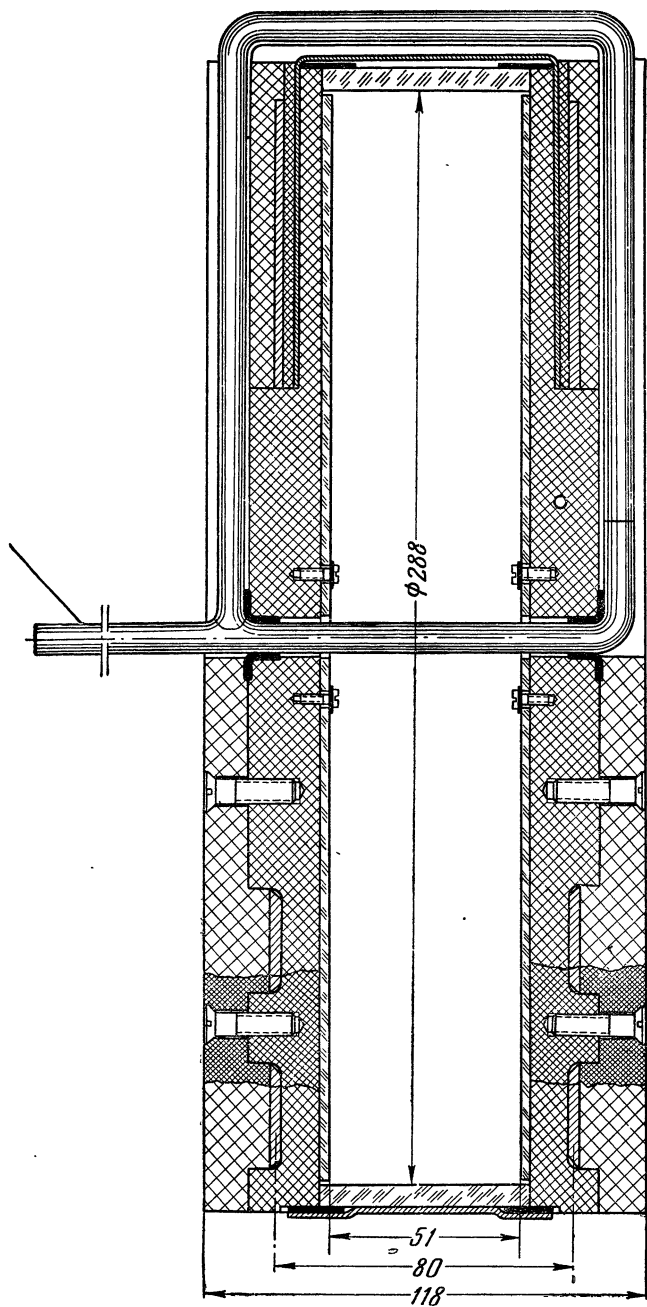


Рис. 4. Чертеж разрядной камеры.

ная батарея состояла из четырех конденсаторов, соединенных параллельно. Общая емкость батареи 12 мкф. Напряжение, до которого можно заряжать конденсаторную батарею, составляло 50 кв. Паразитная индуктивность вместе с разрядником составляла 0,15 мкгн. Индуктивность магнитной системы равна 0,15 мкгн.

На этой установке были сняты осциллограммы первичного и вторичного токов, а также проведено исследование распределения вторичного тока по объему вакуумной камеры. Для изучения этого распределения, помимо основного пояса, измерявшего полный газовый ток, были применены маленькие пояски

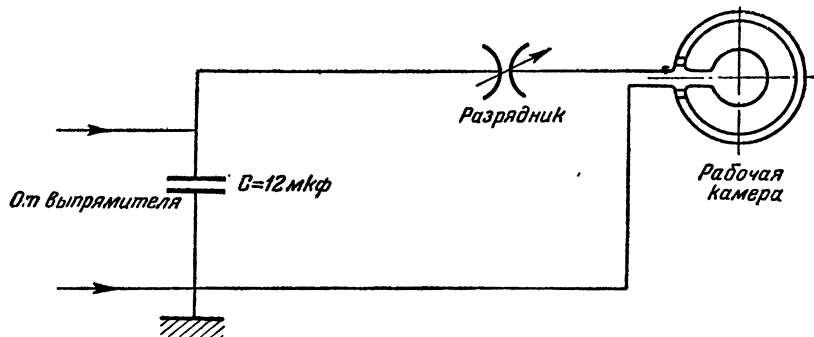


Рис. 5. Электрическая схема установки.

для измерения тока в данном месте камеры, например на устойчивой орбите, у стенки камеры и т. д.

Параметры поясов выбирались так, что непосредственно измерялись токи, а не их производные.

На рис. 6 представлены осциллограммы первичного тока, полного вторичного тока и токов, проходящих через пояс в положениях I и II. Для удобства отыскания тесковой орбиты этот пояс был устроен так, что он мог перемещаться из положения I в положение II поворотом вокруг оси (рис. 7).

Представленные на рис. 6 осциллограммы получены при давлении дейтерия внутри камеры 0,1 мм рт. ст. и при напряжении на конденсаторной батарее 16 кв. Частота процесса составляет $f=90$ кГц. Из осциллограмм а рис. 6 имеем следующее. Первичный ток составляет $\mathcal{I}_1=95$ ка, вторичный ток на первой четверти первого периода нарастает до $\mathcal{I}_2=17$ ка, затем он резко уменьшается и спадает до нуля. Этот срыв происходит в районе максимума первичного тока.

В качестве расчетного значения тока на орбите принято значение тока в медном витке, помещенном на орбиту. Этот ток равен 18 ка в конце первой четверти периода.

Если газовый ток формируется в виде витка, расположенного на устойчивой орбите, и если активное сопротивление витка значительно меньше индуктивного, то ток в плазменном витке должен быть примерно равным току в медном витке, если их размеры одинаковы. Мы видим, что полный плазменный ток в конце первой четверти первого периода составляет

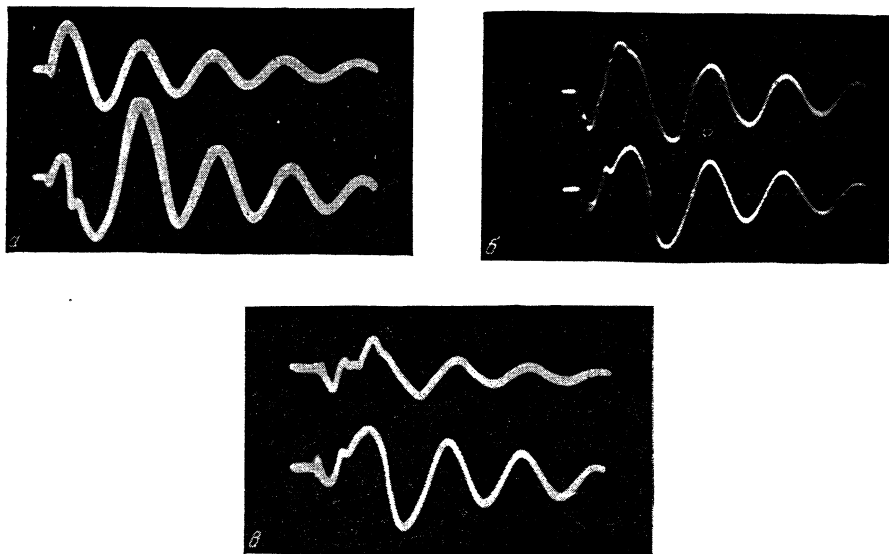


Рис. 6. Осциллограммы токов.

$\rho = 0,1$ мм рт. ст., $\Gamma_{\text{бат}} = 16$ кв. а: сверху — первичный ток \mathcal{J}_1 ; в 1 мм — 16 ка; внизу — полный вторичный ток \mathcal{J}_2 ; в 1 мм — 6,5 ка; б: сверху — ток через пояс в положении I i_2' ; в 1 мм — 1,6 ка; внизу — полный вторичный ток \mathcal{J}_2 ; в 1 мм — 7 ка; в: сверху — ток через пояс в положении II i_2'' ; в 1 мм — 3 ка; внизу — полный вторичный ток \mathcal{J}_2 ; в 1 мм — 8,5 ка.

17 ка, т. е. практически достигает расчетного значения. Это показывает, что плазменный ток течет не по всему объему камеры, а формируется в виде кольца, расположенного в зоне устойчивой орбиты, по крайней мере в течение первой четверти первого периода.

Из осциллограмм б и в, рис. 6 видно, что токи i_2' , i_2'' и \mathcal{J}_2 достигают максимального значения в конце первой четверти периода и равны, соответственно, $i_2' = 8$ ка, $i_2'' = 7,5$ ка, $\mathcal{J}_2 = 17$ ка. Сумма токов $i_2' + i_2'' = 8 + 7,5 = 15,5$ ка, т. е. через эти два пояса протекает почти полный ток, величина кэстрога равна 17 ка, что прямо доказывает, что в течение первой четверти периода

ток течет в виде кольца, а не по всему объему камеры. Здесь мы обозначили i_2' — ток через пояс в положении *I*, i_2'' — ток через пояс в положении *II*, \mathcal{J}_2 — полный газовый ток (см. рис. 7).

В районе максимума первичного тока происходит резкое уменьшение вторичного тока. Это соответствует срыву вторич-

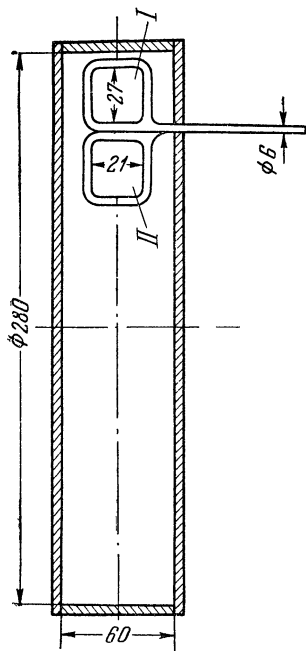


Рис. 7.

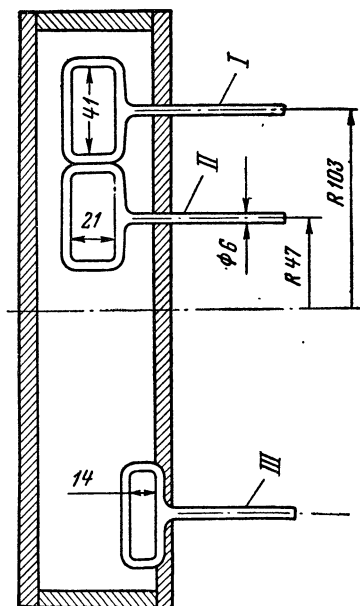


Рис. 8.

ного тока с устойчивой орбиты и стягиванию его в центральный ком.

Во втором и третьем полупериоде происходит значительное увеличение вторичного тока. Так, на третьем полупериоде ток достигает 55 ка. Это происходит вследствие того, что после срыва тока и сжатия его в ком происходит вновь зажигание вторичного тока, не формирующегося в шнур, а текущего по всему объему камеры.

§ 4. Экспериментальные результаты

Из осциллограмм, приведенных на рис. 6, видно, что примерно половина тока проходит через пояс в положении *I*, а другая через пояс в положении *II* (см. рис. 7), т. е. орбита,

по-видимому, расположена в промежуточном положении. В это промежуточное положение при окончательных измерениях был поставлен орбитальный пояс I (рис. 8).

Для того чтобы исследовать, что происходит с током после срыва с устойчивой орбиты, были поставлены измерительные пояски в других частях камеры. Один из них был поставлен ближе к центру — положение II, а другой около стенки — положение III (рис. 8). На рис. 9, 10, 11 представлены осциллограммы токов через эти пояски для различных давлений и напряжений. На рис. 9 представлены осциллограммы токов при давлении дейтерия 0,1 мм рт. ст. и напряжении на конденсаторной батарее $V_{\text{бат}}=16$ кв. При этом на обмотке напряжение составляет примерно $V_{\text{обм}}=8$ кв.

Для удобства анализа этих осциллограмм сведем основные данные в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Измеряемая величина, ка	Обозначение	Полупериоды		
		I	II	III
Первичный ток	\mathcal{I}_1	95	—	—
Полный вторичный ток	\mathcal{I}_2	17	43	60
Ток на орбите (пояс I)	i_2'	13	17	10
Ток через пояс II	i_2''	0	11	—
» » » III	i_2'''	0	5,3	—

Из этих осциллограмм и табл. 1 можно сделать следующие выводы. Первичный ток в конце первой четверти периода имеет значение 95 ка. Расчетное значение вторичного тока, т. е. тока в медном витке, находящемся на устойчивой орбите, составляет $\mathcal{I}_2 \text{ расч} = 18$ ка. Вторичный ток в конце первой четверти периода равен 17 ка, т. е. соответствует расчетному току. Если бы вторичный ток был меньше, чем его расчетное значение, то это говорило бы о том, что ток срывается с устойчивой орбиты раньше, чем первичный ток достигает своего максимального значения, т. е. срыв тока с устойчивой орбиты происходил бы при фазе, значительно меньшей, чем $\frac{\pi}{2}$. Из осциллограмм, рис. 9, б видно, что срыв тока с устойчивой орбиты происходит примерно в районе максимума первичного тока, т. е. фаза

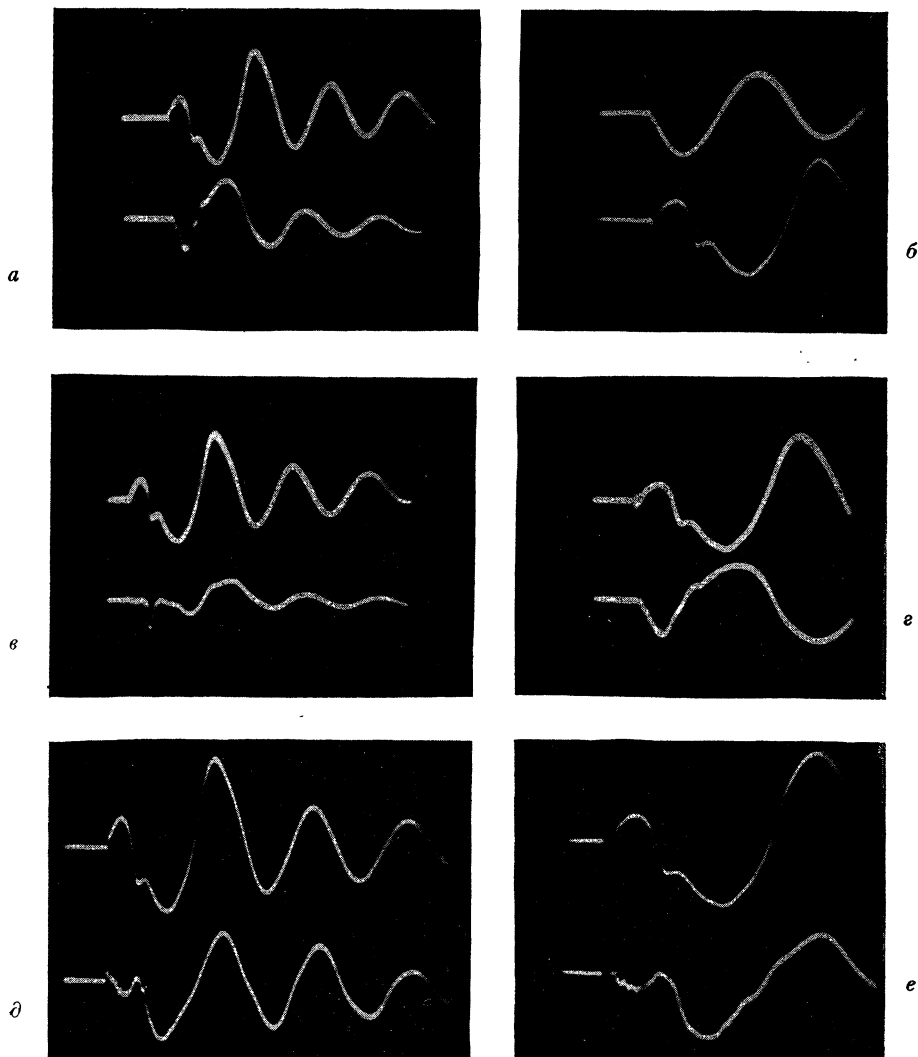


Рис. 9. Осциллограммы токов.

$d = 0,1$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 16$ кВ. а: вверху — полный вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 6,5 ка; внизу — ток на орбите i_2' ; в 1 мм — 3,4 ка; б: вверху — первичный ток \mathcal{I}_1 ; в 1 мм — 17 ка; внизу — полный вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 6 ка; в: вверху — полный вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 6,3 ка; внизу — ток через пояс II i_2'' ; в 1 мм — 3,1 ка; г: вверху — полный вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 7,5 ка; внизу — ток на орбите i_2' ; в 1 мм — 2,9 ка; д: вверху — полный вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 4,5 ка; внизу — ток у стенки (пояс III) i_2''' ; в 1 мм — 0,7 ка; е: вверху — полный вторичный ток; внизу — ток у стенки. (Осциллограммы а, в, д получены при одной развертке времени; б, г, е — при другой).

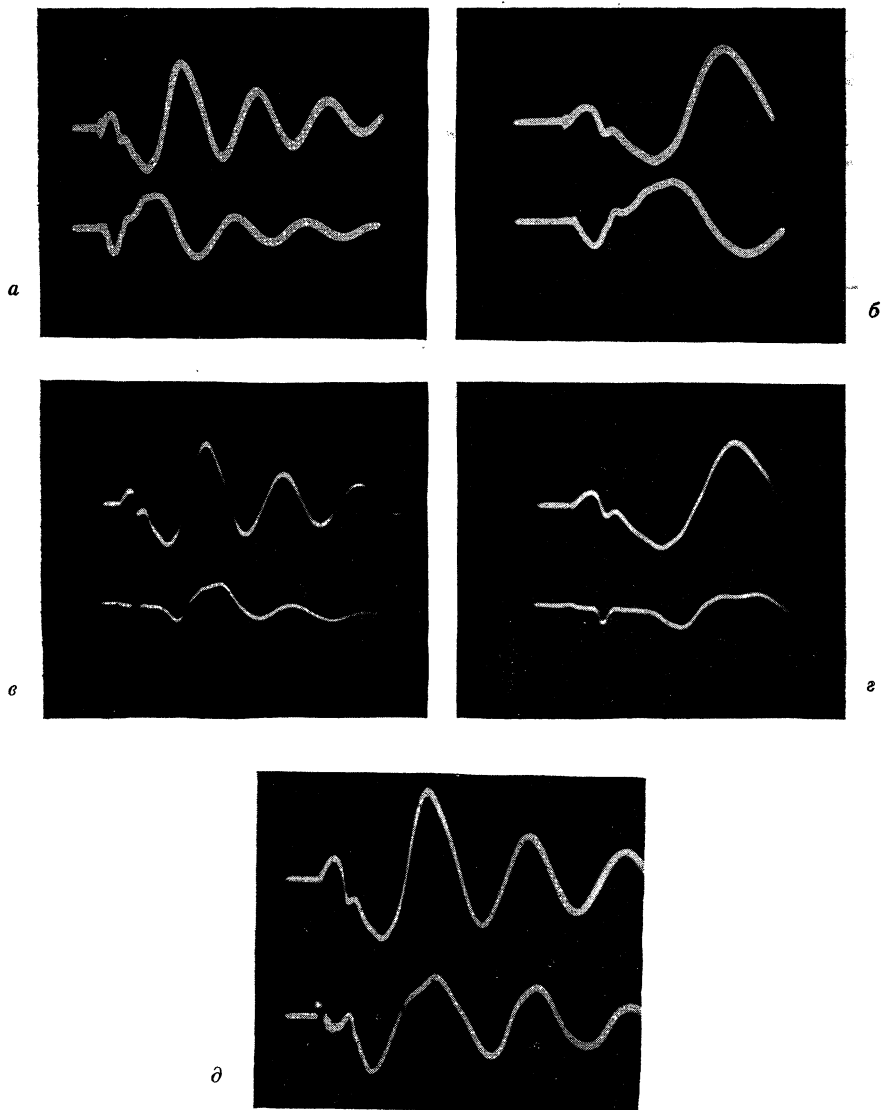


Рис. 10. Осциллограммы токов.

$p = 0,05$ мм рт. ст., $V_{\text{бат}} = 16$ кэ;

а: сверху — вторичный ток I_2 ; внизу — орбитальный ток;
б: сверху — вторичный ток I_2 ; внизу — орбитальный ток i_2' ;
в: сверху — вторичный ток I_2 ; внизу — ток через пояс II i_2'' ;
г: сверху — вторичный ток I_2 ; внизу — ток через пояс II i_2''' ;
д: сверху — вторичный ток I_2 ; внизу — ток у стенки (пояс III) i_2'''' . (Масштаб такой же, как на рис. 9).

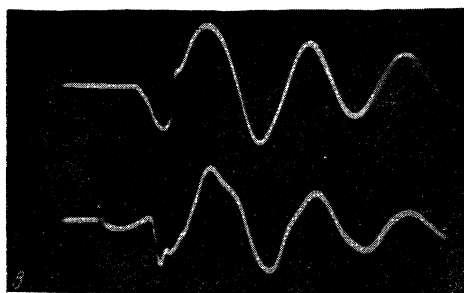
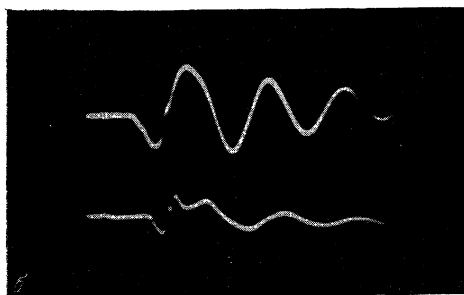
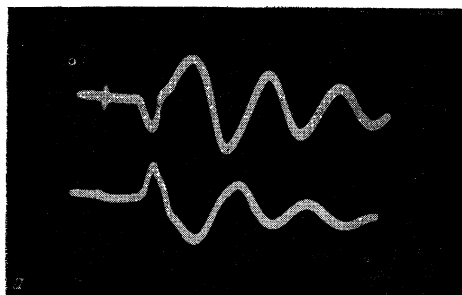


Рис. 11 Осциллограммы токов.

$p = 0,02$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 16$ кв.

а) сверху — вторичный ток $\mathcal{I}_2 = 26$ ка; внизу — ток на орбите $i_2' = 14$ ка; б) сверху — вторичный ток $\mathcal{I}_2 = 26$ ка; внизу — ток через пояс $i_2'' = 6,6$ ка; в) сверху — вторичный ток $\mathcal{I}_2 = 26$ ка; внизу — ток у стенки $i_2''' = 4$ ка. (Указанные величины относятся к первому максимальному значению на осциллограммах).

срыва близка к $\frac{\pi}{2}$. Как уже указывалось, это дает нам указание на то, что ток формируется в виде витка в районе устойчивой орбиты и находится там примерно в течение первой четверти периода.

Из осциллограмм орбитального пояса *I* следует, что максимальное значение тока через этот поясок достигает 13 ка, т. е. через этот пояс в первой четверти периода проходит 77% общего вторичного тока. Максимальное значение орбитального тока достигается в момент максимума полного вторичного тока.

Пристеночный поясок *III* показывает, что ток около стенки на первой четверти периода отсутствует. На осциллограмме «д» на первой четверти периода видна лишь наводка. Пристеночный ток появляется после срыва тока с устойчивой орбиты и после сжатия тока в ком (осциллограммы «д» и «е»). Таким образом, оказывается, что в первой четверти периода ток почти полностью оторван от стенок и висит в районе устойчивой орбиты. Для того, чтобы

проследить, что делается с током после срыва с орбиты, был поставлен поясок в положение *II*. Из осциллограмм *в* следует,

что ток через этот пояс появляется после срыва вторичного тока с орбиты, а именно в тот момент, когда ток пересекает этот пояс. После прохождения сжимающимся током этого пояса ток через пояс вновь отсутствует. Максимальное значение этого тока равно $i_2'' = 11$ ка.

Выше мы проследили поведение разряда в стадии его формирования на орбите и срыва с орбиты, т. е. в первой половине периода. Проследим теперь поведение разряда после сжатия шнура в ком, т. е. во втором и третьем полупериодах. Из осциллограмм следует, что во втором и третьем полупериодах газовый ток значительно больше расчетного: во втором полупериоде он составляет 43 ка, а в третьем достигает величины 60 ка. Это говорит о том, что после сжатия газового шнура в ком разряд занимает весь объем камеры, что происходит вследствие того, что во втором полупериоде во всем объеме камеры имеются ионизованные частицы. Осциллограммы пристеночного пояса также указывают, что во втором и последующих полупериодах ток занимает весь объем камеры.

При давлении дейтерия 0,05 мм рт. ст. характер осциллограмм остается таким же, как и при давлении 0,1. Эти осциллограммы показаны на рис. 10, а основные значения токов сведены в табл. 2.

Таблица 2

Измеряемая величина, ка	Обозначение	Полупериоды		
		I	II	III
Первичный ток	\mathcal{I}_1	95	—	—
Полный вторичный ток	\mathcal{I}_2	11,4	38	57
Ток на орбите (пояс I)	i_2'	10	14,5	8
Ток через пояс II	i_2''	0	7	—
» » » III	i_2'''	0	5	—

Несколько меньшая величина вторичного тока, равная 11,4 ка, получается, по-видимому, вследствие того, что формирующийся на орбите шнур имеет меньшее сечение, а поэтому и большую индуктивность. Кроме того, срыв вторичного тока происходит немного раньше, чем при давлении 0,1 мм рт. ст., но фаза срыва также близка к $\frac{\pi}{2}$. Из полного газового тока 11,4 ка на орбите теперь находится 10 ка, т. е. 88%. При давлении 0,1 мм рт. ст. ток на орбите составлял 77% от общего

газового тока. Это увеличение можно объяснить уменьшением поперечного сечения шнура, так как орбитальный пояс имеет размеры 20×40 мм, т. е. сравнимые с поперечным сечением шнура. Ток через пояс *II* равен 7 ка.

При давлении дейтерия 0,02 мм рт. ст. осциллограммы имеют совершенно иной характер. Из этих осциллограмм, представленных на рис. 11, видно прежде всего, что происходит запаздывание развития газового разряда. Разряд зажигается во втором полупериоде. Величина полного газового тока во втором полупериоде достигает 26 ка, т. е. значительно больше расчетной величины. Это означает, что при давлении дейтерия 0,02 мм рт. ст. не весь ток формируется в шнур, оторванный от стенок. Из 26 ка полного газового тока на орбите находится только 14 ка, т. е. 54%. Прежде чем вторичный ток достигает максимального значения, равного 26 ка, появляется ток у стенки (см. рис. 11 в). Величина этого тока у одной стенки в момент, когда вторичный ток достигает максимума, равна 4 ка (на первой четверти периода на осциллограмме 11, в видна наводка). Почти одновременно с появлением тока у стенки появляется ток через пояс *II* (см. рис. 11, б). Этот пояс регистрирует ток 6,6 ка.

Для того чтобы исследовать, что происходит со вторичным током при увеличении первичного тока (при неизменной частоте), напряжение на конденсаторной батарее было увеличено до 30 кв, т. е. примерно в два раза. Первичный ток при этом возрос в два раза и стал равен 190 ка. Полный вторичный ток, как и следовало ожидать, также возрос примерно в два раза и стал равным 32 ка. При этом ток на орбите составлял 19,3 ка, т. е. 60% общего тока (рис. 12, а). Из другой осциллограммы полный вторичный ток равен 38 ка, и ток, измеряемый поясом *II*, равен 18 ка (рис. 12, б). Таким образом при увеличении напряжения доля тока, приходящегося на орбитальный пояс, несколько уменьшилась. Это происходит, по-видимому, потому, что увеличивается поперечное сечение токового витка. Не исключена также возможность некоторого смещения устойчивой орбиты относительно прежнего положения. В остальном поведение разряда при увеличении напряжения в два раза практически не изменилось. Ток у стенки на первой четверти периода по-прежнему отсутствует (рис. 12, в).

Представляет интерес проследить, что будет происходить со вторичным током при дальнейшем увеличении первичного тока. Однако на данной установке (4 конденсатора) нельзя больше увеличивать ток, так как ток через каждый конденсатор не должен превышать 50 ка. Поэтому камера была перенесена на установку, состоящую из 12 конденсаторов.

На рис. 13, а, б, в представлены осциллограммы первичного и полного вторичного токов при давлении дейтерия в камере 0,1; 0,05 и 0,02 мм рт. ст. и напряжении на конденсаторной батарее $V_{\text{бат}} = 26$ кв. При этом напряжение на обмотке составляет $V_{\text{обм}} = 12$ кв. Рассмотрим осциллограммы тока для давления 0,1 мм рт. ст. Частота процесса $f = 56$ кГц. Первичный

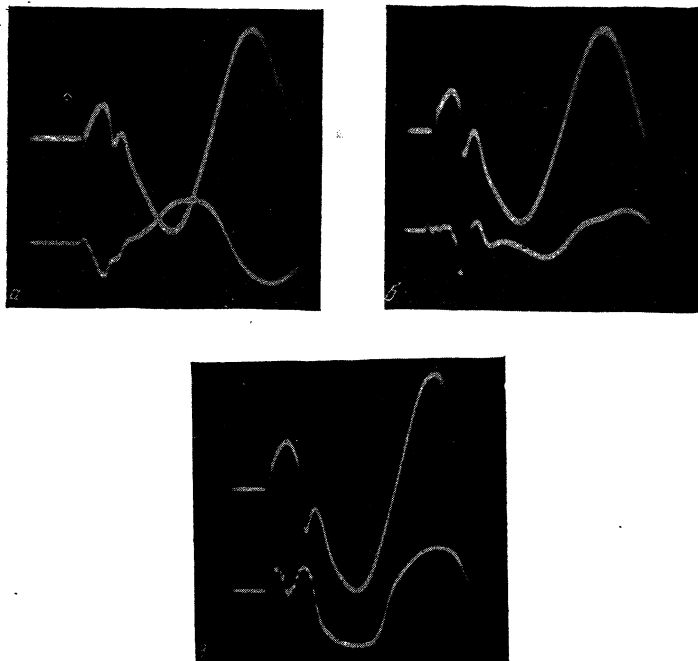


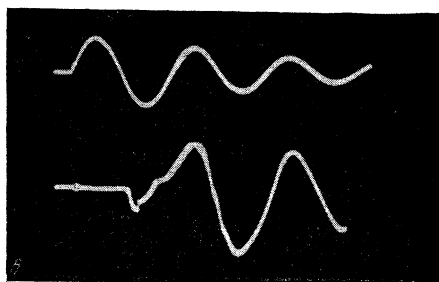
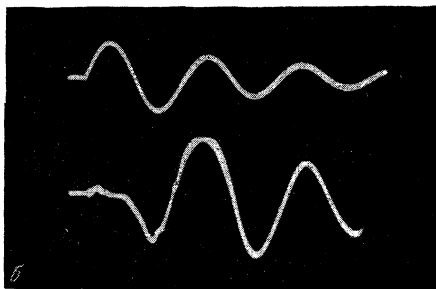
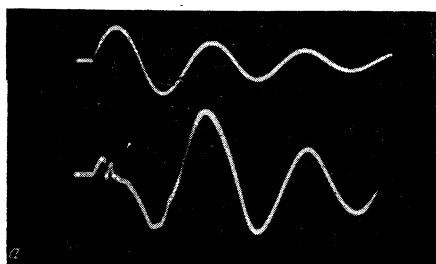
Рис. 12. Осциллограммы тока.

$p = 0,1$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 30$ кв.

а. вверху — вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 7,1 ка; внизу — ток на орбите i_2' ; в 1 мм — 4,5 ка; б: вверху — вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 7,5 ка; внизу — ток через пояс II i_2'' ; в 1 мм — 3,3 ка; в: вверху — вторичный ток \mathcal{I}_2 ; в 1 мм — 5,4 ка; внизу — ток у стенки i_2''' ; в 1 мм — 1 ка.

ток имеет значение 250 ка; соответствующее ему расчетное значение вторичного тока равно $\mathcal{I}_2 \text{ расч} = 48$ ка. Однако величина вторичного тока в первой четверти периода не превышала 31 ка. Это происходит вследствие того, что срыв вторичного тока происходит раньше, чем первичный ток достигает своего максимального значения. Фаза срыва теперь равна 45° . Это объясняется уменьшением частоты процесса, что приводит к росту влияния активного сопротивления.

На этой установке было обнаружено рентгеновское излучение, при исследовании которого все измерительные пояса, находящиеся в вакуумном объеме, были изъяты. Интенсивное рентгеновское излучение возникало в разряде при сравнительно низких давлениях.



На рис. 14, а, б представлены осциллограммы рентгеновского излучения при давлении дейтерия 0,015 мм рт. ст. и при непрерывной откачке. При давлении дейтерия 0,1 мм рт. ст. рентгеновское излучение также наблюдалось, но интенсивность его была значительно меньше.

На рис. 14, в представлены осциллограммы рентгеновского излучения при давлении дейтерия 0,1 мм рт. ст. и напряжении на конденсаторной батарее 40 кВ. При этом, как уже отмечалось, напряжение на обмотке составляло 20 кВ. Сравнивая осциллограммы рентгеновского излучения с осциллограммами вторичного тока, видим, что при давлении 0,1 мм рт. ст. рентгеновское излучение возникает в момент срыва вторичного тока с устойчивой орбиты.

Рис. 13. Осциллограммы первичного и полного вторичного токов.

а: $p = 0,1$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 26$ кВ;

б. $p = 0,05$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 26$ кВ; в: $p = 0,02$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 26$ кВ.

(Для верхних лучей в 1 мм 58 ка, для нижних — в 1 мм 15 ка).

§ 5. Обсуждение экспериментальных результатов

Результаты экспериментов, изложенные в предыдущем параграфе, дают основание считать, что основные теоретические представления, изложенные в работе [1], подтверждаются.

Действительно, если форма поля выбрана так, что условия равновесия и устойчивости выполняются, то при определенных условиях можно получить оторванный от стенок плазменный ток, сконцентрированный в районе устойчивой орбиты. Время существования этого тока достигает четверти периода. При достижении первичным током максимального значения вторичный ток срывается с орбиты. После срыва этот ток сжимается

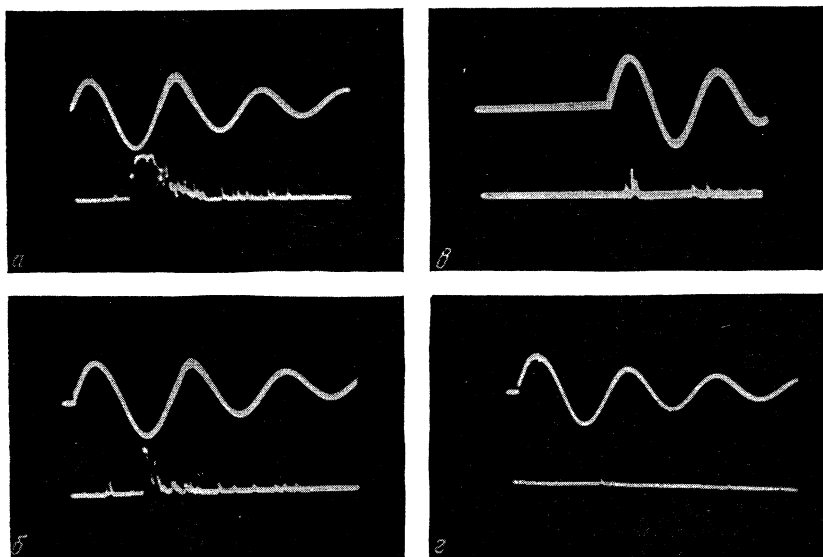


Рис. 14. Осциллограммы рентгеновского излучения.

а проток $V_{\text{бат}} = 32 \text{ кэ}$; $V_{\text{обм}} = 16 \text{ кэ}$; б: $p = 0,015 \text{ мм рт. ст.}$, $V_{\text{бат}} = 32 \text{ кэ}$; $V_{\text{обм}} = 16 \text{ кэ}$; в: $p = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$; $V_{\text{бат}} = 40 \text{ кэ}$; $V_{\text{обм}} = 20 \text{ кэ}$; г: $p = 1 \text{ мм рт. ст.}$ — излучение отсутствует.

в центральный ком, как единое целое. Сжатие шнура в ком происходит значительно быстрее изменения первичного тока, так что за время сжатия вторичного тока в ком первичный ток меняется мало.

После срыва вторичного тока с орбиты магнитная энергия этого тока переходит в кинетическую энергию движения заряженных частиц. В идеальном случае вся магнитная энергия, запасенная вторичным током на устойчивой орбите, должна перейти в кинетическую энергию заряженных частиц. Величина этой энергии, при условии, если срыв тока произошел

в конце первой четверти периода, определяется квадратом коэффициента связи

$$E_{\kappa} = N \frac{mv^2}{2} = \frac{cV^2}{2} K^2.$$

Здесь N — число частиц внутри токового шнура; E_{κ} — энергия всех частиц в коме; v — скорость движения токового шнура к моменту сжатия в ком; V — напряжение на конденсаторах.

Благодаря тому, что все частицы движутся к центру, плотность заряженных частиц в центре существенно превышает плотность на орбите. Собранные в ком частицы взаимодействуют между собой. Интенсивность взаимодействия частиц в коме определяется энергией частиц, размерами кома и длительностью его существования.

Отметим, что энергия частиц, движущихся к центру, может быть значительно больше температуры частиц на орбите, т. е. сообщение энергии частицам происходит не на орбите, а при движении их к центру.

Если условия равновесия и устойчивости не выполнены, то картина поведения разряда должна быть совершенно иной. Действительно, при форме поля, сильно отличавшейся от расчетной, газового витка, оторванного от стенок, обнаружено не было. Как будут сказываться на положение равновесной орбиты небольшие изменения формы внешнего магнитного поля, пока не ясно. Возможно, что существует механизм автоустойчивости, благодаря которому при небольших изменениях формы внешнего магнитного поля вторичный ток сам находит себе орбиту, на которой он находится значительное время. Этот вопрос в настоящее время не исследован и требует подробного изучения.

По осциллограмме токов можно произвести грубую оценку скорости сжатия токового шнура к центру, а следовательно, и кинетическую энергию движения дейтронов. При давлении в камере 0,1 мм рт. ст. и напряжении на конденсаторной батарее 16 кВ средняя кинетическая энергия движения дейтронов к центру составляет 65 эВ. Максимальная энергия дейтронов при этом имеет гораздо большее значение.

Для изучения разряда при значительно больших энергиях, вкладываемых в первичную цепь, описываемая здесь камера $D=300$ мм непригодна вследствие ее малой механической прочности и малого объема. Поэтому в настоящее время создается более прочная камера диаметром 600 мм, предназначенная для изучения поведения разряда при больших токах.

В заключение выражаю благодарность С. М. Осовцу за обсуждение результатов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- С. М. Осовец, см. настоящий том, стр. 238.
С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров, Н. И. Щедрин, см. настоящий том, стр. 242.

С. Т. Беляев, Г. И. Будкер

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПЛАЗМА В ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯХ *

§ 1. Введение

В работе рассматривается поведение релятивистского газа заряженных частиц, находящегося в сильном, постоянном во времени и, вообще говоря, неоднородном магнитном и электрическом поле и возмущаемого переменным электромагнитным полем, частота которого много больше частоты столкновений, так что последними можно пренебречь.

Постановка задачи следующая: известна функция распределения частиц в заданном постоянном во времени электрическом и магнитном поле. Требуется найти ее возмущение переменными во времени электрическими и магнитными полями, а также возмущение плотности и тока.

Такая задача в общем виде не решается, даже если возмущающие поля малы, ибо для решения требуется, по крайней мере, найти в явном виде решения уравнений движения частицы в невозмущенных полях, что может быть сделано только в некоторых весьма частных случаях (свободный газ, газ в постоянном магнитном поле). Решение, однако, удастся получить разложением по прямым или обратным степеням отношения частоты возмущающих полей к собственным частотам частиц в невозмущенных полях. В соответствии с этим ниже рассматриваются два приближения:

1) адиабатическое приближение, когда время изменения полей много больше периода невозмущенного движения частиц;

2) баллистическое приближение, когда осуществляется обратное соотношение, т. е. период невозмущенного движения много больше периода изменения полей.

* Работа выполнена в 1953 г.

Во втором параграфе рассматривается возмущение газа в адиабатическом приближении, когда основные и возмущающие поля зависят только от цилиндрического радиуса r , а невозмущенное распределение является функцией интегралов движения частиц в основных полях. Полученные поправки к плотности и току, как и следовало ожидать, интегрально выражаются через невозмущенную функцию распределения.

В третьем параграфе рассматривается возмущение газа полем, зависящим от координаты z . Так как всякое поле, зависящее от z , можно разложить в ряд по плоским волнам, достаточно рассмотреть возмущение полем бегущей волны. Задачу о возмущении газа полем бегущей вдоль оси z волны при произвольной зависимости этого поля от r можно свести к предыдущей, если перейти в систему координат, где поле этой волны не зависит от z . Так как этот переход представляет собой формальный математический прием, то при соблюдении некоторых условий его можно производить даже тогда, когда скорость системы координат, в которую надо переходить, больше скорости света. Последнее будет осуществляться, если фазовая скорость волны меньше скорости света.

В четвертом параграфе рассматривается баллистическое приближение. Поправки к плотности и току получаются как функции невозмущенных значений плотности и тока.

Баллистическое и адиабатическое приближения не всегда являются взаимно исключаящими. При наличии сильного магнитного поля существует область, где они перекрываются.

Во втором и четвертом параграфах рассматривается в виде примера случай сильного магнитного поля. Несмотря на то, что исходные выражения совершенно различны, поправки к плотности и току в этом случае в самом деле совпадают.

Нетрудно показать, что самосогласованные колебания пучка релятивистских электронов с компенсированным зарядом в наиболее интересной области частот являются адиабатическими по отношению к электронам и баллистическими — по отношению к ионам. Благодаря этому, на основе результатов предыдущих параграфов, в пятом параграфе составляются уравнения для самосогласованных колебаний стабилизированного электронного пучка. Они представляют собой систему обыкновенных интегродифференциальных уравнений и заменяют первоначальную систему интегродифференциальных уравнений в семи частных производных. Такое упрощение дает возможность в общем случае применить, по крайней мере, численный метод решения.

В одном частном случае при определенной невозмущенной функции распределения электронов и ионов удается найти

аналитическое решение задачи. Этому посвящен шестой параграф.

В последнем параграфе исследуется устойчивость полученного решения. При некоторых значениях параметров дисперсионное уравнение совпадает с найденным ранее [1].

§ 2. Адиабатическое приближение

В общем случае функция распределения электронов зависит от шести переменных (трех импульсов и трех координат). Как будет показано [2], при редких столкновениях равновесная функция распределения зависит только от трех первых интегралов движения.

Если поля меняются во времени, то, вообще говоря, распределение не остается функцией трех интегралов движения. Однако, если изменение полей происходит адиабатически (т. е. медленно по сравнению с периодом колебаний частиц), то распределение все время остается функцией только трех первых интегралов движения, при котором гамильтониан в каждый момент времени считается постоянным, а со временем меняется лишь вид этой функции. Действительно, в начальный момент времени распределение можно было выразить как функцию переменных действия I_1, I_2, I_3 , которые, как известно, также являются тремя интегралами движения, но, в отличие от других интегралов движения, остаются постоянными при адиабатическом изменении гамильтониана.

Как функция переменных действия распределение вообще не меняется, а как функция других интегралов движения в произвольный момент времени выражается в виде

$$f(p_k, t) = f_0 [p_i^0(p_k, t)], \quad (2.1)$$

где $f_0(p_i)$ — начальная функция распределения, а $p_i^0(p_k, t)$ представляет собой начальное значение импульса, выраженное через конечные значения импульсов и изменяющиеся со временем параметры, определяемые соотношением

$$I_i(p_k^0, t_0) = I_i(p_k, t), \quad (2.2)$$

где $I(p_k, t)$ — переменная действия, выраженная как функция импульсов.

Рассмотрим случай цилиндрической симметрии, когда как основные, так и возмущающие поля зависят только от цилиндрического радиуса r . Невозмущенную функцию распределения зададим в пространстве ε, p_φ и p_z , где ε — полная энер-

гия частицы; p_φ — момент; p_z — обобщенный импульс по оси z .

Так как p_φ и p_z остаются постоянными в этих полях, то кинетическое уравнение для f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = 0. \quad (2.3)$$

Переменная действия I в этом случае равна

$$I = 2 \int_{r_1}^{r_2} p_r(\varepsilon_1, p_\varphi, p_z, r) dr = \text{const}, \quad (2.4)$$

где

$$p_r = \text{ctg} u_r = \sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon - eU)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2 - m^2 c^2}. \quad (2.5)$$

Из уравнения $\frac{dI}{dt} = 0$ находим явное выражение для

$$\varepsilon = \frac{2}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{e}{c^2}(\varepsilon - eU) \dot{U} + \frac{e}{c} \left(p_z - \frac{e}{c} A\right) \dot{A}}{p_r(\varepsilon, p_\varphi, p_z, r)} dr, \quad (2.6)$$

где $T = \frac{\partial I}{\partial \varepsilon}$ — период колебаний.

Для малых колебаний положим

$$\begin{aligned} U &= U_0 + u(r) e^{i\lambda t}; & A &= A_0 + a(r) e^{i\lambda t}; \\ f(\varepsilon, p_\varphi, p_z, r) &= f(\varepsilon, p_\varphi, p_z) + f_1(\varepsilon, p_\varphi, p_z, r) e^{i\lambda t}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для поправки к функции распределения f_1 получим из (2.5) и (2.6)

$$\begin{aligned} & f_1(\varepsilon, p_\varphi, p_z, r) = \\ & = - \frac{2}{T} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\frac{e}{c^2}(\varepsilon - eU_0)u + \frac{e}{c} \left(p_z - \frac{e}{c} A_0\right)a}{\sqrt{\frac{1}{c^2}(\varepsilon - eU_0)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A\right)^2 - m^2 c^2}} dr. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Плотность и продольный ток находим из соотношения

$$\begin{aligned} rn(r) &= mc \int \frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} f d\varepsilon dp_\varphi dp_z; \\ rj_z(r) &= -mc \int \frac{\partial u_r}{\partial p_z} f d\varepsilon dp_\varphi dp_z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интегрируя (2.9) по частям и замечая, что произведение $u_r f$ на пределах обращается в нуль, получим

$$\begin{aligned} rn(r) &= -mc \int u_r \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} d\varepsilon dp_\varphi dp_z; \\ rj_z(r) &= mc \int u_r \frac{\partial f}{\partial p_z} d\varepsilon dp_\varphi dp_z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подынтегральное выражение в (2.10), в отличие от (2.9), обращается в нуль на пределах. Это дает возможность при разложении n и j_z по возмущающим потенциалам не обращать внимания на пределы, хотя последние и зависят от потенциалов.

Поправки первого порядка к n и j_z равны

$$\begin{aligned} rn^{(1)}(r) &= -mc \int u_r^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon} d\varepsilon dp_\varphi dp_z + \\ &+ mc \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varepsilon} eu + \frac{e}{c} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial p_z} a \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z; \\ rj_z^{(1)}(r) &= mc \int u_r^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial p_z} d\varepsilon dp_\varphi dp_z - \\ &- mc \int \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \left\{ \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} eu + \frac{e}{c} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial p_z} a \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z \end{aligned}$$

Первые члены интегрируем по частям и подставляем значение f_1 из (2.8); в результате найдем

$$\begin{aligned} rn^{(1)}(r) &= mc \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} \left\{ e(u - \beta a) - \right. \\ &\left. - \frac{2mc}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r'^{(0)}}{\partial \varepsilon} e(u' - \beta' a') dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z; \end{aligned} \quad (2.11a)$$

$$r j_z^{(1)}(r) = -mc \int \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} e(u - \beta a) - \right. \\ \left. - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial p_z} \frac{2mc}{T} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial \varepsilon} e(u' - \beta' a') dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z, \quad (2.116)$$

где введено обозначение для скорости v_z в единицах c

$$\beta(\varepsilon, p_z, r) = \frac{p_z - \frac{e}{c} A_0}{\frac{1}{c}(\varepsilon - eU_0(r))}. \quad (2.12)$$

Выражения (2.11) решают вопрос об изменении плотности и продольного тока электронов при возмущении внешних полей.

Что касается радиального тока, то он в этом приближении равен нулю. Его, однако, можно найти из уравнения непрерывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r^{(1)}) = -i \lambda n^{(1)}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим для иллюстрации частный случай сильного магнитного поля, когда выражения (2.11) особенно упрощаются и допускают простое наглядное толкование.

Под сильным магнитным полем понимаем случай, когда ларморовский радиус мал по сравнению с расстоянием до оси или

$$\frac{\omega}{\Omega} \ll 1, \quad \text{где } \omega = \frac{v}{r}; \quad \Omega = \frac{eH}{mc}.$$

Разлагая в ряд по малым величинам, получим в этом случае, после весьма громоздких выкладок, следующие выражения для плотности и тока:

$$n^{(1)}(r) = -\frac{i}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(c \frac{E_z^{(1)}}{H^{(0)}} r n^{(0)} \right); \\ j_r^{(1)}(r) = -c \frac{E_z^{(1)}}{H^{(0)}} n^{(0)}; \quad (2.14) \\ j_z^{(1)}(r) = c \frac{E_r^{(0)}}{H^{(0)}} n^{(1)} + c \frac{E_r^{(1)}}{H^{(0)}} n^{(0)} - c \frac{E_r^{(0)} H^{(1)}}{H^{(0)2}} n^{(0)},$$

где $E^{(1)}$; $H^{(1)}$ — возмущающие поля; $E^{(0)}$; $H^{(0)}$ — невозмущенные поля.

Выражения для потока имеют вполне наглядный смысл. Они выражают тот факт, что при медленном изменении полей в сильном магнитном поле токи все время имеют дрейфовую природу, т. е. все время выполняется соотношение

$$\mathbf{j} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2} n. \quad (2.15)$$

§ 3. Электронный газ в поле бегущей волны

Рассмотрим ту же задачу, но в полях, зависящих также и от координаты z . Достаточно будет рассмотреть поле, зависящее от z , по закону $e^{i(\omega t - kz)}$, ибо при всякой другой зависимости поле можно разложить по z в ряд Фурье.

Задачу можно свести к предыдущей, если перейти в систему координат, движущуюся вдоль оси z со скоростью

$$v_0 = \frac{c^2 k}{\omega}. \quad (3.1)$$

Действительно, как нетрудно видеть, согласно преобразованиям Лоренца,

$$\omega t - kz = \omega' t', \quad (3.2)$$

где

$$\omega'^2 = \omega^2 - k^2 c^2, \quad (3.3)$$

т. е. в этой системе координат поля зависят только от времени.

В основу вычислений, проведенных в предыдущем параграфе, положено два предположения:

1) функция распределения зависит от импульсов и координат только через интегралы движения (ε , p_z , p_φ);

2) частота возмущающего поля много меньше собственных частот колебаний частиц в невозмущенном поле.

Нетрудно видеть, что первое условие выполняется в новой системе координат, коль скоро оно будет выполнено в лабораторной системе координат. Это следует из того, что, с одной стороны, функция распределения инвариантна [3], а с другой стороны, ε , p_φ и p_z при таком преобразовании Лоренца выражаются друг через друга.

Посмотрим теперь, какой вид будет иметь второе условие. Сделаем предварительно несколько замечаний. Как легко видеть, выражение (2.5) для u_r есть инвариант относительно

рассматриваемых преобразований. Инвариантный характер носит также операция интегрирования по r между корнями выражения (2.5). Поэтому, если $\chi_{ikl\dots}(r)$ есть тензор некоторого ранга, то выражение

$$2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\chi_{ikl\dots}}{u_r} dr$$

есть также тензор того же ранга*. В частности,

$$T_i = \frac{2}{mc^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{p_i - \frac{e}{c} A_i}{u_r} dr \quad (3.4)$$

является 4-вектором. Четвертая компонента этого вектора с точностью до i равна периоду T_0 ($T_v = iT_0$).

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующую операцию:

$$\langle \tau_i, \chi \rangle = \frac{2}{mc^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{p_i - \frac{e}{c} A_i}{u_r} \chi dr. \quad (3.5)$$

В частности, $\langle \tau_i \rangle = T_i$. Легко видеть также, учитывая (2.5) и (2.12), что

$$2mc \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} (\varphi - \beta a) dr = -\langle \tau_i; a_i \rangle, \quad (3.6)$$

где

$$a_i = (a_z; 0; 0; i\varphi).$$

Теперь легко можно записать второе условие. В системе координат, где возмущающее поле не зависит от z , условие применимости означает

$$\omega \tau_0 \ll 1.$$

Вводя 4-вектор $k_i = \left(k_i, k_2, k_3, i \frac{\omega}{c} \right)$ и учитывая, что в этой системе пространственные компоненты k_i равны нулю, можно

* Вообще говоря, сумма зависящих от времени и относящихся к разным точкам пространства тензоров, определенная в каждой системе как сумма их значений в один и тот же момент времени, не есть тензор, ибо в разных системах координат суммируются разные тензоры. В нашем случае операция инвариантна.

записать условие применимости в релятивистски инвариантном виде

$$ck_i T_i \ll 1. \quad (3.7)$$

Выражения (2.11) легко теперь записать с помощью векторов k_i и T_i в следующем виде:

$$j_i^{(1)} = \frac{e}{imc} \int \frac{d^3p}{u_r} \left\{ \left(p_k - \frac{e}{c} A_k \right) a_k \frac{\partial f_0}{\partial p_i} - \frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \langle \tau_e a_e \rangle}{k_m T_m} k_k \frac{\partial f_0}{\partial p_k} \right\} \quad (3.8)$$

(интегрирование по $d^3p = dp_1 dp_2 dp_3 = dp_x \frac{1}{r} dp_\varphi \frac{i}{c} d\varepsilon$). Последнее выражение можно несколько упростить. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{m^2 c^2} \frac{p_k - \frac{e}{c} A_k}{u_r} = - \frac{\partial u_r}{\partial p_k},$$

поэтому (3.8) можно переписать в виде

$$j_i^{(1)} = iemc \int d^3p \left\{ a_k \frac{\partial u_r}{\partial p_k} \frac{\partial f_0}{\partial p_i} - \frac{\langle \tau_e a_e \rangle}{k_m T_m} k_k \frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial f_0}{\partial p_k} \right\}.$$

Интегрируя дважды по частям первый член, получим

$$j_i^{(1)} = iemc \int d^3p \frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial f_0}{\partial p_k} \left(a_k - \frac{\langle \tau_e a_e \rangle}{T_m k_m} k_k \right). \quad (3.9)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, радиальная компонента тока в этом приближении равна нулю. Заметим, что (3.9) дает правильное выражение и для радиальной компоненты, если считать, что u_r не зависит от $p_2 = p_3$, как это формально следует из (2.5).

Вместо функции f можно ввести скалярную функцию распределения F [3].

Чтобы произвести такую замену, необходимо заменить f на F в выражении вида

$$\int \chi \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3p.$$

Проинтегрируем по частям и перейдем затем от трехмерного интеграла к четырехмерному, добавляя интегрирование по p_r

$$\int \chi \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3 p = - \int f \frac{\partial \chi}{\partial p_i} d^3 p = \\ = -mc \int f u_r \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \delta \left(\sqrt{-\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2 + mc^2} \right) d^4 p.$$

Используя [3], обратно интегрируя по частям, получим следующее правило перехода от функции f к F :

$$\int \chi \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3 p = \frac{1}{ic} \int \chi \frac{\partial}{\partial p_i} (u_r F) d^4 p. \quad (3.10)$$

С учетом (3.10) можно записать добавки в 4-току в виде

$$j_i^{(1)} = em \int d^4 p \frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial (u_r F)}{\partial p_k} \left(a_k - \frac{\langle \tau_e a_e \rangle}{k_m T_m} k_k \right). \quad (3.11)$$

Так как u_r есть инвариант относительно рассматриваемых преобразований и интегрирование ведется по инвариантному 4-мерному объему импульсов, то (3.11) представляет собой тензорное уравнение и, следовательно, справедливо в любой системе координат. С другой стороны, (3.9) в любой системе координат эквивалентно (3.11), поэтому выражение (3.9) в любой системе координат дает поправки к плотности и току.

В раскрытом виде эти поправки имеют следующий вид:

$$n^{(1)} = \frac{em}{r} \int \frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} cu + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} a - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \omega + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} k \right) \frac{2mc}{\frac{\omega}{c} T_0 - kT} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u'_r}{\partial \varepsilon} (u' - \beta' a') dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z; \\ j_z^{(1)} = - \frac{em}{r} \int \frac{\partial u_r}{\partial p_z} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} cu + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} a - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \omega + \frac{\partial f_0}{\partial p_z} k \right) \frac{2mc}{\frac{\omega}{c} T_0 - kT_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u'_r}{\partial \varepsilon} (u' - \beta' a') dr' \right\} d\varepsilon dp_\varphi dp_z, \quad (3.12)$$

где

$$T_1 = \frac{2}{mc^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{p_z - \frac{e}{c} A}{u_r} dr; \quad T_0 = \frac{2}{mc^3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon - eU}{u_r} dr. \quad (3.13)$$

При выводе (3.12) мы переходили в систему координат, движущуюся со скоростью $v_0 = \frac{c^2 k}{\omega}$, которая больше скорости света, если фазовая скорость волны $\frac{\omega}{k}$ меньше скорости света. Однако очевидно, что выражения (3.12) справедливы и в этом случае, ибо ни сами эти выражения, ни условия их применимости не содержат особенности при таких длинах волн, когда фазовая скорость становится равной c . С другой стороны, совершенно ясно, что такая длина волны не является также физически выделенной при рассмотрении движения электронов. В отличие от (2.11), формулы (3.12) имеют интегрируемую особенность при $\frac{T_0}{T_1} = \frac{kc}{\omega}$. Эта особенность, однако, соответствует физике рассматриваемого явления. При этом условии наступает резонанс между волной и соответствующими частицами ($\frac{cT_1}{T_0} = \bar{v}_z$). Если в распределении имеются такие частицы, то интеграл надо брать в определенном смысле, аналогично тому, как это делается в работе Ландау [4].

§ 4. Баллистическое приближение

В баллистическом приближении, естественно, не имеет смысла рассматривать функцию распределения в пространстве интегралов движения, ибо в данном случае влияние переменных полей на каждую частицу зависит от локальных характеристик частицы (координата, скорость в данный момент времени), а не от «средних» значений по орбите.

В этом случае будем писать кинетическое уравнение в пространстве обычных координат и скоростей.

Рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + (F_i^{(0)} + F_i^{(1)}) \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (4.1)$$

где $mF_i^{(0)}$ — сила, действующая на заряд в невозмущенных полях,

$$F_i^{(0)} = \frac{e}{m} E_i^{(0)} + \frac{e}{mc} \epsilon_{ike} v_k H_e^{(0)} \equiv \epsilon_i^{(0)} + \Omega_{ik}^{(0)} v_k, \quad (4.2)$$

а $mF_i^{(1)}$ — сила в возмущающих полях

$$F_i^{(1)} = \frac{e}{m} E_i^{(1)} + \frac{e}{mc} \epsilon_{ike} v_k H_e^{(1)} \equiv \epsilon_i^{(1)} + \Omega_{ik}^{(1)} v_k. \quad (4.3)$$

Пусть $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения невозмущенной задачи, удовлетворяющая уравнению

$$v_i \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + F_i^{(0)} \frac{\partial f_0}{\partial v_i} = 0. \quad (4.4)$$

В баллистическом приближении частица совершает малые колебания с частотой возмущающего поля λ около среднего положения, которое меняется с малой частотой. Поэтому естественно искать уравнения (4.1) в виде

$$f(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t) = f_0[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t); \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t)], \quad (4.5)$$

где $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t)$ — малые величины, конкретный критерий малости которых будет указан ниже. Однако мы сузили бы класс поддающихся решению случаев, если бы раскладывали функцию распределения (4.5) по $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{u} , так как в этом случае полученное решение было бы справедливо для достаточно гладких функций. В частности, оно не годилось бы для распределений с температурой, малой по сравнению с энергией вынужденных колебаний. В изложенном ниже способе решения не накладывается каких-либо ограничений на невозмущенную функцию распределения, а лишь на электрическое и магнитное поле.

Подставляем функцию (4.5) в уравнение (4.1). В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}; \mathbf{v} - \mathbf{u})}{\partial(x_i - \rho_i)} \left\{ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho_i}{\partial x_k} + (F_k^{(0)} + F_k^{(1)}) \frac{\partial \rho_i}{\partial v_k} - v_i \right\} + \\ & + \frac{\partial f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}; \mathbf{v} - \mathbf{u})}{\partial(v_i - u_i)} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (F_k^{(0)} + F_k^{(1)}) \frac{\partial u_i}{\partial v_k} - \right. \\ & \left. - F_i^{(0)} - F_i^{(1)} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Введем вместо r и v новые переменные

$$\begin{aligned}\xi &= r - \rho(r; v; t); \\ \eta &= v - u(r; v; t).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Тогда, ограничиваясь в уравнениях (4.6) только линейными членами по u , ρ и $F^{(1)}$ и учитывая, что $f_0(\xi; \eta)$ удовлетворяет невозмущенному уравнению (4.4), получим

$$\begin{aligned}& \frac{df_0}{d\xi_i} \left\{ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial \rho_i}{\partial \eta_k} - u_i \right\} + \\ & + \frac{df_0}{d\eta_i} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial \eta_k} - \rho_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k} - u_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \eta_k} - \right. \\ & \left. - F_i^{(1)} \right\} = 0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Это уравнение может быть удовлетворено, если приравнять нулю оба выражения в фигурных скобках, в результате чего получим систему уравнения для определения $\rho_i(\xi; \eta; t)$ и $u_i(\xi; \eta; t)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial \eta_k} - \rho_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k} - u_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \eta_k} &= F_i^{(1)} \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \eta_k \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial \rho_i}{\partial \eta_k} - u_i &= 0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

До сих пор мы нигде не использовали условия баллистичности. Вообще говоря, баллистический метод применим в том случае, когда частота возмущающих полей много больше собственных частот системы.

Однако при наличии сильного магнитного поля метод решения уравнения (4.9), который мы применим ниже, затягивается до значительно более низких значений частоты возмущающих полей.

Введем, кроме ларморовской частоты частицы в магнитном поле Ω , еще величину $\omega \doteq \frac{v_r}{R}$, где v_r — средняя скорость частицы, а R — размер системы. В слабом магнитном поле невозмущенная частота системы порядка ω , а в сильном поле порядка Ω . Между тем для решения уравнений (4.6) мы потребуем только выполнения неравенства

$$\frac{\omega}{\lambda} \ll 1.\tag{4.10}$$

Будем искать решение в виде разложения по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$. В первом приближении можно пренебречь членами

$$\eta_k \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}; \quad \rho_k \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k}; \quad \eta_k \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi_k},$$

которые, как нетрудно видеть, следующего порядка малости по $\frac{\omega}{\lambda}$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} + F_k^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \eta_k} - u_k^{(1)} \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \eta_k} &= F_i^{(1)}; \\ \frac{\partial \rho_i^{(1)}}{\partial t} + F_k^{(0)} \frac{\partial \rho_i^{(1)}}{\partial \eta_k} - u_i^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Зависимость от времени $F_i^{(1)}$, а следовательно, и $u_i^{(1)}$, $\rho_i^{(1)}$, определяется посредством множителя $e^{i\lambda t}$. Ищем решение (4.11), линейно зависящее от скоростей η_i

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i + \alpha_{ik} \eta_{ik}; \\ \rho_i &= \beta_i + \beta_{ik} \eta_{ik}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Тогда для α и β получаем

$$\begin{aligned} (i\lambda \delta_{ek} - \Omega_{ek}^{(0)}) \alpha_{je} + \Omega_{je}^{(0)} \alpha_{ek} &= \Omega_{jk}^{(1)}; \\ (i\lambda \delta_{jk} - \Omega_{jk}^{(0)}) \alpha_k + \alpha_{jk} \varepsilon_k^{(0)} &= \varepsilon_j^{(1)}; \\ (i\lambda \delta_{ek} - \Omega_{ek}^{(0)}) \beta_{je} - \alpha_{jk} &= 0; \\ i\lambda \beta_j + \beta_{jk} \varepsilon_k^{(0)} - \alpha_j &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

(всего 24 линейных алгебраических уравнения для определения 24 коэффициентов α_j ; α_{jk} ; β_j и β_{jk}).

Решая эту систему уравнений и подставляя α и β в (4.12), получим ρ и u как функции ξ и η . С точностью до квадратичных членов по ρ и u можно заменить ξ и η на r и v . Функции $\rho(r; v; t)$ и $u(r; v; t)$ решают задачу о нахождении распределения в возмущающих полях $f(r; v; t)$, если известно невозмущенное распределение $f_0(r, v)$. Согласно (4.5) имеем

$$f(r; v; t) = f_0[r - \rho(r; v; t); v - u(r; v; t)].$$

Ток и плотность частиц определяются, как обычно, из соотношений

$$n(\mathbf{r}; t) = \int f(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t) d\mathbf{v} = \int f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}; \mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{v}; \quad (4.14)$$

$$j(\mathbf{r}; t) = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t) d\mathbf{v} = \int \mathbf{v} f_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}; \mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{v}.$$

Перейдем теперь в (4.5) от переменной \mathbf{v} к интегрированию по $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}; \mathbf{v}; t)$. Вычислим якобиан перехода $\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\boldsymbol{\eta})}$. Используя соотношение (4.12), можно написать

$$v_i = \eta_i + d_i + \alpha_{ik} \eta_k,$$

откуда $\frac{\partial v_i}{\partial \eta_k} = \delta_{ik} + \alpha_{ik}$, и, следовательно, якобиан перехода равен

$$\text{Det} \left| \frac{\partial v_i}{\partial \eta_k} \right| = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial \eta_k} + 0(u^2) = 1 + \alpha_{ii} + 0(u^2).$$

Для определения суммы α_{ii} рассмотрим второе из уравнений (4.13)

$$(i\lambda \delta_{ek} + \Omega_{ek}^{(0)}) \alpha_{je} + \Omega_{je}^{(0)} \alpha_{ek} = \Omega_{jk}^{(1)}.$$

Полагаем $j=k$, суммируем по всем j и, замечая, что

$$\Omega_{jk}^{(1)} = 0 \text{ при } j=k,$$

получим

$$(i\lambda \delta_{ej} + \Omega_{ej}^{(0)} - \Omega_{ej}^{(0)}) \alpha_{je} = 0,$$

откуда следует

$$\alpha_{ii} = 0.$$

Таким образом, в нулевом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ якобиан $\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\boldsymbol{\eta})}$ равен единице с точностью до членов, квадратичных по возмущающим полям $F^{(1)}$. В следующем же приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ якобиан, вообще говоря, содержит также и линейные члены по возмущающим полям, т. е. с точностью до $F^{(1)2}$ можно написать

$$\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\boldsymbol{\eta})} = 1 + \delta,$$

где

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \simeq \frac{\omega}{\lambda} \frac{u}{\eta} \sim \frac{\rho}{R}.$$

Поэтому вместо (4. 14) можно написать

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}; t) &= \int f_0[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}; \boldsymbol{\eta}; t); \boldsymbol{\eta}] (1 + \delta) d\boldsymbol{\eta}; \\ j(\mathbf{r}; t) &= \int [\boldsymbol{\eta} + \mathbf{u}(\mathbf{r}; \boldsymbol{\eta}; t)] f_0[\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}; \boldsymbol{\eta}; t); \boldsymbol{\eta}] (1 + \delta) d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (4. 15)$$

Разлагая f_0 в ряд по ρ^* , получим для поправок к плотности и току

$$\begin{aligned} n^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= - \int \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \rho_i d\boldsymbol{\eta} + \int f_0 \delta d\boldsymbol{\eta}; \\ j^{(1)}(\mathbf{r}; t) &= \int u_i f_0 d\boldsymbol{\eta} - \int \eta_i \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \rho_k d\boldsymbol{\eta} + \int \eta_i f_0 \delta d\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (4. 16)$$

Нетрудно видеть, что в выражении для тока два последних члена одного порядка и относятся к первому, как $\frac{\omega}{\lambda}$; поэтому в нулевом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ ими можно пренебречь. Что касается плотности, то там все члены одного порядка, так что поправка к плотности в этом приближении равна нулю.

Таким образом, в нулевом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ получаем

$$\begin{aligned} n^{(1)} &= 0; \\ j^{(1)} &= \alpha_i n^{(0)} + \alpha_{ik} j_k^{(0)}. \end{aligned} \quad (4. 17)$$

Чтобы найти поправку к плотности, нет, однако, необходимости находить \mathbf{u} и $\boldsymbol{\rho}$ в следующем приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$, а достаточно воспользоваться уравнением непрерывности. В данном случае, в отличие от адиабатического приближения, поправка к плотности оказывается более высокого порядка малости, чем поправка к току.

Для поправки к плотности получаем

$$n^{(2)} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial j_i^{(1)}}{\partial x_i} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \alpha_i n^{(0)} + \alpha_{ik} j_k^{(0)} \}. \quad (4. 18)$$

* По первому аргументу, в отличие от второго, функцию $f_0(\mathbf{r}; \mathbf{v})$ всегда можно раскладывать в ряд, так как $\frac{\rho}{R} \ll 1$.

Для получения следующих членов разложения по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$ нужно полученное первое приближение подставить в опущенные члены и искать решение в виде

$$\begin{aligned} u_i^{(2)} &= \alpha_i^{(2)} + \alpha_{ik}^{(2)} \eta_k + \alpha_{ike}^{(2)} \eta_k \eta_e; \\ \rho_i^{(2)} &= \beta_i^{(2)} + \beta_{ik}^{(2)} \eta_k + \beta_{ike}^{(2)} \eta_k \eta_e. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для коэффициентов получается соответствующая система линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, разложение по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$ сводит задачу о решении дифференциального уравнения в частных производных к решению систем линейных алгебраических уравнений.

В частном случае $\frac{\Omega}{\lambda} \ll 1$ (собственно баллистическом) задача особенно упрощается, и можно сразу написать рекуррентную формулу для всех приближений.

В этом случае члены $\Omega^{(0)}$ и $F_k^{(0)} \frac{\partial u}{\partial v_k}$ также малы, и поэтому

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= \frac{F_i^{(1)}}{i\lambda}; \quad \rho_i^{(1)} = \frac{u_i^{(1)}}{i\lambda}; \\ u_i^{(n+1)} &= -\frac{1}{i\lambda} \left\{ \eta_k \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial \eta_k} - \Omega_{ik}^{(0)} u_k^{(n)} \right\} + \\ &\quad + \frac{\rho_k^{(n-1)}}{i\lambda} \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial \xi_k}; \\ \rho_i^{(n+1)} &= \frac{u_i^{(n+1)}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda} \left\{ \eta_k \frac{\partial \rho_i^{(n)}}{\partial \xi_k} + F_k^{(0)} \frac{\partial \rho_i^{(n)}}{\partial \tau_{ik}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Рассмотрим определенную геометрию полей, осуществляющуюся в электронном пучке [1]. Пусть основное электрическое поле направлено по цилиндрическому радиусу, а магнитное — по φ . Возмущающие поля имеют составляющие: магнитное — только по φ , а электрическое — по радиусу и z , причем все поля зависят от r

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(0)} &= \varepsilon_1^{(0)} = \varepsilon^{(0)}; \quad \Omega_{31}^{(0)} = -\Omega_{13}^{(0)} = \Omega; \\ \varepsilon_r^{(1)} &= \varepsilon_1^{(1)}; \\ \varepsilon_z^{(1)} &= \varepsilon_3^{(1)}; \quad \Omega_{31}^{(1)} = -\Omega_{13}^{(1)} = \Omega^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

а остальные компоненты равны нулю.

Для отличных от нуля 12 коэффициентов получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 x\alpha_{11} + \Omega\alpha_{13} + \Omega\alpha_{31} &= 0; & x\beta_{11} + \Omega\beta_{13} - \alpha_{11} &= 0; \\
 x\alpha_{13} + \Omega\alpha_{11} + \Omega\alpha_{33} &= \Omega^{(1)}; & x\beta_{13} - \Omega\beta_{11} - \alpha_{13} &= 0; \\
 x\alpha_1 + \Omega\alpha_3 + \varepsilon_1^{(0)}\alpha_{11} &= \varepsilon_1^{(1)}; & x\beta_1 + \varepsilon_1^{(0)}\beta_{11} - \alpha_1 &= 0; \\
 x\alpha_{31} + \Omega\alpha_{33} - \Omega\alpha_{11} &= \Omega^{(1)}; & x\beta_{31} + \Omega\beta_{33} - \alpha_{31} &= 0; \\
 x\alpha_{33} - \Omega\alpha_{31} - \Omega\alpha_{13} &= 0; & x\beta_{33} - \Omega\beta_{31} - \alpha_{33} &= 0; \\
 x\alpha_3 - \Omega\alpha_1 + \varepsilon_1^{(0)}\alpha_{31} &= \varepsilon_3^{(1)}; & x\beta_3 + \varepsilon_1^{(0)}\beta_{31} - \alpha_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4. 22}$$

Через x временно обозначено $i\lambda$.

Умножая три первых уравнения каждого столбца на i и складывая с соответствующими уравнениями столбца, получим шесть уравнений для комплексных величин:

$$\begin{aligned}
 (x - i\Omega) a_1 + \Omega a_3 &= i\Omega^{(1)}; & x b_1 + \Omega b_3 - a_1 &= 0; \\
 -\Omega a_1 + (x - i\Omega) a_3 &= -\Omega^{(1)}; & -\Omega b_1 + x b_3 - a_3 &= 0; \\
 (x - i\Omega) a_0 + \varepsilon_1^{(0)} a_1 &= \varepsilon^{(1)}; & x b_0 + \varepsilon_1^{(0)} b_1 - a_0 &= 0,
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + i\alpha_3 &= a_0; & \alpha_{11} + i\alpha_{31} &= a_1; & \alpha_{31} + i\alpha_{33} &= a_3; \\
 \beta_1 + i\beta_3 &= b_0; & \beta_{11} + i\beta_{31} &= b_1; & \beta_{31} + i\beta_{33} &= b_3; \\
 \varepsilon_1^{(1)} + i\varepsilon_3^{(1)} &= \varepsilon^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Теперь уже уравнения легко решаются, так как система распадается и приходится решать одновременно не более двух уравнений.

Решения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{x\varepsilon^{(1)} - i\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{x(x - i\Omega)}; & a_1 &= i\frac{\Omega^{(1)}}{x}; & a_3 &= -\frac{\Omega^{(1)}}{x}; \\
 b_0 &= \frac{x\varepsilon^{(1)} - i\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{x^2(x - i\Omega)} - \frac{i\Omega^{(1)}\varepsilon^{(0)}}{x^2(x + i\Omega)}; & b_1 &= \frac{i\Omega^{(1)}}{x(x + i\Omega)}; \\
 b_3 &= \frac{\Omega^{(1)}}{x(x + i\Omega)}.
 \end{aligned} \tag{4. 23}$$

Отделяя действительную и мнимую части (при этом формально считаем $x = i\lambda$ действительной величиной), получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2} \left(\Omega\varepsilon_3^{(1)} - i\lambda\varepsilon_1^{(1)} + i\frac{\Omega\Omega^{(1)}}{\lambda}\varepsilon^{(0)} \right); \quad \alpha_{11} = \alpha_{33} = 0;$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2} (-\Omega \varepsilon_1^{(1)} - i \lambda \varepsilon_3^{(1)} + \Omega^{(1)} \varepsilon^{(0)}); & \alpha_{31} &= -\alpha_{13} = -i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda}; \\ \beta_1 &= \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2} (-\varepsilon_1^{(1)} - i \frac{\Omega}{\lambda} \varepsilon_3^{(1)}); & \beta_{11} &= \beta_{33} = i \frac{\Omega^{(1)} \Omega}{\lambda (\lambda^2 - \Omega^2)}; \\ \beta_3 &= \frac{1}{\lambda^2 - \Omega^2} (-\varepsilon_3^{(1)} + i \frac{\Omega}{\lambda} \varepsilon_1^{(1)} - 2i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \varepsilon^{(0)}); & \beta_{13} &= -\beta_{31} = \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda^2 - \Omega^2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Поправки к плотности и току можно записать в виде

$$\begin{aligned} j_z^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n^{(0)}}{\lambda^2 - \Omega^2} (-\Omega \varepsilon_1^{(1)} - i \lambda \varepsilon_3^{(1)} + \Omega^{(1)} \varepsilon^{(0)}); \\ j_r^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n_0}{\lambda^2 - \Omega^2} \left(\Omega \varepsilon_3^{(1)} - i \lambda \varepsilon_1^{(1)} + i \frac{\Omega^{(1)} \Omega}{\lambda} \varepsilon^{(0)} \right); \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$n^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial j_r^{(1)}}{\partial r}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Основные поля малы, т. е. $\frac{\Omega}{\lambda} \ll 1$ и $\varepsilon^{(0)} \ll \lambda \eta$. В этом случае

$$\begin{aligned} u_1 &= -i \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\lambda} + i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \eta_3 = \frac{F_1^{(1)}}{i \lambda}; & \rho_1 &= \frac{u_1}{i \lambda}; \\ u_3 &= -i \frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\lambda} - i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \eta_1 = \frac{F_3^{(1)}}{i \lambda}; & \rho_3 &= \frac{u_3}{i \lambda}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

т. е. \mathbf{u} и ρ имеют такой же вид, как и для свободного газа в возмущающих полях. Этот случай и является собственно баллистическим.

Выражения для плотности и тока в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} j_z^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i}{\lambda} \varepsilon_3^{(1)} n_0; \\ j_r^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i}{\lambda} (\varepsilon_1^{(1)} n_0 - \Omega^{(1)} j^{(0)}); \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$n^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial j_r^{(1)}}{\partial r}.$$

2. $\Omega \gg \lambda$. Теперь для поправок к скоростям имеем

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\Omega} + i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \left(\eta_3 - \frac{\varepsilon^{(0)}}{\Omega} \right) = \\
 &= -c \frac{E_z^{(1)}}{H_0} + i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \left(\eta_3 - c \frac{E^{(0)}}{H^{(0)}} \right); \\
 u_3 &= \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega} - \frac{\Omega^{(1)} \varepsilon^{(0)}}{\Omega^2} - i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \eta_1 = \\
 &= c \frac{E_r^{(1)}}{H^{(0)}} - \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega} \frac{E^{(0)}}{H^{(0)}} c - i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda} \eta_1.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Члены, не содержащие i , т. е. находящиеся в фазе с возмущающими полями, представляют собой поправки к дрейфу вследствие изменения электрического и магнитного поля. Остальные члены являются возмущениями движения частицы на орбите и не сказываются на изменении потока и плотности. Действительно, поправки в этом случае к току имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 j_z^{(1)} &= \left(\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega} - \frac{\Omega^{(1)} \varepsilon^{(0)}}{\Omega^2} \right) n^{(0)}; \\
 j_r^{(1)} &= -\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega} n^{(0)} - i \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega \lambda} (\varepsilon^{(0)} n^{(0)} - \Omega j^{(0)}).
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

С другой стороны, из кинетического уравнения для невозмущенной функции распределения легко получить соотношение

$$\frac{\partial T_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} = \varepsilon_i^{(0)} n^{(0)} + \Omega_{ie} j_e^{(0)}, \tag{4.30}$$

где $T_{ik}^{(0)}$ — тензор натяжений, определяемый равенством

$$T_{ik}^{(0)} = \int \eta_i \eta_k f_0 d\eta. \tag{4.31}$$

В нашем случае (4.30) имеет вид

$$\frac{\partial T_{rr}^{(0)}}{\partial r} = \varepsilon^{(0)} n^{(0)} - \Omega j^{(0)}. \tag{4.32}$$

Используя это соотношение, получаем для $j_r^{(1)}$

$$j_r^{(1)} = -\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\Omega} n^{(0)} - i \frac{\Omega^{(1)}}{\lambda \Omega} \frac{\partial T_{rr}^{(0)}}{\partial r}. \tag{4.33}$$

Легко видеть, что второй член в $\frac{\omega}{\lambda}$ раз меньше первого, так как

$$\frac{\Omega^{(1)}}{\lambda\Omega} \frac{\partial T_{rr}^{(0)}}{\partial r} \sim n^0 \frac{\Omega^{(1)}\omega v}{\lambda\Omega} \sim \frac{\omega}{\lambda} n^{(0)} v \frac{\Omega^{(1)}}{\Omega} \sim \frac{\omega}{\lambda} n^{(0)} \frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\Omega}.$$

Таким образом, в выражении для тока остаются только дрейфовые члены

$$\begin{aligned} j_z^{(1)} &= \left(c \frac{E_r^{(1)}}{H^{(0)}} - c \frac{\Omega^{(1)} E^{(0)}}{\Omega H^{(0)}} \right) n^{(0)}; \\ j_r^{(1)} &= -c \frac{E_z^{(1)}}{H^{(0)}} n^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

что с точностью до члена $\frac{\varepsilon^{(0)}}{\Omega} n^{(0)}$ (который в данном случае есть малая более высокого порядка) совпадает с выражением (2.14) в соответствии с тем, что, несмотря на различие метода, условия, в которых выводились эти выражения, одинаковы.

Сравнивая случаи $\frac{\Omega}{\lambda} \ll 1$ и $\frac{\Omega}{\lambda} \gg 1$, видим, что в первом случае поправки к току (4.34) содержат множитель $-i$, т. е. отстают по фазе от полей на $\frac{\pi}{2}$, а во втором случае (4.34) совпадают по фазе с полями.

Это вполне естественно, ибо в слабом магнитном поле возмущающей силе пропорционально ускорение, а в сильном — среднее значение скорости (дрейф).

3. Случай $\Omega = \lambda$ требует особого рассмотрения. В этом случае выражения для u и ρ обращаются в бесконечность.

Физический смысл резонанса весьма нагляден. Так как $\Omega = \lambda \gg \omega$ создает сильное замагничение, то частота вращения совпадает с частотой возмущающего электрического поля; частица резонансно ускоряется, как в циклотроне.

Эта особенность не связана с приближением по степеням $\frac{\omega}{\lambda}$, а обусловлена тем, что мы не учитывали членов, квадратичных по u и ρ . Так как разложение по $\frac{\omega}{\lambda}$ есть по существу разложение по градиентам полей, а в неоднородном магнитном поле частота вращения частицы зависит от ее скорости, то учет следующих членов разложения по $\frac{\omega}{\lambda}$ приведет только к тому, что место резонанса будет слегка за-

висеть от невозмущенной скорости. Учет нелинейных членов по u приводит в неоднородном магнитном поле к изменению частоты вращения в процессе ускорения так, что частицы, бывшие в резонансе, со временем выпадают из него. В этом случае существенную роль начинают играть колебания не с частотой возмущающего поля, а с частотой так называемых фазовых колебаний. Правда, если учесть столкновения, то со временем пропадает всякое упорядоченное ускорение и замедление частиц; однако период релаксации настолько велик, что во многих случаях он оказывается больше всего времени возмущения.

Оценить предельную скорость, которую наберут частицы, можно следующим образом. Если ψ — разность между фазой положения частицы на ларморовском кружке и фазой электрического поля, то

$$\dot{\psi} = \Omega - \lambda.$$

С другой стороны,

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial v} \dot{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{e}{m} E^{(1)} \sin \psi.$$

В результате получаем

$$\ddot{\psi} + \omega_{\text{фаз}}^2 \sin \psi = 0,$$

где

$$\omega_{\text{фаз}}^2 = \frac{eE^{(1)}}{m} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

представляет собой частоту «фазовых колебаний». Фаза ψ колеблется в пределах порядка единицы $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, откуда колебания Ω

$$\Delta \Omega \sim \omega_{\text{фаз}} \Delta \psi \approx \omega_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{eE^{(1)}}{m} \frac{\partial \Omega}{\partial v}},$$

а интересующая нас величина

$$u_{\text{пред}} = \Delta v = \frac{1}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}} \Delta \Omega = \frac{\omega_{\text{фаз}}}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}},$$

или

$$u_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{eE^{(1)}}{m \frac{\partial \Omega}{\partial v}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(1)}}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}}}.$$

Не будем останавливаться подробно на вычислении величины $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$, а оценим ее из следующих соображений. Величина Ω зависит от скорости только вследствие градиентов магнитного поля, так что она должна содержать в качестве множителя некоторую степень $\frac{\rho}{R}$, где ρ — ларморовский радиус, а R — размеры системы (на которых меняется Ω). Первая степень градиентов, однако, не должна входить, так как $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ не зависит от направления градиента. Таким образом, по порядку величины

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} \simeq \frac{\Omega}{v} \frac{\rho^2}{R^2} = \frac{1}{v} \frac{\omega^2}{\Omega},$$

откуда

$$u_{\text{пред}} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon^{(1)} \Omega v}}{\omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon^{(1)} \lambda v}}{\omega}.$$

Поправки к плотности или потоку в данной точке определяются интегралами типа *

$$\int u f_0 dv \sim \int_{\Delta \Omega} u_{\text{пред}} f_0 dv + \int u f_0 dv,$$

где первый интеграл берется от $u_{\text{пред}}$ по области скоростей, где частота резонансна частоте поля, а второй — от обычного значения u по всей остальной области v . Ширина резонансной области $\Delta \Omega \sim \omega_{\text{фаз}} = \sqrt{\varepsilon^{(1)} \frac{\partial \Omega}{\partial v}}$, и соответствующая ей ширина интервала скоростей

$$\Delta v = \frac{\Delta \Omega}{\frac{\partial \Omega}{\partial v}} = u_{\text{пред}}.$$

Таким образом, первый интеграл относится ко второму, как $\left(\bar{u} - \text{среднее значение } u \text{ в нерезонансной области, } \bar{u} \sim \frac{\varepsilon^{(1)}}{\lambda} \right)$

$$\frac{u_{\text{пред}} \Delta v}{\bar{u} v} = \frac{u_{\text{пред}}^2}{\bar{u} v} \sim \frac{\lambda^2}{\omega^2} \gg 1,$$

* Эти соображения правильны, если имеется достаточный разброс по скоростям $v \gg u_{\text{пред}}$.

т. е. в тех точках, где $\Omega \sim \lambda$, основной вклад в выражение для поправки к току и плотности дают частицы, резонансно раскачивающиеся полем.

Вклад резонансно раскачивающихся частиц в полный ток оценивается следующим образом:

$$j_{\text{пол}}^{(1)} = 2\pi \int_{\Delta\Omega} u_{\text{пред}} n^0(r) r dr + \\ + \int u n^{(0)}(r) r dr \sim 2\pi n^{(0)} [u_{\text{пред}} r_{\text{рез}} \Delta r + \bar{u} R^2],$$

где первый интеграл берется по области Δr вблизи $r = r_{\text{рез}}$. Ширину области Δr можно оценить

$$\Delta r = \frac{\Delta\Omega}{\partial\Omega/\partial r} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} R = \frac{\omega_{\text{фаз}}}{\Omega} R.$$

Первый интеграл относится ко второму, как

$$\frac{u_{\text{пред}}}{\bar{u}} \frac{r \Delta r}{R^2} = \frac{u_{\text{пред}} \omega_{\text{фаз}}}{\varepsilon^{(1)}} \cdot \frac{r_{\text{рез}}}{R} = \frac{r_{\text{рез}}}{R}.$$

Таким образом, если максимальное значение Ω не намного больше λ (т. е. $r_{\text{рез}} \sim R$), то интегральный вклад от резонансно раскачивающихся частиц порядка вклада всех остальных. При $\Omega \gg \lambda$, $r_{\text{рез}} \ll R$ и резонансом можно пренебречь.

Из релятивистских случаев, когда применим баллистический метод, рассмотрим только один.

Пусть в рассмотренной выше геометрии полей имеется большая упорядоченная скорость $v_0 \approx c$ в направлении оси z , а разброс скоростей около v_0 мал. Такое состояние возможно только, если, наряду с магнитным полем, имеется сильное электрическое поле, почти равное магнитному так, что результирующая радиальная сила мала, между тем каждый член суммы (магнитный и электрический), вообще говоря, не мал.

Кинетическое уравнение отличается в этом случае от нерелятивистского (4. 1) тем, что вместо F_1 и F_3 стоят, соответственно, $\frac{1}{\gamma_0} F_1$ и $\frac{1}{\gamma_0^3} F_3$, что связано с различием так называемой продольной и поперечной массы.

При этом, если разброс скоростей достаточно мал $\frac{\Delta v}{c} \ll \frac{1}{\gamma_0^3}$, то под γ_0 можно понимать величину

$$\gamma_0 = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

В этом случае уравнения для u_i и ρ_i получаются такого же типа, что и в нерелятивистском случае, и решения их в первом приближении по $\frac{\omega}{\lambda}$ имеют вид

$$u_1 = \frac{1}{\gamma_0^4 \lambda^2 - \Omega^2} \left\{ \Omega \varepsilon_3^{(1)} - i \gamma_0^3 \lambda \varepsilon_1^{(1)} + i \frac{\Omega \Omega^{(1)} \varepsilon^{(0)}}{\gamma_0 \lambda} \right\} + \frac{i \Omega^{(1)}}{\gamma_0 \lambda} \eta_3; \quad (4.35)$$

$$u_3 = \frac{1}{\gamma_0^4 \lambda^2 - \Omega^2} \left\{ -\Omega \varepsilon_1^{(1)} - i \gamma_0 \lambda \varepsilon_3^{(1)} + \Omega^{(1)} \varepsilon^{(0)} \right\} + i \frac{\Omega^{(1)}}{\gamma_0^3 \lambda} \eta_1.$$

Пренебрегая разбросом скоростей и учитывая, что $\varepsilon^{(0)} = \Omega v_0$, имеем:

$$u_1 = \frac{1}{\gamma_0^4 \lambda^2 - \Omega^2} \left\{ \Omega \varepsilon_3^{(1)} - i \gamma_0^3 \lambda \varepsilon_1^{(1)} + i \frac{\Omega^2}{\gamma_0 \lambda} \Omega^{(1)} v_0 \right\}; \quad (4.36)$$

$$u_3 = \frac{1}{\gamma_0^4 \lambda^2 - \Omega^2} \left\{ -\Omega \varepsilon_1^{(1)} - i \gamma_0 \lambda \varepsilon_3^{(1)} + \Omega \Omega^{(1)} v_0 \right\};$$

$$j_k = u_k n^{(0)}.$$

В собственно баллистическом случае ($\Omega \ll \gamma_0 \lambda$)

$$u_1 = -i \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\gamma_0 \lambda} + i \frac{\Omega^{(1)}}{\gamma_0 \lambda} v = \frac{F_1^{(1)}}{i \gamma_0 \lambda}; \quad (4.37)$$

$$u_3 = -i \frac{\varepsilon_3^{(1)}}{\gamma_0^3 \lambda} = \frac{F_3^{(1)}}{i \gamma_0^3 \lambda}.$$

Как видно из (4.35), условие резонанса теперь имеет вид $\lambda = \frac{1}{2} \Omega$. Это на первый взгляд кажется парадоксальным, так как в системе координат, где $v_0 = 0$, условие резонанса имеет вид $\lambda^1 = \Omega^1$, а факт резонанса, казалось бы, не должен зависеть от системы координат. В действительности, однако, Ω и λ преобразуются неодинаково: Ω преобразуется, как магнитное поле, которое в системе, где $v_0 = 0$, в γ_0 раз меньше, тогда как λ преобразуется как 4-я компонента волнового вектора k ; а так как в нашей системе пространственные компоненты k равны нулю, то в системе $v_0 = 0$ λ увеличивается в γ_0 раз.

§ 5. Собственные колебания стабилизированного электронного пучка

Колебания пучка можно разбить на три группы.

К первой группе относятся волны с длиной, много меньшей радиуса пучка. Для таких волн пучок представляет собой как бы

бесконечную среду с заданной температурой электронов. Эти колебания не представляют опасности с точки зрения устойчивого существования пучка.

Ко второй группе относятся колебания с длиной волны порядка «длины орбиты»*. В этом случае, вообще говоря, возможно своеобразное резонансное взаимодействие между волной и отдельными частицами. Эти резонансы выступают в нелинейном приближении, и поэтому строгое математическое исследование в этой области практически невозможно.

К третьей группе относятся колебания с длиной волны, много большей длины орбиты (в частности, просто радиальные пульсации пучка). Нахождение уравнений этих колебаний и представляет содержание настоящего параграфа.

Можно рассматривать два типа пульсаций пучка: быстрые и медленные. Быстрые пульсации происходят с частотой порядка собственных частот электронов в практически покоящемся ионном газе.

Частота этих колебаний

$$\omega_{\text{эл}}^2 = \frac{2\pi e^2 n}{\gamma_0 m}$$

может быть выражена через температуру электронов в лабораторной системе:

$$\theta = 2\pi e^2 n \frac{r^{*2}}{2},$$

и тогда

$$\omega_{\text{эл}}^2 = \frac{2\theta}{\gamma_0 m r^{*2}} = \frac{P_{\text{эл}}}{\gamma_0 m N}, \quad (5.1)$$

где $P_{\text{эл}}$ — давление; N — число частиц на 1 см длины пучка, т. е. эта частота порядка отношения электронного давления к массе электронов в 1 см длины пучка.

В электронной системе координат эти пульсации представляют собой колебания электронов в заданной потенциальной яме, поэтому они заведомо устойчивы.

Вопрос об устойчивости может ставиться только к совместным колебаниям электронов и ионов.

Частота этих колебаний, по аналогии с (5.1), равна

$$\omega^2 \sim \frac{P_{\text{эл}} + P_{\text{ион}}}{(\gamma m + M) N}. \quad (5.2)$$

Собственная же частота колебаний ионов равна

$$\omega_{\text{ион}}^2 = \frac{P_{\text{ион}}}{MN}. \quad (5.3)$$

* При больших токах длина орбиты порядка диаметра пучка.

Если температура электронов много больше температуры ионов, а упорядоченная скорость электронов не слишком велика ($\gamma_0 \ll \frac{M}{m}$), то

$$\frac{\omega^2}{\omega_{эл}^2} \sim \frac{\gamma_0 m}{M} \ll 1; \quad \frac{\omega^2}{\omega_{ион}^2} \sim \frac{P_{эл}}{P_{ион}} \sim \frac{\theta_{эл}}{\theta_{ион}} \gg 1. \quad (5.4)$$

Таким образом, совместные колебания электронов и ионов являются адиабатическими по отношению к электронам и баллистическими — по отношению к ионам.

Уравнения колебаний получим, подставляя в уравнения Максвелла для возмущающих полей

$$\Delta \mathbf{a} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla u - \frac{4\pi e}{c} (\mathbf{j}_2^{(1)} - \mathbf{j}_1^{(1)}); \quad (5.5)$$

$$\Delta u + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{a} = -4\pi e (n_2^{(1)} - n_1^{(1)})^*.$$

Значения для плотности и тока электронов и ионов в свою очередь выражены через потенциалы a и u ; при этом для электронов надо воспользоваться выражениями (3.12), а для ионов — найденными в предыдущем параграфе для баллистического приближения

$$n_2^{(1)} = -\frac{e}{M\omega^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r n_2^{(0)} \frac{du}{dr} \right) + \frac{ek^2}{M\omega^3} n_2^{(0)} u - \frac{ek}{Mc\omega} n_2^{(0)} a \quad (5.6)$$

$$j_{2z} = -en_2^{(0)}$$

(лишние члены в выражении (5.6) связаны с зависимостью потенциалов от z , которую мы там не рассматривали). В результате уравнения собственных колебаний пучка примут вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{da}{dr} \right) - \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \left[ku - \frac{\omega}{c} a \right] = -\frac{4\pi e}{c} j_z^{(1)};$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) r \frac{du}{dr} \right] - k \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \left(ku - \frac{\omega}{c} a \right) = -4\pi e n^{(1)}, \quad (5.7)$$

где $j_z^{(1)}$ и $n^{(1)}$ определяются согласно (3.12). Подставляя их значения в (5.7) и собирая должным образом члены, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{da}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - L_{22}(r) \right] a - \left[\frac{k\omega}{c} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - L_{21}(r) \right] = \\ & = \frac{1}{r} \int_0^\infty K_{21}(r, r') u(r') dr' + \frac{1}{r} \int_0^\infty K_{22}(r, r') a(r') dr'; \end{aligned}$$

* Несколько необычная форма уравнения связана с тем, что дополнительное условие Лоренца у нас не выполняется.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) r \frac{du}{dr} \right] - \left[k^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) + L_{11}(r) \right] u + \\ & + \left[\frac{k\omega}{c} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - L_{12}(r) \right] a = \frac{1}{r} \int_0^\infty K_{11}(r, r') u(r') dr' + \\ & + \frac{1}{r} \int_0^\infty K_{12}(r, r') ar' dr', \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\Omega(r) = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_2^{(0)}}{M}}$ — ленгмюровская частота ионов, а функции $L_{ik}(r)$ и ядра $K_{ik}(r, r')$ равны

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{4\pi e^2}{rnc^3} \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\varepsilon - eu}{u_r} d\tau; & L_{12} &= -\frac{4\pi e^2}{rnc^4} \int \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{\varepsilon - eu}{u_r} d\tau; \\ L_{21} &= -\frac{4\pi e^2}{rnc^2} \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{p_z - \frac{e}{c} A}{u_r} d\tau; & L_{22} &= -\frac{4\pi e^2}{rnc^3} \int \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \frac{p_z - \frac{e}{c} A}{u_r} d\tau; \\ K_{11}(r, r') &= \frac{4\pi e^2}{m^2 c^6} \int \frac{(\varepsilon - eu)(\varepsilon - eu')}{u_r u'_r} Id\tau; \\ K_{22}(r, r') &= -\frac{4\pi e^2}{m^2 c^4} \int \frac{\left(p_z - \frac{e}{c} A \right) \left(p_z - \frac{e}{c} A' \right)}{u_r u'_r} Id\tau; \\ K_{21}(r, r') &= -K_{12}(r, r') = \frac{4\pi e^2}{m^2 c^5} \int \frac{(\varepsilon - eu') \left(p_z - \frac{e}{c} A \right)}{u_r u'_r} Id\tau, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$I = \frac{\omega}{\omega_0 T_0} + k \frac{\partial f_0}{\partial p_z}; \quad d\tau = d\varepsilon dp_\varphi dp_z.$$

Пределы интегрирования определяются условием действительности u_r и u'_r

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{mc} \sqrt{\frac{1}{c^2} (\varepsilon - eu)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A \right)^2 - m^2 c^2}; \\ u'_r &= \frac{1}{mc} \sqrt{\frac{1}{c^2} (\varepsilon - eu')^2 - \frac{p_\varphi^2}{r'^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A' \right)^2 - m^2 c^2}. \end{aligned}$$

Уравнения (5.8) представляют собой систему обыкновенных интегродифференциальных уравнений. Напомним, что

исходные кинетические уравнения для ионов и электронов и уравнения Максвелла представляют собой систему интегродифференциальных уравнений в частных производных от четырех переменных, не считая трех переменных φ , z и t , которые исключаются сразу.

В отличие от первоначальных уравнений, система (5. 8) допускает по крайней мере возможность численного решения и исследования. В некоторых частных случаях это исследование может оказаться довольно простым.

§ 6. Исследование собственных колебаний пучка при специально выбранной начальной функции распределения

Уравнения собственных колебаний пучка являются системой интегродифференциальных уравнений, решение которой при произвольной функции распределения f_0 весьма затруднительно.

Ниже рассмотрим определенный вид функции распределения, при котором система интегродифференциальных уравнений превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наличие интегрального члена обусловлено тем, что, вследствие большой частоты невозмущенного движения электронов по сравнению с частотами самосогласованных колебаний, их взаимодействие усредняется по орбите электронов. Так как амплитуды потенциалов a_i зависят только от радиуса, то естественно ожидать, что интегральный член резко упростится, если радиальная скорость электронов равна нулю.

При таком выборе распределения электронов по скоростям система (5. 8) уже превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, однако коэффициенты содержат весьма сложные квадратуры. Для упрощения последних сделаем еще два следующих предложения:

1) невозмущенные продольные скорости всех электронов одинаковы ($v_z = v_0$);

2) невозмущенные плотности электронов и ионов равны между собой, постоянны по сечению вплоть до некоторого радиуса r^* и равны нулю при больших радиусах.

Этим определяется вид невозмущенных потенциалов

$$U(r) = 0; \quad A(r) = -\pi e n_0 \frac{v_0}{c} r^2. \quad (6. 1)$$

Выбранными условиями, совместно с уравнениями механики, полностью определяется невозмущенная функция распределения. Как легко видеть, уравнения механики на каждом

радиусе допускают определенную скорость, при которой центробежная сила уравновешивается магнитным стягиванием.

Таким образом, будем рассматривать незаряженный пучок постоянной плотности, в котором электроны движутся по цилиндрическим спиральям с одинаковой продольной скоростью. Несмотря на специальный характер выбранного распределения, изучение колебаний в этом случае представляет большой интерес, во-первых, потому, что многие существенные черты самосогласованных колебаний слабо зависят от вида распределения; во-вторых, поскольку вопрос касается устойчивости, следует ожидать, что выбранное нами распределение, обладающее дополнительной упорядоченностью по сравнению с истинным (т. е. меньшей величиной энтропии), по крайней мере не более устойчиво, чем истинное. Вследствие этого естественно ожидать, что область устойчивости пучка в действительности не хуже, чем в выбранном нами специальном случае.

В дальнейших вычислениях положено $m=1$, $c=1$, $r^*=1$, и введена постоянная

$$v = \pi \frac{e^2}{mc^2} n_0 r^{*2}.$$

Так как невозмущенные потенциалы зависят только от радиуса, то условиями движения электрона на постоянном радиусе являются

$$u_r = 0; \quad \frac{du_r}{dt} = 0$$

в произвольный момент времени. Так как u_r задана как функция радиуса, то второе условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{du_r}{dt} = u_r \frac{du_r}{dr} = \frac{1}{2} \frac{du_r^2}{dr} = 0.$$

Таким образом, получаем следующие условия:

$$u_r^2 = \varepsilon^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - (p_z + v v_0 r^2)^2 = 0; \quad (6.2)$$

$$\frac{du_r^2}{dr} = 2 \frac{p_\varphi^2}{r^3} - 4v v_0 r (p_z + v v_0 r^2) = 0 *. \quad (6.3)$$

* Нетрудно видеть, что (6.3) представляет собой условие равенства центробежной силы и силы магнитного стягивания

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = H_\varphi v_z.$$

Одно условие (6.2) при заданных импульсах определяет два значения r , при которых радиальная скорость обращается в нуль ($r_1 = r_{\text{мин}}$; $r_2 = r_{\text{макс}}$); (6.3) есть условие совпадения минимального и максимального радиуса.

Условие постоянства продольной скорости имеет следующий вид:

$$v_z = \frac{p_z + \nu v_0 r^2}{\varepsilon} = v_0. \quad (6.4)$$

После исключения r из (6.2—6.4) остаются два соотношения между обобщенными импульсами

$$p_z = p_z^0(\varepsilon); \quad p_\varphi = \pm p_\varphi^0(\varepsilon),$$

где

$$p_z^0(\varepsilon) = v_0 \varepsilon - \frac{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}{2\nu v_0 \varepsilon} = v_0 \varepsilon - \nu v_0 r_0^2(\varepsilon); \quad (6.5)$$

$$p_\varphi^0(\varepsilon) = \frac{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}{\sqrt{2\nu v_0^2 \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1} r_0(\varepsilon); \quad (6.6)$$

$$\gamma_0 = (1 - v_0^2)^{-1/2}; \quad r_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_0^2} - 1}{2\nu v_0^2 \varepsilon}}. \quad (6.7)$$

Таким образом, функция распределения имеет следующий вид:

$$f_0(\varepsilon; p_\varphi; p_z) = F(\varepsilon) \delta(p_z - p_z^0) \frac{\delta(p_\varphi - p_\varphi^0) + \delta(p_\varphi + p_\varphi^0)}{2}^*. \quad (6.8)$$

Вид функции $F(\varepsilon)$ определяется условием постоянства плотности электронов.

В общем случае плотность выражается через функцию распределения следующим образом:

$$n^{(0)} = \frac{1}{r} \int f_0 \frac{\varepsilon - eu}{u_r} dp_\varphi dp_z d\varepsilon. \quad (6.9)$$

* Полусумма δ -функций от p_φ выбрана с тем, чтобы не было тока по φ . Это означает, что половина электронов вращается в одном направлении, половина — в другом.

Интегрирование производится по области действительности u_r , которая ограничена положительной полостью эллиптического гиперboloида (рис. 1)

$$(\epsilon - eu)^2 - \frac{P_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A\right)^2 = 1.$$

Казалось бы, что наличие δ -функций в f_0 позволяет легко провести интегрирование в (6.9) по p_ω и p_z ; однако подста-

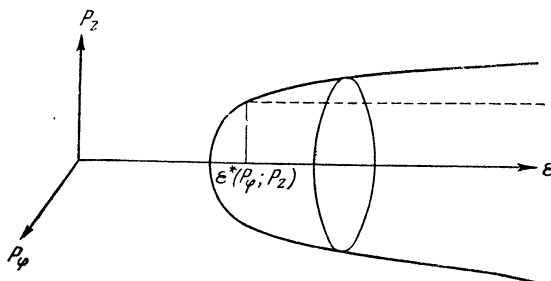


Рис. 1.

новка (6.8) в (6.9) и интегрирование по p_φ и p_z в необходимых пределах приводит к тому, что интеграл по ϵ имеет формально расходящийся вид и остается конечным только вследствие того, что область интегрирования по ϵ обращается при этом в нуль. Раскрытие этой неопределенности путем перехода к пределу в конечном результате влечет за собой очень громоздкие выкладки.

Эти трудности можно обойти, воспользовавшись следующим приемом (который будем неоднократно применять в дальнейшем).

Интеграл по указанной области можно записать в следующем виде, если первое интегрирование проводить по ϵ :

$$\int f_0 \frac{\epsilon - eu}{u_r} d\epsilon dp_\varphi dp_z = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{-\infty}^{\infty} dp_\varphi \int_{\epsilon^*(p_\varphi; p_z)}^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon - eu}{u_r} f_0, \quad (6.10)$$

где

$$\epsilon^*(p_\varphi; p_z) = \sqrt{1 + \frac{P_\varphi^2}{r^2} + \left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2} + eu. \quad (6.11)$$

Будем рассматривать ϵ как комплексную переменную. Так как $\epsilon = \epsilon^*$ является точкой ветвления подынтегральной

функции ($u_r(\varepsilon^*) = 0$), то, как нетрудно видеть, интеграл по ε от ε^* до ε равен с обратным знаком половине интеграла по контуру $L(p_\varphi; p_z)$, показанному на рис. 2.

Если, кроме того, $f_0(\varepsilon; p_\varphi; p_z)$ не имеет особенностей по ε на действительной оси по крайней мере от $1 + eu$ до ∞ , то контур $L(p_\varphi; p_z)$ можно заменить контуром L , охватывающим точку $\varepsilon = 1 + eu$, причем это можно сделать для любых значений p_φ и p_z , так как $\varepsilon^*(p_\varphi; p_z)$ никогда не бывает левее точки $1 + eu$, как это следует из (6.11). Теперь контур инте-

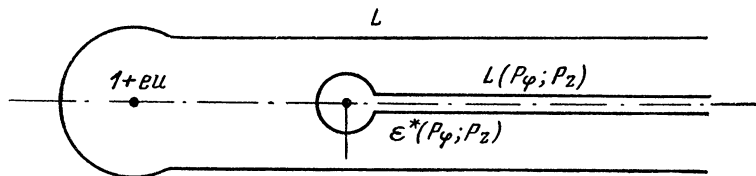


Рис. 2.

грирования по ε уже не зависит от p_φ и p_z , и весь интеграл превращается в трехкратный интеграл с независимыми пределами интегрирования. Но тогда можно менять порядок интегрирования без изменения пределов.

Таким образом, получаем после подстановки (6.8) в (6.9)

$$n_0 = -\frac{1}{2r} \int_L F(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \delta[p_z - p_z^0(\varepsilon)] dp_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta[p_\varphi - p_\varphi^0(\varepsilon)] + \delta[p_\varphi + p_\varphi^0(\varepsilon)]}{2u_r(\varepsilon; p_\varphi; p_z)} dp_\varphi.$$

Интегрируя по p_φ и p_z и используя выражение

$$u_r[\varepsilon; p_z^0(\varepsilon); p_\varphi(\varepsilon); r] = i[\varepsilon - \varepsilon_0(r)] \chi(\varepsilon; r), \quad (6.12)$$

где введена функция $\varepsilon_0(r)$, обратная $r_0(\varepsilon)$ [см. (6.7)],

$$\varepsilon_0(r) = \gamma_0 [v v_0^2 \gamma_0^2 r^2 + \sqrt{1 + v^2 v_0^2 \gamma_0^2 r^2}], \quad (6.13)$$

а

$$\chi(\varepsilon; r) = \frac{\sqrt{r^2 + \frac{2\varepsilon}{v}}}{2v_0 \gamma_0^2 \varepsilon r} \cdot \frac{\varepsilon_0^2 + \gamma_0^2}{\varepsilon_0}, \quad (6.14)$$

получаем

$$n_0 = -\frac{1}{2ir} \int_L \frac{F(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon}{[\varepsilon - \varepsilon_0(r)] \chi(\varepsilon; r)}^* \quad (6.15)$$

Оставшийся интеграл по контуру L сводится к вычету в точке $\varepsilon_0(z) = \varepsilon$

$$n_0 = -\frac{\pi \varepsilon_0 F(\varepsilon_0)}{r \chi(\varepsilon_0; r)}.$$

Рассматривая здесь r как функцию ε_0 ; $r = r_0(\varepsilon_0)$, получим выражение для $F(\varepsilon)$

$$F(\varepsilon) = -\frac{n_0 [r_0(\varepsilon)] r_0(\varepsilon) \cdot \chi[\varepsilon; r_0(\varepsilon)]}{\pi \varepsilon}. \quad (6.16)$$

Считая n_0 постоянной вплоть до r^* , получим из (6.8) и (6.16) функцию распределения, удовлетворяющую всем поставленным условиям

$$\begin{aligned} f_0(\varepsilon, p_\varphi, p_z) = & -\frac{n_0}{2\pi v_0 \gamma_0^2} \frac{\varepsilon^2 + \gamma_0^2}{\varepsilon^3} \sqrt{\frac{(3v_0^2 + 1)\varepsilon^2 - 1}{2v_0^2 \varepsilon}} \times \\ & \times \delta \left[p_z - v_0 \varepsilon + \frac{(1 - v_0^2)\varepsilon^2 - 1}{2v_0 \varepsilon} \right] \times \\ & \times \frac{\delta \left[p_\varphi - \frac{(1 - v_0^2)\varepsilon^2 - 1}{\sqrt{2v_0^2 \varepsilon}} \right] + \delta \left[p_\varphi + \frac{(1 - v_0^2)\varepsilon^2 - 1}{\sqrt{2v_0^2 \varepsilon}} \right]}{2}. \quad (6.17) \end{aligned}$$

Как видно из этого выражения, $f_0(\varepsilon; p_\varphi; p_z)$ не имеет особенностей по ε на действительной оси правее $\varepsilon = 1$, что и было предположено при выводе**.

Для дальнейшего заметим, кроме того, что при наличии δ -функции от $p_\varphi \pm p_\varphi^0$ и $p_z - p_z^0$ область интегрирования фактически представляет собой линию, лежащую на поверхности

* Из (6.15) непосредственно видно, что при интегрировании по действительной оси интеграл формально расходится, о чем упоминалось на стр. 314.

** Следует иметь в виду, что, несмотря на особый характер δ -функции, ее всегда можно выбрать как предел функции, не имеющей особенности в конечной части плоскости, например.

$$\delta(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{\tau}}.$$

гиперboloида, и поэтому можно не следить за особенностями подынтегрального выражения, лежащими между поверхностью гиперboloида и плоскостью $\varepsilon = 1$.

Непосредственное применение формулы (3.12), содержащей производные от f_0 , в данном случае неудобно из-за наличия в f_0 δ -функций. Мы по-прежнему будем интегрировать по p_φ и p_z от $-\infty$ до $+\infty$, а по ε — по контуру L (рис. 2), при этом уже не надо следить за особыми точками подынтегральной функции, лежащими между поверхностью эллиптического гиперboloида (рис. 1) и плоскостью $\varepsilon = 1$.

Интегрируя в (3.12) по частям (при этом можно не обращать внимания на появление расходящихся выражений на поверхности гиперboloида, ибо контур интегрирования не проходит теперь через особые точки), получаем

$$j_i^{(1)} = \frac{e}{2r} \int f_0 d\tau \frac{1}{u_r} \left(a_i - \frac{\langle \tau_\varepsilon a_\varepsilon \rangle}{\langle \tau_\varepsilon k_\varepsilon \rangle} k_i \right) + \frac{e}{2r} \int d\tau \frac{f_0}{u_r} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \left(P_k - \frac{e}{c} A_k \right) \times \\ \times \left(a_k - \frac{\langle \tau_\varepsilon a_\varepsilon \rangle k_k}{\langle \tau_\varepsilon k_\varepsilon \rangle} \right) - \frac{e}{2r} \int d\tau \frac{f_0}{u_r} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) k_k \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\langle \tau_\varepsilon a_\varepsilon \rangle}{\langle \tau_\varepsilon k_\varepsilon \rangle}. \quad (6.18)$$

Подставляя выражение (6.8), интегрируя по p_φ и p_z , получим с учетом (6.12)

$$j_i^{(1)} = \frac{e}{2ri} \int_L d\varepsilon \frac{F}{(\varepsilon - \varepsilon_0) \chi(\varepsilon; r)} (a_i - S^0 k_i) \int_L d\varepsilon \frac{F c_i c_k (a_k - S^0 k_k)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^3 \chi^3(\varepsilon; r)} - \\ - \frac{e}{2ri} \int_L d\varepsilon \frac{F c_i k_k R_k}{(\varepsilon - \varepsilon_0) \chi(\varepsilon; r)}, \quad (6.19)$$

где введены следующие обозначения:

$$S^0 \equiv S^0(\varepsilon) = \left[\frac{\langle \tau_\varepsilon a_\varepsilon \rangle}{\langle \tau_\varepsilon k_\varepsilon \rangle} \right]_{p_\varphi = p_\varphi^0, p_z = p_z^0}; \quad (6.20)$$

$$R_k \equiv R_k(\varepsilon) = \left[\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\langle \tau_\varepsilon a_\varepsilon \rangle}{\langle \tau_\varepsilon k_\varepsilon \rangle} \right]_{p_\varphi = p_\varphi^0, p_z = p_z^0}; \quad (6.21)$$

$$c_i \equiv c_i(\varepsilon; r) = \left[p_i - \frac{e}{c} A_i(r) \right]_{p_\varphi = p_\varphi^0}. \quad (6.22)$$

Интегрирование в (6.19) сводится к вычетам в точке $\varepsilon = \varepsilon_0$, в результате чего придем к следующему результату:

$$\begin{aligned}
 j_i^{(1)} &= \frac{\pi e}{r} \frac{F(\varepsilon_0)}{\chi(\varepsilon_0; r)} \left[a_i(r) - S^0(\varepsilon_0) k_i \right] - \\
 &- \frac{\pi e}{2r} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \frac{F(\varepsilon) c_i(\varepsilon; r) [a_k(r) - S^0(\varepsilon) k_k]}{\chi^3(\varepsilon; r)} \right\}_{\varepsilon=\varepsilon_0} - \\
 &- \frac{\pi e}{r} \frac{F(\varepsilon_0)}{\chi(\varepsilon_0; r)} c_i(\varepsilon_0; r) k_k R_k(\varepsilon_0). \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

Нам остается еще получить явное выражение для функций $S^0(\varepsilon)$ и $R_k(\varepsilon)$.

По определению операции $\langle \tau_\varepsilon \dots \rangle$ интеграл в (3.5) берется между корнями $u_r(p_i; r')$. При $p_\varphi^2 = p_\varphi^{02}(\varepsilon)$ и $p_z = p_z^0(\varepsilon)$ u_r

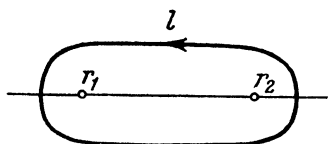


рис. 3.

содержит полный квадрат $[r - r_0(\varepsilon)]^2$, так что интеграл формально расходится, правда, при этом пределы интегрирования сливаются (картина, аналогичная рассмотренной выше при интегрировании по $\varepsilon, p_\varphi, p_z$). Кроме того, даже при произ-

вольных p_φ и p_z дифференцирование $\langle \tau_\varepsilon \dots \rangle$ по ε и p_z невозможно провести в явном виде до взятия интеграла, если он представлен в форме (3.5), из-за появляющихся расходимостей.

Всех этих трудностей можно избежать, если рассматривать r как комплексную переменную. Так как $r = r_1$ и $r = r_2$ являются точками ветвления, то интеграл от r_1 до r_2 можно заменить интегралом по замкнутому контуру l , показанному на рис. 3.

Тогда для $\langle \tau_i L \rangle$ получим

$$\langle \tau_i L \rangle = \oint \frac{p_i - \frac{e}{c} A_i(r')}{u_r'} L(r') dr'. \quad (6.24)$$

В этом выражении, в отличие от (3.5), при взятии производных по p_i достаточно дифференцировать подынтегральное выражение, не обращая внимания на высокие степени u_r в знаменателе, так как контур не проходит через особые точки.

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \langle \tau_k L \rangle = - \oint \frac{\delta_{ik} L}{u_r} dr - \oint \frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \left(p_k - \frac{e}{c} A_k \right)}{u_r^3} L dr \quad (6.25)$$

(использовано выражение для u_r в виде $u_r^2 = -1 - (p_i - eA_i)^2$).

При $p_\varphi = p_\varphi^0(\varepsilon)$ и $p_z = p_z^0(\varepsilon)$ можно записать

$$u_r = -i [r - r_0(\varepsilon)] \psi(\varepsilon; r), \quad (6.26)$$

где

$$\psi(\varepsilon; r) = \frac{\sqrt{v_0 [r_0(\varepsilon) + r]}}{r_0} \sqrt{r^2 + \frac{2\varepsilon}{v}} \quad (6.27)$$

(это выражение отличается от (6.12) тем, что здесь явно выделен множитель $r - r_0(\varepsilon)$, тогда как в (6.12) $\varepsilon = \varepsilon_0(r)$).

Как видно из (6.26), в данном случае обе точки ветвления сливаются в один полюс, и интеграл по замкнутому контуру сводится к вычету в этом полюсе.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle \tau_i L \rangle \Big|_{\substack{p_\varphi = p_\varphi^0 \\ p_z = p_z^0}} &= 2\pi \frac{c_i[\varepsilon; r_0(\varepsilon)] L[r_0(\varepsilon)]}{\psi[\varepsilon; r_0(\varepsilon)]}; \\ \frac{\partial}{\partial p_k} \langle \tau_i L \rangle \Big|_{\substack{p_\varphi = p_\varphi^0 \\ p_z = p_z^0}} &= 2\pi \frac{\delta_{ik} L(r_0)}{\psi(\varepsilon; r_0)} - \pi \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{c_i(\varepsilon; r) c_k(\varepsilon; r) L(r)}{\psi^3(\varepsilon; r)} \right]_{r=r_0(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

В результате для интересующих нас величин, после небольших вычислений, найдем

$$S^0 = S(\varepsilon; r_0) \equiv \frac{c_i(\varepsilon; r_0) a_i(r_0)}{c_k(\varepsilon; r_0) k_k}; \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} k_k R_k &= \left[\frac{k_k}{c_i k_i} (a_k - S^0 k_k) - \frac{1}{2\psi^2} \left\{ (c_i a_i)'' - S^0 (c_i k_i)'' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{(c_i k_i)'}{c_k k_k} \left[(c_i a_i)' - S^0 (c_k a_k)' - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 6 \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} [(c_i a_i)' - S^0 (c_i k_i)'] \right] \right\} \right]_{r=r_0(\varepsilon)}. \quad (6.29) \end{aligned}$$

(штрихами обозначено дифференцирование по r).

Перейдем к вычислению второго члена в (6.23). Для упрощения выкладок запишем его в следующем виде:

$$J_i = \left[\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \frac{F}{\chi^3} c_i c_k k_k (S(\varepsilon; r) - S(\varepsilon; r_0)) \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0}, \quad (6.30)$$

где использовано обозначение (6.28) для $S(\varepsilon; r)$.

Так как множитель $S(\varepsilon; r) - S(\varepsilon; r_0)$ обращается в нуль при $\varepsilon = \varepsilon_0$, то в J_i дают вклад только члены с производными от этого множителя. Далее заметим, что зависимость от ε содер-

жится в $S(\varepsilon; r_0)$ как явно (первый аргумент), так и через $r_0(\varepsilon)$. Производные только по первому аргументу сократятся с равными им производными от $S(\varepsilon; r)$.

Принимая во внимание эти замечания, после несложных вычислений, получим

$$\begin{aligned}
 J_i = & -\frac{F c_i}{\chi^3} \rho^2 [(c_k a_k)'' - S(c_k k_k)'] - \frac{F}{\chi^3} [(c_k a_k)' - S(c_k k_k)'] \times \\
 & \times \left[2\rho c_i \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \frac{F}{\chi^3} - 2\rho^2 c_i \frac{(c_k k_k)'}{c_m k_m} + \rho' c_i + 2\rho \frac{\partial c_i}{\partial \varepsilon} \right] - \\
 & - 2c_i \frac{(c_k k_k)'}{c_m k_m} \frac{\partial c_e}{\partial \varepsilon} (a_e - S k_e) - 2 \frac{F c_i}{\chi^3} \rho \frac{\partial c_k}{\partial \varepsilon} a'_k, \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

где введены обозначения $\rho = \frac{dr}{d\varepsilon_0}$; $\rho' = \frac{d^2 r}{d\varepsilon_0^2}$.

В (6.31), после указанного дифференцирования по r и ε , надо положить везде $\varepsilon = \varepsilon_0(r)$. Нам остается теперь подставить (6.29) и (6.31) в выражение (6.23) и привести подобные члены. При этом необходимо иметь в виду, что величины ψ , χ и ρ при $\varepsilon = \varepsilon_0$ связаны соотношением

$$\left[\frac{\psi(\varepsilon; r) \rho(r)}{\chi(\varepsilon; r)} \right]_{\varepsilon = \varepsilon_0} = 1, \quad (6.32)$$

что можно проверить непосредственным вычислением, но проще воспользоваться определением ψ и χ в (6.12) и (6.26)

$$\left[\frac{\chi(\varepsilon; r)}{\psi(\varepsilon; r)} \right]_{\varepsilon = \varepsilon_0} = \left[\frac{r - r_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} \right]_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} = \left[\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon = \varepsilon_0} = \rho.$$

После проведения указанных операций получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon_0}{en_0} j_i^{(1)} = & - (a_i - S k_i) + \frac{c_i k_k}{c_m k_m} (a_k - S k_k) + \\
 & + \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{c_i \chi}{2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial c_i}{\partial \varepsilon} \right) [(c_k a_k)' - S(c_k k_k)'] - \frac{c_i}{\psi^2} [(c_k a_k)'' - S(c_k k_k)'] + \\
 & + \frac{c_i}{\rho \psi^2} \frac{(c_m k_m)'}{c_e k_e} \frac{\partial c_k}{\partial \varepsilon} (a_k - S k_k) - \frac{c_i}{\rho \psi^2} \frac{\partial c_k}{\partial \varepsilon} a'_k, \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$x = x(r) = \left[6 \frac{\partial \ln \psi}{\partial r} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \frac{F}{\chi^3} - \frac{\rho'}{\rho^2} \right]_{\varepsilon = \varepsilon_0(r)} \quad (6.34)$$

(все функции энергии в (6.33) берутся при $\varepsilon = \varepsilon_0(r)$).

Заметим, что в x входит производная от $F(\varepsilon)$ функции, разрывной при $\varepsilon = \varepsilon_0(1)$, так как плотность n_0 обрывается

при $r=1$. Вследствие этого $\chi(r)$ содержит δ -функцию от $\varepsilon_0(r) - \varepsilon_0(1)$

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_0} = \frac{\partial \ln F}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \neq \varepsilon_0(1)} - \delta[\varepsilon_0(r) - \varepsilon_0(1)] = \frac{\partial \ln F}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon \neq \varepsilon_0(1)} - \rho \delta(r-1),$$

и, следовательно, для $\chi(r)$ можно написать

$$\chi(r) = \chi_0(r) + 2\delta(r-1), \quad (6.35)$$

где $\chi_0(r)$ определяется выражением (6.34) при $\varepsilon \neq \varepsilon_0(1)$.

Члены с δ -функциями от $(r-1)$ представляют собой поверхностные плотности и ток на границе. В действительности, конечно, никаких поверхностных плотности и тока нет. Их появление в формулах связано с тем, что мы считали границу пучка неподвижной, в то время как в действительности она колеблется. Представим себе, что граница сместилась на некоторую величину Δr , тогда в области шириной Δr изменение плотности стало порядка самой плотности n_0 . Можем по-прежнему считать границу пучка неизменной, но для получения правильного выражения для поля вне пучка нужно добавить в виде поверхностных ток и плотность, вышедшие за границу. Несмотря на малость смещения границы, из-за резкого обрыва пучка поверхностные плотности и ток оказываются того же порядка, что и объемные, и обязательно должны учитываться.

Величины ρ , ψ^2 , χ , c_i и их производные, входящие в (6.33), имеют следующий вид (при $\varepsilon = \varepsilon_0(r)$):

$$\begin{aligned} c_1 &= v_0 \varepsilon_0; & c_4 &= i \varepsilon_0; \\ \frac{\partial c_1}{\partial \varepsilon} &= v_0 - 2v_0 \rho^2; & \frac{\partial c_4}{\partial \varepsilon} &= 1; \\ \frac{\partial c_1}{\partial r} &= 2v_0 \rho; & \frac{\partial c_4}{\partial r} &= 0; \\ \psi^2 &= 4v_0^2 (2 + \alpha); & \rho &= (2v_0^2 \varepsilon_0^2 \mu r)^{-1}; \\ \chi_0^2 &= \frac{1}{r} \left(6 - 4\mu \frac{4 + \alpha}{2 + \alpha} \right), \end{aligned} \quad (6.36)$$

где введены обозначения

$$\alpha = \frac{vr^2}{\varepsilon_0(r)}; \quad \mu = \frac{2\gamma_0^2}{\varepsilon_0^2 + \gamma_0^2}. \quad (6.37)$$

Подставляя (6.36) в (6.33), получим окончательно для $j_i^{(1)}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{en_0} j_i^{(1)} = & - \left(a_i - \frac{u - av_0}{\omega - kv_0} k_i \right) \left\{ \frac{c_i}{\varepsilon_0} \frac{k - \omega v_0}{\omega - kv_0} + \frac{2\mu c_i}{v_0 \varepsilon_0 (2 + \alpha)^2} - \right. \\ & - \frac{\alpha}{2 + \alpha} \frac{1}{\omega - kv_0} \left[(\omega - kv_0) \delta_{i1} + \frac{c_i}{\varepsilon_0} k \right] \left. \right\} \frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} + \\ & + \frac{c_i}{4v_0^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{2 + \alpha} \left(\frac{du}{dr} - v_0 \frac{da}{dr} \right) \right] - \\ & - \frac{\alpha \varepsilon_0 \delta_{i1}}{2v_0 (2 + \alpha) r} \left(\frac{du}{dr} - v_0 \frac{da}{dr} \right) + \frac{\varepsilon_0}{en_0} i_i^{(1)} \delta(r - 1), \end{aligned} \quad (6.38)$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{en_0} j_z^{(1)} = & - \left[\frac{\omega}{\gamma_0^2 (\omega - kv_0)} - \frac{\alpha \omega}{(2 + \alpha) (\omega - kv_0)} + \frac{2\mu}{(2 + \alpha)^2} \right] \frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{4v_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{2 + \alpha} \left(\frac{du}{dr} - v_0 \frac{da}{dr} \right) \right] - \\ & - \frac{\alpha \varepsilon_0}{2v_0 (2 + \alpha)^2} \left(\frac{du}{dr} - v_0 \frac{da}{dr} \right) + \frac{\varepsilon_0}{en_0} i_z^{(1)} \delta(r - 1); \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 v_0}{en_0} n^{(1)} = & - \left[\frac{kv_0}{\gamma_0^2 (\omega - kv_0)} - \frac{\alpha kv_0}{(2 + \alpha) (\omega - kv_0)} + \frac{2\mu}{(2 + \alpha)^2} \right] \frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} + \\ & + \frac{\varepsilon_0}{4v_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{2 + \alpha} \left(\frac{du}{dr} - v_0 \frac{da}{dr} \right) \right] + \frac{\varepsilon_0 v_0}{en_0} \sigma^{(1)} \delta(r - 1), \end{aligned} \quad (6.40)$$

где $\sigma^{(1)}$ и $i^{(1)}$ — поверхностные плотность и ток — равны:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{en_0} i^{(1)} = \frac{\varepsilon_0 v_0}{en_0} \sigma^{(1)} = & \frac{1}{2(2 + \alpha)} \left[\frac{a\omega - ku}{\omega - kv_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon_0}{2v_0} \left(\frac{du}{dr} - v_0 \frac{da}{dr} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Таким образом, получим плотность и ток в виде линейных функций потенциалов a и u и их производных с коэффициентами, представляющими собой некоторые функции радиуса r . Подставляя эти выражения в (5.7), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для самосогласованных полей.

δ -Функции, входящие в плотность и ток, будут определять граничные условия. Однако коэффициенты при потен-

циалах в (6.39) и (6.40) еще настолько сложны, что уравнения (5.7) не могут быть решены в известных функциях, и поэтому их исследование в общем виде может быть проведено только численно. В некоторых предельных случаях коэффициенты упрощаются настолько, что уравнение (5.7) удается решить и исследовать аналитически.

§ 7. Дисперсионное уравнение в случае $\nu\gamma_0 \ll 1$

Задача о собственных колебаниях пучка характеризуется двумя параметрами ν и γ_0 . Рассмотрим частный случай соотношения между параметрами, а именно: $\nu\gamma_0 \ll 1$, когда уравнения (6.39) и (6.40) особо упрощаются.

В этом предельном случае величины ε_0 , α и μ , входящие в (6.39) и (6.40), имеют следующий вид:

$$\varepsilon_0 \simeq \gamma_0; \quad \alpha = \frac{\nu r^2}{\gamma_0} \ll 1; \quad \mu \simeq 1.$$

При этом выражения для тока и плотности заметно упрощаются

$$4\pi e j_z^{(1)} = \frac{1}{2\nu_0 r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\frac{du}{dr} - \nu_0 \frac{da}{dr} \right) \right] - \frac{2\nu}{\gamma_0} \frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} \left[1 + \frac{2\omega}{\gamma_0^2 (\omega - kv_0)} \right]; \quad (7.1)$$

$$4\pi e \nu_0 n^{(1)} = \frac{1}{2\nu_0 r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\frac{du}{dr} - \nu_0 \frac{da}{dr} \right) \right] - \frac{2\nu}{\gamma_0} \frac{a\omega - uk}{\omega - kv_0} \left[1 + \frac{2kv_0}{\gamma_0^2 (\omega - kv_0)} \right]; \quad (7.2)$$

$$4\pi e i^{(1)} = 4\pi e \nu_0 \sigma^{(1)} = -\frac{1}{2\nu_0} \left(\frac{du}{dr} - \nu_0 \frac{da}{dr} \right) + \frac{\nu}{\gamma_0} \frac{a\omega - ku}{\omega - kv_0}. \quad (7.3)$$

Подставляя (7.1) и (7.2) в (5.7), получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно a и u . Удобнее, однако, перейти к уравнениям для полей. Замечая, что в нашем случае

$$a\omega - ku = iE_z; \quad \frac{du}{dr} = -E_r; \quad \frac{da}{dr} = -H, \quad (7.4)$$

получим вместо (5.7) следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH) - i\omega \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) E_z &= 4\pi e j_z^{(1)}; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r E_r \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \right] - ik \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) E_z &= 4\pi e n^{(1)}; \quad r < 1; \quad (7.5) \\ i \frac{dE_z}{dr} &= -\omega H + k E_r. \end{aligned}$$

В области $r > 1$ имеем обычную систему уравнений Максвелла в пустоте

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH) - i\omega E_z &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) - ik E_z &= 0; \quad (7.6) \\ i \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -\omega H + k E_r. \end{aligned}$$

Граничные условия при $r = 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_r'' - \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) E_z' &= 4\pi e \sigma^{(1)}; \\ H'' - H' &= 4\pi e i^{(1)}; \quad (7.7) \\ E_z'' = E_z' &= 0, \end{aligned}$$

где $\sigma^{(1)}$ и $i^{(1)}$ даются формулой (7.3) (величины с одним штрихом относятся к внутренней области, с двумя штрихами — к внешней).

Уравнения (7.5) с учетом выражений для $j_z^{(1)}$ и $n^{(1)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (rH) + \frac{1}{2v_0 r} \frac{d}{dr} (r E_r) + (p + q\omega) i E_z &= 0; \\ -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (rH) + \left[\frac{1}{2v_0} + v_0 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \right] \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) + \\ + (p + qk v_0) i E_z &= 0; \quad (7.8) \\ i \frac{dE_z}{dr} &= -\omega H + k E_r, \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{2\nu}{\gamma_0 (\omega - kv_0)}; \quad q = \frac{4\nu}{\gamma_0^3 (\omega - kv_0)^2} - \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right). \quad (7.9)$$

Из первых двух уравнений в (7.9) можно выразить $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH)$ и $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_r)$ через E_z , после чего, применяя операцию $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r$ к третьему уравнению и заменяя $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH)$ и $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_r)$ на их выражения через E_z , получим одно уравнение 2-го порядка относительно E_z

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) + \eta^2 E_z = 0, \quad (7.10)$$

где

$$\eta^2 = \frac{1}{1 + v_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \left\{ q (\omega - kv_0)^2 + \right. \\ \left. + 2(p + q\omega) \left[kv_0 - \omega v_0^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \right] \right\}. \quad (7.11)$$

В области $r > 1$ аналогичным путем придем к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) - (k^2 - \omega^2) E_z = 0. \quad (7.12)$$

На границе $r=1$ E_z должно быть непрерывно. Граничные условия для $\frac{dE_z}{dr}$ получим из третьего уравнения в (7.5) и (7.6), из которого следует

$$i \left(\frac{dE'_z}{dr} - \frac{dE'_r}{dr} \right) = -\omega (H'' - H') + k (E'_r - E'_z),$$

что с учетом (7.7) и (7.3) можно привести к виду

$$\frac{dE''_z}{dr} = \frac{qv_0(k^2 - \omega^2) + p(k - \omega v_0)}{v_0 \eta^2} \frac{dE'_z}{dr} + \frac{\nu(k - \omega v_0)}{v_0 \gamma_0 (\omega - kv_0)} E'_z. \quad (7.13)$$

Мы будем рассматривать только случай $k^2 - \omega^2 > 0$, в котором энергия электромагнитного поля вне пучка на единицу длины остается конечной, как бы ни был велик радиус трубы, в которой находится пучок, что даст возможность рассматривать бесконечную внешнюю область. При $k^2 - \omega^2 < 0$ энергия поля растет с радиусом трубы до бесконечности, и поэтому задача принципиально зависит от проводимости и радиуса внешней трубы, даже при очень большом радиусе последней.

Решение уравнения (7.12), достаточно быстро убывающее на бесконечности, имеет вид

$$E_z(r) = c_1 K_0(\sqrt{k^2 - \omega^2} r), \quad (7.14)$$

где $K_0(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Ограниченным в нуле решением уравнения (7.10) является

$$E_z(r) = \mathcal{J}_0(\eta r). \quad (7.15)$$

Подставляя (7.14) и (7.15) в граничные условия $E_z''|_{r=1} = E_z'|_{r=1}$ и (7.13) и исключая постоянную c_1 , получим

$$\begin{aligned} & -\sqrt{k^2 - \omega^2} \frac{K_1(\sqrt{k^2 - \omega^2})}{K_0(\sqrt{k^2 - \omega^2})} = \\ & = \frac{-qv_0(k^2 - \omega^2) + p(k - \omega v_0)}{v_0 \eta} \cdot \frac{\mathcal{J}_1(\eta)}{\mathcal{J}_0(\eta)} + \frac{v(k - \omega v_0)}{v_0 \gamma_0(\omega - kv_0)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Так как для рассматриваемых колебаний всегда $|kr| \ll 1$ (что является условием адиабатичности колебаний по отношению к движению электронов), то в (7.16) можно разложить K_1 и K_0 и ограничиться первым членом разложения. В результате получим

$$\frac{qv_0(k^2 - \omega^2) + p(k - \omega v_0)}{\eta} \frac{\mathcal{J}_1(\eta)}{\mathcal{J}_0(\eta)} = \frac{v(k - \omega v_0)}{\gamma_0(\omega - kv_0)} + \frac{v}{L}, \quad (7.17)$$

где

$$L = \ln \frac{2}{C \sqrt{(k^2 - \omega^2)}};$$

$C = 0,577$ — постоянная Эйлера.

Подставляя выражения (7.9) для q и p и вводя фазовую скорость $v_\Phi = \frac{\omega}{k}$, получим окончательно

$$\begin{aligned} & \left[\frac{4v_0(1 - v_\Phi)^2}{\gamma_0(v_\Phi - v_0)^2} + \frac{2v(1 - v_0 v_\Phi)}{\gamma_0(v_\Phi - v_0)} - \xi k^2 v_0^2 (1 - v_\Phi^2) \right] \frac{\mathcal{J}_1(\eta)}{\mathcal{J}_0(\eta)} = \\ & = \frac{v}{L} + \frac{v(1 - v_\Phi v_0)}{\gamma_0(v_\Phi - v_0)}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где

$$\xi = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\Omega^2}{k^2 v_\Phi^2} = 1 - \frac{4\nu}{Mk^2 v_\Phi^2},$$

а выражение для η (7.11) можно представить в виде

$$\eta^2 = \frac{1}{1 + \xi v_0^2} \left\{ \frac{8\nu v_0 v_\Phi (1 - \xi v_0 v_\Phi)}{\gamma_0^3 (v_\Phi - v_0)^2} - \frac{4\nu}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)} [v_\Phi (1 + \xi v_0^2) - v_0^2 (v_\Phi + v_0)] + \xi k^2 (v_\Phi - v_0)^2 - 2\xi k^2 v_0^2 (1 - \xi v_0^2) \right\}. \quad (7.19)$$

Из выражения (7.19) видно, что везде, кроме узких областей вблизи $v_\Phi = v_0$ и $1 + \xi v_0^2 = 0$ (т. е. $\omega^2 = \Omega^2 \frac{v_0^2}{1 + v_0^2}$), выполняется соотношение $\eta \ll 1$.

Вблизи области $1 + \xi v_0^2 = 0$ выражение для η^2 имеет вид

$$\eta^2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{4\nu (v_\Phi + v_0)}{\gamma_0 (v_\Phi - v_0)^2} [2v_\Phi - v_0^2 (v_\Phi + v_0)] + \frac{k^2}{v_0^2} (v_0^2 + v_\Phi^2) \right\}, \quad (7.20)$$

где

$$\Delta = 1 + \xi v_0^2,$$

и, следовательно, условие $\eta \ll 1$ почти для всех v_Φ означает

$$\Delta \gg \frac{\nu}{\gamma_0}; \quad \Delta \gg k^2. \quad (7.21)$$

Вблизи области $v_\Phi = v_0$ имеем для η^2 выражение

$$\eta^2 = \frac{4\nu v_0^2 \sigma}{\delta^2 \gamma_0^5 \left(1 - \frac{\sigma}{2\gamma_0^2}\right)}, \quad (7.22)$$

где

$$\delta = v_\Phi - v_0; \quad \sigma = 1 + \frac{\Omega^2 v_0^2}{k^2} = 1 + \frac{4\nu \gamma_0^2}{Mk^2},$$

и условие $\eta \ll 1$ равносильно

$$\delta^2 = (v_\Phi - v_0)^2 \gg \frac{4\nu v_0^2 \sigma}{\gamma_0^5 \left(1 - \frac{\sigma}{2\gamma_0^2}\right)}. \quad (7.23)$$

Ограничиваясь областью, где выполняется условие $\eta \ll 1$, можно в (7.18) разложить $\frac{\mathcal{A}_1(\eta)}{\mathcal{A}_0(\eta)}$, в результате чего получим

$$\frac{4\nu(1-v_\Phi^2)}{\gamma_0^3(v_\Phi-v_0)^2} - \xi k^2(1-v_\Phi^2) = \frac{2}{L}, \quad (7.24)$$

что после подстановки выражения для ξ можно записать в следующем виде:

$$\frac{2L\nu}{\gamma_0^3} \frac{1}{(v_\Phi-v_0)^2} + \frac{2L\nu}{M} \frac{1}{v_\Phi^2} = \frac{1}{1-v_\Phi^2} + \frac{Lk^2}{2}. \quad (7.25)$$

Вторым членом в правой части можно пренебречь по сравнению с первым вследствие малости k ($kr \ll 1$), так что дисперсионное уравнение примет вид

$$\frac{2L\nu}{\gamma_0^3} \frac{1}{(v_\Phi-v_0)^2} + \frac{2L\nu}{M} \frac{1}{v_\Phi^2} = \frac{1}{1-v_\Phi^2}. \quad (7.26)$$

Таким образом, в этом приближении фазовая скорость не зависит от волнового вектора k (не считая логарифмической зависимости через L), в отличие от обычной плазмы, где от k не зависит частота ω .

Это уравнение в точности совпадает с уравнением для продольных колебаний пучка, полученным в [1], в предположении, что частицы могут двигаться только вдоль пучка.

Напомним, что при выводе уравнения (7.26) было сделано предположение (7.23), исключающее значения v_Φ , очень близкое к v_0 . Легко показать, что хотя уравнение (7.26) имеет корни, близкие к v_0 , эта близость не настолько велика, чтобы нарушить условие (7.23).

Мы исследовали устойчивость пучка при $\nu\gamma_0 \ll 1$ по отношению к волнам с фазовой скоростью, меньшей скорости света ($k^2 - \omega^2 > 0$), когда можно пренебречь влиянием внешней трубы. Разработанный в этой главе метод дает возможность исследовать и другие случаи. Особый интерес представляет исследование поведения пучка с учетом влияния стенок как для фазовой скорости, большей c , так и для длин-

ных волн с фазовой скоростью, меньшей c . В этом случае к двум взаимодействующим колебательным системам (электронный и ионный газ) прибавляется еще третья — резонирующая полость, которая, в зависимости от условий, может приводить как к раскачке, так и к затуханию.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. И. Б у д к е р, Отчет АН СССР, 1953 г.; Атомная энергия, 1, № 5 9 (1956).
 2. Г. И. Б у д к е р, С. Т. Б е л я е в, см. настоящий том, стр. 330.
 3. Г. И. Б у д к е р, С. Т. Б е л я е в, Отчет АН СССР, 1953 г.; ДАН СССР, 107, 807 (1956).
 4. Л. Д. Л а н д а у, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
-

Г. И. Будкер, С. Т. Беляев

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА ПРИ РЕДКИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ *

Предлагается метод упрощения кинетического уравнения при редких столкновениях. Найдено соответствующее уравнение для релятивистского электронного газа, которое используется для исследования стационарного состояния стабилизированного электронного пучка.

§ 1. Введение

Кинетическое уравнение для частиц во внешнем поле с учетом столкновений представляет собой интегродифференциальное уравнение семи переменных (трех импульсов, трех координат и времени), которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H; f] = st(f), \quad (1.1)$$

где $[;]$ означают скобки Пуассона, а $st(f)$ — столкновительный член. Левая часть (1.1) описывает движение частиц во внешних полях, правая — влияние столкновений. Если τ — время свободного пробега, а ω — собственные частоты частиц во внешнем поле, то в случаях $\omega\tau \ll 1$ и $\omega\tau \gg 1$ следует ожидать существенных упрощений (1.1). Действительно, при $\omega\tau \ll 1$, т. е. при частых столкновениях, существует гидродинамическое (диффузионное) приближение. Смысл этого приближения состоит в том, что, вследствие большой величины столкновительного члена, в каждой точке пространства быстро устанавливается максвелловское распределение по

* Работа выполнена в 1954 г.

скоростям. Уравнение (1.1) в этом случае сводится к системе уравнений гидродинамики, теплопроводности и диффузии, которые являются уравнениями одних пространственных координат и времени [1].

Второй предельный случай ($\omega\tau \gg 1$) до сих пор не привлекал к себе достаточно внимания и практически не разработан. Между тем в этом случае можно разработать единый метод упрощения уравнения (1.1) и сведения к уравнению для одной функции трех переменных (и времени). Для этого необходимо от обычных координат и импульсов перейти к переменным действиям I_α и угловым переменным ϑ_α невозмущенного столкновениями движения. Тогда распределение можно искать как функцию только I_α , ибо при наличии зависимости частоты от I_α за достаточно большое время (без столкновений) устанавливается равномерное распределение частиц по угловым переменным («размешивание»). Подставляя $f(I_\alpha, t)$ в (1.1), получим

$$\frac{\partial f(I_\alpha, t)}{\partial t} = st [f(I_\alpha, t); I_\alpha; \vartheta_\alpha] \quad (1.2)$$

(I_α являются интегралами движения, поэтому $[H; f(I_\alpha)] = 0$). Усредняя (1.2) по ϑ_α , получим окончательное уравнение

$$\frac{\partial f(I_\alpha, t)}{\partial t} = \overline{st} [f(I_\alpha); I_\alpha], \quad (1.3)$$

представляющее собой искомое уравнение трех переменных при редких столкновениях ($\omega\tau \gg 1$). Уравнение (1.3) справедливо не только в постоянных полях, но и в полях, медленно зависящих от времени, ибо переменные действия I_α являются адиабатическими инвариантами.

Кроме намеченного выше метода получения упрощенного уравнения в случае $\omega\tau \gg 1$ возможен еще другой, эквивалентный, подход к задаче, а именно: составление кинетического уравнения в пространстве интегралов движения. Для этого вводится функция интегралов движения Φ , представляющая собой полное число частиц, имеющих заданные значения интегралов движения. При редких столкновениях оказывается возможным ввести понятие вероятности изменения интегралов движения вследствие столкновений как функцию этих интегралов. Тогда для Φ можно составить кинетическое уравнение, хотя число переменных у Φ меньше, чем у канонической функции f (при частых столкновениях этого сделать нельзя). Если существенны малые изменения импульсов при каждом столкновении, то уравнение принимает фоккер-планковский вид. В случае, когда возмущения могут быть опи-

саны дополнительным гамильтонианом, средние значения отклонений удастся выразить через средние квадратичные, и уравнение принимает симметричный вид типа уравнения Л. Ландау [2].

Ниже рассматривается конкретная задача о поведении электронного газа в определенных полях. Такая задача возникает при исследовании поведения электронного стабилизированного пучка (СЭП) [3] в электронной системе координат. В этой системе плотность ионов много больше плотности электронов, так что можно пренебречь электрон-электронными столкновениями по сравнению с ион-электронными. При этом движение ионов можно считать прямолинейным. Несмотря на то, что решается конкретная задача, метод решения носит общий характер.

§ 2. Упрощенное кинетическое уравнение для электронов в электрическом и магнитном поле стабилизированного электронного пучка

В работе [4] нами было получено кинетическое уравнение для релятивистского электронного газа, которое было записано в двух видах: в релятивистски инвариантном виде для функции восьми переменных и в неинвариантной форме для обычной функции распределения. Намеченную во введении программу упрощения уравнения можно провести как в той, так и в другой форме. Ограничимся упрощением неинвариантного уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H; f] = -\frac{\partial j_\alpha}{\partial p_\alpha}; \quad j_\alpha = 2\pi e^2 e'^2 L \int d^3 p' \frac{w^{\alpha\beta}}{\gamma\gamma'} \left\{ f \frac{\partial f'}{\partial p'_\beta} - f' \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right\}, \quad (2.1)$$

где

$$w^{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2 \gamma'^2 (1 - \beta_\sigma \beta'_\sigma)^2}{c [\gamma^2 \gamma'^2 (1 - \beta_\sigma \beta'_\sigma)^2 - 1]^{3/2}} \{ [\gamma^2 \gamma'^2 (1 - \beta_\sigma \beta'_\sigma)^2 - 1] \delta_{\alpha\beta} - \gamma^2 \beta_\alpha \beta_\beta - \\ - \gamma'^2 \beta'_\alpha \beta'_\beta + \gamma^2 \gamma'^2 (1 - \beta_\sigma \beta'_\sigma) (\beta_\alpha \beta'_\beta + \beta'_\alpha \beta_\beta) \}. \quad (2.2)$$

Для интересующей нас задачи электронного стабилизированного пучка подставляем функцию распределения ионов в виде

$$f_2(p_2^\alpha) = n_2 \delta(p_2^x) \delta(p_2^y) \delta(p_2^z - \beta_2 \gamma_2 m_2),$$

где n_2 — плотность ионов в электронной системе координат. Пренебрегая электрон-электронными столкновениями и отбрасывая члены порядка m/m_2 , получим из (2.1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [H; f_1] = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{\partial}{\partial p_{1\alpha}} \left[\frac{\tilde{w}^{\alpha\beta}}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\partial f_1}{\partial p_{1\beta}} \right], \quad (2.3)$$

где

$$\tilde{w}^{\alpha\beta} = \frac{1}{n_2} \int f_2 w^{\alpha\beta} d^3 p_2. \quad (2.4)$$

В слабо заряженном пучке можно считать n_2 не зависящей от радиуса r и области, занятой электронами. Учитывая, что скорость ионов в электронной системе близка к скорости света ($\gamma_2 \gg 1$), а также то, что в этой системе $n_2 \gg n_1$ (см. [3]), получим с точностью до $\gamma_2 - 2$ для потенциалов электрического и магнитного поля внутри пучка

$$e\varphi(r) = eA_z(r) = \frac{1}{2} k^2 r^2; \quad A_\varphi = A_r = 0; \\ (k^2 = 2\pi |e_1 e_2| n_2). \quad (2.5)$$

При данных полях осуществляется один из немногих случаев, когда уравнения движения релятивистской частицы могут быть явно решены в элементарных функциях.

Используя это, мы сможем в явном виде выразить переменные действия, провести всю намеченную во введении программу до конца и получить уравнение для электронного газа в стабилизированном электронном пучке.

Введем в пространстве импульсов ортогональную систему координат $(p_1; p_2; p_3)$ так, чтобы в данной точке

$$p_1 = p_z; \quad p_2 = \frac{p_\varphi}{r}; \quad p_3 = p_r, \quad (2.6)$$

где p_r , p_φ и p_z — обобщенные импульсы, сопряженные r , φ , z . Тензор $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ имеет в этой системе координат следующий вид:

$$\tilde{w}^{\alpha\beta} = \left\{ \begin{array}{lll} v^2; & 0; & \sqrt{2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}} \\ 0 & v^2 & \frac{u}{r} \\ \sqrt{2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}}; & \frac{u}{r}; & \frac{2w}{v^2} - k^2 r^2, \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

где введены интегралы движения

$$w = \frac{\varepsilon^2 - p_z^2 - 1}{2}; \quad (2.8)$$

$$u = p_\varphi;$$

$$v = \varepsilon - p_z;$$

$$\varepsilon = \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \left(p_z - \frac{k^2 r^2}{2}\right)^2 + 1 + \frac{k^2 r^2}{2}} - \text{полная энергия частиц.}$$

Переменными действиями в поле с аксиальной симметрией являются

$$I_1 = \frac{1}{2} \oint p_r dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{(\varepsilon - e\varphi)^2 - \frac{p_\varphi^2}{r^2} - \left(p_z - \frac{e}{c} A_z\right)^2 - 1} dr; \quad (2.9)$$

$$I_2 = p_\varphi;$$

$$I_3 = p_z.$$

При выбранных потенциалах (2.5) выражение для I_1 легко интегрируется

$$I_1 = \frac{\varepsilon^2 - p_z^2 - 1}{2k\sqrt{\varepsilon - p_z}} - p_\varphi = \frac{w}{kv} - u. \quad (2.10)$$

Канонически сопряженные переменным действия координаты ϑ_α находятся дифференцированием по I_α производящей функции

$$S = \int \sqrt{\left[\varepsilon(I_\alpha) - \frac{k^2 r^2}{2}\right]^2 - \frac{I_2^2}{r^2} - \left(I_3 - \frac{k^2 r^2}{2}\right)^2 - 1} dr +$$

$$+ I_2 \varphi + I_3 z, \quad (2.11)$$

где $\varepsilon(I_\alpha)$ — энергия, выраженная как функция переменных действий с помощью (2.9) и (2.10).

Нетрудно увидеть, что r выражается только через одну координату ϑ_1 (и переменные действия). Следовательно, потенциалы, зависящие только от r , в новых переменных не будут зависеть от ϑ_2 и ϑ_3 . Переменные ϑ_2 и ϑ_3 имеют наглядный смысл. Так, например, можно показать, что величина Δz , равная изменению величины z за период радиальных колебаний T , равна соответствующему изменению ϑ_2 , а $\dot{\vartheta}_3$ представляет собой усредненную за период скорость по оси z .

Как легко показать

$$T = \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon} = \frac{1+w+v^4}{2kv^3}; \quad \Delta z = \Delta \vartheta_3 = \frac{1+w-v^4}{2kv^3}; \quad (2.12)$$

$$\dot{\vartheta}_3 = v_z = \frac{\Delta z}{T} = \frac{1+w-v^4}{1+w+v^4}. \quad (2.13)$$

Для того чтобы в уравнении (2.4) перейти к новым координатам, будем формально рассматривать его правую часть как шестимерную дивергенцию в фазовом пространстве трех импульсов и трех координат. При этом в исходной системе координат следует положить равными нулю все компоненты тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$, у которых хотя бы один из индексов координатный*.

Если рассматривать $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ как шестимерный контрвариантный тензор, то выражение для потока в произвольных координатах имеет вид

$$j^\mu = -2\pi e_1^2 e_2^2 L n' \frac{\tilde{w}^{\mu\nu}}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (2.14)$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \dots, 6).$$

Тогда

$$\operatorname{div} j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\sqrt{g} j^\mu), \quad (2.15)$$

где g — детерминант метрического тензора.

Если новые переменные канонически сопряженные, то $g=1$. Поскольку левая часть уравнения (2.1) сохраняет свой вид при канонических преобразованиях координат, кинетическое уравнение в любых канонически сопряженных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} f \right) - \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial \vartheta_\alpha} f \right) = - \left(\frac{\partial j^p_\alpha}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial y^v_\alpha}{\partial \vartheta_\alpha} \right) \quad (2.16)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3) \bullet$$

Выберем в качестве новых координат переменные действия и угловые переменные ϑ_α . Тогда $\frac{\partial H}{\partial \vartheta_\alpha} = 0$, так как переменные действия являются интегралами движения.

* Этот прием по существу не является формальным. Правая часть уравнения (2.4), вообще говоря, должна представлять собой шестимерную дивергенцию. Равенство нулю пространственных компонент потока связано с тем, что столкновение рассматривается в одной точке физического пространства, и частицы при столкновении практически не успевают сместиться.

Чтобы получить окончательное уравнение в нашем приближении, проинтегрируем (2.16) по угловым переменным от 0 до 2π , т. е. по периодам этих переменных. Интегралы от производных по ϑ_α равны нулю из условия периодичности. Так как пределы интегрирования не зависят от импульсов, а функция f — от координат, то (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(R^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p^\beta} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (2.17)$$

где введено обозначение

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\gamma_2} \int_0^{2\pi} d^3\vartheta \frac{\tilde{w}^{\alpha\beta}}{\gamma_1}. \quad (2.18)$$

Строго говоря, этот результат справедлив, если движение по всем первоначальным координатам финитно и для всех трех частот справедливо соотношение $\omega_\alpha \tau \gg 1$. Если изменение по какой-либо координате инфинитно, то по соответствующей частоте условие $\omega \tau \gg 1$ заведомо не выполняется. В нашем случае надо интегрировать (2.16) только по тем ϑ_α , которые соответствуют финитным координатам, т. е. по ϑ_1 и ϑ_2 . При этом и в правой, и в левой части (2.17) останутся производные по ϑ_3 , а в остальном уравнение не изменится, так как потенциалы, а следовательно, и $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ зависят только от ϑ_1 ; $\frac{\partial f}{\partial \vartheta_3}$ мало по сравнению с $\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$ (как $\frac{1}{\omega\tau}$), поэтому в правой части производной по ϑ_3 можно пренебречь, и (2.17) примет вид*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \tilde{z} \frac{\partial f}{\partial z} = 2\pi n_2 e_1^2 e_2^2 L \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(R^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_\beta} \right). \quad (2.19)$$

Как видно из (2.17) и (2.18), в уравнение входят только чисто импульсные компоненты шестимерного тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$. С другой стороны, в исходной системе координат только чисто импульсные компоненты этого тензора отличны от нуля. Таким образом, при вычислении тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ в координатах I_α , ϑ_α из 36 коэффициентов преобразования достаточно знать только девять, а именно $\frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\beta}$, которые легко получить из (2.9) и (2.10).

* Всегда рассматриваются малые градиенты по оси z

$$\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{f} \ll 1.$$

Компоненты тензора $\tilde{w}^{\alpha\beta}$ в новой системе координат находятся, согласно закону преобразования контравариантных тензоров

$$\tilde{w}^{\alpha\beta'} = \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\gamma} \frac{\partial I_{\beta'}}{\partial p_\sigma} \tilde{w}^{\gamma\sigma}$$

с учетом (2.8) и (2.9).

Тензор $\tilde{w}^{\alpha\beta'}$ зависит только от r . С другой стороны, как уже указывалось, r выражается только через одну угловую переменную ϑ_1 . Таким образом, в (2.18) фактически остается интегрирование только по ϑ_1 . Можно перейти к интегрированию только по r . Из (2.11) и (2.12) следует

$$d\vartheta_1 = \frac{1}{T} \frac{\varepsilon - \frac{k^2 r^2}{2}}{\sqrt{2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}}} dr. \quad (2.20)$$

В результате после не сложных, но громоздких вычислений, получаем

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{kvT} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{2}{k^2}(w - kvu); & -\frac{1}{k^2}(w - kvu); & \frac{1}{kv}(w - kvu); \\ -\frac{1}{k^2}(w - kvu); & \frac{w}{k^2}; & u; \\ \frac{1}{kv}(w - kvu); & u; & \frac{w}{v^2}. \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

Тензор $R^{\alpha\beta}$ выражается через переменные w , u и v . Поэтому естественно записать кинетическое уравнение (2.17) в этих переменных.

Для перехода к другим переменным правую часть уравнения (2.17) удобно рассматривать как тензорное выражение в трехмерном пространстве p_α . Тогда в новых переменных это уравнение примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial z} = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha'}} \left(R^{\alpha\beta'} \frac{\partial f}{\partial p_{\beta'}} \right), \quad (2.22)$$

где \sqrt{g} — якобиан перехода от переменных действия к новым переменным, а $R^{\alpha\beta'}$ получается из $R^{\alpha\beta}$ по правилам преобразования трехмерных контравариантных тензоров.

В интересующем нас случае матрица преобразования от переменных $I_\beta (I_1; I_2; I_3)$ к переменным $p'_\alpha (w; u; v)$ легко

находится с помощью (2.8)—(2.10). Якобиан преобразования равен

$$\sqrt{g} = \frac{2T}{v}. \quad (2.23)$$

Тензор $R^{\alpha\beta'}$ в новых переменных имеет вид

$$R^{\alpha\beta'} = \frac{1}{kvT} \left\{ \begin{array}{ccc} wv^2 & 0 & uv^2; \\ 0 & 0 & 0; \\ uv^2 & 0 & \frac{w}{k^2}. \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

Из (2.22) видно, что усредненное кинетическое уравнение (в произвольных переменных интегралах движения) для канонической функции распределения f , вообще говоря, не имеет вид уравнения непрерывности, однако для функции $\Phi = (2\pi)^3 \sqrt{g}f$ получается уравнение непрерывности¹

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{\partial j^\alpha}{\partial p_{\alpha'}} \quad (2.25)$$

где

$$j^\alpha = 2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \sqrt{g} R^{\alpha\beta'} \frac{\partial}{\partial p_{\beta'}} \left(\frac{\Phi}{\sqrt{g}} \right). \quad (2.26)$$

Результат вполне понятен, так как функция Φ представляет собой интеграл от функции f по координатам, канонически сопряженным импульсам $p_{\alpha'}$. Только в случае переменных действия функции Φ и f совпадают (с точностью до постоянной), ибо пределы изменения ϑ_α не зависят от переменных действия.

В раскрытом виде уравнения (2.23) для функции $\Phi(w; u; v) = (2\pi)^3 \frac{2T}{v} f$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(\frac{wv}{kT} \Phi \right) + \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} \left(\frac{uv}{kT} \Phi \right) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{w}{k^3 v T} \Phi \right) - 2 \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{v}{kT} \Phi \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

§ 3. Кинетическое уравнение в пространстве интегралов движения

Функция Φ , введенная в предыдущем параграфе, имеет определенный физический смысл, а именно: $\Phi du dv dw$ есть число частиц во всем пространстве, имеющих значение инте-

гралов движения w , u , v в пределах w ; $w + \Delta w$; u ; $u + \Delta u$; v ; $v + \Delta v$. Вообще говоря, кинетическое уравнение можно составить только для функции такого числа переменных, которое достаточно для полного описания системы, так чтобы вероятность значений этих координат в последующие моменты времени определялась их начальными значениями. Три интеграла движения не представляют в общем случае полного набора координат, однако при редких столкновениях можно перейти от рассмотрения частиц к рассмотрению некоторых новых объектов, описываемых только тремя интегралами движения. Каждый такой объект соответствует как бы усредненной по орбите частице, так что число объектов в элементе объема трех интегралов движения равно числу частиц во всем пространстве с интегралами движения, лежащими в этом же элементе.

Для этих объектов можно найти вероятность изменения «координат» как функцию самих «координат». Кроме того, из физического смысла введенных объектов следует, что для них должен выполняться закон сохранения. Этого достаточно для составления кинетического уравнения. Если при столкновениях существенны только отклонения на малые углы, т. е. интегралы движения при столкновении меняются на малые величины, то кинетическое уравнение принимает вид уравнения непрерывности типа Фоккера—Планка

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial J_k}{\partial p_k}, \quad (3.1)$$

где

$$J_k = \Phi \overline{\Delta p_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_e} (\overline{\Delta p_k \Delta p_e \Phi}), \quad (3.2)$$

а

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_i} &= \int d^3 p' W(p p') (p'_i - p_i); \\ \overline{\Delta p_i \Delta p_k} &= \int d^3 p' W(p p') (p'_i - p_i) (p'_k - p_k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь p_i — интегралы движения («координаты»); $W(p p')$ — вероятность перехода как функция импульсов. Наличие вероятности W , как указывалось является необходимым условием возможности составления уравнения для функции Φ . В общем случае, когда учитываются столкновения частиц друг с другом, вероятность W сама интегрально зависит от функции Φ , так что уравнение (3.1) является нелинейным интегродифференциальным уравнением.

В случае, когда учитываются только столкновения частиц с внешними частицами, распределение которых считается

известным, или рассеяние на флуктуирующих внешних полях, уравнение (3.1) становится линейным дифференциальным уравнением.

Так как столкновения могут происходить с разными внешними частицами (или полями), которые будем характеризовать параметрами α_μ , то имеет смысл ввести величину $W(p, p', \alpha_\mu)$, представляющую вероятность столкновения частиц с импульсом p с внешней частицей, имеющей заданные значения параметров α_μ , с изменением импульса на p' . Если рассеяние происходит на частицах, то в качестве параметров α_μ можно взять начальные импульсы и координаты частиц. Вероятность W тогда записывается в виде

$$W(pp') = \int n(\alpha_\mu) W(p, p', \alpha_\mu) d\alpha,$$

где $n(\alpha_\mu)$ — полное число внешних частиц с параметрами α_μ . Вероятность W обычно известна не как функция начальных и конечных импульсов p и p' (или, что то же самое, p и $\Delta p = p' - p$), а как функция начальных импульсов и некоторых параметров a_i , характеризующих невозмущенное движение (например, начальных значений координат, либо параметров удара). Естественно, поэтому в (3.3) перейти от переменных интегрирования p' к переменным a_i . Якобиан перехода будем включать в вероятность $W(p, \alpha_\mu, a_i)$ (в дальнейшем будем обозначать вероятность, нормированную на новые переменные, той же буквой W). Величины Δp_i становятся при этом функциями новых переменных (и параметров α_μ) и определяются из уравнений движения.

Функция Гамильтона для рассматриваемых частиц в переменных p_i (интегралах движения) и канонически сопряженных им координатах ϑ_i можно представить в виде

$$H = H_0(p_i) + H_1(p_i; \vartheta_i; t) + H_2(p_i; \vartheta_i; t),$$

где $H_0(p_i)$ — гамильтониан невозмущенного движения во внешнем поле, H_1 и H_2 — добавки, соответственного, первого и второго порядка, связанные со столкновениями. Эти добавки, кроме указанных аргументов, зависят также от параметров α_μ . В нулевом приближении

$$\dot{p}_i^0 = -\frac{\partial H_0}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad \dot{\vartheta}_i^0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_i},$$

или $\vartheta_i^0 = a_i + \omega_i t$, где $\omega_i(p^0) = \frac{\partial H}{\partial p_i^0}$, a_i — начальные значения обобщенных координат, которые можно выбирать за новые

переменные интегрирования при вычислении Δp_i и $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$.
В первом приближении

$$\dot{p}_i^{(1)} = - \frac{\partial H_1(p^0; \vartheta^0; t)}{\partial \vartheta_i^0}; \quad \dot{\vartheta}_i^{(1)} = \frac{\partial H_1(p^0; \vartheta^0; t)}{\partial p_i^0} + \\ + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^0 \partial p_k^0} P_k^{(1)},$$

откуда

$$\Delta p_i^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial H_1(p^0; \vartheta^0; t)}{\partial \vartheta_i^0}. \quad (3.4)$$

Этого приближения для p_i достаточно только для вычисления выражений $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$. Для вычисления же $\overline{\Delta p_i}$ необходимо второе приближение, которое, как нетрудно видеть, имеет вид

$$\Delta p_i^{(2)} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial H_2(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial \vartheta_i^0} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial^2 H_1(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial \vartheta_i^0 \partial p_k^0} \cdot \frac{\partial H_1(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial \vartheta_k^0} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial^2 H_1(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial \vartheta_i^0 \partial \vartheta_k^0} \frac{\partial H_1(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial p_k^0} + \\ + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k^0 \partial p_e^0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' (t - t') \frac{\partial^2 H_1(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial \vartheta_i^0 \partial \vartheta_e^0} \cdot \frac{\partial H_1(p^0, \vartheta^0, t)}{\partial p_k^0}. \quad (3.5)$$

Если столкновения редки, то вероятность W не зависит от переменных a_i , так как для частицы с заданным значением импульсов p_i все значения ϑ_i (а следовательно, a_i) равновероятны. В этом случае вероятность W нахождения средних величин можно выносить за знак интеграла по a_i .

Теперь $W(p, \alpha_\mu)$ имеет смысл вероятности столкновения в единицу времени частицы с импульсом p с внешней частицей с параметрами α_μ (с любым исходом столкновений). Будем ее просто называть вероятностью столкновения*. Во всех конкретных случаях она легко находится из физических соображений.

* Эта вероятность нормирована только на α_μ , но не на da , и поэтому отличается от ранее введенной вероятности $W(p, \alpha, a)$ множителем τ_a [см. (3.7)]. Мы по-прежнему обозначаем ее той же буквой, так как в дальнейшем будем иметь дело только с этой вероятностью.

Средние значения $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$ и $\overline{\Delta p_i}$ могут быть записаны в виде

$$\overline{\Delta p_i \Delta p_k} = \int n(\alpha_\mu) W(p, \alpha_\mu) \langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle da;$$

$$\overline{\Delta p_i} = \int n(\alpha_\mu) W(p, \alpha_\mu) \langle \Delta p_i \rangle da, \quad (3.6)$$

где $\langle \Delta p_i \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \Delta p_i(p, a, \alpha)$;

$$\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \Delta p_i(p, a, \alpha) \Delta p_k(p, a, \alpha) \quad (3.7)$$

$$\tau_a = \int d^3a$$

и являются функциями p и α .

Среднеквадратичные $\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle$ находятся из первого приближения (3.4)

$$\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\partial H_1(p_0, a + \omega t, t)}{\partial a_i} \times$$

$$\times \frac{\partial H_1(p_0; a + \omega t; t')}{\partial a_k}, \quad (3.8)$$

а $\langle \Delta p_i \rangle$ в первом приближении обращается в нуль, так как (3.4) фактически представляет собой полную производную по a_i и, следовательно, исчезает при интегрировании по a_i . Непосредственное вычисление $\langle \Delta p_i \rangle$ во втором приближении очень громоздко, однако $\langle \Delta p_i \rangle$ могут быть выражены через квадратичные величины $\langle \Delta p_i \Delta p_k \rangle$. Для этого выберем в качестве p_i не произвольные интегралы движения, а переменные действия I_i , которые отличаются от других интегралов движения также и тем, что пределы изменения сопряженных им координат не зависят от импульсов I_i , и поэтому можно менять порядок интегрирования по a_i и дифференцирования по I_i [заметим, что теперь $\tau_a = (2\pi)^3$].

Рассмотрим сначала случай движения, финитного во всех направлениях. В этом случае при изменении угловых переменных на 2π частица оказывается в том же самом состоянии; следовательно, все физические величины периодичны по всем ϑ с периодом 2π .

Тогда первый член в (3.5) при интегрировании по a_i исчезает, вследствие периодичности, как интеграл от производной по a_i , так что H_2 не входит в $\langle \Delta I_i \rangle$.

Третий член проинтегрируем по частям a_k , объединяя его со вторым, получим для этих членов

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\{ \frac{\partial^2 H_1(I_i^0; a + \omega t; t)}{\partial a_i \delta I_k^0} \cdot \frac{\partial H_1(I_i^0; a + \omega t'; t')}{\partial a_k} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial H_1(I_i^0; a + \omega t; t)}{\partial a_i} \frac{\partial^2 H_1(I_i^0; a + \omega t'; t)}{\partial a_k \delta I_k^0} \right\} = \\ & = \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \frac{\delta}{\delta I_k} \left[\frac{\partial H_1}{\partial a_i} \frac{\partial H_1}{\partial a_k} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\frac{\delta}{\delta I_k}$ надо понимать как производную только по первому аргументу, в то время как «полная» производная по I_k равна

$$\frac{\partial}{\partial I_k} \psi(I_i^0; a + \omega t, t) = \frac{\delta \delta}{\delta I_k} + \frac{\delta \omega_e}{\partial I_k} \frac{\partial \delta}{\partial \omega_e}. \quad (3.10)$$

В четвертом члене в (3.5) слагаемое, содержащее t' , интегрируем по частям, после чего он примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_a} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_e} \int d^3a \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \left\{ t \frac{\partial^2 H_1(I_i^0; a + \omega t, t)}{\partial a_i \partial a_e} \frac{\partial H_1}{\partial a_e} + \right. \\ & \left. + t' \frac{\partial H_1}{\partial a_i} \frac{\partial^2 H_1(I_i^0; a + \omega t, t)}{\partial a_k \partial a_e} \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

и поскольку $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_k \partial I_e} = \frac{\partial \omega_e}{\partial I_k}$,

$$\text{а } t \frac{\partial H_1(I_i^0; a + \omega t, t)}{\partial a_e} = \frac{\partial H_1(I_i^0; a + \omega t, t)}{\partial \omega_e}; \quad t' \frac{\partial H_1}{\partial a_e} = \frac{\partial H_1}{\partial \omega_e},$$

то (3.11) можно записать в виде

$$\frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial \omega_e}{\partial I_k} \frac{\partial}{\partial \omega_e} \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial a_i} \frac{\partial H_1}{\partial a_k} \right\}. \quad (3.12)$$

(«Поверхностные» интегралы в (3.9) и (3.11) исчезнут вследствие периодичности).

Складывая (3.9) с (3.12), получим под интегралом, согласно (3.10), полную производную по I_k , которую можно вынести за знак интеграла, поскольку пределы интегрирования не зависят от I_k .

В результате имеем

$$\langle \Delta I_i \rangle = \frac{\partial}{\partial I_k} \frac{1}{\tau_a} \int d^3a \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \times \\ \times \frac{\partial H_1(I^0; a + \omega t; t)}{\partial a_i} \frac{\partial H_1(I^0; a + \omega t'; t')}{\partial a_k}. \quad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что полученный интеграл равен половине интеграла (3.8), так что окончательно получаем

$$\langle \Delta I_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \langle \Delta I_i \Delta I_k \rangle. \quad (3.14)$$

Как уже указывалось, вероятность $W(p, \alpha)$ имеет смысл вероятности столкновения в единицу времени. Под столкновением следует понимать факт появления возмущающего поля вне зависимости от результата этого возмущения. Если возмущение производится параллельным пучком внешних частиц, то под W надо понимать поток внешних частиц с заданными параметрами через область, занимаемую нашими частицами*. Совершенно ясно, что в случае финитного движения, когда средняя скорость наших частиц равна нулю, эта вероятность может зависеть только от параметров α , характеризующих возмущение, но не от импульсов наших частиц. В случае возмущение потоком внешних частиц $W(a_i)$ пропорционально скорости налетающих частиц.

Умножая (3.14) на $n(\alpha)W(\alpha)$ и внося этот множитель в правой части под знак производной (поскольку W не зависит от импульсов), после интегрирования по α получим искомую связь между средними и средними квадратичными отклонениями для переменных действия

$$\Delta \bar{I}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \overline{\Delta I_i \Delta I_k}. \quad (3.15)$$

Для получения эквивалентного соотношения для произвольных интегралов движения p_i , к сожалению, нельзя воспользоваться тензорным законом преобразования, поскольку

* Под областью, занимаемой частицами, следует понимать достаточно большую область, включающую все точки пространства, из которой возмущение еще может действовать на наши частицы. Тот факт, что при этом может быть учтено много возмущений, совсем не действующих на наши частицы, не должен нас смущать, ибо для таких возмущений $\Delta p_i = 0$.

Δp_i необходимо вычислять до второго порядка; поэтому произведем переход непосредственно

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial I_k} \cdot \overline{\Delta I_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial I_k \partial I_e} \overline{\Delta I_k \Delta I_e}^*.$$

Согласно (3.15)

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial p_i}{\partial I_k} \frac{\partial}{\partial T_e} \Delta I_k \Delta I_e + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial I_k \partial T_e} \overline{\Delta I_k \Delta I_e}; \\ \overline{\Delta I_k \Delta I_e} &= \frac{\partial I_k}{\partial p_m} \frac{\partial T_e}{\partial p_n} \overline{\Delta p_m \Delta p_n}, \end{aligned}$$

так что

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial p_m}{\partial I_e} \frac{\partial}{\partial p_m} \left[\frac{\partial I_e}{\partial p_k} \overline{\Delta p_i \Delta p_k} \right],$$

что, как нетрудно показать, сводится к

$$\overline{\Delta p_i} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\sqrt{g} \overline{\Delta p_i \Delta p_k} \right], \quad (3.16)$$

где \sqrt{g} — якобиан перехода от I_i к p_i . С учетом соотношения (3.16) уравнение Фоккера—Планка относительно функции Φ , нормированной на элемент объема $d^3 p$, принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\sqrt{g} \overline{\Delta p_i \Delta p_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\Phi}{\sqrt{g}} \right], \quad (3.17)$$

где мы, как и в предыдущем параграфе, добавили в левой части член $\bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}$.

Интересно отметить, что для функции $f = \frac{\Phi}{\sqrt{g}}$, представляющей собой функцию, нормированную на три переменных действия (и совпадающую с точностью до множителя $(2\pi)^3$ с канонической функцией распределения), получается уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\operatorname{div} j, \quad (3.18)$$

* Усреднение есть инвариантная операция, поэтому соотношение между самими величинами сохраняются и для средних значений. Заметим также, что усреднение можно производить в любых координатах, в частности, Δp и ΔI можно усреднять каждое по собственным сопряженным координатам.

де

$$j_k = -\frac{1}{2} \overline{\Delta p_k \Delta p_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial p_\varepsilon},$$

а $\operatorname{div} j$ следует понимать как дивергенцию в криволинейных координатах p_i в пространстве, где и «элемент длины» $ds^2 = dI_1^2 + dI_2^2 + dI_3^2$ (в котором переменные действия являются декартовыми координатами).

Сравнивая уравнения (2.25) и (2.26) предыдущего параграфа с уравнением (3.17), видим, что введенный ранее тензор $R^{\alpha\beta}$ связан с тензором $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$ соотношением

$$2\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \overline{\Delta p_\alpha \Delta p'_\beta}. \quad (3.19)$$

Если внешние частицы не бесконечно тяжелые, то при вычислении Δp_i надо учесть также возмущение и их движения. Это возмущение скажется только во втором приближении и должно быть учтено, поэтому, только при вычислении Δp_i . Дополнительный член, который появится при этом, может быть выражен аналогично основному члену через квадратичные

$$\Delta \tilde{I}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \widetilde{\Delta I_i \Delta I_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_{k'}} \widetilde{\Delta I_i \Delta I_{k'}}, \quad (3.20)$$

где знаком \sim обозначено усреднение по всем переменным, кроме импульсов налетающих частиц I'_i , так что

$$\Delta p_i = \int \widetilde{\Delta p_i f'(p')} dp',$$

где $f'(p')$ — функция распределения налетающих частиц по импульсам*.

Подставляя (3.20) в уравнение Фоккера—Планка и интегрируя второй член в (3.20) по частям, получим уравнение в переменных действия

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_i} \int dI' \left\{ \widetilde{\Delta I_i \Delta I_k} f' \frac{\partial f}{\partial I_k} + \right. \\ & \left. + \widetilde{\Delta I_i \Delta I_{k'}} f' \frac{\partial f'}{\partial I_k} \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

* Теперь уже не существует непосредственной связи $\overline{\Delta I_i}$ с $\overline{\Delta I_i \Delta I_k}$, так как f' нельзя ввести под производную во втором члене в (3.20).

что совпадает по форме с уравнением Ландау [2]. В произвольных же интегралах движения уравнение для функции Φ , нормированной на элемент объема этих переменных, имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{z} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \int d^3 p' \left\{ \sqrt{g} \widetilde{\Delta p_i \Delta p_k} \Phi' \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\Phi}{\sqrt{g}} + \sqrt{g'} \widetilde{\Delta p_i \Delta p_{k'}} \Phi \frac{\partial}{\partial p_{k'}} \frac{\Phi'}{\sqrt{g'}} \right\}. \quad (3.22)$$

Заметим, что $\widetilde{\Delta p_i \Delta p_{k'}}$, вообще говоря, связаны с $\widetilde{\Delta p_i \Delta p_k}$. Эта связь особенно простая, если p_i являются интегралами движения, сумма которых остается интегралом движения с учетом возмущающих полей. Для этого достаточно, чтобы возмущающие поля были функцией разности соответствующих сопряженных координат.

Для интересующей нас задачи вычисление средних квадратичных величин можно провести до конца непосредственно в переменных w, u, v . В этих переменных невозмущенная функция Гамильтона и возмущающий гамильтониан имеют вид [см. (2.8)].

$$H_0 = \frac{1 + 2w + v^4}{2v^2}; \quad (3.23)$$

$$H_1 = \frac{e_1 e_2}{R^*} \frac{v^2}{H_0 - \frac{k^2 r^2}{2}}, \quad (3.24)$$

где $R^* = \left\{ (z_1 - z_2)^2 + \frac{1}{\gamma^2} [r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}^{1/2}$

(скорость налетающей частицы всюду, где это возможно положена равной единице).

¶ В результате простых, но громоздких вычислений получим для отличных от нуля средних квадратичных отклонений

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta w)^2} &= 4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{2v^4 w}{1 + w + v^4}; \\ \overline{\Delta w \Delta u} &= 4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{2v^4 u}{1 + w + v^4}; \\ \overline{(\Delta u)^2} &= 4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2 \frac{2v^2 w}{k^2 (1 + w + v^4)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Сравнивая полученные выражения с (2.24), видим, что соотношение (3.19) действительно выполняется, и поэтому уравнение (3.17) с полученными значениями $\overline{\Delta p_i \Delta p_k}$ совпадает с уравнением (2.27) предыдущего параграфа.

4. Стабилизированный электронный пучок в стационарном состоянии

Стационарное состояние стабилизированного электронного пучка осуществляется, когда в среднем по всем электронам энергия, передаваемая электронам ионами, уносится излучением, а передаваемый импульс компенсируется специально наложенным продольным электрическим полем.

Из разных типов излучения в пучке, как показано в [3], следует учитывать некогерентное излучение, связанное с движением электронов в поле пучка.

Кроме того, следует учесть изменение продольного импульса и энергии, обусловленное продольным электрическим полем, не учтенным в (2.6).

Так как действие продольного поля и излучение представляют собой систематический, а не стохастический процесс, то в первую часть уравнения (2.27) надо добавить только линейные члены, которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} j_i^{\text{поле}} &= \Phi \overline{\left(\frac{\partial p_i}{\partial t} \right)_{\text{поле}}}, \\ j_i^{\text{изл}} &= \Phi \overline{\left(\frac{\partial p_i}{\partial t} \right)_{\text{изл}}}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где усреднение производится по невозмущенному движению. Выберем в данной точке декартову систему координат с осями, направленными по r , φ , z и, соответственно, в пространстве импульсов, как это сделано в (2.6). Перейдем к переменным w , u , v . Дополнительный гамильтониан, связанный с продольным электрическим полем, имеет вид

$$H_1 = -e_1 E z,$$

так что $\overline{\left(\frac{\partial p_i}{\partial t} \right)_{\text{поле}}} = e E_1 \frac{\partial z}{\partial \vartheta_i}$.

Значения $\frac{\partial t}{\partial \vartheta_i}$ легко находятся, и после усреднения по невозмущенному движению получим

$$\overline{\left(\frac{dw}{dt} \right)_{\text{поле}}} = -e E_1 \frac{w}{2k v T}; \quad (4.2)$$

$$\overline{\left(\frac{dv}{dt} \right)_{\text{поле}}} = -e E_1 \frac{1}{2k T};$$

$$\overline{\left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{поле}}} = 0$$

Влияние излучения не может быть, как известно, описано дополнительным гамильтонианом, однако его можно учесть введением дополнительной обобщенной силы в уравнение Гамильтона

$$p_i^0 = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} + F_i, \quad (4.3)$$

причем нетрудно показать, что составляющие обобщенной силы при произвольном каноническом преобразовании получаются из декартовых составляющих F_i^* по закону

$$F_i = F_k^* \frac{\partial p_i}{\partial p_k^*}, \quad (4.4)$$

где p_k^* — компоненты импульса в декартовой системе координат, т. е. F_i преобразуется как контравариантный вектор в пространстве импульсов*.

Тормозящая сила излучения релятивистской частицы в четырехмерном виде равна [5]

$$F_i^* = \frac{2e^2}{3} (\delta_{ik} + u_i u_k) \frac{d^2 u_k}{ds^2}, \quad (4.5)$$

или, выражая ускорение через тензор электромагнитного поля,

$$F_i^* = \frac{2e^3}{3} \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_e} u_k u_e - \frac{2e^4}{3} H_{ie} H_{ke} u_k - \\ - \frac{2e^4}{3} (H_{ke} u_e)^2 u_i, \quad (4.6)$$

откуда для трехмерной силы торможения получим**

$$F_i^* = \frac{2e^3}{3} \gamma \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right] \mathbf{E} + \left[\mathbf{v} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right) \mathbf{H} \right] \right\} + \\ + \frac{2e^4}{3} \{ [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + [\mathbf{H} \times [\mathbf{H} \times \mathbf{v}]] + \mathbf{E} (\mathbf{v} \mathbf{E}) \} - \\ - \frac{2e^4}{3} \gamma^2 \{ (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{H}])^2 - (\mathbf{E} \times \mathbf{v})^2 \} \mathbf{v}. \quad (4.7)$$

* Если преобразование точечное, то F_i преобразуется также и как ковариантный вектор в пространстве координат. Действительно, при точечном преобразовании, как легко показать, $\frac{\partial p_i}{\partial p_k^*} = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i}$, т. е.

$$F_i = F_k^* \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

** В формуле (4.7) исправлена ошибка, допущенная в [5] (стр. 239).

Из (4.7) после несложных выкладок находим выражение для силы торможения F_k^* в выбранной декартовой системе координат (r, φ, z) . Матрица перехода $\frac{\partial p_i}{\partial P_k}$ находится с помощью (2.8) и (2.9). Тогда из (4.4) следует, что компоненты обобщенной силы в канонических переменных, где w, u и v являются импульсами, равны

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{1 + 2w + v^4}{2v^2} F_1^* v_i - \frac{1 + 2w - v^4}{2v^2} F_3^*, \\ F_u &= r F_2^*, \\ F_v &= \frac{1}{2v} (F_1^* v_i - F_3^*). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Усредняя величины $F_i^* v_i$; F_3^* и $r F_2^*$ по невозмущенному движению, получим окончательно

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)}_{\text{изл}} &= -\frac{2e^2}{3} \frac{kv}{3} (5w^2 + 4w + k^2 v^2 u^2); \\ \overline{\left(\frac{du}{dt}\right)}_{\text{изл}} &= -\frac{2e^2}{3} \frac{kvu}{T} (w + 1); \\ \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)}_{\text{изл}} &= -\frac{2e^2}{3} \frac{kv^2 w}{2T}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Добавляя в уравнение (2.27) дополнительные члены, связанные с продольным полем и излучением согласно (4.2) и (4.9), получим полное уравнение для стабилизированного электронного пучка

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1 + w - v^4}{2kv^3 T} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left(\frac{wv}{kT} \Phi \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} \left(\frac{uv}{kT} \Phi \right) &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{w}{k^3 v T} \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \frac{v\Phi}{kT} \left[1 + \sigma \frac{w}{v^2} - \frac{\alpha}{2} (5w^2 + \right. \right. \\ + 4w + v^2 u^2 k^2) \right\} &+ 2\alpha \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{vu(w+1)}{kT} \Phi \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v\Phi}{kT} \left(\alpha v w - \frac{\sigma}{v} \right) \right], & \end{aligned} \quad (4.10)$$

где введены два параметра

$$\alpha = \frac{k^2}{12\pi e_1^2 e_2^2 L n_2}; \quad \sigma = \frac{eE}{8\pi e_1^2 e_2^2 L n_2}. \quad (4.11)$$

В правой части уравнения (4.9) везде входит комбинация $\frac{v\Phi}{kT}$, которая с точностью до постоянного множителя $\frac{k}{2} \frac{1}{(2\pi)^3}$ совпадает с канонической функцией распределения f , нормированной на фазовый объем. Естественно поэтому выбрать f за новую неизвестную функцию. Кроме того, введем новые безразмерные переменные

$$\xi = \sqrt{\alpha} w; \quad \eta = \frac{kw}{v}; \quad \zeta = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\sigma^2}} v. \quad (4.12)$$

В результате для функции f получим следующее уравнение в новых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi e_1^2 e_2^2 L n_2} \cdot \frac{1}{\sigma^2 \xi \zeta^4} \left\{ \left(\xi + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}} \zeta^4 + \sqrt{\alpha} \right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\xi - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}} \zeta^4 + \sqrt{\alpha} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1 - \eta^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} \left(1 + \frac{5}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi}{\zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \\ + \eta \left(1 - \eta^2 - \frac{2}{\xi^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} + 2\zeta \left(1 - \frac{1}{\xi \zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \\ + 16f + 4\sqrt{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{2}{\xi} f \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Единственный параметр, остающийся в правой части, равен, согласно (4.11) и (2.5)

$$\alpha = \left| \frac{e_1}{e_2} \right| \frac{1}{6L} \quad (4.14)$$

и, следовательно, много меньше единицы. Поэтому в правой части можно пренебречь членами, содержащими $\sqrt{\alpha}$. Тогда уравнение для стационарного, однородного по длине пучка в выбранных нами переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1 - \eta^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\xi} \left(1 + \frac{5}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{\xi}{\zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \\ + \eta \left(1 - \eta^2 - \frac{2}{\xi^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} + 2\zeta \left(1 - \frac{1}{\xi \zeta^2} \right) \frac{\partial f}{\partial \zeta} + 16f = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Пределы изменений w , u , v и r^2 определяются условием положительности выражения $2w - v^2 k^2 r^2 - \frac{u^2}{r^2}$, что означает условие действительности импульса p_r частицы.

Область изменения u^2 , v и w лежит между плоскостями $w=0$; $u^2=0$; $v=0$ и поверхностью, определяемой совпадением корней по r приведенного выше выражения

$$r_{\text{мин}}^2 \text{ макс} = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - v^2 k^2 u^2}}{k^2 v^2},$$

т. е. поверхностью

$$w^2 - k^2 v^2 u^2 = 0,$$

так что переменные w , u^2 , v меняются в пределах

$$\begin{aligned} 0 < u^2 < \frac{w^2}{k^2 v^2}; \\ 0 < v < \infty; \\ 0 < w < \infty. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Отсюда видно, что выбранные нами безразмерные переменные меняются в постоянных пределах

$$\begin{aligned} 0 < \xi < \infty; \\ -1 < \eta < 1; \\ 0 < \zeta < \infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Условия, налагаемые на функцию f на этих границах, следующие:

- 1) $f \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$;
- 2) $f \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \infty$;
- 3) $f|_{\eta=1} = f|_{\eta=-1}$;
- 4) конечность на остальных границах.

Действительно, $w = \infty$ означает бесконечную кинетическую энергию или бесконечные радиусы частиц, $v = \infty$ означает бесконечную поперечную кинетическую энергию, а $v = 0$ соответствует тому случаю, когда бесконечна продольная кинетическая энергия.

Таким образом, ни уравнение (4.15), ни граничные условия (4.17) и (4.18) не содержат параметров и определяют некоторую универсальную функцию переменных ξ , η и ζ .

Плотность n и поток j_z находятся из функции f следующим образом:

$$\begin{aligned} n(r) &= \frac{1}{r} \int f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial (P_r; P_\zeta; P_z)}{\partial (\xi; \eta; \zeta)} d\xi d\eta d\zeta; \\ j_z(r) &= \frac{1}{r} \int f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial (P_r; P_\eta; P_z)}{\partial (\xi; \eta; \zeta)} \frac{P_z - \frac{k^2 r^2}{2}}{H_0 - \frac{2}{2}} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Якобиан легко вычисляется. С учетом (4.12) он равен

$$\frac{\partial(p_r; p_\sigma; p_z)}{\partial(\xi; \eta; \zeta)} = \frac{2\xi}{\alpha^{1/2}\sigma^{3/2}k\zeta^4} \frac{2\xi + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4 + \sqrt{\alpha} - \zeta^2\sigma k^2 r^2}{\sqrt{2\xi - \zeta^2\sigma k^2 r^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^2} \frac{1}{\sigma k^2 r^2}}}. \quad (4.20)$$

Вводя вместо r новую безразмерную переменную

$$x = \sqrt{\sigma} kr \quad (4.21)$$

и пренебрегая величиной $\sqrt{\alpha}$ по сравнению с единицей, приведем (4.19) к виду

$$n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\alpha}x} \int \frac{f(\xi, \eta, \zeta)\xi}{\sqrt{2\xi - \zeta^2x^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^2x^2}}} \times \\ \times \frac{1}{\zeta^4} \left(2\xi + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4 - \zeta^2x^2 \right) d\xi d\eta d\zeta; \quad (4.22)$$

$$j_z(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\alpha}x} \int \frac{f(\xi, \eta, \zeta)\xi}{\sqrt{2\xi - \zeta^2x^2 - \frac{\xi^2\eta^2}{\zeta^2x^2}}} \times \\ \times \frac{1}{\zeta^4} \left(2\xi - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4 - \zeta^2x^2 \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (4.23)$$

Как видно из (4.22) и (4.23), для нахождения плотности и потока достаточно знать только три функции одной переменной x , равные интегралам от трех слагаемых в (4.22) и (4.23). Это может существенно облегчить численное решение задачи.

Полученные выражения дают возможность из соображений размерности найти условия существования стационарного состояния пучка. Функция f является решением уравнения, не содержащего параметров, и, следовательно, размер области, где эта функция существенно отлична от нуля, порядка единицы по всем переменным. Так как в электронной системе координат интеграл от плотности отличен от нуля, а интеграл от потока j_z равен нулю, то из сравнения (4.22) и (4.23) видно, что член, содержащий $\frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}}\zeta^4$, должен быть порядка остальных, что возможно только при $\frac{\sigma^2}{\sqrt{\alpha}} \sim 1$, т. е.

$$\sigma^2 \sim \sqrt{6L}. \quad (4.24)$$

Введем далее вместо f безразмерную функцию $f^* = \frac{1}{A\sigma v\sigma} f$ так, чтобы интеграл в (4.22) был порядка единицы. Нормировочный множитель A вычисляем из условия

$$2\pi \int n(r) r dr = \frac{2\pi}{\sigma k^2} \int n(x) x dx = \frac{v_1}{\gamma e^2},$$

где v_1 — число электронов в лабораторной системе координат на единице длины пучка, умноженное на классический радиус электрона r_0 ($r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \rightarrow e^2$). Отсюда получаем

$$A \sim \frac{\sigma v_1 k^2}{2\pi \gamma e^2}.$$

Таким образом, плотность электронов в области, где она отлична от нуля, оказывается порядка

$$n_1 \sim \frac{\sigma v_1 k^2}{2\pi \gamma e^2}. \quad (4.25)$$

Так как пучок в лабораторной системе координат слабо заряжен, то плотности электронов и ионов в электронной системе координат связаны соотношением $n_1 = \frac{n_2}{\gamma^2}$, откуда получаем второе соотношение между параметрами

$$\frac{\sigma v_1 k^2 \gamma}{2\pi n_2 e^2} \sim 1, \text{ или } \sigma \sim \frac{1}{\gamma v_1}. \quad (4.26)$$

Используя (4.24) и (4.26) и вводя радиус пучка r^* , который естественно определить из условия $x^* = \sqrt{\sigma k r^*} \sim 1$, получим значение величины γ и радиуса пучка r^* как функцию числа частиц v_1 и внешнего поля E в стационарном состоянии стабилизированного электронного пучка

$$\gamma \sim \frac{\sqrt[4]{L}}{v_1}; \quad r^* \sim \sqrt{\frac{4Le}{E}}. \quad (4.27)$$

Эти значения были получены в [3] из приближенной теории (при больших L $x \simeq \sqrt[4]{L}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chapman, T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1939.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).
3. Г. И. Будкер, Атомная энергия 1, № 5, 9 (1956).
4. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, ДАН СССР, 107, 807 (1956).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., ГТТИ, 1948

СО Д Е Р Ж А Н И Е

С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов. Плазменный шнур с потерей тепла на электроды.	3
С. И. Брагинский, А. Б. Мигдал. Процессы в плазменном столбе при быстром нарастании тока	20
С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов. Плазменный шнур при наличии продольного магнитного поля	26
Л. А. Арцимович. О прохождении больших токов через плазму при наличии продольного магнитного поля	81
Л. А. Арцимович. Магнитный поток в сжимающемся цилиндре	87
Л. А. Арцимович. Анализ уравнения сжатия шнура при наличии внешнего магнитного поля	101
В. И. Коган. О выходе термоядерных реакций	109
В. Д. Шафранов. Об устойчивости плазменного шнура при наличии продольного магнитного поля и проводящего кожуха	130
Т. Ф. Волков. Об устойчивости цилиндра плазмы во внешнем магнитном поле	144
Н. А. Борзунов, Д. В. Орлинский. Распределение интенсивности нейтронного излучения вдоль оси прямой трубы при мощном импульсном разряде в дейтерии	150
С. М. Осовец. О механизме наблюдаемого нейтронного излучения	165
В. С. Комельков, Т. И. Морозова, Ю. В. Скворцов. Исследование мощного электрического разряда в дейтерии	170
А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров. Исследование импульсных разрядов в газах при силе тока 500 ка.	185
В. Д. Кириллов. Измерение проводимости плазмы при длительном протекании тока	212
В. В. Бабиков. К теории тормозного излучения нерелятивистских электронов	226
С. М. Осовец. Плазменный виток в электромагнитном поле	238
	355

С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров, Н. И. Щедрин. Исследование газового разряда в односвязной области	242
Ю. Ф. Наседкин. Исследование кольцевого газового разряда в поперечном магнитном поле	264
С. Т. Беляев, Г. И. Будкер. Релятивистская плазма в переменных полях	283
Г. И. Будкер, С. Т. Беляев. Кинетическое уравнение для электронного газа при редких столкновениях	330

Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций
Т. II

*Утверждено к печати Институтом атомной энергии
 Академии наук СССР*

Сдано в набор 21/V 1958 г. Подписано к печати 21/VII 1958 г. Формат 60×92^{1/16}.
 Печ. л. 22,25 + 7 вкл. Уч.-изд. л. 19,2. Тираж 3000 экз. Т-08810. Изд. № 3350.
 Тип. зак. 785.
 Цена 13 р. 70 к.

Издательство Академии наук СССР Москва, Б-64, Подсосенский пер., 21
 1-я типография Изд. АН СССР Ленинград, В-34, 9 линия, л. 12