

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ

Т О М
III

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1 9 5 8

Ответственный редактор
академик М. А. ЛЕОНТОВИЧ

Г. И. Будкер

**ТЕРМОЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ
В СИСТЕМЕ С МАГНИТНЫМИ ПРОБКАМИ.
К ВОПРОСУ О НЕПОСРЕДСТВЕННОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ
ЯДЕРНОЙ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ***
(Физические принципы и предварительные расчеты)

В работе изложены основные физические принципы и предварительные расчеты предлагаемого автором способа осуществления термоядерных реакций в прямом цилиндре, запертом с торцов «магнитными пробками».

Рассматривается способ разжигания разряда в высоком вакууме и нагревания плазмы при помощи «магнитного поршня».

Кроме того, в работе рассматривается вопрос о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую.

§ 1. Предисловие

В настоящей работе предлагается принцип построения термоядерного реактора, у которого термоизоляция осуществляется в прямом цилиндре с продольным магнитным полем, запертом с торцов «магнитными пробками».

В такой постановке, по-видимому, устраняется значительная часть трудностей, вставших при первой попытке создания стационарного магнитного термоядерного реактора и связанных с дрейфом частиц, нагреванием плазмы и появляющейся макроскопической неустойчивостью при пропускании через плазму больших токов.

* Работа выполнена в 1954 г.

Если применима существующая ныне теория явлений переноса в плазме, основанная на предположении о парных столкновениях, и если в системе не появятся каких-либо микротурбулентностей или макроскопических движений, то предлагаемый метод, по-видимому, позволит осуществить термоядерную реакцию в лабораторных условиях и, вполне возможно, также и в промышленных масштабах.

Имеются основания предполагать, что в рассматриваемой системе не должны развиваться турбулентность и другие колебания, поскольку процесс идет так, что, во-первых, плазма находится все время в квазиравновесном состоянии, во-вторых, плотность ее такова, что длина пробега много больше размеров системы, в-третьих, плазма находится в сильных внешних полях, в-четвертых, сквозь плазму не протекают токи.

Совершенно ясно, что вследствие чрезвычайной сложности явлений и отсутствия законченной теории плазмы, скольконибудь определенный ответ на вопрос о возможности осуществления рассматриваемого предложения может быть дан только после тщательного теоретического и экспериментального исследований.

В настоящей работе излагаются только физические принципы и самые предварительные расчеты. Она написана с тем, чтобы как можно скорее привлечь к обсуждению и изучению проблемы более широкий круг специалистов. Автор заранее приносит свои извинения за незаконченность рассмотрения даже отдельных частных вопросов и возможные неточности.

Автор глубоко признателен Б. В. Чирикову за обсуждение и ценные советы.

§ 2. Изоляция газа заряженных частиц в системе с магнитными пробками

Заряженная частица, находящаяся в цилиндре с продольным магнитным полем, величина которого на торцах много больше, чем в объеме, будет заперта, если у нее

$$\frac{W_{\perp}}{W} > \alpha, \quad (2.1)$$

где

$$\alpha = \frac{H_0}{H_{\text{пр}}},$$

W — кинетическая энергия частицы; W_{\perp} — составляющая этой энергии в направлении, перпендикулярном к полю; H_0 — магнитное поле в объеме; $H_{\text{пр}}$ — магнитное поле на торцах, которое в дальнейшем мы будем называть магнит-

ной пробкой (рис. 1). Это нетрудно увидеть из условия постоянства в процессе движения кинетической энергии частицы и ее магнитного момента (который является адиабатическим инвариантом)

$$W = W_{\parallel} + W_{\perp} = \text{const},$$

$$\frac{W_{\perp}}{H} = \text{const}. \quad (2.2)$$

Таким образом, в поле указанной конфигурации осуществляется изоляция частиц от стенок независимо от знака

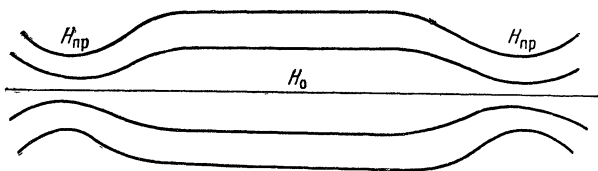


Рис. 1.

заряда, энергии и плотности, во всяком случае до тех пор, пока $nT \ll H^2/8\pi$, где n — плотность, а T — температура газа. Частица будет колебаться между «пробками» до тех пор, пока вследствие столкновений не уйдет на боковую стенку или не изменит соотношения между W_{\perp} и W_{\parallel} , так, что нарушится соотношение (2.1), и тогда она уйдет через «пробки». Количество частиц, уходящих из объема вследствие первого механизма, равно

$$I_1 = N \frac{\rho^2}{R^2} \frac{1}{\tau}, \quad (2.3)$$

где N — полное число частиц в объеме; R — радиус трубы; $\rho = \frac{mv_{\perp}c}{eH}$ — ларморовский радиус частицы; τ — время рассеяния частицы на угол порядка единицы. Поток же через пробки в случае, когда рассеяние обусловлено главным образом столкновениями с нейтральными атомами и происходит на большие углы, а давление достаточно мало, чтобы пробег был много больше расстояния между пробками, равен

$$I_2 = N \frac{\alpha}{2\tau}. \quad (2.4)$$

Действительно, в соответствии с (2.1) в пространстве импульсов существует конус с раствором $2\sqrt{\alpha}$, попадая в который частица вылетает через пробки (рис. 2). Объем этого конуса

по отношению к полному объему в импульсном пространстве равен $\alpha/2$. Такова же вероятность попадания частицы в этот конус при каждом столкновении, если рассеяние происходит на большие углы. При заданном $H_{\text{пр}}$ общий поток будет минимальным, когда $I_1 = I_2/2$, и равным

$$I = \frac{3}{2} \frac{N}{\tau} \left(\frac{Tmc^2}{R^2 e^2 H_{\text{пр}}^2} \right)^{1/3}. \quad (2.5)$$

При этом среднее поле в объеме должно быть сделано равным

$$H_0 = 2 \left(\frac{Tmc^2 H_{\text{пр}}}{e^2 R^2} \right)^{1/3}, \quad (2.6)$$

где T — температура, а m — масса заряженных частиц. Так, например, при $H_{\text{пр}} = 10\,000$ гс для электронов с $T = 30$ эв и при

$R = 5$ см, поле в объеме должно равняться 80 гс, а время существования электрона в объеме будет порядка 170 τ . В случае, если оптимальное значение H_0 окажется слишком малым, так что поле в объеме по тем или иным соображениям придется брать больше оптимального, полный выход частиц будет всецело определяться уходом их через пробки.

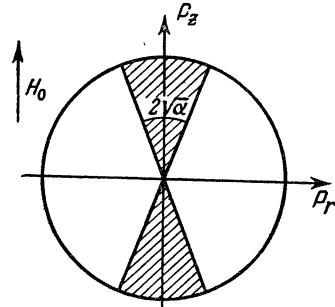


Рис. 2.

При достаточной ионизации, когда столкновения заряженных частиц между собой становятся существенными, уход их через пробки резко повышается. Связано это не только с увеличением сечения рассеяния, но главным образом с изменением характера рассеяния. Если рассеяние происходит на малые углы, то частица непрерывно диффундирует в пространстве импульсов. В этом случае отношение времени попадания частицы в запретный конус ко времени рассеяния на угол порядка единицы вовсе не равно отношению объема конуса ко всему объему, а определяется из решения соответствующего «диффузионного» уравнения, в котором с хорошей степенью точности можно принять в виде граничного условия обращение в нуль функции распределения на поверхности конуса.

Кинетическое уравнение при кулоновском взаимодействии частиц в фоккер-планковском приближении получено Л. Д. Ландау и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = - \frac{\partial}{\partial p_i} j_i + Q, \quad (2.7)$$

$[H, f]$ — скобки Пуассона; Q — плотность источников частиц;

$$j_i = \sum 2\pi e^2 e'^2 L \int dp' \left[\frac{\partial f'}{\partial p'_i} f - \frac{\partial f}{\partial p_k} f' \right] w_{ik}, \quad (2.8)$$

$$w_{ik} = \frac{u^{2\delta_{ik}} - u_i u_k}{u^3}, \quad (2.9)$$

L — кулоновский логарифм; $u_i = \frac{p'_i}{m'} - \frac{p_i}{m}$ — относительная скорость.

В общем случае решение такого уравнения весьма затруднительно. Мы рассмотрим задачу только в пространстве импульсов, при этом в решение войдет усредненный квадрат плотности. Так как и другие интересующие нас величины, например выход ядерной реакции, зависят от этого же квадрата, то это решение нас вполне удовлетворяет.

Таким образом, задача сводится к решению следующего уравнения:

$$\sum 2\pi e^2 e'^2 n^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp' \left(\frac{\partial f'}{\partial p'_i} f - \frac{\partial f}{\partial p_k} f' \right) w_{ik} - Q = 0, \quad (2.10)$$

где n — плотность частиц, а под f мы понимаем теперь только импульсную часть функции распределения с граничным условием $f=0$ при $\vartheta = \vartheta_0$; ϑ — угол в пространстве импульсов в сферической системе координат с осью, направленной вдоль магнитного поля, а

$$\sin \vartheta_0 = \sqrt{\alpha}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим вначале рассеяние одинаковых частиц друг на друге. В этом случае j' совпадает с f . Поскольку в (2.10) от f' берется интеграл по p' , то ее в отличие от f можно считать в первом приближении максвелловской,

$$f = \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-\frac{p'^2}{2mT}}. \quad (2.12)$$

Отметим, что в таком приближении мы получим поток частиц на запрещенный конус несколько больший, чем истинный. Действительно, вблизи запрещенного конуса плотность частиц относительно занижена. Подставляя под интеграл незаниженное значение, мы увеличиваем число рассеивающих частиц, имеющих малую скорость относительно уходящих на конус частиц. Так как w_{ik} максимальна при малых u , то этим мы увеличиваем поток. Однако

за счет умножения при интегрировании на u^2 это увеличение незначительно.

Подставляя (2.12) в (2.10), получим

$$\frac{2\pi e^4 L n^2}{(2\pi m T)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp' \left(\frac{p'_k}{mT} f + \frac{\partial f}{\partial p_k} \right) e^{-\frac{p'^2}{2mT}} w_{ik} = -Q. \quad (2.13)$$

Далее, замечая, что вектор u_i ортогонален тензору w_{ik}

$$w_{ik} u_k = 0, \quad (2.14)$$

можем в (2.13) заменить p'_k на p_k (ибо $p'_k = p_k + u_k$). Введем безразмерные переменные

$$p_i \sim \frac{p_i}{\sqrt{2mT}}; \quad p'_i \sim \frac{p'_i}{\sqrt{2mT}}; \quad u_i \sim \frac{u_i}{\sqrt{\frac{2T}{m}}}. \quad (2.15)$$

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\partial f}{\partial p_k} + 2p_k f \right] \bar{w}_{ik} = -q, \quad (2.16)$$

где

$$q = Q \frac{\sqrt{2\pi m} T^{3/2}}{e^4 n^2 L}, \quad (2.17)$$

$$\bar{w}_{ik} = \int e^{-p'^2} \frac{u^{2\delta_{ik}} - u_i u_k}{u^3} dp'. \quad (2.18)$$

Перейдем в (2.18) под интегралом к новым переменным

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$$

и выберем в этих переменных сферическую систему координат с осью, направленной вдоль p_2 ; тогда, после интегрирования по азимутальному углу φ , уравнение (2.18) примет вид

$$\bar{w}_{ik} = e^{-p^2} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-u^2} u \int_0^\pi e^{-2pu \cos \vartheta} w_{ik}(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta du, \quad (2.19)$$

где

$$w_{ik} = 2\pi \begin{vmatrix} \cos^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \vartheta \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

В произвольной системе координат, следовательно, можно записать

$$\bar{w}_{ik} = a(p) \delta_{ik} - b(p) \frac{p_i p_k}{p^2}, \quad (2.21)$$

где

$$a(p) = 2\pi e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-u^2} u \int_0^\pi e^{-2pu \cos \vartheta} \times \\ \times \left(\cos^2 \vartheta + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \sin \vartheta d\vartheta du, \quad (2.22)$$

$$b(p) = 2\pi e^{-p^2} \int_0^\infty e^{-u^2} u \int_0^\pi e^{-2pu \cos \vartheta} \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \sin \vartheta d\vartheta du.$$

В результате уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} + 2p_k f \right) \left[a(p) \delta_{ik} - b(p) \frac{p_i p_k}{p^2} \right] \right\} = -q. \quad (2.23)$$

Переходя к сферической системе координат, получим:

$$\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p^2 [a(p) - b(p)] \left(\frac{\partial f}{\partial p} + 2fp \right) \right\} + \\ + \frac{a(p)}{p^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = -q. \quad (2.24)$$

До сих пор мы не раскрывали явного вида источников как функций от p . Предположим, что частицы рождаются сферически симметрично, т. е. q не зависит от ϑ . При определенной зависимости $q(p)$, а именно:

$$q(p) = q_0 e^{-\gamma^2} \frac{a(p)}{p^2}, \quad (2.25)$$

где q_0 — константа, удается найти решение уравнения (2.24), удовлетворяющее граничным условиям. В этом случае ищем решение в виде

$$f = e^{-\gamma^2} \psi(\vartheta). \quad (2.26)$$

Замечая, что эта функция обращает в нуль выражение, стоящее в (2.24) под знаком производной по p , получаем для ψ следующее уравнение:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) = -q_0. \quad (2.27)$$

Нетрудно видеть, что

$$\psi = q_0 \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \quad (2.28)$$

удовлетворяет уравнению (2.27) и граничным условиям. Таким образом, в этом случае искомая функция равна

$$f = q_0 e^{-p^2} \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0}. \quad (2.29)$$

Множитель q_0 определяется из условия нормировки

$$q_0 = \frac{1}{\pi^{3/2} \left[-\ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0 \right]},$$

или для малых ϑ_0 , $\sin^2 \vartheta_0 = \alpha \ll 1$

$$q_0 = \frac{2}{\pi^{3/2} (|\ln \alpha| + 2 \ln 2 - 2)}. \quad (2.30)$$

Поток частиц на запрещенный конус из единицы объема равен интегралу по всем импульсам от источников Q . Из (2.17), (2.25) и (2.30) получаем

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \int_0^\infty Q(p) p^2 dp = \\ &= \frac{4\sqrt{2} Le^4 n^2}{\pi \sqrt{m} T^{3/2}} \cdot \frac{\int_0^\infty e^{-p^2} a(p) dp}{|\ln \alpha| + 2 \ln 2 - 2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для получения потока частиц остается вычислить следующий интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-p^2} a(p) dp = \pi \int_0^\infty e^{-2p^2} \int_0^\infty e^{-u^2} u \int_{-1}^1 e^{-2pux} (1+x^2) dx du dp.$$

Рассмотрим сначала интеграл

$$I_1(\beta) = \int_0^\infty dp \int_0^\infty u du \int_{-1}^1 dx e^{-p^2 \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)} e^{-u^2 - 2pux},$$

Интегрирование по x и u производится элементарно, в результате чего получаем

$$I_1(\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{p^2}{\beta^2}}}{p} dp \int_0^p e^{-t^2} dt \int_0^\infty \frac{e^{-p^2}}{p} dp \int_0^{\beta p} e^{-t^2} dt,$$

откуда

$$\frac{\partial I_1(\beta)}{\partial \beta} = \int_0^{\infty} e^{-p^2(1+\beta^2)} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}},$$

и так как $I_1(0) = 0$, то

$$I_1(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$$

Интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} u du \int_{-1}^1 x^2 e^{-2p^2 - u^2 - 2px} dx$$

интегрированием по частям по u и по p приводится к виду

$$I_2 = 2I_1 - 2 \int_0^{\infty} e^{-2p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [2 \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}].$$

В результате получаем поток частиц на запретный конус

$$I = 2\sqrt{2\pi} \frac{Le^4 n^2}{\sqrt{m} T^{3/2}} \cdot \frac{3 \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}}{|\ln \alpha| + 2 \ln 2 - 2} \quad (2.32)$$

или в числах:

$$I = \frac{6,1}{|\ln \alpha| - 0,6} \cdot \frac{Le^4 n^2}{\sqrt{m} T^{3/2}}. \quad (2.33)$$

Нетрудно видеть, что поток энергии из объема равен

$$Q^- = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{Le^4 n^2}{\sqrt{m} T^{1/2}} \cdot \frac{\int_0^{\infty} e^{-p^2} a(p) p^2 dp}{|\ln \alpha| + 2 \ln 2 - 2}; \quad (2.34)$$

интеграл в (2.34) берется дифференцированием по параметру, в результате чего получаем

$$Q^- = 2\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{|\ln \alpha| + 2 \ln 2 - 2} \cdot \frac{Le^4 n^2}{\sqrt{m} T}. \quad (2.35)$$

Средняя энергия, уносимая каждой частицей

$$E = \frac{\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{3 \ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}} T \simeq 0,43 T. \quad (2.36)$$

Уменьшение средней уносимой энергии по сравнению с $\frac{3}{2}T$ связано с двумя эффектами: во-первых, частицы вылетают тогда, когда у них малая поперечная энергия, во-вторых, сечение рассеяния для медленных частиц больше среднего.

Таким получается поток при выборе источников в виде (2.25). Конкретный вид источников не существен, коль скоро они не зависят от углов и распределены по энергиям близко к максвелловскому (выбранный вид представляет собой почти максвелловский, усиленный в области малых энергий $q \sim \frac{\Phi(p)}{p^3} e^{-p^2}$, где $\Phi(p)$ — функция Крампа. $q \sim e^{-p^2}/p^3$ для больших p и $q \sim 1/p^2$ для малых p).

Представляет интерес рассмотреть еще случай, когда источники

$$q = q_0 \frac{a(p)}{p^2} e^{-p^2} \delta(\vartheta - \pi/2), \quad (2.37)$$

т. е. когда частицы инжектируются перпендикулярно к магнитному полю. В этом случае уравнение (2.23) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(p)} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p^2 [a(p) - b(p)] \left(\frac{\partial f}{\partial p} + 2pf \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = -q_0 e^{-p^2} (\vartheta - \pi/2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

с граничными условиями $f_{\vartheta=0} = 0$; $f_{\vartheta=\pi-0} = 0$.

Ищем решение в виде

$$f = e^{-p^2} \psi(\vartheta), \quad (2.39)$$

тогда для $\psi(\vartheta)$ получаем

$$\psi = \frac{q_0}{2} \left[\left| \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right| - \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right], \quad (2.40)$$

Из условия нормировки получаем при $\alpha \ll 1$

$$q_0 = \frac{\sqrt{4}}{\pi^{3/2} |\ln \alpha|}. \quad (2.41)$$

Поток на запретный конус равен

$$I = \frac{6,1}{|\ln \alpha|} \frac{L e^4 n^2}{\sqrt{m} T^{3/2}}, \quad (2.42)$$

что отличается от случая изотропной инжекции заменой $0,55\alpha$ на α . В дальнейшем мы в обоих случаях будем писать просто $(\ln \alpha)$.

Наконец, рассмотрим уход электронов, связанный с рассеянием их на ионах. В этом случае, как нетрудно видеть, уравнение (2.24) принимает вид (с точностью до $\frac{m}{M}$)

$$\frac{\pi^{3/2}}{p^3 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) = -q, \quad (2.43)$$

так как с точностью до членов порядка m/M

$$a(p) = b(p) = \frac{\pi^{3/2}}{p}. \quad (2.44)$$

Физический смысл этого решения в том, что электроны не обмениваются с ионами энергией, а только рассеиваются на них. В этом случае решение находится при любом виде $q(p)$

$$f = \frac{q(p) \cdot p^3}{\pi^{3/2}} \cdot \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \quad (2.45)$$

для изотропной инжекции и

$$f = \frac{q(p) p^3}{2\pi^{3/2}} \left[\left| \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \right| - \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| \right] \quad (2.46)$$

при инжектировании перпендикулярно к магнитному полю. Выберем $q = q_0 e^{-p^2}$, тогда поток оказывается равным

$$I = 4\pi \int_0^\infty Q(p) p^2 dp = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi^{3/2}}{|\ln \alpha|} \frac{e^4 L n^2}{\sqrt{m} T^{3/2}} = \frac{2}{|\ln \alpha|} \frac{e^4 L n^2}{\sqrt{m} T^{3/2}}. \quad (2.47)$$

Результат формально оказался в три раза меньше, чем при рассеянии на электронах. Однако необходимо учесть, что при таком выборе источников функция распределения такова, что средняя энергия больше $^{3/2} T$. Если в формулах (2.47) и (2.42) под T понимать $^{2/3}$ средней энергии, то (2.47) надо будет еще умножить на $\left(\frac{8}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2}$ и рассеяние на ионах окажется в три раза больше, чем на электронах.

В заключение имеет смысл ввести понятие эффективного сечения $\sigma_{\text{эф}}$ для выхода частиц через пробки, так чтобы

$$I = n^2 \sigma_{\text{эф}} v_{\text{от}}, \quad (2.48)$$

где $v_{от}$ — относительная скорость частиц. Для рассеяния частиц друг на друге $v_{от} = \sqrt{T/m}$ и

$$\sigma_{эф} = \frac{3}{|\ln \alpha|} \cdot \frac{Le^4}{T^2} = \frac{3L}{4|\ln \alpha|} \cdot \frac{10^{-25}}{T_{Мэв}^2} [см^2]. \quad (2.49)$$

§ 3. Стационарная термоядерная реакция. К вопросу о ее промышленном применении

Эффективное сечение для выхода частиц через пробки становится равным по порядку величины ядерному сечению при температуре ~ 1 Мэв. Это значит, что в системе с магнитными пробками при температуре ионов порядка 1 Мэв можно надеяться осуществить самоподдерживающуюся стационарную термоядерную реакцию, если удастся сделать так, чтобы: 1) уход частиц через пробки определялся ионным временем (т. е. временем ухода ионов вследствие их взаимных столкновений); 2) передача энергии от электронов к ионам была достаточно мала; 3) была возможность инжектировать в объем новые ионы взамен уходящих через пробки*.

Рассмотрим определенный режим работы реактора, при котором, по-видимому, возможна самоподдерживающаяся реакция, отложив до следующего параграфа рассмотрение вопроса о том, как войти в этот режим.

В соленоиде достаточно больших размеров с большим магнитным полем и с магнитными пробками на концах имеется плазма, у которой температура ионов порядка 1 Мэв, а температура электронов много меньше.

В таком режиме уход частиц через пробки будет определяться ионным временем. Действительно, в незаряженной плазме уход электронов в $\sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_{и}}{T_{эл}} \right)^{3/2}$ раз больше, чем уход ионов. Это значит, что плазма быстро зарядится до положительного потенциала, порядка нескольких электронных температур, чтобы резко снизить уход электронов. Уход электронов уменьшится как за счет появившейся для большей их части потенциальной ямы, так и за счет улучшения соотношения между продольной и поперечной составляющими скорости к моменту подхода электронов к пробке для тех из них, которые имеют энергию больше глубины потенциальной ямы. Ухудшение соотношения между составляющими скоростей для ионов несущественно изменит уход ионов.

* Конечно, если применима теория парных столкновений, лежащая в основе расчета $\sigma_{эф}$, а также если в системе не появится каких-либо неустойчивостей.

Унос энергии из объема за счет ухода через пробки из расчета на одну частицу согласно (2. 36):

$$q^- = nv_{\text{от}\sigma_{\text{эф}}} \cdot 0,43 T = \frac{0,32 \cdot 10^{-25}}{|\ln \alpha| T_{M\text{эв}}} nv_{\text{от}} \left[\frac{M\text{эв}}{сек} \right]. \quad (3.1)$$

Количество выделяющейся в объеме энергии (из расчета на одну частицу)

$$q^+ = nv_{\text{от}\sigma_{\text{яд}}} q_{\text{яд}}, \quad (3.2)$$

где $\sigma_{\text{яд}}$ и $q_{\text{яд}}$ — сечение и выход энергии в ядерной реакции. Если инжектируются холодные ионы и другими потерями можно пренебречь, то условие самоподдерживающейся реакции принимает вид

$$T > \frac{0,32 \cdot 10^{-25} L}{|\ln \alpha| q_{\text{яд}} \frac{\sigma_{\text{яд}}}{M\text{эв}}} [M\text{эв}]. \quad (3.3)$$

Так как речь идет о температуре порядка 1 $M\text{эв}$, то $\sigma_{\text{яд}} = 10^{-25} \text{ см}^2$ и, считая, $q_{\text{яд}} = 3 M\text{эв}$, $L = 20$; $|\ln \alpha| \simeq 2,3$,

$$T > 0,85 M\text{эв} \simeq 1 M\text{эв}.$$

Далее рассмотрим передачу энергии от ионов к электронам. Количество тепла, передаваемое электронам (из расчета на одну частицу) [1],

$$q^+ = 4 \sqrt{2\pi} \frac{m}{M} \frac{T_{\text{и}} - T_{\text{эл}}}{\sqrt{m} T_{\text{эл}}^{1/2}} e^4 L n. \quad (3.4)$$

Тепло из электронного газа уходит, во-первых, вместе с электронами через пробки, во-вторых, уносится электромагнитным излучением. При учете только первого механизма

$$q^- = \frac{6,1}{|\ln \alpha|} \frac{Le^4 n}{\sqrt{M} T_{\text{и}}^{1/2}} V, \quad (3.5)$$

где U — глубина потенциальной ямы. Считая $U = \kappa T_{\text{эл}}$, где $\kappa = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{M}{m}} \simeq 2$, считая $T_{\text{и}} - T_{\text{эл}} \sim T_{\text{и}}$, получим:

$$T_{\text{эл}} = \left(2,7 \frac{m}{M} \frac{|\ln \alpha|^2}{\kappa^2} \right)^{1/2} T_{\text{и}} \approx \frac{T_{\text{и}}}{4}. \quad (3.6)$$

При учете только механизма тормозного излучения

$$q^- = \frac{32 \sqrt{2}}{3 \sqrt{3} 137} \cdot \frac{e^4 \sqrt{T_{\text{эл}}}}{m^{3/2} c^2} \quad (3.7)$$

и температура электронов оказывается равной

$$T_{эл}^2 = 160L \frac{m}{M} mc^2 T_{и} \approx mc^2 T_{и} \quad (3.8)$$

Это значит, что охлаждение тормозным излучением несущественно по сравнению с уходом энергии через пробки. Электроны уносят в среднем энергию $U \approx 2T_{эл} \approx T_{и}/2$, т. е. столько же, сколько ионы. Температура, при которой идет реакция, поэтому удваивается и оказывается равной

$$T = 2 M_{эв} \quad (3.9)$$

Так как температура не может быть больше энергии реакции, то получаем, что возможность осуществления самоподдерживающейся термоядерной реакции в системе с магнитными пробками при инъекции холодного газа очень чувствительна к значениям коэффициентов в формулах и к роли других неучтенных факторов. Поэтому при точном решении задачи может оказаться, что реакция либо легко осуществима, либо что она не осуществима без дальнейших усовершенствований*.

Совершенно не выяснен в настоящий момент вопрос о возможности инжестирования в объем холодных частиц, так как медленная нейтральная молекула не может глубоко проникнуть внутрь плазмы из-за ионизации, а медленные ионы — из-за магнитного поля. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо изучить распределение потенциала и плотности в переходном слое.

Можно, однако, предложить инъекцию молекулярных ионов достаточно большой энергии с последующим развалом их в плазме на атомарные. В таком режиме устраняется значительная часть трудностей предыдущего варианта.

Для того чтобы происходил захват быстрых ионов в объем с магнитным полем, достаточно инжестировать молекулярные ионы D_2^+ или D_3^+ . Захват будет происходить вследствие развала ионов и уменьшения их ларморовского радиуса в два или три раза. Длина пробега ионов для развала

$$l = \frac{1}{n\sigma_{разв}} = \frac{8\pi T_{и}}{H^2 \sigma_{разв}}, \quad (3.10)$$

* Уже в настоящее время можно указать способ уменьшения выхода частиц через пробки, состоящий в том, что частицы, вышедшие через пробки, задерживаются в промежуточном объеме более сильными пробками, у них тем или иным способом увеличивается отношение перпендикулярной скорости к продольной (например, рассеянием частиц) и они возвращаются в рабочий объем при помощи магнитного поршня (см. § 4) с более выгодным соотношением $W_{||}$ и W_{\perp} .

а ларморовский радиус инжектируемого молекулярного иона равен

$$\rho = \sqrt{k} \frac{\sqrt{2Mc^2T_{и}}}{eH}, \quad (3.11)$$

где M — масса дейтона, а k — число дейтонов в молекуле. Скорость инжектируемых ионов порядка тепловой скорости дейтонов в реакторе, равной $\sqrt{\frac{2T}{M}}$. Если инжектируемый ион делает N оборотов до попадания на инжектор, то условие того, что основная часть этих ионов будет захватываться, имеет вид

$$l < 2\pi r N$$

или

$$H^2 > 8\pi T \frac{e^2}{\pi k^2 N^2 M c^2 \sigma_{раз}^2}. \quad (3.12)$$

Считая $k = 3$; $\sigma_{раз} = 10^{-16} \text{ см}^2$, получим

$$H > \frac{10^5 \sqrt{T_{и M эв}}}{N}. \quad (3.13)$$

Так как N легко можно сделать порядка 10 (для чего достаточно инжектировать ионы под углом к плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, и выбрать нужное соотношение между длиной реактора и ларморовским радиусом), то во всех практических случаях, даже при инжектировании широким пучком, можно осуществить почти полный захват инжектируемых ионов.

При таком режиме для протекания заметной реакции достаточно температуры порядка нескольких десятков киловольт. Однако, если мы хотим, чтобы почти каждый ион вступал в реакцию, температура должна быть поднята до 1 $Mэв$. В таком режиме можно также поставить вопрос о самоподдерживающейся реакции в следующем смысле: высокое напряжение, необходимое для ускорения инжектируемых ионов, берется за счет торможения ионов и электронов, вылетающих через пробки (см. § 5). Если η — коэффициент полезного действия при такой трансформации, то условие самоподдерживающегося режима принимает вид

$$T > \frac{0,32 \cdot 10^{-25} L}{|\ln \alpha|} \frac{1 - \eta}{q_{нд, M эв} \sigma_{нд}} \approx 0,85 (1 - \eta) [M эв], \quad (3.14)$$

т. е. облегчается в $\frac{1}{1 - \eta}$ раз.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности осуществления самоподдерживающейся реакции в экономическом смысле, т. е. реакции, в которой выделяющаяся энергия больше всей затрачиваемой на создание и поддержание реакции энергии. Основные потери энергии будут в обмотках соленоида. Если выбрать толщину обмотки такой, чтобы ее площадь равнялась площади сечения внутренней части соленоида, то омические потери в обмотке равны

$$Q_{\text{ом}} = I^2 R_{\text{ом}} = \frac{c^2 H^2 l}{4\pi\lambda \cdot \ln 2} = 2 \cdot 10^{-8} H^2 l \quad [\text{kвт}], \quad (3.15)$$

где l — длина цилиндра, λ — проводимость меди в CGSE. Энергия, выделяющаяся вследствие ядерной реакции, равна

$$\begin{aligned} Q_{\text{яд}} &= V n^2 \sigma_{\text{яд}} q_{\text{яд}} v_{\text{от}} = \frac{2}{(8\pi)^2} V \sigma_{\text{яд}} q_{\text{яд}} \frac{H^4}{\sqrt{M} T_{\text{и}}^{3/2}} = \\ &= 140V \frac{H^4}{T_{\text{и}}^{3/2} M_{\text{эв}}} \sigma_{\text{яд}} q_{\text{яд}}, \quad M_{\text{эв}} \quad [\text{kвт}], \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $V = \pi R^2 l$ — объем реактора.

Таким образом,

$$\frac{Q_{\text{яд}}}{Q_{\text{ом}}} \simeq 2,2 \cdot 10^{10} H^2 R^2 \frac{\sigma_{\text{яд}} q_{\text{яд}}, M_{\text{эв}}}{T_{\text{и}}^{3/2}, M_{\text{эв}}}. \quad (3.17)$$

Полагая $\sigma_{\text{яд}} = 10^{-25}$, $q_{\text{яд}} = 3 M_{\text{эв}}$, $T_{\text{и}} = 1 M_{\text{эв}}$, получим, что это отношение становится больше единицы при

$$HR > 120 \text{ кгс} \cdot \text{м}. \quad (3.18)$$

Это условие удовлетворяется при очень больших размерах установки, лежащих, однако, в пределах современных технических возможностей.

Получение нейтронов в реакторе при инжекции быстрых ионов внешне напоминает получение их при бомбардировке мишени в ускорительной трубке. Качественное отличие описанного реактора состоит, однако, в том, что в мишени ион теряет энергию главным образом на электронах, отчего его длина пробега на потерю энергии оказывается в $\frac{M}{m}$ раз меньше длины пробега для рассеяния на угол порядка единицы (в водороде). В результате выход нейтронов из мишени при одинаковом инжектируемом токе оказывается по порядку величины в $\frac{M}{m}$ раз меньше, чем в рассмотренном генераторе.

Несмотря на то что в реакторе температура электронов ниже температуры ионов, передача электронам энергии много меньше, чем в мишени. Обычные формулы для потери энергии

иона на электронах справедливы, если скорости электронов малы по сравнению со скоростью иона. В обратном случае потери падают, как видно из формулы (3.4), как $T_{эл}^{3/2}$. Следует также иметь в виду, что ионизация в плазме должна быть очень высокой, чтобы уход ионов из-за перезарядки был меньше всех других потерь.

§ 4. Разряд в высоком вакууме в системе с магнитными пробками и магнитным поршнем. К вопросу о первоначальном нагреве плазмы

Магнитным поршнем будем называть область повышенного магнитного поля ($H_{и}$), движущуюся вдоль поля. Нетрудно видеть, что заряженная частица по той же причине, по которой она отражается от магнитных пробок, будет отражаться от поршня, коль скоро

$$\frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 + (v_0 + v_{и})^2} > \alpha_n, \quad (4.1)$$

где v_0 — скорость поршня, $\alpha_n = \frac{H_0}{H_{и}}$.

Рассмотрим цилиндр с продольным магнитным полем, запертый с торцов магнитными пробками, вдоль которого движется магнитный поршень, и пусть магнитное поле поршня много больше среднего поля, но меньше поля пробок. Для определенности предположим, что поршень движется от правой пробки к левой. Рассмотрим вначале процесс без учета столкновений, т. е. время сжатия поршнем много меньше времени между столкновениями. Тогда все заряженные частицы, у которых выполняется соотношение (4.1), будут отражаться от поршня и почти весь газ заряженных частиц будет сжиматься между левой пробкой и поршнем и нагреваться вследствие этого сжатия. Небольшое число частиц, у которых не выполняется условие (4.1), будет пронизывать поршень и колебаться между пробками, не нагреваясь и не охлаждаясь. И только очень небольшое число частиц, лежащих в интервале

$$\frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 + (v_{||} + v_0)^2} < \alpha_n < \frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 + (v_{||} - v_0)^2}, \quad (4.2)$$

составляющее $2\alpha_n \left(\frac{v_0}{v}\right)$ от общего числа частиц, будет захвачено в правую яму и будет охлаждаться. Процесс сжатия основной массы газа будет продолжаться до тех пор, пока

продольная скорость не увеличится вследствие сжатия в $1/\alpha_n$ раз. Для этого объем газа надо уменьшить в $\sqrt{1/\alpha_n}$ раз, после чего частицы станут проходить сквозь поршень. Действительно, при адиабатическом сжатии энергия частиц растет как $V^{1-\gamma}$, где V — объем, занимаемый газом, а $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Так как в данном случае увеличивается только продольная энергия, то мы имеем газ только с одной степенью свободы и $\gamma = 3$, следовательно,

$$W_{\parallel} \sim V^{-2}. \quad (4.3)$$

Если же время сжатия больше времени между столкновениями, то нужно рассматривать газ с тремя степенями свободы, $\gamma = 5/3$ и

$$W \sim V^{-2/3}. \quad (4.4)$$

Совершенно ясно, что без столкновений невозможно непрерывно греть газ. Однако даже при наличии столкновений газ может нагреваться лишь при особых режимах, в которых обязательно должен присутствовать необратимый процесс. Для пояснения рассмотрим процесс нагревания обычного газа в закрытом цилиндре с помощью движущегося поршня. При сжатии газ будет нагреваться, однако при расширении он будет настолько же охлаждаться, так что без трения газ нагреваться не будет. Если, однако, после сжатия газа открывать в поршне специальный клапан, выпускающий газ в первоначальный объем, а затем возвращать поршень в исходное положение с открытым клапаном, после чего, закрыв клапан, повторять процесс, то газ будет непрерывно нагреваться. Действительно, при сжатии газ будет нагреваться, а при расширении в пустоту не будет охлаждаться. Непрерывное нагревание удастся осуществить, так как включен необратимый процесс — расширение газа в пустоту. Используя аналогичные режимы в системе с магнитным поршнем, можно осуществить непрерывное нагревание газа заряженных частиц. Рассмотрим, например, следующий режим: газ быстро сжимается магнитным поршнем в $\sqrt{1/\alpha_n}$ раз, увеличивая при этом продольную энергию в $1/\alpha_n$ раз, после чего магнитное поле поршня выключается и газ расширяется в первоначальный объем, не охлаждаясь*. Следующее сжатие наиболее рационально произвести по истечении времени порядка времени рассея-

* В действительности при выключении «поршня» происходит некоторое охлаждение газа, обусловленное уменьшением энергии частиц в убывающем поле поршня. Этот эффект, однако, мал, как отношение ширины поршня ко всей длине.

ния τ , когда угловое распределение скоростей частиц снова станет изотропным*. Периодически повторяя этот процесс с указанной частотой, можно передавать газу заряженных частиц за единицу времени следующее количество энергии (из расчета на одну заряженную частицу):

$$q = \frac{1}{2} \frac{T}{\tau_{zn}}, \quad (4.5)$$

где T — температура газа ($W_{\parallel} = \frac{T}{2}$).

Если ε — так называемая цена электрона в разряде, т. е. количество энергии, необходимое для получения одного электрона, то условия зажигания и горения разряда имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{эфф} &> \tau_{и}, \\ q &> \frac{\chi T}{\tau_{эфф}} + \frac{\varepsilon}{\tau_{и}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\tau_{эфф}$ — время ухода электрона через пробки; χT — средняя энергия, уносимая электроном через пробки; $\tau_{и} = \frac{1}{n_0 \sigma_{и} v_{эл}}$ — время ионизации; n_0 — плотность нейтрального газа. Первое уравнение следует из баланса числа электронов, второе — из баланса энергии. Условия зажигания и горения разряда при слабой ионизации согласно (2.4) принимают вид ($\chi = 3/2$)

$$\begin{aligned} \sigma_{и} &> \frac{\alpha}{2} \sigma_{рас}, \\ \varepsilon(T) &< T \frac{\sigma_{рас}}{\sigma_{и}} \left(\frac{1}{2\alpha_n} - \frac{3}{4} \alpha \right) \approx \frac{T}{2\alpha_n} \frac{\sigma_{рас}}{\sigma_{и}} < \frac{T}{\alpha_n \alpha}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если $1/\alpha$ и $1/\alpha_n$ составляют уже несколько единиц, то разряд горит при температуре порядка потенциала ионизации и температура сохраняется или нарастает в процессе разряда. При появлении заметной ионизации уход электронов определяется главным образом столкновениями их друг с другом и с ионами. Условия горения разряда в этом случае имеют вид ($\chi \approx 1/2$, см. (2.36))

$$\begin{aligned} n \sigma_{эфф} &< n_0 \sigma_{и}, \\ \varepsilon(T) &< \frac{n}{n_0} \frac{\sigma_{рас}}{\sigma_{и}} \frac{T}{2} \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{|\ln \alpha|} \right) \simeq \frac{T}{2\alpha_n} \frac{\sigma_{рас}}{\sigma_{и}} \frac{n}{n_0} < T \frac{|\ln \alpha|}{2\alpha_n} \end{aligned} \quad (4.8)$$

* При меньшей частоте движения поршня плазме передается меньше энергии в единицу времени; при большей частоте количество энергии, передаваемое плазме в единицу времени, остается постоянным, однако при этом в случае сильно ионизованной плазмы повышается выход частиц через пробки.

(период колебаний поршня принят равным времени многократного рассеяния, сечение которого отличается от $\sigma_{\text{эфф}}$ в $(\ln \alpha)$ раз)*.

Полученные выражения (4.8) справедливы пока температура электронов порядка потенциала ионизации. Так как при $T_{\text{эл}} \sim I_{\text{и}}$ $\sigma_{\text{эфф}} \sim \sigma_{\text{и}}$, то в стационарном разряде степень ионизации будет порядка 50%. Оценим необходимый период движения поршня

$$\tau_{\text{порш}} \simeq \tau_{\text{рас}} = \frac{1}{nv_{\text{эл}}\sigma_{\text{рас}}} . \quad (4.9)$$

При $T_{\text{эл}} \sim I_{\text{и}}$ $\sigma \sim 10^{-16}$ см², независимо от степени ионизации, и $\tau_{\text{порш}} \cdot n \sim 5 \cdot 10^7$. При $n = 3 \cdot 10^{12}$ ($p = 5 \cdot 10^{-5}$ мм Hg) $\tau_{\text{порш}} \sim 10^{-5}$ сек.

При дальнейшем колебании поршня температура электронов и ионов, вообще говоря, должна повышаться. При попытке рассмотреть такой процесс нагрева мы столкнулись с большими трудностями, связанными главным образом с разным временем ухода быстрых и рождающихся медленных частиц. Поэтому мы вынуждены были отказаться от рассмотрения в настоящей работе этого вопроса, как и многих других важных вопросов, требующих дальнейшего изучения.

Возможность стационарного нагрева плазмы поршнем, по нашему мнению, не исключена. Если, однако, такой нагрев окажется невозможным, то можно предложить другой способ перехода в рассмотренный в предыдущем параграфе режим стационарного реактора, состоящий в импульсном нагреве плазмы поршнем с дальнейшей инжекцией быстрых молекулярных ионов.

Коль скоро импульсным образом в системе с пробками создана плазма с достаточно высокой температурой, то в дальнейшем ее можно поддерживать в стационарном состоянии путем инжекции молекулярных ионов. Однако пока температура ионов меньше температуры электронов, уход частиц определяется электронным временем

$$\tau = \frac{1}{nv_{\text{эл}}\sigma_{\text{эфф. эл}}} . \quad (4.10)$$

Это значит, что пока не произойдет обмена медленных ионов на быстрые, для поддержания плазмы потребуются инжекция значительно большего ионного тока, чем в дальнейшем. Вели-

* При выводе (4.8) мы пользовались выражением (2.42) для ухода частиц через пробки, в котором не учитывается искажение поршнем распределения скоростей частиц по углам. Оценка показывает, что в случае, если период колебания поршня порядка $\tau_{\text{рас}}$, это искажение приводит к увеличению ухода через пробки в $(\ln \alpha_n)$ раз.

чину инжектируемого ионного тока можно было бы значительно уменьшить, взяв достаточно разреженную плазму, однако плотность плазмы лимитируется тем, чтобы инжектируемый молекулярный ион мог развалиться в ней до обратного попадания на инжектор. Такая перестройка плазмы может оказаться возможной при практически разумных значениях инжектируемого тока только в том случае, если в предварительно созданной плазме температура электронов настолько высока, чтобы уход их через пробки был достаточно мал. Если R — радиус цилиндра, l — его длина, а γ — угол инжектируемых ионов, то путь, проходимый ионом до попадания на инжектор, равен

$$S = \frac{2l}{\gamma} \quad (4.11)$$

Отсюда необходимая для развала плотность равна

$$n = \frac{1}{S\sigma_{\text{разв}}} = \frac{\gamma}{2l\sigma_{\text{разв}}} \quad (4.12)$$

Количество уходящих через пробки электронов, а следовательно, необходимое для инъекции число ионов, равно

$$I = \pi R^2 l n^2 v_{\text{эл}} \sigma_{\text{эфф}} = \frac{\pi}{4} \gamma^2 \frac{R^2 v_{\text{эл}} \sigma_{\text{эфф}}}{l \sigma_{\text{разв}}^2} \quad (4.13)$$

Подставляя $\sigma_{\text{разв}} \simeq 10^{-16} \text{ см}^2$; $v_{\text{эл}} \sigma_{\text{эфф}} = \frac{4,5 \cdot 10^{-15} L}{|\ln \alpha| T_{\text{Мэ}}^{3/2}}$,

получим

$$I = 1750 \frac{L}{|\ln \alpha|} \cdot \frac{\gamma^2 R^2}{l T_{\text{Мэ}}^{3/2}} [a] \quad (4.14)$$

Считая $L = 10$ (низкая температура), $\gamma = 1^\circ$, $R = 50 \text{ см}$, $l = 10^3 \text{ см}$, получим

$$I = \frac{6}{T_{\text{эл. Мэ}}^{3/2}} [a] \quad (4.15)$$

Таким образом, видно, что при температуре электронов порядка киловольта необходимый для сохранения и перестройки плазмы ионный ток становится технически достижимым (энергия ионов должна составлять несколько сотен киловольт). Плотность плазмы при этом не опускается ниже 10^{11} . Если инжектируемый ток ниже найденного, то плотность плазмы опустится ниже этой величины, отчего уменьшится количество захватываемых ионов и разряд погаснет.

Таким образом, для того чтобы можно было сделать при помощи инъекции быстрых ионов импульсный разряд стацио-

нарным и перестроить его из режима, в котором температура электронов выше температуры ионов, в обратный, необходимо создать достаточно разреженную плазму с температурой электронов порядка нескольких киловольт. Для создания такой плазмы можно рассмотреть следующий цикл.

В длинном цилиндре разжигается разряд при помощи движущегося поршня. Пусть начальная плотность $3 \cdot 10^{12}$. Когда установится стационарное состояние со степенью ионизации около 50% и температурой электронов порядка нескольких десятков электрон-вольт, прекращаем натекание нейтрального газа и изменяем режим работы поршня. Взамен колебаний поршня с частотой медленных электронов делаем несколько сжатий поршнем через увеличивающиеся промежутки времени, соответствующие времени рассеяния нагреваемых электронов. Так как после каждого сжатия температура увеличивается в $1/3\alpha_n$ раз, то после K сжатий температура электронов увеличится в $\left(\frac{1}{3\alpha_n}\right)^k$ раз. Так как время ухода через пробки порядка времени рассеяния, то количество этих электронов после каждого сжатия падает приблизительно в e раз и непосредственно после k -го сжатия окажется в e^{k-1} раз меньше первоначального. Образующиеся вследствие ионизации медленные электроны уходят быстрее и в расчет не должны приниматься. Таким образом, после нескольких сжатий ценой уменьшения плотности плазмы можно получить достаточно высокую температуру электронов:

$$T_K = T_H \left(\frac{1}{3\alpha_n}\right)^k = \left(\frac{en_H}{n_K}\right)^{|\ln 3\alpha_n|}, \quad (4.16)$$

Выбрав $\frac{n_H}{n_K} = 20$, $1/\alpha_n = 10$, получим:

$$\frac{T_K}{T_H} = 120, \quad k = 4,$$

т. е. при выбранных параметрах получим после четырех сжатий $n = 1,5 \cdot 10^{11}$ при температуре электронов порядка нескольких киловольт — как раз те условия, которые нужны для создания стационарной плазмы методом инжекции быстрых ионов. Если сделать так, чтобы ионы, выходящие через пробки, не возвращались непосредственно в объем, а уходили в другой объем и там нейтрализовались, то, как нетрудно видеть, степень ионизации резко повысится к концу последнего сжатия. Действительно, нейтральный газ будет ионизоваться и усиленно уходить в виде ионов, между тем как естественное натекание как через отверстия в торцах для выпуска ионов, так и со стенок будет меньше. Так как сечение ионизации падает

с энергией слабее, чем сечение рассеяния, то плотность нейтральных частиц будет падать сильнее, чем плотность заряженных.

Ясно, что рассмотренные варианты не исчерпывают всех возможностей развития разряда и нагрева в системе с магнитными пробками. Мы не говорим здесь о других вариантах, так как в них имеется много неясностей и включение их в работу усложнило бы и без того громоздкий текст.

§ 5. К вопросу о непосредственном превращении ядерной энергии в электрическую

В ядерных реакторах, рабочее вещество которых представляет собой достаточно разреженную плазму, открывается возможность промышленного экономичного непосредственного превращения ядерной энергии в электрическую энергию высокого напряжения, минуя тепловую стадию, паровую турбину, динамомашину и повышающий трансформатор.

Мы уже указывали, что в реакторе с пробками при самоподдерживающейся реакции можно получить электроэнергию высокого напряжения (порядка 1 Мэв) путем торможения вылетающих ионов и электронов. Ионный ток от электронного можно отделить с помощью поперечного магнитного поля (так как процесс стационарный, то объемные заряды обоих токов будут компенсированы после разделения медленными электронами и ионами соответственно). Вследствие теплового разброса скоростей к. п. д. такой системы при прямом торможении будет порядка 50%, остальная энергия перейдет в тепло. Вполне возможно, что к. п. д. можно значительно повысить, если удастся разделить частицы на несколько групп по энергии и тормозить каждую из них своим потенциалом.

Кроме такого тривиального способа непосредственного получения электроэнергии, укажем другой способ, который мы будем называть методом адиабатического размагничивания. Этот способ может быть применен не только в рассмотренном выше реакторе, но и в любом другом ядерном реакторе, в котором реакция идет в разреженной плазме.

Сущность метода состоит в следующем. Поместим ядерный реактор в соленоид с магнитным полем и выберем величину поля такой, чтобы время обращения частиц было бы много меньше времени между столкновениями ($\omega\tau \gg 1$). Тогда с изменением магнитного поля, как известно, изменяется поперечная энергия частиц (бетатронное нагревание или охлаждение газа)

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{W_{\perp}}{H} \frac{dH}{dt}, \quad (5.1)$$

Ранее автором было показано [2], что при определенном режиме периодического изменения поля можно непрерывно нагревать плазму. При этом определяющую роль играли столкновения, без которых непрерывное нагревание невозможно вследствие обратимости законов механики.

Рассмотрим, для определенности, следующий цикл отсоса энергии из плазмы методом адиабатического размагничивания, использующий в качестве необратимого процесса не обмен энергией между поперечной и продольной составляющими, как это имеет место в цитированной выше работе, а также в § 4 настоящей работы, а необратимый процесс выделения ядерной энергии и охлаждения плазмы вследствие теплопроводности и тому подобных причин. Пусть в начале цикла температура плазмы T и магнитное поле H_0 . Произведем следующие операции.

1. Уменьшим поле до H_1 (для определенности, за время, меньшее времени столкновения). Поперечная энергия плазмы уменьшится в H_0/H_1 раз, причем эта энергия перейдет в энергию электрического тока в обмотках

$$q_+ = T_0 \left(1 - \frac{H_1}{H_0}\right) N, \quad (5.2)$$

где N — полное число частиц. Температура плазмы станет равной

$$T_1 = \frac{T_0}{3} \left(1 + 2 \frac{H_1}{H_0}\right). \quad (5.3)$$

2. Подберем такой режим, чтобы плазма продолжала охлаждаться за счет теплопроводности, и подождем некоторое время, пока она охладится в k раз ($T_2 = T_1/k$). При этом в «холодильник» перетечет энергия

$$q_0 = \frac{3}{2} T_1 \frac{k-1}{k} N = \frac{T_0}{2} \left(1 + 2 \frac{H_1}{H_0}\right) \frac{k-1}{k} N. \quad (5.4)$$

3. Повысим магнитное поле до первоначальной величины H_0 . Для этого нужно затратить энергию

$$q_- = T_2 \left(\frac{H_0}{H_1} - 1\right) N = \frac{T_0}{3k} \left(1 + 2 \frac{H_1}{H_0}\right) \left(\frac{H_0}{H_1} - 1\right) N. \quad (5.5)$$

При этом температура станет равной

$$T_3 = \frac{T_2}{3} \left(1 + 2 \frac{H_0}{H_1}\right) = \frac{T_0}{9k} \left(1 + 2 \frac{H_0}{H_1}\right) \left(1 + 2 \frac{H_1}{H_0}\right). \quad (5.6)$$

Выберем k и H_0/H_1 так, чтобы T_3/T_0 было достаточно мало (см. ниже), и подберем режим так, чтобы плазма нагревалась

до начальной температуры T_0 . В результате такого цикла (адиабатическое охлаждение, охлаждение с помощью теплопроводности, адиабатический нагрев, нагрев вследствие ядерных реакций) мы возвращаемся в исходное состояние; при этом в обмотки перешло $q_+ - q_-$ энергии и в холодильник q_0 . Условия отсоса энергии ($q_+ - q_- > 0$) определяют глубину модуляции поля как функцию k

$$1 > \frac{H_1}{H_0} > \frac{1}{3k-2}. \quad (5.7)$$

При более глубокой модуляции будет происходить непрерывный бетатронный нагрев плазмы. К. п. д. трансформации ядерной энергии в электрическую равен

$$\eta = \frac{q_+ - q_-}{q_+ - q_- + q_0} = 1 - \frac{3x(k-1)(1+2x)}{9kx - 2x^2 - 5x - 2}, \quad (5.8)$$

$$x = H_1/H_0.$$

При заданном k η имеет максимум в случае

$$x = \sqrt{\frac{5}{9k-4}} \quad (5.9)$$

и изменяется от нуля при $x = k = 1$ до $2/3$ при $k \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0$). Более выгодным с точки зрения к. п. д. является такой же цикл, но с изменением магнитного поля за время, большое по сравнению со временем между столкновениями, если это допускается режимом ядерной реакции. В этом случае

$$\eta = 1 - \left(\frac{H_1}{H_0}\right)^3 \quad (5.10)$$

и может быть сделан в принципе очень близким к единице.

§ 6. Некоторые замечания

В настоящем параграфе мы коснемся некоторых важных вопросов, не рассмотренных в работе, но заслуживающих тщательного изучения в дальнейшем.

1. В основе расчетов лежит ламинарная теория плазмы, т. е. учитывающая только парные столкновения частиц. Эта теория часто применяется при расчете динамики плазмы, порой даже в тех случаях, когда она явно неприменима. Хорошо известно, что существуют так называемые турбулентные режимы плазмы, когда коэффициенты переноса определяются совершенно другими соотношениями. В нашем случае, когда плотности малы, а температуры высоки и когда в связи с этим

длина пробега много больше размеров системы и в плазме отсутствуют токи проводимости, есть основания ожидать, что ламинарная теория применима.

2. Очень тесно с предыдущим вопросом связан вопрос о колебаниях в плазме, образующихся при протекании сквозь плазму токов. По нашему мнению, следует отличать токи проводимости, т. е. токи, вызываемые электрическим полем, от так называемых ларморовских токов. Первые представляют собой неравновесное в механическом смысле состояние плазмы и могут вызвать макроскопическое движение. Так называемые ларморовские токи прекращаются существуют без электрического поля и характеризуют собой факт наличия механического равновесия системы, что видно из их величины

$$j_{\perp} = \frac{c\nabla(nT)}{H} \quad \text{или} \quad \frac{j_{\perp}H}{c} = \nabla(nT) = \nabla p. \quad (5.11)$$

Кроме того, магнитное поле ларморовских токов всегда меньше внешнего поля.

3. В системе, находящейся в равновесии в магнитном поле, очень остро стоит вопрос о макроскопической устойчивости системы как целого. Так как густая плазма как целое представляет собой нейтральный газ, то в однородном магнитном поле любая сколь угодно слабая сила будет ускорять плазму так, как будто бы никакого магнитного поля не было. Микроскопически картина происходит следующим образом: сила, действующая на электроны и ионы, заставляет их дрейфовать в разные стороны, перпендикулярно к силе; появляющееся вследствие этого электрическое поле заставляет частицы обоих знаков ускоренно дрейфовать в направлении первоначальной силы. Таким образом, макроскопически плазму можно рассматривать как диамагнитный нейтральный газ. В системе с магнитными пробками в равновесном состоянии давление этого газа уравнивается разностью магнитного давления снаружи и внутри, так как из-за диамагнетизма поле внутри ослаблено. В продольном направлении сила давления уравнивается пондеромоторной силой, действующей со стороны неоднородного магнитного поля на намагниченную плазму (диамагнетик выталкивается в слабое поле). Нетрудно видеть, что в продольном направлении это состояние устойчиво. Действительно, достаточно газу переместиться в сторону одной из пробок, как выталкивающая сила увеличивается. Если пользоваться макроскопической аналогией, то газ как бы зажат между пробками. На первый взгляд кажется, что плазма должна быть неустойчива в перпендикулярном направлении, ибо диамагнетик будет выталкиваться вбок, в сторону более

слабого поля. Однако мы не учли еще того, что плазма представляет собой не просто диамагнитный газ, а быстро вращающийся диамагнитный газ, момент вращения единицы объема которого равен

$$\frac{2en}{eH} (MT_{\parallel} - mT_{\text{эл}}) \approx \left(\frac{2Mc\eta T_{\parallel}}{eH} \right).$$

Если тело свободно висит в пространстве, то наличие вращения никак не мешает ему двигаться вдоль силы. Если же тело закреплено в двух точках, то даже в случае, когда оно не обладает собственной жесткостью, наличие быстрого вращения приводит к гироскопической устойчивости, внешняя сила вызывает только дополнительное вращение. Именно такой случай и осуществляется в системе с магнитными пробками. Микроскопически эта устойчивость выглядит следующим образом: под действием внешней силы частицы начинают дрейфовать перпендикулярно к силе в области однородного поля, однако, попадая на пробках в область резко неоднородного поля, дрейфуют по окружностям, перемешиваются так, что никакого электрического поля, которое вызвало бы дрейф в направлении первоначальной силы, не получается. Вопрос о макроскопической неустойчивости имеет кардинальное значение в проблеме. К сожалению, здесь совершенно неприменима диффузионная теория макроскопических явлений в плазме. Поэтому появляются трудности как в определении равновесного состояния, так и его устойчивости. Задачу, по-видимому, удастся решить в антидиффузионном приближении. Такая работа в настоящий момент поставлена [3, 4].

4. Особым является случай, когда nT очень близко к $H^2/8\pi$. При этом условие собственное поле плазмы становится очень близким к внешнему полю. Плазма находится почти в равновесии за счет собственных полей. Вопрос об устойчивости должен ставиться иначе. Качественное рассмотрение показывает, что в этом состоянии равновесие устойчиво для колебаний с частотами меньше частоты столкновений. Так как время между столкновениями очень велико (порядка многих секунд), то практически, по-видимому, плазма устойчива и в этом режиме (напомним, что, например, неустойчивость шнура с током по отношению к так называемым перетяжкам обусловлена наличием столкновений). Режим, когда nT близко к $H^2/8\pi$, интересен не только тем, что обеспечивает максимальную плотность частиц при заданном H , но и тем, что при нем, по-видимому, должно резко повыситься запирающее действие пробок, так как поле внутри плазмы близко к нулю и α резко падает. Однако в этом режиме нарушается условие применимости теории, так как ларморовский радиус становится больше

размеров системы. Вопрос об усилении запирающего действия пробок в этом режиме нами пока еще не выяснен. Если усиление окажется значительным, то самоподдерживающаяся термоядерная реакция будет сравнительно легко осуществимой. Поэтому изучение данного вопроса представляет особенный интерес.

5. Мы совершенно не рассматривали в работе так называемое бетатронное излучение электронов в магнитном поле. До сих пор считалось, что это излучение сильно заперто и не выходит из плазмы. Л. А. Арцимович и М. А. Леонтович обратили наше внимание на то, что имеющиеся по этому вопросу работы могут быть неверными и что при очень высокой температуре излучение может оказаться незапертым. Можно показать, что если бы это было так, то температура электронного газа, нагреваемого ионами, равнялась бы

$$T_{эл} = mc^2 \left(\frac{3L}{4\sqrt{2}\pi} \frac{m}{M} \right)^{2/5} \approx \frac{mc^2}{13} \approx 38 \text{ кэв}, \quad (5.12)$$

независимо от температуры ионов, когда плотность плазмы максимальная при заданном магнитном поле ($nT = H^2/8\pi$). В таком случае отпал бы вопрос о самоподдерживающейся термоядерной реакции, так как передача энергии от ионов к электронам увеличилась бы примерно в 10 раз и в значительной степени уменьшилась бы эффективность реактора, как генератора нейтронов. В действительности, однако, излучение, по-видимому, заперто. Излучение может быть заперто по двум причинам: во-первых, потому, что излучение отражается от границы плазмы с вакуумом, во-вторых, потому, что из-за резонансности волна, излученная одной частицей, поглощается другой (эти эффекты относятся соответственно к действительной и мнимой части диэлектрической постоянной плазмы). Первый эффект пропадает при $T_{эл} \sim mc^2$, но он может остаться, если на краю плазма имеет низкую температуру. Второй эффект, согласно работе Мигдала и Галицкого [5], существует до очень высоких температур, однако весь этот вопрос требует еще дальнейшего тщательного изучения. В системе с магнитными пробками представляет большой интерес рассмотрение вопроса о бетатронном излучении еще и в следующем плане. Когда излучение сильно заперто, оно может приводить к обмену поперечной энергией между частицами и этим увеличивать поток частиц на запретный конус. Следует ожидать, что этот эффект относится к столкновительному, как излучательная теплопроводность к столкновительной, и, следовательно, согласно указанной выше работе, он мал.

Кроме того, этот эффект сказывается только на электронах. В стационарном режиме электроны в системе удерживаются

главным образом положительным потенциалом плазмы и, следовательно, перемешивание скоростей вообще не играет роли. В начальном режиме, когда потенциал плазмы отрицателен, температура электронов мала и эффект дополнительно ослаблен.

6. В работе совершенно не рассмотрен вопрос о влиянии неоднородностей поля на движение частиц. Дрейф, связанный с неоднородностью магнитного поля, значительно снижает ее влияние. Не исключено, однако, что может остаться накапливающийся эффект рассеяния частиц на неоднородностях поля и что потребуются специальные меры для уничтожения этого явления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).
 2. Г. И. Будкер, см. т. I настоящего издания, стр. 122.
 3. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. т. II настоящего издания, стр. 330.
 4. С. Т. Беляев, см. настоящий том, стр. 50.
 5. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, см. т. I настоящего издания, стр. 161.
-

Г. И. Будкер

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ,
СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ
КОЛЬЦЕВОГО ТОКА В ПЛАЗМЕ ***

В работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с устойчивостью кольцевого тока в плазме.

Рассматривается устойчивость только по отношению к медленным изменениям, на протяжении которых успевают установиться равновесные значения температуры и плотности; быстрые изменения и другие, с так называемыми инерционными временами, не рассматриваются.

Работа представляет собой текст доклада, прочитанного автором на семинаре в июне 1951 г.

§ 1. Предельная температура в торе без железного сердечника

Кольцевой ток в плазме вследствие сил расталкивания между противоположными его частями будет прижиматься к стенке до тех пор, пока поток импульса в результате столкновений частиц со стенкой не уравновесит этих сил.

Благодаря этому теплопроводность в торе окажется во много раз больше, чем в идеально прямой трубе. (Кроме сил электромагнитного расталкивания, существуют также центробежные, электростатические силы расталкивания. Эти силы, обладая той же зависимостью от силы тока, малы по сравнению с электромагнитными, и поэтому мы их не будем учитывать.)

Проблема устойчивости тока практически существует также и в прямой трубе. В этом случае достаточно ничтожного внешнего магнитного поля, чтобы увеличить теплопроводность во много раз.

* Работа выполнена в 1951 г.

Действительно сила, с которой внешнее магнитное поле H действует на единицу-длины тока в плазме, равна

$$F = \frac{iH}{c}, \quad (1.1)$$

где i — полный ток. Разделив ее на величину порядка диаметра сечения трубы $2r$, получим величину добавочного давления на стенку

$$P = \frac{iH}{2cr}. \quad (1.2)$$

Так как это давление обусловлено ударами частиц о стенку, а при каждом ударе передача энергии равна передаче импульса, умноженной на скорость частицы и на некоторый множитель $\frac{1}{\nu}$, где ν — доля энергии, передаваемая частицей стенке при ударе, то этот поток импульса на стенку обуславливает поток энергии

$$W = \frac{iH}{\nu c} \sqrt{\frac{\vartheta}{M}}, \quad (1.3)$$

где ϑ — температура плазмы; M — масса тех частиц, которые главным образом производят давление на стенку. (В магнитном поле при равных температурах ионов и электронов этими частицами являются ионы.)

Сравнивая этот поток тепла с потоком тепла, обусловленным обычной теплопроводностью в плазме в магнитном поле,

$$W \simeq \frac{l^2}{\tau} n \frac{\vartheta}{r} \cdot 2\pi r \simeq 3 \cdot 10^{-8} \frac{n^2 \sqrt{\vartheta}}{H_0^2} \quad (1.4)$$

(l — ларморовский радиус иона; τ — время между столкновениями; n — плотность частиц; H_0 — магнитное поле тока), и учитывая, что

$$\frac{i}{c} = \frac{H_0}{2} r, \quad (1.5)$$

получим то значение H , при котором дополнительная теплоотдача сравнивается с невозмущенной:

$$H = 7 \cdot 10^{-20} \cdot \nu \frac{n^2}{H_0^3 r}. \quad (1.6)$$

При высоких температурах ν порядка единицы. Для $n = 10^{14}$, $H_0 = 2 \cdot 10^4$ гс, $r = 10$ см имеем:

$$H \simeq 9 \cdot 10^{-6} \text{ гс.}$$

Возвращаясь к кольцевому току, имеем:

$$H \sim \frac{i}{cR}$$

(R — радиус кольца), и, следовательно, поток тепла равен

$$W = \frac{i^2}{\nu c^2 R} \sqrt{\frac{\vartheta}{M}} + W_0, \quad (1.7)$$

где W_0 — поток тепла, обусловленный другими механизмами теплопроводности.

Между тем, количество тепла, выделяемое током на единице длины,

$$Q = \frac{i^2}{\pi r^2 \sigma} \approx 4 \cdot 10^{-32} \frac{i^2}{r^2 \vartheta^{3/2}}. \quad (1.8)$$

Температура плазмы определится из соотношения

$$\frac{i^2}{\nu c^2 R} \sqrt{\frac{\vartheta}{M}} + W_0 = 4 \cdot 10^{-32} \frac{i^2}{r^2 \vartheta^{3/2}} \quad (1.9)$$

или

$$\vartheta^2 = 4,5 \cdot 10^{-24} \cdot \nu \frac{R}{r^2} - \frac{\sqrt{M} \nu c^2 R \vartheta^{3/2}}{i^2} W_0. \quad (1.10)$$

Поскольку W_0 падает (или во всяком случае не растет) с ростом i , температура ϑ с ростом i стремится к конечному пределу

$$\vartheta \approx 7 \frac{\sqrt{\nu R}}{r} \vartheta_0, \quad (1.11)$$

зависящему только от геометрических размеров. Для тора $R = 100$ см, $r = 10$ см, $\nu = 1$ температура плазмы будет не выше $7 \vartheta_0$, какой бы по величине ток ни пропускался.

Этот результат на первый взгляд выглядит странным, поскольку температура оказывается тем выше, чем меньше радиус трубы. Не следует, однако, забывать, что эта зависимость начинается с тем больших токов, чем меньше радиус трубы.

При пропускании тока через плазму возможно явление «отрыва», при котором температура электронов оказывается много выше температуры ионов.

При формальном использовании полученных выше результатов получаем, что предельные электронные температуры в $\sqrt{\frac{M_e}{m}}$ меньше предельных ионных (поскольку у электронов скорость больше, а следовательно, больше и передача энергии при данной передаче импульса).

В действительности дело обстоит не так. Это связано с тем, что электроны в отличие от ионов передают стенке импульс не непосредственно, а через ионы.

В магнитном поле все явления переноса (энергии, импульса) связаны с коэффициентом $\frac{l^2}{\tau}$, где l — ларморовский радиус, а τ — время между столкновениями. Значения этого коэффициента для столкновений ион—ион и электрон—электрон относятся, как $\sqrt{\frac{M_{\text{ион}}^3}{m_{\text{эл}}^3}}$, и поэтому (при не очень сильном отрыве) он больше для столкновений ион—ион. Вследствие этого импульс будет переноситься из плазмы на стенки главным образом ионами (во всяком случае из тех областей, где линии магнитного поля замкнуты). Электроны, получая импульс от внешнего магнитного поля, могут передавать его ионам, а ионы — переносить на стенку. Но так как при столкновении электрона с ионом доля энергии, передаваемая иону, ничтожна, то эта передача импульса не должна быть связана с повышенной теплопроводностью.

§ 2. Влияние железного сердечника

Железный сердечник, вставленный внутрь тора, может существенно изменить картину. Вследствие притяжения тока к железу расталкивание кольца с током может смениться стягиванием.

Соответствующим подбором радиуса сердечника можно сделать силу расталкивания равной нулю.

Так как обе силы пропорциональны квадрату силы тока, то изменение силы тока при изменении размеров витка не сказывается на устойчивости. Устойчивость определяется всецело топологией магнитного поля. Последняя такова, что виток с током устойчив в вертикальном и неустойчив в радиальном направлении.

Действительно, так как силы притяжения к железному сердечнику спадают с ростом радиуса сильнее, чем силы взаимного расталкивания, то график силы воздействия магнитного поля на элемент тока имеет вид, показанный на рис. 1 (положительными считаются силы притяжения). Таким образом, при отклонении к центру элемент тока попадает в поле, которое будет еще дальше увлекать его к центру, а при отклонении от центра — в поле расталкивания, т. е. имеется радиальная неустойчивость. Что касается вертикальной устойчивости, то, как известно, если направленные к центру магнитные силы спадают с радиусом, то имеется вертикальная фокусировка,

в обратном случае — дефокусировка. В данном случае ток вертикально устойчив*.

Неустойчивость по какому-нибудь направлению наблюдается всегда, если сила тока постоянна или если результат воздействия не зависит от силы тока.

Кольцо с током, сместившись в радиальном направлении, будет продолжать смещаться в том же направлении, пока давление о стенку не уравнивает магнитных сил. Однако при наличии уравнивающего железного сердечника величина

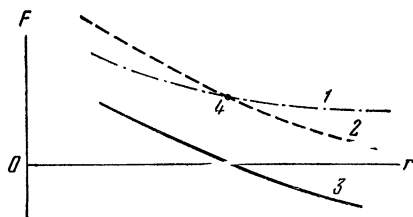


Рис. 1. График силы воздействия магнитного поля на элемент тока 1 — силы расталкивания; 2 — силы стягивания; 3 — результирующая сила; 4 — равновесный радиус.

давления будет меньше, чем без него, и, следовательно, повысится критическая температура.

При тривиальном решении, когда равновесное положение находится в центре трубы, в случае любого сколь угодно малой расстройки кольцо начнет расширяться (или сужаться), пока не прижмется к стенке. Так как радиус шнура много меньше радиуса трубы, то кольцо с током сместится на величину

порядка малого радиуса. В этом случае давление на стенку будет равно разности сил притяжения и отталкивания при таком смещении от положения равновесия. Оно будет меньше давления в торе без железного сердечника примерно в $\frac{\delta r}{R^2}$ раз, где δ — зазор между железным сердечником и кольцом с током. Так как $\delta \sim R$, то для оценки можно считать ослабление давления порядка $\frac{r}{R}$. Предельная температура повысится

в $\sqrt{\frac{R}{r}}$ раз. Значительно большего эффекта можно достигнуть следующим приемом. Заранее введем некоторую расстройку, немного большую, чем все возможные колебания в величине уравнивающей силы ΔF , т. е. выберем положение так, чтобы виток находился у одной из стенок и оказывал на нее давление ΔF . В дальнейшем, при изменении соотношения между силами притяжения и расталкивания, кольцо с током будет смещаться так, чтобы измененное

* Это относится к устойчивости отдельного элемента тока. В целом весь виток находится в безразличном равновесии. Для создания устойчивого равновесия нужно, чтобы огибающая сердечника была выпуклой наружу.

давление выравнивало это соотношение, и так как давление очень резко зависит от положения витка, то эти перемещения будут очень малы. Таким образом, давление станет меняться между нулем и $2\Delta F$. Предельно достижимая температура будет в $\sqrt{\frac{F}{2\Delta F}}$ раз больше, чем без железного сердечника. При достаточно точном поддержании равенства силы притяжения и отталкивания (ΔF мало) это увеличение может быть весьма заметным.

Одной из причин расстройки сил может быть изменение проницаемости железа. Так как сила отраженного в железе тока пропорциональна $(1 - \frac{1}{\mu})$, то в этом случае

$$\frac{F}{2\Delta F} = \frac{\mu^2}{2\Delta\mu}. \quad (2.1)$$

Второй причиной может быть эксцентриситет тора и железного сердечника. В этом случае

$$\frac{F}{2\Delta F} \sim \frac{R}{2\Delta R}. \quad (2.2)$$

Резюмируя, получим: введением железного сердечника можно увеличить предельную температуру, в особенности при смещенном равновесном положении. Этого увеличения, однако, далеко не достаточно для осуществления термоядерной реакции. Практически предельная температура будет не более 50 эв.

§ 3. Стабилизация внешним магнитным полем. Температурная стабилизация

Силы расталкивания в плазме можно также компенсировать внешним магнитным полем. Как и в предыдущем случае, при этом не может быть чисто механической устойчивости, т. е. невозможно создать такое магнитное поле, чтобы виток с постоянным током был устойчив по всем направлениям.

Однако в отличие от предыдущего условия равновесие зависит от силы тока i , поскольку расталкивание пропорционально второй степени, а действие внешнего поля — первой степени силы тока. Это открывает возможность использовать для стабилизации изменение величины тока при смещении шнура.

Для того чтобы кольцо с током не сползло как целое в горизонтальной плоскости, внешнее магнитное поле должно быть спадающим. Тогда равновесное положение шнура будет в том случае, когда он охватывает максимальный поток, т. е. когда его центр совпадает с центром поля.

Для вертикальной фокусировки требуется, чтобы этот спад поля был бóльшим, чем спад сил расталкивания, т. е. чтобы поле спадало сильнее, чем $\frac{1}{R}$ ($n > 1$).

Рассмотрим, в виде примера, условия устойчивости во внешнем поле кольца с током при следующих условиях:

1) при расширении сечение, по которому течет ток, не меняется;

2) температура, а следовательно, и проводимость не меняются при увеличении радиуса кольца.

Условия равновесия имеют вид

$$\alpha \frac{i^2}{R} = iH, \quad (3.1)$$

где α — константа (α , вообще говоря, логарифмически зависит от радиуса, однако этой зависимостью будем пренебрегать).

Равновесие будет устойчивым, если при малых изменениях радиуса

$$\frac{\Delta i}{i} - \frac{\Delta R}{R} < \frac{\Delta H}{H}. \quad (3.2)$$

Если

$$H = H_0 \left(1 - n \frac{\Delta R}{R} \right) \quad (3.3)$$

(n — показатель магнитного поля, который из условия вертикальной фокусировки должен быть больше единицы), то это условие принимает вид

$$\frac{\Delta i}{i} < (1 - n) \frac{\Delta R}{R}. \quad (3.4)$$

Но, так как

$$i = \frac{\pi r^{2\sigma}}{cR} \int_0^R \dot{H}(R') R' dR', \quad (3.5)$$

то получаем:

$$\frac{R}{i} \frac{di}{dR} = \frac{\dot{H}R^2}{\int_0^R \dot{H}R' dR'} - 1 < 1 - n \quad (3.6)$$

или

$$\frac{\dot{H}(R)}{\dot{H}} < 1 - \frac{n}{2}, \quad (3.7)$$

где \bar{H} — среднее значение магнитного поля. Если стабилизирующее внешнее поле служит продолжением поля, изменение которого вызывает ток в плазме, т. е. также изменяется во времени, то условие устойчивого равновесия становится внешне похожим на известное условие в бетатроне, так называемое условие «2:1», с той разницей, что знак равенства заменен знаком «меньше». При $n > 2$ это условие не может быть выполнено. Таким образом, в отличие от пучка частиц в ускорителе, у которых орбиты устойчивы в области $0 < n < 1$, индукционно возбужденный ток при постоянном сечении и удельном сопротивлении может быть устойчив в области

$$1 < n < 2. \quad (3.8)$$

В действительности нет никаких оснований считать, что сечение, по которому течет ток в плазме, и температура остаются постоянными при изменении радиуса кольца.

Теоретическое и экспериментальное изучение плазмы находится еще не на такой ступени, чтобы можно было сделать определенное суждение по этому вопросу. Цель приведенного выше примера в том, чтобы указать, что внешним магнитным полем, используя изменение параметров плазмы при изменении тока, можно, при определенном выборе закона изменения этого поля, сделать виток с током внутри плазмы динамически устойчивым без использования для этого давления на стенку, т. е. с сохранением очень высокой термоизоляции.

При этом следует иметь в виду, что система, создающая ток в плазме, должна быть устроена так, чтобы она не поддерживала ток в плазме постоянным и не зависящим от параметров плазмы, ибо как раз на изменении тока основана стабилизация.

Остановимся подробнее на одном из наиболее эффективных, как нам кажется, методов стабилизации — на температурной стабилизации. Если стабилизирующее поле выбрано так, что равновесное положение тока эксцентрично, а именно, если ток немного ближе к наружной стенке, то при расширении витка теплопроводность будет увеличиваться, а при сужении — уменьшаться. Это приведет к уменьшению (или увеличению) температуры, что в свою очередь вызовет соответствующее изменение проводимости, а следовательно, и силы тока.

При выбранном выше равновесном положении изменение силы тока будет именно таким, чтобы расстройка между силой расталкивания и действием внешнего поля приводила к возвращению к положению равновесия.

Единственным условием, налагаемым на магнитное поле, будет условие $n > 1$, необходимое для вертикальной устойчивости.

Так как теплопроводность сильно зависит от положения тока, а проводимость плазмы — от температуры, то этот способ стабилизации оказывается очень чувствительным. При такой стабилизации температура плазмы и сила тока полностью определяются величиной стабилизирующего поля (при заданном напряжении). Для увеличения силы тока и температуры надо повышать величину компенсирующего поля. Тогда ток будет удаляться от стенки, теплопроводность — падать, а вместе с ней будут расти температура и сила тока. Компенсирующее магнитное поле не надо, однако, увеличивать слишком быстро и до очень больших значений. Необходимо, чтобы его величина всегда была немного меньше той, при которой равновесное положение тока окажется в центре трубы, так как при этом положении пропадет устойчивость, а при любом ослаблении силы тока кольцо с током сожмется, приблизившись к внутренней стенке. От этого ток уменьшается сильнее, и в результате он прижмется к внутренней стенке.

Если внутри тора вставить железный сердечник такого диаметра, что расталкивание тока сменится притяжением, то тогда тоже возможна температурная стабилизация внешним полем. Требуется внешнее поле такого направления, чтобы оно растягивало ток. Теперь оно будет спадать слабее, чем $\frac{1}{R}$ ($n < 1$).

Равновесное положение должно быть у внутренней стенки.

Мы все время рассматриваем явления, связанные с устойчивостью при адиабатических изменениях, т. е. не учитывая инерции газа, времени температурной релаксации и т. п. Следует ожидать, что из-за большого магнитного поля тока вызываемые им при изменении токи Фуко настолько увеличат «трение», что все процессы, связанные с изменением тока, будут происходить настолько медленно, что температурное и механическое равновесие успеет установиться. Отметим, что, кроме явления устойчивости кольца с током как целого, необходимо рассмотреть устойчивость отдельных его частей. В неоднородном магнитном поле отдельные части объемного тока могут оторваться друг от друга; мы же до сих пор рассматривали ток как линейный.

С. Т. Беляев, Г. И. Будкер

**МНОГОКВАНТОВАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ
В ИОНИЗОВАННОМ ГАЗЕ ***

При помощи классического кинетического уравнения рассматривается процесс перехода электрона на основной уровень атома за счет многократных столкновений и излучения мелких квантов. Используется метод упрощения кинетического уравнения при редких столкновениях.

В [1] нами был предложен метод упрощения кинетического уравнения для электронного газа при редких столкновениях и рассмотрен релятивистский электронный газ в определенных полях. В настоящей работе этот метод иллюстрируется еще одним примером, имеющим и самостоятельный физический интерес.

В плотной высокотемпературной плазме наибольший вклад в процесс образования нейтральных атомов внутри объема дает рекомбинация при тройных столкновениях. При этом захват электрона сразу на глубокий уровень в результате одного столкновения менее вероятен, чем постепенный переход на нижние уровни в результате многих столкновений с малыми передачами энергии. Соотношение между обеими возможностями аналогично соотношению для отклонения на заданный угол путем однократного и многократного рассеяния. Как известно, второе в L раз более вероятно, где L — кулоновский логарифм.

Существенную роль в указанном процессе будет играть также излучение мягких квантов, которое обеспечивает более быстрое «сползание» электрона на нижние уровни.

Будем описывать электрон, находящийся на отрицательных уровнях в кулоновском поле заданного иона, кинетическим

* Работа выполнена в 1955 г.

уравнением с учетом столкновений со всеми другими заряженными частицами, а также с учетом классического излучения, связанного с вращением по орбите,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{изл}}. \quad (1)$$

Здесь гамильтониан $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{z_0 e^2}{r}$; столкновительный член имеет вид [2]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \frac{\partial}{\partial p_i} \int d p'_k w^{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} f - \frac{\partial f'}{\partial p_k} f' \right), \quad (2)$$

где

$$w^{ik} = 2\pi e^4 z^2 L \frac{u^{2\delta_{ik}} - u^i u^k}{u^3} \left(\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{\mathbf{p}'}{m'} \right), \quad (3)$$

а $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{изл}}$ описывает действие излучения. Штрихованные величины относятся к налетающим частицам.

На высоких уровнях, где излучение не существенно, распределение в стационарном случае должно переходить в распределение Гиббса.

Роль излучения быстро растет по мере «опускания» электрона, и можно считать, что электрон, опустившийся достаточно низко, определенно упадет в основное состояние. Поэтому на достаточно глубоком уровне можно поставить условие полного поглощения.

В решении с такими граничными условиями имеется стационарный поток в направлении $E = -\infty$, величина которого дает искомое число актов многоквантовой рекомбинации на основной уровень в единицу времени.

Для применимости классических уравнений необходимо, чтобы нижняя энергетическая граница, где излучение становится более существенным, чем столкновения, соответствовала большому квантовому числу. По порядку величины

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{ст}} = \frac{|E|}{\tau_{\text{ст}}} \sim \frac{e^4 z^2 n' L}{\sqrt{mT}} \left(\frac{m'}{m}\right)^{1/2}; \quad T \gg |E|; \quad (4)$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{изл}} = \frac{|E|}{\tau_{\text{изл}}} \sim \frac{e^2 r^2 \omega^4}{c^3} \sim \frac{|E|^4}{z_0^2 e^2 m^2 c^3}. \quad (5)$$

Роль излучения и столкновений сравнивается при

$$|E| \sim E_0 = \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{12} \cdot \frac{L e^6 z_0^2 z'^2 m m'^{1/2} c^3 n'}{T^{1/2}} \right]^{1/4} \quad (6)$$

(численный множитель $\frac{\sqrt{2\pi}}{12}$ введен для упрощения дальнейших вычислений), что соответствует главному квантовому числу

$$\nu_0 = \left(\frac{mz_0^2 e^4}{2E_0 \hbar^2} \right)^{1/2} \sim \frac{z_0^{3/4}}{z'^{1/4} L^{1/8}} \left(\frac{n_{ат}}{n'} \right)^{1/8} \left(\frac{T}{E_{ат}} \right)^{1/8} \left(\frac{1}{137} \right)^{3/8} \left(\frac{m}{m_1} \right)^{1/8}, \quad (7)$$

где $n_{ат} = \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \right)^3 \sim 10^{25}$; $E_{ат} \sim \frac{me^4}{\hbar^2} \sim 27 \text{ эв.}$ * Для $z = 1$ при $T = 10^4 \text{ эв}$ классическое рассмотрение применимо для $n' < 10^{16}$.

Для применимости рассмотренного в [1] метода необходимо, чтобы

$$\omega\tau_{ст} \sim \frac{T^{1/2} |E|^{3/2}}{Lz_0 z'^2 e^6 n'} \left(\frac{m}{m'} \right)^{1/2} \gg 1; \quad \omega\tau_{изл} \sim z_0 \left(\frac{me^2}{|E|} \right)^{3/2} \gg 1. \quad (8)$$

Последнее условие выполняется всегда. Первое условие нарушается лишь при очень малых E ($|E| \ll E_0$) вблизи непрерывного спектра, где распределение уже гиббсовское.

В столкновительном члене (2) основной вклад дают те внешние частицы, энергия которых порядка T . Поэтому в случае $T \gg |E|$ можно подставить в (2) вместо f' максвелловское распределение. При $T \gg |E|$ можно также пренебречь отдачей при столкновениях, т. е. вторым членом под интегралом в (2) по сравнению с первым. Если, к тому же, скорости налетающих частиц v' много больше скорости электрона на орбите, то в тензоре w^{ik} можно заменить относительные скорости u на v' . Подставляя в (2) максвелловское распределение для f' и интегрируя по p' , получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{ст} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(w^{ik} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right), \quad (9)$$

где

$$w^{ik} = \int w^{ik} f' d p' = w \delta_{ik}; \quad w = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} e^4 z'^2 n' L \sqrt{\frac{m'}{T}}. \quad (10)$$

Переходя в (1) от декартовых переменных к интегралам движения P^i и усредняя по угловым переменным ϑ^i , получим следующее упрощенное уравнение [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial P^i} \left(\sqrt{G} R^{ik} \frac{\partial f}{\partial P^k} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{изл}, \quad (11)$$

где \sqrt{G} — якобиан перехода от переменных действия I^k к переменным p^k , а тензор R^{ik} равен

$$R^{ik} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vartheta w^{lm} \frac{\partial P^i}{\partial p^l} \cdot \frac{\partial P^k}{\partial p^m} = \frac{w}{(2\pi)^3} \int d^3 \vartheta \frac{\partial P^i}{\partial p^l} \cdot \frac{\partial P^k}{\partial p^l}. \quad (12)$$

* Здесь и дальше $\hbar \equiv \hbar$.

В качестве интегралов движения P^k выберем энергию E , момент M и проекцию момента M_z . Их связь с декартовыми переменными определяется формулами

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{z_0 e^2}{r}; \quad M^2 = r^2 p^2 - (\mathbf{rp})^2; \quad M_z = x p_y - y p_x, \quad (13)$$

откуда

$$\frac{\partial P^i}{\partial p^k} = \begin{pmatrix} p_x/m & p_y/m & p_z/m \\ \frac{r^2 p_x - (\mathbf{rp})_x}{M} & \frac{r^2 p_y - (\mathbf{rp})_y}{M} & \frac{r^2 p_z - (\mathbf{rp})_z}{M} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для стоящей в (12) под интегралом матрицы получаем из (13) и (14)

$$\frac{\partial P^i}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial P^k}{\partial p^i} = \begin{pmatrix} \frac{2}{m} (E + z_0 e^2/r) & M/m & M_z/m \\ M/m & r^2 & r^2 M_z/M \\ M_z/m & r^2 M_z/M & r^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Переменными действия в кулоновском поле являются

$$I^1 = \frac{z_0 e^2 \sqrt{m}}{\sqrt{-2E}}; \quad I^2 = M; \quad I^3 = M_z, \quad (16)$$

откуда

$$\sqrt{g} = \frac{\partial (I^1 I^2 I^3)}{\partial (E M M_z)} = \frac{z_0 e^2 \sqrt{m}}{(-2E)^{3/2}}. \quad (17)$$

В (12) от интегрирования по трем угловым переменным ϑ^k перейдем к интегрированию по сферическим координатам r , α , φ . Якобиан $\frac{\partial (\vartheta^1 \vartheta^2 \vartheta^3)}{\partial (r \alpha \varphi)}$ можно определить без вычисления $\vartheta^k(r \alpha \varphi)$ следующим образом. Так как переменные I^k и $(E M M_z)$ выражаются только друг через друга, то

$$\sqrt{g} = \frac{\partial (I^1 I^2 I^3 \vartheta^1 \vartheta^2 \vartheta^3)}{\partial (E M M_z r \alpha \varphi)} = \frac{\partial (I^1 I^2 I^3)}{\partial (E M M_z)} \cdot \frac{\partial (\vartheta^1 \vartheta^2 \vartheta^3)}{\partial (r \alpha \varphi)} = \sqrt{g} \frac{\partial (\vartheta^1 \vartheta^2 \vartheta^3)}{\partial (r \alpha \varphi)}. \quad (18)$$

С другой стороны, величину \sqrt{g} можно вычислить, исходя из связи переменных $(E M M_z r \alpha \varphi)$ с произвольными каноническими переменными. В частности, исходя из формул (13), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \frac{\partial (p_x p_y p_z x y z)}{\partial (E M M_z r \alpha \varphi)} = m M (M^2 - M_z^2 / \sin^2 \alpha)^{-1/2} \times \\ &\times [2m (E + z_0 e^2/r) - M^2/r^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (17), (18) и (19) получаем

$$\frac{\partial (\delta^1 \delta^2 \delta^3)}{\partial (r \alpha \varphi)} = \frac{mM}{\sqrt{G}} (M^2 - M_z^2 / \sin^2 \alpha)^{-1/2} \times \\ \times [2m(E + z_0 e^2 / r) - M_z^2 / r^2]^{-1/2}. \quad (20)$$

Из (12), (15) и (20) после интегрирования по φ , α , r (по всей области изменения соответствующих переменных) получим для симметричного тензора R^{ik}

$$R^{11} = -2wE/m, \quad R^{12} = wM/m; \quad R^{13} = wM_z/m; \\ R^{22} = w \frac{z^2 e^4}{8E^2} \left(5 + \frac{6EM^2}{mz_0^2 e^4} \right); \quad R^{23} = M_z / M \cdot R^{22}; \quad (21) \\ R^{33} = \frac{1}{2} (1 + M_z^2 / M^2) \cdot R^{22}.$$

Член, описывающий воздействие излучения, можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{изл}} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial P^k} \{ \sqrt{G} \dot{P}^k_{\text{изл}} f \}, \quad (22)$$

где $\dot{P}^k_{\text{изл}}$ — изменения E , M , M_z вследствие излучения — равны [3]

$$\dot{E}_{\text{изл}} = -\frac{(-2E)^4}{m^2 c^3 z_0^2 e^2} \left(\frac{mz_0^2 e^4}{-2EM^2} \right)^{5/2} \left(1 + \frac{2EM^2}{3mz_0^2 e^4} \right); \quad (23)$$

$$\dot{M}_{\text{изл}} = -\frac{2}{3m^{3/2} c^3 z_0} \left(\frac{mz_0^2 e^4}{-2EM^2} \right) \cdot (-2E)^{5/2};$$

$$\dot{M}_{z\text{изл}} = M_z / M \cdot \dot{M}_{\text{изл}}.$$

Окончательно уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial P^k} (\sqrt{G} \dot{P}^k_{\text{изл}} f) + \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\sqrt{G} R^{ik} \frac{\partial f}{\partial P^k} \right), \quad (24)$$

где величины \sqrt{G} , $\dot{P}^k_{\text{изл}}$, R^{ik} определяются в (17), (21) и (23).

Интересующее нас решение уравнения (24) согласно сказанному выше должно обращаться в нуль при некоторой энергии E_1 ($|E_1| > E_0$) и в области, где можно пренебречь излучением, должно переходить в распределение Гиббса. Если вместо (5) использовать для $\dot{E}_{\text{изл}}$ более точное выражение (23), то область, где можно пренебречь излучением, определится неравенством

$$\frac{E}{E_0} \left(\frac{mz_0^2 e^4}{-2EM^2} \right)^{5/8} \ll 1. \quad (25)$$

Учитывая также, что величиной E/T мы пренебрегаем, имеем для функции f в области (25) условие

$$f \rightarrow n(2\pi mT)^{-3/2} e^{-\frac{E}{T}} \approx n(2\pi mT)^{-3/2}. \quad (26)$$

Переменные уравнения (24) меняются в пределах

$$-M \leq M_s \leq M; \quad 0 \leq M \leq \left(\frac{m^2_0 e^4}{-2E} \right)^{1/2}; \quad -\infty < E < 0. \quad (27)$$

Удобно перейти к новым (безразмерным) переменным, меняющимся в постоянных пределах

$$\xi = (-E/E_0)^{1/2}; \quad \eta = \left(\frac{-2EM^2}{m^2_0 e^4} \right)^{1/2}; \quad \zeta = M_s/M; \quad (28)$$

$$0 < \xi < \infty; \quad 0 < \eta < 1; \quad -1 < \zeta < 1,$$

где E_0 определена в (6).

Переход к новым переменным в уравнении (24) можно произвести по правилам преобразования тензорных величин. В результате получим уравнение того же вида (24), где тензорные величины в новых переменных (обозначаемых штрихами) имеют вид

$$\sqrt{G'} = \left(\frac{m^2_0 e^4}{2E_0} \right)^{3/2} \frac{\eta}{\xi^4}, \quad (29)$$

$$\{\dot{\xi}; \dot{\eta}; \dot{\zeta}\} = \frac{(2E_0)^3}{m^2 c^3 z_0^2 e^2} \left\{ \frac{\xi^7}{\eta^5} (1 - \eta^{2/3}); \quad \frac{\xi^6}{\eta^4} (1 - \eta^2); \quad \frac{\xi^6 \zeta}{\eta^4} (1 - \eta^4) \right\}, \quad (30)$$

тензор $R^{ik'}$ имеет только диагональные члены

$$\{R^{11'}; R^{22'}; R^{33'}\} = \frac{(2E_0)^3}{m^2 c^3 z_0^2 e^2} \left\{ 1; \quad \frac{5}{2\xi^2} (1 - \eta^2); \quad \frac{1 - \zeta^2}{4\xi^2 \eta^2} (5 - 3\eta^2) \right\}. \quad (31)$$

Считая, что в силу сферической симметрии функция распределения не зависит от M_s (т. е. от ζ), получаем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{G'}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [\sqrt{G'} j^{\xi}] - \frac{1}{\sqrt{G'}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} [\sqrt{G'} j^{\eta}], \quad (32)$$

где

$$j^{\xi} = \frac{(2E_0)^3}{m^2 c^3 z_0^2 e^2} \left\{ \frac{\xi^7}{\eta^5} (1 - \eta^{2/3}) f - \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\}, \quad (33)$$

$$j^{\eta} = \frac{(2E_0)^3}{m^2 c^3 z_0^2 e^2} \left\{ \frac{\xi^6}{\eta^4} (1 - \eta^2) f - \frac{5(1 - \eta^2)}{2\xi^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\}.$$

Если ввести вместо функции f и переменной t безразмерные величины

$$\psi = f/n (2\pi mT)^{-3/2}; \quad \theta = t / \frac{(2E_0)^3}{m^2 c^3 z_0^2 e^2}, \quad (34)$$

то уравнение (32) становится полностью безразмерным и не содержит параметров

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\xi^4} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\eta}{\xi^4} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{5\eta(1-\eta^2)}{2\xi^6} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi^3}{\eta^4} (1-\eta^{2/3}) \psi \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\xi^2}{\eta^3} (1-\eta^2) \psi \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Искомое решение уравнения (35) должно удовлетворять условиям

$$\psi = 0 \text{ при } \xi = \xi_1 \gg 1; \quad \psi = 1 \text{ при } \xi \eta^{-5/3} \ll 1. \quad (36)$$

Для решения задачи об интенсивности рекомбинации требуется знание не самой функции распределения, а потока частиц (по энергии или по переменной ξ)

$$I = I\xi = (2\pi)^3 \int \sqrt{G'} j^k d\eta d\zeta. \quad (37)$$

Как следует из (29), (33) и (34), поток I можно представить в виде

$$I = n \left(\frac{4\pi E_0}{T} \right)^{3/2} \frac{z_0 e^4}{m^2 c^3} \cdot \gamma, \quad (38)$$

где безразмерная величина γ равна

$$\gamma = \gamma(\xi) = \int \frac{\eta}{\xi^4} \left\{ \frac{\xi^7}{\eta^5} (1-\eta^{2/3}) \psi - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right\} d\eta d\zeta. \quad (39)$$

В стационарном случае поток I не зависит от ξ и, следовательно, γ является числом. Поэтому с точностью до численного коэффициента поток I в этом случае определяется выражением (38).

Хотя в уравнении (35) нет параметров, граничное условие (36) содержит параметр $\xi_1 \gg 1$, и, вообще говоря, нельзя утверждать, что γ , определяемая решением уравнения (35), по порядку величины равна единице. Как показано в приложении, γ с большой точностью не зависит от величины ξ_1 , так что последнюю можно положить равной бесконечности. Другими словами, величина потока не зависит от того, где ставится условие поглощения (лишь бы выполнялось условие $\xi_1 \gg 1$, т. е. $|E|/E_0 \gg 1$).

В этом случае можно утверждать, что γ по порядку величины равна единице, так как ни уравнение (35), ни граничные условия, которыми определяется γ , не содержат параметров.

Величина E_0 в формуле (38) определяется выражением (6), где, вообще говоря, надо учесть наличие рассеивающих частиц разного сорта, т. е.

$$E_0 = mc^2 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{12} z_0^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^3 n \left(\frac{mc^2}{T} \right)^{1/2} \sum L' z'^2 \left(\frac{m'}{m} \right)^{1/2} \frac{n'}{n} \right)^{1/4}, \quad (40)$$

где сумма берется по всем сортам частиц. В кулоновском логарифме $L = \ln \frac{R_{\text{макс}}}{R_{\text{мин}}}$ максимальный прицельный параметр

$R_{\text{макс}}$ определяется условием равенства времени столкновения и периода обращения электрона на орбите с энергией $-E_0$. При больших параметрах столкновения происходят адиабатически и не вызывают переходов электрона на другие орбиты. Минимальный параметр удара $R_{\text{мин}}$ определяется равенством E_0 и передаваемой при столкновении энергии. В результате получим:

$$L = \ln \left(\frac{T}{E_0} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{z_0}{z'} \right). \quad (41)$$

Для столкновений с электронами L всегда больше единицы ($T \gg E_0$). Столкновения с ионами играют роль, начиная с температур $T \gg E_0 M/m$. При таких температурах ионизация идет в основном при столкновениях с ионами.

Отношение интенсивности многоквантовой рекомбинации к интенсивности одноквантовой рекомбинации, сечение которой равно [3]

$$\sigma_{\text{одн}} = \frac{27\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{hc}{e^2} \left(\frac{I_1}{T} \right)^{5/2}; \quad \left(I_1 = \frac{mz_0^2 \epsilon^4}{2h^2} \ll T \right), \quad (42)$$

оказывается равным

$$\frac{I}{\sigma_{\text{одн}} n\nu} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{16} \gamma \cdot \frac{E_0^{3/2} T^{1/2}}{I_1^2} \quad (43)$$

и при достаточно больших температурах может быть велико.

Авторы глубоко признательны О. Б. Фирсову, обратившему наше внимание на наличие такого процесса рекомбинации.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

В стационарном случае, интегрируя (35) по η и ζ , получим (39), где теперь γ является постоянной. Перепишем (39) в виде

$$\frac{1}{\xi^4} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi} - a(\xi) \xi^3 \bar{\Psi} = -\gamma, \quad (I)$$

где

$$\bar{\Psi} = \int \psi \eta d\gamma d\zeta; \quad a(\xi) = \frac{1}{\bar{\Psi}} \int \frac{1 - \eta^{2/3}}{\eta^5} \psi \eta d\gamma d\zeta. \quad (\text{II})$$

Решая формально (I) относительно ψ , получим:

$$\bar{\Psi}(\xi) = \gamma \exp\left(\int_0^\xi a(t_1) t_1^7 dt_1\right) \int_\xi^{\xi_1} t^4 \exp\left(-\int_0^t a(t_2) t_2^7 dt_2\right) dt, \quad (\text{III})$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы выполнялось условие $\bar{\Psi}(\xi_1) = 0$. Принимая во внимание, что $\bar{\Psi}(0) = 1$, получим из (III).

$$\frac{1}{\gamma(\xi_1)} = \int_0^{\xi_1} \xi^4 \exp\left(-\int_0^\xi a(t) t^7 dt\right) d\xi. \quad (\text{IV})$$

Рассмотрим поведение подынтегральной функции при больших ξ . Общий характер распределения по переменной η легко установить из физических соображений. Как видно из (23) и (28), $\dot{E}_{\text{изл}} \sim \frac{\xi^8}{\eta^5}$, т. е. излучение резко возрастает с уменьшением η , поэтому в распределении практически отсутствуют частицы с $\eta < \xi^{3/5}$. При больших ξ функция распределения отлична от нуля только в малой окрестности максимальной величины $\eta = 1$. Из (II) при этом следует, что $a(\xi)$ при больших ξ стремится к постоянной (равной $\frac{2}{3}$). Полагая поэтому

$$\int_0^\xi a(t) t^7 dt \approx \text{const} + \frac{\xi^8}{12},$$

получим из (IV):

$$\frac{1}{\gamma(\infty)} - \frac{1}{\gamma(\xi_1)} \approx c \int_{\xi_1}^{\infty} \xi^4 \exp\left(-\frac{\xi^8}{12}\right) d\xi \approx \frac{3c}{2\xi_1^3} \exp\left(-\frac{\xi_1^8}{12}\right),$$

т. е. с большой точностью γ не зависит от величины ξ_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. т. II настоящего издания, стр. 330.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).
3. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, М.—Л., ОНТИ, 1935.

С. Т. Белая

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ *

Обосновывается метод получения приближенного кинетического уравнения для разреженных ионизованных газов в сильных внешних полях. Малым параметром приближения является отношение периода собственных колебаний частиц во внешнем поле к времени свободного пробега. Приближенное уравнение имеет вид уравнения Фоккера-Планка с меньшим числом переменных.

В [1] был указан метод упрощения кинетического уравнения для газа заряженных частиц при редких столкновениях и при помощи упрощенного уравнения решена конкретная задача о стационарном состоянии стабилизированного электронного пучка. В [2] указанным методом решена еще одна задача. Цель настоящей работы — обобщение и обоснование приближения для кинетического уравнения, применимого в случае редких столкновений. Рассматриваемое приближение — своего рода обратный предельный случай хорошо известного гидродинамического приближения для кинетического уравнения [3].

Мы будем рассматривать ионизованный газ малой плотности, находящийся в сильном внешнем поле**, когда столкновения происходят редко по сравнению с характерным временем механического движения частиц в поле. Для инфинитного движения таким временем является время прохождения частицей всего объема. Если оно меньше времени свободного

* Работа выполнена в 1955 г.

** Для неионизованного газа практически нельзя создать сильного внешнего поля.

пробега τ , то столкновениями, вообще, можно пренебречь и задача становится чисто механической (кнудсеновский случай). Представляют интерес поэтому только такие поля, движение частиц в которых финитно, хотя бы по одной координате. В этом случае характерным временем является $1/\omega$, где ω — частота финитного движения. Условие редкости столкновений принимает вид

$$\omega\tau \gg 1. \quad (1)$$

Финитные координаты, частоты движения по которым удовлетворяют условию (1), будем называть «быстрыми». Поставим задачу: получить уравнение для усредненной по быстрым переменным функции распределения. Усредненное кинетическое уравнение должно описывать медленные процессы. Последние могут быть, во-первых, следствием столкновений, а во-вторых, движением во внешнем поле по оставшимся «медленным» переменным. Пример для иллюстрации: в сильном магнитном поле с малой неоднородностью быстрым движением является ларморовское вращение. Усредненное по этому вращению кинетическое уравнение должно описывать медленное движение центров ларморовских кружков (дрейф) и изменение их радиусов от действия столкновений и градиентов поля.

В первой части «усредненное» уравнение получается как первое приближение по параметру $(\tau\omega)^{-1}$ из обычного кинетического уравнения. Во второй части кинетические явления в разреженном газе рассматриваются как стохастические процессы в пространстве медленных переменных, для которых выводится уравнение Фоккера—Планка. Устанавливается тождественность последнего с уравнением, полученным в первой части. В заключение рассмотрен простой пример (расплывание электронного пучка при прохождении через газ в продольном магнитном поле). В следующей статье полученное уравнение применяется к случаю ионизованного газа в сильном магнитном поле.

§ 1

Запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [\mathcal{H}; f] = st(f), \quad (1.1)$$

где \mathcal{H} — функция Гамильтона для частицы во внешнем поле, $[\cdot; \cdot]$ — скобки Пуассона, а $st(f)$ — столкновительный член. В качестве переменных функции распределения f выберем для быстрых финитных степеней свободы переменные действия I^α и сопряженные им угловые переменные ϑ^α (фазы) гамильтониана \mathcal{H} , а для остальных степеней свободы —

произвольные канонические переменные P и Q . Совокупность всех медленных переменных будем обозначать $X = (I, P, Q)$, а полный набор канонических переменных — $x = (pq) = (X\vartheta)$.

При рассмотрении быстрых процессов в (1.1) можно пренебречь столкновительным членом и членами с производными от медленных переменных X :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega^\alpha \frac{\partial f}{\partial \vartheta^\alpha} = 0; \quad \omega^\alpha(X) = \frac{\partial \mathcal{H}(X)}{\partial I^\alpha}. \quad (1.2)$$

Общим решением (1.2) служит произвольная функция X и «начальных фаз» $\vartheta^\alpha = \omega^\alpha t$, определяемая начальными условиями. Существенно, что зависимость от фаз в функции распределения быстро (за время $\sim 1/\omega$) исчезает. Этот быстрый процесс «размешивания» по фазам легко понять на простом примере. Рассмотрим одномерный случай с начальным распределением $f_0(I\vartheta) = F(I)\delta(\vartheta)$ (все частицы имеют одну и ту же фазу). В последующие моменты функция распределения будет $f_t = F(I)\delta(\vartheta - \omega(I)t)$. Все частицы с равными значениями I по-прежнему имеют одинаковые фазы, но разным I соответствуют разные фазы. Если рассматривать распределение по ϑ , усредненное по интервалу ΔI , то оно быстро расплывается (ширина распределения по фазам $\sqrt{\Delta \vartheta^2} \sim t \frac{\partial \omega}{\partial I} \Delta I$). Таким образом, отвлекаясь от короткого процесса «размешивания» по фазам, можно считать, что в этом приближении f не зависит от ϑ .

В следующем приближении в (1.1) следует учесть «медленные» члены, в которые можно подставить функцию распределения f^0 , не зависящую от фаз,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega^\alpha \frac{\partial f}{\partial \vartheta^\alpha} + [\mathcal{H}; f^0]_{(PQ)} = st(f^0). \quad (1.3)$$

Если искать решение (1.3) обычным методом теории возмущений, полагая $f = f^0 + f^{(1)}$ и $f^{(1)} \ll f^0$, то мы получим правильный результат лишь для малых времен (f^0 не зависит от времени, поэтому все изменение начального распределения заключено в малом добавке $f^{(1)}$). Для описания длительных медленных процессов следует применять другие методы решения.

Как видно из (1.3), в этом приближении f уже зависит от фаз (столкновительный член, помимо функциональной зависимости от f , содержит прямую зависимость от всех переменных, в том числе и от фаз). Если формально усреднить (1.3) по ϑ и отождествить усредненную функцию распреде-

ления $\langle f \rangle_{\psi}$ с f^0 , то получим уравнение, не содержащее быстрых переменных,

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} + [\mathcal{H}; f^0]_{(pQ)} = \langle st(f^0) \rangle_{\psi}. \quad (1.4)$$

Этот вывод [1] иллюстрирует основную идею приближения. Перейдем теперь к строгому решению задачи.

Будем исходить из кинетического уравнения для заряженных частиц, полученного Н. Н. Боголюбовым [4]*,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [\mathcal{H}; f_1] + \int [\Phi; f_1 f_2] dx_2 = \int \left[\Phi; \left[\int_0^{\infty} S^0_{-t'} \Phi dt'; f_1 f_2 \right] \right] dx_2. \quad (1.5)$$

Здесь $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ — потенциал парного взаимодействия частиц, а $S^0_t = S^0(t; 0)$ — классический аналог S -матрицы, т. е. оператор, заменяющий переменные x на их значения через промежуток времени t , причем закон изменения определяется гамильтонианом \mathcal{H} .

Удобно несколько преобразовать уравнение (1.5). Пользуясь известными свойствами циклических перестановок для скобок Пуассона и формулой

$$[A; B] = [A; x^\alpha] \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ([A; x^\alpha] B), \quad (1.6)$$

справедливой для канонически сопряженных переменных x^α , приведем (1.5) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial t} + [\mathcal{H}; f_1] + [U(f); f_1] + [U_c(f); f_1] = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \int \left((x_1^\alpha | x_1^\beta) \frac{\partial f_1}{\partial x_1^\beta} f_2 + (x_1^\alpha | x_2^\beta) \frac{\partial f_2}{\partial x_2^\beta} f_1 \right) dx_2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} (x_i^\alpha | x_k^\beta) &= [\Phi; x_i^\alpha] [\Psi; x_k^\beta] + [\Psi; x_i^\alpha] [\Phi; x_k^\beta]; \\ \Psi &= \int_0^{\infty} S^0_{-t'} \Phi dt', \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$U(f) = \int \Phi f_2 dx_2; \quad U_c(f) = -\frac{1}{2} \int [\Phi; \Psi] f_2 dx_2. \quad (1.9)$$

* В [4] уравнение (1.5) получено для случая $\mathcal{H} = p^2/2m$, но трудно проследить, что оно справедливо и при наличии внешних полей.

В (1.7) мы выделили из столкновительного члена часть с самосогласованным полем от своеобразного «коррелятивного потенциала»

$$\Phi_c = -\frac{1}{2} [\Phi; \Psi] = -\frac{1}{2} \left[\Phi; \int_0^{\infty} S_{-t'} \Phi dt' \right]. \quad (1.10)$$

Предпоследний член левой части (1.7) учитывает обычное самосогласованное поле $U(f)$, которое мы будем считать малым по сравнению с внешними полями. Это охватывает и тот случай, когда U не мало, но его главную часть U_0 можно рассматривать как внешнее поле. (В частности, это относится к задачам о малых колебаниях в системе, где выделяется постоянная часть самосогласованного поля.) В этом случае мы будем считать, что \mathcal{H} включает также и U_0 .

Для решения уравнения (1.7) воспользуемся методом, применяемым в нелинейной механике [5]. Ищем решение (1.7) в виде ряда

$$f(xt) = f^0(Xt) + f^{(1)}(X\vartheta; f^0) + f^{(2)}(X\vartheta; f^0) + \dots, \quad (1.11)$$

где средние значения от $f^{(k)}$ по ϑ обращаются в нуль:

$$\langle f^{(k)} \rangle_{\vartheta} = 0 \quad (k \geq 1). \quad (1.12)$$

Функцию $f^0(Xt)$, имеющую смысл усредненной по ϑ функции распределения, определим уравнением

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = A^{(1)}(X; f^0) + A^{(2)}(X; f^0) + \dots \quad (1.13)$$

Величины $f^{(k)}$ и $A^{(k)}$ выберем из условия, чтобы (1.11) удовлетворяло кинетическому уравнению (1.7) с точностью до высших порядков малости (по столкновительному члену и самосогласованному полю). Подставляя (1.11) и (1.13) в (1.7) и приравнивая члены первого порядка, получаем:

$$\begin{aligned} & A^{(1)}(X; f^0) + [\mathcal{H}; f_1^0]_{(p\vartheta)} + [\mathcal{H}; f_1^0]_{(t\vartheta)} + [U(f^0) + U_c(f^0); f_1^0] = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \int \left(\langle x_1^\alpha | X_1^\alpha \rangle \frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\alpha} f_2^0 + \langle x_1^\alpha | X_2^\beta \rangle \frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0 \right) dx_2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

$A^{(1)}$ и $f^{(1)}$ определяются из (1.14) приравниванием постоянных и чисто периодических частей по ϑ . Усредняя (1.14) по ϑ , получим для $A^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & A^{(1)}(X; f^0) = -[\mathcal{H}; f_1^0] - \langle [U(f^0) + U_c(f^0)]; f_1^0 \rangle + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_1^\alpha} \int \left(\langle X_1^\alpha | X_1^\alpha \rangle \frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\alpha} f_2^0 + \langle X_1^\alpha | X_2^\beta \rangle \frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0 \right) dx_2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Приравнявая в (1.14) периодические по ϑ члены, получим для определения $f^{(1)}$ уравнение

$$T_{\vartheta}^{-1}f_1^{(1)} \equiv [H; f_1^{(1)}]_{(t\vartheta)} = -[U(f^0) + U_c(f^0)]; f_1^0] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \int \left(\langle x_1^\alpha / X_1^\beta \rangle \frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 + \langle x_1^\alpha / X_2^\beta \rangle \frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0 \right) dx_2, \quad (1.16)$$

где $\langle \varphi \rangle = \varphi - \langle \varphi \rangle$ означает периодическую по ϑ часть φ . Из (1.16) для f^1 находим

$$f_1^{(1)} = -[T_{\vartheta} \{U(f^0) + U_c(f^0)\}; f_1^0] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \int \left(T_{\vartheta} \langle x_1^\alpha / X_1^\beta \rangle \frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 + T_{\vartheta} \langle x_1^\alpha / X_2^\beta \rangle \frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0 \right) dx_2. \quad (1.17)$$

Действие оператора T_{ϑ} на периодические функции ϑ можно представить в виде

$$B(\vartheta) = \sum_{n \neq 0} B_n e^{i(n\vartheta)}; \quad T_{\vartheta} B = \sum_{n \neq 0} \frac{B_n}{(n\omega)} e^{i(n\vartheta)},$$

откуда непосредственно видно, что $T_{\vartheta} \sim 1/\omega$.

С точностью до высших приближений по $(\omega\tau)^{-1}$ усредненная функция распределения f^0 определяется из (1.13) и (1.15)

$$\frac{\partial f_1^0}{\partial t} + [\mathcal{H} + \langle U(f^0) + U_c(f^0) \rangle; f_1^0] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \int \left(\langle X_1^\alpha / X_1^\beta \rangle \frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 + \langle X_1^\alpha / X_2^\beta \rangle \frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0 \right) dx_2, \quad (1.18)$$

а $f^{(1)}$ — первая периодическая по ϑ поправка к функции распределения, имеющая порядок $(\omega\tau)^{-1}$ — определяется через f^0 согласно (1.16). Таким образом, задача свелась к нахождению усредненной функции f^0 , удовлетворяющей уравнению с меньшим числом переменных (быстрые переменные исключены). Заметим, что уравнение (1.18) формально получается усреднением по ϑ исходного кинетического уравнения (1.7), если считать при этом функцию распределения f не зависящей от ϑ .

Рассмотрим частный случай быстрых столкновений, когда время столкновения частиц $t_0 \sim r_0/\vartheta$ мало по сравнению с периодом финитного движения, т. е. $\omega t_0 \ll 1$ (r_0 — область взаимодействия частиц). В этом случае можно пренебречь влиянием внешнего поля на процесс соударения, что достигается заменой оператора S_{-t}^0 , входящего в Ψ , на соответ-

ствующий оператор для свободного движения. При проведении конкретных вычислений удобно (используя замечание в конце предыдущего абзаца) исходить из уравнения (1.7), а затем усреднить результат по ϑ . В нулевом приближении по r_0 самосогласованное поле U и U_c обращается в нуль. Принимая во внимание, что

$$\Phi = \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \int \Phi(k) \exp\{ik(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\} dk,$$

$$S_{-t}^0 \Phi = \Phi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - t\mathbf{p}_1/m_1 - t\mathbf{p}_2/m_2|),$$

получаем в этом приближении для столкновительного члена (в декартовых координатах)

$$\frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} \int dp_2 w^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial f_1^0}{\partial p_1^\beta} f_2^0 - \frac{\partial f_2^0}{\partial p_2^\beta} f_1^0 \right), \quad (1.19)$$

где

$$w^{\alpha\beta} = \int d\mathbf{r}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1^\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial r_1^\beta} = \frac{u^{2\delta_{\alpha\beta}} - u^\alpha u^\beta}{u^3} 8\pi^2 \int_0^\infty k^3 |\Phi(k)|^2 dk \quad (1.20)$$

($\mathbf{u} = \mathbf{p}_1/m_1 - \mathbf{p}_2/m_2$). При кулоновском взаимодействии $\Phi(k) = \frac{e_1 e_2}{2\pi^2 k^2}$ и из (1.20) находим

$$w^{\alpha\beta} = 2\pi L e_1^2 e_2^2 \frac{u^{2\delta_{\alpha\beta}} - u^\alpha u^\beta}{u^3}, \quad (1.21)$$

где $L = \ln \frac{K_{\max}}{K_{\min}}$ — «кулоновский логарифм» ($K_{\max} \sim \bar{\varepsilon}/|e_1 e_2|$,

где $\bar{\varepsilon}$ — средняя относительная энергия частицы, а $K_{\min} \sim 1/d$, где d — размер области экранирования кулоновского взаимодействия). Выражение (1.19) совпадает с полученным Л. Д. Ландау [6].

Для усреднения (1.19) по ϑ следует перейти к переменным (X^ϑ). Этот переход упрощается, если рассматривать (1.19) в виде дивергенции некоторого шестимерного вектора в фазовом пространстве, полагая в переменных $y = (\mathbf{r}\mathbf{p})$ отличными от нуля только его импульсные компоненты, а затем переходя к (X^ϑ) по обычным правилам преобразования тензоров. В результате для усредненного уравнения находим

$$\frac{\partial f_1^0}{\partial t} + [\mathcal{H}; f_1^0] = \frac{\partial}{\partial X_1^\alpha} \int dx_2 \left(A_{11}^{\alpha\beta} \frac{\partial f_1^0}{\partial X_1^\beta} f_2^0 - A_{12}^{\alpha\beta} \frac{\partial f_2^0}{\partial X_2^\beta} f_1^0 \right), \quad (1.22)$$

где

$$A_{ik}^{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial p_i^\gamma} \frac{\partial X_k^\beta}{\partial p_k^\sigma} w^{\gamma\delta} (\mathbf{r}_1(x_1) - \mathbf{r}_2(x_2)) \right\rangle.$$

§ 2

Здесь мы рассмотрим другой подход к задаче. Откажемся заранее от «полного» описания состояния частиц всеми каноническими переменными, а будем характеризовать частицы только медленными переменными X . Строго говоря, объект, характеризуемый переменными X , уже нельзя называть частицей. Это скорее частица, размазанная по орбите быстрого движения, так как величины X (интегралы быстрого движения) характеризуют орбиту в целом. Так, при движении в магнитном поле медленными переменными являются положение центра ларморовского кружка, его радиус и продольная скорость. Следовательно, в данном случае правильней говорить не о частицах, а о ларморовских кружках. Подобные объекты можно (хотя и не всегда столь наглядно) представлять и в других случаях. Ясно, что понятие «объекта» имеет смысл только в случае редких столкновений, когда частица за время между столкновениями успевает «размазаться» по орбите.

Движение «объектов» можно рассматривать как некоторый вероятностный процесс типа броуновского движения, но в отличие от последнего стохастичность в данном случае вносится не внешним воздействием, а является следствием внутренних процессов — столкновений. Пусть $W(tX_1X_2/t'X'_1X'_2)$ — вероятность двум «объектам», находящимся при t' в точках X'_1 и X'_2 , оказаться в момент t в X_1 и X_2 (вследствие взаимодействия друг с другом и с внешним полем). Тогда можно написать для функции распределения по переменным X

$$F(X_1t) = \int W(tX_1X_2/t'X'_1X'_2) F(t'X'_1) F(t'X'_2) dX'_1 dX'_2 dX_2. \quad (2.1)$$

(Здесь функции F предполагаем нормированными на единицу, зависимость от числа частиц учтем в конечном результате). Если ввести временно бинарную функцию

$$\mathcal{F}(tX_1X_2) = F(tX_1) F(tX_2), \quad (2.2)$$

то для нее можно написать линейное уравнение

$$\mathcal{F}(tX) = \int W(tX/t'X') \mathcal{F}(t'X') dX'. \quad (2.3)$$

(Здесь и в дальнейшем X означает совокупность X_1 и X_2). Удобно исходить из уравнения (2.3), а в конечном результате путем интегрирования по X_2 вернуться к функциям F .

Уравнение (2.3) в случае, когда состояния частиц меняются почти непрерывно (что имеет место при кулоновских

столкновениях), сводится известным образом [7] к дифференциальному уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial \rho_{\mathcal{F}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X^{\alpha}} \langle \Delta X^{\alpha} \rangle \mathcal{F} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^{\alpha} \partial X^{\beta}} \langle \Delta X^{\alpha} \Delta X^{\beta} \rangle \mathcal{F}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \Delta X^{\alpha} \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (X^{\alpha} - X^{\alpha'}) W(tX/t - \tau X') dX', \\ \langle \Delta X^{\alpha} \Delta X^{\beta} \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (X^{\alpha} - X^{\alpha'}) (X^{\beta} - X^{\beta'}) W(tX/t - \tau X') dX'; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$\langle \Delta X^{\alpha} \rangle$ представляет собой скорость усредненного изменения переменных X^{α} , а $\langle \Delta X^{\alpha} \Delta X^{\beta} \rangle$ определяют скорость разброса, необратимого рассеяния системы по соответствующим переменным, поэтому $\langle \Delta X^{\alpha} \Delta X^{\beta} \rangle$ естественно назвать тензором рассеяния. Эти величины могут быть найдены из рассмотрения единичного соударения.

Изменение канонических переменных x (полный набор, включая ϑ), описывающих систему из двух частиц, определяются уравнениями

$$\dot{x}^{\alpha} = [\mathcal{H}; x^{\alpha}]; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1^0(x_1) + \mathcal{H}_2^0(x_2) + \Phi(x_1, x_2), \quad (2.6)$$

где \mathcal{H}_k^0 — гамильтониан одной частицы во внешнем поле. Решение (2.6) можно формально записать в виде

$$x^{\alpha}(tx) = S_t x^{\alpha}, \quad (2.7)$$

где S_t — оператор, аналогичный введенному в (1.5), но соответствующий гамильтониану со взаимодействием. S_t можно представить в виде

$$S_t = \exp(t[\mathcal{H};]) = 1 + t[\mathcal{H};] + \frac{t^2}{2}[\mathcal{H};[\mathcal{H};]] + \dots \quad (2.8)$$

Пусть S_t^0 соответствует движению невзаимодействующих частиц

$$\dot{x}^{\alpha} = [\mathcal{H}^0; x^{\alpha}]; \quad \mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_1^0 + \mathcal{H}_2^0. \quad (2.9)$$

Произведем разложение S_t по степеням взаимодействия Φ . Это разложение имеет вид*

$$S_t = \exp(t[\mathcal{H}^0;] + t[\Phi;]) = S_t^0 + S_t^{(1)} + S_t^{(2)} + \dots, \quad (2.10)$$

* Уравнения (2.11) получаются аналогично разложению в [8] для двухчастичного ядра K или общим методом «распугивания» некоммутирующих операторов A и B из $\exp(A+B)$, предложенным в [9].

где

$$\begin{aligned}
 S_i^{(1)} &= \int_0^t dt' S_{t-t'}^0 [\Phi; S_{t'}^0]; \quad S_i^{(2)} = \\
 &= \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' S_{t-t'}^0 [\Phi; S_{t'-t''}^0 [\Phi; S_{t''}^0]]. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Изменение переменных x^α за время t можно также представить в виде разложения по Φ

$$\begin{aligned}
 \Delta_i x^\alpha &= S_i x^\alpha - x^\alpha = (S_i^0 - 1) x^\alpha + S_i^{(1)} x^\alpha + S_i^{(2)} x^\alpha + \dots \equiv \\
 &\equiv (\Delta_i x^\alpha)^{(0)} + (\Delta_i x^\alpha)^{(1)} + (\Delta_i x^\alpha)^{(2)} + \dots \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Для вычисления величин $\langle \Delta x^\alpha \rangle$ нужно $\Delta_i x^\alpha$ разделить на t , считая t достаточно малым, после чего усреднить по ϑ .

Слова «достаточно малое t » требуют уточнения. $\langle \Delta x^\alpha \rangle$ и $\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle$ по их смыслу определяют скорость изменения соответствующих величин при усредненном медленном движении. Поэтому t должно быть малым по сравнению с характерным временем медленного движения, но одновременно большим по сравнению с временем быстрых процессов (в частности, по сравнению с временем столкновения t_0), чтобы за время t произошло усреднение по быстрым процессам. Из сказанного следует, что для произвольной функции $\chi(x^\alpha, t)$, плавно зависящей от времени, можно считать

$$\frac{1}{t} \int_0^t S_{t'}^0 \langle \chi(x^\alpha, t') \rangle dt' \approx \langle \chi(x^\alpha, 0) \rangle, \quad (2.13)$$

так как усредненная функция мало меняется за время t . С другой стороны, для потенциала взаимодействия Φ имеем

$$\int_0^t S_{t'} \Phi dt' \approx \int_0^\infty S_{t'}^0 \Phi dt', \quad (2.14)$$

так как потенциал взаимодействия (без усреднения) меняется быстро, за время порядка t_0 .

При вычислении $\langle \Delta x^\alpha \rangle$ и $\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle$ из (2.12) и (2.11) можно использовать следующие свойства оператора S_i , непосредственно следующие из его определения:

$$\begin{aligned}
 &1) S_{t+t'} = S_t \cdot S_{t'}; \quad 2) S_i \varphi \chi = (S_i \varphi) (S_i \chi); \\
 &3) \frac{\partial}{\partial t} (S_i x^\alpha) = [\mathcal{H}; S_i x^\alpha]; \quad 4) S_i [\chi; \varphi] = [S_i \chi; S_i \varphi]. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

С помощью (2.15) в результате несложных вычислений с использованием (2.13) и (2.14) получим для $\langle \Delta x^\alpha \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^\alpha \rangle^0 &= \langle [\mathcal{H}^0; x^\alpha] \rangle; \quad \langle \Delta x^\alpha \rangle^{(1)} = \langle [\Phi; x^\alpha] \rangle, \\ \langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} &= \langle [\Psi; [\Phi; x^\alpha]] \rangle = \frac{1}{2} \langle [\Phi; [\Psi; x^\alpha]] + [\Psi; [\Phi; x^\alpha]] \rangle - \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle [[\Phi; \Psi]; x^\alpha] \rangle, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где Ψ определено в (1.8). В тензоре рассеяния отличны от нуля только члены второго порядка по Φ

$$\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle = \langle [\Phi; x^\alpha] [\Psi; x^\beta] + [\Psi; x^\alpha] [\Phi; x^\beta] \rangle. \quad (2.17)$$

Проиллюстрируем характер вычислений, приводящих к (2.16) и (2.17), на примере $\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)}$

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} \approx \frac{1}{i} \langle S_i^{(2)} x^\alpha \rangle = \frac{1}{i} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle S_{i-t'}^0 [\Phi; S_{i'-t''}^0 [\Phi; S_{i''}^0 x^\alpha]] \rangle.$$

После изменения порядка интегрирования и замены переменных $t'' \rightarrow t - t''$; $t' \rightarrow t' + t - t''$

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \frac{1}{i} \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \langle S_{i-t''}^0 [\Phi; S_{i'}^0 [\Phi; S_{i-t''}^0 x^\alpha]] \rangle.$$

Заменяя $S_{i-t''}^0 = S_{i''}^0 \cdot S_{-t''}^0$ и пользуясь 4) из (2.15), получаем:

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \frac{1}{i} \int_0^t dt'' \left\langle S_{i''}^0 \left[\int_0^{t''} S_{-t'}^0 \Phi dt'; [\Phi; S_{i-t''}^0 x^\alpha] \right] \right\rangle.$$

Согласно (2.14) верхний предел внутреннего интеграла можно заменить бесконечностью, после чего, используя (2.13), получаем окончательно для $\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)}$ выражение (2.16). Аналогично вычисляются и остальные величины в (2.16) и (2.17).

Уравнения (2.16) и (2.17) определяют коэффициенты уравнения (2.4), если известен закон движения невзаимодействующих частиц и потенциал их взаимодействия.

Вычислим дивергенцию от тензора рассеяния. Из (2.17), используя формулу (1.6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \right\rangle = \langle [\Psi; [\Phi; x^\alpha]] + [\Phi; [\Psi; x^\alpha]] \rangle.$$

Сравнивая это выражение с (2.16), получаем следующее соотношение между $\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)}$ и тензором рассеяния:

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle - \frac{1}{2} \langle [[\Phi; \Psi]; x^\alpha] \rangle. \quad (2.18)$$

(Заметим, что в формулах (2.16)—(2.18) под x можно понимать медленные переменные X , так как для фаз ϑ эти выражения тождественно обращаются в нуль.)

С помощью (2.16) и (2.18) можно исключить $\langle \Delta X^\alpha \rangle$ из уравнения (2.4), после чего оно примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + [\mathcal{H}^0 + \langle \Phi \rangle; \mathcal{F}] - \frac{1}{2} [\langle \Phi; \Psi \rangle; \mathcal{F}] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left(\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) по X_2 и переходя к одночастичным функциям F , получаем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} + [\mathcal{H}_1^0; F_1] + [\langle U(F) + U_c(F) \rangle; F_1] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_1^\alpha} \int dX_2 \left(\langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial X_1^\beta} F_2 + \langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial X_2^\beta} F_1 \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $U(F)$ и $U_c(F)$ — самосогласованные поля, соответствующие обычному (Φ) и «коррелятивному» $(\Phi_c = -\frac{1}{2}[\Phi; \Psi])$ потенциалам. В (2.20) можно перейти к обычной нормировке функций F на полное число частиц.

Уравнение (2.20) можно записать в виде уравнения непрерывности в пространстве «медленных» переменных X

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial j_{X^\alpha}}{\partial X^\alpha} = 0, \quad (2.21)$$

где j_{X^α} — плотность потока в пространстве переменных имеет вид

$$\begin{aligned} j_{X^\alpha} = [\mathcal{H}^0; X_1^\alpha] F_1 + [\langle U + U_c \rangle; X_1^\alpha] F_1 - \\ - \frac{1}{2} \int dX_2 \left(\langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial X_1^\beta} F_2 + \langle \Delta X_1^\alpha \Delta X_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial X_2^\beta} F_1 \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сравнивая (2.17) с (1.8), находим для входящих в уравнение (1.18) величин $\langle X^\alpha / X^\beta \rangle$

$$(2\pi)^{-s} \int d\vartheta_2 \langle X^\alpha / X^\beta \rangle_{\vartheta_1} = \langle X^\alpha / X^\beta \rangle_{\vartheta_1, \vartheta_2} = \langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle_{\vartheta_1, \vartheta_2}. \quad (2.23)$$

С учетом (2.23) доказывается тождественность уравнений (2.20) и (1.18). При сравнении надо иметь в виду, что функция f^0 нормирована на полный канонический объем, а F — на объем медленных переменных, так что $F = (2\pi)^s f^0$, где s — число быстрых переменных ϑ .

Таким образом, рассмотренный здесь «вероятностный» метод оказывается эквивалентным первому приближению теории возмущений по $(\omega\tau)^{-1}$ для кинетического уравнения (см. § 1).

Следует отметить, что для обычного уравнения Фоккера—Планка (2.4) конкретное вычисление линейных отклонений $\langle \Delta X^\alpha \rangle$ оказывается значительно более сложным, чем вычисление тензора рассеяния $\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle$, так как для этого необходимо использовать второе приближение для ΔX^α . С этой точки зрения уравнение (2.19) (и, следовательно, (2.20)) имеет существенное преимущество, так как не содержит $\langle \Delta X^\alpha \rangle^{(2)}$. Исключение $\langle \Delta X^\alpha \rangle^{(2)}$ оказалось возможным благодаря соотношению (2.18) между линейными и квадратичными отклонениями. Л. Д. Ландау [6] получил уравнение типа (2.20) (в пространстве обычных импульсов) в качестве кинетического уравнения для заряженных частиц, используя принцип детального равновесия. Последний безусловно имеет место в случае столкновений свободных частиц (т. е. когда можно пренебречь влиянием внешних полей на процесс соударения). Если же внешние поля существенны при столкновениях, то принцип детального равновесия в общем случае не имеет места. При справедливости указанного принципа уравнение Фоккера—Планка (2.4), как фактически показано в [6], может быть приведено к виду

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{F}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left(\langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle \frac{\partial \overline{\mathcal{F}}}{\partial X^\beta} \right). \quad (2.24)$$

Из сравнения (2.24) и (2.4) следует, что коэффициенты последнего связаны соотношением

$$\langle \Delta X^\alpha \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \langle \Delta X^\alpha \Delta X^\beta \rangle, \quad (2.25)$$

что отличается от общего соотношения (2.18) отсутствием члена с «коррелятивным» потенциалом Φ_c . Таким образом, если член с «коррелятивным» потенциалом не обращается в нуль, то это указывает на несправедливость в этом случае принципа детального равновесия. Существенно, что член с Φ_c имеет вид самосогласованного поля, поэтому он приводит только к упорядоченным, обратимым процессам. Другими словами, отсутствие принципа детального равновесия не сказывается на необратимых процессах рассеяния (диффузии, термодиффузии и т. п.).

До сих пор все вычисления проводились в канонических переменных, в число которых входили переменные действия I^α . Переход к другим переменным не представляет

труда, так как уравнение (2.20) имеет тензорный характер. Пусть $y = (Y \xi)$ — новый полный набор переменных (не обязательно канонических) и пусть связь новых и старых переменных имеет вид

$$\begin{aligned} Y &= Y(X), & X &= X(Y), \\ \xi &= \xi(X\vartheta), & \vartheta &= \vartheta(Y\xi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Как видно из (2.26), Y являются теперь медленными переменными, а ξ — быстрыми. В переменных Y уравнение (2.20) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_1}{\partial t} + [\mathcal{H}_1^0; F_1] + \langle U + U_c \rangle; F_1 = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{G_1}} \frac{\partial}{\partial Y_1^\alpha} \sqrt{G_1} \int \sqrt{G_2} dY_2 \left(\langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta} F_2 + \right. \\ & \quad \left. + \langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1 \right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\sqrt{G} = \frac{\partial(X)}{\partial(Y)}$ — якобиан перехода от переменных X (играющих роль декартовых координат) к Y ,

$$\langle \Delta Y_i^\alpha \Delta Y_k^\beta \rangle = \langle [\Phi; Y_i^\alpha] [\Psi; Y_k^\beta] + [\Psi; Y_i^\alpha] [\Phi; Y_k^\beta] \rangle, \quad (2.28)$$

а усреднение понимается в смысле

$$\langle \varphi \rangle \equiv \langle \varphi \rangle_{\vartheta_1, \vartheta_2} = (2\pi)^{-s_1 - s_2} \int \frac{\partial(\vartheta_1)}{\partial(\xi_1)} \cdot \frac{\partial(\vartheta_2)}{\partial(\xi_2)} \varphi d\xi_1 d\xi_2. \quad (2.28)$$

Заметим, что F в (2.27) нормирована условием

$$\int F \sqrt{G} dY = N.$$

§ 3

Рассмотрим простой пример: расширение проходящего через газ электронного пучка в продольном магнитном поле. Будем считать пучок достаточно разреженным и пренебрегать взаимодействием электронов между собой. Кулоновское взаимодействие электронов с атомами экранируется на атомных размерах (много меньших ларморовского радиуса), поэтому столкновения являются быстрыми ($\omega t_0 \ll 1$) и можно пользоваться уравнением (1.22). Отдачей атомов при столкновениях пренебрегаем, опуская член с производной от F_2 .

Для атомов выбираем декартовы переменные $(\mathbf{r}_2; \mathbf{p}_2)$, а электроны пучка будем описывать координатами центра

ларморовского кружка ($x^0 y^0 z^0$), его радиусом ρ и продольной скоростью v_{\parallel} — в качестве медленных переменных. Быстрой переменной (ϑ) является фаза движения частицы по ларморовской окружности. Эти переменные (не канонические) связаны с декартовыми соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x^0 + \rho \cos \vartheta; & y &= y^0 + \rho \sin \vartheta; & z &= z^0; \\ p^x &= \frac{1}{2} m \omega (y^0 - \rho \sin \vartheta); & p^y &= -\frac{1}{2} m \omega (x^0 - \rho \cos \vartheta); \\ p^z &= m v & \left(\omega &= -\frac{eH}{mc} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

С учетом всех замечаний, сделанных выше, уравнение (1.22) в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial F_1}{\partial z^0} = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial}{\partial Y_1^{\alpha}} \left\{ \sqrt{G_1} \langle Q^{\alpha\beta} \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^{\beta}} \right\}, \quad (3.2)$$

где

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{\partial Y_1^{\alpha}}{\partial p_1^{\gamma}} \frac{\partial Y_1^{\beta}}{\partial p_1^{\sigma}} \int w^{\gamma\sigma} F_2 d\mathbf{p}_2. \quad (3.3)$$

Из (1.21) легко видеть, что в пренебрежении величинами w^{\perp}/v_{\parallel} и v_{\perp}/v_{\parallel} отличны от нуля только две компоненты $w^{\gamma\sigma}$

$$w^{x^0 x^0} = w^{y^0 y^0} = 2\pi e^2 c_2^2 L n_2 \cdot 1/v_{\parallel}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) с учетом (3.1) и (3.4) получаем

$$\langle Q^{x^0 x^0} \rangle = \langle Q^{y^0 y^0} \rangle = \langle Q^{z^0 z^0} \rangle = 2\pi e^2 e_2^2 L n_2 \cdot \frac{1}{m^2 \omega^2 v_{\parallel}}, \quad (3.5)$$

а остальные компоненты $\langle Q^{\alpha\beta} \rangle$ равны нулю. Из (3.1) легко находим также, что $\sqrt{G_1} = m^3 \omega^2 \rho$, после чего (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial z^0} = \frac{2\pi e^2 e_2^2 L n_2}{m^2 \omega^2 v_{\parallel}} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^{0^2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим следующую стационарную задачу: бесконечно тонкий цилиндрический пучок с осью вдоль z , монохроматический по скоростям, при $z=0$ входит в область газа. Найдем распределение электронов при $z > 0$.

Вводя величину $r^0 = \sqrt{x^{0^2} + y^{0^2}}$ — расстояние ларморовского центра от оси пучка, получим из (3.6)

$$\frac{m^2 \omega^2 v_{\parallel}^2}{2\pi e^2 e_2^2 L n_2} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{r^0} \frac{\partial}{\partial r^0} \left(r^0 \frac{\partial F}{\partial r^0} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right). \quad (3.7)$$

Граничное условие при $z=0$ имеет вид

$$F_0 = \frac{2\nu}{\pi m^3 \omega^2} \delta(v_{\parallel} - v_0) \frac{\delta(\rho)}{\rho} \frac{\delta(r^0)}{r^0}, \quad (3.8)$$

где ν — число электронов на единицу длины пучка (F нормируем условием $\int F \sqrt{G} 2\pi r^0 d\rho dr^0 dv_{\parallel} = \nu$). Решение (3.7) с граничным условием (3.8) имеет вид

$$F = \frac{\nu \delta(v_{\parallel} - v_0)}{2\pi m^3 \omega^2 (2\alpha z)^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + r^{0^2}}{4\alpha z}\right); \quad \alpha = \frac{2\pi L e^2 c_2^2 n_2}{m^2 \omega^2 v_0^2}. \quad (3.9)$$

Как следует из (3.9), расплывание пучка является диффузионным процессом как в координатном пространстве, так и в пространстве ρ с одинаковым коэффициентом диффузии

$$D_{\perp} = \alpha v_0 = \frac{2\pi L e^2 c_2^2 n_2}{m^2 \omega^2 v_0}. \quad (3.10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. т. II настоящего издания, стр. 330.
2. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 41.
3. S. Charman, T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge, 1939.
4. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, М., Гостехиздат, 1946.
5. Н. Н. Боголюбов, *О некоторых статистических методах в математической физике*, Изд. АН УССР, 1945.
6. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ*, **7**, 203 (1937).
7. М. А. Леонтович, *Статистическая физика*, М., Гостехиздат, 1944.
8. R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**, 749 (1949).
9. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **84**, 108 (1951).

С. Т. Беляев

КИНЕТИКА ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

Ионизованный газ в сильном магнитном поле рассматривается как совокупность ларморовских кружков. Получено кинетическое уравнение для функции распределения ларморовских кружков. Рассматривается его решение в гидродинамическом приближении. В однородном магнитном поле вычислен коэффициент электрон-ионной диффузии. В неоднородном поле найдены потоки без учета столкновений.

Кинетическое уравнение при наличии магнитного поля H имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = st(f), \quad (1)$$

где $st(f)$ обозначает столкновительный член, а остальные обозначения обычные.

Мы будем рассматривать случай сильного магнитного поля, когда время свободного пробега τ велико по сравнению с периодом ларморовского вращения, т. е.

$$\omega\tau \gg 1, \quad (2)$$

где $\omega = -\frac{eH}{mc}$ — частота вращения. Ларморовское вращение в этом случае является «быстрым» процессом, а кинетические процессы (следствия столкновений) — «медленными».

В [1] и [2] рассматривалась общая задача упрощения кинетического уравнения путем исключения «быстрых» переменных. Для функции распределения по оставшимся «медленным»

* Работа выполнена в 1955 г.

переменным было получено приближенное (с точностью до $(\omega\tau)^{-1}$ уравнение, которое имеет вид уравнения непрерывности в пространстве «медленных» переменных.

В нашем случае есть только одна «быстрая» переменная — фаза ларморовского вращения, так что уравнение для распределения по «медленным» переменным лишь незначительно проще исходного уравнения (1) и практически приходится использовать дополнительные приближения, например малость градиентов («гидродинамическое приближение»).

Исходное уравнение (1) также решают гидродинамическим приближением, но в нулевом приближении сохраняют не только столкновительный член, но и член с магнитным полем (главный в случае $\omega\tau \gg 1$) [3, 4]. Решением нулевого приближения, как и в отсутствие поля, является максвелловское распределение. Таким образом, в исходном приближении сохраняются члены разных порядков по $\omega\tau$, а функция распределения определяется по существу меньшим из оставленных членов — столкновительным. Вследствие этого наглядная физическая интерпретация результатов решения уравнения (1) часто бывает затруднительной, так как состояние газа описывается в терминах свободных частиц (плотность, средняя скорость частиц в данной точке и т. д.), а сильное магнитное поле «размазывает» частицы по ларморовской орбите и тем самым лишает наглядности «частичные» понятия.

В сильном магнитном поле физическую наглядность приобретают ларморовские кружки, характеризующиеся только «медленными» переменными (координаты центра, радиус, продольная скорость). Поэтому результаты, полученные из упрощенного уравнения и относящиеся именно к кружкам (плотность ларморовских кружков, их поток и т. д.), проще интерпретировать. Правда, решение граничных задач оказывается при этом более сложным.

В настоящей работе рассматривается кинетика ларморовских кружков главным образом в гидродинамическом приближении (исключение составляет лишь последний раздел). При этом мы не ставим себе целью рассмотреть все кинетические процессы, а лишь иллюстрируем метод на отдельных задачах (см. также [5, 6]).

При рассмотрении столкновений длина экранирования кулоновского взаимодействия заранее не считается малой по сравнению с ларморовским радиусом и учитывается влияние поля на соударения. (При больших прицельных параметрах сталкиваются ларморовские кружки, а не свободные частицы.)

Будем описывать ларморовские кружки положением центра $\mathbf{r}^0 = (x^0, y^0, z^0)$, радиусом ρ и продольной скоростью v^{\parallel} (или продольным импульсом $p^{\parallel} = mv^{\parallel}$) — медленные переменные Y^{α} .

Вместо ρ удобно использовать также переменную $I = \frac{1}{2} m \omega \rho^2$, которая канонически сопряжена с фазой частицы ϑ . Уравнение для функции распределения по «медленным» переменным F , полученное в [2], запишем в виде уравнения непрерывности

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\operatorname{div}_1 j^r = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial}{\partial Y_1^\alpha} (\sqrt{G_1} j^{r\alpha}), \quad (3)$$

где плотность потока j^r имеет вид

$$j^{r\alpha} = \dot{Y}_1^\alpha F_1 + [\langle U + U_c \rangle; Y_1^c] F_1 - \frac{1}{2} \int \sqrt{G_2} dY_2 \times \\ \times \left(\langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta} F_2 + \langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1 \right). \quad (4)$$

Здесь U — обычное, а U_c — «коррелятивное» самосогласованное поле (см. [2] формула (1.9)); $[;]$ означают скобки Пуассона; $\langle \rangle \equiv \langle \rangle$ — усреднение по быстрым переменным (фазам ϑ), а \sqrt{G} — якобиан перехода от медленных переменных из числа канонически сопряженных (включающих переменные действия) к произвольным медленным переменным Y^α . Для полного определения коэффициентов уравнения (3) остается вычислить скорости \dot{Y}^α и тензор рассеяния $\langle \Delta Y^\alpha \Delta Y^\beta \rangle$ — средние квадратичные отклонения.

§ 1. Однородное магнитное поле

1. 2. *Вычисление коэффициентов уравнения.* Из величин \dot{Y}^α в однородном поле отлична от нуля только продольная скорость $\dot{z}^0 = v^{\parallel}$.

В гидродинамическом приближении в уравнение входит интеграл от тензора рассеяния

$$Q^{\alpha\beta} = \int \langle \Delta Y^\alpha \Delta Y^\beta \rangle dr^0. \quad (1.1)$$

В [2] для тензора рассеяния было получено выражение

$$\langle \Delta Y^\alpha \Delta Y^\beta \rangle = \langle [\Phi; Y^\alpha] [\Psi; Y^\beta] + [\Psi; Y^\alpha] [\Phi; Y^\beta] \rangle. \quad (1.2)$$

Здесь Φ — потенциал парного взаимодействия частиц, а

$$\Psi = \int_0^\infty S_{-t'}^0 dt',$$

где S_t^0 — оператор, заменяющий переменные на их значения через время t (классический аналог S -матрицы). Подставляя

(1. 2) в (1. 1) и используя фурье-представление кулоновского потенциала

$$\Phi(r) = \int \varphi(k) \cdot e^{ikr} dk; \quad \varphi(k) = \frac{e_1 e_2}{2\pi^2 k^2}, \quad (1. 3)$$

получим после интегрирования в (1. 1) по \mathbf{r}_2^0

$$Q^{\alpha\beta} = (2\pi)^3 \int_0^\infty dt' \int dk |\varphi(k)|^2 \langle [k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); Y^\alpha][kS_{-t'}^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2); Y^\beta] \times \\ \times \exp\{ik(1 - S_{-t'}^0)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\} + \text{трансп}(\alpha \leftrightarrow \beta) \rangle_{\vartheta_1, \vartheta_2}. \quad (1. 4)$$

Выразив в (1. 4) переменные r через r^0 , ρ и ϑ согласно

$$k\mathbf{r} = k\mathbf{r}^0 + k_{\perp}\rho \cos \vartheta$$

и записывая явно действие оператора $S_{-t'}^0$, которое сводится к замене z^0 на $z^0 - v_{\parallel}t'$, а фаз ϑ — на $\vartheta - \omega t'$, после несложных преобразований получим

$$Q^{\alpha\beta} = (2\pi)^3 \int_0^\infty dt' \int dk |\varphi(k)|^2 k^2 \langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp ik \left\{ n_{\parallel} (v_{\parallel}^1 - v_{\parallel}^2) t' + \right. \\ \left. + 2n_{\perp}\rho_1 \sin \frac{\omega_1 t'}{2} \cos \vartheta_1 - 2n_{\perp}\rho_2 \sin \frac{\omega_2 t'}{2} \cos \vartheta_2 \right\} \rangle; \quad (1. 5)$$

где n_{\parallel} и n_{\perp} — параллельная и перпендикулярная полю составляющие единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, а симметричные величины $(Y^\alpha Y^\beta)$ имеют вид

$$(I_1 I_1) = 2\rho_1^2 n_{\perp}^2 \left(\cos^2 \vartheta_1 - \sin^2 \frac{\omega_1 t'}{2} \right); \\ (I_1 p_1^{\parallel}) = - (I_1 p_2^{\parallel}) = 2\rho_1 n_{\parallel} n_{\perp} \cos \frac{\omega_1 t'}{2} \cos \vartheta_1, \\ (I_1 I_2) = - 2\rho_1 \rho_2 n_{\perp}^2 \cos \frac{\omega_1 t'}{2} \cos \frac{\omega_2 t'}{2} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2; \\ (p_1^{\parallel} I_2) = - 2\rho_2 n_{\parallel} n_{\perp} \cos \frac{\omega_2 t'}{2} \cos \vartheta_2; (p_1^{\parallel} p_1^{\parallel}) = - (p_1^{\parallel} p_2^{\parallel}) = 2n_{\parallel}^2, \quad (1. 6) \\ m_1 (I_1 z_1^0) = - m_2 (I_1 z_2^0) = t' \rho_1 n_{\parallel} n_{\perp} \cos \frac{\omega_1 t'}{2} \cos \vartheta_1;$$

$$m_1 (p_1^{\parallel} z_1^0) = - m_2 (p_1^{\parallel} z_2^0) = t' n_{\parallel}^2; (x_1^0 x_1^0) = (y_1^0 y_1^0) = \frac{n_{\perp}^2}{m_1^2 \omega_1^2}; \\ (x_1^0 x_2^0) = (y_1^0 y_2^0) = - \frac{n_{\perp}^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}.$$

Пределы интегрирования в (1.5) по абсолютному значению k определяются областью экранирования кулоновского взаимодействия. Если взаимодействие экранируется на расстояниях, малых по сравнению со средним ларморовским радиусом, то в (1.5) существенны только большие k ($kr \gg 1$). В обратном предельном случае существенна также и область малых k . Не делая пока никаких предположений о размерах области экранирования, рассмотрим вклад в Q^β каждой из областей $kr > 1$ и $kr < 1$.

$kr > 1$. В этом случае в (1.5) существенны малые значения t' , так как в противном случае подынтегральное выражение быстро осциллирует. Разлагая тригонометрические функции по $\omega t'$ и вводя обозначение $\xi = kt'$, получаем

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} e_1^2 e_2^2 \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int d\mathbf{o}_n \langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp i \xi \{ n_{\parallel} (v_1^{\parallel} - v_2^{\parallel}) + n_{\perp} v_1^{\perp} \cos \vartheta_1 - n_{\perp} v_2^{\perp} \cos \vartheta_2 \} \rangle, \quad (1.7)$$

где подставлено значение $\varphi(k)$ из (1.3) и обозначено $v^\perp = \rho\omega$. Существенные из величин $(Y^\alpha Y^\beta)$ (не содержащие степеней $1/k$ и дающие поэтому в (1.7) при интегрировании кулоновский логарифм) равны

$$\begin{aligned} (I_1 I_1) &= \frac{2}{\omega_1^2} (v_1^{\perp} n_{\perp} \cos \vartheta_1)^2; \quad (I_1 p_1^{\parallel}) = -(I_1 p_2^{\parallel}) = \\ &= \frac{2}{\omega_1} n_{\parallel} n_{\perp} v_1^{\perp} \cos \vartheta_1, \quad (I_1 I_2) = -\frac{2}{\omega_1 \omega_2} n_{\perp}^2 v_1^{\perp} v_2^{\perp} \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2; \\ (p_1^{\parallel} I_2) &= -\frac{2}{\omega_2} n_{\parallel} n_{\perp} v_2^{\perp} \cos \vartheta_2, \quad (p_1^{\parallel} p_1^{\parallel}) = -(p_1^{\parallel} p_2^{\parallel}) = 2n_{\parallel}^2; \\ (x_1^0 x_1^0) &= \frac{n_{\perp}^2}{m_1^2 \omega_1^2}; \quad (x_1^0 x_2^0) = -\frac{n_{\perp}^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$kr < 1$. В этом случае в показателе экспоненты в (1.5) можно отбросить члены, содержащие ρ . В результате получаем

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} e_1^2 e_2^2 \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int d\mathbf{o}_n \langle (Y^\alpha Y^\beta) \rangle \exp i \xi n_{\parallel} (v_1^{\parallel} - v_2^{\parallel}), \quad (1.9)$$

где отличны от нуля

$$\langle (x_1^0 x_1^0) \rangle = \frac{n_{\perp}^2}{m_1^2 \omega_1^2}; \quad \langle (x_1^0 x_2^0) \rangle = -\frac{n_{\perp}^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2},$$

$$\left. \begin{aligned} \langle (I_1 I_1) \rangle &= \rho_1^2 n_1^2 \cos \frac{\omega_1 \xi}{k}; \quad \langle (p_1^{\parallel} p_1^{\parallel}) \rangle = - \langle (p_1^{\parallel} p_2^{\parallel}) \rangle = 2n_1^2 \quad (1.10) \\ m_1 \langle (p_1^{\parallel} z_1^0) \rangle &= - m_2 \langle (p_1^{\parallel} z_2^0) \rangle = n_1^2 \frac{\xi}{k}. \end{aligned} \right\} (k\rho < 1)$$

Нетрудно видеть, что при $|v_1^{\parallel} - v_2^{\parallel}| \frac{k}{\omega_1} < 1$ интеграл по ξ для Q^{μ} равен нулю. Для остальных компонент интегрирование в (1.9) по ξ приводит к δ -функции от n_{\parallel} , поэтому можно отбросить те из них, которые в (1.10) содержат n_{\parallel}^2 . Таким образом, исчезают все импульсные и смешанные компоненты $Q^{\alpha\beta}$. Если брать в (1.5) дальнейшие члены разложения экспоненты по $k\rho$, то для указанных компонент все они также обращаются в нуль (либо равен нулю интеграл по ξ , либо последующий интеграл по n_{\parallel}). Такое положение означает, что импульсные и смешанные компоненты $Q^{\alpha\beta}$ имеют экспоненциальный порядок малости ($\sim \exp\left(-\frac{a}{k\rho}\right)$). Ниже, при рассмотрении конкретных задач, будет показано, что этот результат физически вполне нагляден. Для существенных координатных компонент интегрирование в (1.9), может быть проведено до конца. В результате находим

$$\begin{aligned} Q_{1^{\alpha}1^0}^{00} &= \frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_1^2 \omega_1^2} |v_1^{\parallel} - v_2^{\parallel}|^{-1} \ln \frac{d}{\rho}, \\ Q_{1^{\alpha}2^0}^{00} &= - \frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2} |v_1^{\parallel} - v_2^{\parallel}|^{-1} \ln \frac{d}{\rho}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где d — размер области экранирования взаимодействия. (Нижняя граница прицельных параметров определена из условия $k\rho \approx 1$.)

При рассмотрении столкновений ионов и электронов следует учитывать различие их средних ларморовских радиусов, отношение которых при равных температурах $\rho_i/\rho_e = (m_i/m_e)^{1/2}$. В этом случае появляется область прицельных параметров, лежащих между ρ_e и ρ_i . Рассмотрим вклад этой области в D .

Пусть $\rho_1 \gg \rho_2$. Для k , удовлетворяющих неравенствам $\rho_2 < 1/k < d < \rho_1$, в (1.5) в показателе экспоненты можно опустить член с ρ_2 , а в члене с ρ_1 заменить $\sin \frac{\omega_1 t'}{2}$ аргументом

(так как существенна область t' , где $\omega_1 t' < 1$). В результате из (1.5) и (1.6) следует

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2e_1^2 e_2^2}{\pi} \int_0^\infty d\xi \int \frac{dk}{k} \int d\mathbf{o}_n \langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp i\xi \{n_{\parallel} (v_1'' - v_2'') + n_{\perp} v_1^{\perp} \cos \vartheta_1\} \rangle, \quad (1.12)$$

где существенные из величин $(Y^\alpha Y^\beta)$ равны

$$\begin{aligned} (I_1 I_1) &= \frac{2}{\omega_1^2} (v_1^{\perp} n_{\perp} \cos \vartheta_1)^2; \quad (I_1 p_1'') = - (I_1 p_2'') = \\ &= \frac{2}{\omega_1} n_{\parallel} n_{\perp} v_1^{\perp} \cos \vartheta_1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

а для $(p_1' p_1'') = - (p_1^0 p_2^0)$, $(x_1^0 x_1^0)$ и $(x_1^0 x_2^0)$ то же, что в (1.6). Рассматривая показатель экспоненты в (1.12) как скалярное произведение $\mathbf{n}\mathbf{u}$, произведем интегрирование по направлениям \mathbf{n} , выбирая за полярную ось \mathbf{u} . После этого можно проинтегрировать также по ξ . В результате получим

$$\begin{aligned} Q^{I_1 I_1} &= A \frac{u_{\parallel}^2 u_{\perp}^2}{\omega_1^2 u^3}; \quad Q^{I_1 p_1''} = - Q^{I_1 p_2''} = - A \frac{u_{\parallel} u_{\perp}^2}{\omega_1 u^3}, \\ Q^{p_1'' p_1''} &= - Q^{p_1'' p_2''} = A \frac{u_{\perp}^2}{u^3}; \quad Q^{x_1^0 x_1^0} = \frac{A}{m_1^2 \omega_1^2 u} \left(1 - \frac{u_{\perp}^2}{2u^2} \right), \quad (1.14) \\ Q^{x_1^0 x_2^0} &= - \frac{A}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2 u} \left(1 - \frac{u_{\perp}^2}{2u^2} \right); \quad \left(\rho_2 < \frac{1}{k} < d < \rho_1 \right) \\ \left(A = 4\pi e_1^2 e_2^2 \ln \frac{d}{\rho_2}; \quad u_{\parallel} &= v_1'' - v_2''; \quad u_{\perp} = v_1^{\perp}; \quad u^2 = u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2 \right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\rho_1 \ll \rho_2$, тогда аналогично предыдущему из (1.5) и (1.6) получим для области $\rho_1 < 1/k < d < \rho_2$

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{2e_1^2 e_2^2}{\pi} \int d\xi \int \frac{dk}{k} \int d\mathbf{o}_n \langle (Y^\alpha Y^\beta) \exp i\xi \{n_{\parallel} (v_1'' - v_2'') - n_{\perp} v_2^{\perp} \cos \vartheta_2\} \rangle, \quad (1.15)$$

где существенны только величины $(p_1' p_1'') = - (p_1'' p_2'')$, $(x_1^0 x_1^0)$ и $(x_1^0 x_2^0)$, имеющие те же значения, что и в (1.6). Интегри-

рование в (1.15) может быть проведено до конца. В результате получаем:

$$Q_{11}^{x_0 x_0} = \frac{A'}{m_1^2 \omega_1^2 u'} \left(1 - \frac{u'_{\perp}{}^2}{2u'^2} \right); \quad Q_{12}^{x_0 x_0} = - \\ - \frac{A'}{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2 u'} \left(1 - \frac{u'_{\perp}{}^2}{2u'^2} \right), \quad (1.16)$$

$$Q_{11}^{p_1 p_1} = -Q_{12}^{p_1 p_1} = A' \frac{u'_{\perp}{}^2}{u'^3} \quad (\rho_1 < l/k < d < \rho_2) \\ \left(A' = 4\pi e_1^2 e_2^2 \ln \frac{d}{\rho_1}; \quad u'_{\parallel} = v_1'' - v_2''; \quad u'_{\perp} = v_2^{\perp} \right).$$

1. 2. *Время релаксации.* Рассмотрим слабо неоднородный газ. Плотность n и температура T зависят от координат, но так, что длина l , на которой n и T заметно меняются, много больше ларморовского радиуса ρ . В однородном магнитном поле время исчезновения градиентов, перпендикулярных к полю, по порядку величины определяется $t_{\perp} \sim l^2/D$, где коэффициент диффузии $D \sim \rho^2/\tau$. Отношение времен релаксации по импульсам (τ) и по координатам (t_{\perp}) равно $\tau/t_{\perp} \sim (\rho/l)^2 \ll 1$. В этом случае можно применить гидродинамическое приближение к уравнению (3). Пренебрегая в первом приближении производными по координатам, получим из (3)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial j^I}{\partial I} + \frac{\partial j^{p''}}{\partial p''} = 0. \quad (1.17)$$

(В однородном поле $\sqrt{G} = m^2 \omega = \text{const}$). Поток j^I устанавливает равновесное распределение по скоростям, поперечным магнитному полю, а $j^{p''}$ — по продольным скоростям. Величины этих потоков определяются импульсными компонентами тензора рассеяния $\langle \Delta I \Delta I \rangle$, $\langle \Delta I \Delta p'' \rangle$, $\langle \Delta p'' \Delta p'' \rangle$. Существенный вклад в эти компоненты, как было выяснено в предыдущем разделе, дают только близкие столкновения ($kr > 1$). Далекие столкновения происходят адиабатически и не изменяют поперечную энергию сталкивающихся кружков (а в силу законов сохранения также и продольную). Таким образом, далекие столкновения не играют роли в процессе установления равновесия по скоростям. Близкие же столкновения происходят одинаково как в присутствии поля, так и без него. Поэтому поле непосредственно не влияет на процесс установления максвелловского распределения и, в частности, на величину времени релаксации. H может изменить лишь раз-

меры области экранирования взаимодействия, ограничив их ларморовским радиусом, что приведет к изменению кулоновского логарифма (в случае $d > \rho$). Утверждение в [5] о различных временах релаксации по продольным и поперечным скоростям, очевидно, ошибочно.

Задача следующих приближений — получить из (3) уравнения макроскопических потоков ларморовских кружков и энергии. Ниже мы ограничимся рассмотрением только одного эффекта — диффузии электронов в результате столкновений с ионами.

1.3. *Коэффициент электрон-ионной диффузии.* Пусть плотность электронов имеет градиент по оси x (температура постоянна, потоки вдоль \mathbf{H} отсутствуют).

Подставляя в (3) максвелловское распределение

$$F_1 = \frac{2\pi n_1}{(2\pi m_1 T)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{I_1 \omega_1}{T} - \frac{p_1^2}{2m_1 T} \right\} \quad (1.18)$$

и интегрируя по I_1 и p_1'' , получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial i_x}{\partial x_1^0} = 0, \quad (1.19)$$

где поток i_x равен

$$i_x = m_1 \omega_1 \int j^{x^0} dI_1 dp_1''. \quad (1.20)$$

Нас сейчас интересует диффузионный поток, т. е. та часть в (1.20), которая пропорциональна градиенту плотности.

Представляя $i_x^{\text{диф}} = -D \frac{\partial n_1}{\partial x_1^0}$, получим для коэффициента диффузии D с учетом (4) и (1.1)

$$D = \frac{1}{2} n_2 Q^{x_1^0}. \quad (1.21)$$

Здесь черта означает усреднение по максвелловскому распределению как ионов, так и электронов.

Рассмотрим сначала случай, когда взаимодействие экранируется на расстояниях d , малых по сравнению с электронным ларморовским радиусом ($d < \rho_1 \ll \rho_2$). Из (1.7) и (1.8) получим, пренебрегая скоростями ионов,

$$D = \frac{e_1^2 e_2^2 n_2 L^\infty}{\pi m_1^2 \omega_1^2} \int d\xi \int d\mathbf{o}_n n_\perp^2 \overline{\langle \exp i\xi \{ n_\parallel v_1'' + n_\perp v_1^+ \cos \vartheta_1 \} \rangle}. \quad (1.22)$$

Интегрирование в (1.22) по \mathbf{n} и ξ проводится так же, как в (1.12).

В результате получим:

$$D = \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 n_2 L}{m_1^2 \omega_1^2} \frac{1}{v_1} \overline{\left(1 - \frac{v_1^{\perp 2}}{2v_1^2}\right)}. \quad (1.23)$$

Учитывая, что при усреднении по максвелловскому распределению $\overline{(v_{\perp}/v)^2} = \frac{2}{3}$; $\overline{1/v} = \sqrt{\frac{2m}{\pi T}}$, получим окончательно:

$$D = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2} \frac{Td}{|e_1 e_2|} \quad (d < \rho_1 \ll \rho_2), \quad (1.24)$$

где в кулоновском логарифме подставлены значения $k_{\max} = T/|e_1 e_2|$, $k_{\min} = 1/d$.

Перейдем к случаю, когда длина экранирования удовлетворяет неравенствам $\rho_1 < d < \rho_2$. Теперь, кроме области $k > 1/\rho_1$, следует учитывать и область $1/d < k < 1/\rho_1$. Вклад этой области в D можно получить из (1.18) усреднением по максвелловскому распределению. Более удобно, однако, усреднять выражение (1.15), которое можно записать в виде

$$Q^{0,0} = \frac{2e_1^2 e_2^2 L}{\pi m_1^2 \omega_1^2} \int_0^{\infty} d\xi \int d\mathbf{o}_n n_{\perp}^2 \exp i\xi (n_1 v_1'' - n v_2). \quad (1.25)$$

Усреднение экспоненты по максвелловскому распределению проводится элементарно

$$\overline{\exp i\xi n_{\parallel} v_1''} = \exp\left(-\frac{\xi^2 n_{\parallel}^2 T}{2m_1}\right); \quad \overline{\exp(-i\xi n v_2)} = \exp\left(-\frac{\xi^2 T}{2m_2}\right).$$

Интегрируя затем по ξ и \mathbf{n} и пренебрегая величиной m_1/m_2 , получим для вклада в D от области прицельных параметров $\rho_1 < 1/k < \rho_2$

$$D' = \sqrt{2\pi} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2} \ln \frac{d}{\rho_1} \left(\ln \frac{4m_2}{m_1} - 1 \right); \quad (\rho_1 < 1/k < d), \quad (1.26)$$

где под $\bar{\rho}$ следует понимать среднее значение $\bar{\rho} = \sqrt{\frac{2T}{m\omega^2}}$.

Полный коэффициент диффузии в случае $\rho_1 < d < \rho_2$ складывается из (1.26) и (1.24). (В последнем выражении следует заменить d на $\bar{\rho}_1$.)

Рассмотрим, наконец, случай $d > \rho_2$ и вычислим вклад в D от области прицельных параметров $\bar{\rho}_2 < 1/k < d$. Из (1.14) и (1.21) находим

$$D'' = \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^2 \omega_1^2} \overline{|v_1'' - v_2''|^{-1}} \ln \frac{d}{\rho_2} \quad (\rho_2 < 1/k < d). \quad (1.27)$$

При вычислении среднего по максвелловскому распределению интеграл по v'' расходится на нижнем пределе. Это следствие того, что при малой относительной продольной скорости сталкивающихся частиц изменения их координат Δx^0 за время столкновения нельзя считать малыми, и полученные формулы становятся неприменимыми. Интеграл по v'' следует обрезать на некотором значении $v''_{\text{мин}}$:

$$\begin{aligned} \overline{|v''_1 - v''_2|^{-1}} &\approx 2 \left(\frac{m_1}{2\pi T} \right)^{1/2} \int_{v'' > 0} \exp\left(-\frac{m_1 v''^2}{2T}\right) \frac{dv''}{v''} \approx \\ &\approx 2 \left(\frac{m_1}{2\pi T} \right)^{1/2} \ln \sqrt{\frac{2T'}{m_1 v''_{\text{мин}}{}^2}}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Из (1.27) и (1.28) следует

$$D'' = 2\sqrt{2\pi} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2} \ln \frac{d}{\rho_2} \cdot \ln \sqrt{\frac{2T'}{m_1 v''_{\text{мин}}{}^2}} \quad (\rho_2 < 1/k < d) \quad (1.29)$$

Прежде чем обосновать величину параметра обрезания $v''_{\text{мин}}$, полезно установить физический смысл полученных результатов. Положение частицы в магнитном поле определяется выражением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 - \frac{1}{\omega} [\mathbf{h}\mathbf{v}], \quad (1.30)$$

где \mathbf{r}^0 — координата ларморовского центра; \mathbf{h} — единичный вектор в направлении \mathbf{H} ; \mathbf{v} — скорость частицы. При близких столкновениях положение сталкивающихся частиц практически не меняется и из (1.30) следует при этом $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}^0 - \frac{1}{\omega} [\mathbf{h}\Delta \mathbf{v}] = 0$, т. е. $(\Delta \mathbf{r}^0)^2 = \frac{1}{\omega^2} (\Delta v_{\perp})^2$. Таким образом, при близких столкновениях изменение скоростей сталкивающихся частиц приводит к изменению координат центров кривизны и, в конечном счете, к диффузии ларморовских кружков. Этот механизм перестает работать при далеких столкновениях, так как для них изменение скоростей есть экспоненциально малый эффект. При далеких столкновениях появляется другой механизм диффузии: дрейф частицы в кулоновском поле своего партнера по столкновению. Дрейфовая скорость $v_{\text{др}} = \frac{E}{H}$. В нашем случае электрическое поле $E \sim \frac{e_2}{R^2}$, где R ($\sim 1/k$) — расстояние между кружками. Считая, что столкновение происходит за время R/v'' , найдем для Δx^0

$$\Delta x^0 \sim v_{\text{др}} \frac{R}{v''} \sim \frac{ce_2}{Rv''H} = \frac{e_1 e_2}{m_1 \omega_1 v'' R}, \quad (1.34)$$

откуда для коэффициента диффузии

$$D \sim \int \overline{(\Delta x^0)^2 n_2 |v''|} d\sigma \sim \frac{e_1^2 e_2^2}{m_1^2 \omega_1^2 v''^2} n_2 |v''| \int \frac{2\pi R dR}{R^2} = \\ = \frac{2\pi e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^2 \omega_1^2} |v''|^{-1} \ln \frac{R_{\max}}{R_{\min}}, \quad (1.32)$$

что совпадает с (1.27). При малых v'' столкновение происходит длительное время и изменение x^0 при столкновении согласно (1.31) может быть велико. Если v'' меньше скорости дрейфа, то время столкновения будет определяться не v'' , а дрейфовой скоростью, поэтому естественно в качестве v''_{\min} взять величину

$$v_{\text{др}} = \frac{|e_1 e_2|}{m_1 \omega_1} k_{\min} k_{\max} \sim \frac{|e_1 e_2|}{m_1 \omega_1} \frac{1}{\bar{v}_2 d} *. \quad (1.33)$$

Мы покажем сейчас, однако, что эффект тройных столкновений приводит к необходимости обрезания на значительно больших относительных скоростях.

При больших прицельных параметрах и малых относительных скоростях v'' время столкновения велико. За это время частицы могут испытывать соударения с посторонними частицами, вследствие которых относительная скорость v'' не остается постоянной и столкновение фактически происходит при некоторой средней величине v'' , которая тем больше, чем длительнее столкновение. Изменение скорости за время свободного пробега τ по порядку величины равно средней скорости $v_0 = \sqrt{\frac{2T}{m_1}}$. Время изменения v'' на величину порядка самой v'' ($< v_0$) равно

$$t \sim \tau \frac{v''}{v_0}. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) определяет минимальное значение относительной скорости, которое может сохраняться в течение времени t . Подставляя в (1.34) вместо t время столкновения t_0 (которое само зависит от v''), получим значение минимальной скорости для данного прицельного параметра R

$$t_0 \sim \frac{R}{v''_{\min}} \sim \tau \frac{v''_{\min}}{v_0}, \quad \text{т. е. } v''_{\min}(R) = \sqrt{\frac{R v_0}{\tau}}. \quad (1.35)$$

* Можно показать, что следует брать среднее геометрическое между дрейфовой скоростью на минимальном и максимальном (в рассматриваемой области) прицельном параметре.

В области прицельных параметров $\rho_2 < R < d$ в качестве среднего значения $v''_{\text{мин}}(R)$ следует взять значение $v''_{\text{мин}}$ при $R \sim \sqrt{\bar{\rho}_2 d}$, т. е.

$$v''_{\text{мин}} \sim \left(\frac{\bar{\rho}_2 d v_0^2}{\tau^2} \right)^{1/4}, \quad (1.36)$$

которое обычно больше (1.33).

Выпишем окончательные выражения для коэффициента диффузии. Из (1.24), (1.26), (1.29), (1.36) следует

$$\begin{aligned} D &= D_0 \ln \frac{Td}{|e_1 e_2|} \quad (d < \rho_1 \ll \rho_2), \\ D &= D_0 \left\{ \ln \frac{T\bar{\rho}_1}{|e_1 e_2|} + \frac{3}{4} \ln \frac{m_2}{m_1} \ln \frac{d}{\bar{\rho}_1} \right\} \quad (\rho_1 < d < \rho_2), \\ D &= D_0 \left\{ \ln \frac{T\bar{\rho}_1}{|l_1 l_2|} + \frac{3}{8} \left(\ln \frac{m_2}{m_1} \right)^2 + \frac{3}{4} \ln \frac{d}{\bar{\rho}_2} \ln \frac{\omega_1 \tau_1 \bar{\rho}_1}{\sqrt{\bar{\rho}_2 d}} \right\} \\ &\quad (\rho_1 \ll \rho_2 < d), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где

$$D_0 = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \frac{e_1^2 e_2^2 n_2}{m_1^{3/2} T^{1/2} \omega_1^2}; \quad \bar{\rho} = \sqrt{\frac{2T}{m\omega^2}}; \quad \tau_1 \sim \frac{\sqrt{m_1 T^3}}{e_1^4 n_1 \ln \frac{T\bar{\rho}_1}{e_1^2}}.$$

§ 2. Неоднородное магнитное поле

2. 1. Динамика частицы. В случае неоднородного магнитного поля фаза частицы на ларморовской орбите уже не является угловой переменной, так как скорость вращения меняется от точки к точке. Роль угловой переменной играет фаза усредненного (за несколько оборотов) вращения частицы ϑ . Роль медленных переменных играют усредненные значения r^0 , v'' и ρ (но не их мгновенные значения). Усредненные по ϑ уравнения движения с учетом только линейных по градиентам членов имеют вид (см., например, [7])

$$\begin{aligned} \dot{v}'' &= -\frac{1}{2} v^{\perp 2} \left(\mathbf{h} \frac{\nabla H}{H} \right), \\ v^{\perp} &= \frac{1}{2} v'' v^{\perp} \left(\mathbf{h} \frac{\nabla H}{H} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\dot{r}^0 = \left\{ v'' - \frac{v^{\perp 2}}{2\omega} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \right\} \mathbf{h} + \frac{v''^2}{\omega} [(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}, \mathbf{h}] - \frac{v^{\perp 2}}{2\omega} \left[\mathbf{h} \frac{\nabla H}{H} \right].$$

Все величины, входящие в (2.1), имеют смысл усредненных по ϑ . $\omega = -\frac{eH}{mc}$ и \mathbf{h} — единичный вектор по направлению

поля ($\mathbf{H} = \mathbf{Hh}$) — теперь зависят от \mathbf{r}^0 . Если вместо v^\perp ввести переменную $I = \frac{mv^{\perp 2}}{2\omega}$, то для нее из (2.1) следует $\dot{I} = 0$ (как и следовало ожидать для переменной действия). Уравнение (2.1) определяют величины \dot{Y}^α , входящие в уравнение (3). Связь «медленных» переменных \mathbf{r}^0 , v'' , v^\perp (I) и фазы ϑ с переменными \mathbf{r} и \mathbf{v} в пренебрежении градиентами магнитного поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}^0 + \frac{v^\perp}{\omega} \mathbf{v} = \mathbf{r}^0 + \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{h} + v^\perp [\mathbf{h}\mathbf{v}] = v''\mathbf{h} + \sqrt{\frac{2I\omega}{m}} [\mathbf{h}\mathbf{v}], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\mathbf{v} = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$ — единичный вектор, перпендикулярный к \mathbf{h} и вращающийся с усредненной частотой ω .

2. 2. *Гидродинамическое приближение.* Умножим уравнение (3) на $\sqrt{G_1}$ и проинтегрируем по I_1 , v_1'' . Используя равенство $n = \int F \sqrt{G} dI dv''$, где n — плотность, получим в левой части (3) $\frac{\partial n}{\partial t}$. Справа исчезнут члены с производными по I_1 и v_1'' . В результате получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}_0 \mathbf{i}_0, \quad (2.3)$$

где плотность потока в трехмерном координатном пространстве \mathbf{i}_0 , как следует из (4), равна

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 &= \int \mathbf{j}^{\mathbf{r}^0} \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' = \int \mathbf{r}_1^0 F_1 \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' + \int [\langle U + U_c \rangle; \mathbf{r}_1^0] \times \\ &\times F_1 \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' - \frac{1}{2} \int (\langle \Delta \mathbf{r}_1^0 \Delta Y_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta} F_2 + \\ &+ \langle \Delta \mathbf{r}_1^0 \Delta Y_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1) \sqrt{G_1 G_2} dY_2 dI_1 dv_1''. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первые два члена в (2.4) дают упорядоченный поток от градиентов магнитного поля и самосогласованного поля. Третий член соответствует диффузионному потоку от столкновений.

Умножим теперь (3) на $\sqrt{G_1} E_1(I_1 v_1'' r_1^0)$, где E_1 — энергия частицы, и проинтегрируем затем по I_1 и v_1'' . Слева получим

при этом $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, где $\varepsilon = \int EF \sqrt{G} dI dv''$ — энергия единицы объема
В правой части

$$\begin{aligned} & - \int E_1 \frac{\partial}{\partial Y_1^\alpha} \left(\sqrt{G_1} j^{\gamma\alpha} \right) dI_1 dv_1'' = - \int E_1 \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\sqrt{G_1} j^j \right) dI_1 dv_1'' - \\ & - \int E_1 \frac{\partial}{\partial v_1''} \left(\sqrt{G_1} j^{\nu''} \right) dI_1 dv_1'' - \int E_1 \frac{\partial}{\partial r_1^0} \left(\sqrt{G_1} j^{r^0} \right). \end{aligned}$$

Проинтегрируем первые два члена по частям, после чего правую часть можно записать в виде

$$\int \frac{\partial E}{\partial Y_1^\alpha} j^{\gamma\alpha} \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' - \frac{\partial}{\partial r_1^0} \int E_1 j^{r^0} \sqrt{G_1} dI_1 dv_1''.$$

В результате получаем уравнение теплового потока

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \right)_{st} - \text{div}_0 \mathbf{q}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \right)_{st} &= \int \frac{\partial E_1}{\partial Y_1^\alpha} j^{\gamma\alpha} \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' = \int [\langle U + U_c \rangle; E_1] F_1 \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' - \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{\partial E_1}{\partial Y_1^\alpha} \left(\langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_1^\beta \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\beta} F_2 + \langle \Delta Y_1^\alpha \Delta Y_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1 \right) \times \\ & \times \sqrt{G_1 G_2} dY_2 dI_1 dv_1'', \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \int E_1 j^{r^0} \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' = \int E_1 \dot{r}_1^0 F_1 \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' + \int E_1 [\langle U + \\ & + U_c \rangle; \mathbf{r}_1^0] F_1 \sqrt{G_1} dI_1 dv_1'' - \frac{1}{2} \int E_1 \left(\langle \Delta \mathbf{r}_1^0 \Delta Y_1^\alpha \rangle \frac{\partial F_1}{\partial Y_1^\alpha} F_2 + \right. \\ & \left. + \langle \Delta \mathbf{r}_1^0 \Delta Y_2^\beta \rangle \frac{\partial F_2}{\partial Y_2^\beta} F_1 \right) \sqrt{G_1 G_2} dY_2 dI_1 dv_1''. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(При получении (2.6) было использовано условие сохранения энергии частицы $\frac{\partial E_1}{\partial Y_1^\alpha} \dot{Y}_1^\alpha = \dot{E}_1 = 0$.)

Уравнение (2.5) выражает собой закон сохранения энергии. Изменение энергии единицы объема, как следует из (2.5), происходит вследствие конвекционного потока \mathbf{q} , а также и без изменения положения ларморовских центров (член $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_{st}$). Последнее может происходить, во-первых, путем передачи энергии частицами другого сорта, а во-вторых,

в результате столкновений с частицами того же сорта, но ларморовские центры которых лежат вне данного объема.

Вследствие малости столкновительного члена ($\sim (\omega\tau)^{-1}$) можно рассмотреть сначала потоки ларморовских кружков и энергии, пренебрегая столкновениями (и самосогласованным полем). Из (2.4) и (2.7) в этом приближении получаем:

$$i^0 = \int \dot{r}^0 F \sqrt{G} dI dv'', \quad q^0 = \int E \dot{r}^0 F \sqrt{G} dI dv''. \quad (2.8)$$

Так как \dot{r}^0 пропорционально градиенту магнитного поля (см. (2.1)), то для \sqrt{G} можно взять значение для однородного поля $\sqrt{G} = m^2\omega$. Используя (2.1), получаем:

$$i^0 = n\bar{v}''h - \frac{n}{m} \bar{I} \left[h \frac{\nabla H}{H} \right] - \frac{n}{\omega} \bar{v}''^2 [h, (h\nabla)h] - \\ - \frac{n}{m} \bar{I} (h \text{ rot } h) h, \quad (2.9)$$

$$q^0 = n\bar{E}v''h - \frac{n}{m} \bar{E} \bar{I} \left[h \frac{\nabla H}{H} \right] - \frac{n}{\omega} \bar{E} \bar{v}''^2 [h, (h\nabla)h] - \\ - \frac{n}{m} \bar{E} \bar{I} (h \text{ rot } h) h, \quad (1.10)$$

где черта означает усреднение по распределению. Для максвелловского распределения (без упорядоченной скорости вдоль H) получаем:

$$i^0 = -\frac{nT}{m\omega} \left\{ \left[h \frac{\nabla H}{H} \right] + [h, (h\Delta)h] + (h \text{ rot } h) h \right\}, \quad (2.11)$$

$$q^0 = \frac{5}{2} T i^0. \quad (2.12)$$

Первый член в (2.11) соответствует магнитному дрейфу, второй член — центробежному.

Потоки, связанные со столкновениями и вызываемые градиентами плотности и температуры, вообще говоря, малы по сравнению с (2.11) и (2.12) как $(\omega\tau)^{-1}$. Однако они могут быть существенны для процессов переноса в направлениях, перпендикулярных к магнитным потокам. Обычно влиянием градиентов магнитного поля на столкновения можно пренебречь, и задача сводится к вычислению столкновительных потоков в однородном магнитном поле. Здесь мы не будем решать эту задачу. Выше было достаточно подробно проведено вычисление коэффициента диффузии. Остальные коэффициенты переноса могут быть вычислены подобным же образом с помощью формул (1.5)—(1.16).

2.3. *Плотность электрического тока.* При решении задач с самосогласованным полем приходится наряду с кинетическим уравнением рассматривать также уравнения Максвелла, в которые входит плотность электрического тока \mathbf{j}^e . Введенная выше величина \mathbf{i} имеет смысл потока ларморовских кружков, поэтому $e\mathbf{i}$ не совпадает с \mathbf{j}^e . Последний складывается из $e\mathbf{i}$ и тока, образуемого вращающимися по ларморовским орбитам зарядами.

Плотность электрического тока в точке \mathbf{r}' определяется выражением

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = e \int f \dot{\mathbf{r}} d\mathbf{p}, \quad (2.13)$$

которое можно записать в виде

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = e \int f \dot{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{p} d\mathbf{r}.$$

Перейдем под интегралом к переменным \mathbf{r}^0 , I , v'' и ϑ . С точностью до $(\omega\tau)^{-1}$ можно считать f не зависящей от ϑ и заменить ее на $F/2\pi$, где F — функция распределения по «медленным» переменным I , v'' и \mathbf{r}^0 . Пренебрегая градиентами магнитного поля и используя (2.2), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = & \frac{e}{2\pi} \int \left(\dot{\mathbf{r}}^0 + \sqrt{\frac{2I\omega}{m}} [\mathbf{h}\mathbf{v}] \delta\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^0 - \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \mathbf{v}\right) \right) \times \\ & \times F \sqrt{G} d\mathbf{r}^0 dI dv'' d\vartheta, \end{aligned}$$

где $\dot{\mathbf{v}}$ исключено согласно равенству $\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{h}\mathbf{v}]\omega$. Разложим δ -функцию в ряд по $\sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sim \rho$. При интегрировании по ϑ линейные члены по $\sqrt{\frac{2I}{m\omega}}$ обратятся в нуль. Ограничиваясь квадратичными членами, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') = & e \int \dot{\mathbf{r}}^0 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^0) F \sqrt{G} dI dv'' d\mathbf{r}^0 - \\ & - e \frac{\partial}{\partial r'_\beta} \int \frac{2I}{m} \langle [\mathbf{h}\mathbf{v}] v_\beta \rangle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}^0) F \sqrt{G} dI dv'' d\mathbf{r}^0. \end{aligned}$$

Первый член есть поток ларморовских кружков $e\mathbf{i}$. Во втором члене усреднение по ϑ (т. е. по \mathbf{v}) с учетом равенства

$$\langle v_\alpha v_\beta \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta) \text{ дает}$$

$$\langle [\mathbf{h}\mathbf{v}]_\alpha v_\beta \rangle = \varepsilon_{\alpha\gamma\delta} h_\gamma \langle v_\delta v_\beta \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} h_\gamma.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^e(\mathbf{r}') &= e\mathbf{i}(\mathbf{r}') + \text{rot}' \int \frac{eI}{m} \mathbf{h} F \sqrt{G} dI dv'' = \\ &= e\mathbf{i} + \text{rot}' \left(\frac{en}{m} \bar{I} \mathbf{h} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для максвелловского распределения

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) = e\mathbf{i}(\mathbf{r}) + c \text{rot} \mathbf{M}, \quad (2.15)$$

где

$$\mathbf{M} = \frac{enT'}{mc\omega} \mathbf{h} = - \frac{nT}{H^2} \mathbf{H}. \quad (2.16)$$

Выражение (2.15) имеет тот же вид, что и связь между микроскопическим током и усредненным макроскопическим током в электродинамике. Вектор \mathbf{M} имеет смысл среднего магнитного момента единицы объема.

Таким образом, при решении задач с самосогласованным полем можно пользоваться усредненным (по ларморовскому вращению) током $e\mathbf{i}$, но рассматривать при этом уравнения Максвелла в диамагнитной среде с намагниченностью \mathbf{M} , т. е. с магнитной проницаемостью

$$\mu = 1 - \frac{4\pi nT}{H^2}. \quad (2.17)$$

2.4. Пример многих быстрых переменных. Возможны такие конфигурации неоднородных магнитных полей, в которых дрейфовые движения ларморовских кружков финитны. Если при этом столкновения настолько редки, что для частоты финитного движения Ω выполняется условие $\Omega\tau \gg 1$, то такое движение также является быстрым и открывается возможность дальнейшего упрощения кинетического уравнения (3) методом исключения быстрых переменных.

Уравнение (3) может быть записано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}^0 \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}^0} + \dot{v}'' \frac{\partial F}{\partial v''} = st(F), \quad (2.18)$$

где $st(F)$ — член, описывающий столкновения и движение в самосогласованном поле. Уравнение (2.18) по форме аналогично обычному уравнению Больцмана (1), но с меньшим числом переменных. Левая часть (2.18) также связана с механическим движением, но теперь не частицы, а ларморовского кружка. При исключении быстрых переменных из уравнения (1) использовалось то обстоятельство, что механическое движение частиц описывается гамильтоновским формализмом. Движение ларморовского кружка (2.4), вообще говоря, не мо-

жет быть описано с помощью гамильтониана. Поэтому исключение быстрых переменных из уравнения (2.18) в общем случае нельзя провести описанным выше методом*. Мы рассмотрим частный случай, когда этот метод оказывается применимым.

Рассмотрим аксиально симметричное магнитное поле, удовлетворяющее условию

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (2.19)$$

Введем систему координат, образованную магнитными силовыми линиями и семейством ортогональных к ним траекторий (существующих при выполнении условия (2.19)). Пусть ось x^3 направлена вдоль \mathbf{H} , x^2 — по углу φ , а x^1 — в направлении от оси. Обозначим через $a_1 a_2 a_3$ коэффициенты Ламэ, отвечающие этим координатам

$$ds^2 = a_1^2 (dx^1)^2 + a_2^2 (dx^2)^2 + a_3^2 (dx^3)^2. \quad (2.20)$$

Компоненты \mathbf{H} по выбранным осям (физические составляющие) равны $H_1 = H_2 = 0$, а $H_3(x^1 x^2) = H$. Условие $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ принимает вид $\frac{\partial}{\partial x^3} (a_1 a_2 H) = 0$. Уравнения движения ларморовского кружка получим из (2.1), рассматривая все векторные операции в криволинейных координатах x^a и учитывая, что H и a_a не зависят от x^2 ,

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= 0; & \dot{x}^2 &= \frac{v''}{\omega} \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{I}{m} \frac{1}{a_1 a_2 H} \frac{\partial H}{\partial x^1}; \\ \dot{x}^3 &= \frac{v'}{a_3}; & v'' &= -\frac{I \omega}{m} \frac{1}{a_3 H} \frac{\partial H}{\partial x^3}; & I &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Переменная I при механическом движении ларморовского кружка остается постоянной и входит в (2.21) только в качестве параметра. Из остальных переменных можно составить две пары канонических переменных и получить уравнения Гамильтона, эквивалентные (2.21). Нетрудно проверить, что переменные

$$\begin{aligned} p_1 &= m \omega a_1 a_2 x^2, & q_1 &= x^1, \\ p_3 &= m a_3 v'', & q_3 &= x^3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

сопряжены и удовлетворяют каноническим уравнениям с функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = I \omega (q_1 q_3) + \frac{p_3^2}{2m a_3^2 (q_1 q_3)}. \quad (2.23)$$

* В общем случае нельзя указать способа отыскания переменных, которые при механическом движении кружка линейно меняются со временем (аналог угловых переменных, по которым следует производить усреднение уравнения).

Переменная p_1 — циклическая, поэтому уравнения движения полностью разрешимы в квадратурах.

Общий характер движения в рассматриваемом случае можно легко понять из (2.21) и (2.23). При движении кружок не сходит с поверхности вращения $x^1 = \text{const}$. На этой поверхности он вращается по координате x^2 (угол φ), причем скорость этого вращения Ω_2 зависит от номера поверхности x^1 и от «широты» x^3 . Кроме того, кружок движется по оси x^3 . Это движение, как легко получить из (2.21), происходит по закону

$$t = \int \frac{a_3 dx^3}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - I\omega)}}, \quad (2.24)$$

где $E = \text{const}$ — полная энергия кружка. Если при $x^3 \rightarrow \pm\infty$ поле падает, то, как видно из (2.24), движение инфинитно. При возрастании поля движение вплоть до некоторого значения полной энергии оказывается финитным [8]. В последнем случае частоту движения обозначим через Ω_3 . Она зависит только от x^1 .

Если выполняется условие $\Omega_2\tau \gg 1$, то переменная x^2 — быстрая и ее можно исключить обычным способом, после чего уравнение будет содержать только оставшиеся медленные переменные. Если, кроме того, выполняется условие $\Omega_3\tau \gg 1$, то быстрой переменной является также фаза колебаний по оси x^3 . В этом случае система будет характеризоваться только тремя переменными, например I , x^1 и E .

В заключение хочу выразить благодарность Г. И. Будкеру, которому принадлежит общая идея данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, см. т. II настоящего издания, стр. 330.
2. С. Т. Беляев, см. настоящий том, стр. 50.
3. S. Chapman, T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge, 1939.
4. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ, **32**, 1176 (1957).
5. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, **7**, 390, (1937).
6. К. М. Watson, *Phys. Rev.*, **102**, 12 (1956).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, М., Гостехиздат, 1955, стр. 367.
8. L. Spitzer, *Physics of fully ionized gases*, N. Y. Interscience Publishers, 1956.

В. В. Бабиков, В. И. Коган

ЛУЧИСТАЯ ТЕПЛОТДАЧА ПЛОТНОЙ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ *

Применительно к проблеме нагрева плотных или конденсированных сред рассчитана теплоотдача слоя плазмы вследствие тормозного излучения при произвольной степени ее непрозрачности. Рассмотрен переход от «прозрачного» излучения к черному.

В настоящей статье рассматривается вопрос о лучистой непрозрачности и лучистой теплоотдаче плотной высокотемпературной плазмы применительно к таким значениям ее плотности, температуры и размеров, когда не осуществляется, вообще говоря, ни один из двух предельных случаев: 1) свободный выход тормозного излучения из всего объема плазмы и 2) черное излучение с поверхности плазмы, в которой излучение сильно заперто. Исследование этого вопроса имеет существенное значение для проблемы разогрева плотных или конденсированных сред до температур, при которых могут возбуждаться термоядерные реакции. Дело в том, что, с одной стороны, теплоотдача механизмом тормозного излучения в широкой области изменения величин является главным слагаемым в полной теплоотдаче плазмы**, а с другой стороны, в значительной части указанной области происходит переход от случая прозрачной среды к случаю «черной» среды.

Поскольку в рассматриваемых условиях (плотность плазмы в интервале $10^{19} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$, температура в интервале $10 \text{ эв} \div 1 \text{ кэв}$) плазма является практически полностью ионизо-

* Работа выполнена в 1955 г.

** См. примечание к таблице.

ванной, основным механизмом поглощения излучения, обуславливающим непрозрачность плазмы, является тормозное поглощение (фотоэффект на «свободных» электронах).

В § 1 вычисляются сечение тормозного поглощения и коэффициенты спонтанного тормозного излучения и поглощения полностью ионизованной плазмы. (Полученные в этом параграфе результаты в основном известны, и их краткий вывод дается лишь для полноты и связности изложения).

В § 2 на примере плоскопараллельного слоя термически однородной плазмы рассчитана лучистая теплоотдача плазмы, как функция плотности, температуры и толщины слоя, и рассмотрен переход от прозрачной среды к черной при изменении этих величин.

В § 3 проводится краткое обсуждение результатов § 2 применительно к нагретой плотной «водородоподобной» среде.

В § 4 вычисляется так называемое росселандовское среднее коэффициента непрозрачности, определяющее коэффициент лучистой теплопроводности непрозрачной среды при наличии локального термодинамического равновесия.

§ 1. Коэффициент поглощения тормозного излучения в плазме

Исходя из принципа детального равновесия, примененного к термодинамически равновесной системе тепловое излучение + газ электронов, можно, зная сечение тормозного излучения, определить сечение обратного ему процесса — тормозного поглощения.

Действительно, рассмотрим такую систему, находящуюся при температуре T^* . В этом случае будут существовать максвелловское распределение электронов по энергиям и планковское распределение интенсивности излучения по частотам:

$$f(E) dE = \frac{2n_e}{\sqrt{\pi} T^3} e^{-\frac{E}{T}} \sqrt{E} dE, \quad (1.1)$$

$$B_\omega d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} d\omega. \quad (1.2)$$

Здесь $f(E)$ — число электронов с энергией E в единице объема; n_e — плотность электронов; B_ω — интенсивность излучения частоты ω в единицу телесного угла.

* Температура всюду выражается в энергетических единицах.

Предположим, что все излучение представляет собой тормозное излучение (это предположение справедливо при температурах, превышающих несколько десятков электрон-вольт); при этом будем различать спонтанное и индуцированное излучение.

Пусть $\sigma_{12}(\omega, E_1)$ — энергия спонтанного тормозного излучения частоты ω (отнесенная к единичному интервалу частоты), испускаемая единичным потоком электронов с энергией E_1 ; $\sigma'_{12}B_\omega$ — то же для индуцированного излучения; $\sigma_{21}(\omega, E_2)$ — энергия, поглощаемая из излучения частоты ω единичной интенсивности одним электроном с энергией E_2 в поле одного ядра Ze . Объем системы принимаем равным единице.

Из принципа детального равновесия следует, что при термодинамическом равновесии энергия излучения с частотой ω , испускаемого электронами энергии E_1 , должна равняться энергии излучения, поглощаемого электронами с энергией $E_2 = E_1 - \hbar\omega$.

Количество излучаемой во всех направлениях энергии равно

$$(\sigma_{12} + \sigma'_{12}B_\omega) A e^{-\frac{E_1}{T}} \sqrt{E_1} v_1 dE_1 d(\hbar\omega) \quad \left(A \equiv \frac{2n_e}{\sqrt{\pi T^3}} \right).$$

Количество поглощаемой энергии определяется в свою очередь как

$$\sigma_{21} A e^{-\frac{E_2}{T}} \sqrt{E_2} dE_2 B_\omega d\omega \cdot 4\pi.$$

Сравнивая эти выражения, получаем:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} e^{-\frac{E_1 - E_2}{T}} \frac{1 + \alpha_{12} B_\omega}{B_\omega} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} v_1, \quad \text{где } \alpha_{12} \equiv \frac{\sigma'_{12}}{\sigma_{12}}.$$

Поскольку $\sigma_{21}(\omega, E_2)$ как сечение элементарного процесса не должно зависеть от температуры, то необходимо должно выполняться равенство

$$\alpha_{12} = \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3},$$

и мы получаем:

$$\sigma_{21}(\omega, E_2) = \sigma_{12}(\omega, E_1) \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} \frac{v_1^2}{v_2}, \quad \hbar\omega = E_1 - E_2. \quad (1.3)$$

Отсюда, используя формулы (24) и (8) работы [1]*, имеем для квазиклассического и борновского приближений соответственно ($|n_1| \equiv \frac{Ze^2}{\hbar v_1}$):

$$|n_1| \gg \frac{1}{2\pi} : \sigma_{21}(\omega, E_2) = \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{\hbar c v_2 m^2 \omega^3}, \quad (1.4')$$

$$|n_1| \ll \frac{1}{2\pi} : \sigma_{21}(\omega, E_2) = \frac{16\pi^2}{3} \times \\ \times \frac{Z^2 e^6}{\hbar c v_2 m^2 \omega^3} \ln \left[\left(1 + \frac{\hbar \omega}{E_2 + \hbar \omega} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_2 + \hbar \omega}} \right)^2 \right] \quad (1.4'')$$

Формула (1.4') впервые была получена Крамерсом [2].

Полное спонтанное излучение и поглощение единицы объема полностью ионизованной, квазинейтральной плазмы с плотностью ионов n (заряд иона Ze), находящейся при температуре T , получают усреднением соответствующих выражений для $v_1 \sigma_{12}$ и σ_{21} по максвелловскому распределению скоростей электронов. Так, коэффициент спонтанного тормозного излучения (отнесенный к единице телесного угла) $j_{\text{сп}}(\omega, T)$ равен

$$T \ll Z^2 \cdot 500 \text{ эв} : j_{\text{сп}}(\omega, T) = \frac{16}{3\sqrt{3}\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \times \\ \times Z^3 a_0^3 n^2 \frac{\chi_1^{3/2}}{T^{1/2}} e^{-\frac{\hbar \omega}{T}}, \quad (1.5')$$

$$T \gg Z^2 \cdot 500 \text{ эв} : j_{\text{сп}}(\omega, T) = \frac{16}{3\pi^{3/2}} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \times \\ \times Z^3 a_0^3 n^2 \frac{\chi_1^{3/2}}{T^{1/2}} e^{-\frac{\hbar \omega}{2T}} K_0 \left(\frac{\hbar \omega}{2T} \right). \quad (1.5'')$$

Здесь $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см — радиус первой борновской орбиты атома водорода; $\chi_1 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,5$ эв — соответствующая энергия ионизации; $K_0(x)$ — модифицированная функция Ганкеля нулевого порядка (функция Макдональда).

* Используемая в [1] величина dW связана с σ_{12} соотношением $\sigma_{12} = \frac{dW}{d\omega}$.

Для коэффициента поглощения плазмы получаем, соответственно, *

$$T \ll Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } k(\omega, T) = b(T) \left(\frac{T}{\hbar\omega} \right)^3, \quad (1.6')$$

$$T \gg Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } k(\omega, T) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} b(T) \times \\ \times \left(\frac{T}{\hbar\omega} \right)^3 e^{\frac{\hbar\omega}{2T}} K_0 \left(\frac{\hbar\omega}{2T} \right), \quad (1.6'')$$

где

$$b(T) = \frac{256\pi^{5/2}}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} Z^3 a_0^5 n^2 \left(\frac{\chi_1}{T} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Интегрирование коэффициента излучения $j_{\text{сп}}(\omega, T)$ (умноженного на 4π) по всем частотам дает полную энергию спонтанного излучения, испускаемого в единицу времени единицей объема плазмы,

$$T \ll Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } \Phi_{\text{сп}}(T) = \frac{32\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 Z^3 a_0^2 n^2 c \sqrt{\chi_1 T}, \quad (1.8')$$

$$T \gg Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } \Phi_{\text{сп}}(T) = \frac{64}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 Z^3 a_0^2 n^2 c \sqrt{\chi_1 T}. \quad (1.8'')$$

§ 2. Излучение слоя плазмы

Рассмотрим теперь полностью ионизованную, квазинейтральную, термически однородную плазму температуры T , состоящую из электронов и ионов одного сорта (заряд иона Ze). Исследуем вопрос о степени «запертости» тормозного излучения в плоскопараллельном слое такой плазмы толщиной a и вычислим лучистую теплоотдачу этого слоя.

Вначале вычислим интенсивность излучения I_{\perp} , отнесенную к единице телесного угла, в направлении нормали к границе слоя (выберем нормаль за ось x , см. рис. 1). Результат именно такого расчета наиболее непосредственно характеризует зависимость лучистой теплоотдачи плазменной системы

* Выражения (1.6') и (1.6'') можно получить и непосредственно из (1.5') и (1.5''), если воспользоваться законом Кирхгофа $\frac{j_{\omega}}{k_{\omega}} = B_{\omega}$, где $j_{\omega} = (j_{\omega})_{\text{сп}} \left(1 + \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} B_{\omega} \right)$; с учетом (1.2) это дает $k_{\omega} = (j_{\omega})_{\text{сп}} \times \times \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} e^{\frac{\hbar\omega}{T}}$.

от ее наименьшего размера, что существенно для оценок в случае более сложной геометрии.

Уравнение переноса излучения для рассматриваемого случая имеет вид [4]

$$\frac{dI_{\omega}}{dx} = (j_{\omega})_{\text{сп}} - k'_{\omega} I_{\omega}, \quad (2.1)$$

где I_{ω} — интенсивность излучения частоты ω в единицу телесного угла и k'_{ω} — эффективный коэффициент поглощения (с учетом индуцированного испускания), удовлетворяющий соотношениям

$$\frac{(j_{\omega})_{\text{сп}}}{k'_{\omega}} = B_{\omega}(T),$$

и

$$k'_{\omega} = k_{\omega} \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right). \quad (2.2)$$

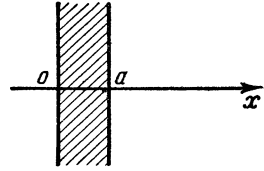


Рис. 1.

Решением уравнения (2.1) с граничным условием $I_{\omega}(0) = 0$ (мы вычисляем поток излучения в одну сторону) является

$$I_{\omega}(x, T) = \left(1 - e^{-k'_{\omega}x}\right) B_{\omega}(T), \quad (2.1')$$

так что на границе $x = a$ полная интенсивность излучения в направлении нормали к поверхности слоя равна

$$I_{\perp}(a, T) = \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-k'_{\omega}a}\right) B_{\omega} d\omega. \quad (2.3)$$

Введем подстановку $x = \frac{\hbar\omega}{T}$ и определим безразмерные параметры

$$\alpha = a \cdot b(T), \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \alpha. \quad (2.4)$$

Как видно из (1.6'), $b(T)$ имеет смысл коэффициента поглощения k для фотонов энергии $\hbar\omega = T$, а a — толщины слоя, измеренной в длинах свободного пробега такого фотона.

Справедливость формулы (2.3) не связана с предположениями о конкретных свойствах среды и о механизме испускания и поглощения излучения, а основывается только на законе Кирхгофа*. В применении к тормозному излучению в плазме эта формула, согласно § 1, переписывается соответ-

* Мы пренебрегли отличием показателя преломления плазмы от единицы; для рассматриваемых частот, удовлетворяющих условию $\omega \gg (4\pi n_e e^2/m)^{1/2}$, это законно.

ственно для квазиклассического и борновского случаев в виде

$$T \ll Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } I_{\perp}(\alpha, T) = \frac{T^4}{4\pi^3 c^2 \hbar^3} \times \\ \times \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{x^2} (1 - e^{-x})} \right] \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad (2.5')$$

$$T \gg Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } I_{\perp}(\beta, T) = \frac{T^4}{4\pi^3 c^2 \hbar^3} \times \\ \times \int_0^{\infty} \left[1 - e^{-\frac{\beta}{x^3} (1 - e^{-x})} e^{\frac{x}{2}} K_0\left(\frac{x}{2}\right) \right] \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (2.5'')$$

При больших и малых значениях параметров α , β можно получить соответствующие разложения для интегралов, входящих в (2.5') и (2.5''). Так, вычисление методом перевала для значений $(3\alpha)^{1/4} \gg 3$ ($\alpha \gg 27$) показывает, что в этом случае

$$T \ll Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } I_{\perp}(\alpha, T) \approx B(T) \left\{ 1 - \frac{15}{\pi^{7/2} \sqrt{2}} \times \right. \\ \left. \times (3\alpha)^{7/6} e^{-\frac{4}{3} (3\alpha)^{1/4}} \left[1 - \frac{9}{16} (3\alpha)^{-1/4} \right] \right\}, \quad (2.6')$$

$$T \gg Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } I_{\perp}(\beta_1, T) \approx B(T) \left\{ 1 - \frac{75}{7\pi^{7/2}} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{7}{2} \beta_1\right)^{7/6} e^{-\frac{9}{7} \left(\frac{7}{2} \beta_1\right)^{2/3}} \left[1 - \frac{523}{720} \left(\frac{7}{2} \beta_1\right)^{-2/3} \right] \right\}, \quad (2.6'')$$

где $\beta_1 = \beta \sqrt{\pi} \approx a$, а

$$B(T) = \frac{\pi}{60} \frac{T^4}{c^2 \hbar^3} \quad (2.7)$$

— отнесенная к единице телесного угла интенсивность черного излучения при температуре T (закон Стефана—Больцмана).

При $\alpha \ll 1$ разложение по полуцелым степеням α дает: (ср. (1.8)):

$$T \ll Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } I_{\perp}(\alpha, T) \approx \frac{1}{4\pi^3} \frac{T^4}{c^2 \hbar^3} \alpha \left[1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \alpha^{1/2} \right], \quad (2.8')$$

$$T \gg Z^2 \cdot 500 \text{ эв: } I_{\perp}(\beta, T) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_{\perp}(\alpha, T). \quad (2.8'')$$

Выражения (2. 6')—(2. 8'') показывают, что наибольшее отличие величин лучистой теплоотдачи, рассчитанных с помощью борновского и квазиклассического приближений, имеет место в предельном случае большой прозрачности ($\alpha \ll 1$), когда из плазмы выходят также и кванты малых частот (их много именно в борновском случае); впрочем, это отличие составляет всего 11%: $\frac{I_B}{I_{KB}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1,11$. При запираии излучения, т. е. при увеличении α , это различие становится еще меньше.

Отметим, что интегральное излучение «запирается» существенно медленнее, чем любая данная монохроматическая «линия» спектра (как $1 - e^{-x^{1/4}}$, вместо $1 - e^{-x}$). Это обусловлено сильной дисперсией коэффициента тормозного поглощения.

Истинная лучистая теплоотдача I единицы поверхности плоского плазменного слоя получается интегрированием по полусфере выражения (2. 3), в котором a заменено на путь, проходимый лучом в плазме, $\frac{a}{\cos \vartheta}$ (ϑ — угол между направлением луча и нормалью к поверхности) Результат (для квазиклассического случая) имеет следующий вид:

$$I(\alpha, T) \approx \frac{\pi^2}{60} \frac{T^4}{c^2 \hbar^3} \left\{ 1 - \frac{15}{2\pi^{1/2}} (3\alpha)^{1/2} e^{-\frac{4}{3}(3\alpha)^{1/4}} \right\}, \quad (3\alpha)^{1/4} \gg 3,$$

$$I(\alpha, T) \approx \frac{1}{2\pi^2} \frac{T^4}{c^2 \hbar^3} \alpha \left(\ln \frac{1}{\alpha} + 1,58 \right), \quad \alpha \ll 1.$$

Таким образом, даже при малых α полная теплоотдача не просто пропорциональна объему слоя ($V \propto a \propto \alpha$), а содержит еще $\ln \frac{1}{\alpha}$, отражающий тот факт, что для лучей, выходящих под углами к нормали, близкими к 90° , слой нельзя считать тонким; излучение в этих направлениях запирается.

§ 3. Обсуждение результатов

Результаты § 2 показывают, что квазиклассическое приближение обеспечивает хорошую точность практически во всей интересующей нас области температур водородной плазмы ($10 \div 10^3$ эв).

Поэтому кривая (рис. 2), построенная с помощью формулы (2. 5') и представляющая отношение интенсивности излучения I_\perp к интенсивности черного излучения при той же температуре (т. е. степень «запертости» излучения) в зависи-

мости от безразмерного параметра $\alpha \propto Z^3 n^2 a T^{-1/2}$, приближенно справедлива также и в области высоких температур*.

Пользуясь этой кривой, можно, в частности, проследить, как запирается излучение при данных размерах плазмы по мере понижения температуры или как возрастает лучистая теплоотдача плазменной системы по мере увеличения ее размеров при данных температуре и плотности. Для качественного рассмотрения достаточно, впрочем, и полученных выше аналитических предельных выражений.

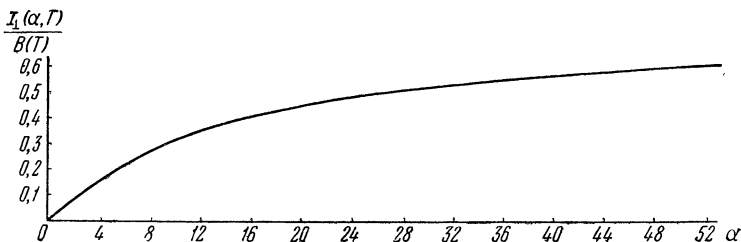


Рис. 2. Отношение интенсивности излучения I_{\perp} плоского слоя плазмы к интенсивности черного излучения $B(T)$ той же температуры как функция параметра $\alpha = 2,03 \cdot 10^{-37} \cdot Z^3 \cdot \frac{n^2 a}{T^{1/2}}$ (a — в см, n — в см $^{-3}$, T — в эв).

Так, например, задавшись температурой T и числом частиц N в столбике плазмы сечением 1 см 2 и высотой, равной толщине слоя a , проследим, как изменяется теплоотдача такого слоя в зависимости от a или от плотности. Параметр, определяющий степень запертости излучения, $\alpha \propto a n^2 T^{-1/2} \propto \frac{1}{a}$, так как $n = \frac{N}{a}$. Поэтому с увеличением a уменьшается α , а следовательно, и интенсивность излучения. При уменьшении a интенсивность излучения увеличивается, стремясь к пределу — интенсивности черного излучения. Качественная картина этой зависимости показана на рис. 3.

Если же задаться числом частиц N и размером a , но увеличивать температуру T , то α станет уменьшаться (так как $\alpha \propto T^{-1/2}$) и излучение начнет «отпираться», теплоотдача будет пропорциональна \sqrt{T} , а не T^4 , как для черного тела (рис. 4).

* К тому же для тормозного излучения водорода «квазиклассическая» область простирается до температур порядка нескольких сотен электрон-вольт и тем самым (см. таблицу) охватывает практически все случаи, когда слой плазмы не является тривиальным образом прозрачным.

Вид кривой рис. 2 показывает, что не существует характерного значения (или сравнительно узкого интервала значений) параметра α , при котором происходил бы ясно выраженный переход от «прозрачной» области к «черной». Поэтому при составлении приводимой ниже таблицы за такое «переходное» значение условно принято $\alpha \approx 25$, что отвечает

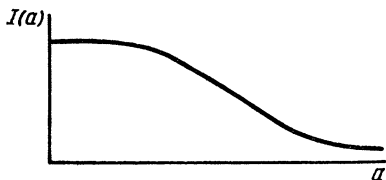


Рис. 3.

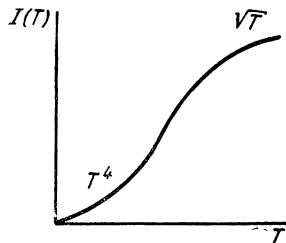


Рис. 4.

интенсивности $I_{\perp}(T)$, равной половине интенсивности черного излучения той же температуры.

Так как $\alpha = a \cdot b(T)$, то, полагая $\alpha = 25$, получаем для «получерной» толщины слоя $a_{1/2}$:

$$a_{1/2} = 1,23 \frac{1}{Z^3} 10^{38} \frac{T^{3/2}}{n^2} (\text{см}). \quad (3.1)$$

В таблице приведены округленные значения выраженной в сантиметрах толщины $a_{1/2}$ слоя водородной плазмы, для которой при данных n и T интенсивность излучения равна 50% интенсивности черного излучения. Значения $a_{1/2}$ вычислены по формуле (3.1).

$n(\text{см}^{-3})$	$T(\text{эв})$				
	10	30	100	300	1000
10^{19}	4000	—	—	—	—
10^{20}	40	2000	—	—	—
10^{21}	0,4	20	1000	—	—
10^{22}	$4 \cdot 10^{-3}$	0,2	10	600	—
10^{23}	—	$2 \cdot 10^{-3}$	0,1	6	400

Примечание. Данные таблицы характеризуют полную лучистую теплоотдачу водородной плазмы, строго говоря, лишь при $T \gg 30$ эв, когда можно пренебречь вкладом рекомбинационного излучения [3] и соответственно обычного фотоэффекта.

Как видно из формулы (3.1), при увеличении атомного номера Z характерный размер $a_{1/2}$ быстро уменьшается.

Исследование формулы (2.1') показывает, что в зависимости от степени запертости меняется спектральное распределение выходящего излучения. Так, при сильной непрозрачности имеет место планковское распределение (рис. 5):

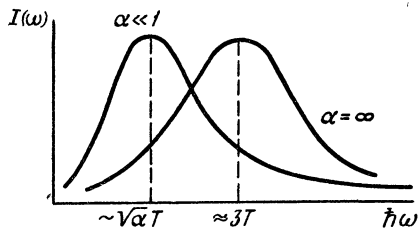


Рис. 5.

$$I_{\omega}(a, T) \approx B_{\omega}(T).$$

В случае же сильной прозрачности максимум интенсивности тормозного излучения плазмы смещается в сторону малых частот (рис. 5). Самые мягкие кванты запираются

даже при сильной прозрачности, так как $k'_{\omega} \propto \omega^{-2}$ для малых частот ($\hbar\omega \ll T$).

Пренебрежение комптоновским рассеянием фотонов в плазме оправдывается тем, что при интересующих нас размерах $a \sim (1 \div 100)$ см длина свободного пробега фотона относительно рассеяния велика: $l_c = \frac{1}{n\sigma_c} \gg a$, вплоть до плотностей $n \sim 10^{22}$ см⁻³ ($\sigma_c = \frac{8\pi}{3}(e^2/mc^2)^2$ — томсоновское сечение рассеяния на свободном электроне). При дальнейшем увеличении плотности комптоновским рассеянием можно пренебречь по сравнению с фотопоглощением ввиду того, что $\frac{1}{l_c} \propto n$, а $\frac{1}{l_{\text{погл}}} \propto n^2$ и вплоть до $T \sim 10^3 \text{ эв}$ $l_{\text{погл}} \ll l_c$. В качестве $l_{\text{погл}}$ разумно взять величину $\frac{1}{k'_{\omega}}$ для частот, интегрально существенных (см. рис. 5), т. е. для $\hbar\omega \leq 3T$.

Дальнейшему повышению температуры при столь больших плотностях отвечают нереально огромные давления. Таким образом, проведенное выше вычисление лучистой теплоотдачи плазмы приближенно справедливо для всех практически интересных температур и плотностей.

§ 4. Росселандовский коэффициент непрозрачности

Коэффициент непрозрачности, усредненный по Росселанду (широко используемый в астрофизике), $\bar{k}(T)$, определяется равенством

$$\frac{1}{\bar{k}(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{k'_{\omega}} \frac{\partial B_{\omega}(T)}{\partial T} d\omega}{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\omega}(T)}{\partial T} d\omega}. \quad (4.1)$$

Физический смысл этого коэффициента таков: $\frac{1}{\bar{k}}$ есть средняя длина свободного пробега фотона в среде, определяющая по обычным газокинетическим формулам коэффициент теплопроводности этой среды при наличии локального термодинамического равновесия. В астрофизических приложениях требуется большая точность в определении $\bar{k}(T)$.

Ниже приводятся значения $\frac{1}{\bar{k}(T)}$, вычисленные аналитически для квазиклассического и борновского приближений. В квазиклассическом случае имеем:

$$\frac{1}{\bar{k}(T)} \Big|_{\text{квас}} = \frac{196,5}{b(T)}. \quad (4.2)$$

Выражение (4.2) было получено ранее (см., например, [4]); поэтому приведем вычисление лишь для борновского случая, когда коэффициент k'_{ω} определяется выражениями (1.6''), (2.2). Подстановка их в (4.1) дает:

$$\frac{1}{\bar{k}(T)} \Big|_{\text{борн}} = \frac{15}{4\sqrt{3}\pi^3} \frac{1}{b(T)} \int_0^{\infty} \frac{y^7 e^{\frac{3}{2}y} dy}{(e^y - 1)^3 K_0\left(\frac{y}{2}\right)}. \quad (4.3)$$

Делаем предположение (подтверждаемое результатом), что в полученном интеграле существенны значения $y \gg 1$. Воспользовавшись асимптотическим выражением функции $K_0\left(\frac{y}{2}\right)$:

$$K_0\left(\frac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{y}{2}} \left[1 - \frac{1}{4y} + \dots \right],$$

и заменяя $(e^y - 1)$ на e^y , приводим интеграл (4.3) к виду

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{15}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{17}{2}\right).$$

Следующая поправка, возникающая за счет второго члена в разложении K_0 , приводится также к Γ -функции, и в результате получаем (с точностью $\approx 3\%$):

$$\frac{1}{\bar{k}(T)} \Big|_{\text{борн}} = \frac{620}{\bar{b}(T)}. \quad (4.4)$$

Сравнение (4.2) с (4.4) показывает, что при вычислении росселандовского коэффициента непрозрачности требуется более внимательное разграничение борновской и квазиклассической областей температур, чем при вычислении лучистой теплоотдачи термически однородной плазмы (§ 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бабиков, см. т. II настоящего издания, стр. 226.
 2. H. A. Kramers, Phil. Mag. 46, 836 (1923).
 3. В. И. Коган, см. настоящий том, стр. 99.
 4. С. Чандрасекар. Введение в учение о строении звезд, М., ИЛ, 1950.
-

В. И. Коган

РЕКОМБИНАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ *

Вычисляется полная интенсивность рекомбинационного излучения разреженной водородной плазмы как функция электронной температуры (с учетом рекомбинации на возбужденные уровни). Производится сравнение этой величины с интенсивностью тормозного излучения.

Основным механизмом лучистой теплоотдачи высокотемпературной ($T \geq 100$ эв) водородной плазмы является, как известно, тормозное излучение электронов. С другой стороны, при достаточно низких электронных температурах (порядка нескольких электрон-вольт) преобладающий вклад в полное излучение дают процессы рекомбинации электронов с ионами. Поэтому для сравнительно невысоких температур (\leq десятков электрон-вольт) представляет интерес вычисление интенсивности рекомбинационного излучения и сравнение ее с интенсивностью тормозного излучения.

Указанное вычисление осложняется тем, что при небольших энергиях электронов уже нельзя пренебрегать вкладом процессов рекомбинации на возбужденные уровни атома водорода **, а для сечений этих процессов теория дает лишь чрезвычайно труднообозримые выражения (комбинации полных гипергеометрических функций). Тем не менее, с помощью результатов имеющихся численных расчетов для некоторых частных

* Работа выполнена в 1956 г.

** Это обстоятельство следует отметить, поскольку из обзорной литературы (см., например, [1]) можно вынести впечатление, что эти процессы вообще никогда не играют заметной роли.

случаев можно приближенно провести требуемое вычисление для всей практически интересной области температур.

Рассмотрим разреженную, полностью ионизованную, квазинейтральную, для общности «водородоподобную» плазму с температурой электронов $kT_e \equiv T$, плотностью ионов N_i и плотностью электронов $N_e = ZN_i$. Энергия рекомбинационного излучения, испускаемого единицей объема такой плазмы в единицу времени, равна

$$Q_{\text{рек}} = N_i N_e \left\langle v \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \left(\chi_n + \frac{mv^2}{2} \right) \right\rangle \equiv N_i N_e f(T), \quad (1)$$

где v — скорость электрона; σ_n — эффективное сечение рекомбинации с захватом электрона на атомный уровень с главным квантовым числом n ; χ_n — соответствующая энергия ионизации; угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению электронных скоростей.

Подставляя $\chi_n = \frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2 n^2} = \frac{\chi_1}{n^2}$, запишем $f(T)$ из (1) в виде

$$f(T) = \chi_1 \left\langle v \sigma_1 \frac{\sum_n \frac{1}{n^2} \sigma_n}{\sigma_1} \right\rangle + \frac{m}{2} \left\langle v^3 \sigma_1 \frac{\sum_n \sigma_n}{\sigma_1} \right\rangle. \quad (2)$$

Для σ_1 — сечения рекомбинации на основной уровень — имеется простое аналитическое выражение [1, 2]

$$\sigma_1 = \frac{28\pi^2 \hbar e^2}{3m^2 c^3} \frac{\alpha^6}{(\alpha^2 + 1)^2} \frac{e^{-4\alpha \arctg \frac{1}{\alpha}}}{1 - e^{-2\pi\alpha}}, \quad (3)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{Ze^2}{\hbar v}. \quad (4) *$$

Точное вычисление отношений, входящих в (2), представляет большую трудность. Однако для них можно получить простые приближенные формулы, используя:

а) результаты численных расчетов Весселя [2] для σ_1 , σ_2 , σ_3 в интервале $\alpha = 1 \div 5$;

б) результаты расчетов Бейтса, Мессии и др. [3] для сечений рекомбинации на большое число уровней (вплоть до $n \sim 10 \div 20$) при очень малых энергиях ($\alpha = 7 \div 20$);

в) формулы борновского приближения ($\alpha \rightarrow 0$), см., например, [2].

* Для водорода энергия электрона ϵ связана с α соотношением $\epsilon(\text{эВ}) = 13,5/\alpha^2$.

Графическая интерполяция этих результатов дает следующие приближенные формулы, справедливые во всей практически интересной области $\alpha = 0 \div 3$ (т. е. для водорода при $\frac{mv^2}{2} \geq 1,5 \text{ эв}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_1} \approx 1,20 + 0,28\alpha, \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sigma_n \approx 1,04 + 0,04\alpha. \quad (6)$$

Подставляя (3), (5) и (6) в (2) и выполняя усреднение по максвелловскому распределению (при этом удобно перейти к интегрированию по $\frac{1}{\alpha} \equiv u$), окончательно получаем

$$f(T) = \frac{2^9 \pi^{3/2} Z^3 e^8}{3 \hbar^2 m c^3} F\left(\frac{\chi_1}{T}\right), \quad (7)$$

где $\frac{\chi_1}{T} = \frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2 T} = \frac{13,5 Z^2}{T(\text{эв})}$, и функция F имеет вид

$$F(x) = x^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-xu^2} \frac{e^{-\frac{4}{u} \text{arc tg } u}}{(1+u^2)^2 \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{u}}\right)} \times \\ \times (1,20u^3 + 0,28u^2 + 1,04u + 0,04) du. \quad (8)$$

Табуляция этой функции дает

x	0	0,15	0,25	0,5	1	2	4	6	8	10
$10^2 \cdot F(x)$	0	0,531	0,697	0,976	1,34	1,82	2,51	3,06	3,54	3,98

При $x \rightarrow 0$ (т. е. при $T \gg \chi_1$) в интеграле (8) существенны, очевидно, лишь большие значения u , так что $F(x) \approx x^{3/2} \frac{1,20}{2\pi} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0,17x$, и $f(T)$ сводится к формуле борновского приближения. Однако этот «линейный» участок функции $F(x)$ очень мал, и в своей основной части она может быть удовлетворительно аппроксимирована функцией $\text{const} \cdot \sqrt{x}$; это позволяет получить удобное для оценок аналитическое выражение

интенсивности рекомбинационного излучения. Подстановка в (7), (1) и переход к удобным единицам дают:

$$Q_{\text{рек}} \approx 5 \cdot 10^{-24} Z^4 N_{i, \text{см}^{-3}} N_{e, \text{см}^{-3}} T_{\text{эв}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{сек}} \right). \quad (9)$$

Для интенсивности тормозного излучения в той области температур, где она сравнима с интенсивностью $Q_{\text{рек}}$, можно

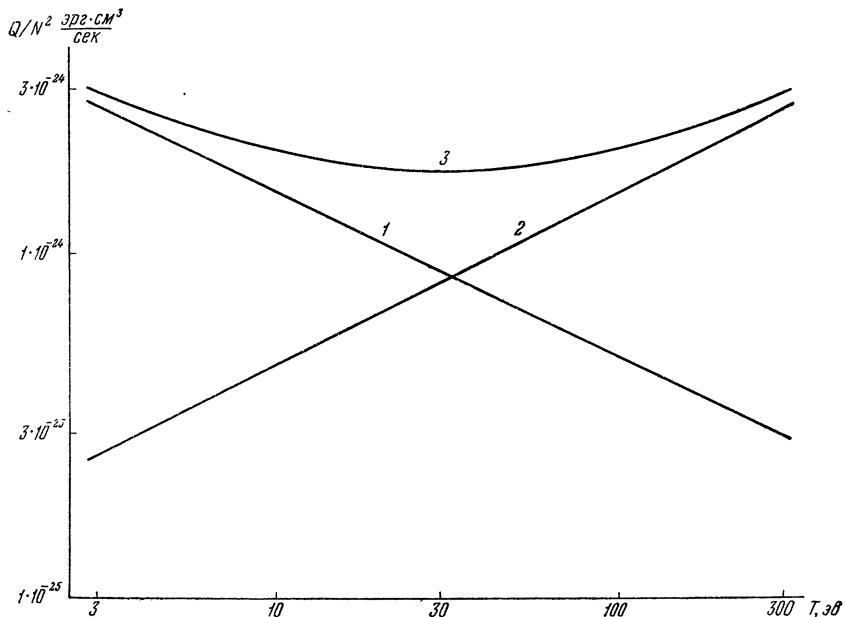


Рис. 1.

воспользоваться квазиклассическим выражением (см., например, [4]):

$$Q_{\text{торм}} \approx 1,5 \cdot 10^{-25} Z^2 N_{i, \text{см}^{-3}} N_{e, \text{см}^{-3}} T_{\text{эв}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{сек}} \right). \quad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что для водорода ($Z=1$) интенсивности рекомбинационного и тормозного излучений сравниваются при $T \approx 33$ эв.

На рис. 1 представлены кривые интенсивности рекомбинационного (1) и тормозного (2) излучений водорода (и их сумма, 3) в зависимости от электронной температуры, согласно (1) и (10). Суммарная кривая имеет минимум при $T \approx 30$ эв. Разумеется, действительные потери на излучение могут зна-

чительно отличаться от представленных на рис. 1, если плотность заряженных частиц N сама сильно зависит от температуры (например, при $T \ll \chi_1$, когда $N \propto e^{-\chi_1/T}$).

Рассмотренная нами обычная (одноквантовая) рекомбинация является основным механизмом рекомбинации лишь при сравнительно небольших температурах и плотностях плазмы. При больших T и N , как показали Беляев и Будкер [5], преобладает многоквантовая рекомбинация. Из [5] следует, что область преобладания обычной рекомбинации определяется неравенством

$$N^{3/8} T^{5/16} \ll 10^7 \quad (11)$$

(здесь и ниже все оценки относятся к водороду, N выражено в см^{-3} , T — в эв) и, следовательно, в рассматриваемой области температур (рис. 1) ограничивается сверху плотностями порядка ($10^{16} \div 10^{17}$) см^{-3} .

Далее, в рамках проведенного рассмотрения, учет высших уровней по формулам (5), (6) имеет смысл лишь в том случае, если наибольшее из существенных квантовых чисел n , равное по порядку величины α [3], все еще меньше, во-первых, квантового числа, начиная с которого исчезает (вследствие штарк-эффекта в полях ионов) дискретный спектр [6] и, во-вторых, квантового числа, отвечающего радиусу орбиты, сравнимому со средним межчастичным расстоянием. Нетрудно убедиться, что отсюда получаются, соответственно, следующие ограничения: 1) $T_{эв} \gg 10^{-5} N^{1/15}$, 2) $T_{эв} \gg 10^{-7} N^{1/3}$; оба они являются (в рассматриваемой области величин) более слабыми, чем ограничение (11).

Приношу благодарность Г. И. Бирюк за выполнение табуляции функции $F(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, М., ОНТИ, 1935.
2. W. Wessel, Ann. d. Phys. 5, 611 (1930).
3. D. R. Bates, R. A. Buckingham, H. S. W. Massey, J. J. Unwin, Proc. Roy. Soc. A, 170, 322 (1939).
4. В. И. Коган, А. Б. Мигдал, см. т. I настоящего издания, стр. 172.
5. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 41.
6. D. R. Inglis, E. Teller, Astrophys. J., 90, 439 (1939).

Б. А. Трубинов

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ*

В работе получен релятивистский тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ плазмы, находящейся в однородном магнитном поле. Тепловое движение электронов описывается распределением Максвелла (релятивистским), столкновения их полагаются редкими. С помощью дисперсионного уравнения исследуется распространение волн вида $\sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$. Для частот $\omega \gg \left| \frac{e\mathbf{H}}{mc} \right|$ вычисляются излучательные способности среды и коэффициенты поглощения «обыкновенных» и «необыкновенных» волн.

§ 1. Введение

Диэлектрические свойства релятивистской плазмы, находящейся в магнитном поле, впервые были рассмотрены в работе В. М. Галицкого и А. Б. Мигдала [1]. На основе квантовомеханического подхода авторы получили для тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ выражение, имеющее вид громоздких рядов. В настоящей работе та же проблема рассмотрена классически, причем для $\epsilon_{\alpha\beta}$ удалось получить относительно простую формулу.

Напомним кратко основные формулы, описывающие дисперсию волн в анизотропной среде. Полагая в уравнениях Максвелла все величины пропорциональными $\sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, введем обычным образом комплексный тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, связывающий Фурье-компоненты тока в плазме и поля волны,

$$j_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} (-i\omega E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega)) \quad (1.1)$$

* Работа выполнена в 1956 г.

(под дважды встречающимися индексами подразумевается суммирование по x, y, z).

Связь ω с \mathbf{k} найдем, приравнявая нулю детерминант

$$\Delta = |\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) - N^2(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)| = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ — единичный вектор в направлении распространения волны, а $N = \frac{ck}{\omega}$ — показатель преломления.

Используя антисимметричный по всем индексам единичный псевдотензор третьего ранга $e_{\alpha\beta\gamma}$ ($e_{xyz} = 1$), можно произвольный трехрядный определитель записать в тензорной форме

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix} = \frac{1}{3!} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} a_{\gamma\nu}. \quad (1.3)$$

Применяя эту запись к «дисперсионному уравнению» (1.2), приведем его к виду

$$\Delta = (n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta) N^4 + \frac{B}{2} N^2 + |\varepsilon_{ik}| = 0, \quad (1.4)$$

где

$$B = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\beta\beta} + e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\beta\mu} n_\gamma n_\nu.$$

В анизотропном случае колебания плазмы невозможно разделить на чисто продольные и поперечные. Из уравнения $\text{div } \mathbf{D} = 0$, которое для Фурье-компонент имеет вид $n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0$, находим (полагая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp$):

$$(\mathbf{nE}) = \mathbf{E}_\parallel = - \frac{(n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta\perp})}{(n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta)}. \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что продольная компонента поля будет преобладающей ($E_\parallel \gg E_\perp$) в случае

$$(n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta) \approx 0. \quad (1.6)$$

Это соотношение является приближенным уравнением, определяющим дисперсию «плазменных» волн.

Показатель преломления в этом случае велик: $N \gg 1$.

Решения «электромагнитного» типа получим, рассматривая уравнение (1.4) как биквадратное относительно N . Решая его, находим:

$$N_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 16 (n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta) |\varepsilon_{ik}|}}{4 (n_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta)} \quad (1.7)$$

(знак минус соответствует «обыкновенной» волне, плюс — «необыкновенной»).

В частном случае, когда $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon'_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon'_{\alpha\beta} \ll 1$, т. е. когда поляризуемость среды мала, в формуле (1.7) можно произвести разложение по $\varepsilon'_{\alpha\beta}$. С точностью до членов первого порядка малости получим для показателей преломления следующие выражения:

$$N_{1,2} = 1 + \frac{1}{4} [(\varepsilon'_{\alpha\alpha} - n_{\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta} n_{\beta}) \pm \sqrt{(\varepsilon'_{\alpha\alpha} - n_{\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta} n_{\beta})^2 - 2e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} n_{\alpha} n_{\lambda} \varepsilon'_{\beta\mu} \varepsilon'_{\gamma\nu}}]. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.5) в этом случае принимает вид $E_{\parallel} \approx \approx -n_{\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta} E_{\beta\perp}$, так что $E_{\parallel} \ll E_{\perp}$. Поскольку $N_{1,2}$ при этом близки к единице, то наибольший интерес представляют мнимые части показателей преломления $N_{1,2} = p_{1,2} + iq_{1,2}$, определяющие коэффициенты поглощения $\alpha_{1,2} = 2 \frac{\omega}{c} q_{1,2}$. В частности, из формулы (1.8) можно получить простое выражение для суммы

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \frac{\omega}{c} \text{Im} (N_1 + N_2) = \frac{\omega}{c} (\delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha} n_{\beta}) \text{Im} \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

Здесь $\text{Im} \varepsilon_{\alpha\beta}$ — антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости, поделенная на i (как известно, произвольный тензор всегда можно представить в виде суммы эрмитова и антиэрмитова тензоров;

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{(e)} + \hat{\varepsilon}^{(a)} = \text{Re} \hat{\varepsilon} + i \text{Im} \hat{\varepsilon}.$$

В условиях термодинамического равновесия коэффициенты $\alpha_{1,2}$ связаны законом Кирхгофа с излучательными способностями среды $\eta_{1,2}$:

$$\frac{\eta_{1,2}}{\alpha_{1,2}} = I_0 = \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2}, \quad (1.10)$$

I_0 — равновесный поток излучения в пустоте. Рассматриваемое приближение, когда $N_{1,2}$ можно считать близкими к единице, справедливо лишь при достаточно больших частотах.

В настоящей работе рассмотрены колебания с частотами $\omega \gg \Omega$, где $\Omega = \left| \frac{eH}{mc} \right|$ — гиромагнитная частота электронов.

Имея в виду плазму с достаточно высокой температурой, мы будем использовать для описания электронов релятивистское кинетическое уравнение. Следует указать, однако, что учет

релятивистских эффектов может представлять интерес даже при сравнительно низких температурах плазмы. Так, например, доплеровское уширение отдельных линий спектра, излучаемого плазмой в направлении, строго перпендикулярном к магнитному полю, является чисто релятивистским эффектом.

§ 2. Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$

Для определения $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ необходимо вычислить плотность тока в плазме \mathbf{j} , вызываемого проходящей волной вида $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Будем исходить из релятивистского кинетического уравнения для функции распределения электронов $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}}f) + \left\{ (e\mathbf{E}^{(1)} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}^{(1)})] \nabla_{\mathbf{p}}f) \right\} = St[f]. \quad (2. 1)$$

Решение этого уравнения ищем в виде $f = f^{(0)} + f^{(1)}$, причем $f^{(1)} \sim E^{(1)}$, $H^{(1)}$. Здесь $f^{(0)}$ — равновесное распределение Максвелла

$$f^{(0)} = ce^{-\frac{\varepsilon}{T}}; \quad \int f^{(0)} d\mathbf{p} = n; \quad \varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (2. 2)$$

Решение линеаризованного уравнения для поправки $f^{(1)}$ удобно искать в виде

$$f^{(1)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} f^{(0)} \cdot \Phi(\mathbf{p}). \quad (2. 3)$$

Направим ось z вдоль магнитного поля \mathbf{H} , а ось x — вдоль \mathbf{k}_{\perp} и перейдем к цилиндрическим координатам в пространстве импульсов ($p_x = p_{\perp} \cos \varphi$, $p_y = p_{\perp} \sin \varphi$). Тогда уравнение для $\Phi(\mathbf{p})$ примет вид

$$i \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \frac{\omega + i\nu}{\Omega} - \frac{p_{\parallel} k_{\parallel} + p_{\perp} k_{\perp} \cos \varphi}{m\Omega} \right) \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{-e}{mT\Omega} (\mathbf{p}\mathbf{E})_{\varphi} \quad (2. 4)$$

Введем удобные безразмерные величины

$$a = \frac{\varepsilon}{mc^2} \cdot \frac{\omega + i\nu}{\Omega} - \frac{p_{\parallel} k_{\parallel}}{m\Omega}, \quad b = \frac{p_{\perp} k_{\perp}}{m\Omega}. \quad (2. 5)$$

Решением уравнения (2. 4) является функция

$$\Phi(\mathbf{p}) = -\frac{e}{mT\Omega} e^{i(a\varphi - b \sin \varphi)} \int_{\varphi}^{\text{const}} e^{-i(a\psi - b \sin \psi)} (\mathbf{p}\mathbf{E})_{\psi} d\psi, \quad (2. 6)$$

где $(\mathbf{p}\mathbf{E})_{\psi} = p_{\parallel} E_z + p_{\perp} E_x \cos \psi + p_{\perp} E_y \sin \psi$.

Постоянную на верхнем пределе нужно определить из условия периодичности функции $\Phi(\mathbf{p})$ по углу φ . Нетрудно

убедиться, что ее следует положить равной $(-\infty)$. Интеграл сходится при этом вследствие наличия мнимой добавки к частоте $(\omega + i\nu)$. Если теперь положить $\psi = \varphi - \xi$, то получим

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{e}{mT\Omega} \int_0^{\infty} e^{i a \xi - i b [\sin(\xi - \varphi) + \sin \varphi]} (\mathbf{pE})_{\psi = \varphi - \xi} d\xi. \quad (2.7)$$

Здесь периодичность по φ очевидна. Определим плотность тока электронов

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) &= e \int \mathbf{v} f_{k, \omega}^{(1)} d\mathbf{p} = e \int \mathbf{p} \frac{c^2}{\varepsilon} f^{(0)} \Phi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \\ &= \frac{e^2 c^2}{mT\Omega} \int_0^{\infty} d\xi \int \mathbf{p} (\mathbf{pE})_{\psi = \varphi - \xi} f^{(0)} e^{i a \xi - i b [\sin(\xi - \varphi) + \sin \varphi]} \frac{d\mathbf{p}}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда, пользуясь соотношением (1.4), найдем тензор $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$. Его можно представить в двух видах. Если выполнить сначала интегрирование по ξ , а затем по углу φ , то получим:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2 c^2}{\omega \Omega T m} \int \frac{d\mathbf{p}}{\varepsilon} f^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi_{\alpha\beta}^{(n)}(b)}{n-a}, \quad (2.9)$$

где введены обозначения

$$\pi_{\alpha\beta}^{(n)}(b) = \begin{pmatrix} \left(p_{\perp} \frac{nJ_n}{b}\right)^2 & -i \left(p_{\perp} \frac{nJ_n}{b}\right) (p_{\perp} J'_n) & \left(p_{\perp} \frac{nJ_n}{b}\right) (p_{\parallel} J_n) \\ i (p_{\perp} J'_n) \left(p_{\perp} \frac{nJ_n}{b}\right) & (p_{\perp} J'_n)^2 & i (p_{\perp} J'_n) (p_{\parallel} J_n) \\ (p_{\parallel} J_n) \left(p_{\perp} \frac{nJ_n}{b}\right) & -i (p_{\parallel} J_n) (p_{\perp} J'_n) & (p_{\parallel} J_n)^2 \end{pmatrix}$$

Здесь $J_n \equiv J_n(b)$ и $J'_n(b)$ — функции Бесселя и их производные.

Можно, однако, проинтегрировать выражение (2.8) вначале по импульсам, пользуясь формулой (k_n — функции Макдональда)

$$I(s, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{1+p^2}} e^{-s\sqrt{1+p^2} - i(\mathbf{r}\mathbf{p})} = \frac{K_1(\sqrt{s^2 + \mathbf{r}^2})}{\sqrt{s^2 + \mathbf{r}^2}} \quad (2.10)$$

и производными от нее. Опуская громоздкие выкладки, приводим результат $\left(\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}, \mu = \frac{mc^2}{T}\right)$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{\omega_p^2}{\omega \Omega} \times$$

$$\times \frac{\mu}{K_1''(\mu) - K_1(\mu)} \int_0^{\infty} (d\xi) \left\{ \frac{K_2(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^2} T_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{K_3(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^3} T_{\alpha\beta}^{(2)} \right\}, \quad (2.11)$$

где $R = \left(\mu - i\xi \frac{\omega + iv}{\Omega} \right)^2 + \left(\frac{ck_{\perp}}{\Omega} \right)^2 2(1 - \cos \xi) + \left(\frac{ck_{\parallel}}{\Omega} \right)^2 \xi^2$ и тензоры $T_{\alpha\beta}^{(1,2)}$ имеют вид

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{c^2}{\Omega^2} \begin{pmatrix} (k_{\perp} \sin \xi)^2 & -k_{\perp} \sin \xi k_{\perp} (1 - \cos \xi) & k_{\perp} \sin \xi k_{\parallel} \xi \\ k_{\perp} (1 - \cos \xi) k_{\perp} \sin \xi & -k_{\perp}^2 (1 - \cos \xi)^2 & k_{\perp} (1 - \cos \xi) k_{\parallel} \xi \\ k_{\parallel} \xi k_{\perp} \sin \xi & -k_{\parallel} \xi k_{\perp} (1 - \cos \xi) & k_{\parallel}^2 \xi^2 \end{pmatrix}.$$

Из формул (2.9) или (2.11) можно путем очевидных предельных переходов получить нерелятивистские выражения для тензора $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$. Удобство использования той или иной из формул (2.11) и (2.9) связано с тем, что спектр излучения плазмы состоит из бесконечного числа дискретных линий — гармоник, размытых вследствие доплер-эффекта. В том случае, когда линии хорошо разрешены одна от другой (низкие температуры и начальные гармоники спектра), удобно пользоваться выражением (2.9), в котором каждый член ряда описывает одну линию. Если же линии эффективно перекрываются, налагаясь друг на друга и образуя непрерывный спектр (большие температуры и высокие гармоники), то предпочтительнее использовать выражение (2.11), в котором все гармоники суммированы.

§ 3. Поглощение электромагнитных волн

Рассмотрим вопрос о поглощении релятивистской плазмой волн «электромагнитного» типа. Ввиду сложности общего дисперсионного уравнения (1.4) ограничимся случаем высоких частот $\omega \gg \left| \frac{eH}{mc} \right|$, для которых поляризуемость плазмы достаточно мала. Это позволит нам использовать приближенные уравнения (1.8), определяющие показатели преломления $N_{1,2}$, когда последние близки к единице. Полученный нами в § 2 тензор $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ записан для случая, когда волновой вектор \mathbf{k} лежит в плоскости XZ ; поэтому свертки

тензоров, входящие в формулы (1.8), можно представить в виде

$$\varepsilon'_{\alpha\alpha} - n_{\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta} n_{\beta} = E_1 + E_2, \quad e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} \varepsilon'_{\alpha\lambda} \varepsilon'_{\beta\mu} n_{\gamma} n_{\nu} = 2E_1 E_2 + 2E_3^2, \quad (3.1)$$

где введены обозначения

$$E_1 = \cos^2 \theta \varepsilon'_{xx} - 2 \cos \theta \sin \theta \varepsilon'_{xz} + \sin^2 \theta \varepsilon'_{zz}, \quad E_2 = \varepsilon'_{yy}, \\ E_3 = \cos \theta \varepsilon'_{xy} + \sin \theta \varepsilon'_{yz}.$$

Таким образом, формулы (1.8) примут вид

$$N_{1,2} = 1 + \frac{1}{4} [(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 - 4E_3^2}]. \quad (3.2)$$

Используя для $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ выражения (2.9), получим:

$$E_{1,2,3} = \frac{4\pi e^2 c^2}{\omega \Omega m T} \int_{\varepsilon} \frac{d\mathbf{p}}{\varepsilon} f^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_{1,2,3}^{(n)}(b)}{n-a}, \quad (3.3)$$

где $\chi_1^{(n)} = \left(\cos \theta \frac{p_{\perp} n}{b} - p_{\parallel} \sin \theta \right)^2 J_n^2(b)$,

$\chi_2^{(n)} = (p_{\perp} J_n')^2$, $\chi_3^{(n)} = -i \left(\cos \theta \frac{p_{\perp} n}{b} - p_{\parallel} \sin \theta \right) p_{\perp} J_n' J_n$.

Из другой записи тензора $\hat{\varepsilon}$ (формула (2.11)) аналогично получим:

$$E_{1,2,3} = i \frac{\omega_p^2}{\omega \Omega} \frac{\mu}{K_1''(\mu) - K_1(\mu)} \int_0^{\infty} (d\xi) \left\{ \frac{K_2(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^2} \psi_{1,2,3}^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{K_3(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^3} \psi_{1,2,3}^{(2)} \right\}, \quad (3.4)$$

где

$$\psi_1^{(1)} = \cos^2 \theta \cos \xi + \sin^2 \theta, \quad \psi_1^{(2)} = \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\xi - \sin \xi)^2,$$

$$\psi_2^{(1)} = \cos \xi, \quad \psi_2^{(2)} = - \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \sin^2 \theta (1 - \cos \xi)^2,$$

$$\psi_3^{(1)} = -\cos \theta \sin \xi, \quad \psi_3^{(2)} = \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \cos \theta \sin^2 \theta (1 - \cos \xi) (\xi - \sin \xi).$$

Используем последние выражения для определения коэффициентов поглощения $\alpha_{1,2}$ в той области частот, в которой размытые вследствие эффекта Доплера отдельные линии сли-

ваются в сплошной спектр. Наиболее просто определить сумму $\alpha_1 + \alpha_2$, поскольку из формул (1.9) и (3.4) имеем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\omega_p^2}{c\Omega} \frac{\mu}{K_1'' - K_1} \operatorname{Re} \int_0^\infty (d\xi) \left\{ \frac{K_2(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^2} (\psi_1^{(1)} + \psi_2^{(1)}) - \right. \\ \left. - \frac{K_3(\sqrt{R})}{(\sqrt{R})^3} (\psi_1^{(2)} + \psi_2^{(2)}) \right\}, \quad (3.5)$$

где $R = \mu^2 - 2i\mu \frac{\omega}{\Omega} \xi + \sin^2 \theta \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 (2 - 2 \cos \xi - \xi^2)$.

Нетрудно убедиться, что действительная часть интеграла в (3.5) связана с четными слагаемыми подынтегрального выражения, а мнимая — с нечетными.

Поэтому

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty (d\xi) \{id\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (d\xi) \{id\}.$$

Нерелятивистские и слабoreлятивистские температуры ($\mu = \frac{mc^2}{T} \gg 1$) можно рассмотреть, используя для $K_2(\sqrt{R})$ и $K_3(\sqrt{R})$ их асимптотические выражения

$$K_n(\sqrt{R}) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{R}}} e^{-\sqrt{R}}, \quad K_1''(\mu) - K_1(\mu) \approx e^{-\mu} \left(\frac{2}{\mu} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad (3.6)$$

поскольку при этом существенны значения $R \gg 1$.

Интеграл (3.5) вычисляем методом перевала. Точка перевала ξ_0 определяется уравнением $R'(\xi_0) = 0$, которое приводится к виду

$$\xi_0 - \sin \xi_0 \cong -i \frac{\mu\Omega}{\omega \sin^2 \theta},$$

и в ней

$$R_0 = \left[\frac{\omega}{\Omega} \sin \theta (\cos \xi_0 - 1) \right]^2 - \mu^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \gg 1. \quad (3.7)$$

Таким путем из формул (3.5) и (3.4) получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cong \frac{\omega_p^2}{c\Omega} \sqrt{\pi\mu} \frac{\mu^2}{R_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_0''(\xi_0)}} e^{\mu - \sqrt{R_0}} \times \\ \times \left(1 + \frac{\sin^2 \theta + \cos \xi_0 (1 + \cos^2 \theta)}{\sqrt{R_0}} + \dots \right). \quad (3.8)$$

При $\frac{\omega}{\mu\Omega} \gg 1$ находим

$$\xi_0 = i \frac{3}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\kappa} \right)^{1/3} \left[1 - \frac{3}{20 \sin^2 \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\kappa} \right)^{2/3} + \dots \right], \text{ где } \kappa = \frac{9\omega}{2\mu\Omega}.$$

Это дает:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\theta) + \alpha_2(\theta) &\cong \\ &\cong \frac{\omega^2}{c\Omega} \sqrt{\pi\mu} \frac{3}{2\kappa} e^{-\mu} \left[\left(\frac{\kappa}{\sin \theta} \right)^{1/3} - 1 + \frac{9 \left(1 - \frac{10}{9} \cos^2 \theta \right)}{20 \sin^2 \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\kappa} \right)^{1/3} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Получение аналогичных приближенных выражений отдельно для $\alpha_1(\theta)$ и $\alpha_2(\theta)$ затруднительно из-за наличия квадратного корня в формуле (3.2). Если, однако, волна распространяется строго перпендикулярно к магнитному полю, так что $\theta = \frac{\pi}{2}$, то, как видно из формул (3.4), $E_3 = 0$. В этом случае

$$N_{об}^{(\perp)} = 1 + \frac{1}{2} (E_2)_{\theta = \frac{\pi}{2}}, \quad N_{необ}^{(\perp)} = 1 + \frac{1}{2} (E_1)_{\theta = \frac{\pi}{2}}. \quad (3.10)$$

Поскольку сумма $\alpha_1 + \alpha_2$ (см. (3.9)) быстро спадает при отклонении θ от значения $\frac{\pi}{2}$ (примерно как $\exp \left[-\mu \frac{\kappa^{1/3}}{6} \times \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]$), то можно ограничиться рассмотрением углов, достаточно близких к $\frac{\pi}{2}$, для которых $E_3 \approx 0$ и приближенно справедливы формулы (3.10). Тогда

$$\alpha_{об}(\theta) \approx \frac{\omega}{c} \text{Im } E_2, \quad \alpha_{необ}(\theta) \approx \frac{\omega}{c} \text{Im } E_1. \quad (3.11)$$

Сюда входят те же интегралы, которые встречаются при выводе формулы (3.9), и, таким образом, можно получить наряду с (3.9)

$$\alpha_{об}(\theta) \approx \frac{\alpha_{необ}(\theta)}{\sqrt{R_0}} = \frac{\alpha_{необ}(\theta)}{\mu \left(\frac{\kappa}{\sin \theta} \right)^{1/3}} (\chi \gg 1). \quad (3.12)$$

Последнее соотношение справедливо для углов, удовлетворяющих неравенству $\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 < \frac{6}{\mu\kappa^{1/3}}$.

Все выведенные здесь формулы для коэффициентов поглощения можно также получить (в условиях, когда $|1 - N_{1,2}| \ll \ll 1$) с помощью закона Кирхгофа $\eta_{1,2} = I_0 \alpha_{1,2}$, имея в виду, что при $\theta = \frac{\pi}{2}$ в суммарной интенсивности излучения элек-

трона, движущегося по спирали в магнитном поле ($\omega_0 = \frac{eH}{mc} \sqrt{1-\beta^2}$),

$$\frac{dI}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \sum_1^{\infty} \left[\left(\frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_n^2 + \beta_{\perp}^2 J_n'^2 \right] \times \\ \times \delta [n\omega_0 - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)], \quad (3.13)$$

члены, содержащие функции Бесселя $J_n \equiv J_n \left(\frac{\omega}{\omega_0} \beta_{\perp} \sin \theta \right)$, описывают излучение «обыкновенных», а члены с J_n' — «необыкновенных» волн.

Рассмотренный нами случай $\frac{\omega}{\mu\Omega} \gg 1$ соответствует настолько высоким частотам, что дискретные линии, размытые вследствие доплер-эффекта, перекрываются и сливаются в непрерывный спектр.

Действительные части коэффициентов преломления, которые в случае волны, распространяющейся перпендикулярно к полю, выражаются формулами

$$\operatorname{Re}(N_{об}) = 1 + \frac{1}{2} (\operatorname{Re} E_2)_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad \operatorname{Re}(N_{необ}) = 1 + \\ + \frac{1}{2} (\operatorname{Re} E_1)_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad (3.14)$$

не сводятся к достаточно простым выражениям.

Их рассмотрение, однако, не представляет интереса, поскольку мы ограничились случаем, когда величины $N_{1,2}$ близки к единице.

В условиях, когда это ограничение не выполняется, формулы становятся необозримо сложными.

Автор приносит глубокую благодарность академику М. А. Леонтовичу за интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, см. т. I настоящего издания, стр. 161.

В. С. Кудрявцев

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

Вычислена функция распределения электронов в двухтемпературной плазме для случая, когда электроны путем столкновений получают энергию от ионов с высокой температурой, а излучают ее при движении в магнитном поле. Рассмотрен стационарный процесс, плазма считается полностью прозрачной.

§ 1. Введение

Наличие внешнего магнитного поля в плазме приводит к излучению, вызываемому движением зарядов по окружности. В нерелятивистском случае полная интенсивность излучения частицы с зарядом e и массой m в магнитном поле H подсчитывается по формуле [1]

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3c^5 m^2} v_{\perp}^2, \quad (1.1)$$

где v_{\perp} — компонента скорости частицы, перпендикулярная полю; c — скорость света. Угловое распределение излучения обладает аксиальной симметрией относительно направления магнитного поля H .

В термически равновесной плазме изучают в основном электроны, которые имеют большую скорость и меньшую массу, чем ионы. Рассмотрим стационарный процесс, при котором электроны путем столкновений получают энергию от ионов, находящихся при заданной температуре T_i , и теряют энергию на излучение при движении в магнитном поле. Предполагается, что испущенное излучение обратно в плазму не возвращается.

* Работа выполнена в 1956 г.

§ 2. Вывод уравнения

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов f в пространственно однородной плазме, находящейся в однородном магнитном поле, имеет вид

$$\frac{df}{dt} + \nabla_v \left(\frac{\mathbf{F}}{m} f \right) + \nabla_v \mathbf{j} = 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{F} — торможение излучением — сила, равная интенсивности излучения в данном направлении, деленной на скорость, и направленная против компоненты скорости v_{\perp} ; m — масса электрона; \mathbf{j} — поток частиц в скоростном пространстве, обусловленный столкновениями. Торможение излучением и функция распределения аксиально симметричны относительно направления магнитного поля, поэтому сила Лоренца не входит в уравнение (2.1).

В стационарном случае, учитывая условие убывания f и j при $v \rightarrow \infty$, получаем:

$$\frac{\mathbf{F}}{m} f + \mathbf{j} = 0. \quad (2.2)$$

В дальнейшем ради упрощения вычислений предполагается, что функция распределения f сферически симметрична по направлению скорости. Тогда среднее значение величины v_{\perp}^2 равно $\frac{2}{3} v^2$, и уравнение (2.2) принимает вид

$$-\frac{4e^4 H^2}{9c^5 m^3} v f + j = 0. \quad (2.3)$$

Поток частиц \mathbf{j} в пространстве скоростей вычислен Ландау [2]; для сферически симметричного распределения по скоростям поток j равен [3]

$$j = \frac{\pi e^2 L}{m} \frac{8\pi}{3} \sum e^{j^2} \int_0^{\infty} \left(f \frac{df}{m'v'dv'} - f' \frac{df}{mvdv} \right) \times \\ \times \left(\frac{v+v'-|v-v'|}{2} \right)^3 \frac{v'dv'}{v^2}. \quad (2.4)$$

где L — кулоновский логарифм, суммирование производится по всем сортам частиц, сталкивающихся с данными. Величина $\left(\frac{v+v'-|v-v'|}{2} \right)^3$ равна v^3 при $v' < v$ и v'^3 при $v' > v$.

Электронную функцию распределения представим в виде

$$f_e = f_0 (1 + \varphi), \quad (2.5)$$

где $f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}}$ — максвелловское распределение электронов с плотностью n и температурой T_e . В качестве ионной функции распределения возьмем максвелловское распределение $f_i = n \left(\frac{M}{2\pi T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{Mv^2}{2T_i}}$ с той же плотностью n и температурой T_i ; M — масса иона. Подставляя эти распределения в выражение для потока (2.4) и ограничиваясь линейными по φ членами, находим:

$$j = \frac{\pi e^4 L}{m} \frac{8\pi}{3} \left\{ \int_0^\infty \left[f_0 f'_0 \left(\frac{d\varphi'}{mv' dv'} - \frac{d\varphi}{m v dv} \right) - f_0 f'_i \frac{d\varphi}{m v dv} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) f_0 f'_i \right] \left(\frac{v + v' - |v - v'|}{2} \right)^3 \frac{v' dv'}{v^2} \right\}. \quad (2.6)$$

Для функции распределения f в первом члене формулы (2.3) можно подставить полное значение из (2.5). Подставляя в (2.3) еще и j из (2.6), после некоторых преобразований получаем:

$$\int_0^\infty \left[e^{-x'} \left(\frac{d\varphi'}{dx'} - \frac{d\varphi}{dx} \right) - \left(\frac{M T_e}{m T_i} \right)^{3/2} e^{-\frac{M T_e}{m T_i} x'} \frac{d\varphi}{dx} + \right. \\ \left. + \left(\frac{M T_e}{m T_i} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) e^{-\frac{M T_e}{m T_i} x'} (1 + \varphi) \right] \times \\ \times \left(\frac{x + x' - |x - x'|}{2} \right)^{3/2} dx' - \alpha x^{3/2} (1 + \varphi) = 0, \quad (2.7)$$

где x — безразмерная переменная

$$x = \frac{mv^2}{2T_e}, \quad (2.8)$$

а α — безразмерная величина, равная

$$\alpha = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{L} \frac{n}{mc^2} \left(\frac{T_e}{mc^2} \right)^{3/2}. \quad (2.9)$$

В членах, содержащих множитель $1 + \varphi$ в (2.7), можно пренебречь величиной φ , которая мала по сравнению с единицей. Тогда интегро-дифференциальное уравнение (2.7) примет вид

$$\int_0^x x'^{3/2} e^{-x'} \frac{d\varphi'}{dx'} dx' + x^{3/2} \int_0^\infty e^{-x'} \frac{d\varphi'}{dx'} dx' -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[F(x) + \frac{mT_i}{MT_e} F\left(\frac{MT_e}{mT_i} x\right) \right] \frac{d\varphi}{dx} + \\
& + \frac{mT_i}{MT_e} \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) F\left(\frac{MT_e}{mT_i} x\right) - \alpha x^{3/2} = 0, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x x'^{3/2} e^{-x'} dx' + x^{3/2} \int_0^\infty e^{-x'} dx' = \frac{3}{2} \int_0^x x'^{1/2} e^{-x'} dx' = \\
&= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} - \int_x^\infty x'^{3/2} e^{-x'} dx' + x^{3/2} \int_x^\infty e^{-x'} dx'. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

При не слишком малых значениях x , таких, что $\frac{MT_e}{mT_i} x \gg 1$, для функции $F\left(\frac{MT_e}{mT_i} x\right)$ можно взять асимптотическое разложение из второй строки (2.11)

$$F(x) \sim \frac{3}{4} \sqrt{\pi} - \frac{3}{2} x^{1/2} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \dots\right). \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.10) для $F\left(\frac{MT_e}{mT_i} x\right)$ первый член разложения (2.12) и пренебрегая в коэффициенте при $\frac{d\varphi}{dx}$ величиной $\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{mT_i}{MT_e}$ по сравнению с $F(x)$ (что справедливо при $x \gg \gg \left(\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{mT_i}{MT_e}\right)^{2/3}$), получим более простое уравнение

$$\begin{aligned}
& \int_0^x x'^{3/2} e^{-x'} \frac{d\varphi'}{dx'} dx' + x^{3/2} \int_x^\infty e^{-x'} \frac{d\varphi'}{dx'} dx' - F(x) \frac{d\varphi}{dx} + \\
& + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{mT_i}{MT_e} \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) - \alpha x^{3/2} = 0. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Величина $\frac{T_i}{T_e}$ связана с величиной α , определяющейся внешним магнитным полем, условием стационарности потока энергии от ионов к электронам и от электронов в излучение; это условие получается умножением уравнения (2.13) на e^{-x} и интегрированием по dx от 0 до ∞ . При этом интегралы от первых трех членов взаимно сокращаются (как это видно с учетом (2.11) после изменения порядка интегрирования), а остальные члены дают:

$$\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{mT_i}{MT_e} \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) \int_0^\infty e^{-x} dx - \alpha \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = 0. \quad (2.14)$$

Вычислив значения интегралов в (2.14), получим

$$\alpha = \frac{mT_i}{MT_e} \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right). \quad (2.15)$$

Приравняв выражения (2.9) и (2.15) для α и исключив величину $\frac{H^2}{n}$ с помощью известного соотношения

$$\frac{H^2}{8\pi} = n(T_i + T_e), \quad (2.16)$$

получим

$$\left(\frac{T_e}{mc^2}\right)^{5/2} = \frac{3}{8\sqrt{2}\pi} \frac{m}{M} L \frac{1 - \frac{T_e}{T_i}}{1 + \frac{T_e}{T_i}}. \quad (2.17)$$

Положив $mc^2 = 500$ кэв, $\frac{m}{M} = \frac{1}{3600}$, $L = 20$ и взяв даже $T_i = 1$ Мэв, из (2.17) имеем $T_e = 37$ кэв, причем при таких больших T_i , T_e почти не зависит от T_i . При этом величина α по формуле (2.15) имеет порядок $\sim 0,01$, при $T_i = 50$ кэв $\alpha \sim 10^{-4}$.

§ 3. Решение уравнения

Интегро-дифференциальное уравнение (2.13) можно привести к дифференциальному уравнению. Для этого к уравнению (2.13) применим оператор $\frac{d}{dx} \left(x^{-1/2} \frac{d}{dx} \right)$; в результате получим

$$\frac{3}{2} e^{-x} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx} \left[x^{-1/2} \frac{d}{dx} \left(F \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] = 0. \quad (3.1)$$

При этом неоднородная часть уравнения (2.13) исчезает.

Уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} + \left(\frac{2}{F(x)} \frac{dF}{dx} - \frac{1}{2x} \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \quad (3.2)$$

Решая уравнение (3.2) относительно функции $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, находим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = C \frac{\sqrt{x}}{F^2(x)}. \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3) по x , получаем

$$\frac{d\varphi}{dx} = C \int \frac{\sqrt{x'}}{F^2(x')} dx' + C_1, \quad (3.4)$$

где C и C_1 — постоянные. Постоянная C может быть определена из того условия, чтобы решение (3.4) удовлетворяло интегральному уравнению (2.13) с условием (2.15), т. е.

$$\int_0^x x'^{3/2} e^{-x'} \frac{d\varphi'}{dx'} dx' + x^{3/2} \int_x^\infty e^{-x'} \frac{d\varphi'}{dx'} dx' - F(x) \frac{d\varphi}{dx} + \alpha \left(\frac{3}{4} \sqrt{\pi} - x^{3/2} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) в (3.5), используя выражение для $F(x)$ из (2.11), меняя порядок интегрирования, после некоторых преобразований получим

$$C = -\frac{9}{8} \sqrt{\pi} \alpha. \quad (3.6)$$

Подставим это значение в (3.4) и проинтегрируем еще раз по x ; в результате имеем

$$\varphi = -\frac{9}{8} \sqrt{\pi} \alpha \int dx' \int \frac{\sqrt{x''}}{F^2(x'')} dx'' + C_1 x + C_2. \quad (3.7)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия сохранения числа частиц

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi x^{1/2} dx = 0 \quad (3.8)$$

и из условия равенства средней энергии величине $\frac{3}{2} nT_e$

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi x^{3/2} dx = 0. \quad (3.9)$$

Приближенное значение для функции распределения φ можно получить, подставив в (3.7) для $F(x)$ первый член асимптотического разложения (2.12)

$$\varphi = -\frac{8}{15} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} x^{3/2} + C_1 x + C_2. \quad (3.10)$$

Определяя C_1 и C_2 с помощью (3.8) и (3.9), имеем

$$\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{8}{15} x^{3/2} + \frac{32}{3\sqrt{\pi}} x - \frac{48}{5\sqrt{\pi}} \right). \quad (3.11)$$

На рис. 1 функция (3.11) изображена пунктирной линией.

Точное численное вычисление постоянных C_1 и C_2 с учетом поведения функции $F(x)$ в (3.7) при малых x дает при $x \gg 1$

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{8}{15} x^{5/2} + 7,1x + 2,2 \right). \quad (3.12)$$

Этим определяется отклонение функции распределения электронов от максвелловской. Функция (3.12) на рис. 1

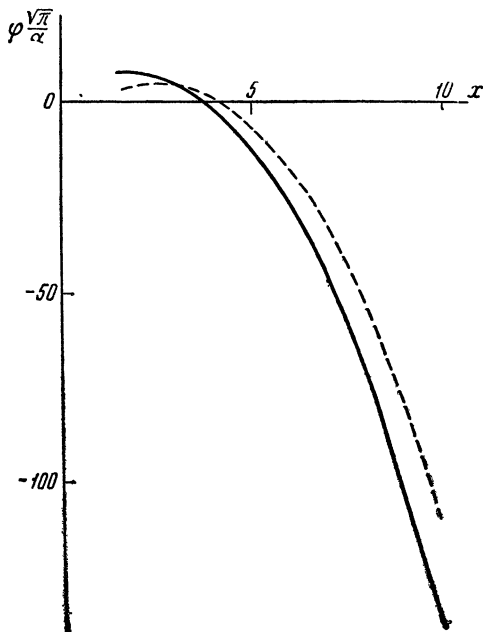


Рис. 1.

изображена сплошной линией. Формула (3.12) справедлива до таких значений x , пока φ мало по сравнению с единицей.

В заключение приношу благодарность Б. Б. Кадомцеву за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, § 73, 1948.
2. Л. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203, (1937).
3. В. С. Кудрявцев, ЖЭТФ (в печати).

Б. А. Трубников, А. Е. Бажанова

МАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СЛОЯ ПЛАЗМЫ *

В работе рассчитано магнитно-тормозное излучение плоского слоя плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле, параллельном границе слоя. Рассматриваются слабoreлятивистские энергии электронов. Расчеты производятся для двух видов распределения электронов по энергиям — максвелловского и обрeзанного максвелловского. Показано, что степень запертости излучения, необходимая для самоподдерживания термоядерной реакции DD , достигается лишь при значительных размерах слоя, лежащих на пределе технических возможностей.

Теоретические расчеты произведены Б. А. Трубниковым. Численные расчеты коэффициентов поглощения $\alpha^{(1,2)}$ и «коэффициентов прозрачности» слоя $\Phi_{\perp}(a)$ выполнены А. Е. Бажановой.

1. При рассмотрении возможностей нагрева плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле, необходимо учитывать наличие сильного магнитно-тормозного радиоизлучения ($\lambda \sim 1$ мм) электронов. Как известно, электрон, движущийся по винтовой линии в магнитном поле, излучает в единицу времени энергию

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \Omega^2 \frac{v_{\perp}^2}{1-\beta^2}, \text{ где } \Omega = \left| \frac{eH}{mc} \right|. \quad (1)$$

Если считать, что электроны обладают нерелятивистскими скоростями и распределены по Максвеллу, то суммарная

* Работа выполнена в 1957 г.

энергия излучения, выходящего за единицу времени из единицы объема плазмы, равна

$$Q_{\text{магн}} = \frac{2e^2}{3c^3} \Omega^2 N \left\langle \frac{p_{\perp}^2}{m^2} \right\rangle_{\text{ср}} = \frac{4e^2}{3c} N \Omega^2 \left(\frac{T_e}{mc^2} \right) \left(1 + \frac{5T_e}{2mc^2} \right) \quad (2)$$

(N — число частиц одного знака в единице объема).

В условиях, когда поглощением можно пренебречь, все это излучение будет выходить из плазмы наружу.

Этот уход энергии оказывается весьма значительным при температурах, необходимых для протекания термоядерных

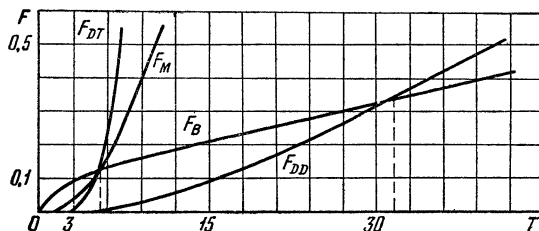


Рис. 1.

реакций. Для сравнения на рис. 1 приведены кривые выхода указанного магнитного излучения (без учета поглощения), обычного тормозного излучения и выделения энергии реакций DD и DT в единичном объеме плазмы в зависимости от температуры, для случая, когда выполнены условия

$$\frac{H^2}{8\pi} = N(T_i + T_e); \quad T_e = T_i. \quad (3)$$

Эти графики построены по формулам (Q в абс. единицах, T в кэВ)

$$\begin{aligned} F_B &= 0,0532 \sqrt{T} \xi_1 (\xi_1 \approx 1), & F_{DD} &= F_{DD}(T), \\ F_{\text{магн}} &= 0,005 \cdot T^2 \xi_2 (\xi_2 \approx 1), & F_{DT} &= F_{DT}(T). \end{aligned} \quad (4)$$

Уход энергии получается из них по формуле $Q = 10^{-22} N^2 F(T)$. Численные значения F_{DD} и F_{DT} взяты из работы Климова и Зубарева [1] (табл. 1).

При температуре $T = 32$ кэВ потеря энергии на тормозное излучение, как известно, сравнивается с ядерным энерговыделением в реакции DD ($Q_{\text{торм}} = Q_{DD}$). При этом магнитное излучение оказывается в 16 раз большим ($Q_{\text{магн}} = 16 Q_{DD}$). При температуре $T = 5$ кэВ совпадают три величины

$$Q_{\text{торм}} = Q_{DT} = Q_{\text{магн}}.$$

Таблица 1

$T_i, \text{кэВ}$	3	5	10	20	30	40	50
$F_{DD} \dots$	—	—	0,039	0,158	0,313	0,485	0,666
$F_{DT} \dots$	0,016	0,12	1,2	5,44	8,8	11,03	12,08

Продолжение

$T_i, \text{кэВ}$	60	70	80	90	100	200	500	1000	2000
$F_{DD} \dots$	0,854	1,045	1,235	1,42	1,61	3,38	6,98	10,7	15,6
$F_{DT} \dots$	—	12,53	—	—	11,76	—	—	—	—

Для реакции DT (смесь дейтерия и трития в отношении 1:1) при выполнении условий (3) существует область температур (от 5 до 46 кэВ), в которой ядерное энерговыделение превышает магнитное излучение. Напротив, для реакции DD магнитное излучение (без учета поглощения) всегда оказывается во много раз превосходящим ядерное энерговыделение.

Условия (3) были приняты нами для ориентировки и могут не выполняться в реальных случаях.

Например, для систем с весьма высокими температурами ионов ($T_i > 100 \text{кэВ}$) можно считать (следуя Г. И. Будкеру [2]), что потери электронов на излучение восполняются кулоновской передачей энергии от ионов

$$q = 4\sqrt{2\pi} \frac{m}{M} \frac{N^2 c^4 \lambda}{\sqrt{m}} \cdot \frac{T_i - T_e}{T_e^{3/2}}, \quad \lambda \approx 20. \quad (5)$$

Тогда при $\frac{H^2}{8\pi} = NT_i$ и $T_i \gg T_e$, приравнявая $q = Q_{\text{магн}}$, найдем температуру электронов

$$T_e = mc^2 \left(\frac{3\lambda}{4\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{m}{M} \right)^{2/5} = 39 \text{кэВ}, \quad (6)$$

независимо от температуры ионов.

Другую (как будет показано далее, более правильную) оценку электронной температуры можно получить, если считать, что все ядерное энерговыделение, первоначально идущее

щее на нагрев ионов, передается затем от ионов к электронам

$$Q_{DD} = q, \text{ тогда } T_{e, \kappa эв} = 8,3 \left(\frac{T_i - T_e}{F_{DD}(T_i)} \right)^{2/3}. \quad (7)$$

Для реакции DD это дает:

Таблица 2

$T_i, \kappa эв$	50	100	200	500	1000	2000
$T_e, \kappa эв$. .	42,3	64,8	86	120	154	200

Отношение излучательной способности к ядерному энерговыделению можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{Q_{\text{магн}}}{Q_{DD}} &= 660 \left[\frac{H^2}{8\pi N (T_i + T_e)} \right] \frac{(T_i + T_e) T_e}{(mc^2) F_{DD}(T_i)} = \\ &= \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{\beta} \cdot \frac{(T_{i, \kappa эв} + T_{e, \kappa эв}) T_{e, \kappa эв}}{F_{DD}(T_i)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где введено обозначение $\beta = \frac{8\pi N (T_i + T_e)}{H^2}$.

Определяя температуру из условия (7), для реакции DD (при $\beta = 1$), получим следующие результаты:

Таблица 3

$T_i, \kappa эв$	50	100	200	500	1000	2000
$Q_{\text{магн}}/Q_{DD}$	14,6	16,6	18,2	26,7	41,5	70

В условиях, когда $N(T_i + T_e) < \frac{H^2}{8\pi}$ (т. е. $\beta < 1$), соотношение будет еще более невыгодным.

На рис. 2 приведены кривые отношения $\frac{Q_{\text{магн}}}{Q_{DD}} = f(T_e)$ при условии $\frac{H^2}{8\pi} = N(T_i + T_e)$ для различных значений $\tau = \frac{T_i}{T_e}$.

2. Учтем теперь наличие поглощения излучения в слое. Как известно, в анизотропной среде, каковой является плазма в магнитном поле, возможно распространение двух электро-

магнитных волн: «обыкновенной» и «необыкновенной». Обозначим через $\eta_{\omega}^{(1,2)}(\theta)$ и $\alpha_{\omega}^{(1,2)}(\theta)$ излучательные способности плазмы и коэффициенты поглощения соответственно этих двух волн для частоты ω , через θ — угол между направлением распространения волны и магнитным полем H . Решая уравнения переноса лучистой энергии

$$\frac{dI_{\omega}^i(\theta)}{ds} = \eta_{\omega}^i - \alpha_{\omega}^i I_{\omega}^i(\theta) \quad (i \text{ — поляризация}), \quad (9)$$

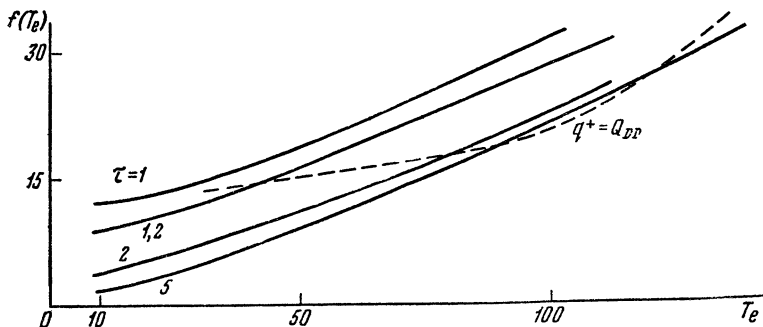


Рис. 2.

можно найти количество энергии, проходящее за единицу времени через единичную площадку поверхности плоского слоя плазмы (рис. 3):

$$W = \int_0^{\infty} d\omega \int_{\psi=0}^{\frac{\pi}{2}} d\Omega \cos \psi \left[\frac{\eta_{\omega}^{(1)}}{\alpha_{\omega}^{(1)}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_{\omega}^{(1)} a}{\cos \psi}} \right) + \frac{\eta_{\omega}^{(2)}}{\alpha_{\omega}^{(2)}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_{\omega}^{(2)} a}{\cos \psi}} \right) \right]. \quad (10)$$

Здесь ψ — угол между нормалью и направлением распространения; интеграл берется по всем частотам и по полусфере телесных углов.

Условие самоподдерживания термоядерной реакции можно теперь записать в виде $\frac{2W}{aQ_{яд}} = \xi(a) \leq 1$ (обычное тормозное излучение не учитываем).

Если слой настолько тонок, что для всех частот $\alpha^{(1,2)} a \ll 1$, то, очевидно,

$$2W = 2a \int_0^{\infty} d\omega \int_{\Omega} d\Omega [\eta_{\omega}^{(1)}(\theta) + \eta_{\omega}^{(2)}(\theta)] = aQ_{\text{магн}} \quad (11)$$

и, следовательно, $\xi(a)_{\alpha a \ll 1} = \frac{Q_{\text{магн}}}{Q_{\text{яд}}} (\sim 15, \text{ как было найдено выше})$. Удобно поэтому записать условие самоподдерживания реакции в виде

$$\xi(a) = \frac{Q_{\text{магн}}}{Q_{\text{яд}}} \Phi(a) \leq 1, \quad (12)$$

где $\Phi(a)$ — «коэффициент прозрачности» слоя,

$$\Phi(a) = \frac{2W}{aQ_{\text{магн}}} = \frac{\int_0^{\infty} d\omega \int_{\mathcal{D}} d\Omega \cos \psi \left[\frac{\eta^{(1)}}{\alpha^{(1)}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha^{(1)}a}{\cos \psi}} \right) + \frac{\eta^{(2)}}{\alpha^{(2)}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha^{(2)}a}{\cos \psi}} \right) \right]}{\int_0^{\infty} d\omega \int_{\mathcal{D}} d\Omega \cos \psi \left[\frac{\eta^{(1)}}{\alpha^{(1)}} \left(\frac{a}{\cos \psi} \right) + \frac{\eta^{(2)}}{\alpha^{(2)}} \left(\frac{a}{\cos \psi} \right) \right]}. \quad (13)$$

Он показывает, какая доля суммарного излучения электронов выходит из слоя наружу. Нашей задачей является определение из условия

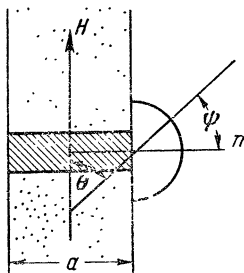


Рис. 3.

$$\Phi(a_{\text{мин}}) = \frac{Q_{\text{яд}}}{Q_{\text{магн}}}$$

$$(\sim \frac{1}{15} \text{ при } T_e \sim 50 \text{ кэВ}) \quad (14)$$

минимальной толщины слоя, при которой обеспечивается необходимая степень запертости излучения.

Для нахождения $\Phi(a)$ приходится вычислять интегралы вида

$$\int_0^{\infty} I_{\omega} (1 - e^{-\alpha a}) d\omega, \text{ где } I_{\omega} = \frac{\eta}{\alpha}, \quad (15)$$

для определения которых необходимо по возможности точнее определить коэффициенты поглощения $\alpha^{(1,2)}$ в области тех частот $\omega \approx \omega^*$, для которых $\alpha_{\omega^*} a \approx 1$.

При меньших частотах ($\omega < \omega^*$), очевидно, $\alpha a \gg 1$ и экспонентой $e^{-\alpha a}$ можно пренебречь по сравнению с единицей, так что неточность определения $\alpha(\omega)$ в области $\omega < \omega^*$ несущественна.

Пренебрегая излучением частот $\omega > \omega^*$ и учитывая, что при максвелловском распределении электронов

$$\frac{\gamma_{\omega}^{(i)}(\theta)}{\alpha_{\omega}^{(i)}(\theta)} \cong I_0 = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2} \quad (16)$$

(закон Кирхгофа и формула Релея-Джинса), можно получить для $\Phi(a)$ следующую оценку:

$$\begin{aligned} \Phi(a) &\cong \frac{2}{a Q_{\text{магн}}} \left(\int_0^{\omega_1^*} I_0 d\omega + \int_0^{\omega_2^*} I_0 d\omega \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Omega \cos \psi \right) \cong \\ &\cong \frac{1}{4\pi} \left(\frac{c\Omega}{a\omega_p^2} \right) \left(\frac{\omega_1^{*3} + \omega_2^{*3}}{\Omega^3} \right) \cong \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c\Omega}{a\omega_p^2} \right) \left(\frac{\omega^*}{\Omega} \right)^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь значения ω_i^* определяются из условия $\alpha_i(\omega^*) a \cong 1$, так что величина $\left(\frac{\omega^*}{\Omega}\right)$ представляет собой эффективное число гармоник, определяющих излучение слоя. Например, при $T_e = 50$ кэв, $a = 10^3$ см и $\frac{\omega_p^2}{c\Omega} = 1$ см⁻¹ ($\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$ — ленгмюровская частота) имеем $\frac{\omega^*}{\Omega} = 7,4$.

Поскольку электроны плазмы дают излучение, максимум интенсивности которого лежит в направлении, перпендикулярном к **H**, целесообразно вначале рассмотреть близкую к $\Phi(a)$ функцию

$$\Phi_{\perp}(a) = \frac{W_{\perp}}{a Q_{\perp}} = \frac{\int_0^{\infty} d\omega I_0 \left(2 - e^{-\alpha_{\perp}^{(1)} a} - e^{-\alpha_{\perp}^{(2)} a} \right)}{\int_0^{\infty} d\omega I_0 \left(\alpha_{\perp}^{(1)} a + \alpha_{\perp}^{(2)} a \right)}, \quad (18)$$

показывающую, какая доля суммарного излучения электронов выходит наружу в направлении нормали к слою. Формулы для $\alpha_{\perp}^{(i)}$ выводятся в приложении I и имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp}^{(1,2)} &= \left(\frac{\omega_p^2}{c\Omega} \right) \frac{\mu^{5/2}}{2^{3/2} x^{5/2}} \sum_{n \geq x}^{\infty} e^{2x} \sqrt{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1} e^{-\mu \left(\frac{n}{x} - 1 \right)} \times \\ &\times \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n \left\{ \frac{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1}{2x}, 1 \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $x = \frac{\omega}{\Omega}$, $\mu = \frac{mc^2}{T_e} \gg 1$.

При их выводе мы пренебрегали отличием коэффициентов преломления $N^{(1,2)}$ от единицы. Для тех достаточно высоких

гармоник излучения, которые существенны в рассматриваемой задаче (скажем, $\omega^* \sim 7\Omega$), это условие можно считать выполненным.

Каждый член ряда (19) (фиксированное n) описывает одну гармонику, уширенную вследствие доплер-эффекта, обусловленного тепловым движением электронов. График величины $\alpha_{\perp}(\omega)$ качественно имеет следующий вид (рис. 4).

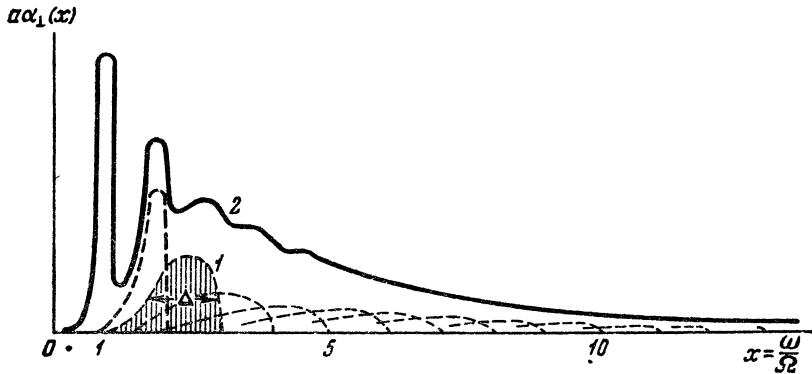


Рис. 4.

1 — отдельный член ряда (19).
2 — сумма членов (оглабляющая).

С ростом номера гармоники доплеровская ширина Δ_n возрастает и линии сливаются в сплошной спектр. Тогда оказывается возможным получить для $\alpha_{\perp}(\omega)$ удобные асимптотические выражения. Заменяя сумму (19) интегралом (при $x \gg 1$), получим

$$\begin{aligned} \alpha_{\perp}^{(1,2)} &= \sum_{n \geq x} (\alpha_{\perp})_n \approx \int_x^{\infty} (\alpha_{\perp})_n dn = \\ &= \left(\frac{\omega^2}{c\Omega} \right) \frac{\mu^{5/2} e^{2x+\mu}}{2^{3/2} x^{3/2}} \int_{\xi = \frac{n}{x} = 1}^{\infty} (d\xi) \xi e^{-\mu\xi - x\xi \ln \frac{\xi+1}{\xi-1}} \left\{ \frac{\xi^2 - 1}{2c}, 1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь существенны большие ξ ; поэтому, вычисляя интеграл методом перевала, найдем

$$\alpha_{\perp}^{(1,2)} \approx \left(\frac{\omega^2}{c\Omega} \right) \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi\mu}}{x} e^{-\mu \left[x^{1/3} - 1 + \frac{9}{20x^{1/3}} \right]} \left\{ \frac{1}{\mu x^{1/3}}, 1 \right\}, \quad (20)$$

где $\kappa = \frac{9\omega}{2\mu\Omega} > 1$.

Путем численного суммирования ряда (19) были построены кривые $\left(\frac{\alpha' c \Omega}{\omega_p^2}\right) = \varphi^{(i)}(x, T_e)$ для различных значений T_e и затем подсчитаны спектральные интенсивности излучения, выходящего из плоского слоя в направлении нормали. На рис. 5а и 5б построены графики функций

$$f(x) = x^2 \left(2 - e^{-\alpha_{\perp}^{(1)} a} - e^{-\alpha_{\perp}^{(2)} a} \right),$$

где $x = \frac{\omega}{\Omega}$ для двух значений параметра $p = \left(\frac{a \omega_p^2}{c \Omega}\right)$.

Как видно из графиков, спектральная интенсивность выходящего излучения не обрывается резко на некоторой эффективной частоте, а спадает довольно плавно. Численно были найдены следующие значения «коэффициента прозрачности» $\Phi_{\perp}(a)$ для двух значений параметра

$p = \left(\frac{a \omega_p^2}{c \Omega}\right)$ (см. табл. 4).

Здесь в первой графе выписаны значения $\Phi_{\perp}(a)$, а в двух последующих — значения «эффективного числа гармоник», найденные из соотношения $\alpha_{\perp}^{(2)} a = 1$ по таблицам $\alpha_{\perp}^{(2)}$ и из асимптотики $\alpha_{\perp}^{(2)}$.

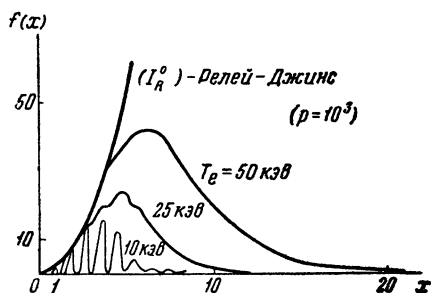


Рис. 5а. $p = 10^3$.

Таблица 4

$T_e, \text{кэВ}$	$p = 10^3$			$p = 10^4$		
	$\Phi_{\perp}(a)$	$\left(\frac{\bar{\omega}^*}{\Omega}\right)_{\text{табл}}$	$\left(\frac{\bar{\omega}^*}{\Omega}\right)_{\text{ас}}$	$\Phi_{\perp}(a)$	$\left(\frac{\bar{\omega}^*}{\Omega}\right)_{\text{табл}}$	$\left(\frac{\bar{\omega}^*}{\Omega}\right)_{\text{ас}}$
10	0,0114	4,6	—	0,0031	5,6	—
25	0,047	5,4	4,8	0,013	7,8	7,3
50	0,131	7,4	7,3	0,0416	11,2	11,1

Для определения полного «коэффициента прозрачности» $\Phi(a)$ необходимо знать коэффициенты поглощения $\alpha_{\omega}^{(i)}(\theta)$ для произвольного направления излучения.

В приложении II показано, что при больших частотах

$$\Phi(a) \approx \frac{1}{2} \Phi_{\perp}(a). \quad (21)$$

Эта оценка примерно совпадает с оценкой по формуле

$$\Phi(a) \approx \frac{1}{2\pi} \left(\frac{c\Omega}{a\omega^2} \right) \left(\frac{\bar{\omega}^*}{\Omega} \right)^3. \quad (22)$$

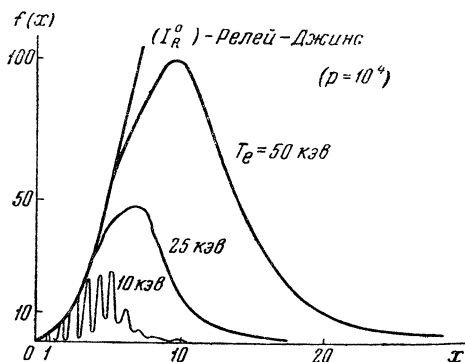


Рис. 5б. $p = 10^4$.

Ниже приводится таблица значений $\Phi(a)$, полученных из (21) и из (22), причем в качестве $\bar{\omega}^*$ подставлены значения ω^* , найденные из соотношения $a\omega^* = 1$ с помощью асимптотики (20).

Таблица 5

T_e	$p = 10^3$		$p = 10^4$	
	$\frac{1}{2}\Phi_{\perp}(a)$	по формуле (22)	$\frac{1}{2}\Phi_{\perp}(a)$	по формуле (22)
10	0,0057	—	0,0015	—
25	0,023	0,017	0,0065	0,0062
50	0,065	0,062	0,021	0,021

На рис. 6 приведены кривые $\Phi = \text{const}$ в зависимости от двух переменных T_e и параметра $p = \left(\frac{a\omega^2}{c\Omega} \right)$.

3. Поскольку рассматриваемое состояние плазмы не является равновесным, функция распределения электронов $f(\epsilon)$ может отличаться от максвелловской.

В приложении I найдены коэффициенты $\alpha_{\perp}^{(i)}$ и $\eta_{\perp}^{(i)}$ для произвольного сферически симметричного распределения. Они имеют вид

$$\eta_{\perp}^{(1,2)} = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \sum_{n \geq x} S_n^{(1,2)}(x) [f(\varepsilon)]_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}},$$

$$\alpha_{\perp}^{(1,2)} = \sum_{n \geq x} S_n^{(1,2)}(x) \left[-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}}, \quad (23)$$

где

$$S_n^{(1,2)}(x) = \left(\frac{\omega^2 p}{c\Omega} \right) \frac{mc^2 \pi^{3/2} 2x}{x^{5/2}} \sqrt{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n \left\{ \frac{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1}{2x}, 1 \right\}.$$

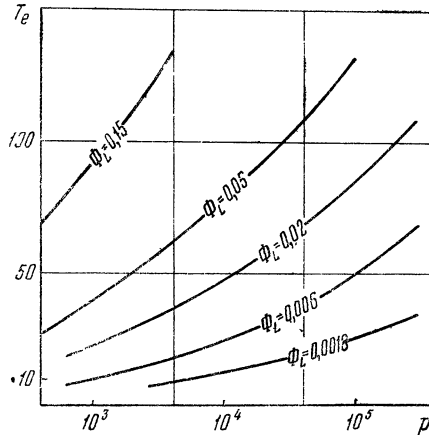


Рис. 6.

При максвелловском распределении $f(\varepsilon) = Ce^{-\frac{\varepsilon}{T}}$, откуда $-f'_{\varepsilon} = \frac{1}{T} f$ и из (23) получается формула Релея—Джинса

$$(\eta/\alpha) = I_0 = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2}.$$

Если же $f(\varepsilon)$ не является экспоненциальной функцией, то поток излучения $(\eta/\alpha) = I_{\omega}$ представляется сложным отношением двух рядов (23). Поэтому наиболее просто рассмотреть случай распределения $f(\varepsilon)$ в виде «обрезанного максвелловского»:

$$f(\varepsilon) = ce^{-\frac{\varepsilon}{\theta}} \text{ при } \varepsilon < \varepsilon_{\text{макс}}, \quad f(\varepsilon) = 0 \text{ при } \varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}. \quad (24)$$

Отношение $\frac{\epsilon_{\text{макс}} - mc^2}{\theta} = N$ определяет номер обрезаемого «хвоста» максвелловского распределения. Тогда в формулах (23) суммирование необходимо производить от $n \geq x$ до

$$n_{\text{макс}} = x \frac{\epsilon_{\text{макс}}}{mc^2} = x \left[1 + \frac{N}{(mc^2/\theta)} \right]. \quad (25)$$

График $\alpha_{\perp}^{(1,2)}(x)$ отличается от графика α_{\perp} для чисто максвелловского распределения (см. рис. 4) и качественно

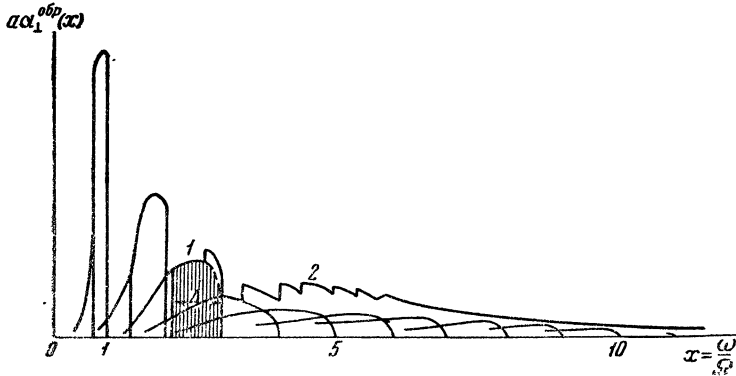


Рис. 7. 1 — отдельный член ряда (23); 2 — сумма членов (огibaющая).

имеет вид, представленный на рис. 7. Численно были подсчитаны функции

$$aa_{\perp}^{(1,2)} = \left(\frac{a\omega_p^2}{c\Omega} \right) \frac{\mu^{s_2}}{2^{3/2} x^{s_2}} \sum_{n \geq x}^x \left(1 + \frac{N}{\mu} \right) e^{2x} \sqrt{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1} \times \\ \times e^{-\mu \left(\frac{n}{x} - 1 \right)} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n \left\{ \frac{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1}{2x}, 1 \right\} \quad (26)$$

и затем найдены значения «коэффициента прозрачности»

$$\Phi_{\perp}^{\text{обрез}}(a) = \frac{\int_0^{\infty} (dx) \cdot x^2 (2 - e^{-ax(1)} - e^{-ax(2)})}{\int_0^{\infty} (dx) \cdot x^2 (aa^{(1)} + aa^{(2)})}. \quad (27)$$

При этом получилось:

Т а б л и ц а б а

$$p = 10^4, \theta_e = 50 \text{ кэв}$$

$N =$	∞	6	3	1
$\Phi_{\perp}^{\text{обр}}(a) \dots$	0,0416	0,030	0,0114	0,000787
$\Phi_{\perp}^{\text{обр}}/\Phi_{\perp} \dots$	1	0,72	0,27	0,2

Т а б л и ц а б б

$$p = 10^4, N = 3$$

$\theta_e, \text{кэв}$	10	25	50
$\Phi_{\perp}(a) \dots$	0,0031	0,013	0,0416
$\Phi_{\perp}^{\text{обр}}(a) \dots$	0,00049	0,0026	0,0114
$\Phi_{\perp}^{\text{обр}}/\Phi_{\perp} \dots$	0,158	0,2	0,27

Отсюда видно, что при сильном обрезании максвелловского распределения коэффициент прозрачности становится заметно меньше. Однако, как показано в работе В. С. Кудрявцева [3], сильное искажение максвелловского распределения не должно иметь места (см. также приложение III).

Оценим температуру плазменного слоя. Из баланса энергии электронов в единице объема имеем (в пренебрежении обычной теплопроводностью)

$$q = Q_{\text{магн}} - \Pi_{\text{погл}}. \quad (28)$$

В формуле (6) мы пренебрегали поглощением и из равенства $q = Q_{\text{магн}}$ нашли, что температура электронов равна 39 кэв. При учете поглощения эта температура будет выше.

Формулу (28) можно представить в виде

$$q = \int_0^{\infty} d\omega \oint d\Omega (\eta^{(1)} + \eta^{(2)} - \alpha^{(1)}I^{(1)} - \alpha^{(2)}I^{(2)}). \quad (29)$$

Потоки $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ находим из уравнений переноса

$$\cos \psi \frac{\partial I^i}{\partial x} = \eta^i - \alpha^i I^i,$$

подстановка которых в (29) дает

$$q = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\infty d\omega \oint d\Omega \cos \psi (I^{(1)} + I^{(2)}) \right] = \operatorname{div} W_x. \quad (30)$$

Здесь W_x — полный поток излучения в направлении нормали к слою. При максвелловском распределении $(\eta/\alpha) = I_0$. Будем считать температуру в первом приближении постоянной по сечению слоя.

Тогда (см. рис. 8):

$$W_x = \frac{Q_{\text{магн}}}{2} \left[\left(\frac{a}{2} + x \right) \Phi \left(\frac{a}{2} + x \right) - \left(\frac{a}{2} - x \right) \Phi \left(\frac{a}{2} - x \right) \right], \quad (31)$$

где $\Phi(\xi)$ — введенный нами ранее «коэффициент прозрачности». Разлагая это выражение в ряд по x и подставляя в (30), получим:

$$q = \frac{\partial W_x}{\partial x} = Q_{\text{магн}} \left\{ \left[\Phi \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{a}{2} \Phi' \left(\frac{a}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{x^2}{2} \left[\Phi \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{a}{2} \Phi' \left(\frac{a}{2} \right) \right]'' + \dots \right\}. \quad (32)$$

Полагая приближенно

$$\Phi \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{a}{2} \Phi' \left(\frac{a}{2} \right) \approx \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) = \Phi(a),$$

находим:

$$q = Q_{\text{магн}} \left\{ \Phi(a) + 2x^2 \frac{\partial^2 \Phi(a)}{\partial a^2} + \dots \right\}. \quad (33)$$

Температуру в центре слоя можно приближенно найти из условия

$$q \cong Q_{\text{магн}} \Phi(a). \quad (34)$$

Условие самоподдерживания реакции имеет сходный вид

$$Q_{\text{яд}} \geq Q_{\text{магн}} \Phi(a), \quad (35)$$

так что в условиях стационарного самоподдерживающегося режима, очевидно, $q = Q_{\text{яд}}$. Это соотношение мы уже использовали в (7) для определения температуры электронов T_e .

4. Покажем в заключение, как следует производить конкретные расчеты магнитного излучения.

а) Если задана температура электронов T_e и параметр $p = \frac{a\omega_p^2}{c\Omega} = 4\pi e \left(\frac{aN}{H} \right)$, то из рис. 6 находим $\Phi(a)$, т. е. отношение реально выходящего излучения к суммарному излучению отдельных электронов ($aQ_{\text{магн}}$), которое следует подсчитать по формуле (2).

б) Минимальную толщину слоя ($a_{\text{мин}}$), необходимую для самоподдерживания реакции DD , можно найти из соотношения (T в кэв)

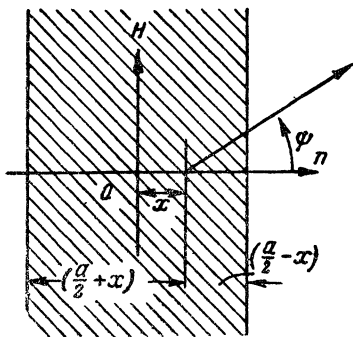


Рис. 8.

$$\frac{Q_{\text{магн}}}{Q_{DD} - Q_{\text{торм}}} = \frac{1}{\beta} \frac{2,5 \cdot 10^{-3} T_e (T_e + T_i) (1 + 0,005 T_e)}{F_{DD}(T_i) - F_{\text{торм}}(T_e)} = \frac{1}{\Phi(a_{\text{мин}})}. \quad (36)$$

При этом полагается, что тормозное излучение свободно выходит наружу из слоя.

В условиях $T_e = T_i$ и $\beta = 8\pi N (T_e + T_i) / H^2 = 1$ имеем следующие цифры:

Таблица 7

$T_e = T_i$, кэв	32	35	40	50	60	70	80	90	100
$F_{\text{торм}}(T_e)$. . .	0,35	0,37	0,41	0,48	0,55	0,63	0,70	0,77	0,85
$Q_M / (Q_{DD} - Q_T)$	∞	240	128	82	78	80	84	90	99
$\Phi(a)$, % . . .	0,00	0,42	0,78	1,22	1,35	1,25	1,19	1,11	1,01
$p \cdot 10^{-4}$. . .	∞	6,9	3,1	2,9	4,8	10	20	39	77,5
$\gamma_{\text{эф}}$	∞	12	11,5	13	16	20	25	30	37

Значения параметра p при заданных T_e и $\Phi(a)$ находятся из рис. 6 или по асимптотическим формулам (20) и (22), которые для этого удобно представить в виде

$$\Phi(a) \cong \frac{\gamma_{\text{эф}}^3}{2\pi p}; \quad \alpha^* a = 1 \cong p \frac{3\sqrt{\pi\mu}}{2\langle x \rangle} \exp\left\{-\mu \left[\langle x \rangle^{1/3} - 1 + \frac{9}{20\langle x \rangle^{1/3}}\right]\right\}, \quad (37)$$

где $\mu = \frac{511}{T_e}$; $\langle \kappa \rangle = \frac{9\nu_{эф}}{2\mu}$; $\nu_{эф}$ — «эффективное число гармоник». Полагая, например, $H = 10^4$ гс, найдем $a_{мин} = rH/4\pi eN$ для того же ряда значений температуры:

Т а б л и ц а 8

$a_{мин}, м$	∞	32	17	19	38	93	210	460	1030
$N \cdot 10^{-13}$	3,9	3,6	3,1	2,5	2,1	1,8	1,6	1,4	1,2

Для $H = 10^5$ гаусс плотности будут в 100 раз больше, а размер $a_{мин}$ в 10 раз меньше приведенных.

в) Несколько иные цифры получаются в условиях, когда температура электронов определяется условием $Q_{DD} = q$. Тогда при $\beta = 1$ имеем:

Т а б л и ц а 9

T_i	T_e	$Q_M/(Q_{DD} - QT)$	$\Phi(a), \%$	ν	$\nu_{эф}$	$a_{мин}$	N
50	42,3	49	2	$6,3 \cdot 10^3$	9,2	3,9 м	$2,7 \cdot 10^{13}$
100	64,8	35	3	$1,2 \cdot 10^4$	13	13 м	$1,5 \cdot 10^{13}$
200	86	33	3	$5 \cdot 10^4$	21	95 м	$0,88 \cdot 10^{13}$
500	120	50	2	$5 \cdot 10^5$	40	2,1 км	$0,4 \cdot 10^{13}$

Значения $a_{мин}$ и N определены здесь для $H = 10^4$ гс.

Полученные выше размеры слоя $a_{мин}$, необходимые для самоподдерживания реакции DD в установках, где внутри плазмы имеется значительное магнитное поле $\left(\frac{H^2}{8\pi} \sim 2NT\right)$, характеризуют трудности осуществления подобных систем. Для реакции на смеси DT имеется область температур от 7 до 45 кэв, где выделение ядерной энергии на заряженных продуктах превосходит потери на излучение (при $T_e = T_i$)

$$Q_{DT} > (Q_{магн} + Q_{торм}) \text{ при } 7 \text{ кэв} < T < 45 \text{ кэв.} \quad (38)$$

Для уменьшения потерь на магнитное излучение должны быть приняты специальные меры, в частности, как было указано Г. И. Будкером, возможно использование эффективных отра-

жателей, возвращающих излучаемую энергию обратно в плазму*. Отметим также, что магнитное излучение отсутствует в системах, где удержание плазмы осуществляется высокочастотными внешними полями, не проникающими внутрь плазмы.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность академику М. А. Леонтовичу за ценные советы и указания, сделанные в ходе работы и Г. И. Бирюк — за помощь в организации численных расчетов.

П Р И Л О Ж Е Н И Е I

Вычисление коэффициентов поглощения α_ω при произвольной функции распределения электронов в случае волны, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю

1. Как известно, в плазме при наличии магнитного поля возможно распространение электромагнитных волн двух типов — обыкновенной и необыкновенной, различающихся поляризациями. Для направления распространения, перпендикулярного к магнитному полю, эти волны называются линейно поляризованными, причем в обыкновенной волне вектор E направлен по полю H_0 , а в необыкновенной — перпендикулярно к полю. Коэффициенты преломления ($Re N$) полагаем равными единице, что, очевидно, допустимо лишь для достаточно больших частот. Коэффициенты поглощения волн $\alpha_\omega^{(1,2)}$ можно определить как отношение энергии, поглощаемой в единице объема плазмы за единицу времени, к плотности падающего потока:

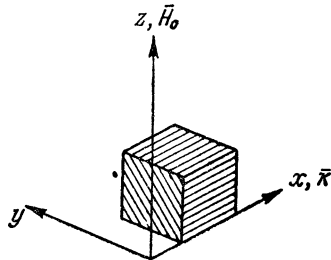


Рис. 9.

$$\alpha = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{c}{4\pi} [EH]} = \frac{8\pi N}{cE_0^2} \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle, \quad (1)$$

где N — плотность электронов; $\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle$ — средняя энергия, поглощаемая в единицу времени одним электроном. Если в момент $t=0$ произошло последнее столкновение данного электрона с другим, то вероятность того, что следующее столкновение произойдет в интервале времени $t \div t + dt$, равна

$$dw = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{dt}{\tau}, \quad (2)$$

где τ — среднее время между двумя столкновениями.

* Если на границах слоя имеются зеркала с коэффициентом отражения R , то выходящий поток описывается формулой

$$I_\omega^i = I_0 (1 - e^{-\alpha a}) f, \quad \text{где } f = \frac{1 - R}{1 - R e^{-\alpha a i}} \leq 1.$$

Мы будем считать соударения редкими и в последующем перейдем к пределу $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, если $f(p)$ — распределение электронов по импульсам, то

$$\left\langle \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \right\rangle = \int dp f(p) \frac{d\bar{\varepsilon}(p)}{dt}, \quad \text{где} \quad \frac{d\bar{\varepsilon}(p)}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{d\varepsilon(p)}{dt} \right)_{\text{cp}} \frac{dt}{\tau}. \quad (3)$$

Здесь $\left(\frac{d\varepsilon(p)}{dt} \right)_{\text{cp}}$ — изменение энергии электрона в поле волны, усредненное по начальному положению электрона r_0 и по начальным фазам δ (поскольку $f(p)$ не зависит от r_0 и от δ).

Воспользуемся непосредственно релятивистскими уравнениями движения электрона в поле волны

$$m \frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{e}{c} F_{ik} \frac{dx_k}{ds}; \quad F_{ik} = F_{ik}^{(0)} + \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим для примера поглощение необыкновенной волны, для которой $\mathbf{H}_0 \parallel z$, $\mathbf{k} \parallel x$, $\mathbf{E} \parallel y$,

$$\mathbf{E} = E_{0y} \cos(kx - \omega t) = -\frac{\partial A_y}{c \partial t}, \quad \mathbf{A} = A_y^0 \sin \langle k_i x_i \rangle, \quad A^0 = \frac{c}{\omega} E_0. \quad (5)$$

Уравнения движения принимают вид

$$mc \frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{e}{c} \left\{ F_{ik}^0 \frac{dx_k}{ds} + \left(k_i \frac{d \langle A_k^0 x_k \rangle}{ds} - A_i^0 \frac{d \langle k_j x_j \rangle}{ds} \right) \cos \langle k_j x_j \rangle \right\}. \quad (6)$$

Введем удобные безразмерные величины

$$\alpha = \left| \frac{e H_0}{m c^2 s} \right|, \quad \xi = \frac{k A^0}{H_0}, \quad \varphi = k_j x_j.$$

В проекциях уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} x'' &= -y' (1 + \xi \cos \varphi), & y'' &= x' + \frac{\xi}{k} \varphi' \cos \varphi, \\ z'' &= 0, & t'' &= -\frac{\xi}{c} y' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где штрих означает производную по α : $(\dots)' = \frac{d}{d\alpha} (\dots)$. Из этой системы, используя уравнение $u_i^2 = -1$, которое в наших переменных удобно представить в виде

$$-\left(\frac{e H_0}{m c^2} \right)^2 = x_j'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2, \quad (8)$$

можно получить уравнения

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{k} \varphi'', & t'' &= \frac{\xi}{\omega} \varphi'' \cos \varphi, \\ \varphi'^2 + 2\varphi'\varphi''' - \varphi''^2 - (\text{const})^2 &= -2\xi\varphi'^2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Последнее уравнение для одной переменной $\varphi(x)$ является удобным для решения.

Интеграл (3) можно представить в виде

$$\frac{d\varepsilon(p)}{dt} = \frac{1}{\tau} \int e^{-\frac{t(\varepsilon)}{\tau}} d\varepsilon = \frac{|e|H_0 c}{\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{t(\alpha)}{\tau}} t''(\alpha) d\alpha$$

или, с учетом (9),

$$\frac{d\varepsilon(p)}{dt} = \left(\frac{|e|H_0}{k\tau} \right) \xi \int_0^\infty e^{-\frac{t(\alpha)}{\tau}} \varphi''(\alpha) \cos \varphi(\alpha) d\alpha. \quad (10)$$

Параметр $\xi = \frac{kA^0}{H_0}$, пропорциональный амплитуде проходящей волны, считаем малым, и все решения уравнений (9) ищем в виде разложения по ξ

$$t = t_0 + t_1 + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots; \quad t_1, \varphi_1 \sim \xi. \quad (11)$$

Таким образом, нам необходимо найти в (10) первый не исчезающий член, который, очевидно, пропорционален ξ . Проведем это разложение до членов первого порядка, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(p)}{dt} &\cong \left(\frac{|e|H_0}{k\tau} \right) \xi \int_0^\infty e^{-\frac{t_0+t_1}{\tau}} (\varphi_0'' + \varphi_1'') \cos(\varphi_0 + \varphi_1) d\alpha \cong \\ &\cong \left(\frac{|e|H_0}{k\tau} \right) \xi \int_0^\infty e^{-\frac{t_0}{\tau}} \left(\varphi_1'' \cos \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_0'' \sin \varphi_0 - \frac{t_1}{\tau} \varphi_0'' \cos \varphi_0 \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $t_0 = \alpha \left(\frac{mc^2}{|e|H_0} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha}{\omega_0}$, где $\omega_0 = \left| \frac{eH_0}{mc} \right| \sqrt{1-\beta^2}$. Подставляя разложение $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots$ в последнее уравнение (9), получим

$$\begin{aligned} \varphi_0'^2 + 2\varphi_0'\varphi_0''' - \varphi_0''^2 - (\text{const})^2 &= 0, \\ \varphi_0'\varphi_1' + \varphi_0'\varphi_1''' + \varphi_0''\varphi_1' - \varphi_0''\varphi_1'' &= -\xi\varphi_0''^2 \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение первого уравнения имеет вид

$$\varphi_0(\alpha) = a + b(\alpha + \delta) + c \sin(\alpha + \delta), \quad \text{где } b^2 - c^2 = (\text{const})^2, \quad (14)$$

и описывает движение электрона в магнитном поле H_0 по винтовой линии без учета поля волны. Из начальных условий можно найти постоянные

$$a = kx(0) - b\delta - c \sin \delta, \quad b = -\frac{\omega}{\omega_0}, \quad c = \frac{\omega}{\omega_0} \beta_{\perp}, \quad (15)$$

где δ — начальная фаза электрона, $x(0)$ — его начальное положение.

Пользуясь найденным нулевым решением $\varphi_0(\alpha)$ и уравнением (9), найдем $t_1(\alpha)$

$$t_1(\alpha) = \frac{\xi}{\omega} \int_0^{\alpha} da \int_0^{\alpha} \cos \varphi_0 \varphi_0'' da. \quad (16)$$

Интегралы здесь можно вычислить, используя известное разложение по функциям Бесселя

$$e^{ic \sin \psi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(c) e^{in\psi}.$$

Окончательно получим

$$t_1(\alpha) = \frac{\xi}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{cJ'_n(c)}{b+n} \left\{ \frac{\sin[a + (b+n)(\alpha + \delta)] - \sin[a + (b+n)\delta]}{b+n} - a \cos[a + (b+n)\delta] \right\}. \quad (17)$$

Аналогично можно из второго уравнения (13), используя найденное нулевое решение $\varphi_0(\alpha)$, найти $\varphi_1(x)$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) = & C_1 + C_2 [c(\alpha + \delta) + b \sin(\alpha + \delta)] + C_3 \cos(\alpha + \delta) + \\ & + \xi \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[a + (b+n)(\alpha + \delta)]}{(b+n)^2 - 1} \left(J_n + \frac{cJ'_n(c)}{(b+n)^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку $\varphi_0(\alpha)$ уже удовлетворяет всем начальным условиям, то для $\varphi_1(\alpha)$ имеем

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_1''(0) = 0. \quad (19)$$

Это позволяет найти три постоянные C_1, C_2, C_3 . Вычислим теперь интеграл (12). Подынтегральное выражение

$$\left(\varphi_1'' \cos \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_0'' \sin \varphi_0 - \frac{t_1}{\tau} \varphi_0'' \cos \varphi_0 \right) = \Phi(\alpha, x(0), \delta)$$

нам теперь известно, поскольку мы нашли t_1, φ_1 и постоянные C_1, C_2, C_3 . Далее, следует усреднить это выражение по начальному положению электрона $x(0)$ и по начальным фазам δ . Опуская громоздкие выкладки, приводим окончательный результат

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Phi(\alpha, x(0), \delta)}}^{x(0)\delta} = & \frac{\xi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} 2b \left(c - \frac{n^2}{c} \right) J_n J'_n \frac{\sin[(b+n)\alpha]}{b+n} + \\ & + \frac{\xi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (cJ'_n)^2 \left\{ \frac{-a \cos[(b+n)\alpha]}{b+n} + \frac{\sin[(b+n)\alpha]}{(b+n)\alpha} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{b(b+n)(\omega_0\tau)} \left[\frac{1 - \cos[(b+n)\alpha]}{b+n} - a \sin[(b+n)\alpha] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь можно вычислить интеграл (12)

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{d\varepsilon(p)}}{dt} &= \left(|e| \frac{H_0}{k\tau} \right) \xi \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\omega_0\tau}} \overline{\Phi(\alpha, x(0), \delta)} d\alpha = \\
 &= |e| H_0 \frac{\omega_0}{2k} \xi^2 \left\{ - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{c} \left[\frac{d}{dc} (cJ'_n)^2 \right] \frac{x}{x^2 + (b+n)^2} + \right. \\
 &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} (cJ'_n)^2 \left[\frac{2x(b+n)}{[x^2 + (b+n)^2]^2} + \frac{(x/b)}{x^2 + (b+n)^2} - \right. \\
 &\left. \left. - 2 \frac{x}{b} \frac{(b+n)^2}{[x^2 + (b+n)^2]^2} \right] \right\}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Здесь $x = \frac{1}{\omega_0\tau}$. Считая соударения редкими, перейдем теперь к пределу $x \rightarrow 0$. При этом, как негрудно видеть, в случае $b+n \neq 0$ имеем $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$; если же $b+n \rightarrow 0$, то старшим членом в (21) является

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \cong |e| H_0 \frac{\omega_0}{2k} \xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (cJ'_n)^2 \frac{2x(b+n)}{[x^2 + (b+n)^2]^2}. \quad (21a)$$

Поскольку $b = -\frac{\omega}{\omega_0}$ (см. (15)), то это выражение будет больше или меньше, в зависимости от знака выражения $\left(n - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Следовательно, при $n > \frac{\omega}{\omega_0}$ (т. е. $\varepsilon < mc^2 \frac{n\Omega}{\omega}$) имеем $\frac{d\varepsilon}{dt} > 0$, т. е. электрон поглощает энергию из волны. При $n < \frac{\omega}{\omega_0}$ (т. е. $\varepsilon > mc^2 \frac{n\Omega}{\omega}$) имеем $\frac{d\varepsilon}{dt} < 0$, т. е. электрон отдает волне часть своей энергии.

В плазме имеются электроны с различными энергиями, причем группа электронов с энергиями, близкими к $\varepsilon_n = mc^2 \frac{n\Omega}{\omega}$, взаимодействует резонансным образом с n -ым «унтертоном» волны $\left(\frac{\omega}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\right)$.

Вклад этой группы в коэффициент поглощения $\alpha = \sum_1^{\infty} \alpha_n$ ослабляет ($\alpha_n > 0$) или усиливает ($\alpha_n < 0$) волну, если электронов с энергиями, меньшими ε_n , будет соответственно больше или меньше, чем электронов с энергиями, превышающими ε_n .

Распределение электронов описывается функцией $f(\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{T}$ в максвелловском случае), поэтому разность числа электронов «слева» и «справа» от значения энергии ε_n пропорциональна производной

$$\alpha_n \sim - \left(\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_n}, \quad (22)$$

которая и определяет величину поглощения. В частности, если вблизи точки $\varepsilon = \varepsilon_n$ $f(\varepsilon) = \text{const}$, то $\alpha_n = 0$ и поглощение отсутствует.

Приведенные соображения поясняют физический механизм поглощения поперечных волн в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле.

Используя соотношения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + (b+n)^2} = \pi \delta(b+n); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(b+n)}{[x^2 + (b+n)^2]^2} = \pi \delta'(b+n),$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(p)}{dt} = \frac{\pi e^2 E_0^2}{2m\omega} \sqrt{1-\beta^2} \left\{ \sum_1^{\infty} (cJ'_n)^2 \frac{d}{bdb} [(b+n)\delta(b+n)] - \right. \\ \left. - \frac{d}{db} \left[\sum_1^{\infty} (cJ'_n)^2 \delta(b+n) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Первый член в полученном выражении следует отбросить, так как при интегрировании по функции распределения $f(p)$ он будет давать нуль:

$$(b+n)\delta(b+n) = 0.$$

Окончательно имеем

$$\frac{d\varepsilon(p)}{dt} = \frac{\pi e^2 E_0^2}{2m\Omega} \frac{d}{bdb} \left[\sum_1^{\infty} (cJ'_n)^2 \delta(b+n) \right]. \quad (23)$$

Усредняя это выражение по функции распределения электронов $f(p)$ и подставляя результат в (1), получим коэффициент поглощения необыкновенной волны

$$\alpha_{\perp}^{(2)} = \frac{\pi \omega_p^2}{c\omega} \int dp \frac{f(p)}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}} \frac{d}{db} \left(\sum_1^{\infty} (cJ'_n)^2 \delta(b+n) \right).$$

Преобразуя эту формулу по частям, найдем

$$\alpha_{\perp}^{(2)} = \frac{\pi \omega_p^2}{c\Omega} \int \left[\sum_1^{\infty} (cJ'_n)^2 \delta\left(n - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right] \left(-\frac{df(p)}{dp_{\perp}^2} \right) dp. \quad (24)$$

Если функция $f(p)$ сферически симметрична, то

$$\frac{df(p)}{dp_{\perp}^2} = \frac{c^2}{2\varepsilon} \cdot \frac{df}{d\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp}^{(2)} &= \frac{\pi \omega_p^2}{c \Omega} \int_0^{\infty} (d\rho) \rho^2 \frac{c^2}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \delta \left(n - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \left(-\frac{df}{d\varepsilon} \right) \int (cJ'_n)^2 d\Omega_{\rho} = \\ &= \sum_{n \geq x} S_n^{(2)}(x) \left(-\frac{df}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}} \left(x = \left| \frac{\omega}{\frac{eH_0}{mc}} \right| \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$S_n^{(2)}(x) = \frac{\omega_p^2}{c \Omega} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{mc^2}{x} (mc) \sqrt{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1} \left[(p_{\perp} J'_n)^2 d\Omega_{\rho} \right]_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}}.$$

Вычисление коэффициента поглощения обыкновенной волны $\alpha_{\perp}^{(1)}$ приводит к сходному выражению с тем отличием, что вместо интеграла, стоящего в квадратных скобках, стоит интеграл

$$\left[\int (p_{\parallel} J'_n)^2 d\Omega_{\rho} \right]_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}}.$$

При достаточно высоких гармониках ($n \gg 1$) для последних двух интегралов можно получить приближенные выражения

$$\begin{aligned} \left[\int (p_{\perp} J'_n)^2 d\Omega \right]_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}} &= (mc)^2 \sqrt{\pi} \frac{e^{2x}}{x^{3/2}} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n \{1\}, \\ \left[\int (p_{\parallel} J'_n)^2 d\Omega \right]_{\varepsilon = mc^2 \frac{n}{x}} &= (mc)^2 \sqrt{\pi} \frac{e^{2x}}{x^{3/2}} \left(\frac{n-x}{n+x} \right)^n \left\{ \frac{\left(\frac{n}{x} \right)^2 - 1}{2x} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

которые и были использованы для численных расчетов.

Можно было бы найти $\alpha_{\omega}^{(1, 2)}$ менее громоздкими способами, например с помощью принципа детального равновесия. Однако проведенные вычисления — наиболее прямой путь определения коэффициентов поглощения, поскольку при этом непосредственно вычисляется энергия, отбираемая электронами у волн.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Вывод оценочной формулы $\Phi(a) = \frac{1}{2} \Phi_{\perp}(a)$.

Для углов, близких к $\frac{\pi}{2}$, и достаточно высоких частот ($\omega \gg \Omega\mu$) коэффициенты поглощения имеют асимптотический вид

$$\alpha_{\omega}^{(1, 2)}(\theta) = \left(\frac{\omega_p^2}{c \Omega} \right) \frac{3}{2} \sqrt{\pi \mu} e^{-\mu \left[\left(\frac{9\omega}{2\Omega\mu \sin \theta} \right)^{1/3} - 1 \right]} \left\{ \frac{1}{\mu \left(\frac{9\omega}{2\Omega\mu \sin \theta} \right)^{1/3}}, 1 \right\}. \quad (1)$$

Если обозначить через $\alpha_{\perp}^{(1, 2)}(\omega)$ значения коэффициентов при $\theta = \frac{\pi}{2}$,

то предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\alpha_{\omega}^{(i)}(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} [\alpha_{\perp}^{(i)}(\omega)]_{\omega \rightarrow \frac{\omega}{\sin \theta}}. \quad (2)$$

При вычислении «коэффициента прозрачности» слоя

$$\Phi(a) = \frac{2}{aQ_{\text{магн}}} \int_0^{\infty} d\omega I_0 \int_{\mathbb{D}} d\Omega \cos \psi \left(2 - e^{-\frac{a\alpha^{(1)}(\theta)}{\cos \psi}} - e^{-\frac{a\alpha^{(2)}(\theta)}{\cos \psi}} \right) \quad (3)$$

удобно сделать замену переменной $\omega \rightarrow \omega \sin \theta$; тогда, учитывая (2), получим

$$\Phi(a) = \frac{2}{aQ_{\text{магн}}} \int_0^{\infty} d\omega I_0 \int_{\mathbb{D}} d\Omega \cos \psi \sin^3 \theta \left(2 - e^{-\frac{a\alpha^{(1)}}{\cos \psi \sin \theta}} - e^{-\frac{a\alpha_{\perp}^{(2)}}{\cos \psi \sin \theta}} \right). \quad (4)$$

Ранее мы определили $\Phi_{\perp}(a)$ следующим образом:

$$\Phi_{\perp}(a) = \frac{1}{aQ_{\perp}} \int_0^{\infty} d\omega I_0 \left(2 - e^{-a\alpha_{\perp}^{(1)}} - e^{-a\alpha_{\perp}^{(2)}} \right). \quad (5)$$

Из нерелятивистских уравнений для первой гармоники (поскольку именно она в основном определяет полную излучаемую энергию) найдем

$$Q_{\text{магн}}(\theta) = \frac{e^2 \Omega^2 T_e N}{mc^3 4\pi} (1 + \cos^2 \theta), \text{ откуда } \frac{Q_{\perp}}{Q_{\text{магн}}} = \frac{3}{16\pi}. \quad (6)$$

Тогда формулу (4) можно представить в виде

$$\Phi(a) = \frac{3}{8\pi} \int_{\mathbb{D}} d\Omega \sin^2 \theta \Phi_{\perp} \left(\frac{a}{\cos \psi \sin \theta} \right), \quad (7)$$

и поскольку $\Phi_{\perp} \left(\frac{a}{\cos \psi \sin \theta} \right) \leq \Phi_{\perp}(a)$, то

$$\Phi_{\perp} \leq \Phi_{\alpha}(a) \frac{3}{8\pi} \int_{\mathbb{D}} d\Omega \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \Phi_{\perp}(a). \quad (8)$$

Для оценки полагаем $\Phi(a) \approx \frac{1}{2} \Phi_{\perp}(a)$.

Распределение электронов по энергиям при учете магнитного излучения

В работе В. С. Кудрявцева [3] найдено распределение по энергиям электронов плазмы, находящейся в магнитном поле, при учете их излучения (в нерелятивистском случае). Для поправочного множителя к максвелловской функции

$$f(x) = f^0 \varphi(x), \text{ где } x = \frac{mv^2}{2T_e}, \quad f^0 = Ce^{-x} \quad (1)$$

в линейном приближении ($|\varphi - 1| \ll 1$) в [3] найдено:

$$\varphi = 1 - \alpha(x^{5/2} - 13,3x - 4,1), \text{ при } x \gg 1,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{H^2}{9\pi\lambda Nmc^2} \left(\frac{T_e}{mc^2}\right)^{3/2} \frac{8\sqrt{2}}{5} \ll 1. \quad (2)$$

Мы рассмотрим случай, когда отступления от максвелловского распределения не являются малыми, а энергии электронов могут быть релятивистскими.

Как известно, на электрон в магнитном поле действует сила «торможения излучением», равная

$$F_{\text{изл}} = -\left(\frac{2e^2\Omega^2}{3c^3}\right) \left[\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v} \frac{\beta_{\perp}^2}{1-\beta^2} \right], \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (3)$$

Излучаемая мощность при этом равна

$$(\mathbf{v}F_{\text{изл}}) = -\left(\frac{2e^2\Omega^2}{3c}\right) \left(\frac{P_{\perp}}{mc}\right)^2.$$

Для упрощенного рассмотрения будем считать, следуя [3], что электроны распределены сферически-симметрично, и введем такую эффективную силу трения $F_{\text{эф}}$, направленную противоположно \mathbf{v} , которая давала бы ту же самую излучаемую мощность. Можно убедиться, что эту силу следует положить равной

$$F_{\text{эф}} = -\left(\frac{2e^2\Omega^2}{3c^3}\right) \frac{2}{3} \frac{\mathbf{v}}{1-\beta^2}. \quad (4)$$

Тогда кинетическое уравнение для электронов

$$\text{div}_p (F_{\text{эф}} f) = -\text{div}_p (j) \quad (5)$$

можно проинтегрировать

$$F_{\text{эф}} f = -j; \quad j = j_{ei} + j_{ee}, \quad (6)$$

где j_{ei} и j_{ee} — потоки вследствие столкновений электронов с ионами и электронами.

Излучение должно наиболее сильно сказываться при больших скоростях. Исследуем поэтому поведение $f(\varepsilon)$ при энергиях, в несколько

раз превышающих средние. При $\varepsilon \gg \langle \varepsilon \rangle$ асимптотические выражения для j имеют вид (в нерелятивистском случае)

$$j_{\varepsilon \gg \langle \varepsilon \rangle} \cong (2\pi e^4 \lambda N) \left(\frac{f}{\varepsilon} + \theta \frac{df}{\varepsilon d\varepsilon} \right), \quad \theta = \frac{2}{3} \langle \varepsilon \rangle, \quad (7)$$

и уравнение (6) запишется в виде

$$h \left(\frac{p}{mc} \right)^3 = - \left(1 + \frac{m}{M} \right) - \frac{d \ln f}{d\varepsilon} \left(\theta_\varepsilon + \frac{m}{M} \theta_i \right), \quad \text{где } h = \frac{H^2}{9\pi \lambda N m c^2}. \quad (8)$$

Решая это уравнение, находим

$$f(p)_{p \gg \langle p \rangle} = c e^{-Ap^2 - Bp^5}, \quad (9)$$

где

$$A = \frac{1}{2m} \cdot \frac{1 + \frac{m}{M}}{\theta_\varepsilon + \frac{m}{M} \theta_i}, \quad B = \frac{h m c^2}{5 (m c)^5 \left(\theta_\varepsilon + \frac{m}{M} \theta_i \right)}.$$

Среднюю энергию ионов θ_i считаем заданной, а среднюю энергию электронов находим из равенства потоков $Q_{\text{магн}} = q^+$, т. е. считаем, что излучаемая электронами энергия восполняется кулоновской передачей энергии от ионов. Окончательно решение (9) можно записать в виде $\left(x = \frac{\varepsilon}{\theta_\varepsilon} \right)$

$$f(x) = f^0(x) e^{-\alpha \left[\frac{x^{5/2}}{2} - \frac{15}{16} \sqrt{\pi} x - \text{const} \right]} \quad (\text{const} \approx 0,89). \quad (10)$$

Это качественно совпадает с результатом В. С. Кудрявцева [3]. Наше решение, однако, практически применимо при всех x , так как формально оно применимо при $x \gg 1$, а при $x \lesssim 1$ оно мало отличается от максвелловского.

Был проделан также аналогичный расчет для релятивистских скоростей электронов, причем средние скорости считались все же нерелятивистскими. При этом получается следующий результат:

$$f = f^0 \varphi(x), \quad \varphi(x) = e^{-\alpha \left[\mu^{5/2} \frac{5}{8\sqrt{2}} J \left(\frac{x}{\mu} \right) - \frac{15}{16} \sqrt{\pi} x - \text{const} \right]}, \quad (11)$$

$$\text{где } x = \frac{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} - m c^2}{\theta_\varepsilon}; \quad \mu = \frac{m c^2}{\theta_\varepsilon}$$

и интеграл $J \left(\frac{x}{\mu} \right)$ равен

$$J \left(\frac{x}{\mu} \right) = \int_1^{\frac{x}{\mu}} \frac{p^3}{\varepsilon} d\varepsilon = \arctg p - p + \frac{p^3}{3}; \quad p = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{\mu} \right)^2 - 1} - 1. \quad (12)$$

При нерелятивистских скоростях $x \ll \mu$, и тогда

$$J \left(\frac{x}{\mu} \right) \approx \frac{p^5}{5} \approx \frac{2^{5/2}}{5} \left(\frac{x}{\mu} \right)^{5/2}, \quad (13)$$

что приводит вновь к формуле (10). В случае ультрарелятивистских скоростей $x \gg \mu$

$$J\left(\frac{x}{\mu}\right) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\mu}\right)^3, \quad \varphi(x) = e^{-\alpha\left(\frac{x^{5/2}}{2}\sqrt{\frac{x}{2\mu}} \cdot \frac{5}{12}\right)}, \quad (14)$$

что качественно также совпадает с нерелятивистской формулой.

Из найденных формул видно, что распределение Максвелла ($f^0 = ce^{-x}$) довольно резко обрывается, начиная с $x_{\text{обр}} \sim \alpha^{-2/5}$. Например, для $H = 2 \cdot 10^4$ эс, $N = 10^{14}$, $\theta_e = 50$ кэв получаем $\alpha = \frac{1}{1680}$, так что $x_{\text{обр}} \sim 20$.

В заключение следует отметить, что в этом расчете излучение считалось полностью выходящим из плазмы. Поскольку в действительности, как мы видели, из слоя будет уходить (в практически интересных случаях) лишь $\frac{1}{10} \div \frac{1}{30}$ часть суммарного излучения электронов, а основная гармоника этого излучения поглощается на очень малых длинах, то искажение равновесного (максвелловского) распределения будет совершенно ничтожным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Зубарев, В. Н. Климов, см. т. I настоящего издания, стр. 249.
2. Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 3.
3. В. С. Кудрявцев, см. настоящий том, стр. 114.

Т. Ф. Волков

К ЗАДАЧЕ О РАСПАДЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ *

В работе рассмотрен частный случай распадаения произвольного разрыва в сплошной среде с целью получения оценки температур, которые могут быть получены при столкновении плотных пучков частиц друг с другом или с твердой мишенью. Приведены также краткие соображения о возможном влиянии магнитного поля.

Задача о распадении произвольного разрыва в сплошной среде представляет интерес в связи с дискуссией о возможности получения высоких температур путем столкновения достаточно плотных пучков частиц друг с другом или пучка частиц высокой энергии с твердой мишенью. Задача решается методами газовой динамики. Это значит, что сталкивающиеся массы имеют либо достаточно большую плотность, либо достаточно большие размеры. В момент столкновения образуется произвольный разрыв, на котором, вообще говоря, не выполняются условия Гюгонио. Такой разрыв не может существовать устойчиво и распадается [1]. Интересно оценить максимально возможные температуры, которые при этом могут быть получены, скорости расходящихся ударных фронтов, а также учесть возможное влияние магнитного поля. Будем предполагать, что сталкивающиеся массы имеют бесконечную ширину, т. е. разлета частиц в стороны не происходит и потери на излучение отсутствуют.

Подобная картина является, разумеется, крайней идеализацией условий, которые могли бы встретиться в установках

* Работа выполнена в 1956 г.

лабораторного типа, однако она может осуществиться при столкновениях газовых масс космических масштабов.

1. Пусть от места начального разрыва, которое на рис. 1 изображено пунктирной линией, расходятся в обе стороны ударные волны, которые обозначены сплошными линиями. На месте начального разрыва остается контактный разрыв, т. е. скачок плотности, температуры и магнитного поля (которое предполагается параллельным поверхности разрыва) при постоянстве полного давления $p + \frac{H^2}{8\pi}$.

Вводим следующие обозначения:

U_i ($i=1, 2$) — скорости ударных фронтов 1 и 2.

u_i ($i=1, 2, 3, 4$) — скорости вещества в областях I, II, III, IV . Заметим, что $u_3 = u_4$. ρ_i, H_i, p_i ($i=1, 2, 3, 4$) — плотность, газокинетическое давление и магнитное поле в этих областях.

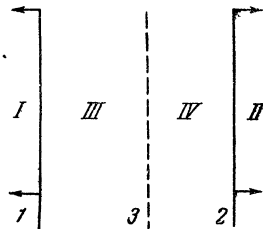


Рис. 1.

Будут использованы также следующие безразмерные величины: γ — отношение теплоемкостей C_p/C_v , одинаковое для всех областей;

$$h_i = \frac{H_i}{\sqrt{8\pi\rho_i}} \quad (i=1, 2, 3, 4); \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \beta; \quad \alpha_i^2 = \frac{1}{\rho_1 u_1^2} \left(p_i + \frac{H_i^2}{8\pi} \right) \equiv \\ \equiv \theta_i^2 + \delta_i^2 \quad (i=1, 2, 3, 4); \quad x_1 = \frac{U_1}{u_1}; \quad x_2 = \frac{U_2}{u_1}; \quad x_3 = \frac{u_3}{u_1}.$$

Для определения девяти величин $U_1, U_2, \rho_i, u_3, p_i, H_i$ ($i=3, 4$) имеем шесть условий сохранения вещества, импульса и энергии на ударных фронтах

$$p_i + \frac{H_i^2}{8\pi} + \rho_i(u_i - U_i) = p_j + \frac{H_j^2}{8\pi} + \rho_j(u_j - U_j); \quad (1) \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{H_i^2}{8\pi\rho_i} + \frac{1}{2}(u_i - U_i)^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_j}{\rho_j} + \frac{H_j^2}{8\pi\rho_j} + \frac{1}{2}(u_j - U_j).$$

Здесь $i=1, j=3$ для первого фронта, $i=2, j=4$ — для второго. К системе следует добавить два условия «вмороженности» магнитного поля и одно условие отсутствия скачка полного давления на границе областей III и IV :

$$\frac{H_1}{\rho_1} = \frac{H_3}{\rho_3}, \quad \frac{H_4}{\rho_4} = \frac{H_2}{\rho_2}, \quad p_3 + \frac{H_3^2}{8\pi} = p_4 + \frac{H_4^2}{8\pi}; \quad (1')$$

Из этой системы, положив $u^2 = 0$ (среда *II* покоится в лабораторной системе координат), получаем уравнения для определения трех безразмерных скоростей x_i

$$\begin{aligned} \beta^2 [\alpha_1^2 + (1 - x_3)(1 - x_1)] &= \alpha_2^2 + x_3 x_2; \\ (x_3 - x_1)^2 [\alpha_1^2 + (1 - x_3)(1 - x_1)] &= \alpha_1^2 (x_3 - x_1) - \frac{1}{\gamma} \times \\ &\times \delta_1^2 (x_3 - 1) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (x_3 - x_1)(1 - x_3)(1 - x_3 - 2x_1); \\ (x_3 - x_2)^2 (\alpha_2^2 + x_3 x_1) &= -\alpha_2^2 x_2 (x_3 - x_2) + \frac{1}{\gamma} \delta_2^2 x_3 - \\ &- \frac{\gamma - 1}{2\gamma} x_2 x_3 (x_3 - x_2)(2x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Безразмерные температуры в областях *III* и *IV* можно определить из соотношений

$$\theta_3^2 = \frac{P_3}{\rho_3 u_1^2} = (x_3 - x_1)(1 - x_3) + \alpha_1^2 \frac{x_3 - x_1}{1 - x_1} - \delta_1^2 \frac{1 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad (3)$$

$$\theta_4^2 = \frac{P_4}{\rho_4 u_1^2} = -(x_3 - x_2)x_3 - \alpha_2^2 \frac{x_3 - x_2}{x_2} + \delta_2^2 \frac{x_2}{x_3 - x_2}. \quad (4)$$

Для того чтобы от начального разрыва в обе стороны распространялись ударные волны, должно выполняться определенное условие, сводящееся к тому, что относительная скорость сталкивающихся газовых масс должна быть достаточно велика (см., например, [1]). Если оно не выполнено, то в одну сторону распространяется волна разрежения. Можно вывести также условие, обобщенное на случай присутствия магнитного поля, которое получается заменой $p_i \rightarrow p_i + \frac{H_i^2}{8\pi}$ ($i = 1, 2$). Будем считать, что указанное условие выполняется.

2. Рассмотрим случай, когда магнитное поле отсутствует. Кроме того, положим газокINETические давления по обе стороны от начального разрыва равными нулю. В этом случае от разрыва расходятся ударные волны при любой относительной скорости столкновения.

Имеем

$$\begin{aligned} \beta(1 - x_3)(1 - x_1) &= x_2 x_3, \\ x_3 - x_1 &= \frac{\gamma}{2(\gamma - 1)}(1 + x_3 - 2x_1), \\ x_3 - x_2 &= -\frac{\gamma}{2(\gamma - 1)}(2x_2 - x_3). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда получаем безразмерные скорости x_1 , x_2 и x_3

$$x_2 = \frac{\gamma+1}{2} x_3, \quad x_3 = \frac{2x_1}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (6)$$

$$x_1 = -\frac{\gamma-1}{2} \frac{1 + \frac{2\beta}{\gamma-1}}{1-\beta} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{\sqrt{\beta}}{1-\beta}.$$

Из (6) имеем
при $\beta \ll 1$

$$x_1 \approx -\frac{\gamma-1}{2} + \frac{\gamma+1}{2} \sqrt{\beta},$$

при $\beta \gg 1$

$$x_1 \approx 1 - \frac{\gamma+1}{2\sqrt{\beta}}.$$

В предельном случае $\beta = 0$ (плотность вещества справа значительно больше плотности вещества слева) $U_1 = -\frac{\gamma-1}{2} u_1$, т. е. U_1 равно скорости ударной волны, отраженной от абсолютно жесткой стенки. В другом предельном случае $\beta = \infty$ эта скорость равна u_1 , т. е. движения ударного фронта в глубь области I не происходит. Плотный газ в области I действует, как поршень.

Интересно найти отношение плотностей сталкивающихся масс, при котором скорость отраженного фронта в лабораторной системе координат равна нулю, т. е. когда расширение нагретой области происходит внутрь области, занятой покоящимся газом. Отношение плотностей для этого должно быть равно

$$\beta = \frac{(\gamma-1)^2}{4}.$$

Зная безразмерные скорости x_1 , x_2 , x_3 , можно найти из (3) и (4) безразмерные температуры. Так, при $\beta \ll 1$ получаем

$$\theta_3^2 = \frac{\gamma-1}{2} (1 - 2\sqrt{\beta}), \quad (7)$$

$$\theta_4^2 = \frac{\gamma-1}{2} \beta. \quad (8)$$

Формулы для $\beta \gg 1$ получаются из (7) и (8) заменой $\beta \rightarrow \frac{1}{\beta}$.

При равенстве плотностей ($\beta = 1$) получим

$$\theta_3^2 = \frac{(\gamma-1)(3-\gamma)}{16}, \quad (9)$$

$$\theta_4^2 = \frac{\gamma-1}{8}. \quad (10)$$

Пусть пучок частиц плотности $10^{18} \frac{1}{\text{см}^3}$, нулевой температуры и кинетической энергии $\sim 10^4$ эв на частицу сталкивается с твердой мишенью (плотность $10^{22} \frac{1}{\text{см}^3}$). Тогда температуры в областях III (пучок) и IV (мишень) будут соответственно 10^3 эв и 1 эв. Отсюда видно, что имеется мало надежды нагреть твердую мишень до заметной температуры бомбардировкой быстрыми частицами. Более того, из-за неучета потерь на излучение и конечной ширины пучка эту оценку температуры мишени следует считать оценкой сверху.

3. Остановимся кратко на влиянии магнитного поля и газокINETического давления на скорости расхождения фронтов и величину температуры. Расчет показывает, что увеличение полного давления $p + \frac{H^2}{8\pi}$ с одной из сторон начального разрыва приводит к снижению температуры с этой стороны. Температура с противоположной стороны возрастает, стремясь к максимальному значению, равному значению температуры за фронтом сильной ударной волны, движущейся перед поршнем, скорость которого равна скорости налетания. Условием осуществления такого случая является выполнение неравенства

$$\frac{p}{\rho u_1^2} + \frac{H^2}{8\pi \rho u_1^2} \gg 1$$

для одной из сторон начального разрыва. Если это неравенство выполнено по обеим сторонам разрыва, то столкновение масс будет для них малым возмущением. В обе стороны разойдутся две слабые ударные волны со скоростью малых возмущений. Температуры при этом останутся практически неизменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГТТИ, 1956.

Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев

О ВЫСОКОЧАСТОТНОМ НАГРЕВЕ ПЛАЗМЫ*

В настоящем отчете рассмотрен метод нагрева ионов плазмы, основанный на использовании циклотронного резонанса.

Учет собственных полей плазмы, вызванных движением ионов и электронов, может существенно изменить характер движения частиц, нарушив режим нагрева.

Для выяснения условий, при которых возможно ускорение ионов, в § 1 предварительно рассматривается задача о движении частицы во внешнем поле без учета влияния собственного самосогласованного поля плазмы.

Анализ влияния самосогласованного поля плазмы проведен в § 2 в рамках гидродинамического приближения.

§ 1. Изолированная частица в высокочастотном поле

Рассмотрим поведение отдельной заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле H_0 при наличии высокочастотного поля частоты Ω . Возможные способы задания этого поля приводят к двум различным постановкам задачи: 1) резонанс при наличии внешней вынуждающей силы; 2) параметрический резонанс.

Первый случай не нуждается в дополнительных комментариях. Остановимся подробнее на втором случае (параметрический резонанс).

Пусть постоянное магнитное поле, направленное по оси z , модулировано во времени с частотой Ω ($H = H_0(1 + \alpha \sin \Omega t)$). Переменное магнитное поле будет генерировать вихревое электрическое поле, которое в свою очередь должно уско-

* Работа выполнена в 1956 г.

рять рассматриваемую частицу, если частота обращения частицы в магнитном поле H_0 совпадает с частотой модуляции Ω . Предполагается цилиндрическая симметрия задачи.

Будем исходить из функции Лагранжа в прямоугольных декартовых координатах

$$L = \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{e}{2Mc} p_x H_0 (1 + \alpha \sin \Omega t) y + \\ + \frac{e}{2Mc} p_y H_0 (1 + \alpha \sin \Omega t) x. \quad (1.1)$$

Движение по оси z (вдоль магнитного поля) не рассматриваем. Уравнения движения будут иметь вид

$$M\ddot{x} - \frac{eH}{c}\dot{y} - \frac{e}{2c}\dot{H}y = 0, \\ M\ddot{y} + \frac{eH}{c}\dot{x} + \frac{e}{2c}\dot{H}x = 0. \quad (1.2)$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, получим для переменной $u = x + iy$ следующее уравнение:

$$M\ddot{u} + i\frac{eH}{c}\dot{u} + \frac{i}{2}\frac{e\dot{H}}{c}u = 0. \quad (1.3)$$

Введем ларморовскую частоту $\Omega_H = \frac{eH}{Mc}$.

$$\ddot{u} + i\Omega_H\dot{u} + \frac{i\dot{\Omega}_H}{2}u = 0. \quad (1.4)$$

Заменой переменной $u = we^{-\frac{i}{2}\int_0^t \Omega dt}$ исключим из уравнения член, содержащий первую производную искомой функции w

$$\ddot{w} + \frac{\Omega_H^2}{4}w = 0. \quad (1.5)$$

Подставляя Ω_H^2 и пренебрегая членом с α^2 , имеем окончательно:

$$\ddot{w} + \frac{1}{4}w(\Omega_{H_0}^2 + 2\alpha\Omega_{H_0}^2 \sin \Omega t) = 0. \quad (1.6)$$

Отвлекаясь от конкретных условий, проанализируем свойства решений этого уравнения. Уравнение (1.6) принадлежит к типу уравнений Матье

$$\ddot{y} + y(a - 2q \cos \Omega t) = 0.$$

В зависимости от значений параметров a и q уравнение Магье будет иметь либо только устойчивые, либо также и неустойчивое растущее решение (физически это соответствует ускорению частицы). Начертим диаграмму устойчивости, приведенную в [1]. По оси ординат отложен параметр a , а по оси абсцисс q . Заштрихованные на чертеже области соответствуют существованию неустойчивого решения.

Из диаграммы видно, что ускорение частицы возможно при значениях a , равных квадратам целых чисел (1, 4, 9, ... и т. д.).

Точка $a = 1$ соответствует $\Omega = \Omega_{H_0}$; $a = 4 \rightarrow \Omega = \frac{1}{2} \Omega_{H_0}$ и т. д.

Разброс частоты, не нарушающий режима ускорения (при $a = 1$), связан с минимальной глубиной модуляции

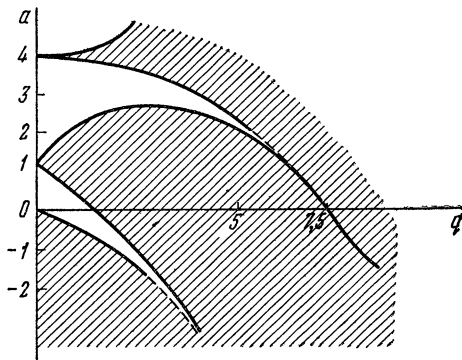


Рис. 1.

внешнего магнитного поля $\alpha_{\min} > 2 \frac{\Delta\Omega}{\Omega_{H_0}}$. Аналогичное требование накладывается на максимальную величину пространственной неоднородности постоянного магнитного поля.

Рассмотрим конкретное решение уравнения (1.6) при $\Omega = \Omega_{H_0}$ и начальных условиях

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & y_0 &= 0, \\ \dot{x}_0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0, \end{aligned}$$

что соответствует первоначально покоящимся частицам.

В переменных w начальные условия переписутся в виде

$$w(0) = 1, \quad \dot{w}(0) = \frac{i}{2} \Omega_{H_0}. \quad (1.7)$$

Для получения решения применяется метод Уиттекера: решение $w(t)$ ищется в виде $w = e^{\mu t} \Phi(t, \sigma)$. Параметры μ , σ и функции $\Phi(t, \sigma)$ разлагаются в ряд по степеням α .

Простые, хотя и довольно длинные выкладки приводят к следующему результату:

$$w \cong e^{\frac{\alpha}{4} t \Omega_{H_0}} \cos \frac{\Omega_{H_0} t}{2} + i e^{-\frac{\alpha}{4} t \Omega_{H_0}} \sin \frac{\Omega_{H_0} t}{2}. \quad (1.8)$$

Следующий член разложения показателя экспоненты, определяющий ошибку вычисления при больших временах, равен $\frac{9}{256} \alpha^3 \Omega_{H_0}$. Относительная ошибка за время t_n нагрева имеет порядок величины

$$\frac{e^{\frac{\alpha}{4} \Omega_{H_0} t_n + 0,05 \alpha^3 \Omega_{H_0} t_n}}{e^{\frac{\alpha}{4} \Omega_{H_0} t_n}} \sim e^{0,05 \alpha^3 t_n \Omega_{H_0}},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |w| \cong \sqrt{e^{\frac{\alpha t}{2} \Omega_{H_0}} \cos^2 \frac{\Omega_{H_0} t}{2} + e^{-\frac{\alpha t}{2} \Omega_{H_0}} \sin^2 \frac{\Omega_{H_0} t}{2}}. \quad (1.9)$$

Кинетическая энергия частицы в момент времени t после начала ускорения равна

$$E \cong \frac{M \Omega_{H_0}^2}{8} e^{\frac{\alpha t}{2} \Omega_{H_0}}. \quad (1.10)$$

Ускорение прекращается, как только амплитуда колебания частицы сравняется с размерами системы, т. е. при

$$E_{\text{макс}} \cong \frac{M}{8} \Omega_{H_0}^2 r_{\text{макс}}^2.$$

Время, необходимое для ускорения до таких энергий,

$$\tau \cong \frac{2}{\alpha \Omega_{H_0}} \ln \frac{r_{\text{макс}}}{r_0}. \quad (1.11)$$

Таким образом, в пренебрежении полями самой плазмы возможен разогрев ионов методом циклотронного резонанса.

В зависимости от $r_{\text{макс}}$, а также от H_0 максимальная энергия будет изменяться в пределах десятков *кэв*. При $H_0 \sim 10^4$ гаусс, $r_{\text{макс}} \sim 10$ см, $M \sim 4 \cdot 10^3 m_e$ получаем $E_{\text{макс}} \sim 100$ *кэв*.

§ 2. Плазма в высокочастотном поле

Движущиеся в плазме ионы и электроны создают электромагнитные поля. При достаточной плотности частиц в плазме обратное действие этих полей будет сказываться на движении ионов.

Воспользуемся для описания плазмы гидродинамическими уравнениями, в которых опустим члены, содержащие давление. Диссипативными членами также будем пренебрегать. (Роль этих членов заключается в «перекачке» энергии упорядоченного колебательного движения ионов плазмы в энергию теплового движения. Но сейчас нас интересует только вопрос о резонансной частоте).

Итак, исходная система уравнений двухжидкостной гидродинамики с учетом цилиндрической симметрии имеет вид

$$\begin{aligned}
 n_i M \frac{dv_{ri}}{dt} &= n_i M \frac{v_{\varphi i}^2}{r} + n_i \frac{eH}{c} v_{\varphi i} + n_i e E_r, \\
 n_i M \frac{dv_{\varphi i}}{dt} &= -\frac{n_i e H}{c} v_{ri} - 2 \frac{v_{ri} v_{\varphi i}}{r} n_i M + n_i e E_{\varphi}, \\
 n_e m \frac{dv_{re}}{dt} &= n_e \frac{eH}{c} v_{re} - 2 \frac{v_{re} v_{\varphi e}}{r} n_e m - n_e e E_{\varphi}, \\
 n_e m \frac{dv_{\varphi e}}{dt} &= m n_e \frac{v_{\varphi e}^2}{r} - n_e \frac{eH}{c} v_{\varphi e} - n_e e E_r, \\
 \operatorname{rot} H &= \frac{4\pi}{c} e (n_i v_{\varphi i} - n_e v_{\varphi e}) + \frac{1}{c} \dot{E}, \\
 \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \dot{H}, \\
 \operatorname{div} E &= 4\pi e (n_i - n_e), \\
 \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_e v_{re}) &= 0, \\
 \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_i v_{ri}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь n_i (n_e) — число ионов (электронов) в 1 см^3 , v_{ri} (v_{re}) и $v_{\varphi i}$ ($v_{\varphi e}$) — соответственно радиальная и азимутальная компоненты скорости ионов (электронов).

Первые четыре уравнения описывают перенос импульса ионной и электронной компонент плазмы, последние два — уравнения непрерывности.

В силу цилиндрической симметрии задачи, отличны от нуля компоненты полей: E_r , E_{φ} , H_z .

Начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{aligned}
 v_{ri} = v_{\varphi i} = v_{re} = v_{\varphi e} &= 0; \quad n_i = n_e = n_0; \\
 E_r &= 0; \quad H_z = H_0;
 \end{aligned}$$

Так как нас интересуют резонансы на ионной колебательной ветви, соответствующие частотам, малым по сравнению с характерными электронными частотами плазмы, то, усредняя исходные уравнения по ларморовскому вращению электронов, получим

$$\frac{dv_{ri}}{dt} = \frac{v_{\varphi i}^2}{r} + \Omega_H v_{\varphi i} + \frac{eE_r}{M}, \tag{2.2}$$

$$\frac{dv_{\varphi i}}{dt} = -\frac{2v_{ri}v_{zi}}{r} - \Omega_H v_{ri} + \frac{eE_{\varphi}}{M}, \quad (2.3)$$

$$\omega_H v_{\varphi e} + \frac{eE_r}{m} = 0, \quad (2.4)$$

$$\omega_H v_{re} - \frac{eE_z}{m} = 0, \quad (2.5)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{4\pi e}{c} (n_i v_{\varphi i} - n_e v_{\varphi e}) + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\varphi}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 4\pi e (n_i - n_e), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_i v_{ri}) = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_e v_{re}) = 0. \quad (2.10)$$

Здесь Ω_H и ω_H — ларморовские частоты ионов и электронов, соответственно. Исследование этой системы уравнений проведем в двух предельных случаях: 1) квазинейтральная плазма (большие плотности); 2) малые плотности.

1) *Квазинейтральная плазма.* Если плазма квазинейтральна, т. е. объемным зарядом можно пренебречь ($\frac{n_i - n_e}{n_i} \ll 1$), то исходная система уравнений существенно упрощается. Физически это соответствует следующей картине: уже малые объемные плотности зарядов $e(n_i - n_e)$ создают радиальное электрическое поле $\text{div } E = 4\pi e(n_i - n_e)$, обуславливающее дрейф электронов в азимутальном направлении со скоростью $v_{\varphi e} = c \frac{E_r}{H}$. Азимутальный ток электронов $j_{\varphi e} = -en v_{\varphi e}$ создает переменное магнитное поле согласно уравнению

$$-\frac{\partial H'_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_{\varphi e}.$$

Это магнитное поле в свою очередь создает вихревое электрическое поле $E_{\varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE'_r) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H'}{\partial t} \right]$, которое вызывает радиальный дрейф электронов $\frac{cE'_{\varphi}}{H}$, стремящийся нейтрализовать объемный заряд.

Радиальный ток электронов пропорционален квадрату плотности, т. е. рассматриваемый эффект существен при больших плотностях. Выясним, к чему сводится исходная система уравнений для квазинейтральной плазмы.

В этом случае в уравнениях непрерывности мы можем положить

$$n_i = n_e = n(r, t),$$

так что

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_i v_{ri}) = 0,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_e v_{re}) = 0.$$

Отсюда следует, что $rnv_{ri} = rnv_{re} + \text{const.}$ Из начальных условий следует, что $c = 0$, т. е. $v_{ri} = v_{re} = v_r$. Таким образом, радиальные скорости электронов и ионов равны. Подставляя v_r из (2.5) в (2.3), получим:

$$\frac{dv_{\varphi i}}{dt} = -\frac{2v_r v_{\varphi i}}{r}$$

или, интегрируя,

$$r^2 v_{\varphi i} = \text{const.}$$

Мы получили интеграл площадей. Так как при $t = 0$ $v_{\varphi i} = 0$, то и для любого t $v_{\varphi i} = 0$.

Этот результат можно объяснить следующим образом: азимутальные токи электронов создают вихревое электрическое поле, в точности уравновешивающее внешнее электрическое поле. Окончательно имеем уравнения

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{1}{4\pi nM} H \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{4\pi nMc} H \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial t}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r H) = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r n) = 0, \quad (2.13)$$

$$v_r = c \frac{E_{\varphi}}{H}. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.11) представляет собой уравнение переноса импульса, правая часть которого есть градиент магнитного давления $\frac{H^2}{8\pi}$.

Из уравнения (2.12) и (2.13) следует, что $\frac{H}{n} = \frac{H_0}{n_0}$.

Произведем линеаризацию полученных уравнений. Нулевое приближение характеризуется следующими величинами: n_0 — невозмущенная плотность, H_0 — магнитное поле. В первом приближении v , n , H — соответственно скорость и поправки к невозмущенной плотности и магнитному полю. Для поправок первого приближения v и H получим уравнения

$$n_0 M \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} H_0 \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{c^2} H_0^2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{r} H_0 \frac{\partial (rv)}{\partial r}.$$

Исключая из этих уравнений v , получим для H следующее уравнение:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right),$$

где $a = c \frac{\Omega_{H_0}}{\sqrt{\Omega_{H_0}^2 + \Omega_0^2}}$ ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{M}}$ — ленгмюровская частота ионных колебаний плазмы.)

К этим уравнениям нужно добавить уравнения Максвелла для электромагнитного поля вне плазмы. В частности, для продольной компоненты магнитного поля имеем:

$$\Delta H - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0.$$

В уравнениях (2.11)—(2.14), описывающих поведение гидродинамических величин и полей внутри плазмы, мы пренебрегли их зависимостью от z , что означает, что длина волны вдоль оси z много больше радиуса плазменного цилиндра. В уравнениях для поля в вакууме этого делать нельзя, так как радиальная зависимость устанавливается автоматически при заданной длине волны вдоль z . В цилиндрическом случае поле вне плазмы будет затухать на больших расстояниях от плазменного цилиндра, как соответствующая бесселева функция от мнимого аргумента.

Рассматривая полученные уравнения совместно с граничными условиями на поверхности плазменного цилиндра, можно найти собственные частоты колебаний плазменного цилиндра. Эти частоты определяются скоростью звука $\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}}$ и геометрией системы.

Таким образом, мы приходим в выводу, что резонансная частота ионов в квазинейтральной плазме, в отличие от частоты циклотронного резонанса, определяется макроскопическими свойствами объема плазмы. Это чрезвычайно усложняет применение резонансного нагрева для квазинейтральной плазмы, тем более, что ширина резонанса $\Delta\omega$ определяется частотой столкновений, быстро убывающей с ростом температуры плазмы.

Кроме того, в отличие от отдельной частицы плазма описывается нелинейными уравнениями, что может ограничить максимальную амплитуду колебаний в плазме.

2) *Малые плотности.* Пусть плотность плазмы такова, что можно пренебречь собственными вихревыми полями (но не полем объемного заряда). Для этого случая уравнения (2. 2)—(2. 10) примут вид

$$\frac{dv_{ri}}{dt} = \frac{v_{\varphi i}^2}{r} + \Omega_H v_{\varphi i} + \frac{eE_r}{M}, \quad (2. 15)$$

$$\frac{dv_{\varphi i}}{dt} = -\frac{2v_{ri}v_{\varphi i}}{r} - \Omega_H v_{ri} + \frac{eE_{\varphi}}{M}, \quad (2. 16)$$

$$v_{re} = c \frac{E_{\varphi}}{H}; \quad v_{\varphi e} = -c \frac{E_r}{H}, \quad (2. 17)$$

$$E_{\varphi} = -\frac{\alpha \Omega_{H_0} H_0 \cos \Omega t}{2c} r, \quad (2. 18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 4\pi e (n_i - n_e), \quad (2. 19)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_i v_{ri}) = 0, \quad (2. 20)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_e v_{re}) = 0. \quad (2. 21)$$

На нашу систему действует внешнее модулированное магнитное поле H и вихревое электрическое поле E .

В этом случае удастся непосредственно разрешить систему уравнений. Подставим (2. 17) в (2. 21):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{\alpha}{2} \Omega \cos \Omega t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_e) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$n_e = n_0 e^{\alpha \sin \Omega t}.$$

Таким образом, электронная плотность, не меняя характера своего распределения по объему, изменяется во времени по закону $e^{\alpha \sin \Omega t}$ около положения равновесия.

Для ионов будем искать автомодельное решение (в лагранжевых координатах) в виде

$$r = r_0 f(t); \quad \dot{r} = r_0 \dot{f}(t) = r \frac{\dot{f}}{f}$$

(r_0 — начальная координата данного иона). При этом предположении уравнение (2.20) имеет решение

$$n_i = \frac{n_0}{f^2(t)}.$$

Так как электронные и ионные плотности меняются по различным законам, то в объеме будет образовываться заряд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 4\pi e n_0 \left(\frac{1}{f^2} - e^{\alpha \sin \Omega t} \right),$$

который создаст радиальное поле E_r (действующее как на электроны, так и на ионы и препятствующее радиальному движению)

$$E_r = 2\pi n_0 e \left(\frac{1}{f^2} - e^{\alpha \sin \Omega t} \right) r. \quad (2.22)$$

В лагранжевых координатах уравнения (2.15) и (2.16), описывающие движение ионов и электронов, переписутся в виде

$$\ddot{r} = \dot{\varphi}^2 r + \Omega_{H_0} r \dot{\varphi} + \frac{2\pi e^2 n_0}{M} r \left(\frac{r_0^2}{r^2} - e^{\alpha \sin \Omega t} \right),$$

$$r \cdot \ddot{\varphi} = -2\dot{r}\dot{\varphi} - \Omega_{H_0} \dot{r} - \frac{\Omega_H r}{2}.$$

Экспоненту в выражении $e^{\alpha \sin \Omega t}$ разложим в ряд, ограничиваясь линейным по α членом ($\alpha \ll 1$). Второе уравнение системы сразу дает первый интеграл $r^2 = \frac{r_0^2 \Omega_{H_0}}{2\dot{\varphi} + \Omega_H}$; исключая угловую координату из первого уравнения, окончательно получим:

$$\ddot{r} + \frac{\Omega_{H_0}^2 + 2\Omega_0^2}{4} r + \frac{\Omega_{H_0}^2 + \Omega_0^2}{2} \alpha \sin \Omega t r = \frac{r_0^4}{4r^3} + \frac{\Omega_0^2 r_0^2}{2r}, \quad (2.23)$$

где Ω_0 — ленгмюровская частота $\left(\Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M} \right)$.

Влияние конечной плотности в этом уравнении сказалось в появлении членов с Ω_0 . Если положить $n_0 = 0$ ($\Omega_0 = 0$), то уравнение (2.23) сведется к уравнениям (1.2), записанным

в цилиндрических координатах $\left(\dot{r} + \frac{\omega^2}{4} r = \frac{r_0^4 \omega_0^2}{4r^3}\right)$. Уравнение (2.23) можно представить в виде

$$\dot{r} + \frac{\omega^2}{4} r = \frac{r_0^4 \omega_0^2}{4r^3} + \frac{\Omega_0^2}{2} \left(\frac{r_0^2}{r} - \frac{r_0^4}{r^3} \right),$$

$$\omega = \sqrt{\Omega_{H_0}^2 + 2\Omega_0^2} + \frac{1}{4} \alpha \sin \Omega t \frac{\Omega_{H_0}^2 + \Omega_0^2}{\sqrt{\Omega_{H_0}^2 + 2\Omega_0^2}}.$$

В случае малости амплитуды колебаний ($|r - r_0| \ll r_0$) эту задачу можно переходом к прямоугольным координатам свести к решению уравнения Маттье с собственной частотой $\omega = \sqrt{\Omega_{H_0}^2 + 2\Omega_0^2}$.

Оценим верхний предел применимости использованного приближения. Имеем:

$$\text{rot } H' = \frac{4\pi}{c} j,$$

$$v_{\varphi e} = c \frac{E_r}{H}, \quad E_r \cong \frac{2\pi e n_0 (r^2 - r_0^2)}{r};$$

из формулы (2.23)

$$j_{\varphi} \sim \frac{c n_0^2}{H} \cdot 2\pi e^2 \frac{r^2 - r_0^2}{r}.$$

Собственное магнитное поле

$$H' \sim \frac{8\pi^2 n_0^2 e^2}{H} \frac{r^2 - r_0^2}{r} L,$$

где L — характерный размер системы, или $H' \sim \frac{8\pi^2 n_0^2 e^2}{H} L^2$.

Условие малости H' по сравнению с внешним переменным магнитным полем запишем следующим образом:

$$\frac{H'}{\alpha H_0} = \frac{8\pi^2 n_0^2 e^2 L^2}{\alpha H_0^2} = \frac{\Omega_0^4 L^2}{2\alpha \Omega_{H_0}^2 c^2} \ll 1,$$

т. е.

$$\frac{2\alpha \Omega_{H_0}^2 c^2}{\Omega_0^4 L^2} \gg 1.$$

Для $H_0 \sim 10^4$ гаусс, $L \sim 10$ см это условие выполняется при плотностях, много меньших 10^{11} см³.

Рассмотрим для определенности плазму с плотностью 10^{10} см^3 . Тогда резонансная частота колебаний плазмы равна

$$\omega = \sqrt{\Omega_{H_0}^2 + \Omega_0^2} \cdot 2 \sim 2\Omega_0,$$

так как Ω при этих условиях порядка Ω_{H_0} . По аналогии со случаем изолированной частицы во внешнем поле нужно ожидать, что допустима расстройка частоты $\frac{\omega - \Omega}{\omega} < \alpha$. Это условие можно переписать в виде $\frac{\Delta n}{n} < \alpha$, так как $\omega \sim 4\pi ne^2$.

При $\alpha \sim 0,01$ это неравенство требует, чтобы пространственная неоднородность начального распределения плазмы не превышала 1% , что является слишком жестким условием.

В заключение приносим благодарность М. А. Леонтовичу, Г. И. Будкеру и М. С. Иоффе за ценные указания и обсуждение работы в процессе ее выполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лаклан. Функции Матье.
-

С. М. Осовец

К ТЕОРИИ БЫСТРЫХ ПРОЦЕССОВ *

В статье приведены вычисления, характеризующие процесс быстрого сжатия плазменного шнура с учетом изменяющейся индуктивности контура. Выводятся основные соотношения для температуры сжатого шнура и времени сжатия. Рассмотрены условия отрыва плазменного шнура от стенок сосуда и вычисляется средняя температура газа к моменту отрыва:

В настоящей статье рассматривается поведение газового шнура, сжимающегося под действием магнитного поля собственного тока, в предположениях, несколько отличных от сделанных ранее [1]. Здесь рассмотрим случай, когда величина тока определяется не только внешним контуром, но и самим процессом протекания разряда. Поэтому исходную систему уравнений необходимо дополнить уравнением электрического равновесия контура в виде

$$\frac{dLI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t Idt = U. \quad (1)$$

Здесь C — емкость конденсаторной батареи, U — начальное напряжение на ней. Допустим, что энергия, запасенная в конденсаторной батарее, настолько велика, что за время рассматриваемого процесса можно пренебречь падением напряжения на батарее. Тогда, так как при $t=0$ и $I=0$, $LI = Ut$. Раскрывая значение индуктивности L , получим

$$L = \frac{L_0 + 2l \ln \frac{r_0}{r}}{c^2} = \frac{2l}{c^2} \left(\alpha - \ln \frac{r}{r_0} \right),$$

* Работа выполнена в 1957 г..

где $\alpha = \frac{L_0}{2l}$ — индуктивность внешнего контура, отнесенная к удвоенной длине разрядного промежутка. Теперь зависимость силы тока от времени и радиуса газового шнура может быть представлена в виде

$$I = \frac{UC^2t}{2l \left(\alpha - \ln \frac{r}{r_0} \right)}. \quad (2)$$

Это уравнение должно быть решено совместно с уравнением движения [1]

$$\frac{MN}{3} r \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{I^2}{c^2} + 2NT. \quad (3)$$

Кроме того, для определенности, вводим уравнение адиабаты

$$NT = NT_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{4/3}. \quad (4)$$

Введенное здесь адиабатическое приближение, конечно, не является обоснованным, так как в действительности имеется сверхзвуковое движение, сопровождающееся возникновением ударных волн. Однако сравнение с имеющимися экспериментальными результатами показывает, что основные величины, найденные в результате такого феноменологического рассмотрения, определены с достаточной степенью точности. К этим величинам относятся прежде всего: значения средней энергии частиц, изменение радиуса и скорости сжатия во времени, а также зависимость от времени величины полного тока, протекающего через разряд.

Недостаточно надежно, в таком приближении, определяются значение минимального радиуса сжатия плазменного столба и время его существования в состоянии максимального сжатия. Впрочем, эти величины вряд ли можно считать определенными достаточно надежно и при более строгом рассмотрении, так как в настоящее время мы не располагаем достаточными сведениями относительно значения вязкости плазмы, которая оказывает большое влияние на степень сжатия и время существования состояния сжатия.

Приведенные соображения показывают, что такое приближение имеет определенный смысл и полученные результаты могут быть использованы в качестве основы для проектирования систем подобного рода, что, однако, не исключает необходимости в проведении вычислений путем интегрирования соответствующих уравнений магнитной гидродинамики.

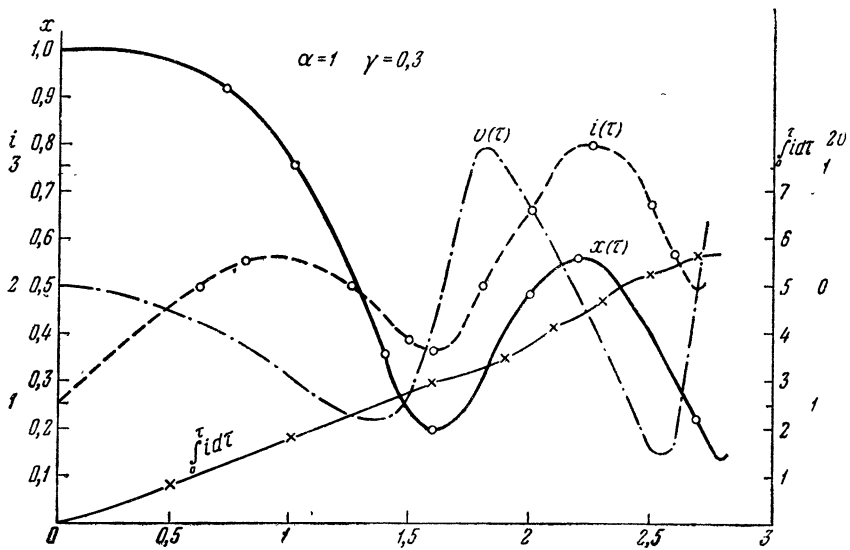


Рис. 1.

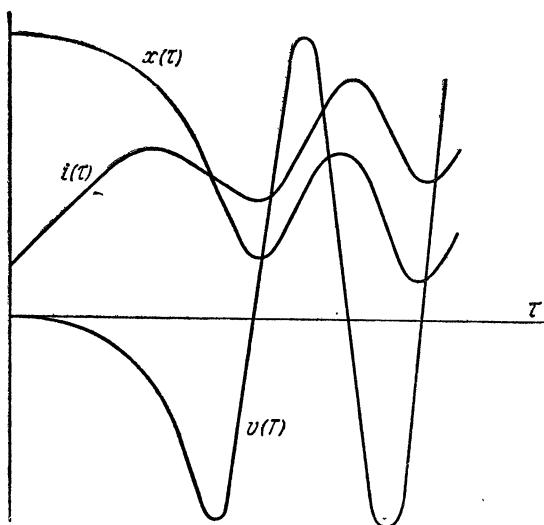


Рис. 1а.

После этих предварительных замечаний перейдем к исследованию адиабатического приближения. Решая совместно уравнения (2), (3) и (4), приходим к уравнению вида

$$r \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{3}{4MN} \frac{U^2 c^2 t^2}{l^2 \left(\alpha - \ln \frac{r}{r_0}\right)^2} + \frac{6T_0}{M} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{4/3} \quad (5)$$

и, переходя к безразмерным переменным $x = \frac{r}{r_0}$, $t = z\tau$, имеем

$$x \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\left(\frac{\tau + \alpha \sqrt{\gamma}}{\alpha - \ln x}\right)^2 + \frac{\gamma}{x^{4/3}}. \quad (6)$$

Здесь время отсчитывается от момента «отрыва» $\tau_0 = \alpha \sqrt{\gamma}$, когда плазменный шнур начинает сжиматься к центру, т. е. при $x = 1$, $\tau = 0$ и $\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 0$. Подробно вопрос об «отрыве» рассмотрен ниже. Величины, входящие в уравнение (6), определяются соотношениями

$$z = \sqrt{\frac{r_0 M l}{eU}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3} \Pi}, \quad \text{где } \Pi = \frac{e^2 N}{M c^2}, \\ \gamma = \frac{6T_0}{eU} \cdot \frac{l}{r_0} \sqrt[4]{\frac{1}{3} \Pi}. \quad (7)$$

Исследование уравнения (6) представляет собой первую часть поставленной задачи.

Характерными величинами, определяющими поведение системы, являются $x(\tau)$; $v(\tau) = \frac{dx}{d\tau}$ и $i(\tau)$. Значение тока нормируем на «ток отрыва»

$$i = \frac{I}{I_0} = \frac{\alpha \left(1 + \frac{\tau}{\alpha \sqrt{\gamma}}\right)}{\alpha - \ln x}. \quad (8)$$

Результаты численного решения уравнений (6) и (8), полученные Г. И. Бирюк и Д. В. Давиденко, для различных значений параметров α и γ представлены в виде семейства кривых, подобных кривым рис. 1 (а), и показаны на рис. 1—6. Величинами, характеризующими поведение системы и определяющими процесс нагрева, являются:

$$x_{\min}, \frac{T_{\max}}{T_0} = \left(\frac{1}{x_{\min}}\right)^{4/3}, \quad v_{\max}, \quad i_{\max}, \quad i_{\min}, \quad \int_0^{\tau} i d\tau.$$

Настоящее исследование ограничивается рассмотрением поведения системы до второго максимума на кривой $x(\tau)$.

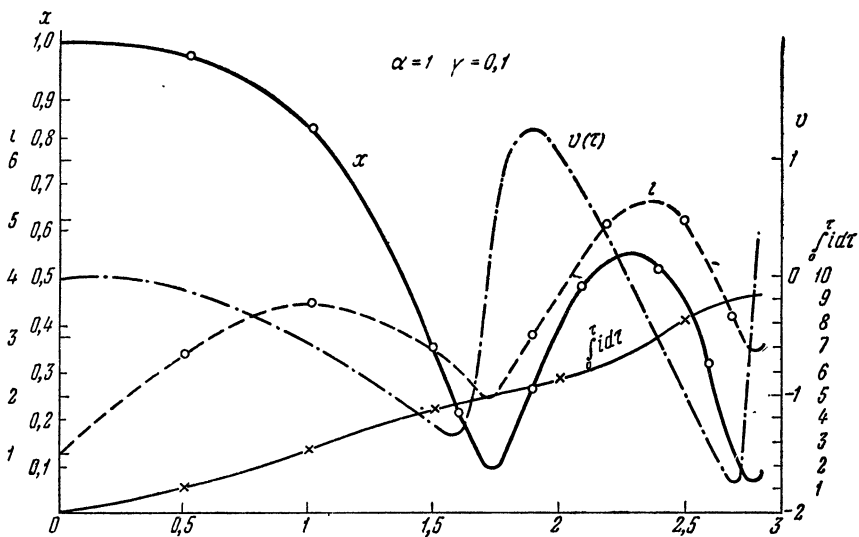


Рис. 2.

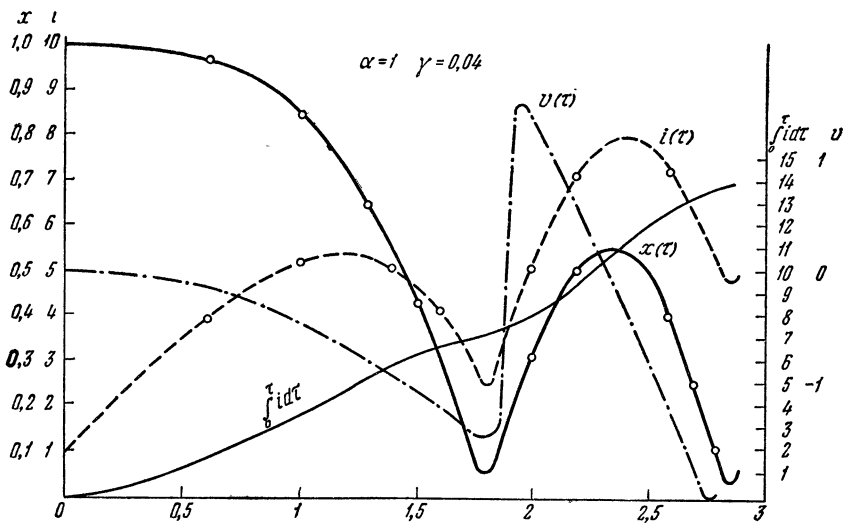


Рис. 3

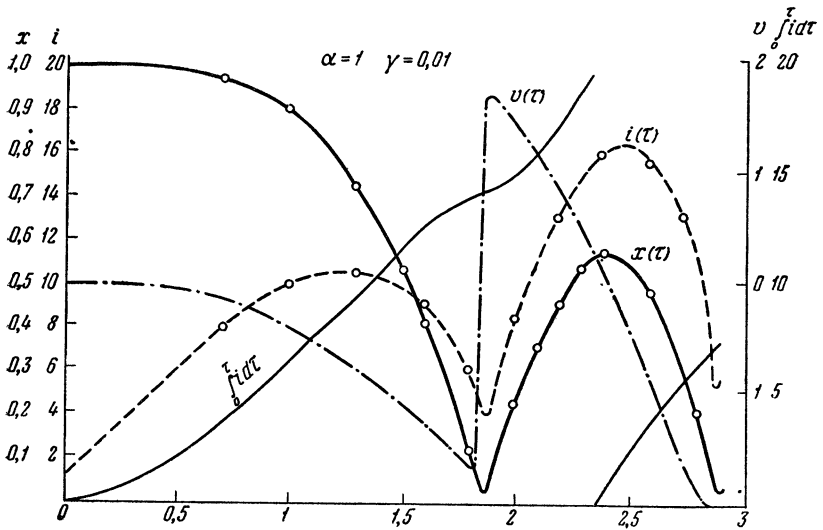


Рис. 4.

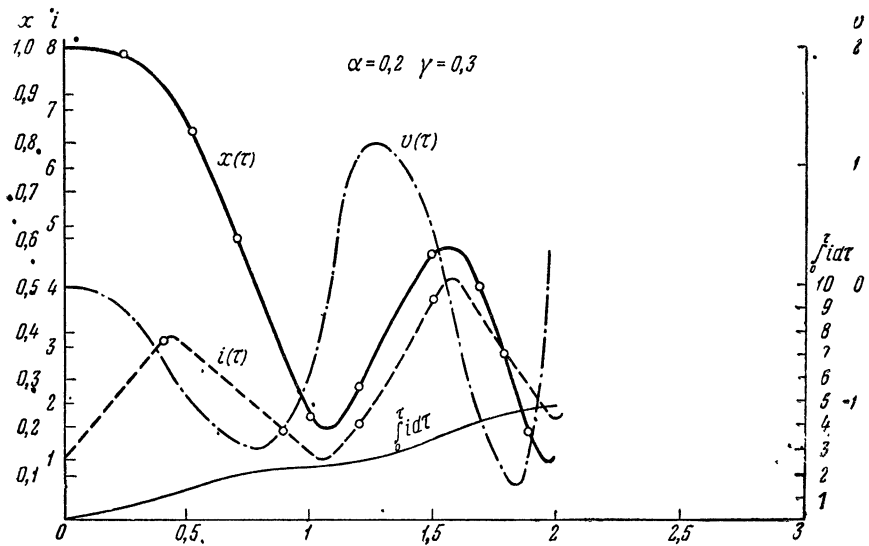


Рис. 5.

Дальнейшее рассмотрение вряд ли имеет смысл, так как принятое предположение об источнике питания с бесконечно большим запасом энергии становится неприменимым. Приня-

тое допущение сводится к условию $\frac{1}{CU} \int_0^t Idt \ll 1$; вводя принятые безразмерные переменные, выражая емкость C в микрофарадах и U в вольтах, перепишем его в виде

$$\frac{1,3 \cdot 10^3 r_0}{UC} \sqrt{\gamma} \Pi \int_0^{\tau} id\tau \ll 1. \quad (9)$$

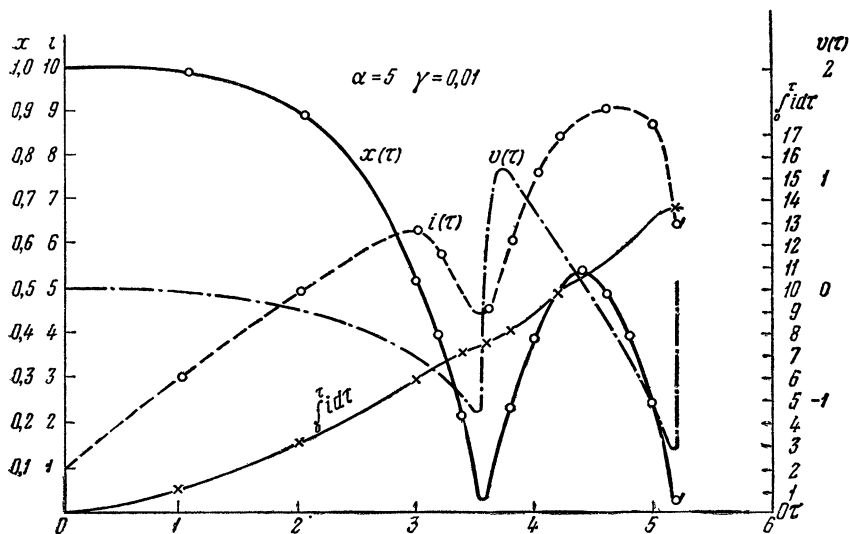


Рис. 6.

Результаты вычислений соответствующих величин в характерных точках «особенностей» сведены в таблицу. Индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к первой и второй особенностям.

На рис. 7, по данным таблицы, построены зависимости

$$\lg \left(\frac{T_{\max}}{T_0} \right)_1, \lg \left(\frac{T_{\max}}{T_0} \right)_2, \lg \int_0^{\tau_1} id\tau \text{ и } \lg \int_0^{\tau_2} id\tau \text{ в функции } \lg \frac{1}{\gamma}.$$

Из вида этих зависимостей следует, что с достаточной для наших целей точностью можно считать, что $\left(\frac{T_{\max}}{T_0} \right)_1$ и $\left(\frac{T_{\max}}{T_0} \right)_2$

Таблица

 $\alpha = 1$

γ	$x_{\text{МИН}_1}$	$x_{\text{МИН}_2}$	$\left(\frac{T_{\text{МАКС}}}{T_0}\right)$	$\left(\frac{T_{\text{МАКС}}}{T_0}\right)$	$\psi_{\text{МАКС}_1}$	$\psi_{\text{МАКС}_2}$	$i_{\text{МАКС}_1}$	$i_{\text{МАКС}_2}$	$i_{\text{МИН}_1}$	$i_{\text{МИН}_2}$	$\int_0^{\tau_1} i d\tau$	$\int_0^{\tau_2} i d\tau$	τ_1	τ_2
0,3	0,2	0,13	8,53	15,2	1,12	1,4	2,25	3,2	1,5	1,96	3,1	5,5	1,52	9,7
0,1	0,09	0,065	24,8	38,2	1,36	1,76	3,6	5,3	1,9	2,7	4,8	9,9	1,73	2,77
0,04	0,045	0,03	62,5	108	1,5	2	5,3	8	2,45	4,3	7,1	14	1,79	2,84
0,01	0,015	0,01	270	465	1,73	2,35	10,6	16,2	3,8	5,2	14	27	1,87	2,89
$\gamma = 0,3$ $\alpha = 0,2$	0,185	0,125	9,4	16	1,4	1,7	3,1	4,1	1	1,7	2,2	4,7	1,7	1,85
$\gamma = 0,1$ $\alpha = 5$	0,025	0,02	136	183	1,16	1,46	6,2	9	4,4	6,3	7,3	13,8	3,58	5,1

просто пропорциональны $\frac{1}{\gamma}$, а $\int_0^{\tau_1} id\tau$ и $\int_0^{\tau} id\tau$ пропорциональны $\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2}$.

Возвращаясь к исходным переменным, воспользовавшись (7) и (8), приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{T_{\max}}{T_0}\right)_1 &\simeq \frac{2,5}{\gamma}; \quad \left(\frac{T_{\max}}{T_0}\right)_2 \simeq \frac{4,5}{\gamma} \\ T_{\max_1} &= \frac{2,5 \cdot eUr_0}{6l \sqrt{4/3}\Pi} = \frac{0,35eUr_0}{l \sqrt{\Pi}}, \\ T_{\max_2} &= \frac{4,5eUr_0}{6l \sqrt{4/3}\Pi} = \frac{0,64eUr_0}{l \sqrt{\Pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом, температура в точках особенности не зависит от T_0 . Этот результат не является неожиданным и достаточно хорошо согласуется с ранее полученными соотношениями. Для величины тока особенности в предположении тока, линейно нарастающего со временем, в [1] было найдено выражение

$$I_{\text{ос1}}^2 = (1,8)^2 r_0 c \frac{dI}{dt} \sqrt{\frac{MN}{3}}.$$

Вблизи особенности можно считать, что газовое давление уравнивается магнитным давлением поля тока и, следовательно, справедливо соотношение $I_{\text{ос1}}^2 \simeq 2c^2 T_{\max_1} N$. Тогда, заменяя $\frac{dI}{dt} = \frac{U}{L_0} = \frac{Uc^2}{2l\alpha}$, имеем $T_{\max_1} = \frac{(1,8)^2 eUr_0}{6\alpha l \sqrt{3/4}\Pi} = \frac{0,47eUr_0}{\alpha l \sqrt{\Pi}}$.

Но последнее равенство, с точностью до численного коэффициента порядка единицы, совпадает с (10) при $\alpha = 1$.

Условие (9) теперь может быть записано следующим образом:

$$\frac{Mc^2 r_0}{eU C} \sqrt{\Pi} n \ll 1. \quad (11)$$

Здесь $n = 1; 2$ — номера особенностей. Таким образом, неравенство (11), показывающее, при каких условиях напряжение на батарее можно считать неизменным до момента второй особенности, практически не зависит от γ , а значит, и от T_0 . В практических единицах условие (11) принимает вид

$$\frac{2 \cdot 10^3 r_0 \sqrt{\Pi}}{U \text{ вольт } C_{\text{мкф}}} n \ll 1. \quad (11a)$$

Степень сжатия в момент первой и второй особенности определяется соотношениями

$$x_{\text{мин}_1} = \left(\frac{r}{r_0}\right)_1 = \left(\frac{T_0}{T_{\text{макс}_1}}\right)^{3/4} = \left(\frac{\gamma}{2,5}\right)^{3/4} = \left(\frac{2,86 \cdot T_0}{eU} \frac{l}{r_0} \sqrt{\Pi}\right)^{3/4};$$

$$x_{\text{мин}_2} = \left(\frac{r}{r_0}\right)_2 = \left(\frac{1,56 T_0}{eU} \frac{l}{r_0} \sqrt{\Pi}\right)^{3/4}.$$
(12)

Как видно из этих формул, степень сжатия зависит от T_0 .

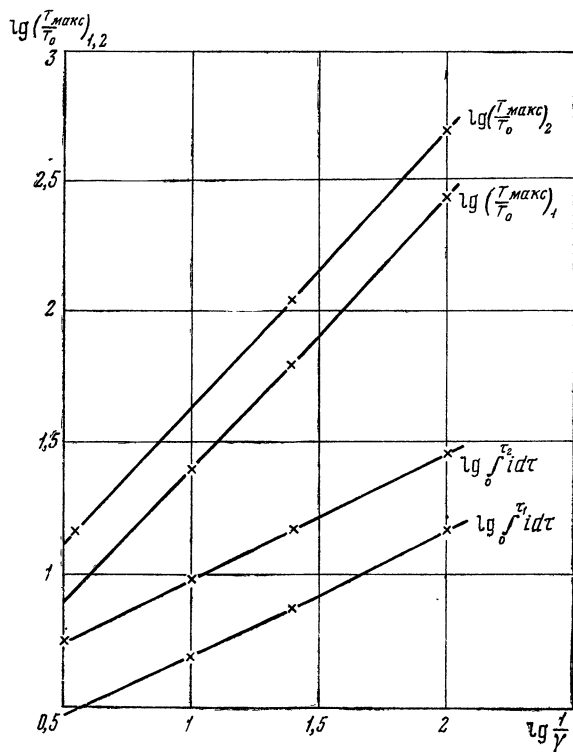


Рис. 7.

В приведенных соотношениях были использованы результаты вычислений, относящихся к значению $\alpha = 1$. Последние две строчки относятся, соответственно, к $\alpha = 0,2$ (при $\gamma = 0,3$) и $\alpha = 5$ (при $\gamma = 0,01$). Из сравнения значений $\frac{T_m}{T_0}$ для различных α , с достаточной для наших целей точностью, зависимость от α можно ввести в виде коэффициента

$$\left(\frac{T_{\text{макс}}}{T_0}\right)_1 = \frac{10}{\gamma(3+\alpha)}; \quad \left(\frac{T_{\text{макс}}}{T_0}\right)_2 = \frac{18}{\gamma(3+\alpha)}.$$

Отсюда видно, что зависимость $T_{\text{макс}}$ и x от α довольно медленная и что снижение α до величин, меньших единицы, не имеет смысла.

Зависимость максимального значения кинетической энергии $v_{\text{макс}}^2$ (1; 2) от $\lg \frac{1}{\gamma}$ также можно считать линейной. Аналитическая аппроксимация этой связи дает $v_{\text{макс}_1} \simeq 1,16 \times \times \lg \frac{3,95}{\gamma}$ и $v_{\text{макс}_2} \simeq 2,33 \lg \frac{2,08}{\gamma}$. Возвращаясь к исходным переменным, находим, что максимальная кинетическая энергия равна

$$E_{\text{макс}_1} = 1,4T_{\text{макс}_1} \lg \frac{3,95}{\gamma}; \quad E_{\text{макс}_2} = 1,56T_{\text{макс}_2} \lg \frac{2,08}{\gamma}.$$

Таким образом, получены основные соотношения, характеризующие поведение системы. В некоторые из этих соотношений в качестве одной из определяющих величин входит температура T_0 — температура газа к моменту начала сжатия газового шнура.

Начальной температурой будем называть среднее значение энергии частицы к моменту отрыва плазменного столба от стенок сосуда.

Этот отрыв происходит одновременно с отрывом тока от стенок, так как до тех пор, пока у стенок имеется не слишком разреженный газ, в этой области будет течь ток. Исчезновение тока здесь может иметь место, только если проводимость газа станет достаточно малой, что может быть только при исчерпании газа в этой области. В противном случае (поскольку к этому участку приложено напряжение, а индуктивность его мала по сравнению с индуктивностью остальной части столба) должно иметь место протекание тока. При этом, вследствие того, что степень ионизации газа относительно мала, необходимо предположить, что моменту отрыва соответствует исчерпание нейтральных частиц у стенки. Нейтральные частицы могут вовлекаться в упорядоченное движение к центру только путем взаимодействия с ионизированными частицами, главным образом с ионами. Наиболее сильное взаимодействие нейтральных частиц с ионами осуществляется за счет механизма перезарядки, так как эффективное сечение этого процесса в рассматриваемом диапазоне энергии превышает эффективные сечения других процессов. Увлечение нейтральных частиц механизмом перезарядки можно представить следующим образом: заряженные частицы (ионы) дрейфуют к центру сосуда под действием лоренцевой силы, набирая при этом энергию не от джоулева тепла, а от силы магнитного давления. Основная часть энергии сообщается в процессе дрейфа тяжелым частицам, так как скорости

дрейфа у электронов и ионов одинаковы. С другой стороны, электроны приобретают энергию в основном от джоулева тепла, и их энергия значительно меньше энергии тяжелых частиц. Надо учитывать к тому же, что электроны непрерывно теряют энергию на неупругие соударения с нейтральными частицами, так как степень ионизации, как указывалось, мала. Дрейфующие к центру ионы передают нейтральным частицам полную энергию, накопленную ими в процессе дрейфа, за один акт перезарядки. Так как упорядоченная составляющая дрейфа превышает тепловую скорость, то нейтральная частица в результате акта перезарядки начинает двигаться с импульсом, направленным в основном к центру сосуда. Энергия направленного движения в дальнейшем расходуется на столкновения с другими нейтральными частицами, т. е. на нагрев газа. Здесь предполагаем, что длина свободного пробега для упругих столкновений нейтральных атомов между собой много меньше размеров системы. Таким образом, осуществляются «захват в дрейф» нейтральных частиц и нагрев нейтрального газа. По мере исчерпания частиц у стенок сосуда, т. е. когда в дрейф к центру будет вовлечено такое количество частиц, что плотность их у стенок окажется недостаточной для протекания тока, распределение тока будет изменяться, он оторвется от стенок и начнет сжиматься вместе со всей массой газа. В момент отрыва энергия, рассчитанная на одну частицу, может оказаться весьма значительной и будет зависеть от ряда факторов, определяющих процесс развития разряда. Попытаемся, хотя бы грубо, оценить значение соответствующих величин. Число актов ионизации будем считать пропорциональным джоулеву теплу, выделяющемуся в зоне протекания тока. Будем считать, что вся энергия выделяется в слое толщиной δ , где плотность тока принимаем постоянной. Допустим, что заряженные частицы рождаются в слое изотропно; число частиц, возникающих на единице длины, обозначим через N_i . Это можно записать в виде соотношения

$$\frac{I^2}{2\pi r_0 \delta \sigma} = \epsilon \frac{dN_i}{dt}, \quad (13)$$

где ϵ — «цена электрона» — среднее значение энергии, затрачиваемой на один акт ионизации. В интересующей нас области величин ϵ составляет примерно 100 эв (см., например, [4]). Можно считать, что до момента отрыва ток растет линейно, т. е.

$$I = \left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = c^2 \left(\frac{U}{L_0}\right) t,$$

где L_0 — начальная индуктивность в сантиметрах. Величина δ складывается из толщины скин-слоя и пути, проходимо

заряженными частицами до момента отрыва. В рассматриваемом случае ток распространяется внутрь проводника; частицы также движутся в этом направлении. Точное решение этой задачи представляет определенные трудности, но в данном случае в нем нет необходимости, так как здесь важен только порядок величины; примем, что δ определяется толщиной скин-слоя, т. е. $\delta = \sqrt{\frac{c^2 t}{2\pi\sigma}}$. Проводимость σ принимаем постоянной, так как известно, что уже на сравнительно ранней стадии развития разряда основную роль в активном сопротивлении играют кулоновские столкновения электронов с заряженными, а не с нейтральными частицами. До тех пор, пока степень ионизации мала, что безусловно выполняется до отрыва, электроны теряют энергию на неупругие столкновения с нейтральными частицами, и температура их практически не меняется. Поэтому проводимость σ можно считать постоянной. При сделанных предположениях, интегрируя уравнение (13), имеем

$$N_i = \frac{2}{5} \frac{I^2 t}{2\pi r_0 \delta \sigma \varepsilon} = \frac{2}{5} \frac{\left(\frac{U}{L_0}\right)^2 t^2 \delta c^2}{r_0 \varepsilon}, \quad (14)$$

так как при $t=0$ и $N_i=0$.

Исчерпание нейтральных частиц у стенок и захват их ионами в процессе дрейфа к центру в результате столкновений с перезарядкой можно описать соотношением

$$\frac{dn}{dt} = -n \sigma_{in} \bar{v} n_i. \quad (15)$$

Здесь σ_{in} — эффективное сечение перезарядки, которое для рассматриваемого случая можно считать постоянным и равным $3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$; \bar{v} — скорость ионов относительно нейтральных частиц, совпадающая по порядку величин со средней скоростью частиц в скин-слое. Условие отрыва от стенок сводится к соотношению

$$\int_0^t \sigma_{in} n_i \bar{v} dt > 1. \quad (16)$$

Для n_i , воспользовавшись (14), получим

$$n_i = \frac{N_i}{2\pi r_0 \delta} = \frac{\left(\frac{U}{L_0}\right)^2 t^2 c^2}{5\pi r_0 \varepsilon}. \quad (17)$$

Среднюю скорость \bar{v} по порядку величины находим исходя из того, что средняя энергия частицы $\bar{E} \simeq \frac{I^2}{2c^2N} = \frac{M\bar{v}^2}{2}$ или $v = \frac{I}{c\sqrt{MN}} = \frac{L_0}{\sqrt{MN}} \frac{ct}{L_0}$. Теперь условие отрыва (16) может быть записано в виде

$$\int_0^t \frac{\sigma_{in} \left(\frac{U}{L_0}\right)^3 t^3 c^3}{5\pi r_0^2 \epsilon \sqrt{MN}} dt = \frac{\sigma_{in} \left(\frac{U}{L_0}\right)^3 t_{отр}^4 c^3}{20\pi r_0^2 \epsilon \sqrt{MN}} > 1. \quad (18)$$

Здесь

$$\frac{c^2 U}{L_0} t_{отр} = I_{отр} \quad \text{и} \quad \frac{I_{отр}^2}{c^2} = 2NT_0,$$

где T_0 — температура, усредненная по всем частицам к моменту отрыва, т. е. та величина, которая входит в ранее выведенные соотношения. Условие для температуры отрыва из (18) можно представить в виде

$$\frac{L_0 T_0^2 \sqrt{\Pi}}{20\lambda_{in} \epsilon U} > 1, \quad \text{или} \quad T_0 > \sqrt{\frac{20\lambda_{in} \epsilon U}{L_0 \sqrt{\Pi}}},$$

где $\lambda_{in} = \frac{1}{n\sigma_{in}} = \frac{\pi r_0^2}{N\sigma_{in}}$ — длина свободного пробега для столкновения с перезарядкой. Последнее уравнение удобнее представить в безразмерной форме

$$\frac{T_0}{eU} > \sqrt{\frac{20\lambda_{in} \epsilon}{L_0} \frac{1}{eU} \frac{1}{\sqrt{\Pi}}}. \quad (19)$$

Отсюда значение $\gamma = \frac{6T_0}{eU} \frac{l}{r_0} \sqrt[4]{\frac{1}{3\Pi}}$ примет вид

$$\gamma = 6 \sqrt[4]{\frac{40}{\alpha} \frac{e^2}{Mc^2} \frac{l}{\sigma_{in}} \frac{\epsilon}{eU} \frac{1}{\sqrt{\Pi}}} \simeq 40 \sqrt{\frac{l}{U_{\text{вольт}} \sqrt{\Pi}}}. \quad (20)$$

Ток отрыва равен

$$\begin{aligned} I_{отр} &= c \sqrt{2NT_0} = c \sqrt[4]{\frac{20\lambda_{in} \epsilon eU}{L_0} \frac{1}{\sqrt{\Pi}}} \cdot 4N^2 = c \sqrt[4]{\frac{40}{\alpha} \frac{\pi r_0^2}{\sigma_{in}} \frac{eU}{l} \frac{Mc^2}{e^2}} = \\ &= c \sqrt{\frac{\gamma}{6} \frac{r_0}{l} \frac{Mc^2}{e^2} eU \sqrt{\Pi}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $r_k = \frac{e^2}{Mc^2} \cong 10^{-16}$ см (для дейтерия). Переходя к практической системе единиц и принимая $\sigma_{in} = 3 \cdot 10^{-15}$ см² и $\epsilon = 100$ эв, имеем

$$I_{отр} = 5 \cdot 10^3 \sqrt[4]{\frac{r_0^2}{al}} U_{вольт} \sqrt{\Pi} = 700 \sqrt[4]{\frac{\gamma r_0}{l}} U_{вольт} \sqrt{\Pi}. \quad (21a)$$

В качестве примера приведем подсчет тока отрыва и параметра для одной из работающих установок, со следующими характерными величинами:

$$U = 4 \cdot 10^4 \text{ в}, \quad \Pi = 400, \quad l = 100 \text{ см}, \quad r_0 = 20 \text{ см}.$$

После подстановки в соотношения (20) и (21a) получим

$$\gamma = 40 \sqrt{\frac{100}{4 \cdot 10^4 \sqrt{400}}} \cong 0,44;$$

$$I_{отр} = 700 \sqrt[4]{\frac{20}{100} \cdot 4 \cdot 10^4 \sqrt{400}} = 1,86 \cdot 10^5 \text{ а},$$

что достаточно точно совпадает с наблюдаемыми результатами (экспериментальное значение $I_{отр}$ составляет $\cong 2 \cdot 10^5$ а). Степень сжатия равна $x_{мин} = \left(\frac{\gamma}{2,5}\right)^{3/4} = \left(\frac{0,44}{2,5}\right)^{3/4} = 0,27$, что также хорошо сходится с экспериментом.

Таким образом, значения всех величин, входящих в ранее приведенные соотношения, определены.

Полученные соотношения, казалось бы, позволяют подойти к рациональному проектированию систем подобного рода с целью получения наиболее интенсивного выхода ядерных реакций. При этом, однако, следует оговорить некоторые дополнительные ограничения, которые должны быть учтены в ходе последующих рассуждений.

1. Уход тепла на электроды за время эффективного существования плазменного шнура должен быть достаточно малым по сравнению с тепловой энергией, запасенной в частицах.

2. Энергия, выделяющаяся на стенках сосуда, не должна превышать величину, при которой материал сосуда будет разрушаться. Другими словами, устройство должно быть пригодным для многократного использования, и процесс не должен носить характера однократного взрыва. Однако этого условия недостаточно. За время протекания разряда имеет место значительное выделение тепла на стенках разрядного устройства. Передача тепла стенкам особенно велика в период от момента зажигания разряда до отрыва плазменного столба от стенок. В результате нагрева стенки могут испаряться,

и разряд будет содержать примеси посторонних газов, что приведет к дополнительным потерям энергии. Поэтому при проектировании подобного рода устройства выбор конструкции, размеров и материала стенок разрядного сосуда должен производиться из условия минимального загрязнения рабочего объема примесями материала стенок.

Что касается влияния потерь на электроды, то легко сделать оценку условий, при которых эти потери становятся существенными (так как время существования сжатого столба должно быть во всех случаях меньше характерного времени

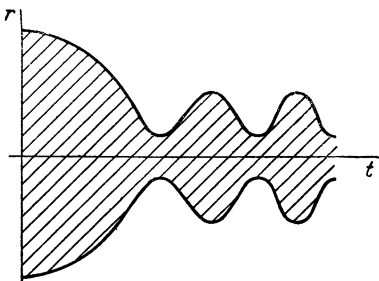


Рис. 8. Типичная расчетная зависимость изменения радиуса со временем.

отдачи тепла на электроды, то задача сводится к оценке этого характерного времени). Количество тепловой энергии, уходящей на электроды, равно $Nv_z T t$ (Nv_z — поток частиц; T их температура). Эта энергия должна быть меньше энергии, запасенной в столбе, т. е. $2Nv_z T t < N T l$, но $Nv_z = I/e$, и, следовательно, $t < \frac{e N l}{2 I}$,

а так как $I \approx c \sqrt{2 N T} = c v_T \sqrt{N M}$, то окончательно

получаем следующее неравенство, определяющее время существования нагретого плазменного столба, при котором начинают сказываться потери энергии на электроды:

$$t < \frac{e l N}{2 c v_T \sqrt{M N}} = \frac{l}{2 v_T} \sqrt{\Pi}. \quad (22)$$

Кроме этих основных ограничений возможны и другие, менее существенные, чисто инженерного характера, которые здесь не рассматриваются. Следует указать, что до сих пор не дано анализа некоторых важных явлений, которые могут оказать большое влияние на приведенные здесь выводы. Первый и основной вопрос состоит в том, чем определяется время существования плазменного столба в сжатом состоянии. Предположение об адиабатичности процесса, положенное в основу расчета, приводит к тому, что расширение газового столба происходит сразу же после сжатия, и время существования столба в сжатом состоянии порядка так называемого пролетного времени.

Однако экспериментальные исследования и, в частности, фотографии разряда показывают, что время существования

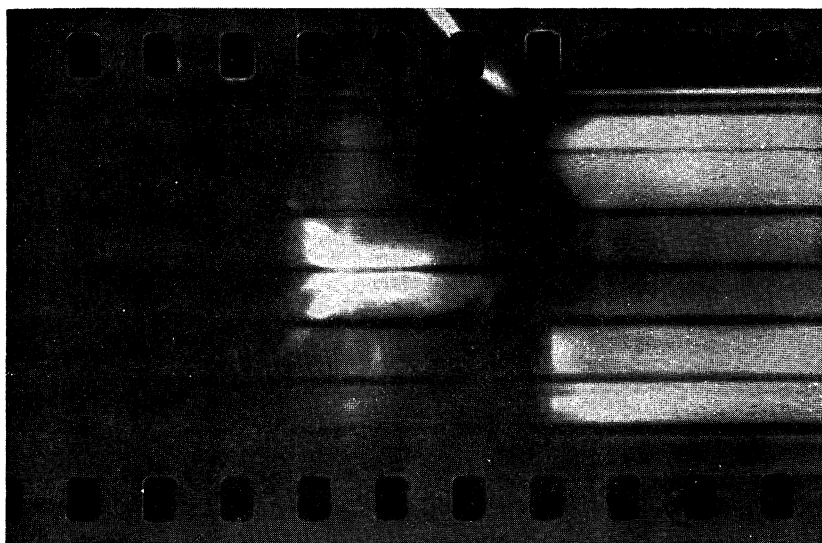


Рис. 9.

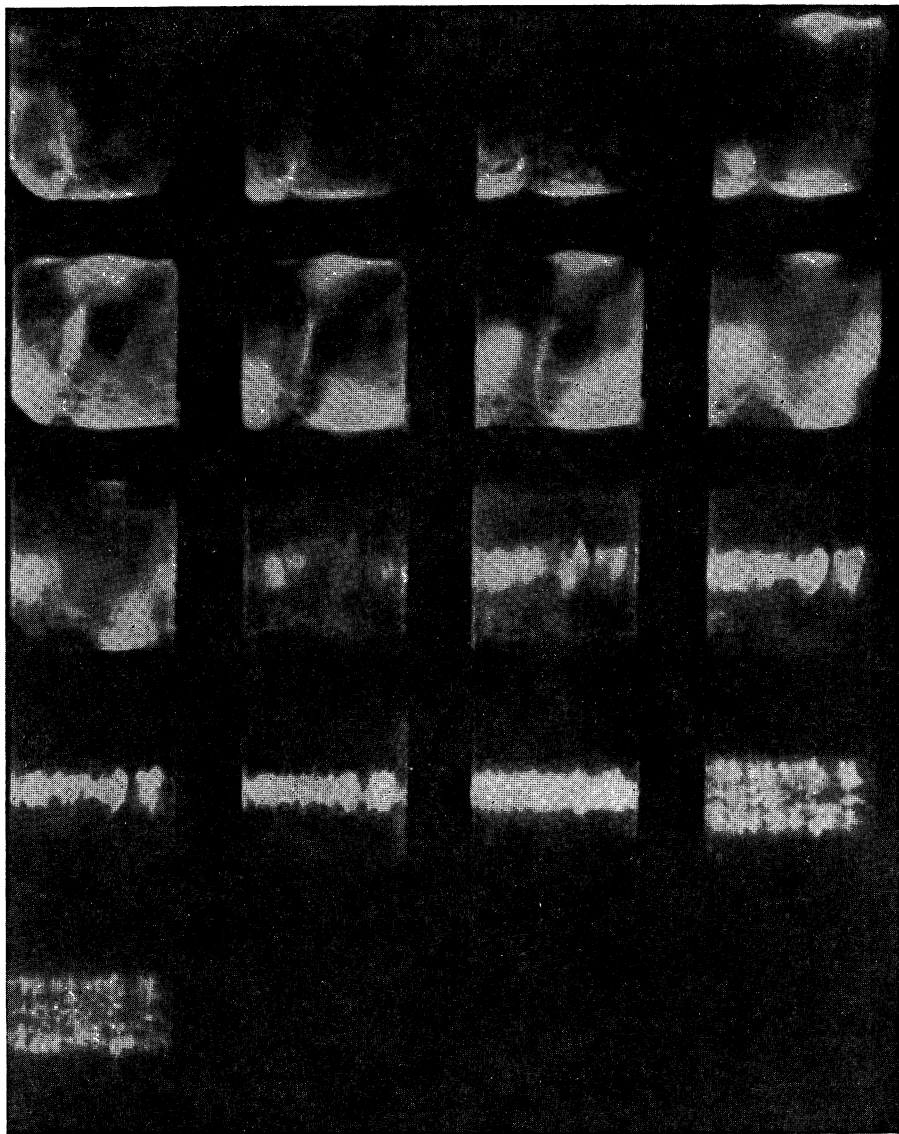


FIG. 10

сжатого состояния во многих случаях в действительности оказывается значительно бóльшим. На приведенных рисунках это видно совершенно отчетливо. Моменту касания плазмы о стенку на экспериментальной зависимости соответствует уменьшение полного тока из-за того, что конденсаторная батарея к этому моменту уже в значительной степени разрядилась. Достаточно надежного экспериментального материала, характеризующего поведение столба в условиях, близких к принятому при расчете предположению о батарее бесконечно большой емкости, к настоящему времени не имеется.

Возможно, что существует следующий механизм, объясняющий наблюдаемое на опыте быстрое затухание радиальных колебаний плазменного шнура. Допустим, что плазма обладает некоторой аномальной вязкостью. В приведенных здесь вычислениях наличие вязкости не учитывалось. Для рассмотренного ламинарного течения такое допущение, по-видимому, справедливо; однако в случае перехода к турбулентному режиму оно, вероятно, оказывается неправильным. Возникает вопрос, какие имеются основания для утверждения о возможности перехода системы в состояние турбулентности к моменту сжатия. Из рассмотрения картины сжатия плазменного столба в интересующих нас условиях давления и скорости нарастания тока (рис. 8, 9 и 10) видно, что процесс сжатия сопровождается все бóльшим развитием коротковолновой неустойчивости по оси шнура. В пределе этот вид неустойчивости к моменту полного сжатия может привести к появлению также неустойчивых тангенциальных разрывов, что, как известно, означает переход в турбулентный режим. Надежные методы вычисления турбулентной вязкости в магнитной гидродинамике в настоящее время отсутствуют. Однако можно предполагать, что вязкость плазмы достаточно велика для того, чтобы процесс затухания радиальных колебаний шнура происходил сравнительно быстро.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонтович, С. М. Осовец, Отчет АН СССР, 1953 г.; Атомная энергия, 1, 81 (1956).
 2. Н. А. Борзунов, Д. В. Орлинский, С. М. Осовец, Отчет АН СССР, 1953 г.; Атомная энергия, 4, 149 (1958).
 3. А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, см. т. II настоящего издания, стр. 185.
 4. В. И. Коган, Отчет АН СССР, 1954 г.; Атомная энергия, 4, 178 (1958).
-

Ю. Ф. Наседкин, С. М. Осовец

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОГО КОЛЬЦЕВОГО ГАЗОВОГО РАЗРЯДА ПРИ НАЛИЧИИ РАВНОВЕСНОЙ ОРБИТЫ *

В работе произведено исследование мощного кольцевого газового разряда под действием переменного магнитного поля специальной конфигурации, обеспечивающей наличие равновесной устойчивой орбиты тока. Произведено исследование распределения тока по объему вакуумной камеры. Оценена максимальная энергия движения витка к центру камеры после срыва с орбиты. Она составляет ~ 1500 эв. Произведены оценки остаточного магнитного потока и активного сопротивления газового витка.

§ 1. Введение

Кольцевой газовый разряд, возникающий в цилиндрической камере под действием переменного поперечного магнитного поля специальной конфигурации, представляет значительный интерес. Разряд такого типа является безэлектродным, но, в отличие от разряда в тороидальных камерах, газовый виток имеет возможность стягиваться в центральную часть камеры, увлекая за собой значительную массу частиц, имеющих в камере, к ее центру.

В работах [1—3] было показано, что при специальном выборе формы магнитного поля и при определенных условиях разряд такого типа формируется в виде оторванного от стенок вакуумной камеры газового витка, находящегося в районе равновесной орбиты. По истечении некоторого промежутка времени виток срывается с орбиты и стягивается к центру. При этом магнитная энергия вторичного тока переходит в ки-

* Работа выполнена в 1956 г.

нетическую энергию радиального движения частиц. В работе произведено исследование кольцевого газового разряда при больших силах тока в первичной цепи.

§ 2. Описание установки

Установка, на которой производилось исследование кольцевого разряда, состояла из конденсаторной батареи, системы обмоток, создающей переменное магнитное поле требуемой

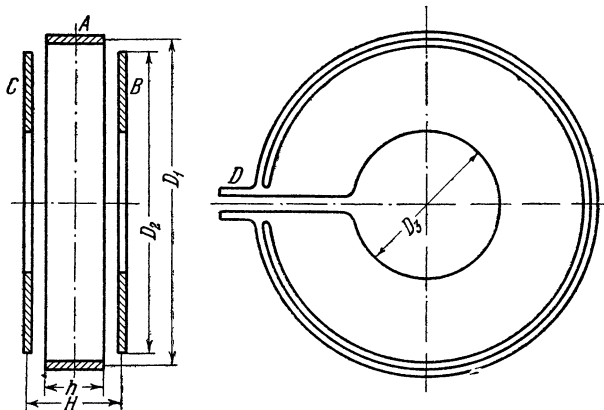


Рис. 1. Схема магнитной системы $D_1 = 600$;
 $D_2 = 560$; $H = 195$; $D_3 = 260$; $h = 110$.

конфигурации, вакуумной камеры, в которой происходит развитие кольцевого газового разряда, и разрядного устройства.

Основные размеры магнитной системы показаны на рис. 1. Форма магнитного поля, т. е. зависимость напряженности поля от радиуса, аналогична приведенной в работе [3]. Конденсаторная батарея емкостью 130 мкф могла заряжаться до напряжения 50 кв. Индуктивность обмотки составляла 0,3 мкгн, индуктивность подводящих фидеров вместе с разрядником $\sim 0,15$ мкгн. Коэффициент связи газового витка с первичной обмоткой равен $k = 0,33$.

Вакуумная камера состояла из фарфорового цилиндра, уплотненного с обеих сторон дисками из органического стекла. Чтобы поверхность дисков не обжигалась, они прикрывались изнутри тонкими стеклянными дисками.

Для исследования распределения газового тока по объему вакуумной камеры в нее вводилась система измерительных поясов Роговского, позволяющая измерять ток в данном месте камеры. С помощью этих поясов можно измерять полный газовый ток, ток на орбите, ток вблизи геометрического центра

и в других местах вакуумной камеры. Схема расположения измерительных поясов в вакуумной камере представлена на рис. 2. Для измерения магнитного поля в центре камеры исполь-

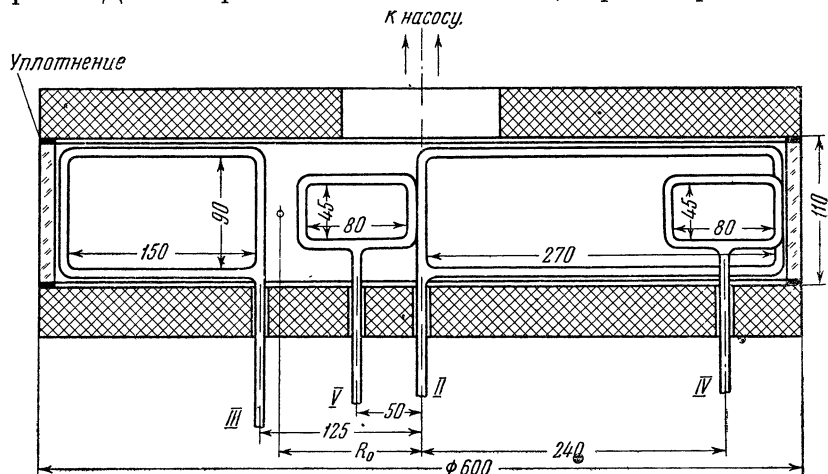


Рис. 2. Схема расположения измерительных поясов.

зовалась небольшая измерительная катушечка. Параметры поясов и измерительной катушки выбирались так, что с их помощью измерялись непосредственно величины токов и напряженность магнитного поля, а не их производные.

§ 3. Экспериментальные результаты

На рис. 3, 5, 6 представлены осциллограммы первичного тока через обмотку, измеряемого поясом I (пояс I на рис. 2 не указан), полного газового тока (пояс II), а также тока, проходящего через область, занимаемую поясами III, IV, V. Эти осциллограммы получены при начальном давлении дейтерия в камере 0,1; 0,06; 0,03 мм рт. ст и напряжении на конденсаторной батарее 33 кв. При этом напряжение на обмотке, создающей магнитное поле, составляло 22 кв, а напряжение на обходе газового витка ~ 17 кв.

Рассмотрим подробно осциллограммы, соответствующие давлению дейтерия в камере 0,1 мм рт. ст. и напряжению на конденсаторной батарее 33 кв (рис. 3). На рис. 3а представлены осциллограммы первичного тока (тока в медной обмотке) и полного газового тока, текущего в камере (пояс II). Из осциллограмм можно сделать следующие выводы.

Частота процесса составляет 22 кц. Первичный ток в конце первой четверти периода достигает значения 550 ка. Газовый

ток возникает одновременно с первичным током и нарастает одновременно с ним. Скорость нарастания вторичного тока в начальный момент времени равна $\sim 3.10^{10}$ а/сек. При фазе первичного тока $\sim 30^\circ$ происходит резкое уменьшение газового тока, что соответствует срыву газового витка с орбиты и движению его к центру камеры.

Максимальное значение газового тока, соответствующее началу срыва, равно 60 ка , что отвечает расчетному значению тока, приведенному к данной фазе (расчетное значение тока, т. е. тока в медном витке, находящемся на орбите, приведенное к фазе 30° , составляет $\sim 65 \text{ ка}$).

Из сопоставления осциллограмм полного газового тока и тока через пояс III (рис. 3, б) следует, что оба пояса до начала срыва регистрируют один и тот же ток 60 ка . Это указывает на то, что в центральной части камеры, которая не охватывается поясом III, ток полностью отсутствует по крайней мере до момента срыва газового витка с орбиты.

Пояс IV, помещенный в районе ожидаемой токовой орбиты, регистрирует к моменту срыва тока с орбиты 43 ка , что составляет 72% общего газового тока. Однако поло-

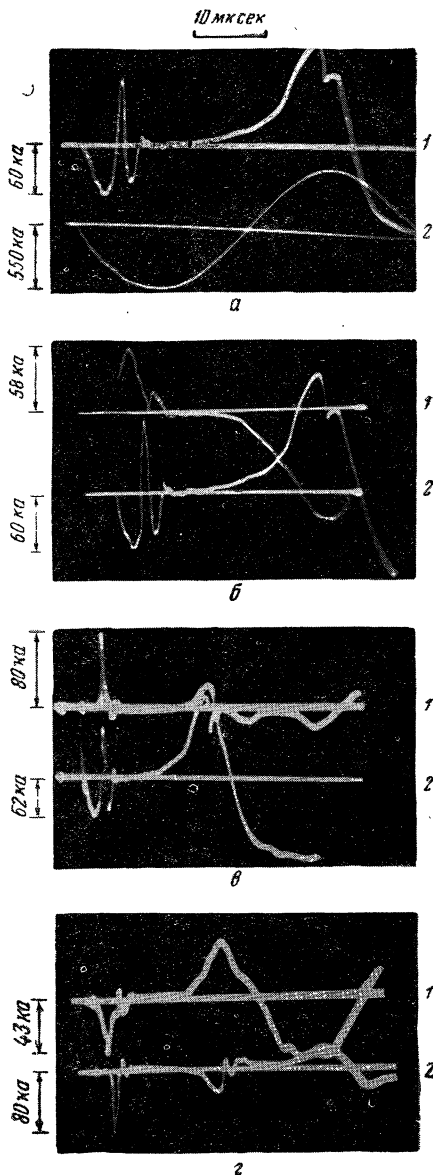


Рис. 3. Осциллограммы токов, $p = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$, $V_{\text{бат}} = 33 \text{ кв.}$

а: 1 — ток через пояс II (полный газовый ток); 2 — ток в обмотке; б: 1 — ток через пояс III; 2 — ток через пояс II; в: 1 — ток через пояс V; 2 — ток через пояс II; г: 1 — ток через пояс IV; 2 — ток через пояс V.

жение этого пояса можно подобрать, по-видимому, более удачно, так чтобы доля полного газового тока, проходящего через область, охватываемую поясом *IV*, была увеличена. Средняя плотность тока через этот пояс равна $1,3 \text{ ка/см}^2$.

Рассмотрим, что происходит с витком после срыва с орбиты. После срыва газового витка с орбиты полный ток резко падает до нуля и меняет знак. Величина отрицательного тока достигает 82 ка . Отметим, что напряжение на обходе, создаваемое первичной обмоткой, к моменту появления отрицательного тока знака не меняет.

Причина возникновения отрицательного тока заключается в следующем. В результате наличия активного сопротивления у газового витка магнитный поток MI_1 , тока I_1 , связанный с газовым витком, не полностью компенсируется магнитным потоком L_2I_2 газового витка ($|L_2I_2| < |MI_1|$). Таким образом, к моменту срыва витка с орбиты внутри контура, охватываемого газовым витком, остается часть первичного магнитного потока $\Phi_0 = MI_1 + L_2I_2 > 0$. При срыве витка с орбиты и быстром движении его к центру магнитный поток Φ_0 внутри витка должен оставаться постоянным. Это условие может быть выполнено только в том случае, если вторичный ток меняет знак. Действительно $I_2 = \frac{\Phi_0 - MI_1}{L_2}$.

В момент, соответствующий срыву, $MI_1 > \Phi_0$ и ток $I_2 < 0$, т. е. находится в противофазе с током I_1 . По мере сжатия витка M уменьшается (сжатие витка происходит столь быстро, что изменением тока I_1 можно пренебречь), и, следовательно, в некоторый момент времени, когда $\Phi_0 = MI_1$, ток в витке будет равен нулю ($I_2 = 0$). При дальнейшем уменьшении M газовый ток меняет знак $I_2 > 0$, т. е. ток I_2 будет иметь то же направление, что и ток I_1 .

Сопоставляя осциллограммы токов через области, охватываемые поясами *II*, *III*, *V*, а также зная размеры поясов, можно приблизительно определить радиус сжимающегося витка, при котором газовый ток равен нулю, т. е. тот радиус, при котором газовый ток меняет знак. Величина этого радиуса приблизительно равна $R_0 = 110 \text{ мм}$ (см. рис. 2). Отметим здесь, что осциллограммы токов через пояса *III*, *IV* оказываются сильно затянутыми по фазе, начиная с того момента времени, когда токовый шнур подходит к границе пояса, так как газовый шнур при пересечении границы поясов должен был бы оборваться. Поэтому сравнивать фазы токов на осциллограммах поясов *II* и *III* после того, когда граница тока подойдет к границе пояса *III*, нельзя.

Пояс *V*, помещенный вблизи геометрического центра камеры, в начальный момент времени тока не регистрирует (см.

рис. 3—*в* и *г*). После срыва тока с орбиты этот пояс начинает регистрировать ток. Момент появления его и направление соответствуют обратному току. Максимальное значение тока через область, занимаемую этим поясом, составляет 80 *ка*. Максимальная величина отрицательного тока, измеренная поясом *II*, равна 82 *ка*. Таким образом, в тот момент времени, когда обратный ток имеет максимальное значение, газовый виток имеет радиус, соответствующий местоположению пояса *V*, т. е. ~ 50 *мм*.

Магнитное поле в центре камеры измерялось при помощи измерительной катушечки. При отсутствии разряда внутри камеры максимальное значение напряженности магнитного поля в центре составляет 11 300 э (рис. 4, *а*). Эта напряженность поля создается первичной обмоткой. При возникновении разряда катушка будет измерять суммарное магнитное поле, создаваемое первичной обмоткой и газовым витком. На рис. 4, *б* показана осциллограмма суммарного магнитного поля, полученная при давлении 0,1 *мм* рт. ст. и $V_{\text{бат}} = 33$ *кв*. Из осциллограммы отчетливо видно, что после срыва витка

с орбиты происходит резкое увеличение магнитного поля от 5000 до 14 500 э. Это резкое увеличение магнитного поля в центре происходит за счет сжатия оставшегося магнитного потока движущимся с большой скоростью плазменным витком.

После сжатия газового витка к центру до некоторого минимального радиуса, сопровождающегося сжатием магнитного поля, происходит увеличение радиуса витка и новое его сжатие. На это указывают осциллограммы полного тока. На осциллограмме (рис. 3, *а*) видно, что после пика отрицательного тока вновь появляется положительный ток и затем снова отрицательный.

В дальнейшем существует некоторый промежуток времени, в течение которого ни один из поясов не регистрирует тока заметной величины.

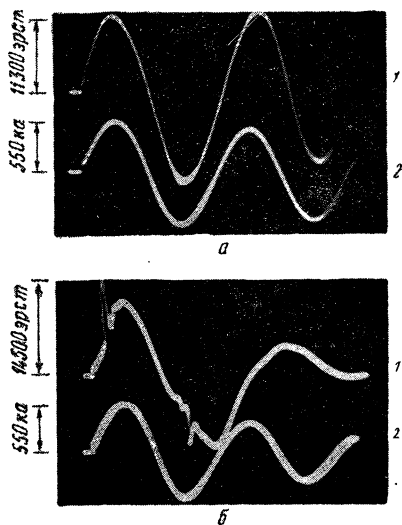


Рис. 4. Осциллограммы магнитного поля в центре камеры.

а: газ в камере отсутствует, $V_{\text{бат}} = 33$ *кв*;
б: $p = 0,1$ *мм* рт. ст., $V_{\text{бат}} = 33$ *кв*; 1 — магнитное поле, 2 — ток в обмотке.

Мы не будем здесь подробно рассматривать, что происходит на втором и последующих полупериодах, так как вакуумная камера была частично выполнена из органического стекла, и поэтому в последующие полупериоды в объеме могло содержаться значительное количество примесей. Заметим, однако, что на последующих полупериодах газового витка не существует. Ток занимает весь объем камеры. Величина полного тока на втором полупериоде составляет 130 *ка*.

На рис. 5 и 6 представлены осциллограммы токов при начальном давлении дейтерия 0,05 и 0,03 *мм рт. ст.* и $V_{\text{бат}}=33$ *кв.* Общий вид осциллограмм при уменьшении давления от 0,1 до 0,03 *мм рт. ст.* не изменился. Однако величины токов заметно уменьшились. Это связано с уменьшением фазы срыва, активным сопротивлением и с более затрудненным стартом разряда при уменьшении давления.

Т а б л и ц а

Название	Обозначение	Максимальное значение тока на первом полупериоде, <i>ка</i>		
		0,1 <i>мм рт. ст.</i>	0,06 <i>мм рт. ст.</i>	0,03 <i>мм рт. ст.</i>
Ток в обмотке . . .	\mathcal{I}_1	550	550	550
{ Ток через пояс II Отрицательный ток	\mathcal{I}_2	60	42	27
	\mathcal{I}_{-2}	82	54	27
Ток через пояс III	\mathcal{I}_3	60	42	27
Ток через пояс IV .	\mathcal{I}_4	43	32	23
Ток через пояс V .	\mathcal{I}_5	80	35	

В таблице приведены основные результаты обработки осциллограмм, полученных при давлении дейтерия 0,1; 0,06; 0,03 *мм рт. ст.* и напряжении на конденсаторной батарее $V_{\text{бат}}=33$ *кв.*

При дальнейшем уменьшении давления дейтерия газовый ток на первом полупериоде продолжает уменьшаться и при давлении 0,01 *мм рт. ст.* зажигается только на втором полупериоде (рис. 7). Это происходит в результате того, что при низких плотностях разряд успевает развиваться только за время, сравнимое с полупериодом. Картина развития разряда при давлении 0,01 существенно отличается от той, которая имеет место при давлении 0,1 *мм рт. ст.* (не происходит отчетливого формирования витка и движения его к центру). При низких давлениях, при которых разряд зажигается на втором полупериоде, картина развития разряда весьма чувствительна

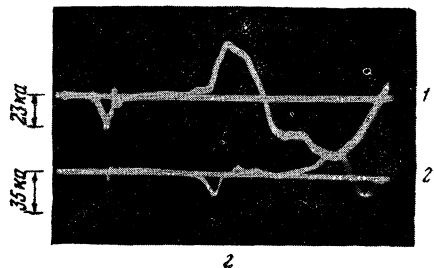
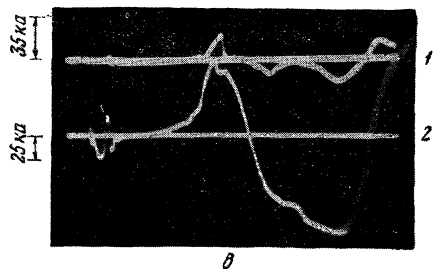
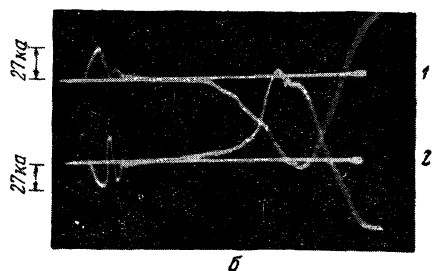
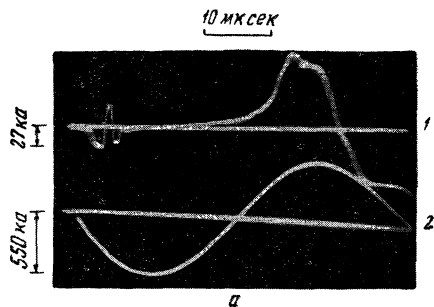
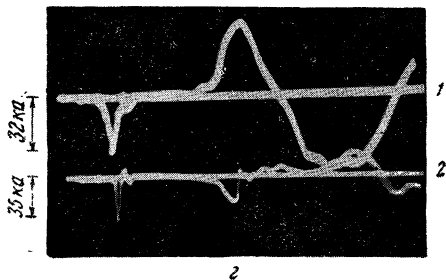
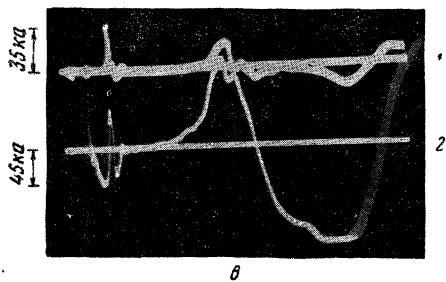
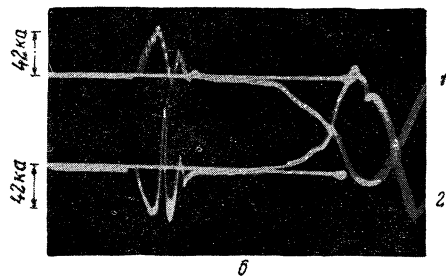
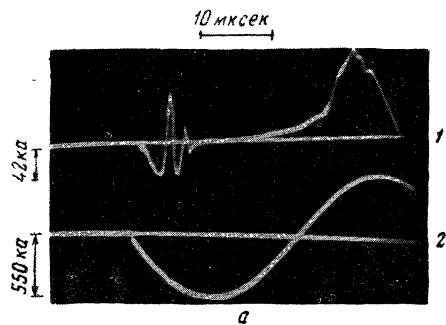


Рис. 5. Осциллограммы токов, $p = 0,06$ мм рт. ст., $V_{\text{бат}} = 33$ кв.

а: 1 — ток через пояс II (полный газовый ток); 2 — ток в обмотке; б: 1 — ток через пояс III; 2 — ток через пояс II; в: 1 — ток через пояс V; 2 — ток через пояс II; г: 1 — ток через пояс IV; 2 — ток через пояс V.

Рис. 6. Осциллограммы токов, $p = 0,03$ мм рт. ст.; $V_{\text{бат}} = 33$ кв.

а: 1 — ток через пояс II (полный газовый ток); 2 — ток в обмотке; б: 1 — ток через пояс III; 2 — ток через пояс II; в: 1 — ток через пояс V; 2 — ток через пояс II; г: 1 — ток через пояс IV; 2 — ток через пояс V.

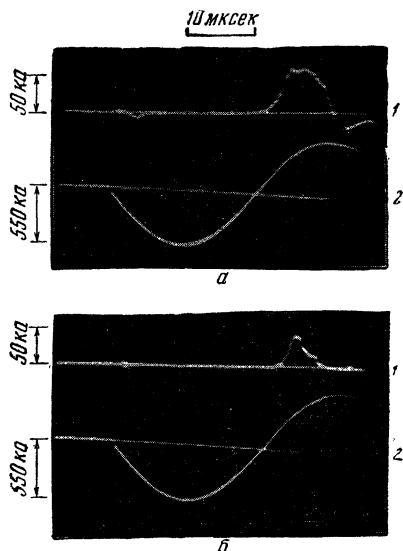


Рис. 7. Осциллограммы токов, $p = 0,01$ мм рт. ст., $V_{\text{бат}} = 33$ кВ.

а: 1 — ток через пояс II; 2 — ток в обмотке; б: 1 — ток через пояс II; 2 — ток в обмотке.

к небольшим изменениям давления. Это видно из рис. 7, на котором представлены две осциллограммы, соответствующие давлению дейтерия 0,01 мм рт. ст.

На данной установке было обнаружено весьма жесткое рентгеновское излучение. Осциллограммы излучения, полученные при давлении дейтерия в камере 0,01 мм рт. ст. и напряжении на конденсаторной батарее $V_{\text{бат}} = 33$ кВ, показаны на рис. 8. При снятии осциллограмм рентгеновского излучения все измерительные пояса из вакуумного объема камеры были вынуты. Поэтому картина развития разряда при низких давлениях, когда разряд образуется на втором полупериоде, при наличии измерительных поясов может значительно отличаться от той картины, которая имеет место без поясов.

Осциллограммы снимались при отсутствии свинцового экрана на сцинтилляционном счетчике, а также при различ-

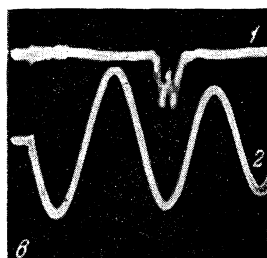
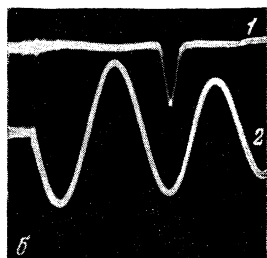
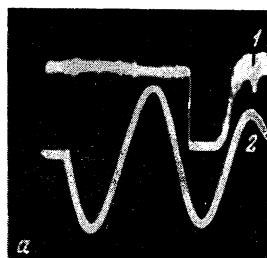


Рис. 8. Осциллограммы излучения, сфазированные с током в обмотке.

$p = 8 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст., $V_{\text{бат}} = 33$ кВ; а: без свинцового экрана; б: свинцовый экран толщиной 3 мм; в: свинцовый экран толщиной 20 мм.

ных толщинах свинцового экрана. Счетчик был расположен вдоль оси камеры примерно на расстоянии полуметра от центра.

На рис. 8,а показана осциллограмма излучения при отсутствии свинцового экрана. Излучение в этом случае возникает на втором периоде в момент, когда первичный ток проходит через нуль, т. е. в максимуме напряжения. На рис. 8,б и в представлены осциллограммы излучения для случая, когда толщина свинцового экрана составляет 3 и 20 мм. Как видим, в этом случае излучение возникает вблизи максимума первичного тока, т. е. когда внешнее электрическое поле близко к нулю. Наличие излучения за 2 см свинцового экрана указывает на весьма большую жесткость этого излучения. Возможно, что часть этого излучения обусловлена нейтронами.

§ 4. Обсуждение результатов

Приведенные выше экспериментальные результаты дают основание считать, что при заданной форме поля, в определенном интервале давлений, разряд формируется в виде оторванного от стенок вакуумной камеры токового кольца, расположенного в области равновесной орбиты. Время существования плазменного витка на орбите при начальном давлении 0,1 мм рт. ст. составляет ~ 3 мксек.

В начальной стадии разряд развивается у стенок камеры в виде кольца, диаметр поперечного сечения которого равен расстоянию между боковыми фланцами вакуумной камеры и составляет ~ 110 мм (см. рис. 10). В дальнейшем диаметр поперечного сечения кольца уменьшается, и образуется токовый шнур, расположенный на орбите. Диаметр сечения шнура составляет $\sim 20-40$ мм.

Инерционное время, в течение которого происходит уменьшение сечения, т. е. время, в течение которого происходит образование кольцевого шнура, вычисленное по формуле $t_{ос} = 0,09a_0 (p_{0\mu})^{1/4} T^{-1/2}$ [4], составляет $\sim 2,5$ мксек при давлении дейтерия 0,1 мм рт. ст. Скорость, которую приобретают при этом дейтоны, составляет $v = \frac{5 \text{ см}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6$ см/сек, а кинетическая энергия равна 4 эв.

Итак, мы видим, что время особенности составляет $t_{ос} \sim 2,5$ мксек, а время, в течение которого виток находится на орбите, — 3 мксек. По истечении 3 мксек виток срывается с орбиты и движется, как единое целое, к центру камеры. Сжатие тока в ком малых размеров препятствует наличие оставшегося внутри витка магнитного потока, который присутствует в результате того, что газовый виток обладает замет-

ным активным сопротивлением. При движении витка к центру происходит сжатие остаточного магнитного потока (см. рис. 4, б).

Когда кинетическая энергия, приобретенная витком в процессе движения к центру, будет полностью израсходована на сжатие магнитного поля, виток остановится. Из осциллограмм (рис. 3, в) видно, что это происходит в области, занимаемой поясом V , т. е. минимальный радиус сжатого витка равен примерно 50 мм.

Произведем оценку средней скорости сжатия плазменного витка к центру камеры. Среднюю скорость сжатия можно

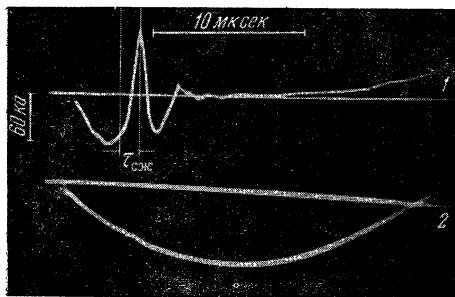


Рис. 9. Осциллограммы токов, $p = 0,1$ мм рт. ст., $V_{\text{бат}} = 33$ кв.
1 — ток через пояс II; 2 — ток в обмотке.

оценить по осциллограммам полного газового тока. На рис. 9 показаны осциллограммы полного газового тока и тока в обмотке для давления 0,1 мм рт. ст. Масштаб времени на этих осциллограммах увеличен. В качестве времени сжатия принимаем время от момента, когда газовый ток начинает заметно спадать, до момента максимального значения отрицательного тока (см. рис. 9). За это время радиус газового витка изме-

няется примерно на 200 мм. Время сжатия при давлении 0,1 мм рт. ст. равно 1,1 мксек и при $p = 0,06$ мм рт. ст. — 0,83 мксек.

При начальном давлении 0,1 мм рт. ст. средняя скорость сжатия, определенная на основании этих осциллограмм, составляет $v_{\text{сж}} = 1,8 \cdot 10^7$ см/сек и при давлении 0,06 мм рт. ст. — $v_{\text{сж}} = 2,4 \cdot 10^7$ см/сек. Средние энергии дейтронов, соответствующие этим скоростям, равны $E_1 = \frac{mv^2}{2} = 320$ эв при давлении 0,1 мм рт. ст. и $E_2 = 570$ эв при давлении 0,06 мм рт. ст.

Максимальные энергии при этом будут, конечно, значительно больше, так как в начальной стадии срыва скорость движения витка невелика; она невелика и в конечной стадии, когда виток заметно тормозится сжатым магнитным полем. Очевидно, энергия витка будет максимальной в тот момент времени, когда ток проходит через нулевое значение, так как после того, когда ток изменяет знак, происходит торможение витка внешним магнитным полем.

Скорость движения витка в момент, когда ток меняет знак, т. е. максимальную скорость, можно также оценить на основании этих осциллограмм. Действительно при сжатии витка имеем

$$I_2 R_2 = -\frac{1}{c} \frac{d\psi}{dt};$$

$$\psi = \frac{1}{c} (M I_1 + L_2 I_2),$$

$$I_2 R_2 + \frac{1}{c^2} \left(M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_1 \frac{\partial M}{\partial r} v + I_2 \frac{\partial L_2}{\partial r} v \right) = 0,$$

где I_1 — первичный ток; I_2 — ток газового витка, R_2 — активное сопротивление газового витка; L_2 — индуктивность газового витка; M — коэффициент взаимной индукции; v — скорость движения витка. В момент времени, когда ток в витке меняет знак ($I_2 = 0$), имеем, следовательно,

$$v_{\text{макс}} = -\frac{M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}}{I_1 \frac{\partial M}{\partial r}}.$$

Все величины в этой формуле относятся к моменту времени, когда газовый ток меняет знак. Определив непосредственно из осциллограммы $\left(\frac{dI_1}{dt}\right)_{I_2=0} = 5,7 \cdot 10^{10} \text{ а/сек}$; $\left(\frac{dI_2}{dt}\right)_{I_2=0} = 2,7 \times 10^{11} \text{ а/сек}$; $(I_1)_{I_2=0} = 3,4 \cdot 10^5 \text{ а}$ и зная радиус витка (а следовательно, M и L_2) в момент, когда $I_2 = 0$, можно определить максимальную скорость сжатия витка. Что касается радиуса витка в момент времени, когда $I_2 = 0$, то, как уже говорилось, он равен $\sim 110 \text{ мм}$.

Для определения величин $\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_{r=110}$ и $(M)_{r=110}$ на макетной установке определялась зависимость коэффициента взаимной индукции медного витка с магнитной системой в функции радиуса витка. На основании этих измерений имеем

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_{r=110} = 8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{мкГн}}{\text{см}}; \quad (M)_{r=110} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ мкГн}.$$

При вычислении L_2 предполагалось, что диаметр сечения витка в процессе движения заметно не изменяется. Полагая радиус витка 11 см и радиус сечения $1,5 \text{ см}$, получаем $L_2 \simeq 0,35 \text{ мкГн}$.

Максимальная скорость движения витка, полученная на основании этих данных при $p = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$ и $V_{\text{бат}} = 32 \text{ кВ}$, составляет $3,7 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$. Эта скорость превышает в 2 раза

среднюю скорость. Максимальная кинетическая энергия, соответствующая этой скорости, составляет ~ 1500 эв. Таким образом, видим, что частицы набирают энергию не на орбите, а в процессе сжатия витка к центру (энергия, которую набирают частицы на орбите, составляет 4 эв).

Однако эта энергия идет в дальнейшем на сжатие нескомпенсированного магнитного потока. Если остаточный магнитный поток полностью скомпенсировать [5], то виток, движущийся

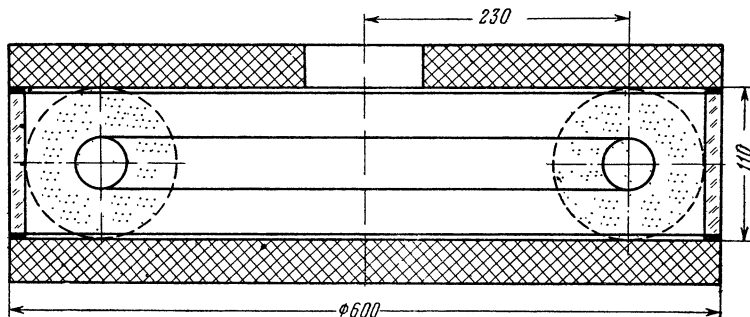


Рис. 10. Схема развития разряда.

щийся с такой большой энергией, должен сжаться в ком весьма малых размеров. Интенсивность взаимодействия частиц в коме может оказаться при этом весьма значительной.

Произведем оценку числа частиц внутри шнура, которые участвуют в радиальном движении шнура. Магнитная энергия газового витка составляет

$$\frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{0,95 \cdot 10^{-6} (6 \cdot 10^4)^2}{2} = 1700 \text{ дж.}$$

Основная часть этой энергии переходит в кинетическую энергию шнура $\left(\frac{Nm v^2}{2}\right)$; $\frac{Nm v^2}{2} = \frac{L_2 I_2^2}{2} \cdot 10^7$; здесь $m = 3,4 \cdot 10^{-24}$ г; $v = 3,7 \cdot 10^7$ см/сек; $\frac{L_2 I_2^2}{2} = 1700$ дж. Отсюда определяем N — общее число частиц, участвующих в радиальном движении шнура и обладающих энергией 1500 эв.

$$N = \frac{1700 \cdot 10^7 \cdot 2}{3,4 \cdot 10^{-24} (3,7 \cdot 10^7)^2} = 0,7 \cdot 10^{19}.$$

Полное же число частиц внутри тора (рис. 10) при давлении $p = 0,1$ мм рт. ст. составляет $\sim 0,9 \cdot 10^{20}$.

Выше указывалось, что ток меняет знак при диаметре сжимающегося шнура ~ 220 мм. Зная этот диаметр, можно

произвести оценку величины Φ_0 — остаточного магнитного потока внутри витка в момент срыва витка с орбиты. Действительно, если скорость сжатия витка достаточно велика, то магнитный поток внутри витка сохраняется $MI_1 + L_2I_2 = \Phi_0 = \text{const}$. В момент, когда $I_2 = 0$, остаточный поток $\Phi_0 = MI_1$, где $M = 6 \cdot 10^{-2}$ мкГн — коэффициент взаимной индукции при диаметре витка 220 мм, $I_1 = 340$ кА — величина первичного тока в момент, когда $I_2 = 0$. Таким образом, $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ вб. Зная остаточный магнитный поток Φ_0 , можно оценить активное сопротивление газового витка по формуле $\omega\Phi_0 \simeq I_2R_2$; здесь $I_2 = 60$ кА — ток газового витка в момент срыва; R_2 — активное сопротивление газового витка. Активное сопротивление витка по такой оценке составляет $R_2 = 4,5 \cdot 10^{-2}$ ом. Индуктивное сопротивление витка $\omega L_2 = 0,12$ ом. Отношение индуктивного сопротивления к активному составляет в нашем случае $\frac{\omega L_2}{R_2} = 2,7$.

Зная размеры газового витка $D \simeq 50$ см, $d \simeq 3$ см и его активное сопротивление $R = 4,5 \cdot 10^{-2}$ ом, определяем проводимость: $\sigma = 5 \cdot 10^{14}$ абс. эл.-ст. единиц. Это значение проводимости находится в разумном согласии с величиной проводимости плазмы, определяемой более прямыми методами (в опытах с прямыми трубами).

Авторы выражают благодарность В. М. Атаманову, выполнившему все работы по конструированию установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Осовец, см. т. II, настоящего издания, стр. 238.
2. С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров, Н. И. Щедрин, см. т. II настоящего издания, стр. 242.
3. Ю. Ф. Наседкин, см. т. II настоящего издания, стр. 264.
4. М. А. Леонтович, С. М. Осовец. Отчет АН СССР, 1953 г.; Атомная энергия, 3, 81 (1956).
5. С. М. Осовец, Н. И. Щедрин, см. настоящий том, стр. 196.

С. М. Осовец, Н. И. Щедрин

ПЛАЗМЕННЫЙ ВИТОК ПРИ НАЛИЧИИ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ*

В первой части статьи приведено теоретическое рассмотрение условий равновесия в процессе сжатия плазменного витка при конечной его проводимости. Показано, что для сжатия витка в ком необходимо компенсировать остаточный магнитный поток некоторым постоянным во времени полем. Во второй части приведены результаты экспериментов с компенсирующим полем, подтверждающие выводы первой части. Получены условия, при которых остаточный поток полностью компенсируется, и виток сжимается в ком.

§ 1. Теоретическое рассмотрение

Исходными уравнениями, описывающими поведение плазменного витка, являются:
уравнение движения

$$M \mathcal{N} \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{2\pi R}{c} I H + \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial L}{\partial R}, \quad (1.1)$$

где \mathcal{N} — полное число частиц в витке; M — масса частицы:

$$L = 4\pi R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right); \quad \frac{\partial L}{\partial R} = 2\pi l \left(1 + \frac{2}{l} \right),$$

где $l = 2 \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right)$ — индуктивность единицы длины (эту

* Работа выполнена в 1957 г.

величину в дальнейшем будем считать постоянной), и уравнение электрического равновесия

$$\frac{d}{dt}(LI) + \frac{I}{\Sigma} = -c \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.2)$$

где Σ — проводимость витка, равная $\frac{2\pi Rc^2}{\pi r^2 \sigma}$. Здесь $\frac{1}{\pi r^2 \sigma}$ — сопротивление единицы длины, которое будем также считать постоянным.

Раскрывая значения величин, входящих в уравнение (1.2), запишем его в виде

$$\frac{d}{dt} \left(2\pi R I + 2\pi c \int_0^R H x dx \right) + \frac{2\pi Rc^2}{\pi r^2 \sigma} I = 0. \quad (1.2a)$$

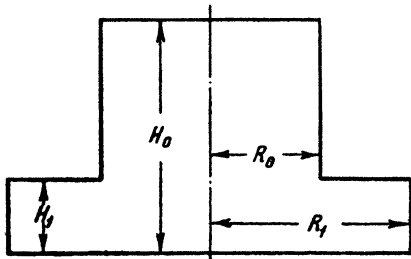


Рис. 1.

Введем безразмерные переменные: $x = \frac{R}{R_0}$, где R_0 — минимальное значение радиуса устойчивой орбиты; $h = \frac{H}{H(0)}$, где $H(0)$ — поле в точке $R=0$ в некоторый фиксированный момент времени; $\frac{lIx}{R_0 c H(0)} = i$; $\frac{\pi r^2 \sigma l}{c^2} = \tau_{\text{ск}}$ — скиновое время. Теперь уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(i + \int_0^x h x dx \right) + \frac{i}{\tau_{\text{ск}}} = 0, \quad (1.3)$$

а уравнение (1.1)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2\pi R_0 H^2(0)}{M_0 c^2 l} i \left[h + \frac{i}{2x^2} \left(1 + \frac{2}{l} \right) \right]. \quad (1.4)$$

Для того чтобы задача стала определенной, необходимо ввести явную зависимость h от координат и времени. Зависимость от координат примем в виде, представленном на рис. 1. При этом считаем, что в интервале от R_1 до R_0 удовлетворяются условия устойчивости. Зависимость от времени рассмотрим для случая $H = H_m \sin \Omega t$. Тогда для случая, когда виток находится в зоне устойчивой орбиты, где движение медленное, в (1.4) можно отбросить инерционный член

$$xh + \frac{i}{2x} \left(1 + \frac{2}{l} \right) = 0 \quad \text{и} \quad h = h_1 = \frac{H_1}{H(0)} = h_{1m} \sin \Omega t. \quad (1.4a)$$

Тогда

$$x h_{1m} \sin \Omega t + \frac{i}{2x} \left(1 + \frac{2}{l}\right) = 0. \quad (1.5)$$

Вычислим интеграл в уравнении (1.3)

$$\int_0^x h x dx = \int_0^1 h_0 x dx + \int_1^x h_1 x dx = \frac{h_{0m} + h_{1m}(x^2 - 1)}{2} \sin \Omega t.$$

Теперь (1.3) примет такой вид:

$$\frac{d}{dt} \left[i + \frac{h_{0m} + h_{1m}(x^2 - 1)}{2} \sin \Omega t \right] + \frac{i}{\tau_{\text{СК}}} = 0. \quad (1.6)$$

Решение этого уравнения при начальном условии $i = 0$ имеет вид

$$i = - \frac{\Omega \tau (h_{0m} - h_{1m})}{2 [1 + (\Omega \xi \tau_{\text{СК}})^2]} \left[\xi \Omega \tau_{\text{СК}} \sin \Omega t + \cos \Omega t - e^{-\frac{t}{\xi \tau_{\text{СК}}}} \right], \quad (1.7)$$

где $\xi = 1 - \frac{1 + 2/l}{4}$.

Из (1.4а) имеем

$$h_{1m} \sin \Omega t x^2 = \frac{\Omega \tau_{\text{СК}} (h_{0m} - h_{1m})}{4 [1 + (\Omega \xi \tau_{\text{СК}})^2]} \times \\ \times \left[\xi \Omega \tau_{\text{СК}} \sin \Omega t + \cos \Omega t - e^{-\frac{t}{\xi \tau_{\text{СК}}}} \right]. \quad (1.8)$$

Условия равновесия выбраны так, чтобы при $t \rightarrow 0$ $x \rightarrow x_0$. Тогда, переходя к пределу в (1.8), получаем

$$h_{1m} x_0^2 = \frac{(h_{0m} - h_{1m})(1 + 2/l)}{4\xi}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) можно представить в виде

$$\frac{x^2}{x_0^2} = \frac{\xi \Omega \tau_{\text{СК}}}{1 + (\xi \Omega \tau_{\text{СК}})^2} \left[\frac{\xi \Omega \tau_{\text{СК}} \sin \Omega t + \cos \Omega t - e^{-\frac{t}{\xi \tau_{\text{СК}}}}}{\sin \Omega t} \right]. \quad (1.10)$$

Правая часть (1.10) обращается в нуль и даже меняет знак. Отсюда следует, что периодического решения нет, т. е. что в периодически меняющемся поле плазменный виток не может совершать периодических движений, не выходя из зоны устойчивости. Область устойчивости ограничивается значе-

нием $x=1$. Следовательно, момент выхода витка из зоны устойчивости определяется из условия

$$\frac{\sin \Omega t_{\text{ср}}}{x_0^2} = \frac{\xi \Omega \tau_{\text{ср}}}{1 + (\xi \Omega \tau_{\text{ср}})^2} \left[\xi \Omega \tau_{\text{ср}} \sin \Omega \tau_{\text{ср}} + \cos \Omega t_{\text{ср}} - e^{-\frac{t_{\text{ср}}}{\xi \tau_{\text{ср}}}} \right]. \quad (1.11)$$

Наибольшая энергия, запасенная в витке к моменту срыва (перехода в неустойчивую область), будет отвечать моменту достижения полем максимального значения: $t_{\text{ср}} \simeq \frac{\pi}{2\Omega}$. При этом уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{\xi \Omega \tau_{\text{ср}}}{1 + (\xi \Omega \tau_{\text{ср}})^2} \left(\xi \Omega \tau_{\text{ср}} - e^{\frac{-\pi}{2\xi \Omega \tau_{\text{ср}}}} \right). \quad (1.12)$$

Оценим необходимые для выполнения этого условия значения соответствующих величин. Например, при $\xi \Omega \tau_{\text{ср}} = 1$ $x_0 \simeq 1,58$; при $\xi \Omega \tau_{\text{ср}} = \frac{1}{2}$ $x_0 \simeq 2,4$; при $\xi \Omega \tau_{\text{ср}} = 2$ $x_0 \simeq 1,4$. При бóльших x_0 сильно уменьшается связь первичной обмотки с газовым витком, т. е. в этом случае лишь относительно малая часть энергии первичного контура может перейти в энергию, запасенную в газовом витке. Поэтому практически имеет смысл область значений $\xi \Omega \tau_{\text{ср}}$, не слишком сильно отличающаяся от единицы. При этом $\Omega = 2\pi f \simeq \frac{1}{\xi \tau_{\text{ср}}}$. Значение $\tau_{\text{ср}}$ можно оценить с достаточной степенью точности, как

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\pi r^2 \sigma l}{c^2} \simeq \frac{\pi \cdot 4 \cdot 10^{14} \cdot 5}{9 \cdot 10^{20}} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}, \quad \xi \simeq 1.$$

Тогда частота первичного контура должна составлять примерно

$$f = \frac{10^6}{2\pi \cdot 6} \simeq 2,5 \cdot 10^4 \text{ пер/сек}$$

(при $x_0 = 1,58$).

Выполнение этих условий по мере увеличения мощности питающего устройства наталкивается на все бóльшие трудности и практически достижимо только для небольших устройств.

Для устройств существующего типа хорошее приближение получается при разложении членов уравнения (1.11) в ряд по степеням Ωt . Разложение до членов второго порядка приводит к соотношению

$$\frac{t_{\text{ср}}}{2\xi \tau_{\text{ср}}} = 1 - \frac{1}{x_0^2}, \quad (1.13)$$

где $t_{\text{ср}}$ — момент срыва. При $\xi \simeq 1$ $\tau = 6 \cdot 10^{-6}$ сек. и $x_0 \simeq 1,3$, что соответствует данным исследуемой установки, $t_{\text{ср}} \simeq 10^{-5} \left(1 - \frac{1}{1,69}\right) \simeq 4 \cdot 10^{-6}$ сек. Найденное значение величины $t_{\text{ср}}$ достаточно близко совпадает с результатами измерения. Ток срыва можно получить из (1.7), используя соотношения (1.9) и (1.11) в виде

$$i_{\text{ср}} = -\frac{h_0 \sin \Omega t_{\text{ср}}}{2[\xi x_0^2 + (1 - \xi)]} \simeq -\frac{h_0 \Omega \tau_{\text{ср}} \xi}{\xi x_0^2 + 1 - \xi} \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right). \quad (1.14)$$

Перейдем к рассмотрению процесса сжатия после того, как виток попадает в неустойчивую область постоянного поля. Перепишем исходные уравнения (1.3) и (1.4)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{2\pi R H^2(0)}{M e^{\mathcal{N} l}} i \left[h_0 + \frac{2i}{x^2} (1 - \xi) \right]$$

и

$$\frac{d}{dt} \left(i + \frac{h_0 x^2}{2} \right) + \frac{i}{\tau_{\text{ср}}} = 0$$

и введем безразмерное время z , отнесенное к «инерционному» времени $t = \alpha z$, так что

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = i \left[h_0 + \frac{2i(1 - \xi)}{x^2} \right]; \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dz} \left(i + \frac{h_0 x^2}{2} \right) + \beta i = 0. \quad (1.16)$$

Масштаб времени

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{M e^{\mathcal{N} l}}{2\pi R_0 H^2(0)}}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\tau_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{M e^{\mathcal{N} l}}{2\pi R_0}} \frac{c^2}{\pi r^2 \sigma l \cdot H(0)} = \\ &= \sqrt{\frac{MN}{l}} \frac{c^2 m}{\pi r^2 e^2 n \tau H_0}, \end{aligned}$$

$\mathcal{N} = 2\pi R_0 N$ и $\pi r^2 n = N$ — число частиц в сечении витка на единицу длины в положении витка $R = R_0$, τ — частота столкновений, определяющая проводимость плазмы. После простых преобразований находим, что $\beta = \frac{1}{\omega \tau \sqrt{\Pi l}}$, где ω — ларморовская частота электронов, Π — «погонный дейтрон».

Ясно, что $\beta \ll 1$; и, так как время схлопывания порядка инерционного, т. е. $z_{\text{схл}} \approx 1$, то величиной β при исследовании этого процесса можно пренебречь. Это означает, что поток, оставшийся внутри витка во время его нахождения

в устойчивой зоне, сохраняется при схлопывании, так как скиновое время много больше инерционного. Период колебания потока $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ также много больше инерционного времени; следовательно, и $h_0 = h_{0m} \sin \Omega t_{cp}$ в процессе схлопывания также можно считать постоянным и, для простоты, равным единице. Тогда из (1.16) имеем

$$i + \frac{x^2}{2} = i_{cp} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\tau_{ск}} \int_0^{t_{cp}} idt = \frac{\xi(x_0^2 - 1)}{2[\xi x_0^2 + (1 - \xi)]} = \frac{A}{2}.$$

и

$$\frac{d^2x}{dz^2} = i \left[1 + \frac{2i(1 - \xi)}{x^2} \right] = \frac{A - x^2}{2} \left[\xi + \frac{A(1 - \xi)}{x^2} \right]$$

с начальными условиями при $z = 0$, $x = 1$, $\frac{dx}{dz} = 0$.

Введем $\frac{dx}{dz} = V$ — безразмерную скорость; тогда (17) примет вид

$$\frac{dv^2}{dx} = (A - x^2) \left[\xi + \frac{A(1 - \xi)}{x^2} \right] \quad (1.18)$$

и

$$v^2 = (1 - x) \left[-A(2\xi - 1) + \xi \frac{(x^2 + x + 1)}{3} - \frac{A^2(1 - \xi)}{x} \right]. \quad (1.19)$$

Найдем, при каком x , отличном от единицы, v обращается в нуль. Это будет положительный корень уравнения

$$\xi \frac{x(x^2 + x + 1)}{3} - A(2\xi - 1)x - A^2(1 - \xi) = 0. \quad (1.20)$$

Ясно, что это уравнение всегда имеет один действительный положительный корень. Следовательно, имеет место торжование сжимающегося витка оставшимся внутри витка потоком, и виток совершает колебательные движения, не сжимаясь полностью в ком. Оценим величину максимальной кинетической энергии при схлопывании. Из (1.18) найдем значение x , при котором $v^2 = v_{\max}^2$, из условия

$$\frac{A - x^2}{2} \left[\xi + \frac{A(1 - \xi)}{x^2} \right] = 0 \text{ или } x = \sqrt{A}.$$

Подставляя в (1.19) имеем, что:

$$v_{\max}^2 = 2A^{3/2}(4/3\xi - 1) - A(2\xi - 1) + \xi/3 - A^2(1 - \xi).$$

Переходя к исходным переменным и используя (1.13), найдем

$$E_{\text{макс}} \simeq \frac{LI_{\text{ср}}^2}{2N} \frac{4}{3} \xi [\xi x_0^2 + (1 - \xi)]^2.$$

В качестве примера возьмем $2/l = 1/3$, $x_0 = 1,3$; тогда $\xi = 2/3$, $A = 0,3$. Для таких значений параметров $\Psi(A\xi) \simeq 5,8 \cdot 10^{-3}$,

$$\begin{aligned} E_{\text{макс}} &= \frac{H_{\text{макс}}^2 (\sin \Omega t_{\text{ср}})^2 R_0^2}{2Nl} 4,6 \cdot 10^{-2} \simeq \frac{H_{\text{макс}}^2 \sin^2 \Omega t_{\text{ср}} \cdot R_0^2}{N} \cdot 10^{-12} = \\ &= \frac{(H_{\text{макс}} R_0 \sin \Omega t_{\text{ср}})^2}{\Pi} \cdot 6 \cdot 10^{-7} \text{ эв}. \end{aligned}$$

При этом корень уравнения (1.20) $x_{\text{мин}} \simeq 0,2$,

$$i_{\text{ср}} = \frac{A - 1}{2} = -0,341, \quad i_{\text{мин}} = \frac{A - x_{\text{мин}}}{2} = \frac{0,318 - 0,04}{2} = 0,139,$$

$$\left| \frac{I_{\text{мин}}}{I_{\text{ср}}} \right| = \left| \frac{i_{\text{мин}}}{i_{\text{ср}} x_{\text{мин}}} \right| = \frac{0,139 \cdot 5}{0,341} \simeq 2.$$

Представляется естественным компенсировать поток, остающийся внутри плазменного витка, с помощью некоторого постоянного поля, подобранного таким образом, чтобы

$$\Phi_{\text{пост}} + \Phi_{\text{ост}} = 0.$$

Из соотношения (1.17) к моменту срыва

$$i + \frac{x^2}{2} = \frac{\xi(x_0^2 - 1)}{2[\xi x_0^2 + (1 - \xi)]} = \frac{A}{2}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем $\Phi_{\text{ост}} = A\Phi_0$, где Φ_0 — полный поток, а так как $A \simeq 0,3$, то компенсирующий поток должен составлять примерно 30% основного в момент срыва.

Энергия компенсирующего поля относится к энергии основного, как $A^2 \left(\frac{R_0}{R_{\text{к}}} \right)^2$, где $R_{\text{к}}$ — область, в которой сконцентрировано компенсирующее поле.

Основные положения, приведенные здесь, полностью подтверждаются результатами экспериментов, приведенными во второй части настоящего отчета.

§ 2. Экспериментальное исследование

Ниже описываются эксперименты по исследованию газового витка, когда остаточный магнитный поток компенсируется с помощью дополнительного центрального поля.

А. Описание экспериментальной установки

На рис. 2 представлена схема установки, на которой проводились эксперименты по компенсации остаточного потока внутри орбиты.

Разрядная вакуумная камера состояла из стеклянного цилиндрического кольца, уплотненного с обеих сторон фарфоровыми крышками. Под действием электрического поля, индуцированного переменным поперечным магнитным полем,

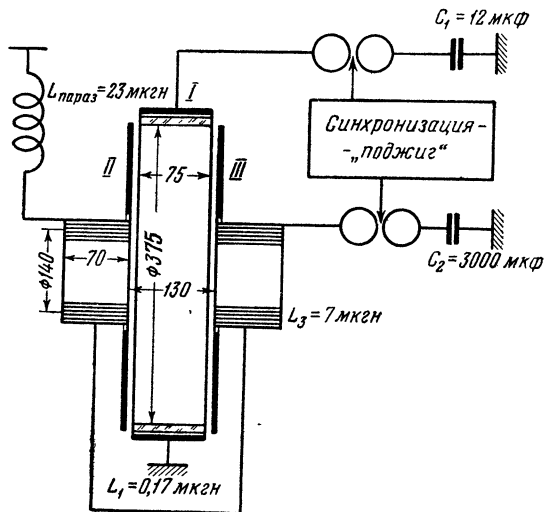


Рис. 2. Схема экспериментальной установки.

в камере возбуждался безэлектродный разряд. При определенных условиях газовый ток формировался в виде равновесного и устойчивого газового витка. Необходимое распределение составляющей H_z по радиусу создавалось при помощи токонесущих медных дисков (рис. 2). Основной медный диск I располагался поверх камеры; к нему присоединялись параллельно два боковых диска II. Питание обмотки осуществлялось в импульсе от конденсаторной батареи емкостью 12 мкФ с максимальным напряжением 50 кВ. Рассматриваемая магнитная система обеспечивала наиболее выгодное значение коэффициента связи первичной обмотки с орбитой $r_{\text{орб}} = 170$ мм. Частота рабочей цепи при полезной индуктивности $L_1 = 0,17$ мкГн составляла 75 кГц; период колебаний $T_1 = 13,3 \cdot 10^{-6}$ сек. Компенсирующая магнитная система состояла из двух соединенных последовательно спиральных катушек (рис. 2) с общей индуктивностью $L_3 = 7$ мкГн, витки которых имели надежную изоляцию от индуцирующего действия основ-

ного переменного поля. Обмотка питалась в импульсе от конденсаторной батареи емкостью 3000 мкф с напряжением 3 кв. Ниже приводится таблица, характеризующая параметры обеих обмоток.

Т а б л и ц а 1

	Основная обмотка 1	Компенсирующая обмотка 3	Орбита 2
Индуктивность, мкгн .	$L_1 = 0,17$	$L_3 = 7$	$L_2 \approx 0,7$
Коэффициент связи с орбитой	$K_{12} = 0,32$	$K_{32} = 0,15$	
Коэффициент трансформации	$K_{12}^T = 0,8$	$K_{32}^T = 0,06$ $K_{31}^T \approx 2,4$	$K_{23}^T = 0,35$

Синхронизирующее устройство было выполнено таким образом, чтобы начало пробоя высоковольтных разрядных шаров соответствовало максимальному значению компенсирующего поля (рис. 3).

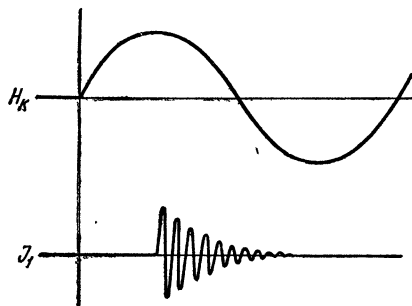


Рис. 3. Синхронизация компенсирующего поля с основным током.

H_k — компенсирующее магнитное поле;
 I_1 — ток через основную обмотку.

На первом луче осциллографа записывалось напряжение на компенсирующей обмотке, на втором луче — ток через основную обмотку. Ясно, что при замыкании разрядного промежутка дополнительной магнитной цепи в последней будет наводиться э. д. с. от переменного рабочего поля, и появившийся ток размагнитит это поле. Чтобы исключить подобное крайне нежелательное явление,

последовательно с компенсирующими катушками включалась паразитная индуктивность $L_{\text{параз}} = 23$ мкгн (см. рис. 2). При такой схеме частота дополнительной магнитной системы составляла 560 гц, т. е. $T_2 = 1,8 \cdot 10^{-3}$ сек, так что на протяжении $\frac{T_1}{4} \approx 3,3 \cdot 10^{-6}$ сек компенсирующее поле оставалось практически постоянным. Распределение составляющей H_z магнитного поля в зависимости от радиуса орбиты для обеих систем показано на рис. 4.

В табл. 2 приведены значения магнитного поля на орбите и в центре камеры для обеих систем.

Таблица 2

Контур «высокой» частоты	$I, \text{ка}$ (ток через обмотку)	$f, \text{гц}$ (частота контура)	$H', \text{э}$ (на орбите)	$H'', \text{э}$ (в центре)
		170	$75 \cdot 10^3$	1000
Контур «низкой» частоты	15	560	180	3300

Некоторое провисание поля подмагничивания на орбиту обусловлено тем, что в данном случае по конструктивным соображениям нельзя было использовать центральные катушки меньших размеров. Позднее увидим, что при небольших давлениях в камере существование на орбите z -составляющей компенсирующего поля, противоположной по знаку высокочастотному полю, приводит к ряду дополнительных интересных явлений.

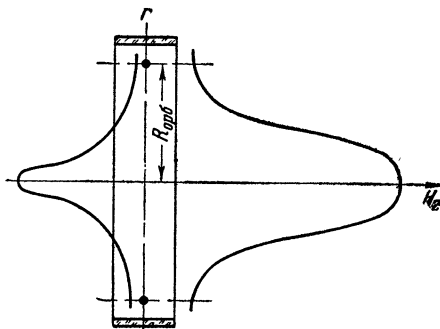


Рис. 4. Справа — «высокочастотное» основное магнитное поле при коротком замыкании компенсирующей обмотки, слева «медленное» поле обратного знака при разомкнутой основной цепи.

Примечание. Как известно, в подобных магнитных катушках поле по радиусу меняет знак. В данном случае вид кривой объясняется влиянием медных стенок обмотки на распределение составляющей поля оси z .

Б. Описание измерений

Газовый ток в камере, а также токи через обмотки измерялись калиброванными интегрирующими поясами (рис. 5), которые довольно подробно описаны в других статьях этого цикла работ.

В настоящей работе проводилось измерение орбитального и общего токов. Сжатие остаточного магнитного потока в центре от сжимающегося газового витка исследовалось при помощи интегрирующей магнитной катушки ($W=900$ витков, $S=0,23 \text{ см}^2$). Электрические сигналы с поясов подавались через усилители на пластины двухлучевых осциллографов типа ОК-17.

Порядок проведения и результаты эксперимента

Измерения проводились в следующей последовательности. Вначале в отсутствие компенсирующего магнитного поля и при высоком вакууме в камере ($p=5 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст.) устранялись электромагнитные наводки на измерительные пояса. В этих условиях центральная магнитная катушка, регистрировавшая характер изменения внешнего поля в центре камеры, записывала на осциллограмме синусоидальную кривую (рис. 6).

Затем при давлении $p=0,08$ мм рт. ст. дейтерия снимались осциллограммы орбитального и общего токов (рис. 7 и табл. 3).

Т а б л и ц а 3

И _{комп} = 0; $p = 0,08$ мм рт. ст. D ₂ ; $E = 12,5$ кэв (на камере)		
	Ток, ка	
	измеренный	расчетный
I_1 (ток в первичной цепи)	154	160
I_2 (общий газовый ток) .	16,8	16,3
I (орбитальный ток) . . .	16	

Из табл. 3 и рис. 7 видно, что полный ток при давлении 0,08 мм рт. ст. сосредоточен в основном на орбите с фазой срыва около 70°. В центре камеры наблюдается четырехкратное увеличение напряженности магнитного поля по отношению к полю, существующему в момент равновесия газового витка (рис. 7, б). Можно грубо оценить время и скорость сжатия газового витка, а также число захваченных частиц на орбиту. Из кривой магнитной катушки (рис. 7, в) следует, что время нарастания переднего фронта пика до максимума в среднем соответствует времени «схлопывания» орбиты с радиуса $r_{орб}$ до минимального радиуса $r_{мин}$ сжатия. В данных условиях: $r_{орб} = 170$ мм, $r_{мин.сж} \approx 35$ мм и $t_{сж} \approx 1,3 \cdot 10^{-6}$ сек. (оценку $r_{мин.сж}$ см. ниже). Отсюда средняя скорость сжатия $v_{сж} \approx 1,0 \cdot 10^7$ см/сек, что соответствует энергии частицы $W_{кин} \approx \approx 100$ эв (при $P = 0,08$ мм рт. ст. дейтерия). Кинетическая энергия движения частиц к центру равна

$$W = \mathcal{N} \frac{m \cdot v_{сж}^2}{2},$$

где $W = 200$ джоулей (магнитная энергия, запасенная на устойчивой орбите); N — полное число заряженных частиц; $v_{\text{снк}} = 1,2 \cdot 10^7$ см/сек; $m = 3,4 \cdot 10^{-24}$ г (масса D^+),

$$N = \frac{2W}{mv_{\text{снк}}^2} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 10^7}{3,4 \cdot 10^{-24} \cdot 1,0 \cdot 10^{14}} \simeq 1 \cdot 10^{19} \text{ частиц.}$$

На рис. 8 и 9, а, б представлены соответствующие кривые для $p = 0,015$, $0,03$ и $0,05$ мм рт. ст.

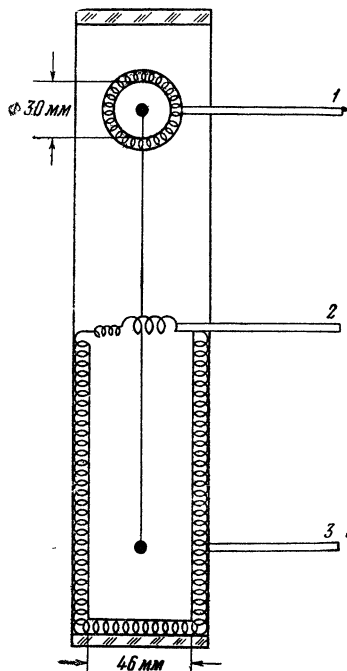


Рис. 5. Схема расположения измерительных поясов в разрядной камере.

1 — орбитальный измерительный пояс; 2 — центральная магнитная катушка; 3 — измерительный пояс общего тока.

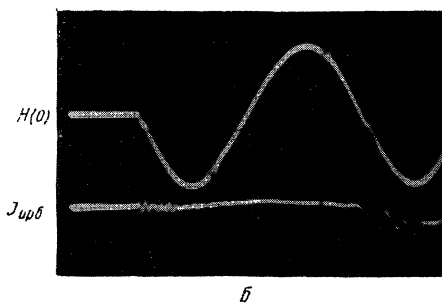
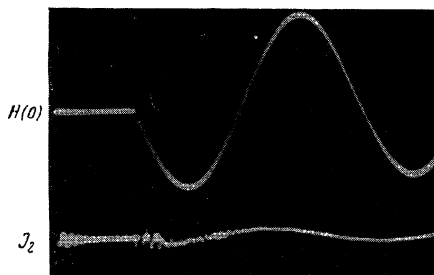


Рис. 6. Оциллограммы магнитного поля в центре при $p = 5 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст.

$H(0)$ — магнитное поле в центре; J_2 — общий газовый ток; $J_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

При давлении $p = 0,015$ мм рт. ст. дейтерия разряд возбуждается в основном на втором полупериоде первичного тока; срыв газового тока сопровождается также сильной кумуляцией поля в центре. На первом полупериоде незначительный вторичный ток наблюдается только при давлении $p = 0,03$ мм рт. ст. В этом случае поле в центре почти не умень-

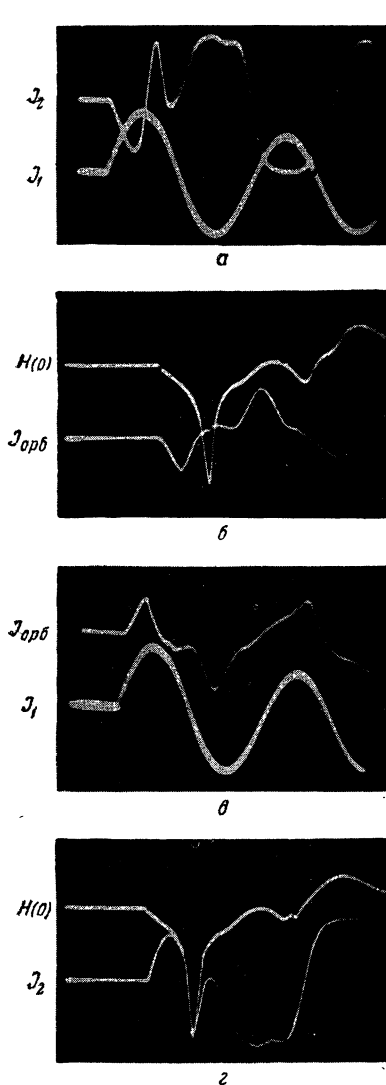


Рис. 7. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре при напряжении компенсации $U_{\text{комп}} = 0$.

$\alpha, б, в, г - r = 0,08$ мм рт. ст. D_2 . I_2 — общий газовый ток; I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

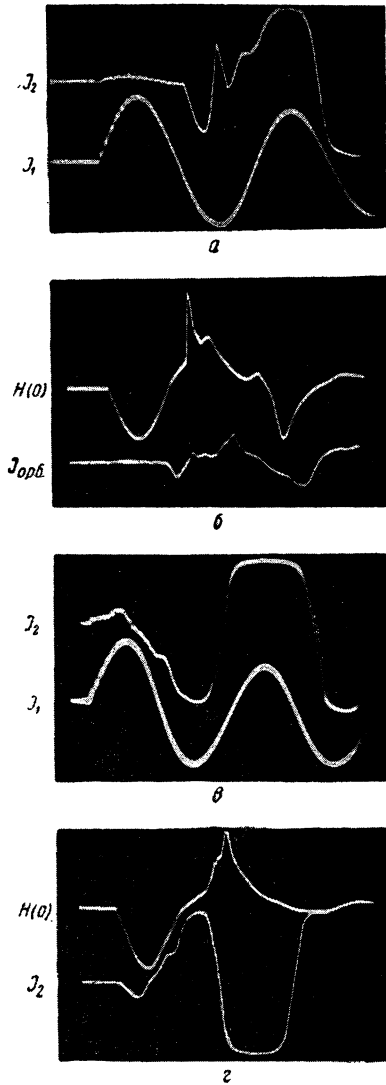


Рис. 8. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре при напряжении компенсации $U_{\text{комп}} = 0$.

$\alpha, б - r = 0,015$ мм рт. ст. D_2 ; $в, г - r = 0,03$ мм рт. ст. D_2 . I_2 — общий газовый ток; I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

шается, и кумуляция поля очень мала. С увеличением плотности ($p=0,05$ мм рт. ст.) газовый ток на первом полупериоде возрастает, в центре поле размагничивается на 30%, а остаточное поле сжимается более чем в 1,5 раза.

Рассмотрим теперь экспериментальные результаты для случая, когда в центре орбиты существует дополнительное компенсирующее поле, направленное противоположно внешнему полю.

Из рис. 9, в, г и 11, в следует, что, как и в случае $U_{\text{комп}}=0$, полный газовый ток формируется в виде витка. Увеличение фазы срыва объясняется некоторым провисанием в область орбиты «постоянного» поля, которое стремится удержать газовый виток в положении равновесия. С дополнительным центральным полем полная компенсация остаточного магнитного потока при давлении $p=0,08$ мм рт. ст. наблюдается при $U_{\text{комп.}}=1,7$ кВ, что соответствует энергии компенсирующего поля $W_2=20$ джоулей. При этом характерный пик на кривой магнитной катушки меняет знак и достигает нуля (см. рис. 10, г). Если поле в центре перекомпенсировано ($U_{\text{комп.}}=2$ кВ), то при сбрасывании орбиты сжимается остаточный магнитный поток, направленный противоположно внешнему полю (см. изменение знака пика на рис. 11, б).

При давлениях $p=0,015$, $0,03$ и $0,05$ мм рт. ст. также наблюдается эффект компенсации остаточного поля (см. рис. 12, в). При этом обнаружено одно интересное явление. Из-за наличия некоторого компенсирующего поля в области устойчивой орбиты полный плазменный ток при низких давлениях газа на первой четверти периода значительно возрастает. Так, например, при $p=0,03$ мм рт. ст. вторичный ток увеличился в четыре раза, а при $p=0,05$ мм рт. ст. — в два раза. Зная экспериментальную величину магнитной энергии компенсации, можно сделать грубую оценку значения активного сопротивления газового витка. Принимая во внимание, что в данном случае

$$c_1 = 12 \text{ мкф},$$

$$I_2 = 16 \text{ ка},$$

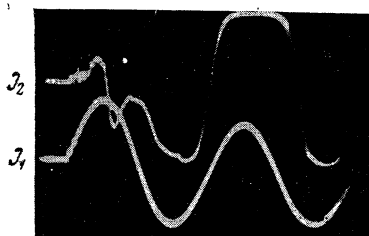
$$W_{\text{комп.}} = 20 \text{ джоулей},$$

$$f_{\text{осн}} = 75 \cdot 10^3 \text{ гц},$$

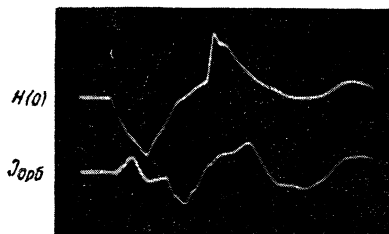
$$r_{\text{орб}} = 170 \text{ мм},$$

находим из уравнения электрического равновесия

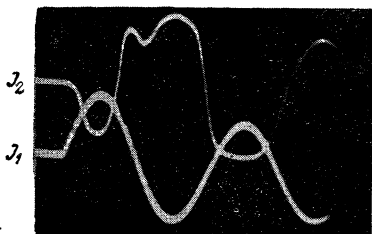
$$R_{\text{плазм. витка}} \approx 0,1 \text{ }\Omega.$$



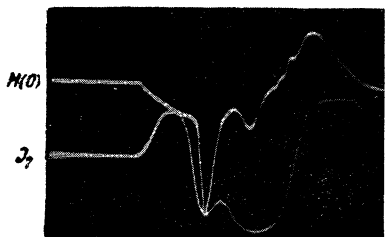
a



б



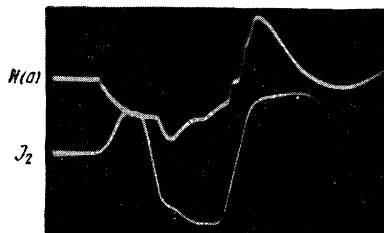
в



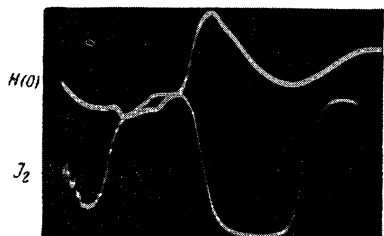
г

Рис. 9. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре.

a, б — $p = 0,05$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 0$;
в, г — $p = 0,08$ мм рт. ст.; $U_{\text{комп}} = 1$ кэ. I_2 — общий газовый ток; I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

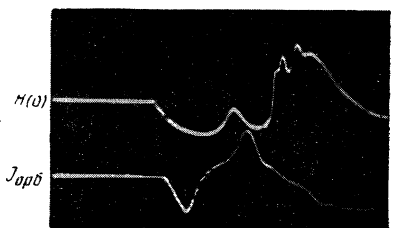


a

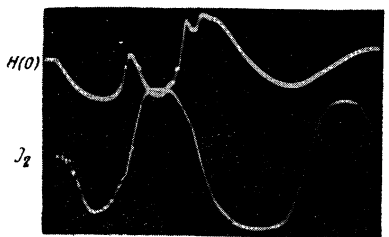


б

42



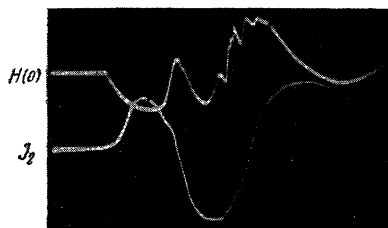
в



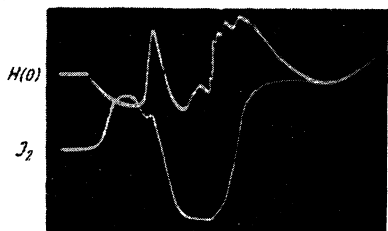
г

Рис. 10. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре.

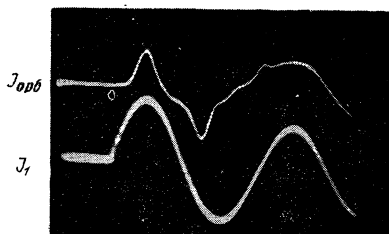
a — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1,3$ кэ; *б* — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1,5$ кэ; *в* — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1,7$ кэ; *г* — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 2$ кэ. I_2 — общий газовый ток; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.



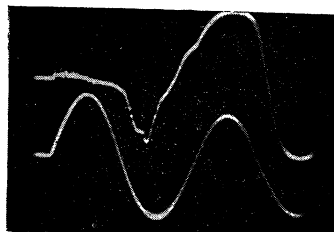
а



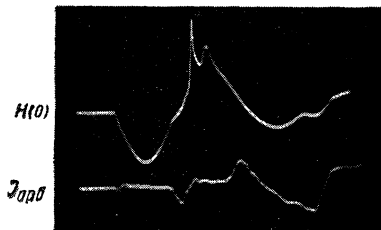
б



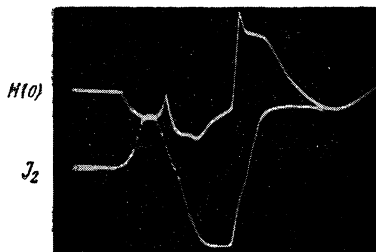
в



а



б



в

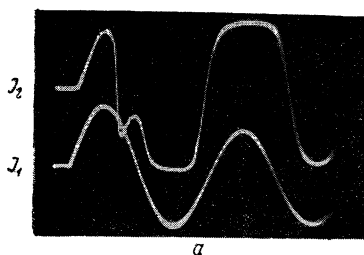
Рис. 11. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре.

а — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 2$ кв; б — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 2,3$ кв; в — $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 2,3$ кв. I_2 — общий газовый ток; I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

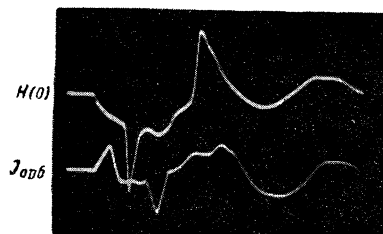
Рис. 12. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре.

а, б — $p = 0,015$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1$ кв; в — $p = 0,03$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1,3$ кв. I_2 — общий газовый ток; I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

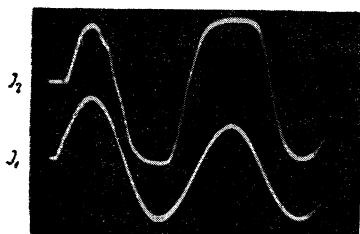
Определим часть магнитного потока, которая остается внутри орбиты из-за наличия активного сопротивления газового витка. Как было указано, первичный магнитный поток, пронизывающий орбиту, равен $\Phi_{12} = M_I I_1 = K_{12} \sqrt{L_1 L_2} I_1$, где M_I и K_{12} — коэффициенты взаимной индукции и связи первичной высокочастотной цепи с плазменным витком.



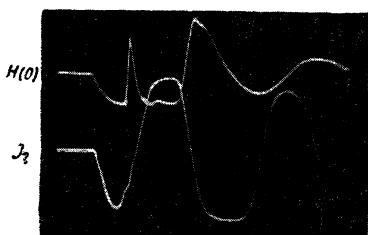
a



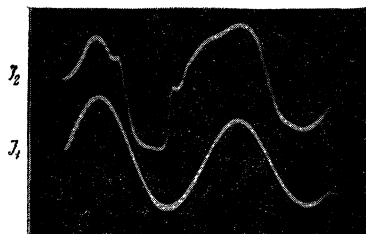
б



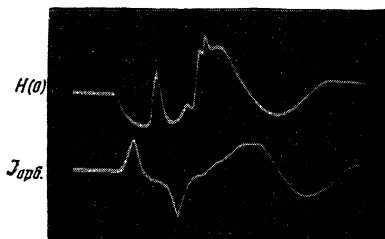
a



б



a



б

Рис. 13. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре.

a, б — $r = 0,05$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1$ кв; *в, г* — $r = 0,05$ мм рт. ст. D_2 ; $U_{\text{комп}} = 1,5$ кв. I_2 — общий газовый ток, I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

Рис. 14. Осциллограммы токов и магнитного поля в центре.

a, б — $r = 0,05$ мм рт. ст.; $U_{\text{комп}} = 2$ кв. I_2 — общий газовый ток I_1 — ток через обмотку; $H(0)$ — магнитное поле в центре; $I_{\text{орб}}$ — орбитальный ток.

Компенсирующий поток равен $\Phi_{32} = M_{II} I_3 = K_{32} \sqrt{L_3 L_2} I_3$, где M_{II} и K_{32} — коэффициенты взаимной индукции и связи компенсирующего контура с плазменным витком.

Найдем отношение этих потоков

$$\frac{\Phi_{32}}{\Phi_{12}} = \frac{K_{32} \sqrt{L_3 L_2} I_3}{K_{12} \sqrt{L_1 L_2} I_1} = \frac{K_{32}}{K_{12}} \sqrt{\frac{L_3}{L_1}} \cdot \frac{I_3}{I_1} = \frac{0,15}{0,32} \sqrt{\frac{7}{0,17}} \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^3} \approx \frac{1}{4},$$

$$\frac{\Phi_{32}}{\Phi_{12}} \approx \frac{1}{4}.$$

Если предположить, что остаточное магнитное поле внутри сжатого газового витка распределено по радиусу равномерно, то численно минимальный радиус $r_{\text{сж}}$ можно оценить следующим образом:

$$r_{\text{мин}} = \sqrt{\frac{\Phi_{32}}{H\pi}} = \sqrt{\frac{L_2 I_2 \cdot 10^8}{4\pi \cdot H}} = \sqrt{\frac{0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 10^3 \cdot 10^8}{4 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 3,14}} \approx 2,8 \text{ см},$$

$$r_{\text{мин}} \approx 2,8 \text{ см},$$

где Φ_{32} — компенсирующий магнитный поток; H — поле в центре сжатого плазменного витка; $\frac{r_{\text{орб}}}{r_{\text{мин}}} = \frac{170}{28} \approx 6$, т. е. в отсутствие компенсирующего поля наблюдается шестикратное сжатие орбиты.

§ 3. Выводы и заключение

Как показали эксперименты, при сбросе газового витка к центру внутри его «замораживается» примерно $1/4$ внешнего магнитного тока. Это остаточное поле препятствует сжатию орбиты до малых размеров. При этом часть магнитной энергии расходуется на кумуляцию поля. Если использовать дополнительное центральное поле, то при определенном его значении наблюдается компенсация остаточного потока. В этом случае следует ожидать, что магнитная энергия в основном перейдет в кинетическую энергию направленного движения частиц к центру с последующим образованием плотного «кома».

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Осовец, см. т. II настоящего издания, стр. 238.
2. С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров, Н. И. Щедрин, см. т. II настоящего издания, стр. 242.
3. Ю. Ф. Наседкин, см. т. II настоящего издания, стр. 264.
4. Ю. Ф. Наседкин, С. М. Осовец, см. настоящий том, стр. 182.

Ю. Ф. Наседкин, Е. И. Павлов

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЛЬЦЕВОЙ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД*

В работе изучено поведение токового газового витка в бетатронном поле и исследовано распределение плотности тока по сечению камеры. Обнаружено влияние формы поля на поведение токового витка. При малых давлениях газа в камере зарегистрировано рентгеновское излучение. Эксперименты производились с дейтерием и аргоном.

§ 1. Введение

В работе [1] были рассмотрены условия равновесия и устойчивости газового токового витка в поперечном магнитном поле. Было показано, что для устойчивости токового витка необходимо иметь магнитное поле определенной конфигурации.

В работах [2—4] было произведено экспериментальное изучение газового разряда при форме поля, удовлетворяющей условиям равновесия и устойчивости.

Представляет, однако, интерес исследовать газовый разряд в том случае, когда форма поля значительно отличается от расчетной. Из опытов известно, что незначительные изменения формы магнитного поля не оказывают заметного влияния на поведение разряда.

В настоящей работе исследовано поведение газового витка в бетатронном поле. Как известно, в бетатронном поле условие равновесия токового витка не выполняется. Нужное распределение напряженности магнитного поля получалось при пропуске тока через обмотку специальной конструкции.

* Работа выполнена в 1957 г.

§ 2. Описание установки

Схема установки, на которой были выполнены измерения, представлена на рис. 1. Установка состояла из магнитной системы, вакуумной камеры, конденсаторной батареи, высоковольтного выпрямителя и разрядного устройства. Магнитная система (рис. 2) включала в себя: медную шину 1, которая охватывала цилиндрическую поверхность вакуумной камеры, и

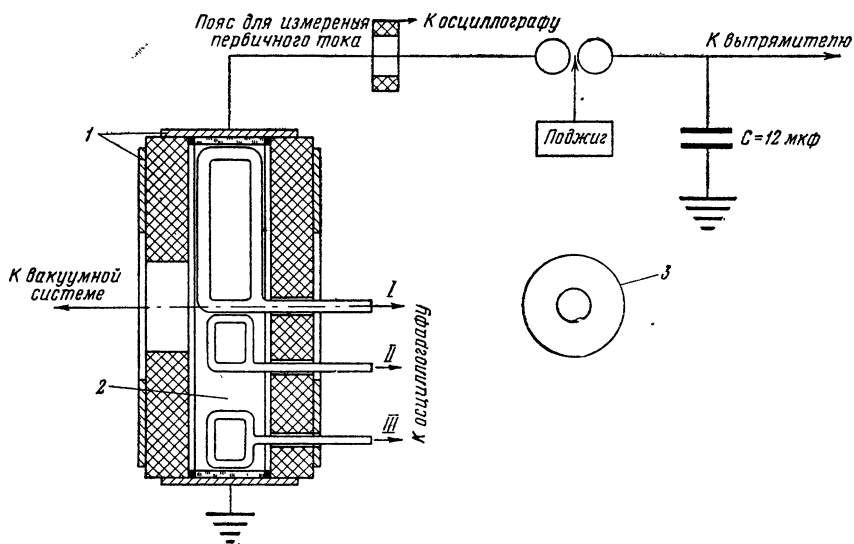


Рис. 1. Схема установки.

I, II, III — пояса для измерения газовой тока; *1* — магнитная система; *2* — вакуумная камера; *3* — сцинтилляционный счетчик.

двух боковых дисков с прорезью 2 и вкладыша 3. Шина и диски соединялись параллельно. Изменяя расстояние между дисками и отношение наружного диаметра диска к внутреннему, можно в широких пределах изменять конфигурацию поля. Асимметрия поля исправлялась медным вкладышем, который не имел гальванической связи с магнитной системой. Поле от токов Фуко, наводимых на вкладыше, способствовало исправлению асимметрии.

В установке рассматриваемого типа асимметрия поля не превышала 6%.

Рассмотренная выше конструкция магнитной системы дала возможность получить бетатронное поле, причем радиус равновесной бетатронной орбиты составлял ~ 12 см (рис. 3). Очень важным параметром для установки подобного типа является

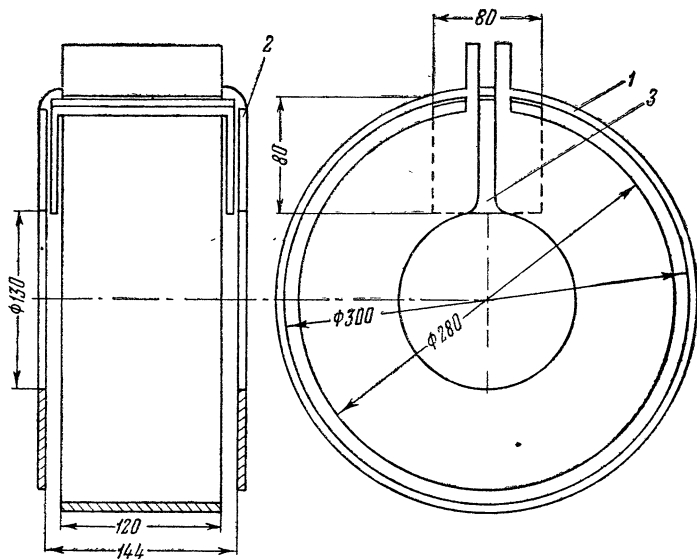


Рис. 2. Магнитная система.

1 — цилиндрическая шина; 2 — диски; 3 — вкладыш.

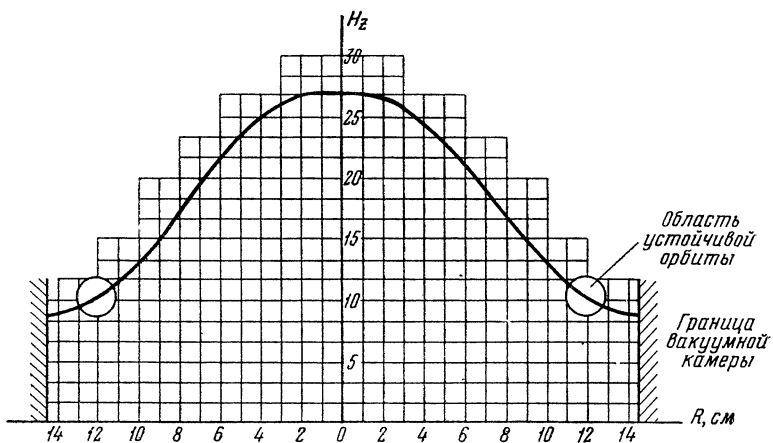


Рис. 3. Распределение магнитного поля по радиусу в средней плоскости камеры.

величина коэффициента связи $K_{св}$, так как энергия, передаваемая из первичной цепи во вторичную (газовый виток), пропорциональна квадрату коэффициента связи. В наших условиях $K_{св}=0,26$. Вакуумная камера (рис. 4) состояла из стеклянного полого цилиндра $\varnothing 300$ мм, высотой 63 мм.

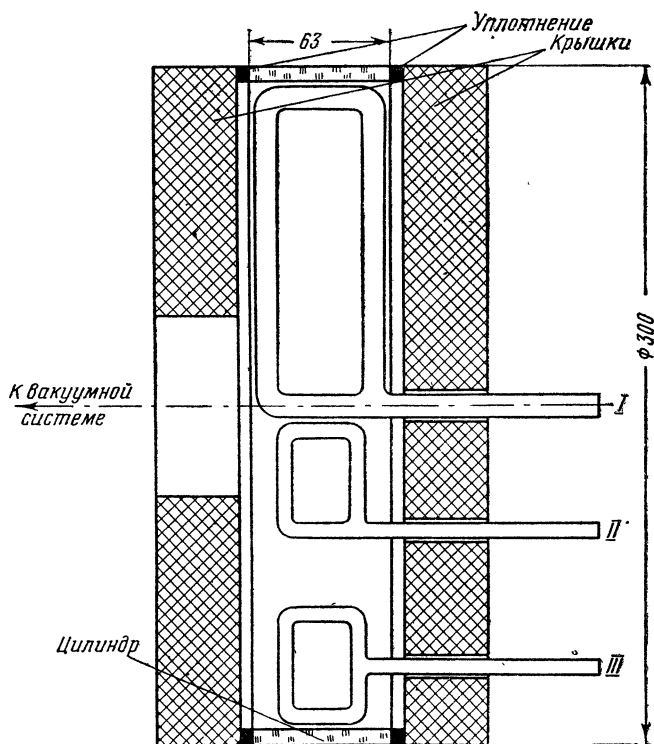


Рис. 4. Схематическое изображение расположения измерительных поясов внутри вакуумной камеры.

Цилиндр помещался между фарфоровыми дисками. Цилиндр и диски вакуумно уплотнялись с помощью резиновых прокладок.

Конденсаторная батарея имела емкость $C=12$ мкф и обладала малоиндуктивной ошиновкой. Конденсаторная батарея заряжалась от высоковольтного выпрямителя, позволявшего поднимать напряжение до 50 кв. Основные параметры установки приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

$L_{\text{обм}}$, [мкген]	$L_{\text{параз}}$ [мкген]	C , мкф	$K_{\text{св}}$	$K_{\text{тр}}$
0,15	0,14	12	0,26	0,5

§ 3. Результаты экспериментов

В процессе работы на установке было изучено распределение плотности тока по сечению камеры. С этой целью в камеру были помещены три измерительных пояса (см. рис. 4). Измерительный пояс регистрирует тот ток, который охватывается контуром пояса. Пояс I регистрировал полный газовый ток, протекающий в камере I_2 ; пояс II — ток, протекающий в центральной части камеры, $I_{\text{ц}}$; пояс III — ток, протекающий в предпологаемой области устойчивой орбиты, $\mathcal{J}_{\text{орб}}$. При измерениях напряжение на конденсаторной батарее составляло 28 кв, а давление изменялось от того минимального давления, при котором разряд зажигался, до 0,2 мм рт. ст. Разряд исследовался в атмосфере дейтерия и аргона. Из осциллограммы, показанной на рис. 5, а, относящейся к давлению 0,2 мм рт. ст. и напряжению на конденсаторной батарее 28 кв, видно, что амплитуда первичного тока \mathcal{J}_1 (т. е. тока в магнитной системе) на первом полупериоде равна 140 ка, на втором — 126 ка и т. д. Полностью ток затухает через 9—10 периодов. Частота процесса составляет $f = 87$ кГц.

Полный вторичный ток \mathcal{J}_2 растет одновременно с первичным и к моменту времени, соответствующему фазе первичного тока $\varphi = 55^\circ$, достигает значения 10,8 ка. Затем он резко уменьшается, проходит через нуль и становится отрицательным. Амплитудное значение отрицательного, так называемого обратного тока $\mathcal{J}_{\text{обр}}$ при этом равно 18 ка. Отметим, что к моменту образования обратного тока электрическое поле знака не меняет. Из-за наличия активного сопротивления витка внутри витка остается часть магнитного потока. При движении витка к центру происходит сжатие этого остаточного магнитного потока, в результате чего возникает э. д. с. движения противоположного знака, вызывающая появление тока обратного знака [5].

На последующих полупериодах газовый ток появляется вновь, изменяясь уже примерно по синусоидальному закону. Особый интерес представляют явления, наблюдающиеся в га-

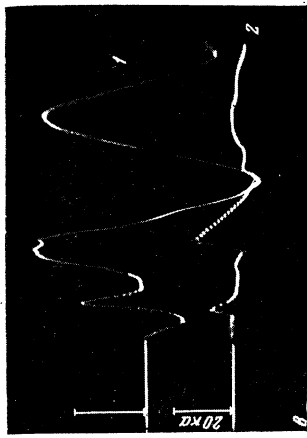
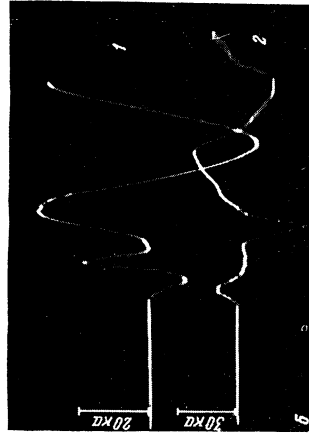
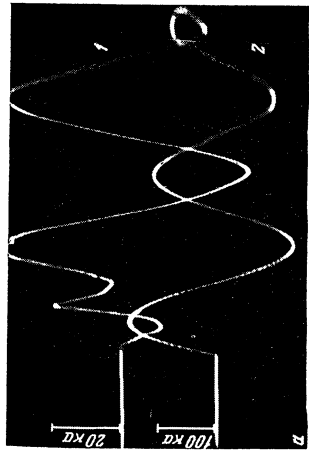


Рис. 5. Осциллограммы токов, $p = 0,2$ мм.рт. ст. D_2 .

а: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток на орбите I_{orb} ; в: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{ц}$.

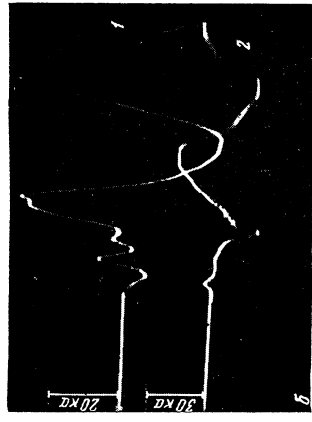
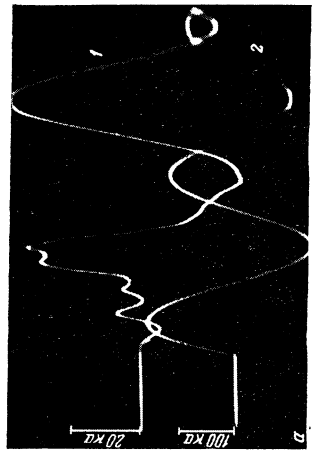


Рис. 6. Осциллограммы токов, $p = 0,1$ мм.рт. ст. D_2 .

а: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток на орбите I_{orb} ; в: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{ц}$.

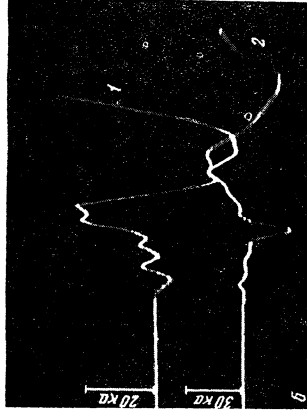
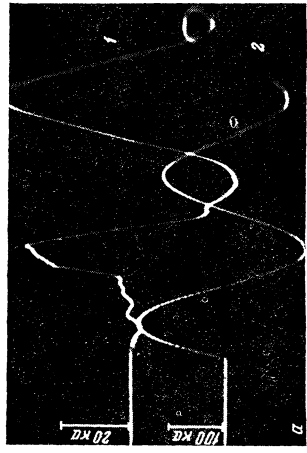


Рис. 7. Осциллограмма токов, $p = 0,08$ мм рт. ст. D_2 .

a: 1 — полный газовый ток I_3 ; 2 — ток через обмотку I_1 ; *б:* 1 — полный газовый ток I_3 ; 2 — ток на орбите $I_{орб}$; *в:* 1 — полный газовый ток I_3 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

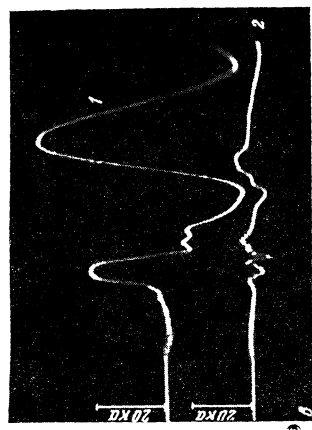
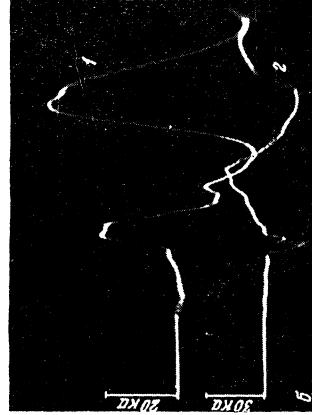
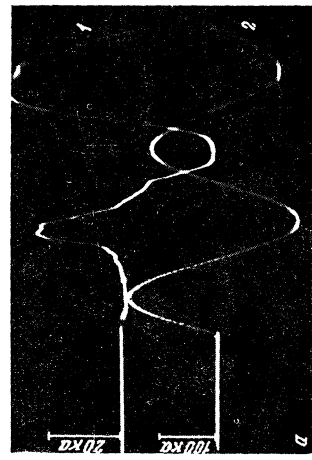


Рис. 8. Осциллограммы токов, $p = 0,06$ мм рт. ст. D_2 .

a 1 — полный газовый ток I_3 ; 2 — ток через обмотку I_1 ; *б:* 1 — полный газовый ток I_3 ; 2 — ток на орбите $I_{орб}$; *в:* 1 — полный газовый ток I_3 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

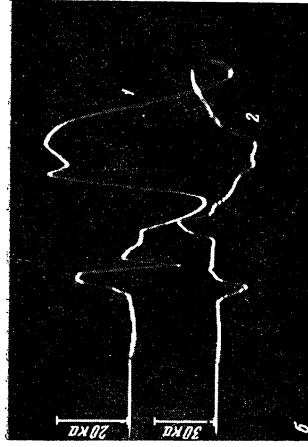
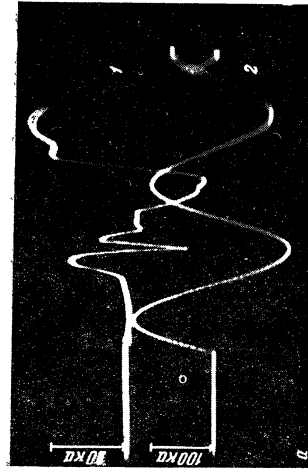


Рис. 9. Осциллограммы токов, $r = 0,04$ мм рт. ст. D_2 .

а: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток на орбите $I_{орб}$; в: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

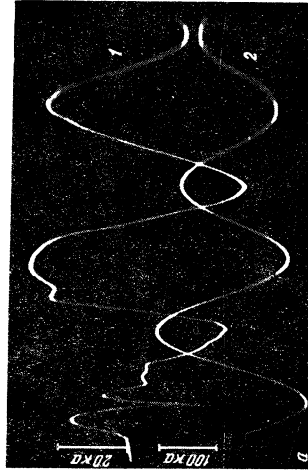


Рис. 10. Осциллограммы токов, $r = 0,02$ мм рт. ст. D_2 .

а: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток на орбите $I_{орб}$; в: 1 — полный газовой ток I_1 ; 2 — ток в центре камеры $I_{Ц}$.

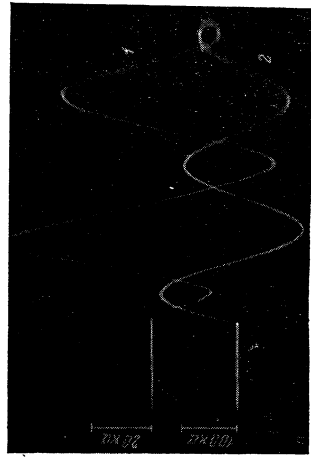


Рис. 11. Осциллограммы токов, $r = 0,1$ мм рт. ст. Аг.

а: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток на орбите I_{orb} ; в: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

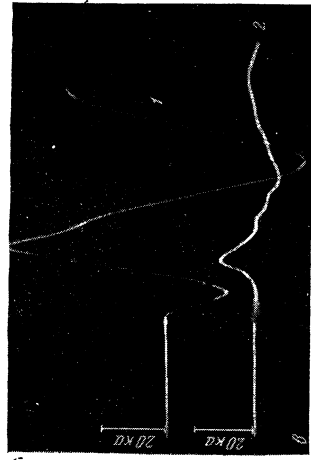
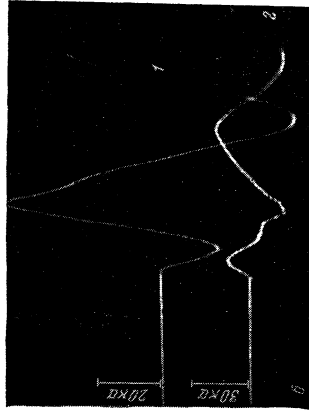
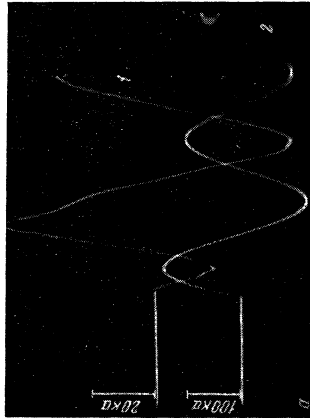


Рис. 12. Осциллограммы токов, $r = 0,06$ мм рт. ст. Аг.

а: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток на орбите I_{orb} ; в: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

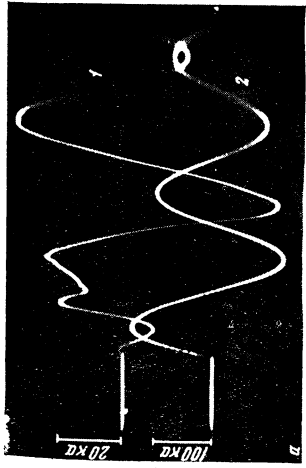


Рис. 13. Осциллограммы токов, $r = 0,02$ мм рт. ст. Аг.

а: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток на орбите I_{orb} ; в: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

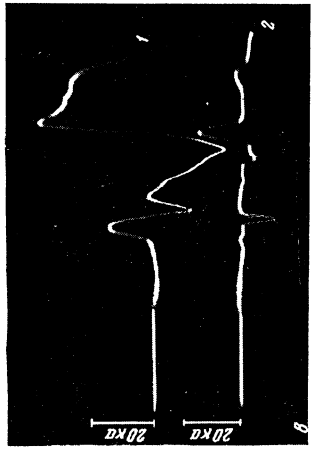
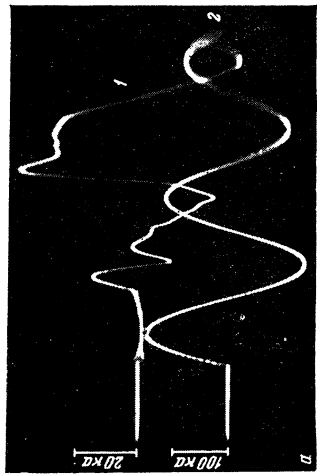


Рис. 14. Осциллограммы токов, $r = 5 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Аг.

а: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток через обмотку I_2 ; б: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток на орбите I_{orb} ; в: 1 — полный газовый ток I_1 ; 2 — ток вблизи центра камеры $I_{Ц}$.

зовом разряде на первом полупериоде. На последующих полупериодах заметно выраженных срывов вторичного тока не наблюдается.

Исследование распределения плотности вторичного тока по сечению камеры показало, что до момента срыва 80% тока находится в районе устойчивой орбиты (см. рис. 5, б и табл. 3).

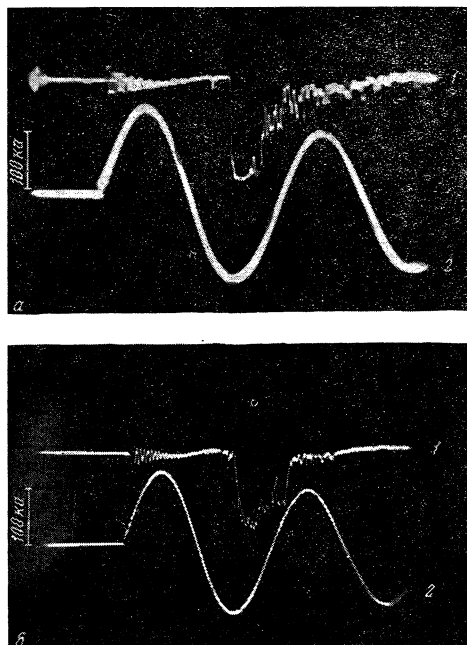


Рис. 15: Осциллограммы рентгеновского излучения.

а: $p = 0,02$ мм рт. ст. D_2 ; б: $p = 5 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Ag; 1 — рентгеновское излучение; 2 — ток через обмотку I_1 .

Большое число экспериментальных данных позволяет утверждать, что резкое уменьшение вторичного тока, при достижении последним максимального значения, вызвано сжатием токового витка к центру.

До момента срыва тока с орбиты пояс, расположенный в центральной части камеры, не отмечает существования в этой области тока. После срыва токового витка в центре камеры наблюдается ток 8 ка, имеющий то же направление, что и обратный ток (см. рис. 5, в).

Переходя далее к рассмотрению осциллограмм, снятых при меньших давлениях (рис. 6—7), замечаем, что с уменьше-

нием давления уменьшается величина вторичного тока, а характер распределения плотности тока и характер срыва остаются прежними. Так, например, при давлении 0,1 мм рт. ст. вторичный ток составляет 5,4 ка (рис. 6), т. е. в два раза меньше, чем при давлении 0,2 мм рт. ст. При давлениях 0,06—0,02 мм рт. ст. (см. рис. 8—10) разряд начинает загораться на втором полупериоде изменения первичного тока. Интересно отметить, что при низких давлениях, т. е. при давлениях, когда разряд загорается на втором полупериоде, амплитуда вторичного тока заметно увеличивается; например, при давлении 0,04 мм рт. ст. $I_2=16$ ка (рис. 9).

Область давления около 0,06 мм рт. ст. является переходной (рис. 8). При этом давлении измерительные пояса почти не регистрируют ток, возникающий на первом полупериоде, зато на втором полупериоде вторичный ток достигает 21,5 ка, причем у вторичного тока в момент срыва или совсем не наблюдается обратного тока, или он бывает выражен очень слабо. Это, по-видимому, обусловлено тем, что на первом полупериоде разряд возникает, но чувствительность измерительного пояса не позволяет его зарегистрировать. В результате во всем объеме камеры имеется большое количество заряженных частиц, и поэтому разряд на втором полупериоде горит не в виде витка, а во всем объеме. Очевидно, всегда, когда ток начинает регистрироваться на втором полупериоде, на первом происходит предварительная ионизация. Эта предварительная ионизация, по-видимому, облегчает развитие разряда на втором полупериоде. В том случае, если ионизация велика, разряд может загореться во всем объеме, как, например, при давлении 0,06 мм рт. ст.

После срыва токового витка с орбиты происходит движение его к центру. Из осциллограмм можем определить время сжатия витка для различных давлений. За время сжатия принимаем время, в течение которого токовый виток проходит путь от орбиты до места расположения центрального пояса, т. е. время с момента срыва тока с орбиты до максимального значения обратного тока. В табл. 2 приведены значения времени сжатия витка для различных давлений.

Т а б л и ц а 2

p , мм рт. ст.	$t_{сж}$, мксек
0,2	2
0,1	1,3
0,08	1
0,04	0,8
0,02	0,66

В процессе работы с дейтерием было замечено, что наименьшее давление в камере, при котором разряд мог еще

Таблица 3

Давление D_2 , мм рт. ст	Ток, ка	Полупериоды	
		I	II
0,2	I_1	140	—
	I_2	10,8	—
	$I_{орб}$	8,5	—
	$I_{ц}$	8	—
	$I_{обр}$	18	—
0,1	I_1	140	—
	I_2	5,4	—
	$I_{орб}$	4,2	—
	$I_{ц}$	3	—
	$I_{обр}$	7	—
0,08	I_1	140	—
	I_2	3	—
	$I_{орб}$	2,4	—
	$I_{ц}$	0	—
	$I_{обр}$	1,5	—
0,06	I_1	144	130
	I_2	0	21,5
	$I_{орб}$	0	18
	$I_{ц}$	0	3
	$I_{обр}$	0	0
0,04	I_1	0	130
	I_2	0	16
	$I_{орб}$	0	14
	$I_{ц}$	0	11
	$I_{обр}$	0	14
0,02	I_1	0	130
	I_2	0	7
	$I_{орб}$	0	5,5
	$I_{ц}$	0	1
	$I_{обр}$	0	6

Примечание. В данной таблице приведены средние значения величин токов за несколько разрядов. В действительности наблюдается некоторый разброс в величине газового тока от разряда к разряду.

быть зарегистрирован, составляло 0,008 мм рт. ст. Результаты обработки осциллограмм для дейтерия сведены в табл. 3.

Для определения влияния массы частиц на характер протекания газового разряда были проведены эксперименты с аргоном. Как видно из осциллограмм (рис. 11—14), относящихся к различным давлениям и снятых при напряжении на конденсаторной батарее 28 кВ, вторичный ток возрос, фаза срыва тока увеличилась и стала равной 80°. Существенно изменилось время сжатия токового витка к центру (табл. 4). Из сопоставления табл. 2 и 4 видно, что время сжатия возросло в 2,5—4 раза. Если при работе с дейтерием ток, протекающий в районе устойчивой орбиты, составлял более 80% общего тока, то при работе с аргоном — только 60%. Это говорит о том, что сечение газового токового витка увеличилось. Изменились также условия развития разряда на низком давлении: разряд стал загораться при более низком давлении, и предельное давление, при котором разряд еще мог быть зарегистрирован, составляло 0,002 мм рт. ст. Таким образом, поведение разряда зависит от массы газа. Результаты обработки осциллограмм для аргона сведены в табл. 5.

Таблица 4

p , мм рт. ст	$t_{сж}$, мксек
0,2	5
0,1	4,3
0,08	4
0,04	4
0,02	2,3
0,005	1,5

Таблица 5

Давление Ar, мм рт. ст	Ток, μ а	Полупериоды	
		I	II
0,2	I_1	140	—
	I_2	20,5	—
	$I_{орб}$	11	—
	$I_{ц}$	12,5	—
	$I_{обр}$	45	—
0,1	I_1	140	—
	I_2	19,2	—
	$I_{орб}$	12	—
	$I_{ц}$	14	—
	$I_{обр}$	50	—

Давление Аг, мм рт. ст.	Ток, ка	Полупериоды	
		I	II
0,08	I_1	140	—
	I_2	19	—
	$I_{орб}$	11,4	—
	$I_{ц}$	14	—
	$I_{обр}$	50	—
0,06	I_1	140	—
	I_2	18,5	—
	$I_{орб}$	12,5	—
	$I_{ц}$	14,8	—
	$I_{обр}$	45	—
0,04	I_1	144	—
	I_2	17,4	—
	$I_{орб}$	10	—
	$I_{ц}$	9	—
	$I_{обр}$	38	—
0,02	I_1	144	—
	I_2	9	—
	$I_{орб}$	4,2	—
	$I_{ц}$	0	—
	$I_{обр}$	19	—
0,005	I_1	144	130
	I_2	0	14,4
	$I_{орб}$	0	8,5
	$I_{ц}$	0	12
	$I_{обр}$	0	11

Примечание. В данной таблице приведены средние значения величин токов за несколько разрядов. В действительности наблюдается некоторый разброс в величине газового тока от разряда к разряду.

В процессе работы было обнаружено рентгеновское излучение (рис. 15). Излучение регистрировалось сцинтилляционным счетчиком, находившимся на расстоянии 0,5 м от уста-

новки. Счетчик экранировался от влияния магнитных полей и от очень мягкого рентгеновского излучения медным экраном толщиной 1 см.

Было обнаружено, что излучение возникает в момент достижения вторичным током максимального значения. Интервал давлений, при котором наблюдалось излучение, лежал от 0,02 до $2 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Чтобы оценить жесткость излучения, счетчик экранировался свинцовым экраном. Свинцовый экран толщиной 0,5 см полностью экранирует счетчик от излучения. Излучение было обнаружено как при работе с дейтерием, так и с аргоном.

§ 4. Обсуждение результатов

Несмотря на то, что поле специальной формы было заменено полем бетатронного типа, газовый разряд также формировался в виде токового витка, оторванного от стенок. Однако при такой замене формы поля поведение разряда весьма существенно изменилось:

1) уменьшилась фаза срыва: для бетатронного поля фаза срыва составляет $\varphi = 55^\circ$, для поля специальной формы — около 90° (при прочих равных условиях);

2) величина газового тока оказалась значительно меньше расчетной (с учетом фазы срыва);

3) разряд значительно запаздывал во времени даже при сравнительно больших давлениях.

Расчетное значение вторичного тока (тока в медном витке, помещенном на орбиту), отнесенное к фазе 90° , составляет 30 ка. При фазе $\varphi = 55^\circ$ $I_{2 \text{ расч}} = 24$ ка. Измеренное значение газового тока при начальном давлении дейтерия 0,2 мм рт. ст. равно 10,8 ка, т. е. значительно меньше расчетного. Это объясняется, по-видимому, тем, что время развития разряда в случае бетатронного поля оказывается гораздо больше, чем в том случае, когда поле имеет специальную форму. Особенно отчетливо видно запаздывание развития разряда на первом полу-периоде при давлении 0,08 мм рт. ст. (см. рис. 7, а).

Таким образом, несоответствие между расчетным значением тока и измеренным может быть объяснено сильным запаздыванием развития разряда (сравнимым с $\frac{T}{4}$), а также наличием у витка активного сопротивления.

Эксперименты с аргоном показали, что масса частиц оказывает существенное влияние на характер разряда. Большая масса ионов аргона затрудняет стягивание тока в район устойчивой орбиты. Именно по этой причине ток в районе орбиты составлял только 60% полного вторичного тока. Кроме того, увеличением массы витка можно также объяснить увеличение

фазы срыва тока (80° вместо 55°) и замедление процесса сжатия токового витка к центру. При этом время сжатия токового витка к центру настолько затянуто, что изменение вторичного тока при больших давлениях похоже на обыкновенное синусоидальное колебание.

Как уже отмечалось, при низких давлениях дейтерия ($0,02-0,06$ мм рт. ст.) разряд зажигается на втором полупериоде изменения первичного тока. Однако картина развития разряда при этих давлениях зависит от давления.

При давлении $0,06$ мм рт. ст. обратный ток отсутствует, что указывает на отсутствие движения витка к центру камеры. Особенный интерес представляет давление $0,04$ мм рт. ст., при котором разряд формируется в виде витка на орбите и затем стягивается к центру, как единое целое, с большой скоростью. Значение газowego тока при этом давлении близко к расчетному, что объясняется, по-видимому, тем, что на втором полупериоде условия пробоя облегчены предварительной ионизацией.

Произведем оценку средней скорости сжатия витка к центру при начальном давлении дейтерия внутри камеры $0,04$ мм рт. ст. Начальный радиус витка равен ~ 120 мм, минимальный радиус витка ~ 20 мм, время сжатия — $0,8$ мксек (время, в течение которого происходит изменение радиуса от 120 до 20 мм).

Средняя скорость движения витка (дейтонов) к центру на основании этих данных составляет $v = 1,3 \cdot 10^7$ см/сек. Максимальная скорость движения дейтонов значительно больше (в $2-2,5$ раза) [4].

Средняя кинетическая энергия движения дейтонов к центру составляет при этом $W = \frac{mv^2}{2} = 160$ эв. Таким образом, средняя кинетическая энергия движения дейтонов к центру оказывается весьма значительной. Максимальная энергия движения дейтонов в $5-6$ раз выше указанной величины. Однако наличие остаточного магнитного потока внутри витка не дает возможности витку сжаться в центральный комок.

Наличие рентгеновского излучения указывает, что в разряде имеются быстрые электроны. Быстрые электроны могут возникнуть, например, в результате бетатронного ускорения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Осовец, см. т. II настоящего издания, стр. 238.
2. С. М. Осовец, Ю. Ф. Петров, Н. И. Щедрин, см. т. II настоящего издания, стр. 242.
3. Ю. Ф. Наседкин, см. т. II настоящего издания, стр. 264.
4. Ю. Ф. Наседкин, С. М. Осовец, см. настоящий том, стр. 182.
5. С. М. Осовец, Н. И. Щедрин, см. настоящий том, стр. 196.

Н. В. Филиппов

ИССЛЕДОВАНИЕ ДАВЛЕНИЙ В МОЩНОМ ИМПУЛЬСНОМ ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ *

В этой работе описаны конструкция пьезоэлектрического измерителя давлений в импульсном разряде и методика работы с ним в цилиндрической разрядной камере при токах 300—500 *ка*.

Приведены результаты исследований давлений вблизи центра камеры при разряде в дейтерии батареи конденсаторов емкостью 62 *мкф*. Описан новый метод калибровки пьезодатчика непосредственно в исследуемом газовом разряде с помощью диафрагменного инерционного датчика.

§ 1. Конструкция пьезодатчика

Была поставлена задача разработать конструкцию измерителя давлений, возникающих в мощном импульсном газовом разряде. Исследован ряд пьезодатчиков, использующих пьезоэлектрический эффект пластинок титаната бария, в результате чего была выбрана конструкция измерителя давлений (пьезодатчика), схема чувствительного элемента которого показана на рис. 1, *а*. Все описанные ниже эксперименты и калибровки относятся к указанной конструкции.

На цинковый инерционный стержень *1* диаметром 8 *мм* и длиной 95 *мм* приклеен сегнетоэлектрический чувствительный элемент, состоящий из двух дисков титаната бария толщиной по 0,5 *мм*, склеенных друг с другом покрытыми серебряной пленкой сторонами. От серебряной пленки сделан электриче-

* Работа выполнена в 1956 г.

ский вывод при помощи припаянной сплавом Вуда медной эмалированной проволоочки 4, передающей импульс напряжения, возникающий при ударе по чувствительному элементу, на вход катодного повторителя. Пьезоэлемент закрыт поставленной на клею чашечкой из серебряной фольги 3 толщиной 0,1—0,15 мм. Головка датчика помещена в фарфоровую трубку 5 диаметром

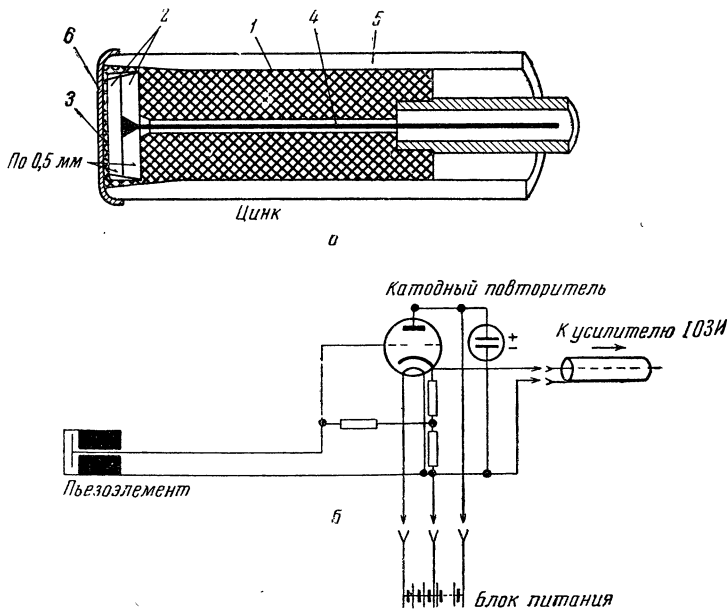


Рис. 1. Схема согласования пьезодатчика.

а — конструктивная схема головки пьезодатчика; б — схема согласования пьезодатчика.

8×12 мм, а лобовая часть, прилегающая к пьезоэлементу, вакуумно и электрически изолирована от газоразрядной плазмы напрессованными на клею несколькими полосками рисовой конденсаторной бумаги 6. Применение такой изоляции оказалось необходимым, особенно при исследовании разрядов на низких давлениях, когда наводка на регистрирующую аппаратуру, возникающая в начальной стадии разряда за счет емкостных токов от зонда, которым является неизолированный датчик, искажает картину исследуемого явления. Использование в конструкции датчика серебра и цинка определяется близостью акустических сопротивлений этих металлов и выбранной сегнетокерамики, в результате чего сведены к минимуму искажения сигнала за счет отражения на границах ме-

талл—титанат бария—металл. Применение титаната бария в виде тонких (0,5 мм) пластинок было вызвано желанием уменьшить завал фронта импульса давления, получающийся за счет времени распространения упругой деформации на толщину кристалла.

После окончания сборки датчика пьезоэлемент два часа поляризовался постоянным напряжением 800—850 в.

§ 2. Усиление и регистрация пьезоэлектрических импульсов

Так как регистрирующее устройство для осциллографирования явления было удалено от разрядной камеры на расстояние более 10 м, сигнал подавался на соединительный коаксиальный кабель через катодный повторитель (рис. 1, б), собранный на двойном пальчиковом триоде 6Н15П с отдельным батарейным питанием цепей накала и анода. С целью уменьшения наводок коаксиальный кабель экранирован медной трубкой. Усиление сигналов, поступающих от катодного повторителя, производилось усилителем кратковременных импульсов низкой частоты типа 10ЗИ с временем нарастания прямоугольного импульса на выходе не более 0,1 мксек и с максимальным коэффициентом усиления при высокоомном выходе около 67 дб. Для фотографической регистрации явления применен двухлучевой катодный осциллограф типа ОК-17М, в котором для повышения яркости лучей при осциллографировании кратковременных процессов анодное напряжение на осциллографической трубке повышено до 10 кв.

§ 3. Калибровка пьезодатчика

Для определения масштаба исследуемого явления были проведены калибровки пьезодатчика с помощью удара шариком, обладающим известным количеством движения, и с помощью непосредственного измерения импульса давления в центре разрядной камеры путем изучения закона движения диафрагмы известной массы под действием исследуемого импульса.

Примененный в работе метод калибровки пьезодатчика с помощью шарика аналогичен описанному ранее в работе В. С. Комелькова и В. И. Сеницына, отличаясь лишь тем, что для большего постоянства и точности попаданий в центр датчика шарик был подвешен на двух нитях, образуя физический маятник, и удар по датчику производился в горизонтальном направлении.

Такой способ калибровки позволяет определить характер и величину изменения усилия в том случае, если оно сосредоточено в центре передней стенки датчика, но оставляет открытым вопрос об определении масштаба в случае действия на датчик равномерно распределенной нагрузки, которая и является предметом исследования. Так как заряд, возникающий в некотором объеме сегнетоэлектрика, пропорционален запасенной

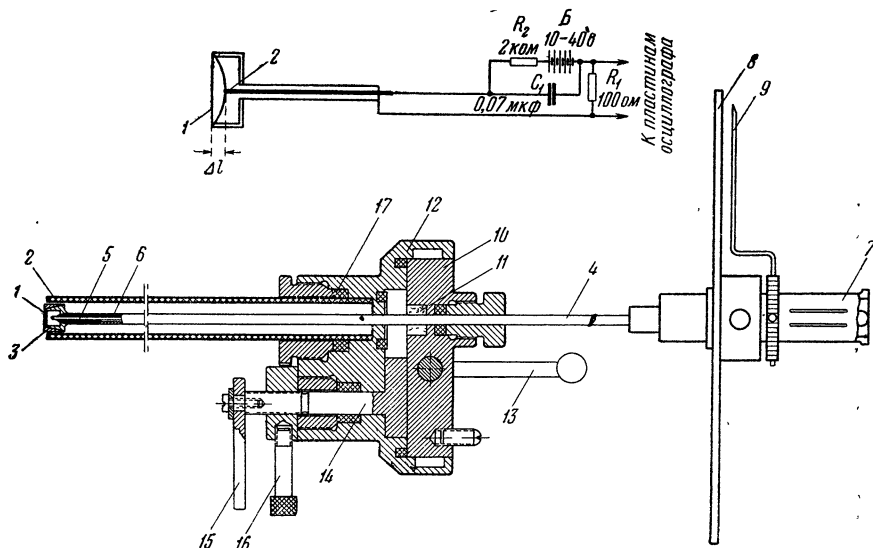


Рис. 2.

в нем упругой энергии, то усреднение и распределение напряжений, возникающих в отдельных участках чувствительного элемента, на всю его емкость, является приближением. Масштабы получившихся калибровок не противоречат данным, полученным при описанной ниже калибровке с помощью диафрагмы.

Для возможности непосредственного измерения импульса давления в разряде был разработан диафрагменный метод исследования, который применен для калибровки описанного выше пьезодатчика. Диафрагменный датчик представляет собой приспособление, позволяющее точно измерять время, за которое тонкая диафрагма проходит известное, заранее установленное расстояние. Принципиальная схема и конструкция такого устройства показаны на рис. 2.

Диафрагма 1, получив некоторый импульс извне, начинает прогибаться по направлению к контакту 2 и проходит разделяющий их известный зазор за время, определяемое при ма-

лых прогибах лишь массой диафрагмы и величиной внешнего импульса. В момент касания диафрагмой острия замыкается цепь $R_1—C_1$, и одним из лучей осциллографа записывается процесс разряда конденсатора C_1 через согласующее сопротивление R_1 . В промежутках между опытами производится зарядка конденсатора C_1 через сопротивление R_2 от батареи B . Второй луч осциллографа использовался для фазировки записи разряда конденсатора с импульсом, получающимся от пьезодатчика путем одновременной записи осциллограммы тока с интегрирующего пояса или производной тока с катушки, помещенной вблизи крайнего конденсатора основного контура. Непосредственное фазирование путем одновременного осциллографирования пьезоимпульса и импульса от диафрагмы не проводилось из-за опасности пробоя изоляции пьезодатчика за счет непосредственного контакта диафрагмы с газоразрядной плазмой. Конструкция диафрагменного датчика показана на рис. 2. Вырубленная с помощью штампа медная фольговая диафрагма 1 устанавливается на опорную чашку 2 с помощью винтовой втулки 3. Опорная чашка припаяна к полированной медной трубке 4, внутри которой проходит стальной контактный стержень 5, изолированный от трубки с помощью хлорвиниловых втулочек 6. Контактный стержень проходит через резиновое вакуумное уплотнение и через разъемное устройство 7 связывается с центральной жилой кабеля, идущего к осциллографу. Вращением разъемного устройства в резьбе втулки, связанной с медной трубкой, по лимбу 8 и стрелке 9 устанавливаются различные расстояния от острия контактного стержня до диафрагмы. Для замены диафрагмы после пластического деформирования ее исследуемым ударом предусмотрена возможность шлюзования с помощью специального устройства, состоящего из крышки 10 с углублением для убирания зажимного устройства диафрагмы 11 при выдвигании медной трубки до отказа. Между крышкой и корпусом шлюза 12 предусмотрено вакуумное уплотнение, затягивающееся с помощью эксцентрикового зажима 13. После вытягивания диафрагмы отверстие, сообщающееся с полостью трубы, перекрывается поворотной заслонкой 14, управляемой ручкой 15 и затягиваемой гайкой 16. Благодаря очень малому холостому объему шлюза попадающий в разрядную камеру воздух быстро откачивается*. Медная трубка с диафрагменной головкой закрыта фарфоровой трубкой таких же размеров, как и примененная в пьезодатчике; с корпусом шлюза

* При работе со стальной диафрагмой замены не проводилось, и вся серия опытов проведена с одной и той же диафрагмой, подвергнутой лишь упругому деформированию.

трубка связана через вакуумное уплотнение 17. На рис. 3 показаны два графика времени пролета медной и стальной диафрагмы на различные расстояния от начального положения до контактного острья, построенные путем обработки осциллограмм, часть из которых приведена рядом с графиками; здесь же сфотографировано в натуральную величину несколько использованных на разных расстояниях медных пластически деформированных диафрагм. На этих графиках также представлены формы пьезоимпульсов, сфазированные с соответствующими графиками указанным выше методом. Эксперименты были проведены при постановке диафрагменного и пьезоэлектрического датчиков в геометрическом центре разрядной камеры в радиальном направлении при емкости конденсаторной батареи 62 мкф и начальном напряжении 20 кв. Использовался открытый искровой разрядник. Начальное давление дейтерия в камере устанавливалось с помощью мерного объема и масляного манометра равным 0,1 мм рт. ст.

Для подсчета масштаба явления использовалась формула

$$\int_0^t f(t) dt = kmv, \text{ где коэффициент } k \text{ принимался за единицу}$$

за счет малой величины энергии атомов и ионов дейтерия, отраженных от лобовой стенки датчика. На графиках *a* и *b* (рис. 3) скорость движения диафрагмы постоянна и определена графически для медной и стальной диафрагм, соответственно, $v_m = 3700 \text{ см/сек}$ и $v_c = 1580 \text{ см/сек}$.

Чтобы приобрести указанные скорости, медная (с массой 0,0146 г/см²) и стальная (с массой 0,04 г/см²) диафрагмы должны были получить импульсы, соответственно 54 и 63 гсм/сек, что, после подсчета площадей первых импульсов на приведенных осциллограммах (76 и 74 мм²) и учета масштаба времени по оси абсцисс, равного 10⁻⁷ сек/мм, дает масштабы давления $\frac{54}{76 \cdot 10^{-7}}$ и $\frac{63}{74 \cdot 10^{-7}} \frac{\text{дин/см}^2}{\text{мм}}$, т. е. 7,1 и 8,5 атм/мм при соответствующем коэффициенте усиления.

§ 4. Экспериментальная установка

Опыты по применению описанного пьезодатчика для исследования мощного газового разряда проводились на установке, состоявшей из симметрично размещенной конденсаторной батареи емкостью 62 мкф (124 мкф)* и цилиндрической фарфоровой

* Измерения емкости делались по времени разрядки батареи конденсаторов на известном высокоомном (5 мгом) сопротивлении.

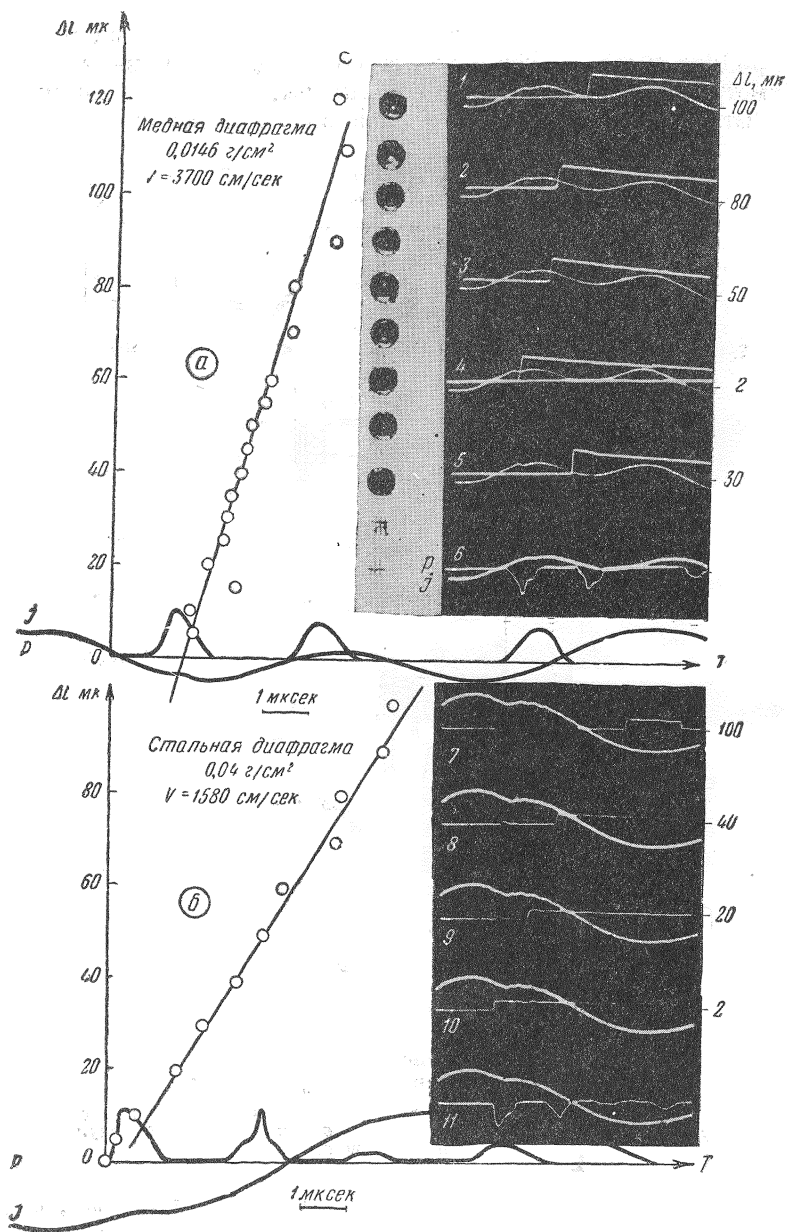


Рис. 3.

камеры, конструкция и размеры которой показаны на рис. 4. Разрядная камера представляла собой цилиндр внутренним диаметром 380 мм и высотой 445 мм, с торцов вакуумно закрытый дюралюминиевыми фланцами. На верхнем фланце

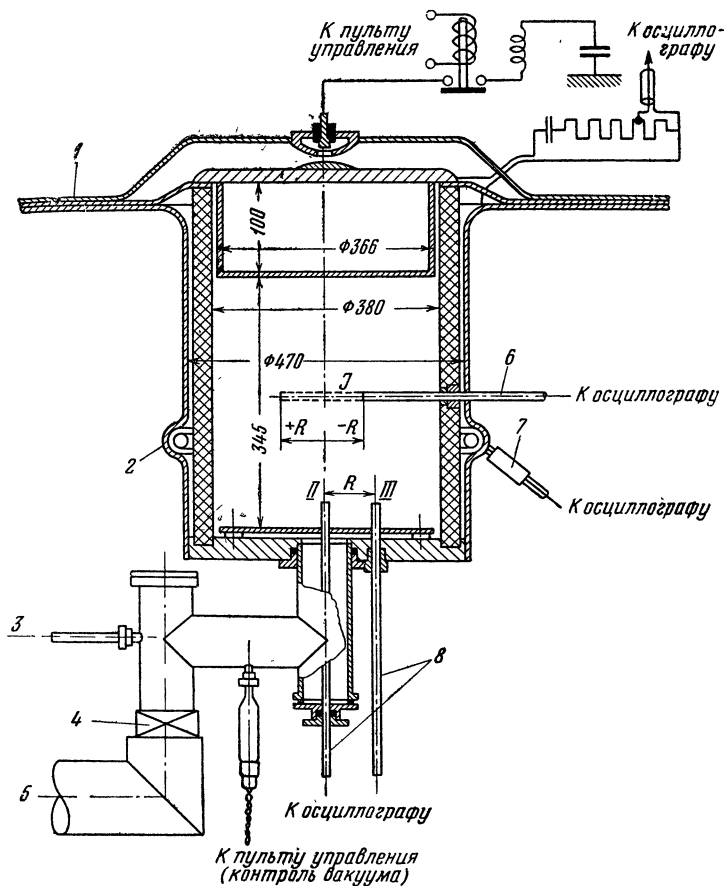


Рис. 4.
Схема экспериментальной установки:

1 — высоковольтная шина; 2 — пояс Роговского; 3 — напуск газа; 4 — вакуумный пневмоклапан; 5 — откачка; 6 — пьезодатчик; 7 — шунт; 8 — пьезодатчики.

укреплены разрядник и медный удлинительный колпак, служащий для укорочения длины газоразрядного промежутка. Через нижний фланец производились откачка рабочего объема и заполнение его исследуемым газом; откачное отверстие прикрыто плоским медным диском, наружным диаметром,

несколько меньшим внутреннего диаметра разрядной трубы. К нижнему фланцу прикреплен цилиндрический медный кожух, соединенный с заземленной ошиновкой конденсаторной батареи. Медная шина, соединенная с высоковольтными выводами конденсаторов, в центральной части имеет разрядный шар с поджигающим устройством, собранным по показанной здесь же схеме. Поджигающее устройство состояло из изолированного от разрядника вспомогательного электрода, дистанционного электромагнитного выключателя, вспомогательного конденсатора и ограничивающего дросселя. Ток зарядки вспомогательного конденсатора от емкости основного контура при замыкании выключателя ионизировал основной разрядный промежуток, иницируя тем самым разряд основной батареи через камеру.

Ток через разрядную камеру осциллографировался с помощью пояса Роговского, а напряжение — с помощью омического делителя с разделительной емкостью. Типичные осциллограммы тока и напряжения приведены на рис. 5. В конструкции контура были приняты меры для уменьшения его паразитной индуктивности, для чего средняя часть высоковольтной и заземленной шин выполнена из широких медных полотнич, разделенных резиновой изоляцией.

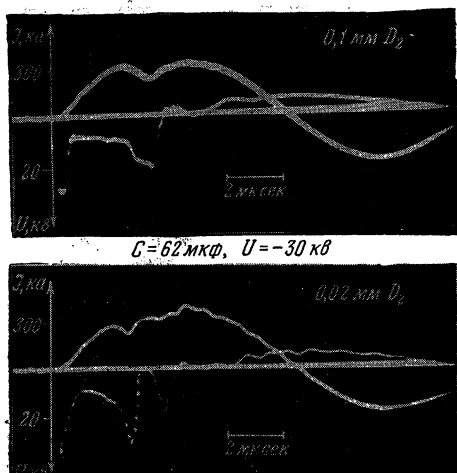


Рис. 5.

§ 5. Опыты по измерению давления в разрядной камере

На рис. 6 представлены фотокопии осциллограмм пьезоимпульса одновременно с полным током через разрядную камеру для давления 0,1 мм рт. ст., при емкости батареи $C=62$ мкф и начальном напряжении 30 кв, сфотографированные при радиальном перемещении датчика. Можно видеть, как пьезоимпульс по мере приближения датчика к центру разрядной камеры становится короче во времени и увеличивается по амплитуде, достигая величины около 120 атм. Из приве-

денных осциллограмм видно, что момент начала регистрации импульса давления при симметричном размещении пьезодатчика относительно оси разряда зависит от ориентировки торца пьезодатчика. При постановке датчика в позицию *A* начало импульса давления регистрируется приблизительно на 0,7 мксек раньше, а в позиции *B* — на 0,5 мксек позже, чем

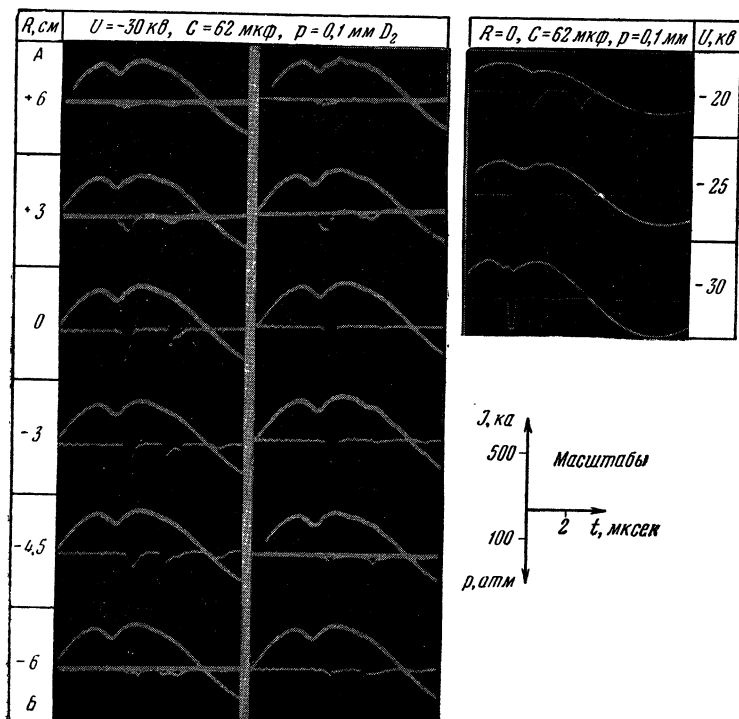


Рис. 6.

в центре. Такая картина заставляет предположить о преобладании направленного движения частиц над беспорядочным тепловым в начальной стадии разряда. Рядом показан характер изменения импульса давления в центре разрядной камеры в зависимости от увеличения напряжения конденсаторной батареи. Если не принимать во внимание второй импульс, о котором будет идти речь ниже, то заметна тенденция первого импульса к увеличению амплитуды и уменьшению длительности с увеличением напряжения. Проведены опыты по исследованию импульса давления при постановке пьезодатчика

в аксиальном направлении вблизи нижнего электрода по оси камеры. Серия осциллограмм на рис. 7 показывает форму импульса давления при размещении датчика по оси разряда в плоскости нижнего электрода. Скорость распространения импульса давления через отверстие в центре нижнего электрода и степень его затухания показаны на рис. 8, где приведены осциллограммы, полученные при перемещении пьезодатчика под плоскость нижнего электрода.

Конструкция камеры, с которой проводились эксперименты, позволила поставить пьезодатчик в направлении оси разряда на расстоянии 3 и 10 см от оси. На рис. 9 представлены осциллограммы пьезоимпульсов, полученных с помощью датчика, поставленного в аксиальном направлении по оси и с эксцентриситетом 3 и 10 см с превышением торца датчика над плоскостью нижнего электрода на 3 см.

Для фазировки пьезоимпульсов снят одновременно с производной тока для одного из периферийных конденсаторов батареи посредством катушки, помещенной вблизи токопровода. Фазировку пьезоимпульсов с током можно производить с помощью помещенных в конце каждой из серии осциллограмм кадров, где одновременно сфотографированы ток через камеру и применявшаяся для фазировки производная тока у крайнего конденсатора.

Из сравнения кадров *a* и *b* (рис. 9) видно, что начало пьезоимпульса в центре регистрируется одновременно как радиально (*b*), так и аксиально (*a*) размещенным датчиком; равенство амплитуд импульсов, вероятно, вызвано достаточной равномерностью распределения скоростей в пространстве и переходе к хаотическому тепловому движению в районе центра. Рассмотрение приведенных осциллограмм показывает, что основной импульс давления на датчиках, размещенных на 3 и 10 см от центра, начинает регистрироваться заметно позже, чем в центре. Это может быть объяснено тем, что после сжатия в центре наступает расширение нагретого плазменного шнура с хаотическим (тепловым) распределением скоростей (сравни с запаздыванием регистрации импульса радиальным датчиком, размещенным торцевой поверхностью к центру камеры и также

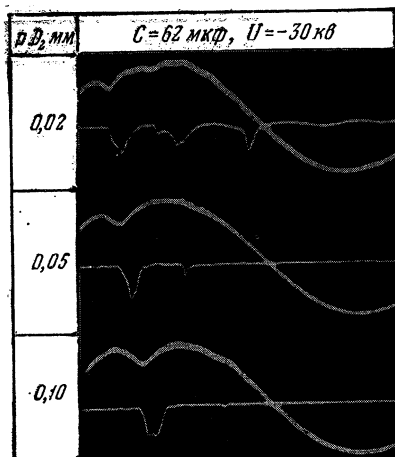


Рис. 7. Пьезодатчик в положении II (см. рис. 4).

регистрирующим развал, рис. 6). При большом коэффициенте усиления регистрирующего устройства на кадре № 1 (рис. 9) заметно небольшое повышение давления, начинающееся раньше момента прихода пьезоимпульса в центр, что, по-видимому, ука-

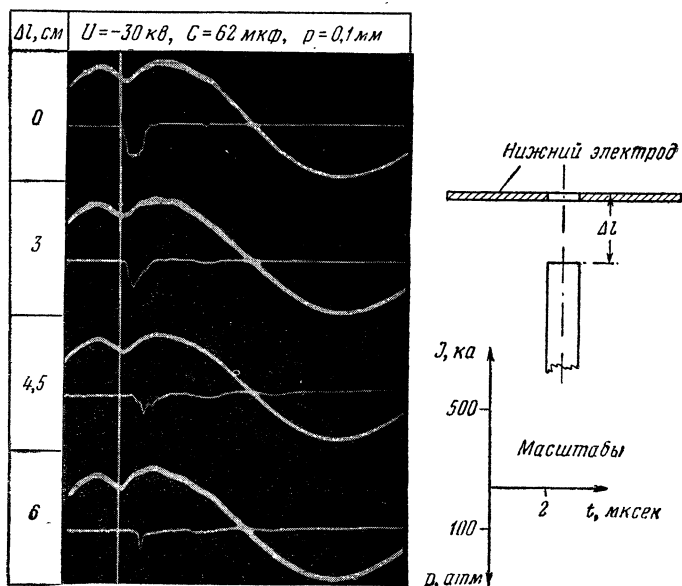


Рис. 8.

зывает на некоторый нагрев во время начальной стадии разряда.

Проведен ряд экспериментов по определению связи прихода импульса давления с проникновением магнитного поля внутрь разрядной камеры.

На рис. 10 представлена серия осциллограмм, где сфотографирован сигнал с помещенной внутрь разряда катушки, измеряющей производную по времени магнитного поля на выбранном расстоянии от оси камеры, и пьезоэлектрический импульс датчика, установленного на том же радиусе. Если считать сжатие плазменного шнура цилиндрическим, то из приведенных осциллограмм видно, что магнитное поле в некотором сечении разрядной камеры появляется несколько раньше, чем в этом же сечении возникнет импульс давления. Это запаздывание нельзя считать инструментальной ошибкой датчика, который может задержать время прихода импульса лишь на время прохождения звуковой волны через 0,1 мм

серебряной фольги и 0,1 мм изоляционного слоя, т. е. не более чем на 0,1 мксек, и завалить начальный фронт импульса за счет поглощения на тех же препятствиях, а также за время прохождения звуковой волны через 1-мм слой титаната бария.

На рис. 11 показаны осциллограммы производной магнитного поля и давления при разряде на камеру батареи удвоенной емкости (124 мкф).

Здесь четко выявляется запаздывание прихода пьезоимпульса при разряде в ксеноне, где импульс давления имеет меньшую длительность и большую амплитуду, чем на дейтерии (на осциллограммах импульсы «зарезаны» усилителем по амплитуде). Здесь помещены также зарезанные по амплитуде импульсы давления в разрядной камере при начальном давлении дейтерия 12 мм рт. ст., зарегистрированные одновременно с производной магнитного поля. При установке катушки и пьезодатчика вблизи центра был зарегистрирован только пьезоимпульс (кадр № 1), в то время как заметного магнитного поля, которое могло бы быть зарегистрировано применявшейся в экспериментах катушкой, не появилось. На расстоянии от оси камеры в 10 см (кадр № 2) есть и давление, и магнитное поле, причем последнее также заметно опережает пьезоимпульс.

Было проведено несколько экспериментов для определения повышения давления в начальной стадии разряда вблизи стенок разрядной камеры во время протекания тока в этой области. Датчик был помещен заподлицо со стенкой (на $R = 19$ см) камеры, а катушка для измерения производной магнитного поля находилась вблизи центра камеры на $R = 1,5$ см и служила для фазировки записи. На рис. 12 показано сравнение осциллограмм при различных полярностях батареи для того, чтобы при используемом большом коэффициенте

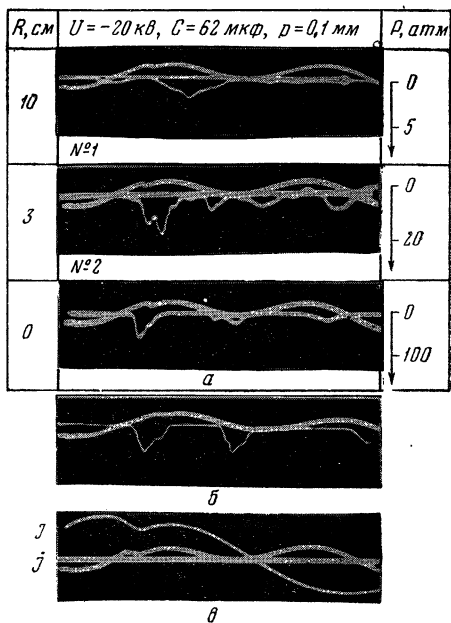


Рис. 9. Осциллограммы пьезоимпульсов: а — пьезодатчик в положении II, III (см. рис. 4); б — пьезодатчик в положении I, $R = 0$ (см. рис. 4); в — фазировка с током.

усиления исключить возможность электромагнитной наводки на аппаратуру, которая должна изменить знак при переполюсовке и исказить форму импульса. Опыты проводились при начальном давлении дейтерия 0,5 мм рт. ст. На осциллограммах за-

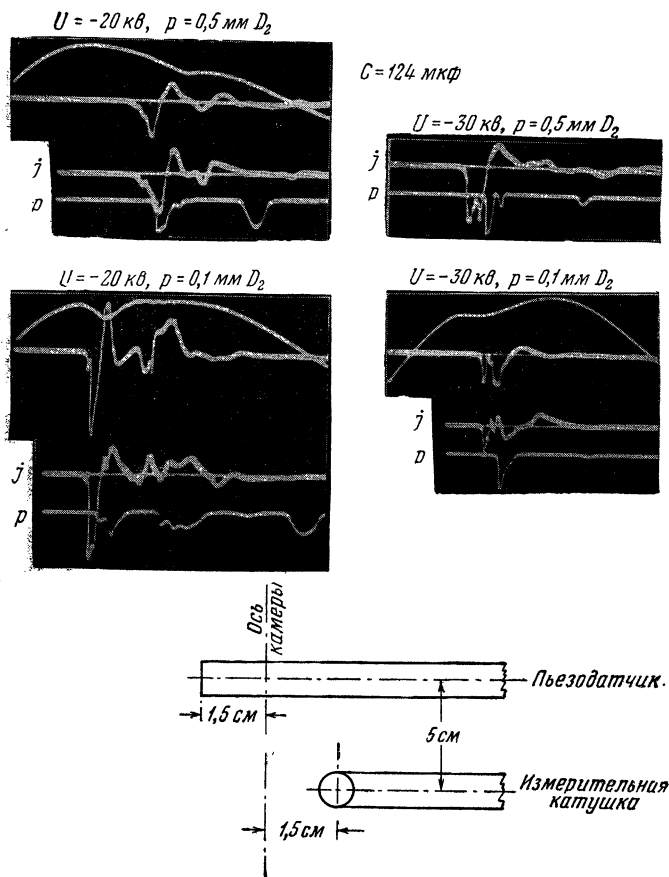


Рис. 10.

метны: плавное увеличение давления со временем, не носящее характера удара, и обратное падение, после чего следует развальный удар. Примененный контроль переполюсовкой батареи проводился в работе с описанным пьезодатчиком неоднократно, но основное число экспериментов проводилось

при заземленном плюсе высоковольтного выпрямителя, так как в противном случае резко возрастает опасность пробоя изоляции пьезодатчика, а вместе с этим и искажения сигнала ($+40$ кВ) (рис. 13).

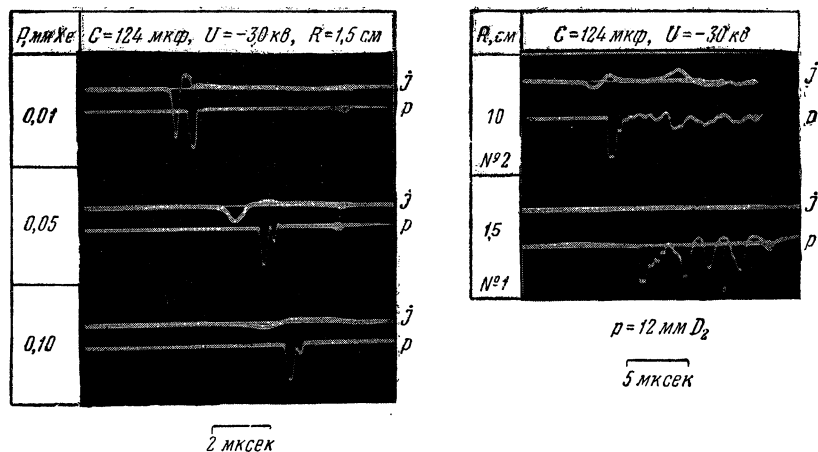


Рис. 11.

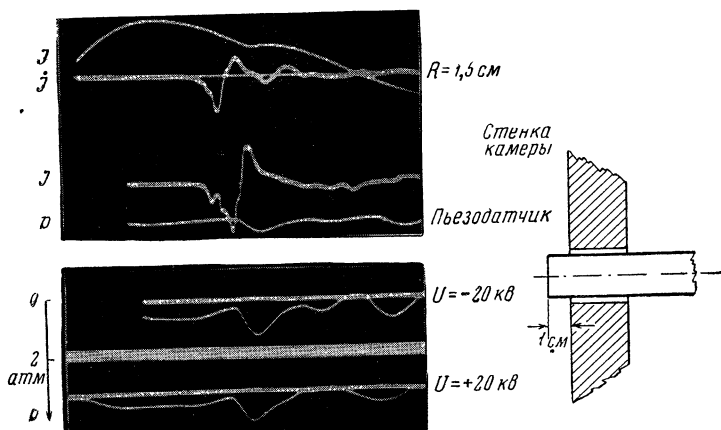


Рис. 12.

Следует заметить, что при больших начальных давлениях дейтерия возможна работа с неизолрированным пьезодатчиком, так как не происходит начального пробоя на датчик, искажающе-

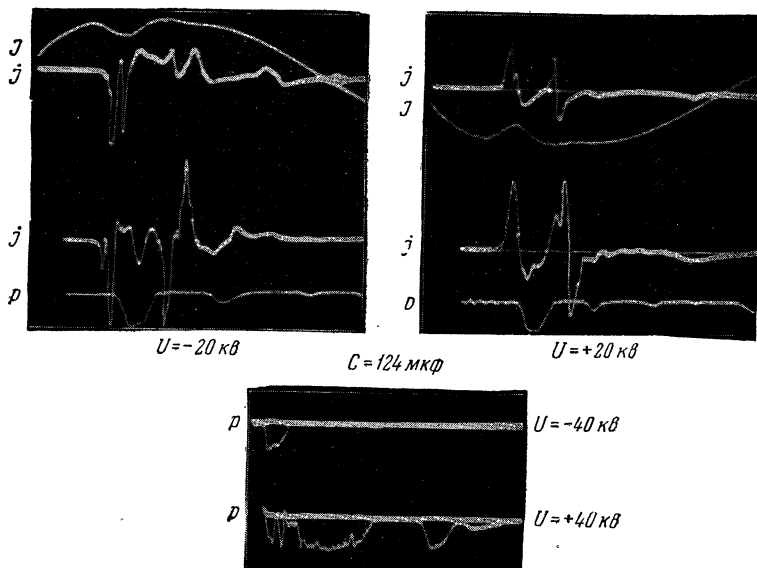


Рис. 13.

щего пьезосигнал; но при малых давлениях, представляющих основной интерес для исследования, сколько-либо воспроизводимых результатов без изоляции датчика от газоразрядной плазмы получить не удалось.

§ 6. Заключение

Разработана конструкция пьезоэлектрического измерителя давлений, характерными особенностями которого являются: применение двойного сегнетоэлектрического брикета из склеенных тонких пластинок титаната бария, поляризуемого на готовом датчике; наличие цинкового инерционного стержня и изоляция головки датчика от газоразрядной плазмы. С целью определения масштаба измерений проделаны калибровки датчика с помощью физического маятника и разработан новый метод калибровки датчика с помощью диафрагменного инерционного датчика, который самостоятельно может служить измерителем давления.

Сопоставление данных калибровки с результатами осциллографирования давления, возникающего в центре мощного газового разряда, дает основание утверждать о возникновении

в центре разряда, в результате направленного движения к оси камеры ионов и атомов заполняющего камеру газа*, коротких импульсов давления с количеством движения, эквивалентного давлению более сотни атмосфер при радиальной скорости движения частиц в районе центра около $0,5-0,9 \cdot 10^{-7}$ см/сек. При этом в начальной стадии разряда отсутствуют соизмеримые давления в аксиальном направлении. Рядом экспериментов показано возникновение аксиального давления в центре камеры в момент слета частиц к оси и последующее расширение плазменного шнура к периферии камеры. Отмечен некоторый разогрев плазмы в начальной стадии разряда. Обнаружено запаздывание пьезоимпульса по сравнению с моментом прихода магнитного поля в то же сечение разряда.

Полученная на значительном большинстве осциллограмм множественность импульсов при разряде в дейтерии, по-видимому, не может быть связана с какими-либо инструментальными ошибками за счет ложных отражений в пьезодатчике, так как в этом случае трудно объяснить нерегулярность их появления, да и времена между импульсами не соответствуют характерным размерам пьезодатчика.

В дальнейшей работе по пьезоизмерениям, для увеличения чувствительности метода при измерении малых давлений в начальной стадии разряда, может оказаться желательным применение предусилителя пьезосигнала перед катодным повторителем при улучшении экранировки с целью уменьшения электромагнитных помех. Кроме того, необходимы дальнейшие поиски надежного способа изоляции измерительного элемента датчика от плазмы при исследовании более мощных импульсных разрядов.

В целом исследование давлений в цилиндрической разрядной камере не является в какой-либо мере полным из-за ограниченности срока службы изоляции датчика. Показана лишь возможность применения разработанной методики для такого исследования. Однако, несмотря на недостаточность экспериментального материала, можно попытаться сделать ряд выводов, характеризующих мощный импульсный разряд в цилиндрической камере с фарфоровыми стенками, наполненной дейтерием.

1. Процесс сжатия к оси камеры сопровождается сильным увеличением массы дейтерия, захватываемой сжимающейся токонесящей оболочкой, ведущей к значительному повышению плотности в центральных областях разряда к моменту сжатия.

* Приведенные рассуждения относятся к следующим параметрам разряда: $U_0 = -30$ кВ, $G = 62$ мкФ и $p_{0D_2} = 0,1$ мм рт. ст. дейтерия.

Результаты приближенных подсчетов сжатия для разряда при начальном давлении дейтерия, равном 0,1 мм рт. ст., дают следующие значения:

$U, кв$	Q	τ	v	η
-20	60	$0,8 \cdot 10^{-6}$	$6,5 \cdot 10^6$	70
-30	70 *	$0,4 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^6$	90,

где $U, кв$ — напряжение на конденсаторной батарее;
 $Q, гсм/сек$ — импульс, полученный баллистической диафрагмой;
 $\tau, сек.$ — среднее время действия импульса;
 $v, см/сек$ — скорость оболочки в районе центра камеры;
 η — уплотнение, равное отношению плотности газа в сжатом состоянии к его плотности при начальном давлении:

$$\eta = \frac{\gamma_{\text{конечн.}}}{\gamma_{\text{начальн.}}} = \frac{\frac{Q}{\tau v^2}}{\frac{p}{760} \cdot A m_{D_2}},$$

где A — число Ломшидта, равное $2,7 \cdot 10^{19}$ частиц/см³,
 m_{D_2} — масса молекулы дейтерия, равная $6,7 \cdot 10^{-24}$ г.

2. Фронт волны давления заметно отстает от фронта магнитного поля и заметно круче последнего. Фронт волны давления совпадает во времени с максимальным значением магнитного поля, что соответствует началу регистрации давления в момент прохождения *наружной* поверхности сжимающейся токнесущей оболочки мимо стоящих рядом пьезодатчика и измерительной катушки. Наблюденный факт противоречит общепринятому представлению о магнитной оболочке, как о поршне.

3. Радиальные давления, возникающие в разряде, превышают давления магнитного поля в соответствующих сечениях камеры; это превышение невелико в начале разряда, когда оболочка находится на периферии камеры, и значительно возрастает к концу сжатия, доходя до сотни атмосфер против $4 \div 5$ атм. давления магнитного поля, достигающего в центральных областях разряда величин около 10 тыс. э.

4. При сжатии разряда в центре камеры в аксиальном направлении возникает импульс давления, характеризующий

* Опытов с диафрагменным датчиком при напряжении 30 кв не проводилось, и значение «70» взято из отношения площадей пьезоимпульсов на 20 и 30 кв.

возникновение продольной составляющей скорости частиц, что (отвлекаясь от возможности присутствия кумуляционных осевых скоростей) говорит об установлении неупорядоченного теплового движения.

Приведенные результаты показывают, что описанная методика измерения при дальнейшей разработке и уточнении может быть использована для изучения распределения давлений и плотности внутри газоразрядной плазмы при импульсных разрядах подобного типа.

*Г. М. Антропов, В. А. Беляев,
М. К. Романовский*

О ПОВЕДЕНИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОННОЙ МОДЕЛИ ЛОВУШКИ С МАГНИТНЫМИ ПРОБКАМИ *

Излагаются предварительные результаты исследования электронной модели магнитной ловушки с аксиально-симметричным полем, усиленным на концах.

§ 1. Введение

Одним из способов создания горячей плазмы может быть накопление быстрых ионов в объеме с магнитным полем специальной формы, в котором частицы длительное время удерживаются от попадания на стенки. В подобных магнитных ловушках области с большими значениями H играют роль пробок, от которых отражаются заряженные частицы в соответствии с инвариантностью величины v_{\perp}^2/H в магнитном поле, мало меняющемся на протяжении ларморовского радиуса частицы. Наиболее простая форма магнитной ловушки — это поле прямого соленоида, усиленное на концах. Такая форма и исследовалась на электронной модели, хотя это не единственная и, возможно, не лучшая конфигурация поля магнитной ловушки.

§ 2. Цель эксперимента

Целью эксперимента было изучение поведения быстрых электронов в поле ловушки с магнитными пробками и в первую очередь — проверка сохранения адиабатического инварианта

* Работа выполнена в 1957 г.

v_{\perp}^2/H при многократных отражениях электронов от пробок. Изучались также распределения заряженных частиц по радиусу и азимутальному углу φ системы и распределение частиц по местам их гибели (уход в пробки, уход на стенки, возврат на источник). Произведены оценки времени жизни быстрого электрона в системе в зависимости от давления остаточного газа.

§ 3. Постановка опыта. Упрощающие предположения

В магнитную ловушку диаметром 10 см и расстоянием между пробками ≈ 30 см был помещен источник электронов, инжек-

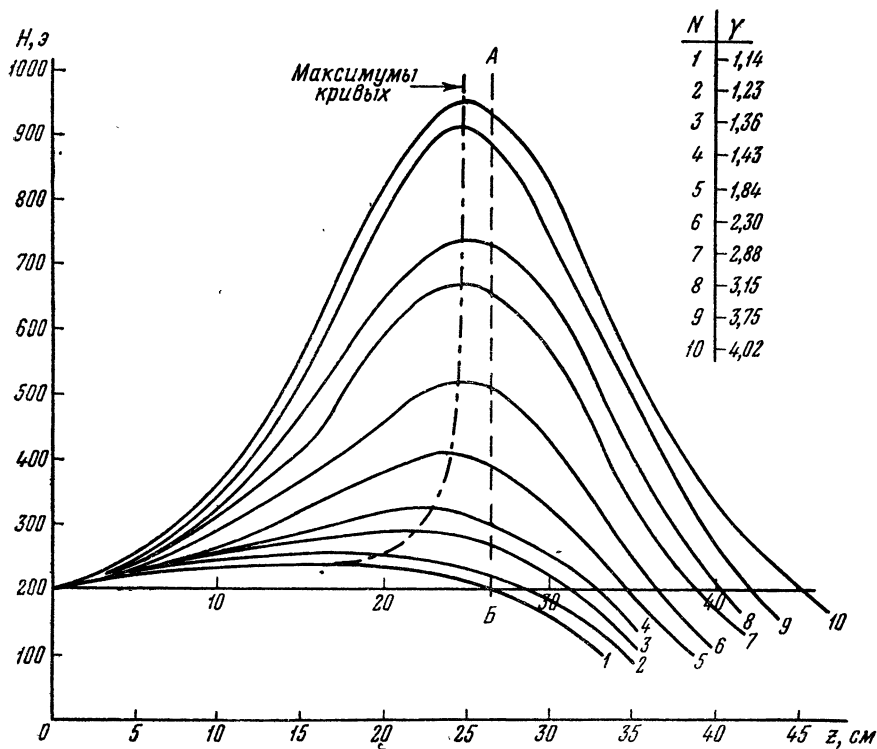


Рис. 1. Распределение магнитного поля на z -оси ловушки.

0 — середина ловушки; АБ — место распределения измерительной системы.

тирующий электроны, с энергией 2 кэв. Зависимость поля от z по оси ловушки показана на рис. 1.

Источник размещался в плоскости, перпендикулярной к оси ловушки и проходящей через ее центр, на расстоянии 3,5 см

от оси. Половина угла расходимости пучка лежит между 15° и 20° . Угол α между осью пучка электронов и плоскостью, нормальной к полю в месте инжекции, выбирался так, чтобы все электроны отразились от пробки. За пробками имелось устройство, позволявшее измерять распределение тока, выходящего в пробки, по углу φ и радиусу.

С помощью задерживающего потенциала можно было разделить ток электронов и ток ионов. По величине ионного тока и тока инжекции определялось время жизни быстрых электронов в системе. Если принять, что эффективное сечение $\sigma_{\text{и}}$ ионизации молекул остаточного газа быстрыми электронами и скорость движения v быстрых электронов за все время жизни их в системе не меняются и что создающийся в системе объемный заряд не влияет на уход этих электронов сквозь пробки, то по величине ионного тока i^+ , образующегося в ловушке, и тока быстрых электронов i^- , инжектируемых в ловушку, определяется время жизни τ быстрых электронов в ловушке. Действительно, легко показать, что $\tau = \frac{i^+}{i^-} \tau_{\text{ион}}$, где $\tau_{\text{ион}} = \frac{1}{n_0 \sigma_{\text{и}} v}$ — время между двумя ионизациями нейтральных атомов электроном, движущимся со скоростью v в газе, с числом n_0 атомов в 1 см^3 .

§ 4. Экспериментальные результаты

Были проведены измерения распределения токов по φ и по радиусу при различных значениях отношения $\gamma = \frac{H_{\text{п}}}{H_0}$ ($H_{\text{п}}$ — поле в максимуме пробки, H_0 — поле в центре ловушки) и различных значениях давления остаточного газа в системе. Измерены значения ионных токов в пробках при этих же условиях. Значение тока инжекции i^- составляло в разных опытах от 250 до 1000 $\mu\text{ка}$, углы инжекции $\alpha = 0^\circ$ и 20° .

На рис. 2 показаны кривые зависимости тока в пробках от величины задерживающего потенциала V для различных значений отношения γ при угле инжекции $\alpha = 20^\circ$. Видно, что кривая $i = f(V)$ для $\gamma = 1,14$ идет иначе, чем кривые для больших значений γ , что естественно, так как при $\gamma = 1,14$ отражаются электроны, входящие в систему, под углом менее 21° , а при $\alpha = 20^\circ$ из-за расходимости пучка имеется значительное число электронов, входящих под углом более 21° .

На рис. 3 представлены аналогичные зависимости для $\alpha = 0^\circ$, при котором в объеме остаются лишь электроны, прошедшие мимо источника за счет расходимости пучка.

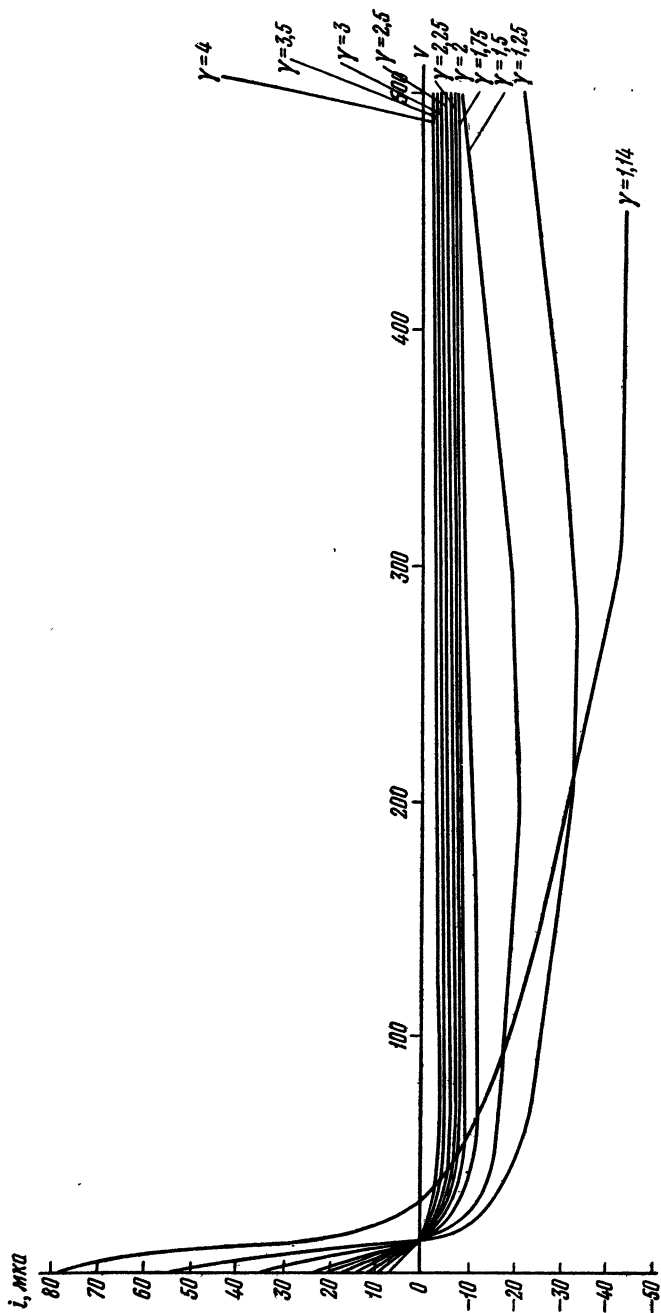


Рис. 2. Энергетический интегральный спектр тока, выходящего в пробку в зависимости от величины γ при $\alpha = 20^\circ$ и $p = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст.
 В интервале $0 > V > 15$ ϵ измерения велись через $3-5 \epsilon$; $10 > V > 100 \epsilon$ — через $10-20 \epsilon$; $100 > V > 500 \epsilon$ — через 100ϵ ; значения V , при которых $i = 0$, особо отмечались.

Ярко выраженное насыщение показывает, что и при $\gamma = 1,14$ в этом случае все быстрые электроны отражаются от пробки.

Для вычисления τ по формуле $\tau = \frac{i^+}{i^-} \tau_{\text{ион}}$ из кривых рис. 2 и 3 бралось значение тока насыщения при 500 ϵ . Так как через пробку

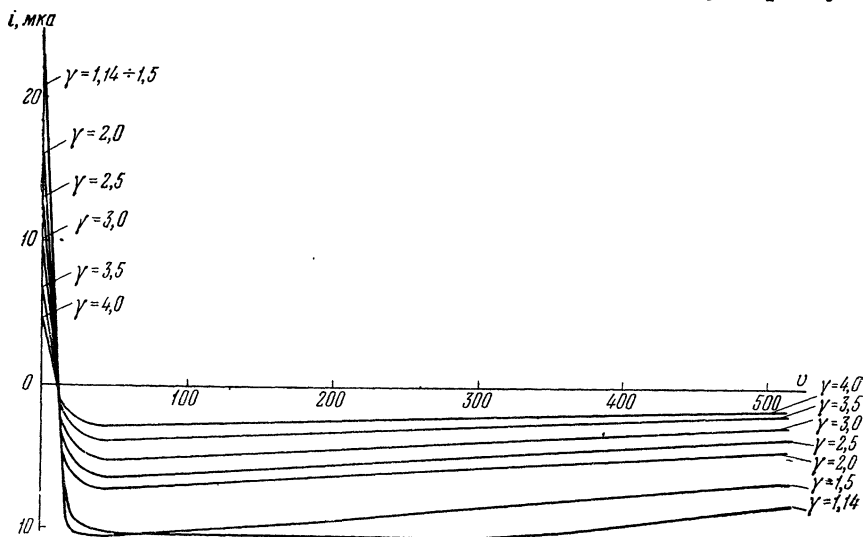


Рис. 3. Энергетический интегральный спектр тока, выходящего в пробку в зависимости от величины γ при $\alpha = 0^\circ$ и $p = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст.

В интервале $0 > V > 15 \epsilon$ измерения велись через 3–5 ϵ ; $15 > V > 150 \epsilon$ — через 10–20 ϵ , $50 > V > 500 \epsilon$ — через 100–200 ϵ ; значения V , при которых $i = 0$, особо отмечались.

выходят не все рождающиеся ионы, а только часть их, равная $\frac{\Omega(\gamma)}{4\pi}$, где $\Omega(\gamma)$ — телесный угол, попадая в который ионы выходят сквозь пробки не отражаясь, то определенное по кривым рис. 2 и 3 значение тока i^+ поправлялось на множитель $\frac{\Omega(\gamma)}{4\pi}$. Результаты для давления $p = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. приведены в табл. 1.

Таблица 1

γ	1,14	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	1,14 Не исправленные значения τ
$\tau, \text{мксек}, \alpha = 0^\circ$	34	13	13	14	14	12	11	11
$\tau, \text{мксек}, \alpha = 20^\circ$	44	14	15	16	16	16	13	14

В пределах точности опыта время жизни быстрых электронов оказывается не зависящим от угла инжекции.

На рис. 4 показаны полученные в опытах значения i^- и i^+ при $\alpha = 20^\circ$ и давлениях остаточного газа $p = 1,4 \cdot 10^{-5}$

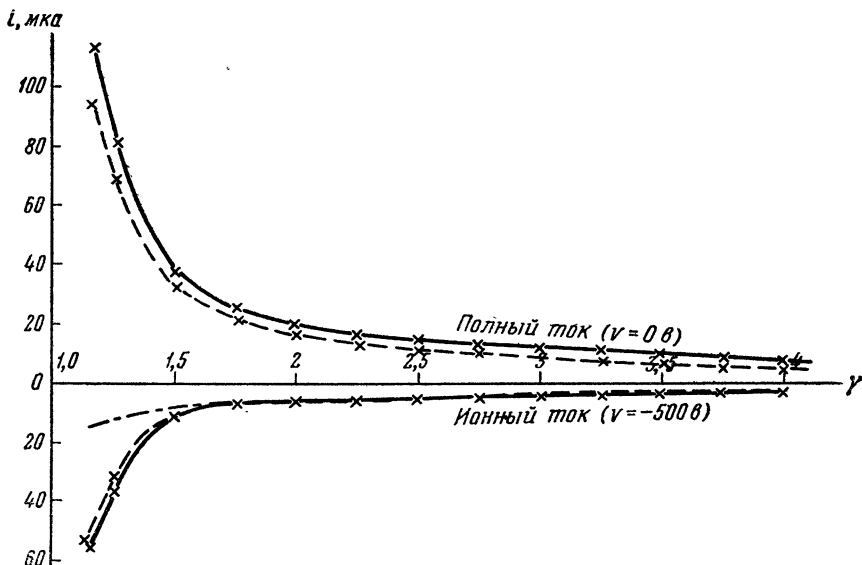


Рис. 4. Зависимость полного и ионного токов, выходящих в пробку, от величины γ .

— $p = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст.; - - - $p = 1,4 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст.; - - - расчетная кривая.

и $1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. Рассчитанные по этим данным значения времен жизни сведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

γ	1,14	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	1,14 Не исправленные значения τ
τ , мксек $p = 1,4 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст. . .	5,4	1,9	1,9	1,6	1,5	1,4	1,3	1,8
τ , мксек $p = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. . .	60	60	17	18	17	16	15	20

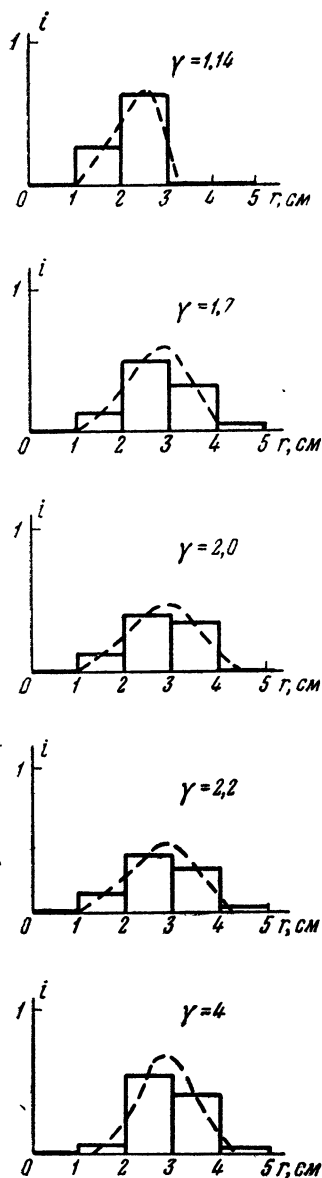


Рис. 5. Гистограмма распределения тока по радиусу при $\alpha = 20^\circ$ для различных γ .

В последнем столбце таблицы приведены значения τ , при вычислении которых в формулу $\tau = \frac{i^+}{i^-} \tau_{\text{ион}}$ подставлялась величина тока насыщения по графикам рис. 2 и 3 без умножения на $4\pi/\Omega$.

Как видим, последний столбец дает хорошее совпадение времени жизни со значениями для других γ , в то время как первый столбец дает непонятно большое τ . Это мы объясняем тем, что ионы при $\gamma = 1,14$ выталкиваются из системы при первом приближении к пробке положительным объемным зарядом.

В пределах ошибок измерения время жизни, как и следует ожидать при сохранении адиабатического инварианта, изменяется обратно пропорционально давлению. Эта зависимость проверена для $\alpha = 20$ и 0° в интервале давлений от $5 \cdot 10^{-3}$ до $1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. Результаты сведены в табл. 3.

По времени жизни, скорости электрона и расстоянию между местами отражений можно оценить число отражений быстрого электрона от пробки. Приняв за расстояние между местами отражений расстояние между максимумами магнитного поля в пробках, получаем, что при $p = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. число отражений больше $5 \cdot 10^3$.

Из рис. 4 видно, что величина тока i^+ уменьшается с ростом γ , что соответствует уменьшению $\Omega(\gamma)$.

На этом же рисунке пунктиром дана кривая расчетного выхода ионов в предположении изотропности распределения их импульсов. Расчетная кривая привязана к экспериментальной в точке $\gamma = 4$. Видно, что при $\gamma \leq 2$ наблюдаемый

Таблица 3

p , мм рт. ст.	$5 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$5,4 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$
τ , мксек . .	0,045	0,22	0,45	2,1	4,3	16
$\tau/\tau_{\text{ион}}$. . .	0,18	0,19	0,18	0,18	0,18	0,16

выход больше расчетного, что мы объясняем влиянием положительного объемного заряда.

Рассмотрим кратко распределение токов за пробками по радиусу и углу. Гистограмма распределения токов по

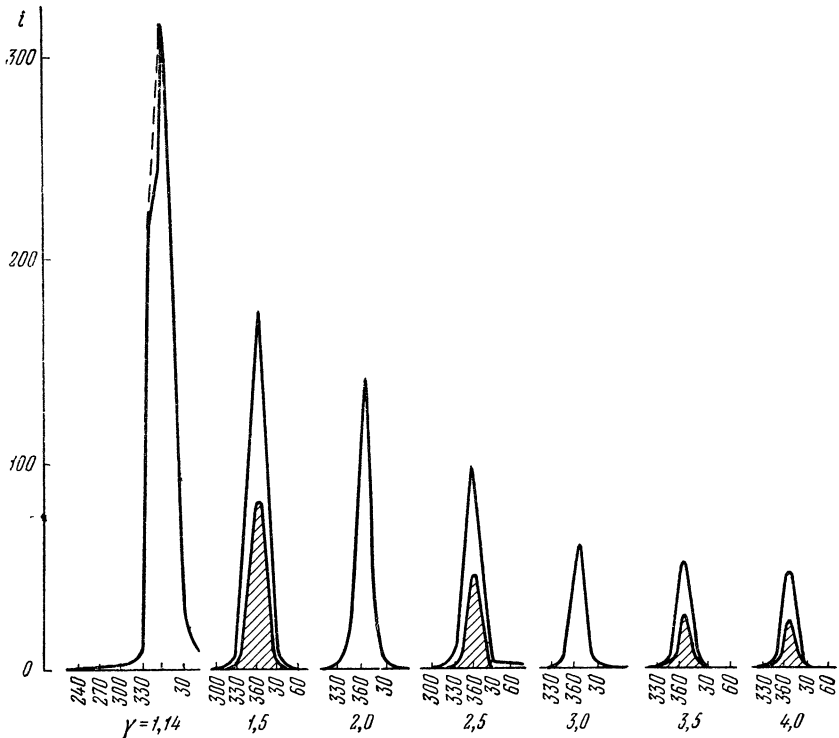


Рис. 6. Распределение полного и ионного токов по φ в зависимости от величины γ для $\alpha = 20^\circ$. Точки снимались через 15° .

радиусу показана на рис. 5, из которого видно, что заряженные частицы движутся в районе радиуса инжекции, практически не диффундируя поперек поля. Распределение

электронов по радиусу может быть понято, если учесть, что радиус ларморовой окружности 1 см.

Кривые распределения токов по φ представлены на рис. 6. Видно, что частицы движутся в узком угле, практически не сдрейфовывая от источника.

§ 5. Заключение

1. Инжектируемые электроны, движущиеся в магнитном поле ловушки с магнитными пробками, совершают до 10^3 колебаний между пробками.

2. Время жизни быстрых электронов в системе определяется не сохранением адиабатического инварианта, а взаимодействием электронов с остаточным газом и гибелью их на источнике.

О. В. Фирсов

**ОТТАЛКИВАНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
ОТ ОБЛАСТЕЙ С СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ***
(О точности адиабатического инварианта)

Если заряженная частица движется в магнитном поле, которое мало меняется на протяжении ларморовского радиуса $\rho = \frac{mvc}{eH}$, то, как известно, приближенно справедливо соотношение $mv_{\perp}^2/2H = \text{const}$ (адиабатический инвариант). При достаточно большом увеличении напряженности поля H , в силу наличия адиабатического инварианта, $\frac{mv_{\perp}^2}{2}$ становится равным полной кинетической энергии частицы (v_{\perp} — составляющая скорости, перпендикулярная к магнитному полю). Тогда $v_{\parallel} = 0$, и частица снова уходит в область более слабого поля. Так как, однако, адиабатический инвариант не является точным инвариантом, то в данной работе делается попытка оценить точность запрета для попадания заряженной частицы в более сильное магнитное поле, чем это допускается адиабатическим инвариантом при данных начальных условиях. Рассматривается аксиально-симметричное поле.

Как известно, движение в аксиально-симметричном магнитном поле можно рассматривать как двумерное движение, исключив движение по азимуту.

В цилиндрических координатах ρ , z движение по этим координатам описывается, как движение в потенциальном поле

$$V = \frac{(\Phi - p)^2}{2m\rho^2}$$

* Работа выполнена в 1956 г.

где

$$\Phi = \frac{e}{c} \int_0^{\rho} H_z \rho d\rho, \quad p_\varphi = \text{const}$$

представляет собой, с точностью до множителя $\frac{e}{2\pi c}$, поток магнитного поля через кольцо радиуса ρ . Если рассматривать движение, при котором $\dot{\varphi}$ может обращаться в нуль

$$\dot{\varphi} = \frac{p - \Phi}{m\rho^2},$$

то частица находится в потенциальной яме, в минимуме которой $V=0$, т. е.

$$\frac{e}{c} \int_0^{\rho_0} H_z \rho d\rho = p_\varphi.$$

Этот минимум находится на силовой линии, или, точнее, на образуемой ею поверхности вращения. При достаточно малой кинетической энергии $\frac{p_\rho^2 + p_z^2}{2m}$ (много меньшей максимума потенциала, если он имеется) частица не может отойти далеко от силовой линии с $V=0$, к которой она как бы привязана квазиупругой силой с коэффициентом упругости $\frac{e^2 H^2}{mc^2}$ — он равен $m\omega^2$, где $\omega = \frac{eH}{mc}$ — ларморовская частота. В дальнейшем предполагается, что эта потенциальная яма сужается с двух концов, т. е. что на ее концах ω возрастает.

Приводимое ниже рассмотрение легко обобщается и на случай присутствия аксиально-симметричного электрического поля добавлением к (I) соответствующего электростатического потенциала, не нарушающего общего характера V .

§ 1. Наглядное представление задачи

Рассмотрим сперва некоторые аналогичные, но более наглядные движения. Пусть частица движется между двумя параллельными прямыми. Движение в такой «трубке» изображено на рис. 1.

При рассматриваемом движении частица сохраняет неизменной продольную скорость; поперечная скорость только меняет знак при каждом отражении от стенки, но остается постоянной по абсолютной величине. Если бы вместо трубки мы имели прямую линию, к которой частица упруго привязана

с постоянным коэффициентом упругости, то получили бы траекторию в виде синусоиды (вместо ломаной линии) (рис. 2).

Здесь по-прежнему сохраняются как продольная, так и поперечная энергии.

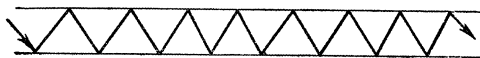


Рис. 1.

Не будет принципиальной разницы, если рассмотренная трубка или линия будет загнута по окружности, хотя законы сохранения в этом случае выглядят несколько иначе: сохраняются $mR^2\dot{\psi}$ и энергия $\frac{m\dot{R}^2}{2} + \frac{(mR^2\dot{\psi})^2}{2mR^2} + V(R)$ (рис. 3).



Рис. 2.

Не будет также принципиальной разницы, если трубка или линия загнута по более сложной кривой, при условии, что на протяжении одного периода движения частицы кривизна трубки или линии существенно не меняется.



Рис. 3.

Теперь рассмотрим трубку с переменным «диаметром». Пусть стенки трубки наклонены по отношению к ее оси на некоторый угол (рис. 4).

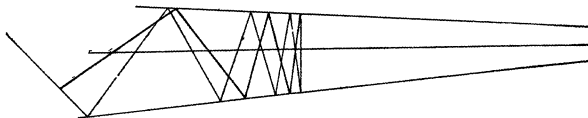


Рис. 4.

Тогда, как нетрудно видеть, частица отражается от узкого конца трубки. При сужении трубки энергия продольного движения переходит в энергию поперечного движения.

§ 2. Качественное уравнение и адиабатический инвариант

Аналогичная ситуация наблюдается и в том случае, когда связь частицы с линией характеризуется переменным коэффициентом упругости. Частица будет «отталкиваться» от мест с большим коэффициентом упругости (в «магнитном» случае коэффициент упругости равен $\frac{e^2 H^2}{mc^2} = m\omega^2$).

Кривизна линии с $V = 0$ и зависимость ω от расстояния между частицей и линией не имеют принципиального значения. Поэтому достаточно рассмотреть движение частицы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{2}, \quad (2.1)$$

где x — координата вдоль, а y — поперек магнитного поля.

Из (2.1) следуют уравнения движения

$$\ddot{x} = -\frac{y^2}{2} \frac{d\omega^2}{dx} \quad (2.2)$$

и

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad (2.3)$$

и интеграл «энергии» $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2 y^2 = v^2$.

Далее предположим

$$\left| y^n \frac{d^n \ln \omega}{dx^n} \right| \sim \theta^n \text{ при } \theta \ll 1. \quad (2.4)$$

В данном случае $\dot{y}^2 + \omega^2 y^2 \approx \omega^2 \rho^2 = v_{\perp}^2$, где ρ — ларморовский радиус $\frac{mc v}{eH}$ и $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Согласно (2.3), изменение y носит колебательный характер с частотой $\frac{\omega}{2\pi}$, если изменение ω за период $2\pi/\omega$ мало, т. е. $\Delta\omega/\omega = (\partial \ln \omega / \partial x) \Delta x \ll 1$, или, в силу (2.4), x того же порядка или меньше, чем \dot{y} . Адиабатическому инварианту $v_{\perp}^2/H = \text{const}$ в данном случае соответствует адиабатический инвариант

$$S = \frac{\dot{y}^2 + \omega^2 y^2}{\omega}. \quad (2.5)$$

В самом деле, в силу (2.3),

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = -S \frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{\dot{y}^2 + \omega^2 y^2} \frac{d \ln \omega}{dt},$$

или

$$\frac{d \ln S}{dt} = -\frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{\dot{y}^2 + \omega^2 y^2} \cdot \frac{d \ln \omega}{dt}. \quad (2.6)$$

Из (2.2) следует

$$d\dot{x} = -\omega y \cdot y \frac{d \ln \omega}{dx} \cdot dt \omega \sim y \theta \omega dt,$$

т. е. за период колебания изменение \dot{x} мало, пока $\dot{x} \sim \dot{y}$. Поэтому $\ln(\omega)$ изменяется довольно плавно. Величина же $\frac{\dot{y}^2 - \omega^2 y^2}{\dot{y}^2 + \omega^2 y^2}$ за четверть периода меняется от 1 до (-1). Следовательно, хотя изменение $\ln S$ за четверть периода того же порядка, что и изменение $\ln \omega$, но за значительно большие времена изменение $\ln S$ много меньше, чем изменение $\ln \omega$ (пока изменение $\ln \omega$ монотонно).

§ 3. Уточненный адиабатический инвариант

Уравнение (2.6) можно записать в виде

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{d}{dt} y \dot{y} \right) \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega},$$

так как из (2.3) следует, что

$$y^2 - \omega^2 y^2 = \frac{d}{dt} (y \dot{y}). \quad (3.1)$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left[y \dot{y} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} \right) \right] - y \dot{y} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\omega},$$

или

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \left(S - y \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} \right), \quad (3.2)$$

Уточненный адиабатический инвариант равен

$$F = S - y \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega^2}; \quad (3.3)$$

так как

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\omega} \frac{d \ln \omega}{dx} \dot{x}$$

и

$$y \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} \sim S \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \theta.$$

Что касается изменения F в пределах периода колебаний, то оно значительно меньше, чем изменение S . Имея в виду, что $F \sim S \sim y\dot{y}$, а также

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\omega} &= \dot{x} \frac{d}{dx} \dot{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{\omega} = \dot{x}^2 \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\omega} + \dot{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{\omega} = \\ &= \frac{\dot{x}^2}{\omega} \left[\left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 \ln \omega}{dx^2} \right] - \frac{\dot{x}}{\omega} \frac{d \ln \omega}{dx}, \end{aligned}$$

и используя (2. 2), получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\omega} = \frac{\dot{x}^2}{\omega} \left[\left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 \ln \omega}{dx^2} \right] + \omega y^2 \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 \sim \omega \theta^2, \quad (3. 4)$$

т. е. относительное изменение F за период $\frac{2\pi}{\omega}$ порядка θ^2 . Так как теперь

$$y\ddot{y} + \omega^2 y^2 = F\omega + y\dot{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} = F\omega - \frac{y\dot{y}}{\omega} \cdot \frac{d \ln \omega}{dx} \dot{x},$$

то интеграл «энергии» имеет вид

$$\dot{x}^2 - \frac{y\dot{y}}{\omega} \frac{d \ln \omega}{dx} \dot{x} + F \cdot \omega(x) = v^2 = \text{const.} \quad (3. 5)$$

При $\dot{x} = 0$

$$F\omega(x) = v^2, \quad (3. 6)$$

Уравнение (3. 6) определяет точки остановки при движении по x (с той точностью, с которой постоянно F). Из (3. 6) следует

$$\frac{\Delta F}{F} = - \frac{\Delta \omega(x_{\text{K}})}{\omega(x_{\text{K}})} = - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_{\text{K}}} \Delta x_{\text{K}}}{\omega(x_{\text{K}})},$$

или

$$\Delta x_{\text{K}} = \frac{\omega_{\text{K}}}{\frac{\partial \omega_{\text{K}}}{\partial x_{\text{K}}}} \frac{\Delta F}{F}. \quad (3. 7)$$

Из (3. 4) и (3. 2) имеем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dt} \cdot \frac{\dot{x}^2}{\omega} \left[\left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 \ln \omega}{dx^2} \right] + \frac{1}{4} \frac{dy^4}{dt} \omega \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2. \quad (3. 8)$$

В первом приближении, если пренебречь $\frac{dF}{dt}$ и средним значением малого второго члена (3. 5), получим, что частица совершает колебательное движение по оси x с постоянной

амплитудой, равной половине расстояния между корнями уравнения (3.7). Частота этих колебаний порядка $\sqrt{F \frac{d^2\omega}{dx^2}} \times \times \frac{1}{2\pi} = \frac{\Omega}{2\pi}$. Колебания по оси y происходят с частотой ω и амплитудой, обратно пропорциональной $\sqrt{\omega}$,

$$F \sim y_0^2 \omega, \quad \Omega = \sqrt{\frac{F d^2\omega}{dx^2}} \sim \sqrt{y_0^2 \omega \frac{d^2\omega}{dx^2}} \sim \theta \omega.$$

Из (3.8) можем оценить, каково максимальное изменение F за период колебания по оси x .

Возьмем за исходную точку так называемую точку останова x_1 , где $\dot{x} = 0$, и проинтегрируем (3.8) по частям до прихода частицы снова в «ту же точку останова» (которая, однако, может уже не вполне совпадать с исходной вследствие изменения F)

$$F = F_0 + \frac{1}{4} y^4 \omega \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 \int_0^T -\frac{1}{2} \oint_0^0 y^2 d \left\{ \frac{\dot{x}^2}{\omega} \left[\left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 \ln \omega}{dx^2} \right] \right\} - \\ - \frac{1}{4} \int_{\omega \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2_{t=0}}^{\omega \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2_{t=T}} y^4 d \left\{ \omega \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 \right\}, \quad (3.9)$$

где

$$T \sim \frac{2\pi}{\Omega}.$$

В интегралах (3.9) под знаком дифференциала стоят величины, которые за время T совершают небольшое число возвратных движений $\sim \frac{2(x_2 - x_1)}{l}$, где l — характеристическая длина изменения $\omega(x)$. Величины y^2 и y^4 существенно положительны и быстро колеблются между нулем и максимальным значением, соответствующем данному месту. Поэтому, учитывая, что $\dot{x}^2 \sim \omega^2 y^2$, можно утверждать, что величина этих интегралов порядка $< y^4 \dot{x} \frac{\omega}{l^2}$, где $\frac{\omega}{l^2}$ — порядок максимального значения величины, стоящей под знаком дифференциала во втором интеграле, и величины под знаком дифференциала в первом интеграле, умноженной на $\frac{\omega}{x^2}$. Однако на самом деле эти интегралы значительно меньше, так как \bar{y}_2 и \bar{y}_4 почти повторяются (так же как и \dot{x}^2) при

прямом и обратном прохождении частицы по x . Что касается члена

$$\frac{1}{4} y^4 \omega \left(\frac{d \ln \omega}{dx} \right)^2 \Big|_{t=0}^T,$$

то, вследствие π изменения фазы колебания, значения $y^4(0)$ и $y^4(T)$ могут отличаться на величину порядка $\frac{v^4}{\omega_R^4} = \rho_R^4$, соответствующую точке остановки, т. е. на величину порядка

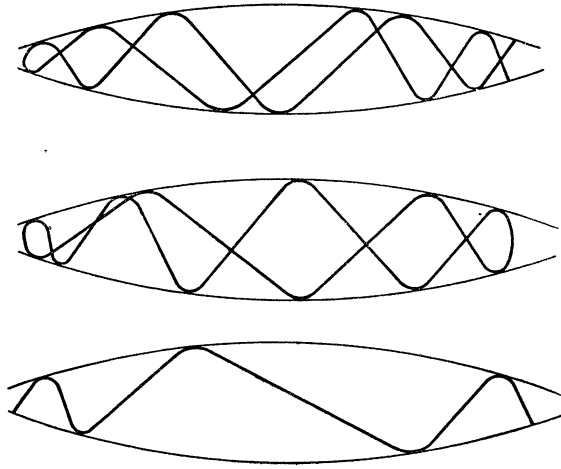


Рис. 5.

$y_{\text{макс}}^4$. Так как $F \simeq y_0^2 \omega = \rho^2 \omega$, то относительное изменение F порядка $\frac{\rho^2}{l^2} \sim \theta^2$. Изменения в этом порядке малости явно ограничены, так как y^4 , изменившись, например, от 0 до ρ_R^4 , может далее увеличиваться лишь на величину следующего порядка малости. То же относится и к интегралам (3.9), где изменения средних значений в данном месте x при прямом и обратном прохождении являются величинами следующего порядка малости. Поэтому, желая установить возможное изменение F за большое число периодов T , мы должны принимать во внимание лишь изменения следующего порядка малости, т. е.

$$\frac{\Delta F}{F} \sim \frac{\rho^3}{l^3} \sim \theta^3. \quad (3.10)$$

Относительно знака этого изменения мы, разумеется, ничего сказать не можем. Однако существует множество таких

решений системы (2, 2), (2, 3), когда значение F строго возвращается к прежнему значению через каждый период движения по оси x . Три вида соответствующих траекторий изображены на рис. 5.

В этих случаях можно сказать, что движения по y и по x «соизмеримы». В остальных случаях «несоизмеримых» движений траектория заполняет всю плоскость, и, вероятно, в худшем (с точки зрения ограничения движения по оси x) случае



Рис. 6.

можно считать, что изменения F , определяемые формулой (3.10), носят практически «случайный» характер. Таким образом, изменение F за N периодов T будет

$$\frac{\Delta F}{F} \sim \sqrt{N} \frac{\rho^3}{l^3}. \quad (3.11)$$

Общий путь, который проходит частица по x прежде, чем существенно изменится F (считая, что $l \sim a$, где a — путь, проходимый за один период), равен

$$L = Na \sim \frac{a^7}{\rho^6} \sim \frac{a}{\theta^6}. \quad (3.12)$$

Так, например, если $a \sim 10^2$ см и $\theta \sim 10^{-2}$, то путь частицы в поле, изображенном на рис. 6, будет порядка 10^{14} см.

Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев

**О КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ
РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ***

Кинетическое уравнение, описывающее усредненное по ларморовскому вращению движение ионов плазмы в магнитном поле в отсутствие столкновений [1], обобщено на нестатический случай. Система уравнений для низших моментов функций распределения электронов и ионов аналогична уравнениям двухжидкостной гидродинамики. Хотя формально длина свободного пробега бесконечна, но ее роль играет ларморовский радиус иона (электрона). С помощью полученных уравнений исследованы волновые решения, соответствующие магнито-гидродинамическим и звуковым колебаниям. При достаточно большой анизотропии тензора давлений возникает неустойчивость, приводящая к нарушению однородности плазмы.

Изучение движения полностью ионизованной плазмы в сильных электромагнитных полях при учете собственных полей с помощью кинетического уравнения весьма затруднительно. Обычное гидродинамическое рассмотрение справедливо лишь при больших плотностях и низких температурах, когда свободный пробег до столкновения много меньше характерного размера. Недавно Чу, Гольдбергер и Лоу [2] рассмотрели случай разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле, в пренебрежении столкновениями. Это рассмотрение показало, что разложение в кинетическом уравнении по $\frac{M}{e}$ (M — масса иона, e — заряд) приводит к замкнутой системе уравнений для низших моментов функции распределения, формально анало-

* Работа выполнена в 1957 г.

гичной системе уравнений магнитной гидродинамики. Однако это справедливо лишь для движений плазмы поперек магнитного поля.

Такое сходство результатов, полученных в двух, казалось бы, совершенно противоположных случаях, объясняется тем, что магнитное поле, «заворачивая» ионы, симметризует распределение их скоростей в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. В этом смысле действие магнитного поля аналогично влиянию столкновений.

В настоящей заметке выводятся уравнения гидродинамики двух жидкостей (ионной и электронной), исходя из кинетического уравнения, описывающего усредненное по ларморовскому вращению движение ионов (электронов).

Кинетическое уравнение для стационарного случая было получено С. Т. Беляевым [1]. Для вывода уравнений рассматриваемого квазигидродинамического приближения необходимо сначала обобщить указанное уравнение на нестационарный случай.

§ 1. Кинетическое уравнение

Поведение системы заряженных частиц в электрическом и магнитном полях при отсутствии столкновений описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f + \frac{e}{M} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.1)$$

Решением этого уравнения является произвольная функция от первых интегралов системы уравнений характеристик

$$dt = \frac{d\mathbf{r}}{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{\frac{e}{M} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right)}, \quad (1.2)$$

представляющей собой уравнения движения отдельной заряженной частицы в полях \mathbf{E} и \mathbf{B} .

В случае, если поля медленно меняются в пространстве и во времени, решение уравнений (1.2) можно получить разложением по степеням $\frac{R}{L}$ и $\frac{1}{\omega T}$, где R и ω — ларморовский радиус и ларморовская частота, а L и T — характерный размер и характерное время задачи.

Такое разложение для случая статических полей с точностью до членов порядка $\frac{1}{\omega}$ проведено Н. Н. Боголюбовым и Д. Н. Зубаревым [3].

Для наших целей необходимо, однако, найти аналогичное разложение уравнений движения одной частицы в перемен-

ных полях. Для этого воспользуемся результатами С. И. Брагинского (не опубликовано).

В качестве нулевого приближения выберем движение, представляющее собой ларморовское вращение вокруг центра, движущегося со скоростью $c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}$. Вслед за этим перейдем к нахождению первого («дрейфового») приближения.

Введем локальную ортогональную систему координат, связанную с магнитным полем: $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

$$\varepsilon_0 = [\varepsilon_1 \varepsilon_2], \quad \varepsilon_1 = [\varepsilon_2 \varepsilon_0], \quad \varepsilon_2 = [\varepsilon_0 \varepsilon_1],$$

где ε_0 направлен вдоль магнитного поля: $\varepsilon_0 = \frac{\mathbf{B}}{B}$. В выбранной системе координат скорость \mathbf{v} можно записать следующим образом:

$$\mathbf{v} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} + \varepsilon_0 v_{\parallel} + v_{\perp} (\varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \sin \alpha).$$

Произведем в (1.2) замену переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \bar{\mathbf{r}} + \frac{\bar{v}_{\perp}}{\omega} (\varepsilon_2 \cos \bar{\alpha} - \varepsilon_1 \sin \bar{\alpha}); \\ \alpha &= \bar{\alpha} + \frac{1}{\omega} (g_1 \cos \bar{\alpha} - f_1 \sin \bar{\alpha}) + \frac{\bar{v}_{\perp}}{\omega^2} (\varepsilon_1 \cos \bar{\alpha} + \varepsilon_2 \sin \bar{\alpha}) \nabla \omega + \\ &\quad + \frac{1}{2\omega} (g_2 \cos 2\bar{\alpha} - f_2 \sin 2\bar{\alpha}); \\ v_{\parallel} &= \bar{v}_{\parallel} - \frac{1}{\omega} \sum_{n=1,2} \frac{1}{n} \{-G_{4n} \cos n\bar{\alpha} + F_{4n} \sin n\bar{\alpha}\}; \\ v_{\perp} &= \bar{v}_{\perp} - \frac{1}{\omega} \sum_{n=1,2} \frac{1}{n} \{-G_{5n} \cos n\bar{\alpha} + F_{5n} \sin n\bar{\alpha}\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Новые переменные \bar{v}_{\parallel} , \bar{v}_{\perp} , $\bar{\mathbf{r}}$, $\bar{\alpha}$ в дальнейшем будем называть дрейфовыми переменными. Опуская несложные выкладки, напомним окончательный результат

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{\perp}}{dt} &= \frac{\bar{v}_{\perp}}{2\omega} \frac{d^0 \omega}{dt}; \\ \frac{d\bar{v}_{\parallel}}{dt} &= \left(\varepsilon_0, \frac{e}{M} \mathbf{E} - \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{2\omega} \nabla \omega - \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} - \bar{v}_{\parallel} \frac{d^0 \varepsilon_0}{dt} \right); \\ \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} &= \varepsilon_0 \bar{v}_{\parallel} + \frac{1}{\omega} \left[\varepsilon_0, -\frac{e}{M} \mathbf{E} + \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{2\omega} \nabla \omega + \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} + \bar{v}_{\parallel} \frac{d^0 \varepsilon_0}{dt} \right]; \\ \frac{d\bar{\alpha}}{dt} &= -\omega, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mathbf{w} = c \frac{[\mathbf{E} \mathbf{B}]}{B^2}$;

$$\frac{d^0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_{\parallel} (\boldsymbol{\varepsilon}_0 \nabla) + (\mathbf{w} \nabla).$$

Полученные уравнения имеют наглядный смысл. Первое уравнение выражает адиабатическую инвариантность величины $\bar{\mu} = \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{2B}$. Второе и третье уравнения описывают движение вдоль и поперек магнитного поля под действием силы

$$\mathbf{F} = eE - \frac{M\bar{v}_{\perp}^2}{2\omega} \nabla\omega - M \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} - M \bar{v}_{\parallel} \frac{d^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt}.$$

Сила $-M \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} - M \bar{v}_{\parallel} \frac{d^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt}$ является силой инерции; ее появление связано с тем, что движение рассматривается в движущейся криволинейной системе координат.

Вместо того, чтобы проводить замену (1.3) в кинетическом уравнении, воспользуемся связью между (1.1) и (1.2).

Тогда в новых переменных \bar{v}_{\parallel} , $\bar{\mu} = \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{2B}$, $\bar{\alpha}$, \mathbf{r} , t для $f = \bar{f}(\bar{v}_{\parallel}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\alpha}$, \mathbf{r} , t) получим

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla \bar{f} + \frac{d\bar{v}_{\parallel}}{dt} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}_{\parallel}} + \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\alpha}} = 0.$$

Здесь учтено, что $\frac{d\bar{\mu}}{dt} = 0$. Величины $\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}$, $\frac{d\bar{v}_{\parallel}}{dt}$, $\frac{d\bar{\alpha}}{dt}$ определяются из (1.4).

В первом приближении естественно положить, что f не зависит от $\bar{\alpha}$ (это можно обосновать, вычислив члены первого приближения для $\frac{d\bar{v}_{\parallel}}{dt}$);

Окончательно получаем

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \bar{v}_{\parallel} (\boldsymbol{\varepsilon}_0 \nabla \bar{f}) + (\mathbf{w} \nabla \bar{f}) + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \frac{e}{M} \mathbf{E} - \bar{\mu} \nabla \omega - \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}_{\parallel}} = 0. \quad (1.5)$$

§ 2. Уравнение макроскопического движения плазмы

Умножая (1.5) на различные степени скоростей и затем интегрируя по пространству скоростей, можно получить бесконечную «зацепляющуюся» систему уравнений для моментов.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} n &= B \int f d\bar{v}_{\parallel} d\bar{\mu} d\bar{\alpha}; & nu &= B \int \bar{f} \bar{v}_{\parallel} d\bar{v}_{\parallel} d\bar{\mu} d\bar{\alpha}; \\ p &= MB \int \bar{f} (\bar{v}_{\parallel} - u)^2 d\bar{v}_{\parallel} d\bar{\mu} d\bar{\alpha}; \\ \mu &= MB \int \bar{f} \bar{\mu} d\bar{v}_{\parallel} d\bar{\mu} d\bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для обрезания цепочки моментов сделаем следующее допущение:

$$\int f (\bar{v}_{\parallel} - u)^3 \bar{\mu}^n d\bar{v}_{\parallel} d\bar{\mu} d\bar{\alpha} = 0,$$

что означает симметрию функций распределения относительно продольных локальных скоростей.

Интегрирование уравнения (1.5) и уравнения дрейфов, с учетом сделанного допущения, дает

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n (\varepsilon_0 u + \mathbf{w}) = 0; \quad (2.2)$$

$$M \frac{d^0 u}{dt} = -\frac{\omega}{n} (\varepsilon_0 \nabla \frac{p}{\omega}) + \left(\varepsilon_0, e\mathbf{E} - \frac{\mu \nabla B}{n} - M \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} \right); \quad (2.3)$$

$$\frac{d^0}{dt} \frac{p B^2}{n^3} = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{d^0}{dt} \frac{\mu}{n} = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega} \left[\varepsilon_0, -\frac{e}{M} \mathbf{E} + u \frac{d^0 \varepsilon_0}{dt} + \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p}{nM} (\varepsilon_0 \nabla) \varepsilon_0 + \frac{\mu \nabla B}{n} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) описывает усредненное движение центров кружков и может отличаться от скорости движения центра тяжести элементарного объема плазмы, равной, по определению, $n\mathbf{v} = \int f(r, v, t) \mathbf{v} d^3v$. Под интегралом перейдем к переменным \bar{v}_{\parallel} и \bar{v}_{\perp} по формулам (1.3) и выразим $f(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ через $F(\bar{v}_{\parallel}, \bar{v}_{\perp}, \mathbf{r})$; относительно последней величины известно, что она не зависит от α . Тогда получим (ср. [2])

$$\begin{aligned} n\mathbf{v} &= -\operatorname{rot} \frac{\mu c}{e} \varepsilon_0 + n \left\{ u \varepsilon_0 + \frac{1}{\omega} \left[\varepsilon_0, -\frac{e}{M} \mathbf{E} + u \frac{d^0 \varepsilon_0}{dt} + \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p}{nM} (\varepsilon_0 \nabla) \varepsilon_0 + \frac{\mu}{n} \nabla B \right\} = -\operatorname{rot} \frac{\mu c}{e} \varepsilon_0 + n\mathbf{v}_{\text{др}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

К уравнениям (2.2)—(2.6) для ионов и электронов добавим уравнения Максвелла, перейдя в них к дрейфовым переменным

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= -4\pi e (n_e - n_i); \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi e}{c} \left\{ -c \operatorname{rot} \frac{\mu_i + \mu_e}{e} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + (n_i \mathbf{v}_{др}^i - n_e \mathbf{v}_{др}^e) \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Последнее уравнение удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi e}{c} [n_i \mathbf{v}_{др}^i - n_e \mathbf{v}_{др}^e]; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} - 4\pi (\mu_i + \mu_e) \boldsymbol{\varepsilon}_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Остановимся вкратце на физическом смысле полученных уравнений.

Уравнения (2.9) описывают тот факт, что плазма обладает диамагнитными свойствами (магнитная проницаемость $\chi = 1 + \frac{4\pi(\mu_i + \mu_e)}{B}$). Движения ионной и электронной «жидкостей» [уравнения (2.3) и (2.6)] носят дрейфовый характер и совершаются под действием силы

$$\mathbf{F} = ne\mathbf{E} - Mn \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} - Mni \frac{d^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} - p (\boldsymbol{\varepsilon}_0 \nabla) \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mu \nabla B,$$

где $\mu \nabla B$ — сила, действующая на магнитный момент в магнитном поле; $-Mn \frac{d^0 \mathbf{w}}{dt} - Mni \frac{d^0 \boldsymbol{\varepsilon}_0}{dt} - p (\boldsymbol{\varepsilon}_0 \nabla) \boldsymbol{\varepsilon}_0$ — силы инерции, смысл которых разъяснен выше.

Уравнения (2.4) и (2.5) выражают закон адиабатического сжатия для «продольного» и «поперечного» давлений, соответственно ($\gamma = 3$, $\gamma = 2$).

Рассмотрение движений в направлении вдоль силовых линий магнитного поля при помощи этих уравнений требует выполнения специального условия симметрии функции распределения. При нарушении этого условия пользоваться уравнением (2.4) незаконно, а вся система уравнений (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) теряет смысл.

§ 3. Неустойчивость плазмы с неизотропным давлением

С помощью полученных уравнений рассмотрим волновые движения плазмы с частотами, много меньшими ларморовской частоты ионов, и с длинами волн $\lambda \gg R_H^i$.

Считаем, что выполнено условие квазинейтральности

$$n_i = n_e = n.$$

Невозмущенное состояние плазмы характеризуется величинами: n_0 — плотность; $u^{i,e} = 0$; $p_0 = p_0^i + p_0^e$ — давление вдоль поля $B_0 = B_{0z}$; $\mu_0 = \mu_0^i + \mu_0^e$ — магнитный момент единицы объема; $\mathbf{E}_0 = 0$.

Линеаризованные уравнения для малых возмущений n , $u^{i,e}$, μ , p , \mathbf{V} имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{n_0}{B_0} \frac{\partial B}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u}{\partial z} &= 0; \\ M \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{B_0}{n_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{B_0} - \frac{p_0 B}{B_0^2} \right) + \frac{\mu_0}{n_0} \frac{\partial B}{\partial z} - e E_z &= 0; \\ p &= \frac{p_0 B_0^2}{n_0^3} \left(\frac{3n_0^2 n}{B_0^3} - 2 \frac{n_0^3 B}{B_0^3} \right); \quad \mu = \frac{\mu_0}{n_0} n; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad n_i = n_e = n;$$

$$\operatorname{rot} B \left(1 + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) = 4\pi \frac{[B_0 \nabla \mu]}{B_0} + \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \frac{[B_0 \nabla B]}{B_0} + \frac{4\pi n M}{B_0^2} \left[B_0 \frac{d^0 w}{dt} \right].$$

Поправки к однородному невозмущенному фону ищем в виде $e^{i\omega t + ik_x z + ik_y y}$.

Подставляя эти возмущения в (3.1), получаем после простых преобразований следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left\{ 3 \frac{p_0}{M n_0} k_z^2 + v_\alpha^2 k_y^2 \left[\left(1 + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(1 + \frac{k_z^2}{k_y^2} \right) + \frac{4\pi p_0}{B_0^2} + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} \right] \right\} \omega^2 + \\ + 3 \frac{p_0}{M n_0} v_\alpha^2 k_z^2 k_y^2 \left[\left(1 + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(1 + \frac{k_z^2}{k_y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4\pi p_0}{B_0^2} + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} \right] - v_\alpha^4 \left(\frac{4\pi\mu_0}{B_0} \right)^2 k_z^2 k_y^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1a)$$

Здесь $v_\alpha^2 = \frac{B_0^2}{4\pi M n_0}$ — альфвеновская скорость.

Разрешим (3.1а) относительно ω^2 :

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \frac{1}{2} k_y^2 v_a^2 \left\{ 3 \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \frac{k_z^2}{k_y^2} + \left[\frac{4\pi p_0}{B_0^2} + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} + \left(1 + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(1 + \frac{k_z^2}{k_y^2} \right) \right] \right\} \pm \\ & \pm \frac{1}{2} k_y^2 v_a^2 \sqrt{\left\{ 3 \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \frac{k_z^2}{k_y^2} + \left[\frac{4\pi p_0}{B_0^2} + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} + \left(1 + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(1 + \frac{k_z^2}{k_y^2} \right) \right] \right\}^2 -} \\ & - 12 \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \frac{k_z^2}{k_y^2} \left[\frac{4\pi p_0}{B_0^2} + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} + \left(1 + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(1 + \frac{k_z^2}{k_y^2} \right) \right] + 4\pi \left(\frac{4\pi \mu_0}{B_0} \right)^2 \frac{k^2}{k_y^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.1а) видно, что аperiodические решения ($\omega^2 < 0$) возникают в том случае, когда свободный член меньше нуля, т. е. при

$$\left(\frac{4\pi \mu_0}{B_0} \right)^2 > 3 \cdot \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \left[\frac{4\pi p_0}{B_0^2} + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} + \left(1 + \frac{4\pi \mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{k_z^2}{k_y^2} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Считая, что $\frac{k_z}{k_y}$ может принимать любые значения (что для однородной задачи всегда выполнимо в рамках сделанных допущений), построим диаграмму устойчивости (рис. 1).

Как видно из диаграммы, неустойчивость плазмы связана с анизотропией давления.

Для выяснения физического смысла полученных ветвей, рассмотрим предельные случаи $\frac{k_z}{k_y} \ll 1$, $\frac{k_z}{k_y} \gg 1$.

Для чисто колебательной ветви [знак (+) в (3.2)] при условии $\frac{k_z}{k_y} \gg 1$ получаем соотношение

$$\omega^2 = 3 \frac{4\pi p_0}{B_0^2} v_a^2 k_z^2 = 3 \frac{p_0}{n_0 M} k_z^2,$$

описывающее одномерный ($\gamma = 3$) продольный звук. Другая ветвь, имеющая области мнимых ω [знак (-) в (3.2)], для случая $\frac{k_z}{k_y} \ll 1$ соответствует поперечному магнито-гидродинамическому звуку, распространяющемуся со скоростью

$$\left(\frac{p_{\perp}}{n_0 M} + \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M} \right)^{1/2}.$$

Остановимся подробнее на физическом смысле неустойчивости, возникающей на ветви ω^2 , соответствующей магнитному звуку.

Из рассмотрения критерия (3.3) следует, что при $\frac{k_x}{k_y} \ll 1$ апериодические решения лежат в области

$$\frac{4\pi\mu_0}{B_0} < 3 \frac{4\pi\rho_0}{B_0^2} + \sqrt{9\left(\frac{4\pi\rho_0}{B_0^2}\right)^2 + 3 \frac{4\pi\rho_0}{B_0^2}}.$$

Развитие этого вида неустойчивости можно качественно описать следующим образом. Пусть на однородном фоне произошло некоторое возмущение плотности. Так как плазма

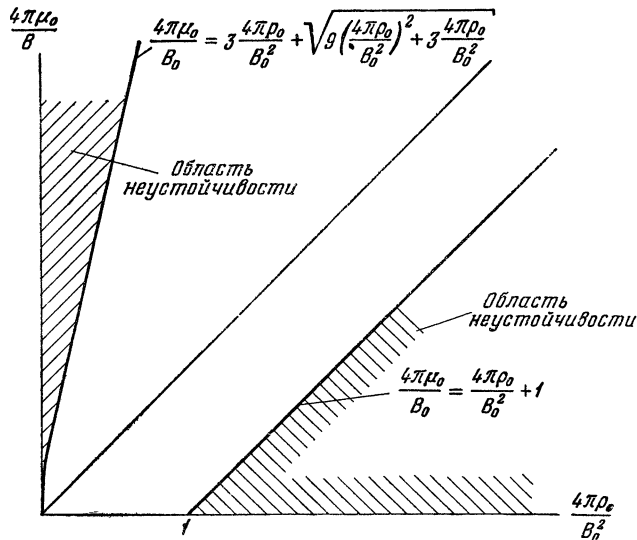


Рис. 1.

диамагнитна, то в местах увеличившейся плотности поле B уменьшается. Но в неоднородном поле на плазму действует сила $-\mu\nabla B$, которая и приводит к увеличению первоначального возмущения.

При $\frac{k_x}{k_y} \gg 1$ область неустойчивости определяется неравенством $\frac{4\pi\mu_0}{B_0} < \left(\frac{4\pi\rho_0}{B_0^2} - 1\right)$.

Этот случай соответствует большой кривизне силовых линий магнитного поля. Поэтому основную роль здесь играют центробежные силы. Это ясно видно из условия $\frac{4\pi\mu_0}{B_0} \ll \frac{4\pi\rho_0}{B_0^2}$ при малых ω , когда единственной действующей силой яв-

ляется $-p(\epsilon_0 \nabla) \epsilon_0 = -p \frac{R}{R^2}$, где R — радиус кривизны силовой линии.

В проведенном исследовании мы пользовались уравнением (2.4), применимом лишь для возмущений, оставляющих функцию распределения симметричной по продольным скоростям.

Расчет с помощью кинетического уравнения, проделанный А. А. Веденовым и Р. З. Сагдеевым [4], дает хорошее согласие с полученным выше результатом.

В заключение приносим благодарность академику М. А. Леонтовичу, профессору Д. А. Франк-Каменецкому и С. И. Брагинскому за ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Chew, M. Goldberger, F. Low., Proc. Roy. Soc., 236, 112 (1956).
 2. С. Т. Беляев, см. настоящий том, стр. 50.
 3. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Укр. матем. журн., 7, № 1, 5 (1955).
 4. А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев, см. настоящий том, стр. 278.
-

А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ ИОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

Рассмотрена возможность возникновения неустойчивости плазмы в магнитном поле вследствие анизотропии распределения ионов по скоростям.

В обычном газе с немаксвелловским распределением скоростей установление равновесия происходит за время порядка времени между столкновениями $\tau \sim \frac{l}{v}$. В плазме дальнедействующие силы могут вызвать коллективные движения, развивающиеся за времена, меньшие чем τ (примером таких коллективных движений является возникновение ленгмюровских колебаний в плазме при немаксвелловском распределении электронов по скоростям [1]). Влияние внешнего магнитного поля на эти эффекты было изучено в работе Е. Гросса [2] на основе кинетического уравнения.

Рассматривая электронную ветвь колебаний плазмы, Гросс, естественно, пренебрегал собственным магнитным полем волны, как эффектом порядка $\frac{v}{c}$. Положение существенным образом меняется, если речь идет об ионной («магнитогидродинамической») ветви. Действительно, электрические поля в низкочастотных колебаниях сильно экранированы движением электронов, и магнитные эффекты могут играть важную роль. В [3] из уравнений для моментов функции распределения в дрейфовом приближении были получены критерии возникновения специфической неустойчивости при сильной анизотропии темпе-

* Работа выполнена в 1957 г.

ратур — продольной и поперечной. Рассмотрение [3] соответствует гидродинамическому выводу дисперсионного уравнения. В настоящей работе этот вопрос исследуется с помощью кинетического уравнения и находятся критерии неустойчивости в пренебрежении столкновениями ($\frac{1}{\tau} \gg \nu$, где τ — характерное время, ν — частота столкновений). Учет собственного магнитного поля волны при достаточной анизотропии функции распределения приводит к «перекачке» энергии поперечного движения в энергию продольного движения (или наоборот) путем возбуждения коллективных движений, связанных с ионной ветвью плазменных колебаний.

Запишем кинетическое уравнение для ионов (электронов) в линеаризованном виде, удерживая члены первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m} \left\{ -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1)$$

Здесь $f_0(\mathbf{v})$ — невозмущенная функция распределения скоростей, которую мы выберем в виде

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{n_0}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{m^{3/2}}{2T_{\perp} \sqrt{2T_{\parallel}}} e^{-m \frac{v_x^2 + v_y^2}{2T_{\perp}} - m \frac{v_z^2}{2T_{\parallel}}};$$

f — поправка к функции распределения; \mathbf{H}_0 — внешнее однородное магнитное поле; Φ , \mathbf{A} — скалярный и векторный потенциалы возмущенного движения, определяющиеся из уравнений Максвелла.

Предположим, что магнитное поле направлено вдоль оси z , и введем цилиндрическую систему координат в пространстве скоростей: $\rho^2 = v_x^2 + v_y^2$, $v_x = \rho \cos \delta$, $\text{tg } \delta = \frac{v_y}{v_x}$, $v_y = \rho \sin \delta$.

Будем рассматривать решения, не зависящие от x . Применяя преобразования Лапласа по времени и преобразование Фурье по z , y , перепишем исходное уравнение для Фурье-образов функции распределения и потенциалов

$$(p + ik_z v_z) f_k + ik_y \rho \sin \delta f_k - \frac{e H_0}{mc} \frac{\partial f_k}{\partial \delta} - i \frac{e}{m} \bar{\Phi}_k \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{e}{mc} p \left(\mathbf{A}_k \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right) + \frac{e}{mc} i [\mathbf{v} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k]] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = f_k(0). \quad (2)$$

Решением этого уравнения, периодическим по δ с периодом 2π , будет

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{e}{m} \sum_n \frac{e^{i(n\delta - \frac{k_y}{\omega_H} \rho \cos \delta)}}{p + ik_z v_z - in\omega_H} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ i \left(k \cdot \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) \left(\bar{\Phi} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \bar{A} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \left(\bar{A} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right) (p + ikv) + \frac{m}{c} f_{\mathbf{k}}(0) \right\} e^{i \left(\frac{k_y \rho}{\omega_H} \cos \delta' - n\delta' \right)} d\delta'. \quad (3)$$

Далее выразим компоненты Фурье плотности частиц и тока при помощи (3).

Для вычисления этих компонент Фурье введем вспомогательный параметр τ

$$\frac{1}{p + ik_z v_z - in\omega_H} = \int_0^{\infty} \exp [(-p - ik_z v_z + in\omega_H) \tau] d\tau \quad (R_s p > 0)$$

и воспользуемся тождеством

$$\sum_{(n)} e^{in\psi} \frac{1}{2\pi} f(\varphi) e^{in\varphi} \int_0^{2\pi} g(\varphi') e^{-in\varphi'} d\varphi' = f(\varphi) g(\varphi + \psi).$$

Тогда, возвращаясь к декартовым переменным в пространстве скоростей и выполняя несложные выкладки, получим

$$\int \bar{f}_{\mathbf{k}} d\mathbf{v} = -\frac{en_0}{m} \int_0^{\infty} e^{-p\tau - \frac{k_z^2 T_{\perp}}{2m} \tau^2 - 2 \frac{k_y^2 T_{\perp}}{\omega_H^2 m} \sin^2 \frac{\omega_H \tau}{2}} d\tau \times \\ \times \left\{ \bar{\Phi} \left(\frac{k_y}{\omega_H} \sin \omega_H \tau + k_z^2 \tau \right) + \right. \\ \left. + i \frac{\bar{A}_x}{c} (1 - \cos \omega_H \tau) \frac{k_y}{\omega_H} \left(p + k_z^2 \frac{\tau}{m} (T_{\parallel} - T_{\perp}) \right) + i \frac{\bar{A}_y}{c} \sin \omega_H \tau \frac{k_y}{\omega_H} \times \right. \\ \left. \times \left(-p + k_z^2 \frac{\tau}{m} (T_{\parallel} - T_{\perp}) \right) + \right. \\ \left. + i \frac{\bar{A}_z}{c} k_z \tau \left(-1 - \frac{k_y^2}{\omega_H} \frac{\sin \omega_H \tau}{m} (T_{\perp} - T_{\parallel}) \right) \right\} + F(0), \quad (4)$$

$$\text{где } F(0) = \int d\mathbf{v} \int_0^{\infty} d\tau e^{-(p + ik_z v_z)\tau + i \frac{k_y}{\omega_H} [v_x (1 - \cos \omega_H \tau) - v_z \sin \omega_H \tau]}.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для $\int v_x \bar{f}_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}$ и $\int v_z \bar{f}_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}$, однако, ввиду их громоздкости, не будем их выписывать.

Далее воспользуемся тремя уравнениями Максвелла для потенциалов

$$\left(\frac{p^2}{c^2} + k_y^2 + k_z^2\right) \Phi_k = 4\pi e \int (f_{ik} - f_{ek}) d\nu$$

и т. п.

В правые части подставим найденные выражения для фурье-образов плотности заряда и компонент плотности тока. Компоненту A_y вектор-потенциала исключим, пользуясь условием Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Приравняв нулю детерминант нашей линейной системы, получим характеристическое уравнение, решив которое, можно найти инкремент $p = p(\mathbf{k})$. Однако в общем виде провести исследование корней характеристического уравнения довольно затруднительно, и мы ограничимся предельным случаем длинных волн (и, соответственно, малых p)

$$\frac{k_y^2 T_{\perp}}{m} \ll \omega_H^2, \quad \frac{k_z^2 T_{\perp}}{m} \ll \omega_H^2, \quad |p| \ll \omega_H. \quad (6)$$

Будем в характеристическом уравнении удерживать члены до порядка $\frac{1}{\omega_H^2}$ включительно. Это соответствует удержанию в детерминанте членов следующих порядков:

	Φ	A_x	A_z	
Φ	1	ω_H^{-1}	1	
A_x	ω_H^{-1}	ω_H^{-2}	ω_H^{-1}	
A_z	1	ω_H^{-1}	1	

Для малых p (учитывая лишь линейные члены) будем иметь ($k_x, k_y \neq 0$)

$$\frac{p}{k_x} = \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{M}} \frac{\frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{H_0^2} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right) - \left(1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{H_0^2} - \frac{8\pi n_0 T_{\parallel}}{H_0^2}\right) \frac{k_z^2}{k_y^2} - 1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{H_0^2} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}}}. \quad (7)$$

Следовательно, критерий неустойчивости ($p > 0$) имеет вид

$$\frac{8\pi n_0 T_{\perp} T_{\perp}}{H_0^2 T_{\parallel}} > 1 + \frac{8\pi T_{\perp} n_0}{H_0^2}. \quad (8)$$

В предельном случае $H_0 \rightarrow 0$ условие (8) переходит в $T_{\perp} > T_{\parallel}$.

Если же $k_y = 0$, то в уравнении (5) выпадают линейные в p члены, и учет квадратичных членов дает

$$\frac{p^2}{k_z^2} = -\frac{H_0^2}{4\pi n_0 M} \left\{ 1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{H_0^2} - \frac{8\pi n_0 T_{\parallel}}{H_0^2} \right\}. \quad (9)$$

Уравнение (9) соответствует альфвеновской магнито-гидродинамической ветви. При $\frac{8\pi n_0 T_{\parallel}}{H_0^2} > 1 + \frac{8\pi n_0 T_{\perp}}{H_0^2}$ появляется не-

устойчивость. При $H \rightarrow 0$ этот критерий переходит в $T_{\parallel} > T_{\perp}$. Полученные критерии количественно не совпадают с выведенными в [3] из гидродинамического приближения (ситуация здесь вполне аналогична имеющей место в вопросе о ленгмюровских продольных колебаниях электронов в плазме, где правильное дисперсионное уравнение получается лишь из кинетического рассмотрения).

Хотя количественно наши критерии не совпадают с полученными в [3], приведенная там наглядная физическая интерпретация возникновения неустойчивости остается в силе.

Вся изложенная теория является линейной и, естественно, не может дать ответа на вопрос о предельной амплитуде неустойчивости анизотропной плазмы.

Рассмотрение второго приближения, проведенное нами для ряда простых предельных случаев, показало, что возникновение описываемой неустойчивости приводит к перекачке кинетической энергии частиц (в объеме плазмы, много большем длины волны возмущения) из поперечного движения в продольное, если неустойчивость связана с тем, что $T_{\perp} > T_{\parallel}$, и обратно в противоположном случае. Поэтому представляется разумным предположить, что развитие неустойчивости происходит до тех пор, пока не выравняются энергии продольного и поперечного движения, т. е. пока не произойдет некоторое эффективное выравнивание поперечной и продольной «температур».

В заключение покажем, что в магнитной ловушке (системе с магнитными «пробками») для высокотемпературной плазмы, предложенной Г. И. Будкером [4], могут существовать области с анизотропией функции распределения, достаточной для возникновения рассмотренной неустойчивости.

Пусть $f(\varepsilon)$ — функция распределения ионов (электронов) по энергиям продольного (вдоль \mathbf{H}) движения в области минимального магнитного поля. Для простоты будем считать, что магнитные моменты всех частиц одинаковы.

В равновесии функция $f(\varepsilon)$ в рассматриваемой ловушке должна быть обрезана, т. е. обращаться в нуль при $\varepsilon \geq \varepsilon_{\text{макс}}$, где $\varepsilon_{\text{макс}}$ определяется условием $\varepsilon_{\text{макс}} = \mu (B_{\text{макс}} - B_{\text{мин}})$. Плотность ионов вдоль силовой линии меняется, как функция B , следующим образом.

$$n = \int_{\mu(B-B_{\text{мин}})}^{\varepsilon_{\text{макс}}} \frac{f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon - \mu(B - B_{\text{мин}})}} d\varepsilon. \quad (10)$$

Продольная температура на силовой линии равна

$$T_{\parallel} = \frac{1}{n} \int_{\mu(B-B_{\text{мин}})}^{\varepsilon_{\text{макс}}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon - \mu(B - B_0)}} [\varepsilon - \mu(B - B_0)] f(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (11)$$

Теперь воспользуемся критерием неустойчивости (8) для нашего случая

$$\begin{aligned} & 8\pi\mu^2 \left(\int_{\mu(B-B_{\text{мин}})}^{\varepsilon_{\text{макс}}} \frac{f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon - \mu(B - B_{\text{мин}})}} d\varepsilon \right)^2 > \\ & > \int_{\mu(B-B_{\text{мин}})}^{\varepsilon_{\text{макс}}} \frac{f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon - \mu(B - B_{\text{мин}}))}{\sqrt{\varepsilon - \mu(B - B_{\text{мин}})}} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

При $B \rightarrow B_{\text{макс}}$ это условие приближенно можно представить в виде

$$\begin{aligned} & 8\pi\mu^2 f(\varepsilon_{\text{макс}}) \sqrt{\varepsilon_{\text{макс}}} \left(\int_{\mu(B-B_{\text{мин}})}^{\varepsilon_{\text{макс}}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu(B - B_{\text{мин}})}} \right)^2 > \\ & > \int_{\mu(B-B_{\text{мин}})}^{\varepsilon_{\text{макс}}} \sqrt{\varepsilon - \mu(B - B_{\text{мин}})} d\varepsilon, \end{aligned}$$

или окончательно,

$$48\pi^2\mu^2 f(\varepsilon_{\text{макс}}) > \sqrt{\frac{B_{\text{макс}} - B}{B_{\text{макс}} - B_{\text{мин}}}}. \quad (13)$$

Если функция распределения имеет резкий край, т. е. $f(\varepsilon_{\text{макс}}) \neq 0$, то при B , достаточно близком к $B_{\text{макс}}$, всегда должно выполняться неравенство (13).

Естественно, что критерий (7) (а следовательно, и (8)), выведенный для однородного фона плотности, нужно с осторожностью применять к случаю таких неоднородных распределений плотности, как например, в системе с магнитными «пробками». Можно, однако, ожидать, что эти критерии будут применимы и здесь в том случае, если характерный размер неоднородности много больше длины волны рассматриваемой неустойчивости (приближение «геометрической оптики»).

Необходимо сделать еще одно замечание. При выводе соотношения (7) величины T_{\perp} и T_{\parallel} имели смысл истинных максвелловских температур. В случае системы с магнитными «пробками» роль температур играют средние энергии хаотического движения. Однако это обстоятельство не нарушает качественной справедливости наших результатов.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность академику М. А. Леонтовичу и профессору Д. А. Франк-Каменецкому за ценные советы и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev., 75, 1864 (1949).
 2. E. Gross, Phys. Rev., 82, 232 (1951).
 3. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, см. настоящий том, стр. 268.
 4. Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 3.
-

Б. Б. Кадошцев

МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ С «ГОФРИРОВАННЫМ» ПОЛЕМ*

В работе в дрейфовом приближении исследуется движение частиц в магнитных ловушках в отсутствие электрических полей и токов в плазме. Метод исследования заключается в усреднении уравнений движения по быстрому движению частиц вдоль силовых линий. Показано, что путем «гофрирования» магнитного поля можно добиться практической компенсации тороидального дрейфа частиц. В работе рассмотрено два конкретных варианта ловушек с «гофрированным» полем.

1. Одна из возможностей создания магнитной термоизоляции состоит в использовании различного рода магнитных ловушек, т. е. таких конфигураций магнитного поля, которые позволяют «запирать» частицы в ограниченном объеме. Представляет интерес произвести более подробное рассмотрение движения заряженных частиц в таких системах.

Ограничимся здесь случаем плавных магнитных полей, т. е. таких, которые мало меняются на длине ларморовского радиуса частиц. В этом случае можно воспользоваться усредненными уравнениями (см. [1,2]), описывающими движение центра ларморовского кружка. С точностью до $\frac{1}{H}$ они имеют вид [2]

$$\frac{du}{dt} = \frac{w^2}{2} \cdot \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \mathbf{h}; \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{uw}{2} \operatorname{div} \mathbf{h}; \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}u + c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2} + \frac{mcw^2}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H] + \frac{mcu^2}{eH} \left\{ \operatorname{rot} \mathbf{h} - \mathbf{h} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \right\}. \quad (3)$$

* Работа выполнена в 1956 г.

Здесь u — компонента скорости частицы вдоль магнитного поля; w — поперечная компонента скорости; $v^2 = u^2 + w^2$; \mathbf{h} — единичный вектор вдоль магнитного поля, $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H}$; \mathbf{r} — координата центра кружка; остальные обозначения — общепринятые.

Как видно из уравнения (3), движение частицы, или, вернее, центра ларморовского кружка, складывается из свободного движения вдоль силовой линии со скоростью u и дрейфа перпендикулярно к линии. Предположим, что электрическое поле не слишком велико, так что дрейф, вызванный электрическим полем, не превосходит магнитного. Тогда в уравнении (3) члены, описывающие дрейф, имеют порядок величины $\sim \frac{v^2}{\omega} \frac{1}{a} \sim v \frac{\rho}{a}$, где $\omega = \frac{eH}{mc}$ — циклотронная частота; a — характерный размер системы; ρ — ларморовский радиус. Первый член по порядку величины равен v , что в $\frac{a}{\rho}$ больше остальных. Таким образом, в этих условиях дрейф является намного более медленным процессом, чем движение по силовой линии.

В магнитной ловушке частица совершает финитное движение, т. е. она либо движется по замкнутой силовой линии, либо отражается от «магнитных пробок» [3] на концах силовой линии. Это движение является быстрым, и поэтому естественно произвести по нему усреднение с тем, чтобы исследовать чистый дрейф.

Предположим, что магнитное поле не зависит от времени. Тогда электрическое поле является потенциальным $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, и уравнения (1)–(3) допускают два интеграла движения

$$\frac{w^2}{H} = I = \text{const}, \quad m \frac{u^2 + w^2}{2} + e\varphi = \epsilon = \text{const}. \quad (4)$$

Введем для удобства криволинейные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 , такие, чтобы координатные линии ξ_3 совпали с магнитными силовыми линиями, и преобразуем (3) к этим, вообще говоря, неортогональным координатам.

Как известно, в криволинейной системе координат каждый вектор \mathbf{A} может быть задан либо контравариантными координатами A^i , т. е. коэффициентами разложения \mathbf{A} по координатным векторам $\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}$, $\mathbf{A} = A^i \mathbf{R}_i$, либо ковариантными $A_i = (\mathbf{A} \mathbf{R}_i)$, причем они связаны между собой очевидным соотношением $A_i = A^j g_{ji}$, где $g_{ij} = (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j)$ — метрический тен-

зор. Так как $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial \xi_i} \cdot \frac{d\xi_i}{dt} = \mathbf{R}_i \frac{d\xi_i}{dt}$, то контравариантные компоненты $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ равны $\frac{d\xi_i}{dt}$.

В принятом нами первом приближении по $\frac{1}{H}$ в компоненте $\frac{d\xi_3}{dt}$ можно пренебречь дрейфом, т. е. положить $\frac{d\xi_3}{dt} = uh^3$.

Выражая отсюда dt через $d\xi_3$, запишем уравнения для двух других компонент в виде

$$\frac{d\xi_i}{d\xi_3} = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}uh^3} \left\{ -c \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} h_k - \frac{mcw^2}{2eH^3} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} h_k + \frac{mcu^2}{eH} \frac{\partial h_k}{\partial \xi_j} \right\}. \quad (5)$$

Здесь $i = 1, 2$; $g = \text{Det } g_{ik}$; e^{ijk} — полностью антисимметричный единичный псевдотензор. Отсюда, исключая w^2 и φ с помощью соотношений (4), получаем

$$\frac{d\xi_i}{d\xi_3} = \frac{mc}{e\sqrt{g}Hh^3} \cdot e^{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (uh_k). \quad (6)$$

Интегрируя (6) вдоль силовой линии, получим суммарный дрейф частицы при прохождении заданного участка силовой линии

$$\Delta \xi_i = \int \frac{mc}{e\sqrt{g}Hh^3} e^{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (uh_k) d\xi_3. \quad (7)$$

Так как вектор \mathbf{h} лежит на силовой линии и $\mathbf{h}^2 = 1$, то его контравариантные компоненты h^1 и h^2 равны нулю, а $h^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}$. Ковариантные компоненты вектора \mathbf{h} равны $h_i = g_{ik} h^k = \frac{g_{i3}}{\sqrt{g_{33}}}$.

Из условия $\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h^3 H \sqrt{g}) = 0$ следует, что выражение $h^3 H \sqrt{g} = \frac{H \sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}}$ не зависит от ξ_3 , и, следовательно, его можно вынести из-под знака интеграла (7) (напомним, что вдоль силовой линии координаты ξ_2, ξ_3 остаются постоянными). Таким образом,

$$\Delta \xi^i = \frac{mc \sqrt{g_{33}}}{e \sqrt{g} H} e^{ijk} \int \frac{\partial}{\partial \xi_j} (uh_k) d\xi_3. \quad (8)$$

Предположим, что без учета дрейфа частица совершает периодическое движение, либо двигаясь по замкнутой силовой линии, либо отражаясь от «пробок» (мы не будем рассматривать здесь сложных конфигураций магнитного поля

с незамкнутыми силовыми линиями и без «пробок»). Тогда в (8) интеграл от $\frac{\partial}{\partial \xi_3}(uh_k)$ сводится к подстановке на концах линии и исчезает при полном обходе силовой линии или при отражении от «пробки» (где $u = 0$). Таким образом, обозначая через $T(\xi_1, \xi_2)$ время пролета по силовой линии в одну сторону, приходим к следующим усредненным уравнениям дрейфа:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{mc\sqrt{g_H}}{eH\sqrt{g}T} \frac{\partial J}{\partial \xi_2}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{mc\sqrt{g_H}}{eH\sqrt{g}T} \frac{\partial J}{\partial \xi_1}, \quad (9)$$

где $J = \int u dl$, а $dl = \sqrt{g_{33}} d\xi_3$ есть элемент длины силовой линии.

Из уравнения (9) следует $\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0$, т. е., как и следовало ожидать, дрейф происходит таким образом, что при этом сохраняется продольный инвариант J .

Приведенный здесь прямой вывод продольного инварианта из дрейфовых уравнений обладает тем преимуществом, что он справедлив и для полей без осевой симметрии, которые в основном и будут интересовать нас в дальнейшем. Итак, усредненные траектории ларморовских кружков на поверхности ξ_1, ξ_2 даются выражением $J(\xi_1, \xi_2) = \text{const}$. Если электрическое поле отсутствует, то оно сводится к условию

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \text{const}, \quad (10)$$

где $\Phi = J/v = \int F(H) dJ$ есть интеграл вдоль силовой линии от функции $F(H) = u/v = \sqrt{1 - \frac{JH}{v^2}}$, зависящий только от магнитного поля. Уравнение (10) и будет положено в основу дальнейшего исследования движения частиц в магнитных ловушках.

2. Рассмотрим для примера движение частиц в искривленной ловушке с магнитными пробками. Эта задача представляет интерес по той причине, что практически невозможно создать поле с абсолютной осевой симметрией. Наличие же небольших ошибок неминуемо приведет к искривлению магнитного поля, вследствие чего частицы в ловушке будут испытывать тороидальный дрейф. Возникает вопрос, как отразится этот дрейф на запертии частиц в ловушке. Пусть магнитное поле ловушки с пробками искривлено так, как это показано на

рис. 1. Длину ловушки обозначим через L , ее радиус — через a , радиус кривизны оси — через R . Пусть, далее, H_0 — магнитное поле в основной части неискривленной системы. Наша задача заключается в вычислении интеграла Φ .

Этот интеграл складывается из двух частей: интеграла по основной части, где поле почти однородно, и части, возникающей от пробки. Пробочную часть интеграла вычислить довольно трудно, но если предположить, что поле H_m в пробке значительно больше H_0 , то основная часть интеграла будет обусловлена заштрихованной на рис. 1 областью (непосред-

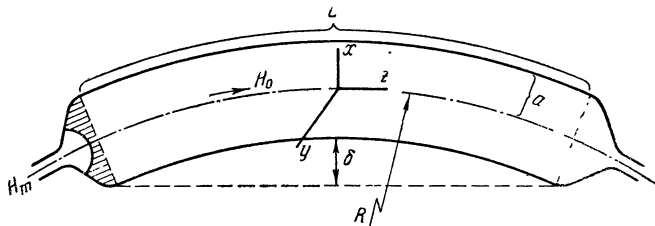


Рис. 1.

ственно около пробки поле приблизительно радиально симметрично, и интеграл по этой области дает константу).

Интеграл по отрезку линии, попадающей в заштрихованную часть, равен по порядку величины $F(H_0) \frac{x^2 + y^2}{a}$ (координаты выбраны, как показано на рис. 1). Вычислим теперь часть интеграла по основной области. При искривлении поле в этой части системы равно $H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right)$, а длина соответствующего участка силовой линии $-L \left(1 + \frac{x}{R}\right)$. Таким образом, получаем уравнение для траекторий частиц в виде

$$2F(H_0) \cdot \frac{x^2 + y^2}{a} + L \left(1 + \frac{x}{R}\right) F \left(H_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right)\right) = \text{const.}$$

Считая R очень большой величиной, получаем с точностью до a/R

$$x^2 + y^2 + x \cdot \frac{aL}{4R} \cdot \frac{2v^2 - 1H_0}{v^2 - 1H_0} = \text{const.}$$

Таким образом, траектория частицы в поперечном сечении ловушки является окружностью с центром, смещенным относительно оси z на величину

$$x_0 = - \frac{aL}{8R} \cdot \frac{2v^2 - 1H_0}{v^2 - 1H_0}. \quad (11)$$

Если $L/R \ll 1$, то это смещение мало для большинства частиц. Однако для частиц с малым u и $x_0 = -\frac{aL}{8R} \frac{v^2}{u^2}$, что становится больше a при $u/v < \sqrt{\frac{L}{8R}}$. При этом траектории частиц превращаются в разомкнутые кривые, и соответствующие частицы оседают на стенки.

Здесь следует, пожалуй, отметить одно обстоятельство. Тот факт, что имеются частицы, выдрейфовывающие на стенки, не вызывает удивления. Очевидно, например, что если u достаточно мало, частица может осесть на стенку за время $t = L/u$ пролета между пробками. Для этого достаточно лишь, чтобы было $v_d t > 2a$, где v_d — дрейфовая скорость, равная, согласно (3), $v_d \cong v \frac{\rho}{2R}$. Однако для таких частиц $\sim u/v \sim \frac{1}{4} \frac{L}{R} \cdot \frac{\rho}{a}$ намного меньше найденной выше доли частиц $\sim \frac{u}{v} \sim \sqrt{\frac{L}{8R}}$. Это означает, что основная часть оседающих на стенки частиц успевает совершить много колебаний между пробками.

Оценим теперь скорость ухода частиц на стенки. Будем считать распределение по скоростям сферически симметричным, что справедливо при достаточно малой утечке частиц. Число частиц с $u/v < \sqrt{\frac{L}{8R}}$ равно по порядку величины $N \sqrt{\frac{L}{8R}}$, где N — полное число частиц. Скорость дрейфа, согласно (3), равна $\sim v \frac{\rho}{2R}$, отсюда поток частиц на стенки за счет тороидального дрейфа

$$\sim \frac{N}{\pi a^2 L} \sqrt{\frac{L}{8R}} \cdot v \frac{\rho}{2R} \cdot L \cdot 2a.$$

Потребуем, чтобы эта утечка была меньше диффузионной. Диффузионный поток равен по порядку величины $\sim aL \cdot \frac{\rho^2}{\tau} \cdot \frac{dn_0}{dr} \sim 10N \frac{\rho^2}{a^2 \tau}$, где n_0 — плотность частиц, $1/\tau$ — средняя частота кулоновских соударений, а множитель порядка 10 введен нами для того чтобы учесть крутой спад всех величин у стенок системы (см. [4]). Отсюда $\sqrt{\frac{L}{8R}} \cdot v \frac{\rho}{\pi R a} < 10 \frac{\rho^2}{a^2} \frac{1}{\tau}$, или $\frac{L}{R} < 10 \left(\frac{L}{a} \frac{\rho}{\lambda} \right)^{2/3}$, где $\lambda = v\tau$ — кулоновский пробег.

Но $\frac{L}{R} \sim \frac{\delta}{L}$ (см. рис. 1), т. е. имеет порядок неточности в осевой симметрии поля. Таким образом, ошибка, которая

может быть допущена в ловушке с магнитными пробками при условии, чтобы тороидальным дрейфом можно было пренебречь, должна быть

$$\delta/L < 10 \left(\frac{L}{a} \cdot \frac{\rho}{\lambda} \right)^{2/3} \quad (12)$$

Положим, например, $L/a \sim 10^2$, $\rho \sim 1$ см, плотность $n_0 \sim 10^{15}$, температуру $T \sim 30$ кэв, тогда $\lambda \sim 10^6$ см и $\delta/L < 10^{-2}$. Как видим, для компенсации тороидального дрейфа осевая симметрия ловушки должна выдерживаться с достаточно большой точностью.

3. Как было отмечено в предыдущем пункте, наличие пробок приводит к компенсации тороидального дрейфа у большинства частиц вследствие вращения их вокруг оси ловушки. При этом дрейф в пробках обусловлен, грубо говоря, тем, что силовые линии, лежащие на периферии, являются более длинными, чем центральные. Возникает мысль усилить стабильность движения частиц путем еще большего удлинения периферийных силовых линий, т. е. путем усиления дрейфа частиц вокруг оси симметрии. Для этого можно наложить на основное поле H_0 некоторое дополнительное периодическое поле H' , возрастающее к периферии.

Для упрощения исследования рассмотрим только частицы с $u/v = 1$. Введем цилиндрическую систему координат с осью z , направленной по H_0 . Обозначим через ψ потенциал магнитного поля $H = \nabla\psi$. Из $\text{div} H = 0$ следует: $\Delta\psi = 0$. Выберем ψ в виде $\psi = H_0 z - \frac{A}{k} \sin kz I_0(kr)$, где $I_0(kr)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Отсюда $H_z = H_0 - A \cos kz \cdot I_0(kz)$, $H_r = -A \sin kz I_0'(kr) = A \sin kz \cdot I_1(kr)$, т. е. мы выбрали поле H' , симметричное относительно оси z и периодичное по z .

Вычисляем опять интеграл Φ , который в рассматриваемом нами случае сводится к длине силовой линии. Поле H будем считать малым, в соответствии с чем вычисления будем производить в виде разложения по H'/H_0 с учетом членов до второго порядка включительно.

Уравнение силовой линии с необходимой для нас точностью имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{H_r}{H_z} \simeq \frac{A}{H_0} \sin kz \cdot I_1(kr).$$

откуда элемент длины силовой линии

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2} \cong \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right\} dz \cong \\ \cong \left\{ 1 + \frac{A^2}{2H_0^2} \cdot \sin^2 kz I_1^2(kr_0) \right\} dz.$$

Опуская значок 0 у r , получаем для Φ следующее выражение:

$$\Phi(r) = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{A^2}{H_0^2} I_1^2(kr) \right\} L. \quad (13)$$

Как видим, если длина L достаточно велика, зависимость Φ от r является гораздо более сильной, чем при наличии только одной пары пробок.

Это означает, что использование гофрированного магнитного поля позволяет осуществить некоторую компенсацию тороидального дрейфа и тем самым приводит к возможности создания магнитных ловушек нового вида. Простейшая из таких ловушек представляет собой гофрированный тор. Но так как решение задачи о дрейфе частиц в такой системе представляет значительные трудности, то мы рассмотрим здесь две более простые ловушки, в которых гофрированная и искривленная части пространственно разделены.

Первая, которая может быть названа запертой ловушкой с магнитными пробками, изображена на рис. 2. Она представляет собой две гофрированные ловушки с пробками, соединенные между собой «рукавами» A .

Рассмотрим, как будут двигаться частицы в такой системе. Обозначим через α отношение $\frac{H_0}{H_m}$ поля в основной части к полю в пробке. Поле в рукаве положим для простоты равным также H_0 . Тогда через пробки в рукава будут вылетать частицы только с $p = \frac{IH_0}{v^2} < \alpha$. Будем считать, что α достаточно мало; тогда для исследования дрейфа можно использовать уравнение (13). Отсюда для траекторий получаем уравнение

$$\frac{L}{4} \frac{A^2}{H_0^2} I_1^2(kr) + \pi x = \text{const}. \quad (14)$$

Здесь второе слагаемое в левой части учитывает дрейф в рукаве. Как видим, при достаточно большом L траектории частиц будут мало отличаться от окружностей, а именно, если примем $\left[\frac{A}{H_0} I_1(ka) \right]^2 \sim 1/3$, $ka \sim 3$, то $\frac{d}{da} \left[\frac{A}{H_0} I_1(ka) \right]^2 \sim \frac{1}{a}$.

и для смещения δr получим $\frac{\delta r}{a} \sim 10a/L$. Если примем $L/a \sim 10^2 \div 10^3$, то это смещение будет пренебрежимо мало. Следовательно, частицы, лежащие в конусе скоростей $p < \alpha$, хотя и пролетают через рукава, но не могут выдрейфовать на стенки, так как подвергаются более энергичному круговому дрейфу в гофрированной части.

Основным процессом, уводящим частицы из такой системы, являются соударения, которые происходят в рукавах. Поэтому, если сделать объем рукавов намного меньше объема прямых частей, то пробки будут в значительной степени заперты.

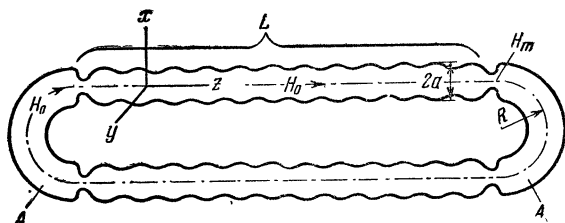


Рис. 2.

Рассмотрим более подробно утечку частиц из системы. Пусть n_0 — плотность частиц в основной части ловушки; тогда плотность в фазовом пространстве будет равна $n_0 \frac{3}{4\pi v_T^3}$, где v_T — некоторая средняя тепловая скорость. Как известно, в случае кулоновских столкновений «максвеллизация» плазмы носит характер диффузии в пространстве скоростей, причем коэффициент диффузии равен по порядку величины $D \sim \frac{v_T^2}{\tau}$, где $1/\tau$ — частота кулоновских столкновений.

Для упрощения задачи заменим конус $p < \alpha$ в пространстве скоростей на цилиндр $w^2 < \alpha v_T^2$.

Обозначим через n_α плотность частиц со скоростями, лежащими в этом цилиндре. Тогда стационарное решение диффузионного уравнения, которое равно $n_0 \frac{3}{4\pi v_T^3}$ при $w \sim w_T$ и равно $n_\alpha \frac{3}{4\pi v_T^3}$ на границе цилиндра, есть

$$n(w) \cong \frac{3}{4\pi v_T^3} n_0 \left\{ 1 - \frac{n_0 - n_\alpha}{n_0 \ln \sqrt{\alpha}} \cdot \ln \frac{w}{v_T} \right\}. \quad (15)$$

Отсюда находим полный поток частиц в конус $p < \alpha$ из обеих гофрированных частей

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N}{\partial t} &= 2\pi \sqrt{\alpha} v_T \cdot 2v_T \cdot D \frac{\partial n}{\partial w} \Big|_{w=\sqrt{\alpha} v_T} \cdot 2\pi a^2 L := \\ &= \frac{6}{\tau |\ln \alpha|} \cdot 2\pi a^2 L (n_0 - n_\alpha). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что при $n_\alpha = 0$ это выражение совпадает с утечкой, полученной в [3] для незапертой ловушки.

В рукавах A такое же число частиц должно выходить из конуса $p < \alpha$. Аналогично (16) получаем

$$-\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{6}{\tau_1 |\ln \alpha|} \cdot \pi a^2 \cdot 2\pi R (n_\alpha - n_1), \quad (17)$$

где n_1 — плотность частиц в рукавах.

Частицы, вышедшие в рукавах из конуса $p < \alpha$, выдрейфовывают на стенки, так как при таком сильном искривлении поля дрейф в пробках не способен стабилизировать движение [как видно из (11) при $L \sim \pi R$, $x_0 \sim a$]. Это приводит к утечке частиц

$$-\frac{\partial N_1}{\partial t} = n_1 v_a \cdot 2\pi R \cdot 2a \sim n_1 v_T \cdot \rho/R \cdot 4\pi \cdot Ra. \quad (18)$$

Приравнивая между собой (16)—(18), найдем все неизвестные величины. Из (16) и (18) имеем

$$n_0 - n_\alpha = \frac{\tau}{\tau_1} \frac{\pi R}{L} (n_\alpha - n_1).$$

Предположим, что $\pi R/L \ll 1$, тогда, с учетом $\tau/\tau_1 \ll 1$, получаем $n_\alpha \approx n_0$. Приравнивая (17) и (18), получаем

$$n_1 = \frac{n_0}{1 + \frac{|\ln \alpha| \rho \lambda_1}{3\pi a R}},$$

где $\lambda_1 = v_T \tau_1$ — средний свободный пробег в рукаве. Предположим, что выполнено условие $\rho \lambda_1 / a R \gg 1$. Тогда $n_1 \ll n_0$, и, следовательно, в рукавах будут присутствовать только частицы с $p < \alpha$. Отсюда $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} \alpha$, и из (17) получаем для утечки

$$-\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{6}{\tau |\ln \alpha|} \cdot n_0 \cdot 2\pi a^2 L \cdot \alpha \frac{\pi R}{L}, \quad (19)$$

что в $\alpha \frac{\pi R}{L}$ меньше, чем утечка в открытые «пробки». По-

лагая, например, $\alpha \sim 1/3$, $\frac{L}{a} \sim 10^2$, $R \sim 2a$, получим занижение ухода через пробки на два порядка. Учитывая, что каждая частица уносит с собой энергию kT , получаем для отношения γ энерговыделения к потерям в такой системе

$$\gamma = \frac{\langle \sigma \rangle \cdot q \cdot n_0 \lambda |\ln \alpha|}{kT \cdot 6} \cdot \frac{1}{\alpha \pi R} \sim 10^{20} \frac{\langle \sigma \rangle T \text{ кэв } L}{\alpha R}, \quad (20)$$

где $\langle \sigma \rangle$ — усредненное по максвелловскому распределению поперечное сечение реакции; $q \sim 10^3 \text{ кэв}$ — выделяющаяся при одном элементарном акте энергия; $\lambda \approx \frac{10^{18} T^2}{n_0}$ — куло-

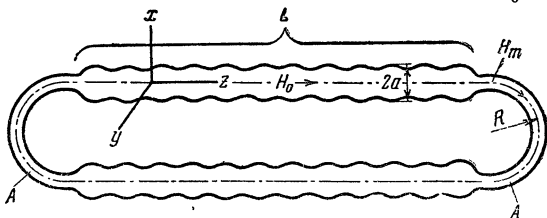


Рис. 3.

новский пробег. Например, при $T = 30 \text{ кэв}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ получаем $\gamma \sim 10^{-4} L/R$ для чистого дейтерия и $\gamma \sim 10^{-2} L/R$ для смеси дейтерия с тритием. Отсюда видно, что для создания $\gamma < 1$ система должна быть достаточно длинной.

Вторая система, которую мы здесь опишем, является скорее модифицированным тором. Она представляет собой две гофрированные ловушки с пробками, соединенные между собой «перемычками» А.

Предположим опять, что $\alpha = H_0/H_m$ достаточно мало. Введем координаты, как показано на рис. 3, и учтем, что в перемычках силовые линии, а вместе с ними и координатные линии сжимаются в $1/\sqrt{\alpha}$ раз. Тогда уравнение траекторий запишется в виде:

$$\frac{1}{4} L \frac{A^2}{H_0^2} I_1^2(kr) + \pi (R + \sqrt{\alpha} x) \sqrt{1 - p' \left(1 - \frac{x\sqrt{\alpha}}{R}\right)} = \text{const}, \quad (21)$$

где $p' = \frac{IH_m}{v^2} = p/\alpha$. Согласно (21), траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к смещенным окружностям. Положим опять $\left[\frac{A}{H_0} I_1(ka)\right]^2 \sim \frac{1}{3}$, $ka \sim 3$, тогда $\frac{d}{da} \left[\frac{A}{H_0} I_1(ka)\right]^2 \sim \frac{1}{a}$, и для смещения x_0 получим $x_0/a \sim 4 \frac{\Delta}{L}$,

где Δ — изменение второго слагаемого в левой части (21) на длине $\sim a$. Величина x_0 максимальна для частиц с $1 - p' < \frac{a\sqrt{\alpha}}{R}$, так как в этом случае второе слагаемое в (21) может обращаться в нуль, а именно: $x_0/a \sim 10 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}}$. Доля таких частиц $\sim \sqrt{1 - p'} \sim \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}}$. Траектории остальных частиц смещаются на величину $x_0/a \sim 10 \frac{a\sqrt{\alpha}}{L}$. Отсюда для среднего смещения получаем.

$$\frac{\bar{x}_0}{a} \cong \frac{10}{L} \left\{ R \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}} \cdot \sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}} + a\sqrt{\alpha} \right\} = \frac{20a\sqrt{\alpha}}{L}.$$

Наличие таких смещений у частиц с $p < \alpha$ приводит к увеличению коэффициента температуропроводности $\chi \cong \rho^2/\tau$ на величину $\alpha \cdot \frac{\bar{x}_0^2}{\tau} \sim \frac{\rho^2}{\tau} \left[\frac{40a^2\alpha}{L_0\rho} \right]^2$, где $L_0 \cong 2L$ — периметр рассматриваемой нами системы. Пусть $a/\rho \sim 10^2$, $\alpha \sim 1/4$, тогда при $L_0 \sim 10^3a$ влияние торoidalного дрейфа на теплопроводность будет полностью скомпенсировано (то же самое относится и к системе, рассмотренной в предыдущем пункте). Кроме теплопроводности, в системе, изображенной на рис. 3, существует еще другой механизм утечки энергии, а именно: частицы с достаточно малым отношением u/v успевают осесть на стенки за время пролета через перемычку. Мы опять предположим, что температура около стенок падает на длине $\sim a/10$. Тогда частицы с $u < \frac{\pi R \cdot v\alpha}{1/10\sqrt{\alpha}a} \cong \frac{5\pi\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot v$ успевают за время пролета через перемычку выйти из горячей области и осесть на стенку. Доля таких частиц от всех частиц в перемычке $\sim \frac{u}{v} \sim 5 \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a}$. Эту долю можно уменьшить, если уменьшить длину перемычек, увеличив число прямолинейных частей. Так как длина перемычки не может быть сделана меньше $(2 \div 3)\sqrt{\alpha}a$, то долю $\frac{u}{v}$ можно уменьшить лишь до величины $u/v \sim \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}$, где $Q \approx \frac{2R}{\sqrt{\alpha}a}$ есть число перемычек. Отсюда полное число частиц, оседающих на стенки в перемычках, равно

$$-\frac{\partial N}{\partial t} = 2\pi R \cdot 2\sqrt{\alpha} \cdot an_0v_a u/v \approx \frac{10^2}{Q} \cdot \alpha^2 n_0 v \tau \rho^2 \sim n_0 v \tau \rho^2, \quad (22)$$

если $a \sim 1/3$, $Q \sim 10$ (полагаем распределение по скоростям изотропным, что справедливо при достаточно большой плотности n_0), а утечка частиц за счет диффузии равна $-\frac{\partial N}{\partial t} \sim 10L_0 n_0 \rho^2 / \tau$, где множителем 10 мы опять учитываем наличие крутого спада температуры около стенок. Эти потоки сравниваются при $L_0/\lambda \sim 10^{-1}$, что может быть выполнено при достаточно большой плотности и не очень высокой температуре. Но, вообще, говоря, утечку (22) следует считать больше диффузионной.

Частицы, для которых в перемычке $u/v > \frac{\sqrt{\alpha} \rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}$, хотя и не пересекают область с перепадом температуры, но все же дают дополнительный перенос тепла в виде своеобразной теплопроводности. Наибольшее смещение получают частицы с малым u/v в перемычке, а именно $l \sim \frac{3\sqrt{\alpha} \rho}{Q} \cdot v/u$. Частица, раз получившая такое смещение, при дальнейшем движении через гофрированную часть поворачивается около оси системы и смещается либо в область меньших x , где она отражается от пробки, либо в область больших x , где для нее u/v в перемычке не будет очень малым. Следовательно, второе значительное смещение частица совершит только после того, как она сделает полуоборот около оси симметрии. Скорость вращения около оси равна, согласно (9),

$$\frac{d\varphi}{dt} \sim \frac{v^2}{a\omega L_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sim \frac{1}{10} v \frac{\rho}{a^2}.$$

Отсюда время полуоборота $t_0 \sim \frac{10\pi a^2}{v\rho}$, а коэффициент диффузии $D' \sim \frac{\bar{l}^2}{t_0} \sim \frac{a}{\pi Q^2} \cdot \frac{v\rho^3}{a^2} \left(\frac{v}{u}\right)^2$, где усреднение производится по частицам с $u/v > \frac{\sqrt{\alpha} \rho}{a} \cdot \frac{30}{Q}$:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{v}{u}\right)^2} &= \int \left(\frac{v}{u}\right)^2 \frac{d\varphi}{2\pi} \approx \int \frac{v^2}{u^2} \cdot \frac{dx}{2a\sqrt{\alpha}} = \\ &= \frac{R}{a\alpha\bar{v}} \int \frac{du}{u} \approx \frac{R}{a\alpha} \ln \frac{\sqrt{\frac{a\sqrt{\alpha}}{R}}}{\frac{\sqrt{\alpha} \rho \cdot \frac{30}{Q}}} \sim \frac{R}{a\alpha} \cdot \ln a/\rho. \end{aligned}$$

Таким образом, для потока частиц за счет «столкновений с перемычками» получаем

$$-\frac{\partial N}{\partial t} \sim \alpha \frac{n_0}{1/10 \cdot a} \cdot D' L_0 \cdot 2a \sim \frac{10\chi^{3/2}}{\pi Q} \cdot \ln \frac{a}{\rho} \cdot \frac{L_0^2}{a^2} \cdot n_0 v_T \rho^2 \sim \\ \sim \frac{L_0 \rho}{5a^2} \cdot n_0 v_T \rho^2,$$

при $\alpha \sim 1/3$, $Q \sim 10$, $a/\rho \sim 10^2$, что меньше (22) при $L_0/a < \frac{5a}{\rho} \sim 10^3$ (заметим, однако, что подобного рода теплопроводность может оказаться существенной в системе рис. 2 при очень низких плотностях).

Оценим опять γ , учитывая лишь утечку (22)

$$\gamma = \frac{\langle \sigma v \rangle \cdot n_0^2 \cdot q \cdot \pi a^2 L_0}{n_0 v_T \rho^2 k T} \sim 10^3 \frac{n_0 \langle \sigma \rangle}{\rho^2 T} \cdot \pi a^3 L_0. \quad (23)$$

Например, для чистого дейтерия при $n_0 \sim 10^{15}$, $\rho \sim 1$, $T \sim 30$ кэВ, $\gamma \sim 10^{-10} \pi a^2 L_0$, т. е. объем установки должен быть больше 10^4 м³, чтобы реакция была самоподдерживающейся. Таким образом, обе рассмотренные здесь системы должны иметь примерно одинаковые размеры, а именно: a порядка нескольких метров, L_0 порядка нескольких сот метров при наполнении их дейтерием.

Заключение

Мы описали здесь две простейшие ловушки с гофрированным магнитным полем, принцип действия которых основан на усилении дрейфа частиц около оси системы наложением дополнительного периодического поля*. Первая из них работает аналогично простой ловушке с магнитными пробками, т. е. утечка частиц из нее определяется кулоновскими соударениями. Во второй основная утечка частиц возникает из-за тороидального дрейфа, и в этом смысле она ближе к тору. Вероятно, существуют более совершенные ловушки такого же типа, и поэтому представляет интерес более подробное изучение движения частиц в магнитных ловушках, которое, надо надеяться, позволит выбрать наилучшую конфигурацию. Большой интерес, однако, представляет собой изучение поведения в таких ловушках не отдельных частиц, а плазмы с учетом собственных электрических и магнитных полей и прочих усложняющих факторов; в частности, необходимо произвести исследование соответствующих систем на устойчивость.

* Идея о возможности использования периодического поля для стабилизации дрейфа высказывалась ранее Г. И. Будкером [5]. Однако подробно этот эффект им рассмотрен не был.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику Л. А. Арцимовичу и академику М. А. Леонтовичу за детальное обсуждение работы и ряд ценных указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Альфен. Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.
 2. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Укр. матем. журн., 7, 5 (1955).
 3. Г. И. Будкер, см. настоящий том, стр. 3.
 4. А. Д. Сахаров, см. т. I настоящего издания, стр. 20.
 5. Г. И. Будкер, см. т. I настоящего издания, стр. 66.
-

С. И. Брагинский, Б. Б. Кадолицев

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ ОХРАНЯЮЩИХ ПРОВОДНИКОВ *

В работе предлагается метод стабилизации границы плазмы, давление которой уравновешено магнитным полем. Устойчивость границы достигается с помощью металлических «охраняющих» проводников. Они образуют решетку, которая располагается на границе плазмы и принимает на себя часть давления магнитного поля. Этот избыток давления не позволяет плазме выходить за пределы решетки. Показана устойчивость такой системы по отношению к малым колебаниям. Рассмотрен вопрос о форме границы плазмы вблизи стержней решетки.

§ 1. Действие охраняющих проводников

Как известно, серьезным препятствием к созданию плазменного шнура, стянутого магнитным полем собственного тока, является его неустойчивость. Теоретически неустойчивость плазменного цилиндра с током исследовалась Б. А. Трубниковым [1], В. Д. Шафрановым [2], Т. Ф. Волковым [3], Крускалом и Шварцшильдом [4] и другими. Было показано, что плазменный цилиндр неустойчив по отношению к малым возмущениям различных типов. Практически наиболее опасна неустойчивость, связанная с изменением границы плазмы, так как она приводит к изменению формы шнура и в конечном счете к его развалу. В дальнейшем нас будет в основном интересовать неустойчивость именно такого типа. Для ее исследования можно ограничиться рассмотрением того сравнительно простого случая, когда все текущие по плазме токи сосредоточены на ее поверхности. Это возможно, разумеется, только тогда,

* Работа выполнена в 1957 г.

когда проводимость плазмы можно считать бесконечной, что будет предполагаться в дальнейшем.

Неустойчивость плазменного цилиндра тесно связана с убыванием величины магнитного поля по мере удаления от границы плазмы наружу. Особенно наглядно это видно при рассмотрении устойчивости локального возмущения границы. Пусть внутри плазмы магнитного поля нет. При равновесии давление плазмы уравнивается внешним полем $p = \frac{H^2}{8\pi}$, где H — магнитное поле на границе.

Представим себе, что из плазмы случайно высунулся плоский «язык». Если он ориентирован параллельно магнитным силовым линиям, то вызываемое им возмущение магнитного поля будет мало: язык как бы просовывается между силовыми линиями, немного их раздвигая. Если поле с удалением от границы поля уменьшается, то кончик «языка» попадает в область меньшего магнитного давления и будет с ускорением вытягиваться дальше. Если язык ориентирован перпендикулярно к силовым линиям (рис. 1), то он будет вытягивать силовые линии, которые потянут его обратно.

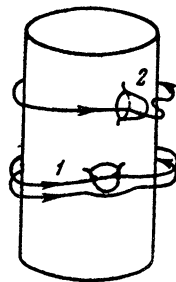


Рис. 1. 1 — «язык» ориентирован параллельно магнитным силовым линиям; 2 — перпендикулярно.

Если внутри шнура имеется достаточно сильное продольное магнитное поле, то и язык типа 1 тоже может стать устойчивым. Действительно, при его движении вытягиваются уже внутренние силовые линии, что приводит к появлению возвращающей силы.

Если возмущение не имеет характера плоского языка, то простое локальное рассмотрение становится непригодным, так как приходится учитывать взаимодействие различных элементов поверхности через возмущенное поле. Строгое рассмотрение [2] показывает, что и при протяженных возмущениях может возникать неустойчивость. Простейшим примером может служить неустойчивость, возникающая при изгибе шнура. При этом магнитные силовые линии «перемещаются» вместе со шнуром, так что на вогнутой стороне они сгущаются, и там давление поля увеличивается, а на выпуклой — уменьшается. В результате происходит нарастание изгиба со временем.

Тем не менее и в этом случае причина неустойчивости заключается в конечном счете в том, что поле убывает с удалением от поверхности (см. § 3).

Таким образом, чтобы граница плазмы была устойчивой, необходимо создать такую конфигурацию магнитного поля,

чтобы поле не убывало, а еще лучше, чтобы оно возрастало при удалении от границы.

Так, например, бесконечный плоский слой плазмы (рис. 2, а), снаружи от которого поле постоянно, не является неустойчивым [4]. Однако практически плоский проводник бесконечной ширины создать нельзя, а при любой конечной ширине неустойчивость возникнет из-за влияния краев.

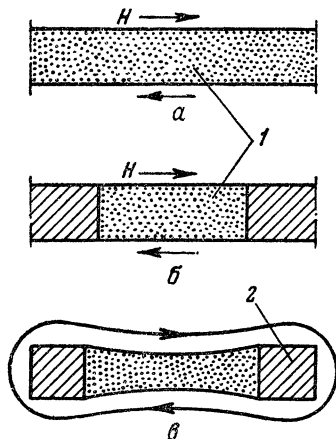


Рис. 2. 1 — плазма; 2 — металл.

Такая система тем более будет устойчива. Существенно здесь то, что охраняющие проводники не дают силовым линиям свободно перемещаться с плазмой.

Силовые линии, подобно упругим нитям, натягиваются на проводниках, и из-за этого не могут развиваться перетяжки и искривления, которые приводили к неустойчивости цилиндрического столба плазмы. Этот эффект можно еще усилить, если окружить плазму решеткой из металлических стержней (рис. 3), включенных в одну цепь со шнуром. Если решетка достаточно густая, то она жестко определяет собой границу плазмы при условии, что давление магнитного поля снаружи от решетки больше давления плазмы. Действительно, магнитное поле не может глубоко провисать сквозь густую решетку. Поэтому если граница плазмы заметно отодвинется от решетки внутрь, то магнитное давление на ней резко уменьшится. Если же плазма выйдет наружу, то ток со стержней перейдет на плазму, и она примет на себя полное магнитное давление, которое больше, чем давление плазмы. В результате установится некоторое равновесное и устойчивое положение границы плазмы, которое,

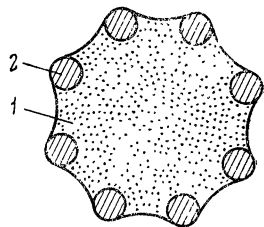


Рис. 3. 1 — плазма; 2 — стержни.

грубо говоря, совпадает с поверхностью решетки. При этом часть тока течет по плазме, часть по стержням. Часть магнитного давления уравнивает давление плазмы, а избыток ($\frac{H^2}{8\pi} - p$)

магнитного давления воспринимается стержнями. Этот избыток давления и является, образно выражаясь, тем «сторожем», который «загоняет» плазму внутрь решетки, если она случайно выйдет наружу.

Устойчивость здесь достигается за счет некоторого проигрыша в величине магнитного поля, уравнивающего плазму.

Детальное рассмотрение формы границы плазмы вблизи стержней произведено в § 2, где решетка считается плоской, а стержни бесконечно длинными. Полученные там результаты относятся, разумеется, и к слабо искривленной решетке, в которой расстояния между стержнями достаточно малы. В § 2 показано, что если давление магнитного поля не слишком сильно превосходит давление плазмы, то граница плазмы прогибается между стержнями, как показано на рис. 4, а. При этом магнитное поле возрастает в направлении от границы плазмы, так что она устойчива по отношению к малым возмущениям.

Показано, кроме того, что существуют такие равновесные состояния, в которых граница плазмы располагается так, как изображено на рис. 4, б. Такая конфигурация возникает в том случае, когда между каждым стержнем и плазмой имеется некоторый магнитный поток. При этом плазма нигде не соприкасается со стержнями, так что прямой теплообмен между плазмой и стержнями отсутствует. Такая конфигурация также устойчива по отношению к малым колебаниям. Таким образом, охраняющая решетка придает границе плазмы устойчивость по отношению к малым возмущениям, а также приводит к появлению постоянной по величине возвращающей силы при смещениях, больших по сравнению с расстояниями между стержнями.

Использование охраняющих проводников позволяет создавать различные устойчивые системы, в которых давление плазмы уравнивается магнитным полем. Рассмотрим некоторые из этих систем.

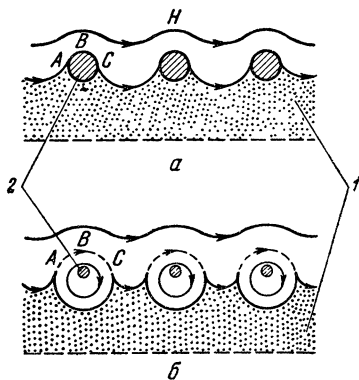


Рис. 4. 1 — плазма; 2 — стержни.

Простейшей системой является плазменный цилиндр. Решетку можно сделать либо из прямых стержней (рис. 5, а), либо из колец (рис. 5, б). В первом случае ток по плазме и по стержням течет в одну и ту же сторону в направлении оси цилиндра. Этот ток создает азимутальное магнитное поле. В системе рис. 5, б дополнительной наружной обмоткой создается продольное магнитное поле. По стержням и по плазме течет азимутальный ток в направлении, противоположном направлению тока в обмотке.

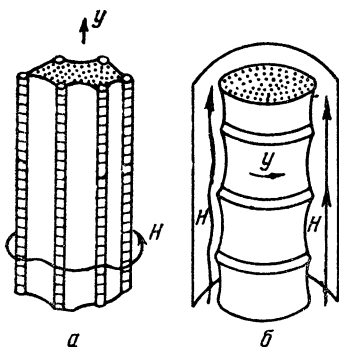


Рис. 5.

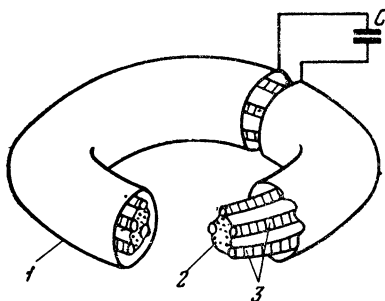


Рис. 6. 1 — чехол; 2 — плазма; 3 — стержни.

Так как бесконечный плазменный цилиндр не существует, то каждую из этих систем нужно представлять себе либо ограниченной каким-то образом с торцов, либо свернутой в тор. В системе рис. 5, а на торцах могут, например, стоять электроды. Такая схема может быть осуществлена при разряде в обычной «прямой трубе», если охраняющую решетку указанной конфигурации расположить вблизи оси трубы. Тогда сжимающийся столб разряда войдет внутрь решетки, а магнитное поле «повиснет» на ней. При этом должны быть приняты специальные меры, чтобы ток не пошел с самого начала по стержням. Для этого можно сделать так, чтобы стержни вначале не соединяли электроды, а замыкание происходило бы тогда, когда плазма войдет внутрь решетки. Это замыкание может осуществляться, например, самой плазмой. Впрочем, при достаточно большой скорости нарастания тока, даже и при замкнутых стержнях, ток, вследствие скин-эффекта, пойдет по газу на периферии разрядной камеры, где будет развиваться разряд.

Другая возможность заключается в том, чтобы свернуть цилиндр рис. 5, а в замкнутый тор (рис. 6). Преимущество такой системы — отсутствие электродов. Ток в ней может возбуждаться обычным способом индуктивно, например с помощью

возбуждающего первичного тока в медном чехле с разрезом.

Следует отметить, что здесь существует принципиальная возможность создания такой плазменной системы, в которой

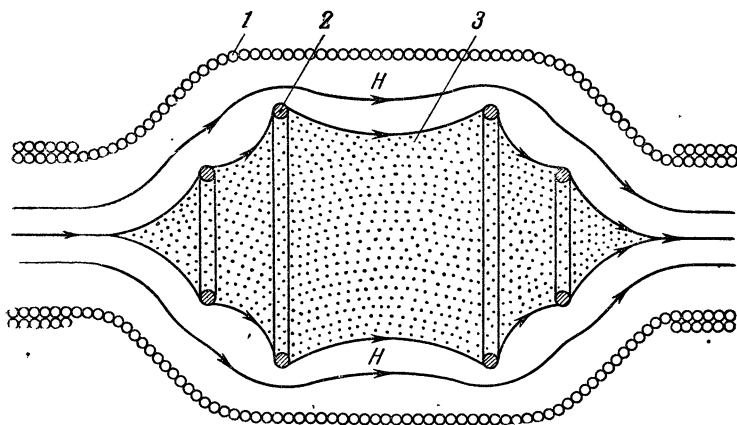


Рис. 7. 1 — обмотка; 2 — кольца; 3 — плазма.

плазма устойчива и нигде не соприкасается со стенками или проводниками. Такая конфигурация осуществляется в том случае, если расположение плазмы около стержней имеет вид рис. 4, б, где между стержнями и плазмой имеется поток магнитного поля.

Ограничение с торцов системы рис. 5, б может быть осуществлено усилением магнитного поля с краев («магнитная пробка») с одновременным уменьшением диаметра крайних колец. В этой системе крайне нежелательно присутствие продольного магнитного поля внутри плазмы, так как оно облегчает выход плазмы из системы.

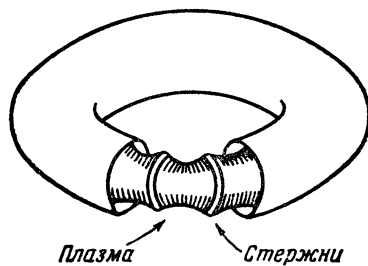


Рис. 8.

Система рис. 5, б может быть также свернута в замкнутый тор (рис. 8). И здесь в принципе возможна устойчивая конфигурация, в которой плазма не соприкасается ни со стенками, ни со стержнями. Надо отметить, что в данном случае охраняющая решетка не только стабилизирует плазму, но и даст возможность получить само равновесное состояние. Без решетки плазменный тор в продольном поле не может сам по себе на-

ходиться в равновесии; он расширяется до соприкосновения с наружной стенкой сосуда.

Кроме того, система рис. 5, б может быть, вероятно, использована в качестве «плазموпровода», т. е. канала, по которому изолированная от стенок плазма может «перекачиваться» из одного места в другое.

Во всех рассмотренных системах давление магнитного поля снаружи от охраняющей решетки должно быть больше давле-

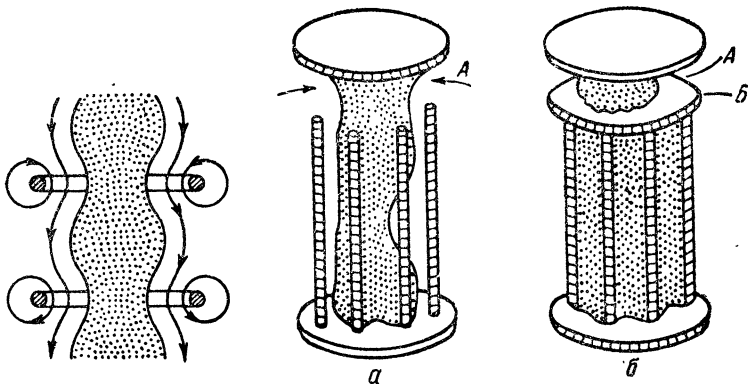


Рис. 9.

Рис. 10.

ния плазмы. При этом часть давления магнитного поля оказывается потерянной с точки зрения уравнивания давления плазмы. Избыток давления поля как бы держится «в резерве» и используется для создания устойчивости.

Если давление поля снаружи от решетки меньше давления плазмы, то устойчивость, вообще говоря, не будет обеспечена.

Например, если по кольцам решетки рис. 9 идет ток, создающий продольное магнитное поле, то у плазмы может существовать равновесная конфигурация типа гофрированного шнура. Однако такой шнур будет неустойчив: плазма может «языками» выходить наружу в промежутках между кольцами, где поле убывает в направлении от границы плазмы. В противоположность этому в системе рис. 5, б магнитное поле создается внешней обмоткой, и если давление этого поля больше давления плазмы, то система устойчива.

Следует отметить, что решетка, составленная из параллельно расположенных стержней, свободно пропускает компоненту поля вдоль стержней и задерживает поперечную компоненту. Поэтому стержни такой решетки должны быть ориентированы поперек силовых линий того поля, которое приводит к неустойчивости. Возможно, что в некоторых случаях окажется более удобным использовать решетку типа сетки из перекрещиваю-

щихся стержней. Такая сетка задерживает обе компоненты поля.

Чтобы решетка задерживала магнитное поле, ее стержни должны быть не только расположены поперек силовых линий, но и должны замыкаться в такие контуры, чтобы силовые линии не могли проникнуть снаружи внутрь решетки обходным путем. Например, если в прямой трубе решетку сделать из стержней, не доходящих до одного из электродов (рис. 10, а), то силовые линии смогут через разомкнутый промежуток A проходить внутрь решетки и сжимать шнур. Поэтому в такой системе стабилизации не будет. Если теперь замкнуть концы стержней сплошной пластинкой B (рис. 10, б), то плазма внутри решетки будет полностью отгорожена от внешнего поля и станет устойчивой. Неустойчивость может быть лишь в промежутке A .

Все системы с охраняющими проводниками не являются стационарными. Их время действия ограничено конечной величиной электропроводности плазмы и проводников. В действительности ток в плазме и стержнях течет не по поверхности, как это предполагалось выше, а в некотором слое, толщина которого определяется диффузией магнитного поля за время функционирования системы. За время t поле проникнет в проводник с электропроводностью σ на глубину порядка

$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2 t}{2\pi\sigma}}$. Условием применимости проведенных выше рассуждений является малость этой величины по сравнению с характерными размерами, как, например, радиус стержней (при плохой проводимости стержней), расстояния между стержнями и между плазмой и стержнями (при плохой проводимости плазмы), и т. д. Если проводимость у стержней гораздо больше, чем у плазмы, так что стержни можно считать идеально проводящими, то они, по-видимому, будут оказывать стабилизирующее действие на плазму, оставшуюся внутри решетки, даже тогда, когда часть плазмы уже выйдет наружу. В этом случае время существования системы будет порядка $t \sim \frac{2\pi\sigma a^2}{c^2}$, где a — поперечный размер плазмы.

Кроме того, плазму, выходящую наружу за счет проникновения в нее силовых линий, можно отодвигать обратно путем наращивания внешнего магнитного поля. При этом увеличении времени жизни достигается за счет потери в величине сжимающего поля, часть которого повисает на стержнях.

Оценим число ядерных реакций в системе с охраняющими проводниками. Предположим, что время существования системы определяется просачиванием магнитного поля через стержни и по порядку величины равно $t \sim \frac{\sigma S}{c^2}$, где S — пло-

щадь сечения стержня. Например, для меди $t \sim 5 \cdot 10^{-4} S$. Величина магнитного поля (а следовательно, и давление плазмы) лимитирована соображениями прочности и жесткости конструкции. Примем, несколько произвольно, что допустимая величина магнитного поля составляет $5 \cdot 10^4$ гс, что соответствует давлению $p_0 = 100$ атм.

Число реакций ν в единице объема плазмы за время t дается формулой (см., например, [5])

$$\nu = \frac{\alpha n^2}{T^{2/3}} e^{-\beta/T^{1/3}} \cdot t \approx \frac{\alpha}{T^{1/3}} \left(\frac{p_0}{2T} \right)^2 e^{-\beta/T^{1/3}} \cdot \frac{\sigma S}{c^2}.$$

Функция $T^{-\beta/3} e^{-\beta/T^{1/3}}$ имеет максимум при $T = T_m = \left(\frac{\beta}{8} \right)^3$.

Этот максимум довольно плоский, так что при уменьшении температуры в четыре раза значение функции уменьшается в 2,7 раза. Для реакции $D-D$ $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ см}^3 \cdot \text{кэв}^{2/3} \cdot \text{сек}^{-1}$, $\beta = 19,5 \text{ кэв}^{1/3}$, так что $T_m = 14,5 \text{ кэв}$, откуда для медных стержней сечением $S = 10^2 \text{ см}^2$ $\nu = 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ при $T = T_m$ и $\nu = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$ при $T = 4 \text{ кэв}$. Выделяющаяся при этих реакциях энергия составляет около процента тепловой энергии частиц. Для системы, работающей на смеси $D-T$, число реакций примерно на два порядка больше, и выделяющаяся энергия имеет тот же порядок величины, что и тепловая. Приведенные оценки, вероятно, завышены, но они дают все же представление о возможностях систем с охраняющими проводниками.

§ 2. Плоская решетка

Рассмотрим более детально, как располагается плазма около стержней решетки. Для простоты ограничимся рассмотрением плоской решетки, составленной из прямых стержней, расположенных параллельно на равном расстоянии друг от друга. Предположим далее, что плазма имеет бесконечную проводимость и что поле в ней отсутствует (снаружи и внутри плазмы может иметься однородное магнитное поле; все последующие результаты при этом сохраняются, надо лишь вместо p под-

ставить $p + \frac{\overset{i}{H}_z^2}{8\pi} - \frac{\overset{e}{H}_z^2}{8\pi}$, где $\overset{e}{H}_z$ — внешнее, а $\overset{i}{H}_z$ — внутреннее поле, направленное параллельно стержням). Тогда на границе плазмы $H^2 = 8\pi p = \text{const}$, где p — давление в плазме. Таким образом, наша задача заключается в отыскании поля снаружи от плазмы при условии, что на ее поверхности величина поля постоянна. Так как снаружи от стержней и плазмы $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$, то эта задача аналогична гидро-

динамической задаче о струйном потенциальном течении несжимаемой жидкости [6]. Действительно, при таком течении $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, а на границе струи, вследствие постоянства давления, $v^2 = \text{const}$ (согласно уравнению Бернулли). Поэтому можно воспользоваться методами, развитыми в теории струй. В случае плоского течения они тесно связаны с методом конформных преобразований.

Из условия $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$ следует, что можно ввести комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$, являющийся аналитической функцией от комплексного переменного $z = x + iy$.

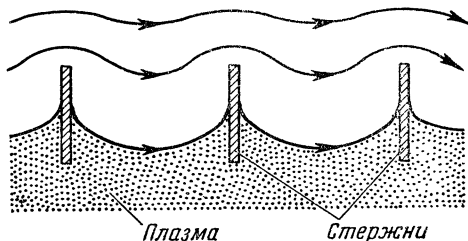


Рис. 11.

При этом $H_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $H_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, и задача о нахождении поля \mathbf{H} сводится к отысканию функции $w(z)$, т. е. конформного преобразования, отображающего область изменения z на область изменения потенциала w . Это преобразование во многих случаях можно найти с помощью дополнительных соображений, связанных с рассмотрением области «годографа», т. е. области изменения величины $\zeta = \frac{dz}{dw}$.

Рассмотрим, например, решетку, составленную из стержней в виде плоских ножей (рис. 11).

Примем за единицу длины расстояние a между соседними стержнями; единицу измерения для поля выбираем равной $\sqrt{8\pi r}$, так что по поверхности плазмы $H = 1$; поле на бесконечности будем считать однородным и равным H_∞ .

Вследствие периодичности достаточно рассмотреть поле в полосе шириной l около одного из стержней (рис. 12, а).

Этой полосе соответствует, очевидно, полубесконечная полоса шириной H_∞ на плоскости w (рис. 12, а, б), где соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами. Рассмотрим теперь плоскость годографа $\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{H_x + iH_y}{H^2}$. Точкам z , лежащим на границе плазмы, соответствуют на плоскости годографа точки окружности единичного радиуса

$|\zeta|=1$; точкам на стержне — чисто мнимые ζ ; бесконечно удаленной точке G — точка $\zeta=1/H_\infty$. Кроме того, естественно предположить, что точке Q соответствует $\zeta=0$. Этих данных

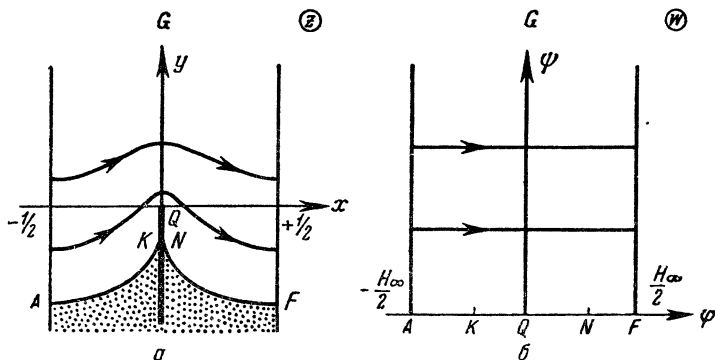


Рис. 12.

вполне достаточно, чтобы построить область годографа: она представляет собой полукруг единичного радиуса (рис. 13, а).

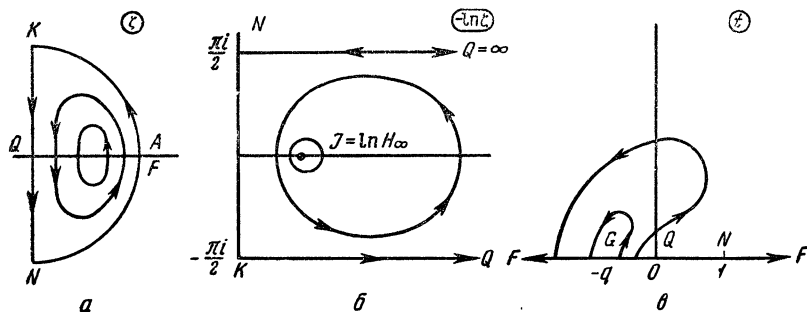


Рис. 13.

Отобразим правую полосу плоскости w и нижнюю четверть круга годографа на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного t . Первое отображение выполняется с помощью преобразования Шварца.

В нашем случае при том расположении точек, которое представлено на рис. 13, в, оно дается соотношением

$$\frac{dw}{dt} = A \frac{1}{\sqrt{t(t+g)}}. \quad (2.1)$$

Константу A находим из условия, что w меняется на $\frac{H_\infty}{2}$ при переходе от Q к F

$$\frac{H_\infty}{2} = \int_0^\infty \frac{dw}{dt} dt = \frac{\pi A}{\sqrt{g}}.$$

Интегрируя (2.1), получим

$$w = \frac{H_\infty}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t}{g}}. \quad (2.2)$$

Область годографа также нетрудно отобразить на t , если учесть, что $\ln \zeta$ лежит в прямоугольной полосе, которая может быть переведена в верхнюю полуплоскость преобразованием Шварца. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \ln \zeta = \frac{B}{t \sqrt{t-1}}, \quad \zeta = C e^{-2B \operatorname{arctg} \sqrt{t-1}}.$$

Из условия $\zeta = -i$ при $t=1$, $\zeta=1$ при $t=\infty$ получаем $C = -i$, $B = -\frac{i}{2}$, откуда

$$\zeta = -i e^{i \operatorname{arctg} \sqrt{t-1}} = -i \sqrt{\frac{1+i\sqrt{t-1}}{1-i\sqrt{t-1}}}. \quad (2.3)$$

Из условия $\zeta(-g) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+g}-1}{\sqrt{1+g}+1}} = \frac{1}{H_\infty}$ находим

$$g = \left(\frac{H_\infty^2 + 1}{H_\infty^2 - 1} \right)^2 - 1.$$

Формулы (2.2), (2.3) параметрически определяют функцию $\zeta(w)$. Но $\zeta(w) = \frac{dz}{dw}$, откуда интегрированием можно получить $z(w)$, т. е. полное решение задачи. Впрочем, нас в основном интересует граница плазмы, уравнение которой удобнее оставить в параметрической форме. Оно может быть получено из уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \zeta(t) \frac{dw}{dt} = -i e^{i \operatorname{arctg} \sqrt{t-1}} \cdot \frac{H_\infty \sqrt{g}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t(t+g)}},$$

где t нужно считать действительным параметром, изменяющимся от 1 до ∞ . Отсюда

$$x(t) = \int_1^t \frac{H_\infty \sqrt{g}}{2\pi} \frac{\sqrt{t-1}}{t(t+g)} dt;$$

$$y(t) = -y_1 - \int_1^t \frac{H_\infty \sqrt{g}}{2\pi} \frac{1}{t(t+g)} dt, \quad (2.4)$$

где

$$y_1 \equiv QN = \int_0^1 \frac{H_\infty \sqrt{g}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t}(t+g)} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}} dt.$$

В общем случае получаются довольно сложные выражения. Однако в предельных случаях $H_\infty \rightarrow 1$ и $H_\infty \rightarrow \infty$ можно получить более простые асимптотические выражения. При $H_\infty \rightarrow 1$, $g \rightarrow \frac{1}{(H_\infty - 1)^2} \rightarrow \infty$, откуда, учитывая, что в существенной области значений $x t \gg 1$, получаем $y_1 = \frac{a}{2\pi} (H_\infty - 1)$, где a — численный множитель порядка единицы

$$x \simeq \frac{H_\infty - 1}{\pi} \cdot (\sqrt{t} - 1), \quad y \simeq -\frac{H_\infty - 1}{2\pi} \left\{ a + 2 \ln \left(1 + \frac{\pi x}{H_\infty - 1} \right) \right\}.$$

При $H_\infty \rightarrow \infty$ $g \rightarrow \frac{4}{H_\infty^2} \rightarrow 0$, откуда $y_1 = \frac{1}{\pi} \ln H_\infty$;

$$x = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \sqrt{t-1} - \frac{\sqrt{t-1}}{t} \right\}, \quad y = -\frac{1}{\pi} \ln H_\infty - \frac{1}{\pi} \frac{t-1}{t},$$

т. е. при изменении H_∞ граница плазмы перемещается параллельно самой себе. При этом глубина, на которую продавливается между стержнями граница плазмы $y(t=1) = -\frac{1}{\pi} \ln(eH_\infty)$, растет с ростом H_∞ лишь логарифмически.

Поэтому стержни можно делать не очень широкими. Достаточно, например, взять стержни шириной $b=1$, чтобы вплоть до $H_\infty \sim 10$ плазма касалась стержней, т. е. было бы строго применимо полученное выше решение.

Но все же площадь соприкосновения с плазмой у таких стержней достаточно велика, поэтому представляет интерес рассмотреть решетку из круглых стержней. Решение задачи со стержнями конечного радиуса довольно сложно. Поэтому получим решение, считая, что стержни бесконечно тонки, но по каждому из них течет конечный ток. Тогда поле около каж-

дого из стержней будет иметь такой вид, какой указан на рис. 14, а. Это решение можно интерпретировать двояким образом. С одной стороны, его можно рассматривать как простое «повисание» поля на решетке из стержней, форма которых совпадает с силовой линией $BCDE$ и близка к круглой. При этом плазма соприкасается со стержнем по линии BED . С другой стороны, можно сказать, что стержень имеет меньший размер и совпадает с силовой линией, лежащей внутри $BCDE$, но при

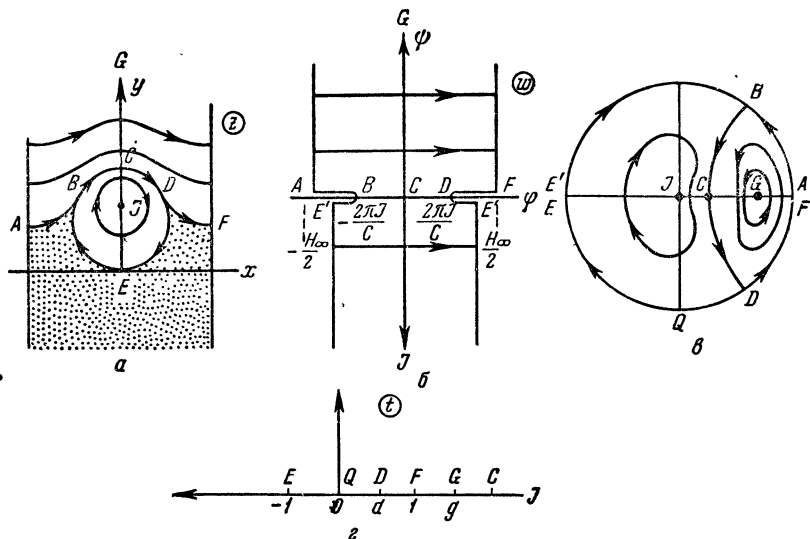


Рис. 14.

этом между стержнем и плазмой имеется некоторый поток магнитного поля. В этом случае плазма отодвигается от стержня и нигде его не касается.

Аналитическое решение можно опять получить с помощью годографа. Область годографа нетрудно построить — она имеет вид рис. 14, в. С помощью преобразования $t = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$ отобразим нижний полукруг на верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного t (см. рис. 14, з). На эту же полуплоскость нужно отобразить область потенциала w . Последняя состоит из двух полубесконечных полос, имеющих общую линию $B CD$. Ширина верхней полосы равна H_∞ , нижней $\frac{4\pi I}{c}$, где I — ток, текущий по стержню. Точке $z = i\infty$ соответствует точка $w = i\infty$; точке \mathcal{J} , т. е. положению стержня на плос-

кости z , — точка $w = -i\infty$. Отображение w на t производится с помощью преобразования Шварца

$$\frac{dw}{dt} = A \frac{t-d}{(t-g)\sqrt{t^2-1}}. \quad (2.5)$$

Константу A можно найти из условия $\int_{CDE} dw = \frac{2\pi}{c} I = -\pi i \operatorname{Res}_{t=\infty} \frac{dw}{dt} = \pi i A$, откуда $A = -i \frac{2I}{c}$. Из отображения го-дографа следует $g = \frac{H_\infty^2 + 1}{2H_\infty}$, а условие $\int_{CDF} dw = \frac{H_\infty}{2} = \pi i \operatorname{Res}_{t=g} \frac{dw}{dt} = \pi i A \frac{g-d}{\sqrt{g^2-1}}$ позволяет определить d : $d = \frac{H_\infty^2 + 1}{2H_\infty} - \frac{(H_\infty^2 - 1)c}{8\pi I}$. Таким образом, все неизвестные параметры выражаются через H_∞ и I .

Границу плазмы опять можно найти путем интегрирования уравнения $\frac{dz}{dt} = \zeta \frac{dw}{dt} = -i \frac{2I}{c} (t - \sqrt{t^2-1}) \frac{t-d}{(t-g)\sqrt{t^2-1}}$, где t можно считать действительным параметром, изменяющимся от -1 до $+1$. Производя несложные выкладки, получаем уравнение границы плазмы

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4} + \frac{2I}{c} \sqrt{1-t^2} - \frac{H_\infty^2 - 1}{4\pi} \arcsin t - \\ &\quad - \frac{H_\infty^2 + 1}{4\pi} \arcsin \frac{2H_\infty - (H_\infty^2 + 1)t}{H_\infty^2 + 1 - 2H_\infty t}; \\ y(t) &= \frac{2I}{c} (t+1) + \frac{H_\infty^2 - 1}{4\pi} \ln \frac{H_\infty^2 + 1 - 2H_\infty t}{(H_\infty + 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Она определяется теми же двумя параметрами H_∞ и I . Следует отметить, что при заданном поле H_∞ ток I может изменяться только в определенных пределах — в противном случае полученное нами решение теряет физический смысл.

Естественное ограничение на I налагается условием $-1 < d < 1$, откуда

$$H_\infty \frac{H_\infty - 1}{H_\infty + 1} < \frac{4\pi I}{c} < H_\infty \frac{H_\infty + 1}{H_\infty - 1}. \quad (2.7)$$

Фактически область изменения I оказывается еще уже: она определяется условием однозначности. Действительно, при уменьшении тока I , т. е. при $d \rightarrow -1$, точка Q попадает на

ось y (рис. 15, *a*) и затем переходит в область отрицательных x . При этом появляется область с двумя значениями поля. Точно так же при увеличении тока точка Q может перейти в область $x > \frac{1}{2}$ (рис. 15, *б*), что опять приводит к двузначности.

Таким образом, чтобы поле всюду было однозначным, точка Q должна лежать в полосе $0 < x < \frac{1}{2}$. Другими словами $0 < x(t=0) < \frac{1}{2}$, откуда

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi I}{c} < \frac{H_\infty^2 + 1}{2} \arcsin \frac{2H_\infty}{H_\infty^2 + 1} + \frac{\pi}{2}. \quad (2.8)$$

Возникает вопрос, что произойдет, когда ток I выйдет за эти пределы. Рассмотрим случай, когда ток становится меньше

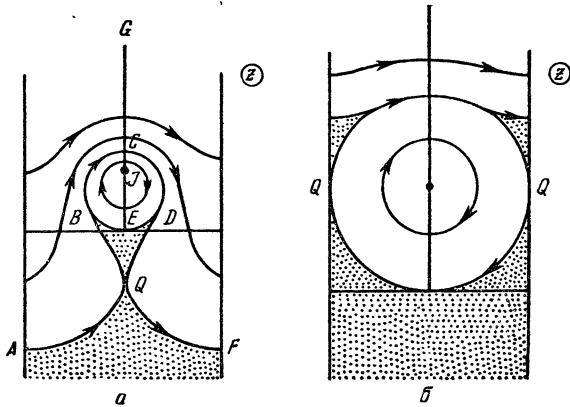


Рис. 15.

нижнего предела. При этом можно представить себе два типа решений. Первое (рис. 16) является непрерывным продолжением предыдущего. Оно характеризуется наличием плазменного «сгустка» $LBEDM$, прилегающего к стержню (т. е. линии $BCDE$), и полосы KPL с током, причем поле около этой полосы больше единицы. Это означает, что ее толщина порядка толщины скин-слоя, и поле частично проникает внутрь. Такая конфигурация поля может, вероятно, возникнуть в том случае, когда достаточно большое магнитное поле прогоняет плазму сквозь решетку и «повисает» на последней.

Аналитическое решение можно опять получить с помощью годографа. Область годографа имеет вид рис. 16, б.

Логарифмированием отобразим нижнюю полуокружность на многоугольник рис. 16, в, который преобразованием Шварца можно отобразить на верхнюю полуокружность переменного t . При этом, вследствие симметрии, точку Q можно поместить в начале координат плоскости t ; точки E, F —

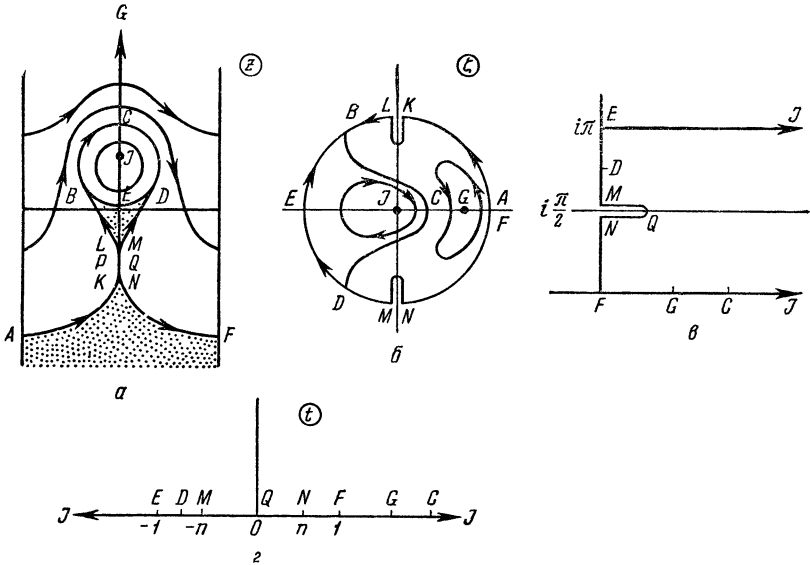


Рис. 16.

в ± 1 и точки M, N — в $\pm n$, где n — число, меньшее единицы. Отсюда, учитывая, что $\int_c^E d \ln \zeta = -i\pi = -i\pi \operatorname{Res}_{t=\infty} \frac{d \ln \zeta}{dt}$, получаем

$$\frac{d}{dt} \ln \zeta = - \frac{t}{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - n^2)}}. \quad (2.9)$$

Интегрирование (2.9) приводит к соотношению

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - n^2}{2\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 - n^2)} + 2t^2 - n^2 - 1}}. \quad (2.10)$$

Область w , а также и преобразование для w остаются, очевидно, прежними. Константу n необходимо определить из условия, что точки M, Q, N лежат на оси y . Не будем производить детальное исследование, которое, вообще говоря, до-

вольно сложно. Отметим только, что при $I \rightarrow 0$ решение рис. 16 стремится к найденному нами ранее решению с плоскими стержнями (рис. 12).

Второе мыслимое решение представлено на рис. 17, а.

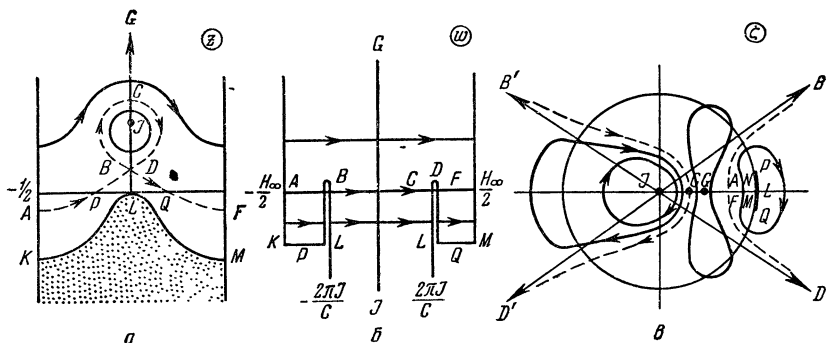


Рис. 17.

На рис. 17, б, в показаны соответствующие области для потенциала w и годографа ζ . Логарифм отображает нижнюю

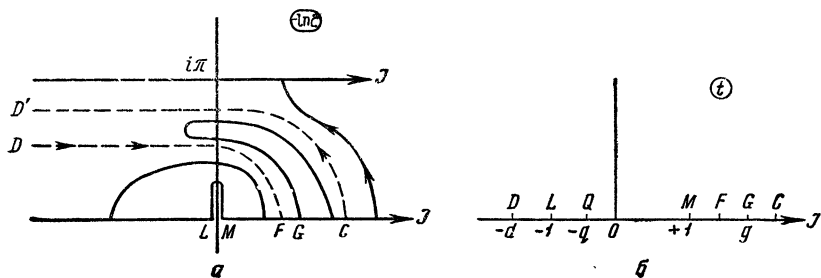


Рис. 18.

полу плоскость ζ на полосу (рис. 18, а), которая может быть преобразована в верхнюю полу плоскость переменного t с помощью преобразования Шварца

$$\frac{d}{dt} \ln \zeta = - \frac{t+q}{(t+d)\sqrt{t^2-1}}. \quad (2.11)$$

Преобразованием $\frac{dw}{dt} = A \frac{t+d}{(t-g)\sqrt{t^2-1}}$ отобразим на ту же полу плоскость область изменения потенциала w . Из условия

$\int_C^D dw = \frac{2\pi I}{c} = -\pi i \operatorname{Res}_{t=\infty} \frac{dw}{dt} = \pi i A$ получаем $A = -i \frac{2I}{c}$; условия

$$\int_C^F dw = \frac{H_\infty}{2} = \pi i \operatorname{Res}_{t=g} \frac{dw}{dt} = \frac{2\pi I}{c} \frac{g+d}{\sqrt{g^2-1}} \quad (2.12)$$

устанавливает связь между g и d , а соотношение

$$\int_L^M d \ln \zeta = i \int_{-1}^{+1} \frac{(t+g) dt}{(t+d)\sqrt{1-t^2}} = \pi i \left(1 - \frac{d-g^*}{\sqrt{d^2-1}} \right) = 0$$

связывает между собой d и g .

Таким образом, решение определяется тремя константами: I , H_∞ и параметром d , который может быть связан с величиной потока магнитного поля между плазмой и силовой линией $ABDF$, т. е. с длиной DL на плоскости w . Другими словами, это есть поток между плазмой и стержнем решетки (напомним, что за «стержень» может быть принята любая силовая линия, лежащая внутри BCD).

Рассмотрим опять, в каких пределах может изменяться ток I . Так как длина LM на плоскости потенциала равна длине участка силовой линии LQM и поэтому не может быть меньше $1/2$, то должно выполняться соотношение

$$\frac{4\pi I}{c} < H_\infty - 1. \quad (2.13)$$

Что касается нижней границы, то она равна нулю. Действительно, из соотношения (2.12), связывающего между собой I и H_∞ , видно, что при любом d ток I можно сделать как угодно малым, если выбрать g достаточно близким к единице.

Таким образом, в данном решении область изменения I перекрывается частично с (2.8), частично с областью для решения рис. 16. Однако, в отличие от этих решений, оно, вообще говоря, неустойчиво. Действительно, как видно из рис. 17, $a, в$, перед участком PLQ границы плазмы поле убывает и обращается в нуль в точке B . Поэтому, если в плазме нет продольного поля H_z , на границе PLQ могут развиваться возмущения в виде «языков» плазмы, которые приведут к натеканию плазмы в область около точки B . Если при этом ток I лежит в пределах (2.8), в результате, вероятно, образуется устойчивая конфигурация рис. 14, a . Если же ток I имеет значение, меньшее нижнего предела в (2.8), то решение примет какой-то более сложный характер, отличный, вообще говоря, от решения

рис. 16, в котором есть область, где поле на границе плазмы больше единицы. Что при этом будет происходить в действительности, можно окончательно установить только с помощью экспериментов.

Аналогичная ситуация возникнет в том случае, когда ток I персходит через верхний предел в (2.8). Опять можно представить себе два типа решений: одно с «перемычками» (рис. 19, а) и другое «волнообразное» (рис. 20, а), которое в отсутствие z -го поля опять неустойчиво.

Области изменения потенциала w и годографа ζ для решения рис. 19 совпадают с таковыми для решения рис. 16, и поэтому

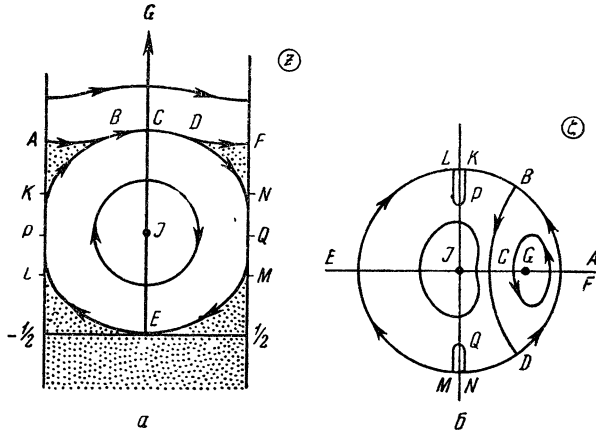


Рис. 19.

решение дается теми же преобразованиями. Соответствующие области для решения рис. 20 близки, как мы видим, к рис. 17 и могут быть отображены на плоскость вспомогательного переменного t аналогичными преобразованиями

$$\frac{d}{dt} \ln \zeta = - \frac{t - q}{(t - d) \sqrt{t^2 - 1}}, \quad (2.14)$$

$$\frac{dw}{dt} = -i \frac{2I}{c} \frac{t - d}{(t - g) \sqrt{t^2 - 1}}, \quad (2.15)$$

где $q = d - \sqrt{d^2 - 1}$, $\frac{g - d}{\sqrt{g^2 - 1}} = \frac{cH_\infty}{4\pi I}$.

Из рассмотрения области потенциала w следует опять ограничение для тока

$$\frac{4\pi I}{c} > H_\infty + 1. \quad (2.16)$$

Область изменения I опять перекрывается частично с решением рис. 14, частично с рис. 19. Заметим, что решение вида рис. 20 существует и в том случае, когда $H_\infty < 1$. Однако при этом плазма будет (при $H_z = 0$) просачиваться между стержнями и уходить в «бесконечность» вследствие неустойчивости. Таким образом, если ток выходит за пределы (2. 8), математически можно построить два решения, из которых

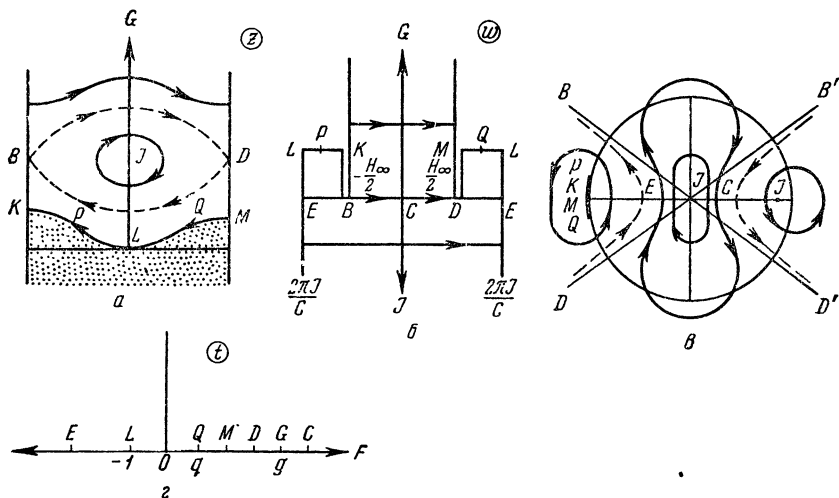


Рис. 20.

одно содержит перемычки с током, а второе не удовлетворяет условию устойчивости. Оба решения слишком идеализированы, и возникает опасение, что в действительности поведение плазмы окажется более сложным и, возможно, нестационарным. Поэтому этот вопрос необходимо исследовать экспериментально.

§ 3. Условие устойчивости

Рассмотрим плазму с бесконечно большой электропроводностью и предположим, что в состоянии равновесия токи в плазме отсутствуют, т. е. $\text{rot } \vec{H}_0 = 0$, где \vec{H}_0 — равновесное поле внутри плазмы. Граница плазмы может быть частично образована твердыми идеальными проводниками, частично быть свободной. По свободной поверхности течет ток такой величины, чтобы давление плазмы p_0 уравновешивалось разностью давлений магнитного поля снаружи и внутри плазмы:

$p_0 = \frac{1}{8\pi} (\overset{e}{H}_0^2 - \overset{i}{H}_0^2)$. Предположим, что температура плазмы не зависит от координат, тогда из условий равновесия следует $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $p = p_0 = \text{const}$.

Малые колебания такой системы описываются линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (3.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \overset{i}{\mathbf{H}}_0]; \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \overset{i}{\mathbf{H}}_0], \quad (3.3)$$

где плотность ρ , давление p , магнитное поле \mathbf{H} представляют собой малые отклонения от равновесных значений соответствующих величин ρ_0 , p_0 , $\overset{i}{\mathbf{H}}_0$; \mathbf{v} — скорость плазмы. Движение плазмы будем считать адиабатическим, так что $p = \gamma p_0 \rho / \rho_0$, где γ — показатель адиабаты.

Вместо скорости \mathbf{v} удобно ввести смещение ξ из положения равновесия, так что $\mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$. При этом уравнения малых колебаний (3.1), (3.2) интегрируются, и все величины явно выражаются через ξ .

$$\rho = -\rho_0 \operatorname{div} \xi, \quad p = -\gamma p_0 \operatorname{div} \xi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} [\xi \overset{i}{\mathbf{H}}_0]. \quad (3.4)$$

Уравнение для смещения ξ имеет вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \overset{i}{\mathbf{H}}_0]. \quad (3.5)$$

Возмущение магнитного поля снаружи плазмы можно считать потенциальным, т. е. $\overset{e}{\mathbf{H}} = \nabla \varphi$, причем потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5), (3.6) должны быть дополнены граничными условиями. На поверхности твердых, идеально проводящих проводников имеем

$$\xi_n = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (3.7)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению нормали к границе проводника; ξ_n — проекция смещения на нормаль.

На свободной границе плазмы нормальная компонента магнитного поля должна быть непрерывна. Так как при движении плазмы магнитные силовые линии внутреннего поля увлекаются ею, то они все время остаются параллельными границе. Поэтому и снаружи нормальная компонента поля должна обращаться в нуль на границе с плазмой. Чтобы явно записать это условие, нужно найти выражение для нормали к возмущенной поверхности через смещение границы. Пусть единичный вектор внешней нормали к равновесной границе плазмы в точке \mathbf{r}_0 есть \mathbf{n}_0 . Каждой точке \mathbf{r}_0 приведем в соответствие точку \mathbf{r} смещенной поверхности, лежащую на нормали \mathbf{n}_0 . С точностью до величин первого порядка малости (включительно) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi_n \mathbf{n}_0$, где ξ_n есть проекция на \mathbf{n}_0 смещения ξ в точке \mathbf{r}_0 . Тогда смещенную поверхность можно представить себе полученной из несмещенной путем перехода точек \mathbf{r}_0 в соответственные точки \mathbf{r} . При этом смещение элемента поверхности можно разложить на параллельный перенос вдоль \mathbf{n}_0 и поворот около оси, перпендикулярной к \mathbf{n}_0 . Примем эту ось за ось z местной системы координат, ось y направим по \mathbf{n}_0 . В этой системе координат \mathbf{n}_0 имеет проекции $\{0, 1, 0\}$. Проекция \mathbf{n}_0 на ось x равна $n_x = -\sin \alpha = -\frac{\partial \xi_n}{\partial x}$, так что с точ-

ностью до величин первого порядка малости $\mathbf{n} = \left\{ -\frac{\partial \xi_n}{\partial x}, 1, 0 \right\}$.

В векторном виде, справедливом в любой системе координат, это выражение записывается следующим образом:

$$\mathbf{n} = \dot{\mathbf{n}}_0 - \nabla^{\perp} \xi_n, \quad (3.8)$$

где

$$\nabla^{\perp} = \nabla - \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \nabla) \quad (3.9)$$

есть градиент вдоль поверхности S_0 . Таким образом, условие исчезновения нормальной составляющей магнитного поля на границе плазмы можно записать в виде $\mathbf{n} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}_0 + \xi_n \mathbf{n}_0) = 0$, где $\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_0 + \nabla \varphi$. Учитывая, что $\mathbf{n}_0 \dot{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}_0) = 0$, и пользуясь (3.8), получим с прежней точностью

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_0} = (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \xi_n - \xi_n \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \nabla) \dot{\mathbf{H}}_0. \quad (3.10)$$

Это условие можно переписать в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_0} = (\mathbf{n}_0 \text{rot} \{ \mathbf{n}_0 \xi_n \mathbf{H}_0 \})_{S_0}. \quad (3.11)$$

Действительно, $\text{rot}[\mathbf{n}_0 \xi_n \mathbf{H}_0] = -\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 \text{div} \mathbf{n}_0 \xi_n + (\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 \nabla) \mathbf{n}_0 \xi_n - \xi_n (\mathbf{n}_0 \nabla) \overset{\circ}{\mathbf{H}}_0$, так как $\text{div} \mathbf{H}_0 = 0$. Учитывая условия $\mathbf{n}_0 \overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 = 0$ и $\mathbf{n}_0 (\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 \nabla) \mathbf{n}_0 = 0$, убеждаемся, что (3.10) и (3.11) совпадают.

Второе граничное условие получается из баланса давлений на смещенной границе плазмы. Оно имеет вид

$$p + p + \frac{1}{8\pi} (\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 + \mathbf{H})^2 = \frac{1}{8\pi} (\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 + \nabla\varphi)^2.$$

Учитывая, что нулевые величины уравновешены $p_0 + \frac{1}{8\pi} H_0^2(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{8\pi} H_0^2(\mathbf{r}_0)$, получаем с прежней точностью

$$p + \frac{\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 \mathbf{H}}{4\pi} = \frac{\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 \nabla \varphi}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} \xi_n \left(\frac{\partial \overset{\circ}{H}_0^2}{\partial n} - \frac{\partial \overset{\circ}{H}_0^2}{\partial n} \right). \quad (3.12)$$

Здесь значения всех величин берутся в точке \mathbf{r}_0 несмещенной поверхности.

Таким образом, задача о малых колебаниях плазмы определяется уравнениями (3.5) и (3.6) для величин ξ , φ с граничными условиями (3.7) на твердых проводниках и (3.10), (3.12) на свободной границе плазмы; при этом величины p и \mathbf{H} должны быть выражены через ξ , согласно (3.4).

Вследствие линейности уравнений зависимость всех функций от времени можно взять в виде $e^{-i\omega t}$. Тогда после отделения временного множителя в левой части уравнения (3.5) будет стоять $-\rho_0 \omega^2 \xi$, а все остальные соотношения не изменятся. Эти уравнения и граничные условия могут быть получены из вариационного принципа $\delta F = 0$ при дополнительном условии $\int_{V_i} \xi^2 dV = 1$, где функционал $F(\xi, \varphi)$ дается выражением

$$F(\xi, \varphi) = \int_{V_i} \left(\frac{p^2}{\gamma p_0} + \frac{H^2}{4\pi} \right) dV - \int_{V_e} \frac{(\nabla\varphi)^2}{4\pi} dV + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_{S_0} \xi_n^2 \left(\frac{\partial \overset{\circ}{H}_0^2}{\partial n} - \frac{\partial \overset{\circ}{H}_0^2}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \xi_n (\overset{\circ}{\mathbf{H}}_0 \nabla) \varphi dS. \quad (3.13)$$

Здесь $p = -\gamma p_0 \text{div} \xi$, $\mathbf{H} = \text{rot} [\xi \overset{\circ}{\mathbf{H}}_0]$. Векторная функция ξ определяется в объеме V_i , занятом равновесной плазмой, и должна удовлетворять условию $\xi_n = 0$ на границе плазмы с твердыми проводниками. Функция φ определяется в объеме V_e снаружи от плазмы и твердых проводников.

В интегралах по свободной границе плазмы S_0 через \mathbf{n} обозначена внешняя нормаль. Чтобы получить уравнение для экстремалей, нужно проварьировать по ξ и φ выражение $F - \lambda \int_{V_i} \xi^2 dV$, где λ — множитель Лагранжа.

Выполняем сначала варьирование по ξ . Учитывая, что

$$\frac{p \delta p}{\gamma p_0} = -p \operatorname{div} \delta \xi = \delta \xi \operatorname{grad} p - \operatorname{div} (p \delta \xi);$$

$$\mathbf{H} \delta \mathbf{H} = \mathbf{H} \operatorname{rot} [\delta \xi, \dot{\mathbf{H}}_0] = [\delta \xi, \dot{\mathbf{H}}_0] \operatorname{rot} \mathbf{H} - \operatorname{div} [\mathbf{H} [\delta \xi, \dot{\mathbf{H}}_0]],$$

и производя интегрирование по частям с учетом $\delta \xi_n = 0$, на границе плазмы с проводниками и $(\mathbf{H}_0 \mathbf{n}_0) = 0$ получим

$$\begin{aligned} \delta_\xi \left(F - \lambda \int_{V_i} \xi^2 dV \right) &= 2 \int_{V_i} \left\{ \nabla p - \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}}_0] - \lambda \xi \right\} \delta \xi dV - \\ &- 2 \int_{S_0} \left\{ p + \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{H}}_0 \mathbf{H} - \frac{1}{8\pi} \xi_n \frac{\partial (\dot{H}_0^2 - \dot{H}'_0^2)}{\partial n} \right\} \delta \xi_n dS = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, вследствие произвольности вариации, получаем уравнение (3.5) с $\lambda = \omega^2 \rho_0$ и граничное условие (3.12).

При варьировании φ необходимо учесть, что потенциал магнитного поля не является, вообще говоря, однозначной функцией координат: при обходе вокруг тока I потенциал φ получает приращение, равное $\frac{4\pi I}{c}$. При колебаниях токи по стержням и по плазме могут изменяться, поэтому их тоже нужно варьировать. Разобьем φ на две части: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$, где φ_1 — однозначная функция координат, а $\varphi_0 = \sum_k I_k \varphi_k$ —

потенциал токов (неоднозначный). Здесь φ_k — потенциал магнитного поля, возникающего в том случае, когда по k -му контуру течет единственный ток, а в остальных контурах токи равны нулю. Эти выражения для φ нужно подставить в функционал (3.13) и минимизировать его по φ_1 и I_k . Некоторые из контуров могут содержать конденсаторы, наличие которых должно быть, вообще говоря, учтено в функционале (3.13) добавлением соответствующих членов. Мы, однако, будем считать, что емкости этих конденсаторов настолько велики, что при рассмотрении колебаний соответствующие контуры можно полагать короткозамкнутыми и не учитывать этих дополнительных членов.

Варьирование по φ_1 , дает

$$\delta_{\varphi_1} \left(F - \lambda \int_{V_i} \xi^2 dV \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{V_e} \Delta \varphi \cdot \delta \varphi_1 dV + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \right. \\ \left. - (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \xi_n + \xi_n \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \nabla) \dot{\mathbf{H}}_0 \right\} \delta \varphi_1 dS + \frac{1}{2\pi} \int_{S_e} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi_1 dS = 0, \quad (3.14)$$

где последний интеграл берется по поверхности проводников; $\varphi = \varphi_1 + \varphi_0$. При этом было использовано равенство

$$\xi_n (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \varphi_1 = \mathbf{n}_0 \operatorname{rot} [\mathbf{n}_0 \xi_n \varphi_1, \dot{\mathbf{H}}_0] + \\ + \varphi_1 \{ \xi_n \mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \nabla) \dot{\mathbf{H}}_0 - (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \xi_n \}, \quad (3.15)$$

которое может быть получено аналогично тому, как из (3.10) было получено (3.11). Интеграл $\int \mathbf{n}_0 \operatorname{rot} [\mathbf{n}_0 \xi_n \varphi_1, \dot{\mathbf{H}}_0] dS$ преобразуется по теореме Стокса в линейный и обращается в нуль, так как подынтегральное выражение однозначно.

Из (3.14), вследствие произвольности вариации $\delta \varphi_1$, получаем уравнение (3.6) и граничные условия (3.7), (3.10). Варьирование токов I_k приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial I_k} \left(F - \lambda \int_{V_i} \xi^2 dV \right) = - \frac{1}{2\pi} \int_{V_e} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_k dV - \\ - \sum_l I_l \frac{1}{2\pi} \int_{V_e} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_l dV + \frac{1}{2} \int_{S_0} \xi_n (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \varphi_k dS = 0. \quad (3.16)$$

Эта система должна решаться совместно с уравнениями (3.5), (3.6) для ξ и φ . Лангранжев множитель λ представляет собой собственное значение этой задачи. Оно является действительным, так как получается из вариационного принципа с действительным функционалом.

Как известно, экстремальное значение функционала F равно λ . Пользуясь (3.15) и (3.16) и граничным условием (3.10), получим для собственных функций соотношение

$$\int_{S_0} \xi_n (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \varphi dS = - \int_{S_0} \varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \int_{V_e} \{ \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi_1 + (\nabla \varphi_0)^2 \} dV.$$

Первый интеграл в правой части можно, в силу (3.7), распространить также и на поверхность проводников и преобразовать в объемный. Отсюда, с учетом (3.6), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \xi_n (\dot{\mathbf{H}}_0 \nabla) \varphi dS = \frac{1}{2\pi} \int_{V_e} (\nabla \varphi)^2 dV.$$

Подставляя это выражение в функционал (3.13), получим

$$\lambda \equiv \omega^2 p_0 = \int_{V_i} \left(\frac{P^2}{\gamma P_0} + \frac{H^2}{4\pi} \right) dV + \int_{V_e} \frac{(\nabla\varphi)^2}{4\pi} dV + \int_{S_0} \frac{\xi_n^2}{8\pi} \frac{\partial (H_0^2 - \dot{H}_0^2)}{\partial n} dS. \quad (3.17)$$

Два первых интеграла в (3.17) всегда положительны, поэтому для устойчивости ($\omega^2 > 0$) достаточно выполнение

$$\text{условия } \frac{\partial (H_0^2 - \dot{H}_0^2)}{\partial n} > 0 \text{ во всех точках границы плазмы.}$$

Конфигурации плазмы, представленные на рис. 12, 14, 16 и 19 в § 2, удовлетворяют этому условию и, следовательно, являются устойчивыми. Это видно из того, что соответствующие области годографов лежат целиком внутри окружности единичного радиуса, так, что величина магнитного поля снаружи возрастает в направлении от границы плазмы, а внутри плазмы поле либо отсутствует, либо постоянно. Следует, впрочем, иметь в виду, что эти конфигурации идеализированы: они содержат особые точки «заострения» B и D . В реальном случае за счет конечной проводимости, даже если она очень велика, плазма будет натекать тонким слоем в область вблизи силовой линии BCD (рис. 14, 16, 19). Не исключена возможность, что в этой области плазма будет неустойчива. Этот вопрос требует дополнительного исследования как теоретического, так и экспериментального.

За обсуждение работы выражаем благодарность академику М. А. Леонтовичу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Трубников, см. т. I настоящего издания, стр. 289.
2. В. Д. Шафранов, см. т. II настоящего издания, стр. 130.
3. Т. Ф. Волков, см. т. II настоящего издания, стр. 144.
4. М. Kruskal, M. Schwarzschild, Proc. Roy. Soc., A 223, 348 (1954).
5. W. B. Thompson, Proc. Phys. Soc., 70 B, № 1 (1957).
6. Г. Ламб, Гидродинамика, М., ГИТТЛ, 1947, § 73—80.

О. В. Фирсов

ПЛАЗМА В «МАГНИТНОЙ СЕТКЕ» *

Рассматривается вытекание электронно-ионной плазмы из объема, окруженного постоянным магнитным полем, вдоль силовых линий магнитного поля. Конфигурация магнитного поля такова, что внутри плазмы поле отсутствует. Оцениваются перспективы применения такой системы для создания термоядерного реактора.

§ 1. Введение

Создание управляемого термоядерного реактора связано с решением двух проблем: как нагреть плазму и как термически изолировать ее от стенок на достаточно длительное время. В настоящей работе рассматривается вторая проблема. По-видимому, единственная возможность термоизоляции плазмы от стенок заключается в том, чтобы либо временно тем или иным путем отжать плазму от стенок при помощи магнитного давления, либо окружить плазму магнитным полем так, чтобы ее частицы (электроны и ионы) могли попадать на стенки, лишь двигаясь поперек силовых линий магнитного поля.

Для устойчивости плазмы желательно, чтобы при движении ее частиц к стенкам магнитное поле возрастало. Мы рассматриваем здесь постоянное магнитное поле. В этом случае, вследствие уравнений $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, магнитное поле может возрастать по направлению к стенкам только в том случае, когда силовые линии поля в некоторых местах уходят на стенку. В эти места и будут в основном уходить частицы плазмы. Перемещение же частиц поперек поля будет медленным, так как оно возможно лишь благодаря столкновениям

* Работа выполнена в 1957 г.

(имеются в виду перемещения на расстояния, превышающие ларморовский радиус).

Что касается движения частиц вдоль силовых линий, то вследствие существования адиабатического инварианта $\frac{v_{\perp}^2}{H} = \text{const}$ и закона сохранения энергии $v^2 = \text{const}$ лишь немногие частицы могут покинуть область слабого магнитного поля.

§ 2. Проницаемость «магнитной сетки» (м-сетки)

Рассмотрим движение частиц в магнитном поле, ограничивающем некоторый объем и изображенном на рис. 1а, 1б, 1в.

На этих рисунках \oplus и \odot — обычные обозначения направления тока в проводах или катушках, создающих магнитное поле, сплошные линии — линии магнитного поля. В местах, где линии перекрещиваются, магнитное поле отсутствует, $H = 0$ (рис. 1а и 1в). На этих линиях можно принять также и вектор-потенциал $A = 0$. Случай рис. 1а представляет собой включенные навстречу друг другу катушки с током. В случае рис. 1в в аналогичной системе катушек предполагается ось вращения согнуть так, чтобы эта система катушек замыкала тороидальный объем. Что касается случая рис. 1б, то здесь провода расположены вдоль поверхности, ограничивающей тор. В этом случае также магнитное поле равно нулю в середине между проводами с током, и можно принять $A = 0$. Наиболее простое описание поведения частиц плазмы может быть получено лишь для поля, обладающего цилиндрической симметрией, когда A не зависит от одной из переменных. На рис. 1а и 1в вектор-потенциал имеет одну компоненту A_{φ} , не зависящую от φ , а в случае рис. 1б отлична от нуля только компонента A_z , перпендикулярная к плоскости рисунка и не зависящая от z . Результаты расчета, однако, не отличаются принципиально от плоского случая (рис. 1), если считать, что провода прямые и бесконечно распространяются перпендикулярно к плоскости рисунка.

Здесь ограничимся расчетом для последнего случая. Ось направим перпендикулярно к плоскости рисунка, ось x — вверх и ось y — перпендикулярно к z и x . Рассмотрим вытекание плазмы, сначала без учета столкновений (а следовательно, и диффузии поперек поля), между верхними проводами. Предположим, что плазма создана в области, где магнитное поле равно нулю по обе стороны от такой магнитной сетки, образо-

ванной системой проводов, и обе половины плазмы находятся в тепловом равновесии. Потенциал плазмы вдали от ее границ также прием за нуль.

Примем также, что в областях, где $H=0$, частицы плазмы имеют максвелловское распределение по скоростям с температурами T_- и T_+ (вообще говоря, это ограничение

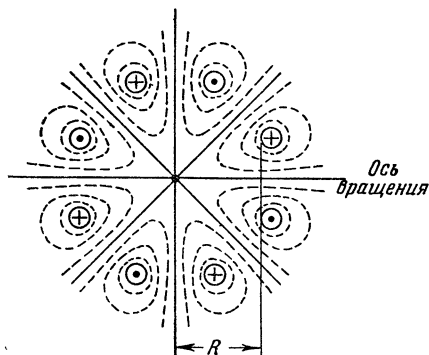


Рис. 1а.

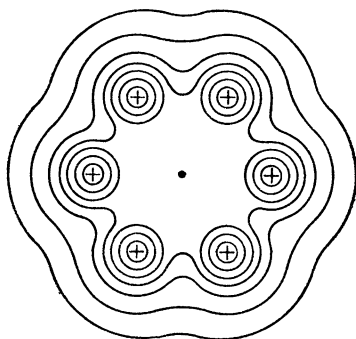


Рис. 1б.

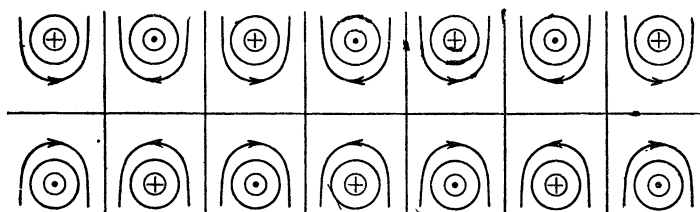


Рис. 1в.

не принципиально и имеет главным образом расчетный смысл).

Тогда, вследствие кинетического уравнения, без учета столкновений имеем (функции распределения являются функциями только интегралов движения)

$$f_{\pm} = \frac{n_0}{(2\pi m_{\pm} T_{\pm})^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_{\pm} T_{\pm}} - \frac{(p_z \mp A)^2}{2m_{\pm} T_{\pm}} \mp \frac{U}{T_{\pm}}} \quad (2.1)$$

Здесь f_{\pm} — функции распределения ионов и электронов; m_{\pm} , T_{\pm} — соответствующие массы и температуры; n_0 — концентрация плазмы (ионов или электронов) в области $H=0$ и $U=0$ (U — электрический потенциал, умноженный на

элементарный заряд); $A = A_x(x, y)$ — вектор-потенциал, умноженный на $\frac{e}{c}$; P — импульс частицы.

Там, где $A \neq 0$ и $U \neq 0$, распределение Максвелла по скоростям уже не имеет места, так как закон сохранения энергии накладывает ограничение на возможные значения $P_x^2 + P_y^2$:

$$P_x^2 + P_y^2 + (P_z \mp A)^2 \pm 2m_{\pm} U \geq P_z^2, \quad (2.2)$$

поскольку

$$P_z = mv_z \pm A = \text{const} \quad (2.3)$$

в силу уравнений Гамильтона (U также не зависит от z).

Соотношения (2.2) могут быть выполнены, и, тем не менее, благодаря наличию некоторых других интегралов движения, частица может быть связана с группой силовых линий магнитного поля там, где $A \neq 0$. Эти частицы, вследствие обратимости законов механики, также следовало бы исключить из распределения, так как все наши частицы пришли из области с $A = U = 0$. Однако этого мы сделать не можем, так как эти другие интегралы движения нам неизвестны. Поэтому получим завышенную проникаемость m -сетки.

Удобно, далее, ввести величины

$$P_+ = P_z - A, \quad P_- = P_z + A. \quad (2.4)$$

Тогда, согласно (2.2),

$$\left. \begin{array}{l} \text{для ионов } P_z = P_+ + A \\ -\infty \leq P_+ \leq \frac{P_x + P_y^2 + 2m_+ U - A^2}{2A}; \\ \text{для электронов } P_z = P_- - A \\ -\frac{P_x^2 + P_y^2 - 2m_- U - A^2}{2A} \leq P_- \leq \infty \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

(считаем $A > 0$).

Теперь потребуем, чтобы плазма была квазинейтральной, и определим отсюда $U(A)$, ($n_+ = n_-$), а для ионов — также и плотность потока:

$$n_- = n_0 e^{\frac{U}{T_-}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mT_-}} \frac{2\pi p dp}{2\pi m_- T_-} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{P_- = -\frac{P^2 - A^2 - 2m_- U_-}{2A}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{P^2}{2m_- T_-}} dp_-}{(2\pi m_- T_-)^{1/2}} = n_+ = \\
& = n_0 e^{-\frac{U}{T_+}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{P^2}{2m_+ T_+}} 2\pi p dp}{2\pi m_+ T_+} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{P_+ = \frac{P^2 - A^2 + 2m_+ U_+}{2A}} \frac{e^{-\frac{P^2}{2m_+ T_+}} dp_+}{(2\pi m_+ T_+)^{1/2}}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Мы увидим, что если температура ионов не слишком сильно отличается от температуры электронов, в задаче будут играть роль значения $A \sim \sqrt{2m_- T_-}$; поэтому распределение ионов по скоростям остается практически максвелловским, и n_+ в (2.6) можно просто заменить на $n_0 \exp\left(-\frac{U}{T_+}\right)$, т. е. пренебречь непосредственным влиянием магнитного поля на движение ионов. Тогда, полагая

$$\frac{P^2}{2m_- T_-} = y \quad \text{и} \quad \frac{P_-}{\sqrt{2m_- T_-}} = -x, \quad (2.7)$$

получим (2.6) в виде

$$n_- = n_0 e^{\frac{U}{T_+}} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \int_{-\infty}^{\left(y - \frac{A^2}{2m_- T_-} - \frac{U}{T_-}\right)^{1/2} (A/\sqrt{2m_- T_-})} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} = n_0 e^{-\frac{U}{T_+}}; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} e^{-y} dy \int_{-\infty}^{\frac{y-y_0}{2a}} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} = \int_0^{\frac{-y_0}{2a}} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} r + r \int_0^{\infty} e^{-y - \frac{(y-y_0)^2}{4a^2}} \frac{dy}{2a\sqrt{\pi}} = \\
& = F\left(-\frac{y_0}{2a}\right) + e^{-y_0/a^2} F\left(\frac{y_0}{2a} - a\right),
\end{aligned}$$

где $y_0 = \frac{A^2}{2m_- T_-} + \frac{U}{T_-}$, $a = \frac{A}{\sqrt{2m_- T_-}}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}}$,

Используя последние соотношения, получим вместо (2.8)

$$\frac{n_-}{n_0} = e^{\frac{U}{T_-}} F\left(-\frac{A}{2\sqrt{2m_-T_-}} - \frac{(U/T_-)}{2(A/\sqrt{2m_-T_-})}\right) + \\ + F\left(\frac{-A}{2\sqrt{2m_-T_-}} + \frac{(U/T_-)}{2(A/\sqrt{2m_-T_-})}\right) = e^{-\frac{U}{T_+}}. \quad (2.9)$$

Далее ограничимся случаем $T_+ = T_-$. Тогда, вводя

$$\frac{U}{T} = \eta \quad \text{и} \quad \frac{A}{\sqrt{2m_-T_-}} = \xi,$$

получим $\eta(\xi)$, или $U(A, m_-, T_-)$

$$e^\eta F\left(-\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\right) + F\left(-\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi}\right) = e^{-\eta}. \quad (2.10)$$

Решение уравнения (2.10) можно аппроксимировать формулой

$$\eta \approx 0,4\xi + 0,17\xi^2, \quad (2.11)$$

или

$$\frac{U}{T} = 0,4 \frac{|A|}{\sqrt{2m_-T}} + 0,17 \frac{A^2}{2m_-T}. \quad (2.12)$$

В области между проводниками, создающими магнитное поле, при смещении от поверхности $A=0$ на расстояние y имеем $A = \frac{e}{c}Hy$, и

$$\frac{U}{T} = 0,4 \frac{eH|y|}{c\sqrt{2m_-T}} + 0,17 \frac{e^2H^2y^2}{c^22m_-T} = 0,4 \frac{|y|}{\rho} + 0,17 \frac{y^2}{\rho^2}, \quad (2.13)$$

где ρ — ларморовский радиус электрона, имеющего энергию T .

Эффективная ширина «щели», через которую проходит плазма, равна

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,4 \frac{|y|}{\rho} - 0,17 \frac{y^2}{\rho^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U}{T}} dy = 4\rho. \quad (2.14)$$

Поскольку здесь использовано условие квазинейтральности плазмы, необходимо, чтобы дебаевская длина λ была много меньше того расстояния, на котором потенциал меняется на величину порядка температуры плазмы, т. е., согласно (2.13), радиуса ρ

$$1 \gg \frac{\lambda^2}{\rho^2} = \frac{T}{4\pi n_0 e^2} \cdot \frac{e^2 H^2}{2m_- e^2 T},$$

или

$$\frac{H^2}{8\pi} \ll n_0 m c^2. \quad (2.15)$$

С другой стороны, должно быть

$$\frac{H^2}{8\pi} > 2n_0 T. \quad (2.16)$$

В противном случае плазма динамически расширит эту щель. Следовательно, должно быть

$$T < \frac{1}{2} m c^2 \sim 2,5 \cdot 10^5 \text{ эв}. \quad (2.17)$$

Если по другую сторону м-сетки плазма попадает на стенку, то на ее границе установится такой потенциал по отношению к этой стенке, что электроны и ионы уходят из внутренней области плазмы в равном количестве. Очевидно, вследствие большей подвижности электронов, этот потенциал будет в значительной мере запирает электроны, которые по обе стороны м-сетки будут находиться почти в тепловом равновесии. В целом плазма будет вытекать через «щель» м-сетки с тепловой скоростью ионов. Размер «щели» равен, согласно (2.14), учетверенному ларморовскому радиусу электронов с энергией T .

§ 3. Учет замагниченной диффузии и интенсивность ядерных реакций

Вследствие столкновений электронов с ионами электроны имеют возможность диффузионно распространяться поперек магнитного поля. Поэтому с течением времени щель м-сетки растет по закону диффузии, и ее эффективная ширина может быть представлена формулой

$$\bar{y}_1 = 4\rho \sqrt{1 + \frac{\pi}{8} \frac{t}{\tau_e}} = 4e \sqrt{1 + \frac{\pi D t}{4\rho^2}}, \quad (3.1)$$

где r_e — время, за которое средний квадрат перемещения центра ларморовского кружка в данном направлении равен ρ^2 (коэффициент замагниченной диффузии равен $D = \frac{\rho^2}{2\tau_e}$).

Количество ионов, находящихся в плазме внутри магнитной сетки, определяется уравнением

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{V} \sqrt{\frac{T}{2\pi m_+}} \sqrt{1 + \frac{\pi t}{8\tau_e}} S_0 = -\frac{N}{\tau_0} \sqrt{1 + \frac{\pi}{8} \frac{t}{\tau_e}}, \quad (3.2)$$

где V — объем плазмы и S_0 — полная поверхность щелей, ширина которых определяется, как 4ρ ;

$$\tau_0 = \frac{V}{S_0} \sqrt{\frac{2\pi m_+}{T}} \quad (3.3)$$

— эффективное время существования плазмы без учета диффузионного расширения щелей.

Интегрирование уравнения (3.2) дает

$$N = N_0 e^{-\frac{16}{3\pi} \frac{\tau_e}{\tau_0} \left[\left(1 + \frac{\pi}{8} \frac{t}{\tau_e}\right)^{3/2} - 1 \right]} \quad (3.4)$$

Число ядерных реакций определяется формулой

$$N_{\text{яд}} = \int_0^{\infty} \frac{N^2 dt}{N_0 \tau_{\text{яд}}} = \frac{N_0}{\tau_{\text{яд}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{32}{3\pi} \frac{\tau_e}{\tau_0} \left[\left(1 + \frac{\pi}{8} \frac{t}{\tau_e}\right)^{3/2} - 1 \right]} dt,$$

где N_0 — начальное число частиц; $N_0 \tau_{\text{яд}}^{-1}$ — число ядерных реакций, происходящих в объеме V при концентрации ионов N_0/V . Интеграл приводится к виду

$$N_{\text{яд}} = \frac{N_0 \tau_0}{2\tau_{\text{яд}}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\left(1 + \frac{3\pi}{32} \frac{\tau_0}{\tau_e} x\right)^{1/3}} \approx \frac{N_0 \tau_0}{2\tau_{\text{яд}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau_0}{8\tau_e}\right)^{1/3}} \quad (3.5)$$

Если $8\tau_e \ll \tau_0$, то

$$\frac{N_{\text{яд}}}{N_0} = \frac{\tau_0^{2/3} \tau_e^{1/3}}{\tau_{\text{яд}}} \quad (3.6)$$

Если R — линейные размеры системы, то $\tau_0 \sim \frac{R^2}{\rho v_{\text{ион}}} \sim \frac{R^2 H}{T}$,

$\tau_e \sim n_0^{-1} T^{3/2}$, $n_0 = \frac{N_0}{V}$ и $\tau_{\text{яд}}^{-1} \sim n_0 f(T)$.

Таким образом,

$$\frac{N_{\text{яд}}}{N_0} \sim \frac{R^{4/3} H^{2/3} n_0^{2/3} f(T)}{T^{1/6}}.$$

Если, кроме того, потребовать $\frac{H^2}{8\pi} \approx 2n_0 T$, т. е. $n_0 \sim \frac{H^2}{4T}$, то

$$\frac{N_{\text{яд}}}{N_0} \sim \frac{R^{4/3} H^2 f(T)}{T^{1/6}}.$$

Выигрыш энергии при импульсном нагреве плазмы

$$\eta = \frac{N_{\text{яд}} Q_{\text{яд}}}{3TN_0} \sim \frac{P^{4/3} H^2 f(T)}{T^{11/6}}.$$

Начиная с $T = 10$ кэв, функция $f(T)$ в широком интервале приблизительно пропорциональна T^2 . Поэтому зависимость энергетического выхода от температуры оказывается слабой.

Для размера $R = 1$ м и $H = 10^4$ э между проводами рис. 1а (в «щелях») для реакции D—D можно получить $\sim 3 \cdot 10^{13}$ нейтронов за импульс (при энергии плазмы $4 \cdot 10^6$ джоулей). Следовательно, $\eta \approx 5 \cdot 10^{-6}$. На мишенях при энергии дейтонов 0,4 Мэв энергетический выход реакции меньше этой величины.

Т. Ф. Волков

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ*

В рамках гидродинамики решена задача о стационарном самосогласованном распределении плотности плазмы в поле стоячей электромагнитной волны. Показано, что при гидродинамической постановке вопроса отсутствуют *точные* решения, для которых плотность плазмы в некоторой области пространства обращается в нуль. Рассмотрено также влияние магнитного поля и стенок, ограничивающих плазму.

§ 1. Стационарное распределение плотности плазмы в электромагнитном поле в отсутствие внешних полей

Проблема удержания и нагрева плазмы электромагнитным полем высокой частоты требует исследования вопроса о поведении квазинейтральной плазмы в электромагнитном поле. Полное решение этой задачи встречает значительные трудности, поэтому имеет смысл рассмотрение упрощенных задач, позволяющих выяснить основные черты рассматриваемых явлений.

Рассмотрим в гидродинамическом приближении задачу о стационарном распределении плотности плазмы в самосогласованном поле электромагнитной волны заданной частоты Ω . Электромагнитное поле не будет считаться слабым, так что его

* Работа выполнена в 1957 г. и дополнена при подготовке к печати в 1958 г.

давление может быть сравнимо с давлением плазмы. В одномерном случае уравнения поля имеют вид.

$$\begin{aligned}\frac{dH_x}{dz} &= \frac{4\pi}{c} J_y + \frac{i\Omega}{c} E_y, \\ \frac{dE_y}{dz} &= -\frac{i\Omega}{c} H_x, \\ j_y &= eNU_y,\end{aligned}\tag{1.1}$$

здесь U_y — токовая скорость. Значки x и y будут в дальнейшем опущены.

Уравнения движения для электрона, пренебрегая столкновениями, запишем в виде

$$m \frac{dU}{dt} = eE.\tag{1.1'}$$

К этой системе следует добавить уравнение гидростатического равновесия

$$T \frac{dN}{dz} = -\frac{1}{c} j\bar{H}.\tag{1.1''}$$

Здесь T — сумма температур электронов и ионов, которая предполагается во всем пространстве одинаковой. Черта сверху означает усреднение по периоду электромагнитного колебания. В уравнении (1'') пренебрежено смещением ионов в поле высокой частоты Ω . Усреднение справедливо для тех частиц, которые при тепловом движении успевают мало сместиться за период электромагнитного колебания. Законность этого должна быть проверена с помощью кинетического уравнения, но этого вопроса мы здесь касаться не будем.

Предполагая зависимость от времени гармонической, получаем усредненную силу, действующую на плазму со стороны электромагнитного поля:

$$\bar{j}\bar{H} = \frac{1}{2} \frac{e^2 N c}{m \Omega^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{F^2}{2} \right).\tag{1.2}$$

Исключая H из системы (1.1'') и вводя безразмерные переменные $\varphi = \frac{E}{E_0} = \frac{eE}{\Omega \sqrt{2mT}}$, $n = \frac{N}{N_0} = \frac{4\pi e^2 N}{m \Omega^2}$, $\zeta = \frac{z}{z_0} = \frac{c}{\Omega}$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} + (1-n)\varphi &= 0, \\ \frac{dn}{n} &= -d\left(\frac{\varphi^2}{2}\right).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Из второго уравнения системы (1.3) получаем

$$n = Ce^{-\frac{\varphi^2}{2}}. \quad (1.4)$$

Плазма в электромагнитном поле распределяется аналогично тяжелым частицам в поле тяготения, т. е. соответствует «барометрической» формуле с эффективной потенциальной энергией $\frac{e^2 E^2}{4\Omega^2 m}$. Электромагнитное поле выталкивает плазму из областей, где амплитуда электрического вектора больше.

Подставляя выражение для плотности в первое из уравнений системы (1.3) и интегрируя один раз, получаем (в обычных единицах)

$$\frac{1}{16\pi} (E^2 + H^2) + nT = \text{const},$$

т. е. сумма давлений электромагнитного поля (после усреднения за период) и давления плазмы должна быть постоянной в любой точке.

Интегрируя еще раз, получаем выражение, определяющее неявным образом зависимость φ от безразмерной координаты ζ

$$\zeta - \zeta_0 = \pm \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\varphi^2}{2}}{\sqrt{\tau} \sqrt{C_1 - \tau - Ce^{-\tau}}} d\tau. \quad (1.5)$$

Постоянные C и C_1 могут меняться в зависимости от конкретной постановки задачи. Постоянная C определяет плотность плазмы, а постоянная C_1 связана с величиной магнитного поля в той точке, где эти параметры можно считать заданными. Представляет интерес исследовать характер решения в зависимости от величины этих постоянных. Рассмотрим отдельно три случая:

1) $C_1 > C$. Если предположить, что $C=0$ (это соответствует, согласно (1.4), случаю, когда плазма в пространстве отсутствует), то получим очевидный результат

$$\varphi = \sqrt{2C_1} \sin(\zeta - \zeta_0), \quad (1.6)$$

что отвечает стоячей волне в вакууме.

Рассмотрим случай $C \neq 0$. В интеграле имеет смысл рассматривать только те значения $\tau \equiv \frac{\varphi^2}{2}$, для которых выражение, стоящее под радикалом, положительно. Исследуя

поведение поля в характерных точках, находим, что вблизи точки $\varphi = 0$ имеет место разложение

$$\varphi = \pm \sqrt{2(C_1 - C)} (\zeta - \zeta_0), \quad (1.6')$$

($\varphi = 0$ при $\zeta = \zeta_0$).

Вблизи точки $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$ получаем

$$\varphi = \pm \varphi_{\text{макс}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(1 - C e^{-\frac{\varphi_{\text{макс}}^2}{2}} \right) (\zeta - \zeta_{\text{макс}})^2 \right]. \quad (1.6'')$$

($\varphi = \varphi_{\text{макс}}$ при $\zeta = \zeta_{\text{макс}}$)

Пользуясь формулами (1.5), (1.6), (1.6') и (1.6''), можно составить качественное представление о ходе функции

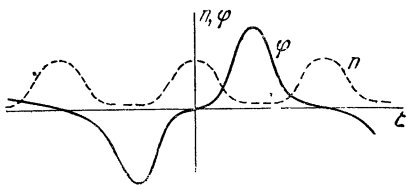


Рис. 1.

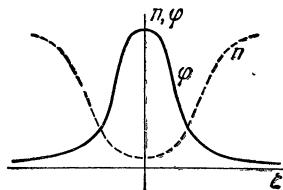


Рис. 2.

$\varphi = \varphi(\xi)$. В местах максимума поле изменится слабо по сравнению с тем значением, которое оно имеет при $C = 0$. Если плотность плазмы увеличивать (C растет), то она будет постепенно собираться в областях с малым полем, согласно равенству (1.4). Профиль поля при этом будет деформироваться (производная в нуле уменьшается). Соответствующие графики изображены на рис. 1.

Функция $\varphi = \varphi(\zeta)$ суть периодическая, но не гармоническая, с периодом

$$L = \frac{\frac{\varphi_{\text{макс}}^2}{2}}{\int_0^{\frac{\varphi_{\text{макс}}^2}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{C_1 - \tau - C e^{-\tau}}}}. \quad (1.7)$$

С ростом постоянной C величина периода увеличивается. В пределе $C = C_1$ получается другой характерный случай.

2) $C = C_1$. Как видно из равенства (1.6), интеграл при $C = C_1$ расходится. Пусть при $\zeta = \zeta_1$ $\varphi = \varphi_1 \ll 1$; тогда из (1.5) для малых φ получаем

$$\varphi = \varphi_1 e^{\pm \sqrt{C-1} (\zeta - \zeta_1)}. \quad (1.8)$$

Расходимость интеграла для малых значений φ связана с тем, что в этом случае периодичность в распределении поля нарушается. Оно экспоненциально затухает в бесконечности. Примерный график поля и плотности плазмы в этом случае изображен на рис. 2.

Рассмотрим случай, когда плотность плазмы на бесконечности равна (в безразмерных единицах) $n_\infty \gg 1$. Распределение поля в этом случае определится из равенства

$$\zeta - \zeta_0 = \pm \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\varphi_{\text{макс}}^2}{2}}{\sqrt{\tau} \sqrt{n_\infty (1 - e^{-\tau}) - \tau}} d\tau, \quad (1.9)$$

а максимальная величина поля $\tau_{\text{макс}} = \frac{\varphi_{\text{макс}}^2}{2} \approx n_\infty$. Отношение плотности плазмы в бесконечности к плотности плазмы в точке, где поле максимально, равно

$$\frac{n_\infty}{n_{\text{макс}}} \approx e^{-n_0} = e^{-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}; \quad \left(\omega_0^2 = \frac{4\pi N_\infty e^2}{m}\right), \quad (1.10)$$

т. е. может быть сделано значительно меньше единицы. Величина необходимого для этого поля равна

$$E_{\text{макс}}^2 \approx E_0 \frac{n_\infty}{n_0} = 16\pi N_\infty T,$$

т. е. давление плазмы должно полностью уравниваться усредненным давлением электромагнитной волны.

Если пренебречь экспоненциально малой плотностью плазмы в той точке, где поле максимально, то полученное решение можно приближенно «шить» со стоячей электромагнитной волной в вакууме. Так, получаем в гидродинамическом приближении корректное решение задачи о скин-эффекте в плазме, когда ее давление полностью уравнивается давлением электромагнитного поля. Толщина скин-слоя при этом порядке $\frac{c}{\omega_0}$, как и в обычном случае, когда плотность плазмы считается заданной. В действительности всегда будет существовать малое просачивание (растекание) плазмы в область, занятую стоячей электромагнитной волной, и стационарное состояние может быть лишь приближенным. Например, при ускорении плазменного сгустка сзади него будет оставаться «хвост», что приведет к уменьшению его массы. Однако, согласно формуле (1.10), этот эффект может быть сделан экспоненциально малым при помощи соответствующего выбора частот.

3) Представляет интерес рассмотрение третьего случая: $C_1 \ll C$. Отличие рассматриваемого случая от первого состоит в том, что величина $\tau = \frac{\psi^2}{2}$ не может обращаться в нуль, будучи заключена между минимальным и максимальным значением. Это значит, что поле во всем пространстве, оставаясь периодическим, сохраняет один и тот же знак. Из рассмотрения интеграла (1.5) следует, что в этом случае должно быть $C_1 \geq \ln C + 1$ и $C > 1$. При $C_1 = \ln C + 1$ имеем $\varphi = \text{const}$ и

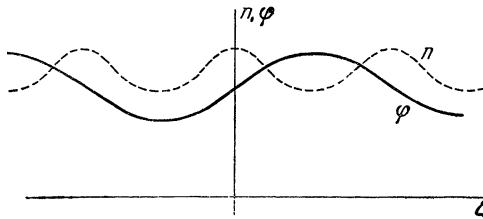


Рис. 3.

$n = 1$. Этот предельный случай можно получить непосредственно из уравнений (1.3), положив $n = 1$, т. е. если считать, что частота электромагнитного поля равна частоте ленгмюровских колебаний ($\Omega^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$). График распределения поля и плотности плазмы для этого случая изображен на рис. 3.

§ 2. Стационарное распределение плотности плазмы в электромагнитном поле в присутствии постоянного магнитного поля

Рассмотрим влияние постоянного магнитного поля H_0 на стационарное распределение плотности плазмы в высокочастотном электромагнитном поле. Пусть магнитное поле H_0 направлено вдоль оси z . Электрическое поле имеет компоненты E_x и E_y , которые находятся из уравнений

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \epsilon E_x - i\eta E_y = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \epsilon E_y + i\eta E_x = 0.$$

Здесь $\epsilon = 1 - \frac{\mu^2}{1 - \nu^2}$, $\eta = \frac{\mu^2 \nu}{1 - \nu^2}$, $\zeta = \frac{\Omega}{c} z$, $\mu = \frac{4\pi N e^2}{m \Omega^2}$,
 $\nu = \frac{\omega_H}{\Omega}$, $\omega_H = \frac{e H_0}{m c}$.

Вводим следующие величины, удобные для дальнейших вычислений:

$$\begin{aligned}\Phi &= E_x + iE_y, & \Phi^* &= E_x - iE_y, \\ \bar{\Phi} &= E_x - iE_y, & \bar{\Phi}^* &= E_x + iE_y.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Пользуясь этими обозначениями, систему (1.3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} + (\varepsilon - \eta)\Phi &= 0, \\ \frac{d^2\Phi^*}{d\zeta^2} + (\varepsilon + \eta)\Phi^* &= 0,\end{aligned}\quad (2.3)$$

Из уравнения движения для электронов

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{u}, \mathbf{H}_0] \quad (2.4)$$

получаем выражения для компонент тока

$$j_x = \frac{\Omega\mu^2}{4\pi i(1-\nu^2)} (E_x + i\nu E_y), \quad j_y = \frac{\Omega\mu^2}{4\pi i(1-\nu^2)} (E_x - i\nu E_y). \quad (2.5)$$

Подставляя эти выражения в лоренцову силу, получаем

$$\frac{1}{c} [\mathbf{jH}]_z = - \frac{Ne^2}{8m\Omega^2} \frac{d}{dz} \left[\frac{\Phi\Phi^*}{1-\nu} + \frac{\bar{\Phi}\bar{\Phi}^*}{1+\nu} \right]. \quad (2.6)$$

Функции Φ имеют размерность электрического поля. Положив $\Phi = E_0\psi$, где E_0 — «масштабное» значение электрического поля (см. выше), и введя безразмерную плотность n , получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \left(1 - \frac{n}{1-\nu}\right)\psi &= 0, \\ \frac{d^2\bar{\psi}}{d\zeta^2} + \left(1 - \frac{n}{1+\nu}\right)\bar{\psi} &= 0, \\ \frac{dn}{n} &= - \frac{1}{4} d \left(\frac{\psi\psi^*}{1-\nu} + \frac{\bar{\psi}\bar{\psi}^*}{1+\nu} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Решая последнее уравнение системы (2.7), получаем

$$n = n_0 e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{\psi\psi^*}{1-\nu} + \frac{\bar{\psi}\bar{\psi}^*}{1+\nu} \right)}. \quad (2.8)$$

Это равенство аналогично равенству (1.4). При наличии продольного магнитного поля плотность плазмы распреде-

ляется по обобщенной «барометрической» формуле. Роль потенциальной энергии играет величина

$$\frac{1}{4} \frac{\psi\psi^*}{1-\nu} + \frac{\bar{\psi}\bar{\psi}^*}{1+\nu}. \quad (2.9)$$

Потенциальная энергия представляется в виде суммы двух членов в соответствии с расщеплением плоской волны (при наличии продольного магнитного поля в плазме) на обыкновенную и необыкновенную. Действие этих волн может рассматриваться независимо. Потенциальная энергия, происходящая от действия обыкновенной волны ($\bar{\psi}$), мало меняется от присутствия магнитного поля, в противоположность потенциальной энергии от необыкновенной волны (ψ), которая обращается в бесконечность при частоте внешнего поля, равной циклотронной частоте электронов. Вблизи резонанса необходимо учитывать поглощение, и полученное решение, разумеется, не применимо.

Предположим для простоты, что присутствует только одна необыкновенная волна, т. е. положим $\bar{\psi} = 0$. Решая систему, в этом случае можно получить равенства, аналогичные полученным выше. Так:

$$n = n_0 e^{-\frac{\bar{\psi}\bar{\psi}^*}{2(1-\nu)}}. \quad (2.10)$$

Мы видели, что без магнитного поля плазма всегда выталкивалась из тех областей, где электрическое поле больше, поскольку эффективная потенциальная энергия в этом случае всегда была отрицательна. При учете магнитного поля получается, что плазма выталкивается из области сильного электрического поля при $\nu < 1$ и втягивается в эту область при $\nu > 1$.

Продельвая выкладки, аналогичные проведенным в первом параграфе работы, можно получить, что распределение поля в этом случае определяется из равенства

$$\zeta - \zeta_0 = \pm \frac{1}{2} \int^{\frac{\psi^2}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{C_1 - \tau - C e^{-\frac{\tau}{2(1-\nu)}}}}. \quad (2.11)$$

Отсюда можно получить возможные случаи стационарного распределения плотности плазмы в статическом магнитном поле, аналогичные тем, которые получены выше. При $\nu \sim 1$ качественное отличие состоит в том, что градиенты плотности плазмы становятся более крутыми. Так, например, при $C = C_1$ (второй рассмотренный выше случай) толщина скин-слоя становится в $1/\sqrt{1-\nu}$ раз меньше. Наличие продольного

магнитного поля поэтому может способствовать удержанию плазмы давлением электромагнитного поля.

Следует заметить, что наши результаты применимы в случае, когда плазма неограничена в направлениях x и y . Если это требование не выполнено, то задача усложняется необходимостью учета токов, обтекающих поверхность.

§ 3. Влияние границ на стационарное распределение плотности плазмы в электромагнитном поле

Рассмотрим теперь задачу о собственных колебаниях в слое между двумя идеально проводящими плоскостями. Амплитуду поля будем предполагать столь большой, что распределение плазмы в пространстве уже нельзя считать заданным. Как было показано в § 1, плазма должна выталкиваться из пучностей и собираться в узлы стоячей волны. Наличие в резонаторе плазмы должно изменять его собственные частоты.

Аналогично предыдущему можно получить уравнение для определения электрического поля внутри полости, ограниченной двумя идеально проводящими плоскостями, находящимися на расстоянии d друг от друга. Электрическое поле направлено параллельно этим плоскостям. Если φ , как и раньше, безразмерное электрическое поле, то

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\lambda^2 - n)\varphi = 0, \quad (3.1)$$

$$n = Ce^{-\frac{\varphi^2}{2\lambda^2}}.$$

Здесь обозначено $\lambda = \frac{\Omega d}{C}$; Ω — искомая частота колебаний.

Вводя величину $n = \frac{\varphi}{\lambda}$, получаем

$$\zeta - \zeta_0 = \int_{u_{\text{мин}}}^{u_{\text{макс}}} \frac{du}{\sqrt{2C_1 - \lambda^2 u^2 - 2Ce^{-\frac{u^2}{2}}}}.$$

Граничные условия требуют, чтобы на стенках было $\varphi = u = 0$.

Из требования $u = 0$ при $\zeta = 0$, получаем, что $\gamma = \frac{C}{C_1} < 1$.

Чтобы выполнилось граничное условие на второй поверхности, необходимо, чтобы на расстоянии, равном 1 (в безразмерных переменных), уложилось целое число полупериодов. Введя величину $\xi = \frac{\lambda u}{\sqrt{2C_n}}$, получаем

$$\lambda = 1n \int_{\xi_{\text{манс}}(\lambda^2)} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2 + \gamma e^{-\frac{C}{\lambda^2} \xi^2}}} \equiv 2\pi f(\lambda^2). \quad (3.2)$$

Полученное соотношение играет роль дисперсного уравнения для определения λ (и, тем самым, собственных частот Ω). Постоянная C есть плотность плазмы (в безразмерных единицах) в той точке, где электрическое поле равно нулю (например, вблизи идеально проводящей стенки). Из уравнения (3.1) можно получить его первый интеграл, из которого видно, что C_1 есть суммарное давление (в безразмерных единицах) в той точке, где электрическое поле исчезает. Напомним, что $\gamma < 1$.

Если плазма в пространстве отсутствует ($\gamma = 0$), то

$$\lambda = n\pi,$$

как и следовало ожидать.

Рассмотрим поведение функции $f(\lambda^2)$. При $\lambda \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow \infty$ $f(\lambda^2) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. При $\lambda^2 \sim C_1$ ход исследуемой функции можно получить численно при заданных постоянных γ и C_1 . Из (3.2) очевидно, что $f(\lambda^2)$ (при $\gamma \neq 0$) имеет значения большие, чем $\frac{\pi}{2}$ ($f(\lambda^2) = \frac{\pi}{2}$ при $\gamma = 0$). Если $\lambda \rightarrow \infty$, то соответствующие собственные значения при больших n будут приближаться к $n\pi$. Все собственные значения несколько сместятся в сторону увеличения. Наибольший сдвиг испытывает наименьшее собственное значение (т. е. соответствующее наименьшей частоте резонатора).

Качественные заключения о поведении собственных значений можно сделать также из некоторого интегрального соотношения. Для получения его умножим уравнение (3.1) на φ и проинтегрируем от 0 до 1. Учитывая обращение φ в нуль на краях, получаем

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^1 \left(\frac{du}{d\xi} \right) d\xi + C \int_0^1 e^{-\frac{n^2}{2} u^2} u^2 d\xi}{\int_0^1 u^2 d\xi}. \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что присутствие в резонаторе плазмы может лишь увеличить собственные частоты. Они будут больше частот пустого резонатора, но меньше частот резонатора с равномерно распределенной плазмой, плотность которой всюду равна ее плотности у стенки.

Автор благодарит академика М. А. Леонтовича за обсуждение результатов работы и полезные советы.

Р. З. Сагдеев

ОБ УДЕРЖАНИИ ПЛАЗМЫ ДАВЛЕНИЕМ СТОЯЧЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ *

Обсуждается вопрос о равновесии нагретой плазмы со стоячей электромагнитной волной.

§ 1. Введение

В последнее время общий интерес вызывает проблема удержания высокотемпературной плазмы в высокочастотном электромагнитном поле. В основе возможности такого удержания лежит тот факт, что переменное электромагнитное поле не проникает в проводник (каковым, в частности, может являться плазма для частот $< \omega_0$) и тем самым создает перепад давления $\left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi}\right)$ у границ проводника. Этот принцип давно используется в хорошо известных опытах с уравниванием силы тяжести ponderomotorными силами токов Фуко, возникающих в скин-слое твердых проводников.

В настоящей работе будут рассмотрены некоторые задачи о равновесии и устойчивости нагретой плазмы, удерживаемой давлением переменного электромагнитного поля.

Плазму в ряде случаев с хорошей степенью точности можно описывать с помощью уравнений газодинамики. Критерием применимости подобного подхода является малость среднего свободного пробега иона (электрона) $l \sim \frac{1}{n\sigma}$ по сравнению с характерным размером L (L — расстояние, на котором существенно меняются величины, описывающие состояние плазмы). Кулоновское сечение столкновения падает с возрастанием

* Работа выполнена в 1957 г.

относительной энергии сталкивающихся частиц, как обратный квадрат энергии $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Это решающим образом влияет на критерий применимости уравнений гидродинамики: в практически интересных случаях область температур, соответствующая сильно ионизованной плазме, лежит вне пределов гидродинамического приближения. В присутствии постоянного магнитного поля этот критерий, однако, может быть заменен другим, по крайней мере для описания движения плазмы поперек магнитного поля, а именно условием малости ларморовского радиуса иона (электрона) r_H по сравнению с L .

В общем случае для описания плазмы необходимо использовать систему кинетических уравнений для каждого сорта ионов. Такой подход, однако, чрезвычайно сложен и вряд ли допускает получение каких-нибудь конкретных результатов. Хорошим приближением для описания высокотемпературной плазмы может служить рассмотрение кинетических уравнений без интеграла столкновений с последующим учетом столкновений как малой поправки.

В настоящей статье рассматривается случай плазмы, имеющей столь высокие температуры ионов и электронов, что столкновениями можно пренебречь. В основу рассмотрения равновесного состояния положен метод кинетического уравнения без столкновительного члена, но с учетом самосогласованного электромагнитного поля.

В заключение в рамках уравнений гидродинамики исследуется вопрос об устойчивости границы между нагретой плазмой и стоячей электромагнитной волной.

§ 2. Удержание плазмы переменным электромагнитным полем при отсутствии статического магнитного поля

Пусть пространственная зависимость всех величин определяется лишь одной координатой z . Тогда функции распределения ионов и электронов $F(z, v, t)$ и $f(z, v, t)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_z \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{eE_z}{M} \frac{\partial F}{\partial v_z} = 0; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \left[\frac{eE_z}{m} + \frac{e}{mc} (v_x H_y - v_y H_x) \right] \frac{\partial f}{\partial v_z} - \\ - \left(\frac{e}{m} E_x + \frac{e}{mc} v_z H_y \right) \frac{\partial f}{\partial v_x} - \left(\frac{e}{m} E_y - \frac{e}{mc} v_z H_x \right) \frac{\partial f}{\partial v_y} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В уравнении (2.1) учитывается действие на ионы лишь продольного электрического поля E_z , возникающего за счет

разделения зарядов. Действие высокочастотного электромагнитного поля на ионы вызывает эффект, в $\frac{m}{M}$ раз более слабый, чем на электроны. К этим уравнениям необходимо добавить уравнение Максвелла с учетом тока электронов.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} e \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Пусть переменное поле осуществляется в виде стоячей электромагнитной волны с круговой поляризацией. Это не уменьшает общности рассмотрения, но несколько упростит его, как будет видно из дальнейшего. Итак:

$$\begin{aligned} E_x &= E(z) \cos \omega t; \\ E_y &= E(z) \sin \omega t; \\ H_x &= H(z) \cos \omega t; \\ H_y &= H(z) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнения Максвелла теперь примут вид

$$\cos \omega t \frac{dH}{dz} = -\frac{4\pi}{c} e \int v_y f d\mathbf{v} + \frac{\omega}{c} E \cos \omega t; \quad (2.6)$$

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{\omega}{c} H. \quad (2.7)$$

Рассмотрим уравнение (2.2) для функции распределения электронов $f(\mathbf{v}, z, t)$. Общим решением этого уравнения является произвольная функция от первых интегралов уравнений характеристик

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dz}{v_z} = -\frac{dv_z}{\frac{eE_z}{m} + \frac{e}{mc}(v_x H_y - v_y H_x)} = \\ &= -\frac{dv_x}{\frac{e}{m} E_x + \frac{e}{mc} v_z H_y} = -\frac{dv_y}{\frac{e}{m} E_y - \frac{e}{mc} v_z H_x}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

описывающих движение отдельного электрона в самосогласованных электрическом и магнитном полях. Естественным путем отыскания решения является нахождение первых интегралов движения и затем функции от первых интегралов, удовлетворяющей соответствующим краевым условиям.

Запишем уравнения движения электрона (2. 8) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{e}{m} E(z) \cos \omega t - \frac{e}{mc} v_z H(z) \sin \omega t; \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m} E(z) \sin \omega t + \frac{e}{mc} v_z H(z) \sin \omega t; \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{e}{m} E_z - \frac{e}{mc} (v_x H \sin \omega t - v_y H \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (2. 9)$$

Эта система уравнений может быть легко проанализирована в предельных случаях: а) «быстропеременные» поля, б) «квазистационарные» поля. Конкретные критерии, определяющие границы применимости этих случаев, будут даны ниже.

Рассмотрим случай а). В первых двух уравнениях будем пренебрегать вторым членом в правой части. Это связано с тем, что в электромагнитной волне $E \sim H$, и если электрон нерелятивистский, действием магнитного поля на него можно пренебречь. Плазма искажает поле волны, и поэтому более правильный критерий законности отбрасывания этого члена не обязательно совпадает с $\frac{v}{c} \ll 1$, как это будет в дальнейшем показано. В третьем уравнении $E_z \ll H$, так как E_z не является полем волны, а лишь продольным полем, обязанным разделению зарядов; поэтому второй член необходимо удерживать. Итак, в принятом нами приближении исходная система переписывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{e}{m} E(z) \cos \omega t; \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m} E(z) \sin \omega t; \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{e}{m} E_z - \frac{e}{mc} (v_x H \sin \omega t - v_y H \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (2. 9a)$$

Рассмотрим два первых уравнения. Предполагая z в виде некоторой функции от t , их можно представить

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{e}{m} E[z(t)] \cos \omega t; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m} E[z(t)] \sin \omega t.$$

Интегрируя по частям «бесконечное» число раз, получим формальное разложение

$$v_x = v_{x0} - \frac{e}{m\omega} E[z(t)] \sin \omega t - \frac{e}{m\omega^2} \frac{dE}{dz} \dot{z} \cos \omega t + \dots \quad (2. 10)$$

(аналогично для v_y).

Ряд, стоящий в правой стороне (2.10), можно рассматривать как разложение по параметру $\alpha \sim \frac{\dot{z}}{\omega\sigma}$, где $\delta \sim E/\frac{dE}{dz}$ — характерный размер, на котором существенно меняется электрическое поле (глубина скин-слоя). Выражение этого условия через параметры, характеризующие плазму и высокочастотное электромагнитное поле, будет установлено после нахождения величины δ -глубины скин-слоя.

Итак, в предположении, что $\alpha \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{e}{m\omega} E(z) \sin \omega t + v_{x_0}; \\ v_y &= -\frac{e}{m\omega} E(z) \cos \omega t + v_{y_0}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где v_{x_0} и v_{y_0} — начальные компоненты скорости частицы в области, куда электромагнитное поле не проникает.

Подставив (2.11) в третье уравнение системы (2.9), получим

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{e}{m} E_z - \frac{e}{mc} (v_{x_0} H \sin \omega t - v_{y_0} H \sin \omega t) + \\ &+ \frac{e^2}{m^2 c \omega} E H. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Условие $\alpha \ll 1$ означает, что за один период колебания электромагнитного поля электрон смещается на расстояние, много меньшее глубины скин-слоя. Если уравнение (2.12) усреднить за период колебания поля, то получим уравнение, описывающее усредненное движение электрона в скин-слое. Проведем усреднение

$$\frac{d\bar{v}_z}{dt} \cong -\frac{e}{m} E_z + \frac{e^2}{m^2 c \omega} E H - \frac{e^2 (v_{0x} + v_{0y}^2)}{m^2 c^2 \omega^2} H \frac{dH}{dz}. \quad (2.13)$$

Третий член в правой части уравнения для усредненного движения (2.13) имеет порядок малости $\frac{v^2}{c^2}$ по сравнению со вторым, если положить $E \sim H$. Поэтому его можно опустить. Пользуясь (2.7), запишем (2.13) в виде

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m} E_z - \frac{e^2}{m^2 \omega^2} E \frac{dE}{dz}. \quad (2.14)$$

Таким образом, усредненное движение электрона в направлении оси представляет собой движение в потенциальном

поле с эффективным потенциалом $e\varphi + \frac{e^2}{2m\omega^2}E^2$, где φ — обычный электростатический потенциал, возникающий из-за разделения зарядов, а $\frac{e^2}{2m\omega^2}E^2$ — потенциальный барьер, создаваемый высокочастотным полем.

Перепишем теперь исходное кинетическое уравнение в новых переменных, характеризующих среднее движение электронов. Пусть $f = f(\tilde{v}_z, z, t)$. Тогда

$$\tilde{v}_z \frac{\partial f}{\partial z} - \left\{ \frac{eE_z}{m} + \frac{e^2}{m^2\omega^2} E \frac{dE}{dz} \right\} \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}_z} = 0;$$

$$\tilde{j}_x = \frac{e^2}{m\omega^2} E \int f(\tilde{v}_z, z) dv_z. \quad (2.15)$$

Для \tilde{j}_y формула аналогична.
Далее

$$\frac{dH}{dz} = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} E \int f(\tilde{v}_z, z) d\tilde{v}_z + \frac{\omega}{c} E \cos \omega t; \quad (2.16)$$

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{\omega}{c} H. \quad (2.17)$$

Влияние переменного электромагнитного поля на ионы мы не учитывали, так что уравнение (2.1) остается неизменным.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что «температура» электронов равна нулю, что, не уменьшая общности изложения, сильно упростит его. Уравнение (2.1), если воспользоваться условием квазинейтральности, в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$v_z \frac{\partial F}{\partial v_z} - \frac{e^2}{Mm\omega^2} E \frac{dE}{dz} \frac{\partial F}{\partial v_z} = 0 \quad (2.18)$$

(продольное электрическое поле равняется $\frac{e^2}{m^2\omega^2} E \frac{dE}{dz}$, так как электроны холодные).

Уравнение (2.18) имеет решение

$$F(v, z) = F_0 \left(v^2 + \frac{m}{M} \frac{e^2 E^2(z)}{m^2 \omega^2} \right), \quad (2.19)$$

где F_0 — произвольная функция. Мы ищем такое решение нашей системы уравнений, в котором на (+) бесконечности имеется только плазма, а на (−) бесконечности — стоячая электромагнитная волна. Выбор F_0 тогда однозначно определяется условием на (+) бесконечности: $F_0(v^2)$ — распределение ионов по скоростям при $z \rightarrow +\infty$.

Подставив (2.19) в (2.16) и исключив в (2.16) H_z с помощью уравнения (2.17), имеем

$$E'' = E \left[\frac{4\pi e^2}{mc^2} \int F_0 \left(\varepsilon + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right) d\varepsilon - \frac{\omega^2}{c^2} \right]. \quad (2.20)$$

Так как в равновесии нет макроскопического потока частиц вдоль z , функция распределения зависит только от v^2 , т. е. от $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$. Пределы интегрирования по ε в правой части (2.20) от $\varepsilon^2 = 0$ до $\varepsilon = \varepsilon_{\text{макс}} - \frac{e^2 E^2(z)}{2m\omega^2}$, где $\varepsilon_{\text{макс}}$ — максимальная энергия ионов при $z \rightarrow \infty$. Уравнение (2.20) можно представить в следующей форме:

$$d \frac{(E')^2}{2} + d \frac{E^2 \omega^2}{2 c^2} = \frac{4\pi e^2}{mc^2} E \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}} - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}} F_0 \left(\varepsilon + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right) d\varepsilon. \quad (2.21)$$

Интегрируем по dE от 0 до E

$$\frac{E'^2}{2} + \frac{E^2 \omega^2}{2 c^2} = \frac{4\pi e^2}{mc^2} \int_0^E \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}} - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}} F_0 \left(\varepsilon + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right) d\varepsilon dE^2$$

(здесь мы воспользовались тем, что при $z \rightarrow \infty$ одновременно с E обращается в нуль и $E' \sim H$).

Подставив в (2.21) — $\frac{\omega}{c} H = E'$, получим

$$\frac{H^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi} = \frac{2e^2}{m\omega^2} \int_0^E \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}} - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}} F_0 \left(\varepsilon + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right) d\varepsilon dE^2. \quad (2.22)$$

Положим в уравнении (2.22) $E = E_0$, где $\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} = \varepsilon_{\text{макс}}$, т. е. условие на границе плазмы и стоячей электромагнитной волны. Тогда, интегрируя выражение, стоящее в правой части (2.22), один раз по частям, получим

$$\frac{H_0^2}{8\pi} + \frac{E_0^2}{8\pi} = 2 \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}} \varepsilon F_0(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.23)$$

т. е. условие равенства давлений электромагнитного и плазменного.

Эти результаты свидетельствуют о существовании стационарного решения, где на $+\infty$ имеется только плазма, а на $-\infty$ электромагнитное поле оправдывается, если функция

распределения ионов по скоростям обращается в нуль при $\varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}$.

Для того чтобы найти распределение электрического и магнитного полей, а также плотности плазмы в переходной области, нам необходимо решить уравнение (2.22) с граничными условиями $E \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $E = E_0$ при $z = 0$, считая, что точка $z = 0$ соответствует точке возврата ионов с максимальной энергией $\varepsilon_{\text{макс}}$.

Считаем, что $F_0(\varepsilon)$ — известная функция, обращающаяся в нуль при $\varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}$.

Уравнение (2.20) позволяет отыскать асимптотические решения при $z \rightarrow \infty$ и при $z \rightarrow 0$. Обозначим $F_0 = n_0 \varphi_0(\varepsilon)$,

где $\int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon = 1$. Таким образом n_0 — плотность ионов в области, где электромагнитное поле отсутствует, т. е. при $z \rightarrow \infty$.

1) Рассмотрим асимптотику решения при $z \rightarrow \infty$. Тогда $\frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \ll \varepsilon_{\text{макс}}$. В уравнении (2.21) при интегрировании в правой части можно верхний предел считать равным $\varepsilon_{\text{макс}}$. Уравнение (2.20) обращается в $E'' = \frac{E}{c^2} (\omega_0^2 - \omega^2)$, где $\omega_0^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}$. Это уравнение дает экспоненциально затухающее решение $E \sim e^{-\frac{\omega_0}{c} z}$.

2) Случай $z \rightarrow 0$. Естественно предположить для достаточно гладкой функции F_0 , что в окрестность $z = 0$ могут приходить только ионы, имевшие на $+\infty$ энергии, мало отличающиеся от $\varepsilon_{\text{макс}}$. Тогда, разлагая $F_0 = n_0 \varphi_0 \left(\varepsilon + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right)$ вблизи $\varepsilon + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} = \varepsilon_{\text{макс}}$ в ряд и удерживая два первых члена, получим

$$\frac{(E')^2}{2} + \frac{E^2}{2} \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{m\omega^2}{e^2} \frac{\varepsilon_{\text{макс}}^2}{2} \left[\varphi_0(\varepsilon_{\text{макс}}) - \varphi_0'(\varepsilon_{\text{макс}}) \frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{3} \right]. \quad (2.24)$$

Решение этого уравнения, обращающееся в $E = E_0$ при $z = 0$, есть

$$E \approx E_0 \left(1 - z \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{m\omega^2}{e^2} \frac{\varepsilon_{\text{макс}}^2}{2} \left[\varphi_0 - \varphi_0' \frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{3} \right] \right). \quad (2.25)$$

Итак, асимптотическое поведение E вблизи $z = 0$ описывается линейной функцией.

Асимптотика поведения магнитного поля такова:

1) $z \rightarrow \infty$

$$H \sim e^{-\frac{\omega_0}{c} z};$$

2) $z \rightarrow 0$

$$H \cong E_0 \frac{\omega_0^2}{c} \frac{m\omega}{e^2} \frac{\varepsilon_{\text{макс}}^2}{2} \left[\varphi_0 - \varphi_0' \frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{3} \right]. \quad (2.26)$$

При $z \rightarrow \infty$

$$\frac{H}{E} \cong \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Выше был введен параметр $\alpha \sim \frac{\dot{z}}{\omega \delta}$, где $\dot{z} \sim v_z$ — тепловая скорость электрона; δ — характерный размер, на котором существенно меняется картина поля. Теперь можем, пользуясь уравнением (2.20), оценить величину δ

$$\frac{E}{\delta^2} \sim E \left(\frac{4\pi e^2}{mc^2} n_0 - \frac{\omega^2}{c^2} \right),$$

и если $\omega \ll \omega_0$, то $\delta \sim \frac{c}{\omega_0}$, что соответствует глубине скин-слоя в линейной теории.

Условие применимости наших результатов $\alpha \ll 1$ выглядит теперь следующим образом: $\frac{\dot{z}}{\omega \delta} \sim \frac{v_{\text{макс}} \omega_0}{c \omega} \ll 1$, где $v_{\text{макс}}$ — скорость электрона, обладающего максимальной энергией.

$$\frac{v_{\text{макс}}}{c} \frac{\omega_0}{\omega} \ll 1. \quad (2.27)$$

Кроме того, в уравнениях (2.9) мы пренебрегли влиянием магнитного поля волны по сравнению с влиянием электрического поля волны: $E \gg \frac{v}{c} H$. В асимптотике $\frac{H}{E} \sim \frac{\omega_0}{\omega}$, т. е. условие пренебрежимости влиянием магнитного поля $\frac{v}{c} \frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$ совпадает с (2.27).

Полученное стационарное решение соответствует плазме с «обрезанным» распределением скоростей, причем $\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{e^2 E_{\text{макс}}^2}{2m\omega^2}$. Из условия $\frac{E_{\text{макс}}^2}{8\pi} = \frac{H_{\text{макс}}^2}{8\pi} = n_0 T$ будем иметь

$$\frac{\varepsilon_{\text{макс}}}{T} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (2.28)$$

здесь T — «температура» плазмы в энергетических единицах.

Столкновения в плазме, как бы не были они редкими, будут приводить к появлению ионов с $\varepsilon > \varepsilon_{\text{макс}}$. Такие электроны (ионы) будут уходить через «эффективный» потенциальный барьер $\frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}$. Однако если $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$, таких частиц будет мало, и уход будет небольшой, так как войдет экспоненциальный множитель из максвелловского распределения $e^{-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$.

Далее рассмотрим кратко случай б) «квазистационарных» полей, который определим условием $\alpha \gg 1$.

Можно ожидать, что при этом условии действием электрического поля волны на электроны и ионы в скин-слое можно пренебречь по сравнению с действием магнитного поля. Кроме того, можно считать, что частота изменения поля настолько мала, что можно пренебречь поворотом вектора поляризации за время нахождения любого электрона в скин-слое. Пусть в данный момент времени магнитное (а следовательно, и электрическое) поле волны направлено по оси x . Тогда движение иона (электрона) вдоль оси y дается уравнением

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{e}{mc} v_z H(z),$$

или, выразив v_y как функцию z , получим

$$v_z \frac{dv_y}{dz} = \frac{e}{mc} v_z H(z);$$

$$v_y = \frac{e}{mc} \int_{\infty}^z H(z) dz + v_{y_0}, \quad (2.29)$$

(v_{y_0} — компонента скорости v_y в области, где поле $H \rightarrow 0$).

Нетрудно видеть, что уравнение (2.29) выражает собой сохранение y -компоненты обобщенного импульса $p_y = \frac{e}{c} A_y$. Теперь можно последнее уравнение системы (2.9), описывающее движение вдоль z , записать следующим образом:

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{m} E_z - \frac{e^2}{m^2 c^2} H(z) \int_{\infty}^z H(z') dz' + \frac{e}{mc} H v_{y_0}. \quad (2.30)$$

Так как $\frac{dE}{dz} = -\frac{\omega}{c} H$, то «эффективный» потенциальный барьер содержит член с E^2 , как и в случае быстропеременного поля. Появление последнего члена в уравнении (2.30) существенно связано с медленностью изменения поля.

Аналогично случаю а) можно записать теперь функцию распределения ионов по продольным скоростям

$$f(v, z) = n_0 f_1(v_{y_0}) \varphi_0 \left(v^2 + \frac{m}{M} \left(\frac{e^2 E^2}{m^2 \omega^2} + \frac{e}{m \omega} v_{y_0} E \right) \right), \quad (2.31)$$

где $f_1(v_{y_0})$ — распределение электронов по скоростям v_y в области $H \rightarrow 0$. Подставляя (2.31) в уравнение (2.6) и пользуясь (2.7), можно найти ход изменения поля в переходной области, т. е. структуру скин-слоя.

§ 3. Взаимодействие плазмы со стоячей электромагнитной волной во внешнем постоянном магнитном поле

Присутствие постоянного магнитного поля существенно меняет характер движения электронов и ионов в скин-слое, а следовательно, и условия удержания плазмы стоячей электромагнитной волной, в случае, когда ω — частота изменения поля, уменьшаясь, становится сравнимой с ω_{H_0} — ларморовской частотой обращения электронов в постоянном магнитном поле.

В настоящей статье будем рассматривать частоты, удовлетворяющие условию $\omega \ll \omega_{H_0}$.

Если бы, наряду с этим условием, выполнялось условие малости ларморовского радиуса электрона по сравнению с характерным размером, на котором существенно меняется поле, то движение электронов можно было бы описывать в «дрейфовом» приближении.

Характерный размер определяется глубиной скин-слоя, получающейся из решения самосогласованной задачи.

Пусть все величины зависят от одной пространственной координаты z , и \mathbf{H}_0 направлено по оси z .

Как будет показано в дальнейшем, при условии $\omega \ll \omega_{H_0}$ глубина скин-слоя автоматически оказывается больше ларморовского радиуса электрона, если амплитуда статического поля сравнима с амплитудой переменного поля. Итак, будем пользоваться «дрейфовым» приближением для описания движения электронов.

Пусть стоячая электромагнитная волна имеет круговую поляризацию (отметим, что в присутствии постоянного магнитного поля это условие имеет принципиальный характер, как будет видно ниже, и вводится отнюдь не для простоты рассуждений).

$$E_x = E \cos \omega t; \quad H_x = H \cos \omega t;$$

$$E_y = E \sin \omega t; \quad H_y = H \sin \omega t.$$

Ограничив частоты снизу $\omega \gg \Omega_{H_0}$ (Ω_{H_0} — ларморовская частота ионов), можем не учитывать действия переменного поля на ионы (соответственно, и ионного тока в уравнениях Максвелла). Тогда, раскрывая выражение для скорости дрейфа электронов с $\frac{eH}{H^2}$, получим

$$v_x = c \frac{E \sin \omega t}{H_0^2 + H^2} H_0; \quad v_y = -c \frac{E \cos \omega t}{H_0^2 + H^2} H_0. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в третье уравнение системы (9), получим уравнение, описывающее усредненное движение электронов по оси z .

$$m \frac{dv_z}{dt} = eE_z - e \frac{H_0}{H_0^2 + H^2} EH. \quad (3.2)$$

Пользуясь (7), запишем «эффeктивный» потенциальный барьер в виде $c \frac{e}{\omega} \frac{E^2}{H_0^2 + H^2} \cdot H_0$. Это выражение зависит от знака ω (т. е. от направления вращения вектора поляризации в волне). Положительный барьер получается при $\omega > 0$. Если же $\omega < 0$, то удержания плазмы нет (в линейной теории распространения электромагнитной волны в плазме это означает, что $\varepsilon > 0$, где ε соответствующая компонента тензора диэлектрической проницаемости). Полученный эффeктивный барьер имеет наглядное физическое толкование. Так как в волне, поляризованной по кругу, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} параллельны, то \mathbf{E} имеет постоянную слагающую, направленную вдоль «вращающейся» силовой линии суммарного магнитного поля $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}$, равную $E \cos(\mathbf{H}, \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}) = E \frac{H}{\sqrt{H_0^2 + H^2}}$, проектируя которую на ось z , получим «эффeктивное» электрическое поле

$$E_{\text{эфф}} = \frac{EH}{H_0^2 + H^2} H_0.$$

Тогда функция распределения по продольным скоростям выразится через функцию распределения на бесконечности таким образом:

$$\varphi(v, z) = \varphi_0 \left(v^2 + \frac{ce}{m\omega} \frac{E^2 H_0}{H_0^2 + H^2} \right).$$

Пользуясь этим выражением, можно из уравнения Максвелла для \mathbf{E} получить характер изменения поля в скин-слое.

Для случая сильного постоянного поля $H_0 \gg H$ получаются формулы, аналогичные (2.20)—(2.26) с тем единственным отличием, что вместо ω^2 стоит $\omega\omega_{H_0}$.

Глубина скин-слоя при этом получается $\delta^2 \sim \frac{c^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_{H_0}}{\omega}$.

Сравнивая с ларморовским радиусом электрона, получим условие малости последнего по сравнению с δ .

$$\frac{v^2}{\omega_{H_0}^2} \ll \frac{c^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_{H_0}}{\omega}.$$

Это условие при $\frac{H_0^2}{8\pi} \sim nT$ примет вид $\omega \ll \omega_{H_0}$.

Максимальная энергия частиц, удерживаемых барьером, равна $\epsilon_{\text{макс}} = T \frac{\omega_0^2}{\omega\omega_{H_0}}$. Таким образом, уход частиц из ловушки за счет столкновений между собой будет определяться экспоненциальным фактором $\exp\left\{-\frac{\omega_0^2}{\omega\omega_{H_0}}\right\}$. При плотностях $n \gg 10^{10}$ частиц/см и $H \sim 10^4$ э этим уходом практически можно пренебречь по сравнению с диффузией поперек постоянного магнитного поля.

Если частота ω , уменьшаясь, становится сравнимой с Ω_{H_0} , то проведенное выше рассмотрение, сделанное без учета ионного тока, оказывается несправедливым.

При $\omega \ll \Omega_{H_0}$, когда движение ионов поперек магнитного поля можно описывать «дрейфовой» теорией, ток ионов, движущихся со скоростью $c \frac{[EH]}{H^2}$, компенсирует ток электронов, так что суммарный «эффективный» барьер обращается в нуль.

Равновесие плазмы с переменным полем в случае, когда постоянное магнитное поле перпендикулярно к нормали к границе плазмы, в настоящей статье обсуждаться не будет, так как для движения плазмы поперек силовых линий магнитного поля магнитная гидродинамика остается формально справедливой даже и при отсутствии столкновений.

§ 4. Устойчивость тангенциального разрыва «Плазма — стоячая электромагнитная волна»

Этот параграф посвящен вопросу об устойчивости границы между плазмой и полостью, в которой возбуждена стоячая электромагнитная волна. Рассмотрим одномерный случай. Пусть электромагнитные колебания возбуждены в полости,

ограниченной с одной стороны проводящей плоской металлической поверхностью ($x=0$) и с другой стороны плоской поверхностью плазмы ($x=L$), находящейся в равновесии с давлением электромагнитной волны. Плазму будем считать идеальным проводником (все выводы будут справедливы для длин волн возмущений границы много больших глубины скин-слоя).

Пусть плоская граница плазмы слегка искривлена. Неустойчивость может возникнуть в том случае, если давление электромагнитного поля на вогнутом (в сторону плазмы) участке границы будет больше, чем на выпуклом.

Для случая, когда частоты поверхностных колебаний плазмы (соответственно инкременты нарастания неустойчивости) много меньше частоты электромагнитного колебания в полости, можно легко проследить возможное появление неустойчивости. Действительно, при сделанном предположении геометрия полости изменяется адиабатически медленно и можно искать собственные колебания в полости при фиксированной границе.

Поведение плазмы будем описывать уравнениями магнитной гидродинамики с идеальной проводимостью:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0; & \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}[\mathbf{vH}]; \\ p &= \text{const} \cdot \rho^\gamma; & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}]. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

В равновесном состоянии плазма однородна и заполняет полупространство ($x > L$). Пусть плазма помещена в постоянное однородное магнитное поле, параллельное ее плоской поверхности $\mathbf{H}_{\text{ст}}^0 \parallel y$.

Линеаризованные уравнения для возмущенного движения плазмы имеют вид (в обозначениях работы [1])

$$\rho^{(1)} = -\rho^0 \operatorname{div} \xi, \quad H_i^{(1)} = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{H}_{\text{ст}}^0],$$

$$p^{(1)} = -\gamma p_0 \operatorname{div} \xi,$$

$$\omega^2 \xi + c^2 \nabla \operatorname{div} \xi + \frac{c_H^2}{H_{\text{ст}}^0{}^2} [\operatorname{rot} \mathbf{H}_i^{(1)} \cdot \mathbf{H}_{\text{ст}}^0] = 0, \quad (4.2)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p^0}{\rho_0}; \quad c_H^2 = \frac{H_{\text{ст}}^0{}^2}{4\pi c^0}.$$

Рассмотрим возмущения, имеющие вид $f(x) \exp(ikz + i\omega t)$. Тогда, разрешив систему уравнений (4.2), получим следующие выражения для ξ и $H^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \xi &= C e^{-\alpha x}; \\ \xi_z &= -\frac{ik}{\alpha} C e^{-\alpha x}; \\ p^{(1)} &= C \gamma p^0 \left(\alpha - \frac{k^2}{\alpha} \right) e^{-\alpha x}; \\ H_{yi}^{(1)} &= C H_{\text{ст}}^0 \left(\alpha - \frac{k^2}{\alpha} \right) e^{-\alpha x}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{k^2(c^2 + c_H^2) - \nu^2}{c^2 + c_H^2}. \quad (4.3')$$

Теперь найдем возмущение стоячей электромагнитной волны в полости. Пусть невозмущенное решение имеет вид

$$E_y^0 = E^0 \sin \frac{\omega}{c} x; \quad H_z^0 = H_0 \cos \frac{\omega}{c} x,$$

где $\omega = c \frac{\pi}{\epsilon}$, $E^0 = -H^0$.

Тогда уравнения для поправок к амплитуде стоячей волны примут вид

$$H_z^{(1)} = -\frac{c}{\omega} \frac{dE_y^{(1)}}{dx}; \quad \frac{d^2 E_y^{(1)}}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_y^{(1)} = 0.$$

Граничные условия — обращение в нуль тангенциальной компоненты поля на обеих границах — дают

$$E_y^{(1)}(x=0) = 0;$$

$$E_y^{(1)}(x=l) = -\xi_x \frac{dE_y^0}{dx} \Big|_{x=l}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= -\frac{\omega}{c} E^0 \xi_x \frac{\sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} x}{\sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} l}; \\ H_z^{(1)} &= E^0 \xi_x \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \frac{\cos \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} x}{\sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} l}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теперь с помощью (4.3) и (4.4) из условия равенства давлений вне и внутри возмущенной плазмы получим дисперсионное уравнение поверхностных колебаний плазмы, удерживаемой стоячей электромагнитной волной

$$\begin{aligned} -\frac{H^{0z}}{4\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} l = \\ = \left(\alpha - \frac{k^2}{a} \right) \left(\gamma p_0 + \frac{H_{\text{ст}}^{0z}}{4\pi} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

(при $\frac{\omega}{c} > k$).

Аналогично для $\frac{\omega}{c} < k$

$$\begin{aligned} -\frac{H^{0z}}{4\pi} \sqrt{-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2} \operatorname{cth} \sqrt{-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2} l = \\ = \left(\alpha - \frac{k^2}{a} \right) \left(\gamma p_0 + \frac{H_{\text{ст}}^{0z}}{4\pi} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где α определяется соотношением (4.3'). H^0 — амплитуда стоячей волны связана с p^0 — равновесным давлением плазмы равенством $p_0 = \frac{H^{0z}}{8\pi}$. Из (4.5), (4.6) и (4.3') получаем чрезвычайно простой критерий устойчивости

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} l > 0,$$

и так как $\omega = c \frac{\pi}{l}$, окончательно будем иметь

$$k^2 > \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (4.7)$$

Из (4.7) видно, что когда длина волны возмущения поверхности плазмы становится сравнимой с длиной электромагнитной стоячей волны, в полости появляется неустойчивость. Напротив, относительно коротковолновых возмущений равновесие является устойчивым.

Это условие налагает ограничение сверху (на выбор) частоты переменного поля при заданных размерах объема плазмы.

В заключение приношу благодарность академику М. А. Леоновичу, С. М. Осовцу и профессору Д. А. Франк-Каменецкому за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Шафранов, Атомная энергия, № 5, стр. 38 (1956).

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Г. И. Будкер. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую	3
Г. И. Будкер. Некоторые вопросы, связанные с пространственной устойчивостью кольцевого тока в плазме	32
С. Т. Беляев, Г. И. Будкер. Многоквантовая рекомбинация в ионизованном газе	41
С. Т. Беляев. Кинетическое уравнение для разреженных газов в сильных полях	50
С. Т. Беляев. Кинетика ионизованного газа в сильном магнитном поле	66
В. В. Бабилов, В. И. Коган. Лучистая теплоотдача плотной высокотемпературной плазмы	86
В. И. Коган. Рекомбинационное излучение водородной плазмы	99
Б. А. Трубников. Электромагнитные волны в релятивистской плазме при наличии магнитного поля	104
В. С. Кудрявцев. Функция распределения электронов в плазме, находящейся в магнитном поле	114
Б. А. Трубников, А. Е. Бажанова. Магнитное излучение слоя плазмы	121
Т. Ф. Волков. К задаче о распадении произвольного разрыва в сплошной среде	148
Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. О высокочастотном нагреве плазмы	153
С. М. Осовец. К теории быстрых процессов	165
Ю. Ф. Наседкин, С. М. Осовец. Исследование мощного кольцевого газового разряда при наличии равновесной орбиты	182
С. М. Осовец, Н. И. Щедрин. Плазменный виток при наличии активного сопротивления	196
Ю. Ф. Наседкин, Е. И. Павлов. Влияние формы магнитного поля на кольцевой газовый разряд	214
Н. В. Филиппов. Исследование давлений в мощном импульсном газовом разряде с помощью пьезоэлектрического измерителя	231
Г. М. Антропов, В. А. Беляев, М. К. Романовский. О поведении быстрых электронов в электронной модели ловушки с магнитными пробками	250
О. Б. Фирсов. Оттапливание заряженной частицы от областей с сильным магнитным полем	259

Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле	268
А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев. О некоторых свойствах плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов в магнитном поле	278
Б. Б. Кадомцев. Магнитные ловушки с «гофрированным» полем	285
С. И. Брагинский, Б. Б. Кадомцев. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников	300
О. Б. Фирсов. Плазма в «магнитной сетке»	327
Т. Ф. Волков. О стационарном распределении плотности плазмы в электромагнитном поле	336
Р. З. Сагдеев. Об удержании плазмы давлением стоячей электромагнитной волны	346

**Физика плазмы
и проблема управляемых
термоядерных реакций**
Том III

*Утверждено к печати
Институтом атомной энергии
Академии наук СССР*

Сдано в набор 13/VI-1958 г.
Подписано к печати 21/VII-1958 г.
Формат $60 \times 90^{1/8}$. Печ. л. 22,75 + 1 вкл.
Уч.-изд. л. 18,9. Тираж 3000 экз.
Т-08810. Изд. № 3432. Тип. зак. № 786.

Цена 13 р. 20 к.

Издательство Академии наук СССР
Москва, Б-64, Подсосенский пер., 21
1-я типография Издательства АН СССР
Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12.

**ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ**

ТОМ

III