

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ

Т О М
IV

ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР
1 9 5 8

Ответственный редактор
академик М. А. ЛЕОНТОВИЧ

С. М. Осовец

**ОБ УДЕРЖАНИИ ПЛАЗМЫ БЕГУЩИМ
МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ***

Рассматривается вопрос об удержании горячей плазмы полем бегущей волны. Получены выражения для магнитных полей и магнитных давлений, создаваемых на поверхности плазмы системой токов, сдвинутых по фазе друг относительно друга на некоторый угол. Найдены условия, при которых возмущения поверхности плазмы можно считать малыми. Исходя из этих условий, получены соотношения, определяющие основные параметры контура, создающего бегущее поле. Приведены соотношения, характеризующие энергетический баланс термоядерного реактора, у которого плазма удерживается бегущим полем.

В настоящей работе предлагается один из путей, при котором оказывается принципиально возможным воспрепятствовать уходу плазмы из полезного объема и компенсировать наличие «дыр» в системах типа ловушек или отсутствие равновесного состояния, например в тороидальных системах.

Рассмотрим поверхность плазмы, взаимодействующей с магнитным полем системы проводников, по которым протекает переменный ток высокой частоты, причем фазы токов соседних проводников сдвинуты друг относительно друга на некоторый постоянный угол φ . Расположение и нумерация проводников показаны на рис. 1. Поверхность плазмы считаем возмущенной настолько слабо, что влиянием искажения поверхности на распределение магнитного поля можно пренебречь. Ниже будет приведен критерий справедливости такого предположения. Плазму считаем идеально проводящей, так что давление

* Работа выполнена в 1957 г.

магнитного поля можно считать приложенным к поверхности. Вычислим в некоторой точке x на поверхности плазмы магнитное поле, создаваемое токами бесконечного числа равноотстоящих проводников, расположенных, как показано на рис. 1. Ток проводника

$$\mathcal{J} = \text{Re } \mathcal{J}_0 e^{i(\omega t + n\varphi)}, \quad (1)$$

где n — номер проводника, отсчитываемый относительно некоторого произвольно выбранного «нулевого» проводника.

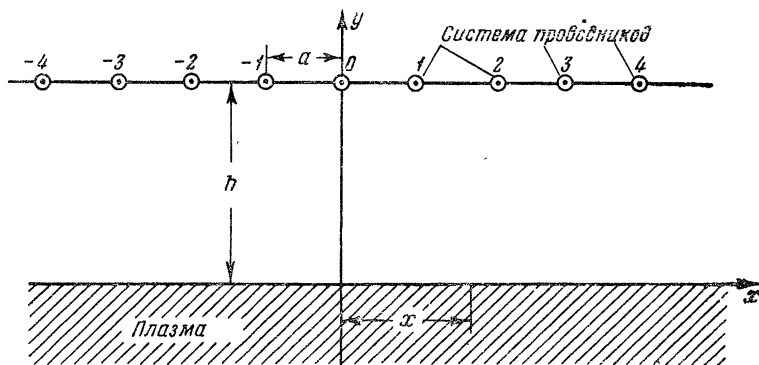


Рис. 1.

Пользуясь методом зеркального отображения, находим поле на поверхности идеального проводника в виде ряда

$$H(x, t) = \text{Re} \frac{4\pi\mathcal{J}_0 e^{i\omega t}}{ac} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{h}{a} e^{in\varphi}}{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(n - \frac{x}{a}\right)^2}. \quad (2)$$

Выражение (2) после соответствующих преобразований приводится к виду

$$H(X, t) = \text{Re} \frac{4\pi\mathcal{J}_0 e^{i\omega t}}{ac} \frac{\text{sh}(1-\psi) Y_0 e^{iX\psi} + \text{sh}\psi Y_0 e^{-iX(1-\psi)}}{\text{ch} Y_0 - \cos X}$$

или

$$= \frac{4\pi\mathcal{J}_0}{ac} \frac{\text{sh}(1-\psi) Y_0 \cos(\omega t + X\psi) + \text{sh}\psi Y_0 \cos[\omega t - (1-\psi)X]}{\text{ch} Y_0 - \cos X}. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:

$$X = \frac{2\pi x_0}{a}; \quad Y_0 = \frac{2\pi h}{a}; \quad \psi = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Выражение для поля при $\psi = 0$ сводится к

$$H(X, t) = \frac{4\pi\mathcal{J}_0}{ac} \frac{\text{sh } Y_0 \cos \omega t}{\text{ch } Y_0 - \cos X}$$

и для $\psi = 1/2$ — к

$$H(X, t) = \frac{8\pi\mathcal{J}_0}{ac} \frac{\text{sh } Y_0/2 \cos \frac{X}{2} \cos \omega t}{\text{ch } Y_0 - \cos X}.$$

Как и должно быть, в этих двух случаях бегущего поля нет. Магнитное давление равно

$$\begin{aligned} p_M = \frac{H^2}{8\pi} = \pi \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac} \right)^2 \{ & \text{sh}^2(1 - \psi) Y_0 \cos(\omega t + X\psi) + \\ & + 2\text{sh}(1 - \psi) Y_0 \text{sh } \psi Y_0 \cos 2[\omega t - (1 - \psi)X] + \\ & + 2\text{sh}^2 \psi Y_0 \cos 2[\omega t - (1 - \psi)X] + \text{sh}^2(1 - \psi) Y_0 + \\ & + 2\text{sh}(1 - \psi) Y_0 \text{sh } \psi Y_0 \cos X + \text{sh}^2 \psi Y_0 \} \frac{1}{(\text{ch } Y_0 - \cos X)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Это выражение можно разбить на две части: периодическую (по времени) составляющую и усредненное по времени давление

$$\bar{p}_M = \pi \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac} \right)^2 \frac{\text{sh}^2(1 - \psi) Y_0 + 2\text{sh}(1 - \psi) Y_0 \text{sh } \psi Y_0 \cos X + \text{sh}^2 \psi Y_0}{(\text{ch } Y_0 - \cos X)^2}. \quad (5)$$

Среднее по времени давление, однако, является некоторой периодической функцией координаты X . Найдем давление, усредненное по координате X за период ее изменения.

$$\bar{\bar{p}}_M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{p}_M dX = \pi \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac} \right)^2 \frac{\text{ch}(1 - 2\psi) Y_0}{\text{sh } Y_0}. \quad (6)$$

Приравняем эту величину среднему давлению, которое необходимо компенсировать действием бегущего поля. В простейшем случае будем считать, что среднему по времени и координате X давлению поля противодействует только газовое давление. Тогда

$$\pi \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac} \right)^2 \frac{\text{ch}(1 - 2\psi) Y_0}{\text{sh } Y_0} = nkT = \rho \frac{u^2}{2}, \quad (7)$$

где ρ — масса единицы объема, u — скорость звука в газе при температуре T .

Выясним теперь условие применимости исходного предположения о том, что поверхность плазмы в квазистационарном состоянии можно считать слабо искаженной и практически не влияющей на распределение магнитного поля. Обозначим отклонение Y от невозмущенного состояния через $\Delta(X)$ и будем считать, что $\Delta(X) \ll Y_0$. Тогда величину Δ можно вычислить из условия

$$\bar{p}_M(X, Y) \simeq \bar{p}_M(X, Y_0) + \Delta(X) \left(\frac{\partial \bar{p}_M}{\partial Y} \right)_{Y_0} = \bar{p}_M(Y_0).$$

Отсюда

$$\Delta(X) = \frac{\bar{p}(Y_0) - \bar{p}_M(X, Y_0)}{\left(\frac{\partial \bar{p}_M}{\partial Y} \right)_{Y_0}}. \quad (8)$$

После вычисления с использованием выражений (5) и (6) получаем

$$\Delta(X) = \frac{\frac{\text{ch}(1-2\psi)Y_0(e^{-Y_0} - \cos X)}{\text{sh} Y_0} + \frac{1 - \text{ch} Y_0 \cos X}{\text{ch} Y_0 - \cos X}}{2 \frac{\text{sh} Y_0(1 - \text{ch} Y_0 \cos X)}{(\text{ch} Y_0 - \cos X)^2} + \frac{[\text{sh} Y_0 - \text{sh}(1-\psi)Y_0] \cos X - \text{sh} 2\psi Y_0 - 2\psi \text{sh}(1-2\psi)Y_0}{\text{ch} Y_0 - \cos X}}. \quad (9)$$

Отсюда видно, что для $\psi = 0$ Δ обращается в бесконечность при $\cos X = \frac{1}{\text{ch} Y_0}$, а для $2\psi = 1$, Δ обращается в бесконечность при $\cos X = -1$. Это означает, что в этих условиях Δ не может быть всюду достаточно малым, и поверхность плазмы оказывается сильно возмущенной. Так как при стационарном поле проводников углы сдвига фаз могут быть равными либо нулю (одинаково направленные токи), либо π (противоположно направленные токи), то отсюда следует, что малоискаженная поверхность может быть получена только в результате воздействия системы переменных токов со сдвигом фаз $0 < \varphi < \pi$, т. е. обмотка должна быть многофазной.

Подробные вычисления показывают, что при $0 < \psi < 1/2$ выражение (9) принимает максимальное значение вблизи углов, для которых $\cos X \simeq -1$. При этом оказывается, что условие малости Δ выполняется при

$$\psi \text{sh}(1-2\psi)Y_0 \geq \frac{\text{sh} Y_0}{\text{ch} Y_0 + 1}. \quad (10)$$

Приняв здесь знак равенства, можно представить выражение (9) в виде

$$|\Delta|_{\text{экстрем}} = \frac{\text{ch}(1-2\psi)Y_0(e^{-Y_0} + 1) + \text{sh} Y_0}{\text{sh} Y_0[\text{sh} Y_0 - \text{sh}(1-2\psi)Y_0] + \text{sh} 2\psi Y_0}. \quad (11)$$

Для проведения дальнейших вычислений необходимо найти корни уравнения (10), т. е. зависимость критического фазового сдвига от расстояния. Ясно, что $\psi = \frac{1}{2m}$, где m — число фаз, которое должно быть выбрано таким образом, чтобы получить возможно меньшее значение Y_0 , при котором плазма возмущается слабо. Величина Y_0 определяет объем поля бегущей волны, а следовательно, и потребляемую мощность. Кроме того, как это видно из (6), фазовый сдвиг должен быть достаточно малым с тем, чтобы магнитное давление не слишком сильно спадало от поверхности проводника до поверхности плазмы. Корни уравнения (10) сведены в следующую таблицу:

m	2	3	4	5	6
Y_0	4,14	3,6	3,6	3,7	3,75

Например, для $m=3$ $Y_0=3,6$ и, следовательно, $|\Delta|_{\text{экстрем}} = -0,091$. Но при этом $\frac{\text{ch}(1-2\psi)Y_0}{\text{sh}Y_0} = 0,3$, т. е. магнитное поле используется недостаточно. При $m=6$ и $Y_0=3,75$, $\frac{\text{ch}(1-2\psi)Y_0}{\text{sh}Y_0} = 0,5$. Значение $|\Delta|_{\text{экстрем}}$ при этом также достаточно мало.

При дальнейшем увеличении числа фаз быстро растет Y_0 , что также невыгодно. Поэтому, по-видимому, наиболее рационально использовать шестифазную систему с $Y_0=3,7$.

Таким образом определяются необходимые средние поля, характерный размер Y_0 и число фаз. Остается найти критерий наиболее рационального выбора частоты переменного поля. Для этого установим, как возмущение поверхности плазмы нарастает со временем, считая, что для постоянной (по времени) составляющей это искажение достаточно мало.

Считая, что величины, характеризующие плазму, изменяются во времени не слишком сильно, будем решать задачу в линейном приближении, рассматривая поведение звуковых волн в плазме. При этом удобно ввести потенциал скоростей Φ . Тогда

$$v = \nabla\Phi. \quad (12)$$

Теперь уравнение баланса импульса для поверхности плазмы примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = & \frac{\pi}{\rho} \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac}\right)^2 \{ \text{sh}^2(1-\psi) Y_0 \cos 2(\omega t + X\psi) + \\ & + 2\text{sh}(1-\psi) Y_0 \text{sh} \psi Y_0 \cos [2\omega t - (1-\psi)X] + \\ & + \text{sh}^2 \psi Y_0 \cos 2[\omega t - (1-\psi)X] \} \frac{1}{(\text{ch}Y_0 - \cos X)^2}. \quad (13) \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение и разлагая правую часть в ряд по X можно представить (13) в виде

$$\Phi = \frac{\pi}{2\rho\omega} \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\omega t + k_n X). \quad (14)$$

Здесь коэффициенты A_n зависят от постоянных Y_0 и ψ , так как поверхность фиксирована и считается невозмущенной. При дальнейшем рассмотрении примем поверхность плазмы за нулевую и будем исследовать уравнение распространения звуковых колебаний при граничных условиях $\Phi(X, 0, t)$, определяемых соотношением (14). Решение волнового уравнения

$$\Delta\Phi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (15)$$

будем искать в виде

$$\Phi = \frac{\pi}{2\rho\omega} \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\omega t - k_n X - \theta_n Y). \quad (16)$$

После перехода к безразмерным переменным $X = \frac{2\pi x}{a}$ и $Y = \frac{2\pi y}{a}$ уравнение (15) приводится к виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} = \left(\frac{a}{2\pi u}\right)^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad (16')$$

откуда

$$\theta_n = \sqrt{\left(\frac{\omega a}{\pi u}\right)^2 - k_n^2}. \quad (17)$$

Дифференцируя (16) по Y , находим составляющую скорости

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \frac{2\pi}{a} \frac{\pi}{2\rho\omega} \left(\frac{\mathcal{J}_0}{ac}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\left(\frac{\omega a}{\pi u}\right)^2 - k_n^2} \times \\ \times \cos(2\omega t + k_n X - \theta_n Y). \quad (18)$$

Для того чтобы найти возмущение поверхности η , воспользуемся условием

$$v(X, t, 0) = \frac{d\eta}{dt}, \quad (19)$$

откуда, используя (7), получаем:

$$\frac{\eta}{a} = \frac{1}{2Y_0} \left(\frac{\pi u}{\omega a} \right)^2 \frac{\text{sh } Y_0}{\text{ch}(1-2\psi) Y_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\left(\frac{\omega a}{\pi u} \right)^2 - k_n^2} \times \\ \times \sin(2\omega t + k_n X). \quad (20)$$

Вычислим коэффициенты первых членов разложения

$$B_n = \frac{\text{sh } Y_0}{\text{ch}(1-2\psi) Y_0} A_n$$

в порядке убывания их абсолютного значения. Для интересующего нас здесь случая $e^{Y_0} \gg 1$ имеем:

$$B_1 = \frac{\text{sh } Y_0 \text{sh}^2(1-\psi) Y_0}{\text{ch}^2 Y_0 \text{ch}(1-2\psi) Y_0} \simeq 1, \\ B_2 = \frac{\text{sh}(1-\psi) Y_0 \text{sh } Y_0 \text{sh}(1+\psi) Y_0}{\text{ch}^3 Y_0 \text{ch}(1-2\psi) Y_0} \simeq 2e^{-(1-2\psi)Y_0}, \\ B_3 = \frac{\text{sh}(1-\psi) Y_0 \text{sh } Y_0}{\text{ch}^3 Y_0 \text{ch}(1-2\psi) Y_0} \simeq 2e^{-Y_0}.$$

Остальные коэффициенты пропорциональны e^{-2Y_0} , и их в дальнейшем можно не учитывать.

Значения k_n для первых членов разложения равны

$$k_1 = \psi; \quad k_2 = -(1-\psi); \quad k_3 = (1+\psi).$$

Согласно (20), максимальная величина возмущения для первого члена разложения равна

$$\frac{\eta}{h} = \frac{1}{2Y_0} \left(\frac{\pi u}{\omega a} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{\omega a}{\pi u} \right)^2 - \psi^2}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием малости возмущения является условие

$$\frac{\pi u}{\omega a} \simeq 1 \quad (\text{так как } \psi^2 \ll 1), \quad (22)$$

из которого определяется нижний предел частоты контура.

Ясно, что чем ниже частота, тем легче удовлетворить требованиям, предъявляемым к устройству такого рода и тем проще его осуществить. Поэтому представляет интерес рассмотрение другого случая, когда

$$\frac{\omega a}{\pi u} \simeq \psi. \quad (23)$$

Теперь величина возмущения будет определяться в основном вторым членом разложения, т. е.

$$\frac{\eta}{h} = \frac{1}{2Y_0} \left(\frac{\pi u}{\omega a} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{\omega a}{\pi u} \right)^2 - (1 - \psi)^2} \cdot 2e^{-(1-2\psi)Y_0},$$

причем $\frac{\pi u}{\omega a} = \frac{1}{\psi}$; тогда

$$\frac{\eta}{h} = \frac{e^{-(1-2\psi)Y_0}}{\psi^2 Y_0}. \quad (24)$$

Для шестифазной системы, когда $\psi = \frac{1}{12}$, $\frac{\eta}{h} \simeq 1$ при $Y_0 = 3,7$, т. е. для этого случая предельное условие малости возмущения для постоянной составляющей (10) приводит к тому, что возмущение от переменной составляющей по-

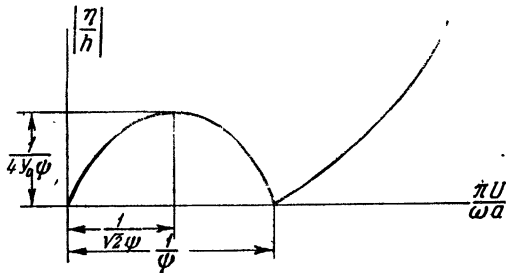


Рис. 2.

рядка 1. Однако уже при $\gamma_0 = 5$, $\frac{\eta}{h} = 0,27$, а величина, характеризующая степень использования поля, $\frac{\text{ch}(1-2\psi)Y_0}{\text{sh}Y_0} = 0,436$ вместо 0,5, как это было для предельного случая малых Δ .

Таким образом, снижая частоту примерно на порядок, можно удовлетворить условию малости возмущения при сравнительно небольшом проигрыше в использовании энергии поля.

Если частота выбирается из условия (23), то решение уравнения распространения звука (18) примет вид

$$v_r = \frac{2\pi}{a} \frac{\pi}{2\rho\omega} \left(\frac{\sigma_0}{ac} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{k_n^2 - \left(\frac{\omega a}{\pi u} \right)^2} \times \\ \times \cos(2\omega t + k_n X) e^{-k_n r}, \quad (25)$$

т. е. волна по мере проникновения вглубь плазмы будет затухать.

Значения предельных частот, найденных из условий (22) и (23), отличаются, например, для $m=6$ более чем на порядок величины.

Попытка практического использования метода удержания плазмы бегущим полем может иметь тем большие перспективы, чем меньше частота контура. Поэтому выбор частоты из условия (23) представляется более целесообразным.

Однако здесь необходимо учитывать следующее обстоятельство. Величина $\left| \frac{\eta}{h} \right|$ в функции $\frac{\pi u}{\omega a}$ имеет вид, показанный на рис. 2. Из характера этой зависимости следует, что в области $0 < \frac{\pi u}{\omega a} < \frac{1}{\psi}$ имеется максимум при $\frac{\pi u}{\omega a} = \frac{1}{\sqrt{2}\psi}$, для которого $\left| \frac{\eta}{h} \right| = \frac{1}{4Y_0\psi}$. Предположим, что частота выбрана из условия $\frac{\pi u}{\omega a} = \frac{1}{\psi}$. Тогда, если плазма по каким-то причинам начнет охлаждаться (т. е. u начнет уменьшаться), возмущение поверхности возрастет. Если увеличение $\left| \frac{\eta}{h} \right|$ приведет к взаимодействию со стенками, то плазма будет охлаждаться еще больше, и равновесие установится на возрастающем участке кривой при сравнительно низкой температуре. Поэтому, если частота выбрана из условия (23), необходимо, чтобы максимальное возмущение $\left| \frac{\eta}{h} \right| = \frac{1}{4Y_0\psi}$ не приводило к дополнительному охлаждению плазмы, т. е. чтобы при таком возмущении поверхности не было бы взаимодействия со стенками. При выбранных значениях $Y_0=5$ и $\psi = \frac{1}{12} \left| \frac{\eta}{h} \right|_{\text{экстр}} = 0,6$, что, по-видимому, можно считать предельно допустимым значением.

Приведенные здесь соображения позволяют сделать вывод о том, что поле бегущей волны действительно может быть использовано для удержания плазмы, причем для определенных конфигураций взаимодействие плазмы с таким полем приводит к удержанию плазмы по всем направлениям.

В качестве примера рассмотрим плазменный виток, находящийся в сосуде тороидальной формы (рис. 3). Бегущее поле направлено по φ . Так как магнитное давление этого поля спадает к поверхности плазмы [см. (6)], то плазменный виток в таком неоднородном поле будет находиться в равновесии, причем существуют условия, при которых такое равновесие будет устойчивым (рис. 4), так как при отклонении плазмы от равновесия она попадает в область больших полей.

Если удержание горячей плазмы осуществлять исключительно полем бегущей волны, то, как можно показать, построение термоядерного реактора с заметным энергетическим выходом оказывается практически невозможным, так как активные потери в высокочастотном контуре практически не могут быть компенсированы энергией, выделяющейся в плазме в результате термоядерных реакций. Поэтому поле бегущей волны должно быть использовано в комбинации с некоторыми квазистационарными полями, которые воспринимали бы основную часть газового давления с тем, чтобы на долю бегущего поля оставался лишь относительно небольшой избыток, кото-

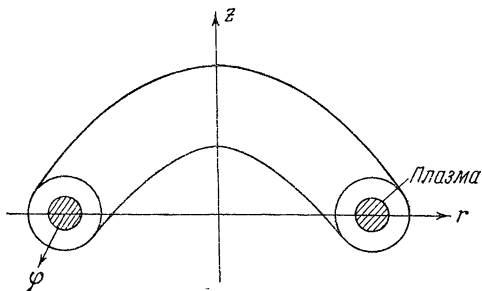


Рис. 3.

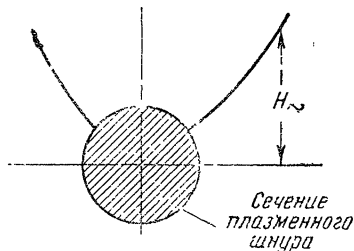


Рис. 4.

рый принципиально не может быть скомпенсирован квазистационарным полем. В частном случае квазистационарным полем может быть поле тока, текущего в плазме.

Предположим, что мы попытаемся создать термоядерный реактор с положительным энергетическим выходом. Рассмотрим, каковы должны быть соответствующие энергетические соотношения и при каких условиях их можно реализовать.

Будем исходить из следующих основных соотношений:

1. Условие положительного энергетического выхода термоядерных реакций:

$$\frac{n < \sigma v >_n E_n t}{T} = k > 1. \quad (26)$$

Здесь T — температура плазмы; E_n — энергия, выделяющаяся в реакции синтеза; t — время существования «нагретой» частицы в плазме (или, если частицы из плазмы не уходят, — время существования плазмы).

2. Магнитное давление поля высокой частоты связано со средним давлением горячей плазмы и должно составлять некоторую долю α от этого давления, т. е.

$$\frac{\tilde{H}^2}{8\pi} = \alpha n T. \quad (27)$$

3. Мощность генератора высокой частоты определяется из соотношения:

$$\frac{\bar{H}^2}{8\pi} \omega V_{\sim} = PQ. \quad (28)$$

Здесь V_{\sim} — объем поля; \bar{H}_{\sim} — средняя по объему V_{\sim} напряженность высокочастотной составляющей магнитного поля; Q — добротность контура; P — активная мощность, рассеиваемая в высокочастотном контуре.

Из соотношений (26), (27) и (28) можно получить следующее выражение для энергии, рассеиваемой в высокочастотном контуре за время эффективного протекания ядерных реакций:

$$Pt = \frac{\alpha\omega}{Q} \frac{kV_{\sim} T^2}{\langle \sigma v \rangle_{\text{я}} E_{\text{я}}}, \quad (29)$$

где $k > 1$ — для системы с положительным энергетическим выходом.

Эта энергия должна быть меньше энергии, выделяющейся в результате протекания термоядерных реакций:

$$W_{\text{я}} = n^2 \langle \sigma v \rangle_{\text{я}} E_{\text{я}} V t. \quad (30)$$

Здесь V — объем, занятый горячей плазмой. Ясно, что для получения положительного энергетического выхода в случае использования высокочастотного поля необходимо, помимо условия (26), удовлетворить дополнительному условию

$$W_{\text{я}} > Pt \quad (31)$$

или

$$n^2 \langle \sigma v \rangle_{\text{я}} E_{\text{я}} t > \frac{\alpha\omega k V_{\sim} T^2}{Q \langle \sigma v \rangle_{\text{я}} E_{\text{я}} V}. \quad (31')$$

Но

$$n^2 \langle \sigma v \rangle_{\text{я}} E_{\text{я}} t = \frac{k^2 T^2}{\langle \sigma v \rangle_{\text{я}} E_{\text{я}} t},$$

и, следовательно, условие (31) сводится к

$$k > \frac{\alpha\omega t V_{\sim}}{Q V}$$

или, для предельного случая $k = 1$, к

$$\frac{\alpha\omega t V_{\sim}}{Q V} < 1. \quad (32)$$

Это условие может быть выполнено только при достаточно большой добротности контура. Другими словами, длительность процесса ограничивается потерями в высокочастотном

контуре. Этот на первый взгляд неожиданный результат на самом деле легко понять, если вспомнить, что интенсивность ядерных реакций пропорциональна n^2 , в то время как требуемая энергия магнитного поля пропорциональна n . Так как условие положительного энергетического выхода при оптимальной температуре сводится к виду $nt = \text{const}$, то ясно, что ограничение на время длительности процесса, вытекающее из условия (32), эквивалентно требованию, чтобы плотность плазмы была не ниже некоторого определенного предела. Это требование имеет вид

$$n > \frac{\alpha \omega V \sim T}{QV \langle \sigma v \rangle_{\text{Я}} E_{\text{Я}}} . \quad (32')$$

Из (32) и (29) можно определить необходимое значение предельной мощности высокочастотного контура:

$$P \geq \left(\frac{\alpha \omega V \sim T}{Q} \right)^2 V \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle_{\text{Я}} E_{\text{Я}}} . \quad (33)$$

Для реакции DT при оптимальной температуре $T \sim 8 \cdot 10^8$ эв это условие можно представить в виде

$$P \geq 0,025 \left(\frac{\alpha \omega V \sim T}{Q} \right)^2 V \text{ вт} . \quad (33')$$

Из приведенных оценок следует, что определяющим фактором как для длительности процесса, так и для критической мощности является величина $\frac{\alpha \omega V \sim T}{Q}$, которая должна быть возможно меньшей. Эту величину можно рассматривать как произведение двух сомножителей $\frac{\omega}{Q}$ и $\frac{\alpha V \sim T}{V}$, первый из которых определяется радиотехническим устройством, а второй — конфигурацией плазмы и постоянных магнитных полей (если таковые имеются).

Как известно, добротность Q пропорциональна $\sqrt{\omega}$, так что $\frac{Q}{\omega}$ убывает с ростом частоты. С этой точки зрения следует стремиться к возможно меньшим ω . Однако даже если принять оптимальные значения соответствующих величин, а именно $\omega = \frac{\pi u}{a} \psi \simeq 10^6$ и $Q = 10^3$, то при $\alpha \frac{V \sim T}{V} \simeq 1$ имеем $P > 2,5 \cdot 10^4$ В вт.

Таким образом, для плазмы, занимающей достаточно большой объем, получаются практически недостижимые значения мощности. Поэтому необходимо с помощью некоторой комбинации квазистационарного и бегущего полей снизить величину $\frac{\alpha V}{V} \sim$ хотя бы на порядок. Тогда $P \geq 250V$ *вт*, что уже могло бы представить некоторый практический интерес.

Поэтому ближайшей задачей является проведение исследования равновесной и устойчивой плазменной конфигурации, находящейся под действием квазистационарного поля и поля бегущей волны.

Б. Б. Кадоцев

О ГИДРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ *

В работе получены приближенные уравнения движения плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля. Рассмотрен вопрос о равновесии и устойчивости такой плазмы.

§ 1. Уравнения движения

В настоящей работе для описания плазмы используется гидродинамическое приближение, которое в ряде случаев дает вполне удовлетворительные результаты.

Если пренебречь диссипативными процессами в плазме, то уравнения магнитной гидродинамики имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\rho'} + (\mathbf{v} \nabla) \frac{\rho}{\rho'} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (1.4)$$

В общем случае мы имеем, таким образом, сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений.

Однако ее можно несколько упростить в том случае, когда давление плазмы значительно меньше давления магнитного поля, т. е. при $8\pi p/H^2 \ll 1$.

* Работа выполнена в 1957 г.

Действительно, при этом скорость магнитогидродинамических волн $c_H = \sqrt{\frac{H^2}{4\pi\rho}}$ намного больше скорости звука $c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$; поэтому, если не рассматривать собственно гидродинамические волны, можно положить $c_H = \infty$. Это означает, что любое возмущение плазмы, приводящее к смещению силовой линии в некотором месте в поперечном направлении, мгновенно передается вдоль силовой линии, и вся она (вернее плазма вдоль всей линии) приходит в движение. При этом движение плазмы является в некотором смысле двумерным, и наша задача заключается в нахождении уравнений для описания этого движения.

Эти уравнения можно получить чисто формальным путем, производя разложение уравнений (1.1) — (1.4) по степеням малого параметра. Положим $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots$, $\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \{\mathbf{H}_0 + \varepsilon \mathbf{H}_1 + \dots\}$, где ε мы будем считать малым параметром, подставим эти выражения в систему (1.1) — (1.4), приравняем нулю выражения при одинаковых степенях ε и положим затем $\varepsilon = 1$.

Таким образом мы получаем следующую систему уравнений:

$$[\text{rot } \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_0] = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}_0 = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_0], \quad (1.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_0] + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1], \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \text{div } \rho_0 \mathbf{v}_0 = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_0}{\rho_0} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \frac{p_0}{\rho_0} = 0. \quad (1.9)$$

и т. д.

Ограничиваясь лишь членами нулевого порядка малости, мы отбросим все остальные уравнения, и опустим значок «0».

Из уравнения (15), отвлекаясь от случая бессиловых полей, получаем $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$, т. е. $\mathbf{H} = \sum_i I_i \nabla \varphi_i$, где

I_i — внешние токи, а φ_i — соответствующие им скалярные потенциалы (вообще говоря, неоднозначные). Для простоты мы будем считать, что токи не изменяются со временем, а

несущие их проводники неподвижны, тогда $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$ и из (1.6) получаем:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{[\mathbf{h}, \nabla \Phi]}{H}, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, v_{\parallel} — произвольная функция от r , t ; Φ — функция r , t , удовлетворяющая условию $\mathbf{h} \nabla \Phi = 0$. Кроме того, из (1.6) следует, что на границе с неподвижными проводниками тангенциальная компонента векторного произведения $[\mathbf{v} \mathbf{H}]$ обращается в нуль:

$$[\mathbf{v} \mathbf{H}]_{\tau} = 0. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.10) в уравнение (1.7), мы должны рассматривать (1.7) как уравнение для определения \mathbf{H}_1 . При этом, как известно, должно выполняться условие разрешимости: левая часть уравнения (1.7) должна быть ортогональна к решению χ однородного уравнения, сопряженного с уравнением $L \mathbf{H}_1 = [\text{rot } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}] = 0$. Сопряженное уравнение $L^* \chi = 0$ находится по известному правилу $\int \chi L \mathbf{H}_1 dr = \int \mathbf{H}_1 L^* \chi dr$. С помощью интегрирования по частям получаем $\int \chi L \mathbf{H}_1 dr = - \int \mathbf{H}_1 \text{rot} [\chi \mathbf{H}] dr + \oint [[\chi \mathbf{H}] \mathbf{H}_1] ds$, т. е. $L^* \chi = \text{rot} [\chi \mathbf{H}] = 0$ и $[\chi \mathbf{H}]_{\tau} = 0$ на границе проводников. Таким образом, χ удовлетворяет тому же уравнению, что и \mathbf{v} и, следовательно, $\chi = \mathbf{h} \chi_{\parallel} + \frac{[\mathbf{h} \nabla \Psi]}{H}$, где χ_{\parallel} — произвольная функция, а Ψ — функция, подчиненная условию $\mathbf{h} \nabla \Psi = 0$. Условие ортогональности левой части уравнения (1.7) к χ_{\parallel} приводит, очевидно, к уравнению:

$$\rho \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} + \rho \mathbf{h} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{h} \nabla) p = 0, \quad (1.12)$$

а условие ортогональности к χ_{\perp} после интегрирования по частям принимает вид

$$\int \Psi \text{div} \left\{ \frac{\rho}{H^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\rho}{H} [\mathbf{h}_1 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] - \frac{1}{H} [\mathbf{h} \nabla p] \right\} dr = 0. \quad (1.13)$$

Функция Ψ , как показывает условие $\mathbf{h} \nabla \Psi = 0$, постоянна вдоль магнитных силовых линий, а в остальном является произвольной функцией координат. Выберем Ψ такой, чтобы она равнялась единице внутри некоторой бесконечно тонкой трубки, образованной силовыми линиями поля \mathbf{H} , и обращалась в нуль вне этой трубки. Тогда интеграл (1.13) можно

записать в виде линейного, полагая $dr = s dl$, где s — поперечное сечение трубки, а dl — элемент дуги силовой линии. Но в силу постоянства вдоль трубки магнитного потока $\varphi = sH$ мы можем вынести φ за знак интеграла и тогда условие (1. 13) запишется в виде

$$\int \frac{1}{H} \operatorname{div} \left\{ \frac{\rho}{H^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{H} [\mathbf{h}_1 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] - \frac{1}{H} [h \nabla p] \right\} dl = 0, \quad (1. 14)$$

где интеграл берется вдоль любой силовой линии.

Уравнения (1. 12), (1. 14) совместно с (1. 8), (1. 9) как раз и являются уравнениями, описывающими в нулевом приближении движение плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля.

Для простоты мы рассматривали идеальную плазму, однако в приведенной схеме нетрудно учесть вязкость и теплопроводность плазмы, а также отличие электрической проводимости от бесконечной. Следует только иметь в виду, что для учета конечной проводимости необходимо привлечь следующее приближение.

Следует, кроме того, отметить, что нулевого приближения оказывается недостаточно также в том случае, когда магнитное поле таково, что силовые линии не замкнуты, а заполняют целую поверхность. Действительно, в этом случае Φ должна быть постоянна на этой поверхности и u, v остаются лишь две степени свободы. Однако в простых геометриях, когда силовые линии замкнуты (возможно, на бесконечности) и при условии, что проводимость плазмы бесконечно велика, можно, по-видимому, ограничиться нулевым приближением.

§ 2. Равновесие и устойчивость

В качестве примера применения полученных уравнений рассмотрим вопрос о равновесии и устойчивости идеальной плазмы, удерживаемой внешним магнитным полем.

Условия равновесия получаются из уравнений (1. 12), (1. 14), если положить в них $\mathbf{v} = 0$. Из (1. 12) получаем $h \nabla p = 0$, т. е. давление постоянно вдоль силовой линии. Предполагая, что это условие выполнено, рассмотрим второе условие:

$$\int \frac{1}{H} \operatorname{div} \frac{[H \nabla p]}{H^2} dl = -2 \int \frac{[h \nabla p] \nabla H}{H^3} dl = 0. \quad (2. 1)$$

Для его преобразования удобно ввести криволинейные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 такие, чтобы координатные линии ξ_3 совпадали с силовыми линиями магнитного поля (по предположе-

нию замкнутыми). Обозначим через g_{ik} метрический тензор, через g — детерминант $\text{Det } g_{ik}$, тогда для контравариантных компонент вектора \mathbf{h} имеем $h^i = \frac{\delta_3^i}{\sqrt{g_{33}}}$, где δ_j^i — символ Кронекера. Ковариантные компоненты $h_i = \frac{g_{i3}}{\sqrt{g_{33}}}$.

В координатах ξ_i условие (2.1) имеет вид:

$$\int \frac{e_{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}} H^3} dl = 0, \quad (2.2)$$

где e_{ijk} — полностью антисимметричный единичный псевдо-тензор. Из условия $\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} = 0$ следует, что комбинация $\frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}}$ не зависит от ξ_3 и поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Вынося из-под интеграла также p и учитывая, что $dl = \sqrt{g_{33}} d\xi_3$, мы запишем (2.2) в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_i} \int e_{ijk} \frac{H g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{1}{H^2} \right) d\xi_3 = 0. \quad (2.3)$$

Но из условия $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ следует:

$$\frac{1}{H^2} e_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{H g_{k3}}{\sqrt{g_{33}}} = 0. \quad (2.4)$$

Прибавляя (2.4) к подинтегральному выражению в (2.3) и учитывая, что интегралы от производных по ξ_3 исчезают в силу замкнутости силовых линий, получаем:

$$e_{ijk} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int \frac{g_{k3}}{H \sqrt{g_{33}}} d\xi_3 = 0. \quad (2.5)$$

Так как здесь $i, j \neq 3$, то отличными от нуля являются лишь члены с $k=3$, и мы приходим к следующему условию равновесия:

$$[\nabla p, \nabla U] = 0, \quad \text{где } U = - \int \frac{dl}{H}. \quad (2.6)$$

Предположим теперь, что плазма с плотностью ρ_0 и давлением p_0 находится в равновесии, и найдем условия, при которых это равновесие является устойчивым. Для этого необходимо исследовать поведение плазмы при малых отклонениях от положения равновесия. Положим $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\mathbf{v} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\eta = \eta_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{[h\nabla\varphi]}{H}$, где p' , ρ' , η — малые ве-

личины, подставим это в (1.8), (1.9), (1.12), (1.14) и пре-
небрежем малыми величинами высших порядков. Из (1.8),
(1.9) получаем $p' = -\eta \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \eta$. Заметим, что здесь
первое слагаемое не зависит от ξ_3 . В этом легко убедиться,
если записать его в криволинейных координатах и учесть,
что p_0 , φ , $\frac{\sqrt{g}H}{\sqrt{g_{33}}}$ не зависят от ξ_3 . Поэтому линейризованное
уравнение (1.12) записывается в виде:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta_{\parallel}}{\partial t^2} - \gamma (\mathbf{h} \nabla) p_0 \operatorname{div} \eta = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (1.14) принимает вид:

$$\int \frac{1}{H} \operatorname{div} \left\{ \frac{\rho_0}{H^2} \nabla \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{H} [\mathbf{h}, \nabla (\eta \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \eta)] \right\} dl = 0. \quad (2.8)$$

Оба эти уравнения могут быть получены из вариационного
принципа $\delta \int L dt = 0$, с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \int \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + \eta_{\perp}^{\nabla} (\eta_{\perp} \nabla p_0) - \gamma p_0 (\operatorname{div} \eta)^2 \right\} dr, \quad (2.9)$$

где $\eta = \eta_{\parallel} + \eta_{\perp} = \mathbf{h} \eta_{\parallel} + \frac{[\mathbf{h} \nabla \varphi]}{H}$, а варьирование производится
по η_{\parallel} и φ . Для уравнения (2.7) это утверждение совершенно
очевидно, а чтобы убедиться в его справедливости для (2.8),
мы преобразуем второе слагаемое в (2.9) к более симметрич-
ной форме. Производя интегрирование по частям и учитывая,
что $\eta_{\perp} \nabla p_0$ не зависит от ξ_3 , получаем:

$$\frac{1}{2} \int \eta_{\perp} \nabla (\eta_{\perp} \nabla p_0) dr = \int \eta_{\perp} \nabla p_0 \left\{ \int e_{i,jk} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \frac{g_{k3}}{\sqrt{g_{33}H}} d\xi_3 \right\} d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь выражение в фигурных скобках может быть преоб-
разовано аналогично тому, как (2.2) было преобразовано
в (2.6).

Учитывая, что $e_{3ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \frac{H \sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} (\eta_{\perp} \nabla U)$, мы получим окон-
чательно следующее выражение для потенциальной энергии
плазмы:

$$V = -\frac{1}{2} \int \frac{H \sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} (\eta_{\perp} \nabla p_0) (\eta_{\perp} \nabla U) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \frac{1}{2} \int \gamma p_0^{\nabla} (\operatorname{div} \eta)^2 dr. \quad (2.10)$$

Так как согласно (2.6) $\nabla p_0 \uparrow \nabla U$, то оба сомножителя входят в (2.10) совершенно симметрично, поэтому при варьировании второго слагаемого в (2.9) можно проварьировать только первый множитель и удвоить результат. Учтывая это обстоятельство, нетрудно убедиться в том, что варьирование (2.9) по φ действительно приводит к уравнению (2.8).

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия (2.10) была положительно определенной, т. е. чтобы ее минимальное значение было положительным. Минимизирование (2.10) по η_{\parallel} приводит к соотношению

$$(\mathbf{h}\nabla) \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0, \text{ т. е. } \operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = f(\xi_1, \xi_2) \text{ или } \mathbf{h}\nabla \left(\frac{\eta_{\parallel}}{H} \right) + \frac{1}{H} \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_{\perp} = \\ = \frac{1}{H} f(\xi_1, \xi_2). \text{ Если проинтегрировать это соотношение вдоль замкнутой силовой линии, то первое слагаемое исчезнет, и мы получим}$$

$$f(\xi_1, \xi_2) U = 2 \int \frac{[\mathbf{h}\nabla\varphi] \nabla H}{H^3} dl.$$

Совершая опять преобразование, аналогичное преобразованию (2.1) в (2.6), получаем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = f(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sqrt{g_{33}}}{UH\sqrt{g}} e_{3i} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \frac{1}{U} (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla U). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.10) и учитывая, что $d\Gamma = \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} d\xi_1 d\xi_2 \frac{dl}{H}$, получаем

$$V_{\min} = -\frac{1}{2} \int \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{g_{33}}} \left\{ (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla p_0) (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla U) + \frac{\gamma p_0}{U} (\boldsymbol{\eta}_{\perp} \nabla U)^2 \right\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что для устойчивости необходимо и достаточно

$$\nabla p_0 \nabla U + \frac{\gamma p_0}{U} (\nabla U)^2 < 0. \quad (2.13)$$

Если плазма имеет резкую границу, то на ней первое слагаемое в (2.13) много больше второго и, следовательно, условие устойчивости границы имеет вид: $(\nabla p_0 \nabla U) < 0$. Это условие было получено ранее Розенблютом и Лонгмайром [1] из энергетических соображений.

Так как согласно (2.6) поверхности $p_0 = \text{const}$ совпадают с поверхностями $U = \text{const}$, то с учетом того, что функция U всегда отрицательна, условие (2.13) можно записать в виде:

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln |U|} < \gamma. \quad (2.14)$$

Условие (2.14) сходно с условием конвекционной устойчивости неравномерно нагретого газа в поле тяжести: как в газе уменьшение температуры с высотой не может быть больше некоторого предела, так и в плазме давление не может согласно (2.14) возрастать слишком быстро при увеличении U .

Подчеркнем еще раз, что проведенное рассмотрение справедливо только для полей с замкнутыми силовыми линиями: в противном случае необходимо учесть следующее приближение в разложении по ε .

За обсуждение работы приношу благодарность академику М. А. Леонтовичу.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Rosenbluth, C. Longmire. Ann. of Phys., 1, 120 (1957).
-

С. И. Брагинский, А. П. Казанцев

**МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ
В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ***

Рассматриваются магнитогиродинамические волны с произвольным направлением распространения, исходя из кинетического уравнения с самосогласованным полем без учета столкновений. Как и в проводящей жидкости, в разреженной плазме могут распространяться в общем случае три типа магнитогиродинамических волн. Показано, что в отсутствие столкновений эти волны испытывают своеобразное затухание.

§ 1. Введение

Магнитогиродинамические волны (МГ-волны) малой амплитуды в хорошо проводящей жидкости, как известно, могут быть трех различных типов. Они имеют следующий закон дисперсии (см., например, [1]):

$$\omega_1^2 = c_A^2 k^2 \cos^2 \vartheta, \quad (1.1)$$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{k^2}{2} \{c_A^2 + c_S^2 \pm [(c_A^2 + c_S^2)^2 - 4c_A^2 c_S^2 \cos^2 \vartheta]^{1/2}\}. \quad (1.2)$$

Здесь ϑ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и магнитным полем \mathbf{H} , c_S — скорость звука и $c_A = (H^2/4\pi\rho)^{1/2}$ — альфвеновская скорость. Выражения (1.1) и (1.2) справедливы при $c_A \ll c$ (c — скорость света).

В рамках модели плазмы в виде двух заряженных идеальных газов [2, 3] было установлено, что волны (1.1) и (1.2)

* Работа выполнена в 1957 г.

возникают в плазме (если $c_A \ll c$) при частотах малых по сравнению с гирочастотой ионов:

$$\omega \ll \Omega_i, \quad \Omega_i = eH_i/m_i c. \quad (1.3)$$

При этом скорость звука определяется выражением:

$$c_s^2 = \frac{\gamma_e p_e + \gamma_i p_i}{\rho} \approx \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}, \quad (1.4)$$

где γ_α — эффективный показатель адиабаты, $p_\alpha = nT_\alpha$ — давление, T_α — температура газа сорта α (ионного или электронного).

Заметим, что при $c_s \ll c_A$ неравенство (1.3) выполняется для МГ-волн (1.1), (1.2) при достаточно большой длине волны, когда велика безразмерная величина Π (ср. [3]):

$$\Pi = \frac{4\pi e^2 n}{m_i c^2 k^2} \ll 1. \quad (1.5)$$

Однако при малых плотностях ионизованного газа и магнитная гидродинамика и модель двух газов неприменимы, поскольку тепловое движение частиц ими учитывается весьма грубо. Достаточно строгим является рассмотрение на основе кинетического уравнения с самосогласованным полем. Этим методом МГ-волны изучались ранее Гершманом [4] и Бернштейн [5]. В [4] рассмотрено распространение волн вдоль магнитного поля ($\vartheta = 0$) и показано, что их затухание экспоненциально мало, если длина волны значительно больше ларморовского радиуса ионов:

$$kv_i \ll \Omega_i, \quad v_i = (2T_i/m_i)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Неравенство (1.6) следует из (1.5), если газокинетическое давление ионов не превышает слишком сильно магнитного давления ($p_i \ll H^2/8\pi$), что в дальнейшем будет предполагаться.

В настоящей работе с помощью кинетического уравнения рассматриваются МГ-волны при произвольном направлении волнового вектора. Столкновения частиц считаются редкими и не учитываются. В равновесном состоянии распределение частиц по скоростям $F_\alpha(v)$ принимается максвелловским.

§ 2. Дисперсионное уравнение

Так как нас интересуют медленные волны (показатель преломления $kc/\omega \gg 1$), то в уравнениях Максвелла можно опустить ток смещения, и для плоской волны, в которой

все величины пропорциональны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$, они примут вид:

$$k^2\mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

Если записать связь между током и электрическим полем с помощью тензора диэлектрической проницаемости

$$4\pi\mathbf{j}_i = -i\omega\varepsilon_{ij}E_j, \quad (2.2)$$

то задача о получении дисперсионного уравнения сведется к вычислению тензора ε_{ij} .

При изучении электронных колебаний плазмы в магнитном поле рядом авторов путем точного решения кинетического уравнения был получен тензор диэлектрической проницаемости в предположении, что ионы неподвижны (см., например, [6]). Ученье движение ионов нетрудно, так как их вклад в тензор ε_{ij} выражается точно такого же вида членами, как и электронные, но лишь с соответствующим изменением заряда и массы. Добавив эти члены и производя упрощения, связанные с малостью m_e/m_i и с условием (1.3), можно получить приближенные выражения для ε_{ij} применительно к данной задаче. Однако представляется более наглядным получить эти выражения непосредственно путем приближенного решения кинетического уравнения.

Пусть ось z направлена вдоль магнитного поля и волновой вектор лежит в плоскости xz : $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel}) = (k \sin \vartheta, 0, k \cos \vartheta)$. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, ζ в пространстве скоростей. Линеаризованное кинетическое уравнение для плоской волны имеет вид (индекс α опускаем):

$$\begin{aligned} i(k_{\perp}\rho \cos \varphi + k_{\parallel}\zeta - \omega)f - \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -\frac{e}{m} E \frac{\partial F}{\partial v} = \\ &= \frac{e}{T} F (E_{x\rho} \cos \varphi + E_{y\rho} \sin \varphi + E_z \zeta), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где f — отклонение функции распределения от равновесной функции $F(v)$; f пропорционально $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Так как f — периодическая функция φ , ее можно разложить в ряд Фурье: $f = \sum_m f_m(\rho, \zeta) e^{im\varphi}$. Для Фурье-компонент уравнение (2.3) дает:

$$i(\omega - k_{\parallel}\zeta)f_0 - \frac{ik_{\perp}\rho}{2}(f_1 + f_{-1}) = -\frac{e}{T} F \zeta E_z, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} i(\pm\Omega + \omega - k_{\parallel}\zeta)f_{\pm 1} - \frac{ik_{\perp}\rho}{2}(f_0 + f_{\pm 2}) &= \\ &= -\frac{e}{T} F \frac{\rho}{2}(E_x \mp iE_y), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$i(m\Omega + \omega - k_{\parallel}\zeta)f_m - \frac{ik_{\perp}\rho}{2}(f_{m-1} + f_{m+1}) = 0, \quad |m| \geq 2. \quad (2.6)$$

Найдем приближенное решение бесконечной цепочки (10)—(12), считая выполненными неравенства (1.3) и (1.6). Используя (2.6), приближенно получим: $f_{\pm 2} = \pm(k_{\perp} \rho / 4\Omega) f_{\pm 1}$ и т. д. Из (2.4) и (2.5) с точностью до членов $\sim 1/\Omega^2$ находим:

$$\begin{aligned} if_0 &= \frac{e}{T} F \left\{ \frac{k_{\perp} \rho^2}{2\Omega^2} E_x + \frac{k_{\perp} \rho^2}{2\Omega(\omega - k_{\parallel} \zeta)} iE_y - \frac{\zeta}{\omega - k_{\parallel} \zeta} E_z \right\}, \\ f_x &= \frac{e}{T} F \left\{ -\frac{\rho(\omega - k_{\parallel} \zeta)}{2\Omega^2} iE_x + \frac{\rho}{2\Omega} E_y - \frac{k_{\perp} \rho \zeta}{2\Omega^2} iE_z \right\}, \\ f_y &= \frac{e}{T} F \left\{ -\frac{\rho}{2\Omega} E_x - \frac{\rho}{2\Omega^2} \left(\omega - k_{\parallel} \zeta - \frac{k_{\perp}^2 \rho^2 / 2}{\omega - k_{\parallel} \zeta} \right) iE_y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_{\perp} \rho \zeta}{2\Omega(\omega - k_{\parallel} \zeta)} E_z \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь обозначено $f_x = (f_{-1} + f_1)/2$ и $f_y = (f_{-1} - f_1)/2i$. С помощью (2.7) можно найти плотность тока, создаваемого электронами и ионами:

$$j_{x,y} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha, x, y} \rho d\mathbf{v}, \quad j_z = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha z} \zeta d\mathbf{v}.$$

Заметим, что в $j_{x,y}$ члены, соответствующие «электрическому дрейфу» электронов и ионов $sE_{y,x}/H$, при суммировании взаимно сокращаются. Чтобы определить малые компоненты ε_{xy} и ε_{yx} , нужно вычислить соответствующие члены $\sim 1/\Omega^3$, что нетрудно сделать тем же способом. Опуская малые члены порядка m_e/m_i , получим для $\varepsilon_{i,j}$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_0; \quad \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\varepsilon_0 \left(\frac{\omega}{\Omega_i} + \frac{2k_{\parallel}^2 v_i^2 - 3k_{\perp}^2 v_i^2}{4\omega\Omega_i} \right); \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = 0 \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_0 \left[1 - \frac{k_{\perp}^2 v_i^2}{\omega^2} \left(z_i Y_i + \frac{T_e}{T_i} z_e Y_e \right) \right], \\ \varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = -i\varepsilon_0 \frac{\Omega_i k_i}{\omega k_{\parallel}} (z_i Y_i - z_e Y_e), \\ \varepsilon_{zz} &= -\varepsilon_0 \frac{2\Omega_i^2}{k_{\parallel}^2 v_i^2} \left[z_i Y_i - 1 + \frac{T_i}{T_e} (z_e Y_e - 1) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь обозначено: $\varepsilon_0 = \frac{4\pi e^2 n}{m_i \Omega_i^2} = \frac{c^2}{c_A^2}$, $z_{\alpha} = \omega/k_{\parallel} v_{\alpha}$, где $v_{\alpha} = (2T_{\alpha}/m_{\alpha})^{1/2}$ — тепловая скорость частиц α . $Y_{\alpha} = Y(z_{\alpha}) =$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-x^2}}{z_\alpha - x} dx$. Интегрирование должно производиться по действительной оси с обходом точки z_α снизу, согласно [7]. Функция $Y(z)$ имеет следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2z^2} + \dots \right) - i\sqrt{\pi} e^{-z^2} \text{ при } |z| \gg 1, \\ Y(z) &= z \left(1 - \frac{2}{3} z^2 + \dots \right) - i\sqrt{\pi} \text{ при } |z| \ll 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставив (2.2) в (2.1) и приравняв к нулю определитель, после простых преобразований получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\left(\epsilon_{xx} - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} \right) \left[\left(\epsilon_{yy} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) \bar{\epsilon}_{zz} + \bar{\epsilon}_{yz}^2 \right] + O\left(\frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \right) = 0, \quad (2.10)$$

где $\bar{\epsilon}_{yz} = (i\omega/\Omega_i) \epsilon_{yz}$, $\bar{\epsilon}_{zz} = -(\omega^2/\Omega_i^2) \epsilon_{zz}$ под $O(\omega^2/\Omega_i^2)$ подразумеваются малые члены, не превышающие по порядку величины $(\omega^2/\Omega_i^2) \epsilon_0^3$.

§ 3. Альфвеновская волна

Если пренебречь малыми членами в уравнении (2.10), то оно распадается на два независимых уравнения, одно из которых $\omega^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2$ совпадает с (1.1). В следующем приближении, используя члены $O(\omega^2/\Omega_i^2)$, можно найти тепловые поправки к фазовой скорости и затухание.

Во всем интервале углов эта волна затухает слабо, логарифмический декремент затухания имеет порядок величины не более, чем ω^2/Ω_i^2 .

Вектор электрического поля в первом приближении направлен по оси x , магнитное поле волны $\mathbf{h} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$ — по оси y и совпадает по фазе с электрическим: $h_y = (c/c_A) E_x$. Средняя (дрейфовая) скорость ионов направлена также по оси y . Энергия волны в основном сосредоточена в магнитном поле и кинетической энергии ионов. Этот тип плазменных волн по своей дисперсии и поляризации очень близок к рассмотренным впервые Альфвеном [8] МГ-волнам в идеально проводящей жидкости, в которой магнитные силовые линии как бы скреплены с веществом.

§ 4. Магнитозвуковые волны

Другое уравнение, получающееся из (2.10), если пренебречь малыми членами $O(\omega^2/\Omega_i^2)$, имеет вид:

$$\left(\varepsilon_{yy} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) \bar{\varepsilon}_{zz} + \bar{\varepsilon}_{yz}^2 = 0. \quad (4.1)$$

Поведение корней трансцендентного уравнения (4.1) внутри интервала углов $0 < \vartheta < \pi/2$ существенным образом зависит от соотношений между v_i , v_e и c_A .

Рассмотрим случай, когда имеют место неравенства:

$$v_i^2 \ll c_A^2 \ll v_e^2 \text{ или } nT_i \ll H^2/8\pi \ll (m_i/m_e) nT_e. \quad (4.2)$$

Если $T_i \ll T_e$, то (4.1) содержит только один корень, для которого $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$ (слабое затухание). Поскольку $c_A^2 \gg v_i^2$, то в первом приближении этот корень равен $\omega^2 = c_A^2 k^2$. Тепловые поправки можно найти методом последовательных приближений. Так как $z_i = \omega/k_{\parallel} v_i \gg 1$ при всех ϑ , а $z_e = \omega/k_{\parallel} v_e \ll 1$ для области углов, в которой $c_A/v \ll \cos \vartheta$, то во втором приближении находим:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & c_A^2 k^2 + k_{\perp}^2 v_i^2 (1 + T_e/2T_i) - \\ & - i \frac{c_A v_i k_{\perp}^2 k}{k_{\parallel}} \left[\left(1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_e^2}{2T_i^2} \right) \sqrt{\pi e^{-\frac{c_A^2 k^2}{v_i^2 k_{\parallel}^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{T_e}{T_i} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}} \right]. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Выражение (4.3) справедливо при $c_A/v_e \ll \cos \vartheta$, т. е. для всех углов, кроме очень близких к $\pi/2$.

Интересно сравнить (4.3) с соответствующим из корней (1.2) при $c_S \ll c_A$ равным $\omega^2 = (c_A^2 + c_S^2 \sin^2 \vartheta) k^2$. Вещественная часть (4.3) совпадает с этим выражением, если положить в (1.4) $\gamma_i = 2$ и $\gamma_e = 1$. Иначе говоря, ионы ведут себя в этих колебаниях как газ с двумя эффективными степенями свободы. Для электронов рассматриваемые колебания являются очень медленными, так что в каждый момент, двигаясь вдоль магнитных силовых линий, они успевают принять равновесное (больцмановское) распределение, а такому изотермическому движению как раз и соответствует $\gamma = 1$.

При углах, близких к $\pi/2$ ($\cos \vartheta \ll c_A/v_e$), из уравнения (4.1) приближенно можно получить

$$\omega_2^2 = c_A^2 k^2 + v_i^2 k^2 (1 + T_e/T_i) - ic_A v_i k^2 \left(\frac{m_e T_e}{m_i T_i}\right)^{1/2} \frac{2\sqrt{\pi} k}{k_{\parallel}} e^{-\frac{c_A^2}{v_e^2} k_{\parallel}^2}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что $\gamma_e = \gamma_i = 2$, т. е. в волнах, идущих поперек магнитного поля, электронный газ (так же как и ионный) имеет две эффективные степени свободы.

Если $H^2/8\pi \geq nT$ (или $v_i \geq c_A$), то рассмотренная магнитозвуковая волна является слабозатухающей только при углах ϑ , близких к 0 или $\pi/2$, в противном случае она затухает за время порядка одного периода колебаний. При ϑ , близких к $\pi/2$ ($\cos \vartheta \ll \sqrt{m_e/m_i}$), выражение (4.4) справедливо и для $v_i \sim c_A$; при $\vartheta \ll 1$ логарифмический декремент затухания порядка ϑ^2 .

При выполнении условия

$$T_e \gg T_i \quad (4.5)$$

возможен еще один тип слабо затухающих волн. Эти волны аналогичны продольным ионным (звуковым) волнам, которые и в отсутствие магнитного поля могут распространяться в плазме. Ионные волны в разреженной плазме без магнитного поля были рассмотрены Волковым [9], показавшим, что они могут распространяться только при условии (4.5) и имеют скорость $\omega/k = T_e/m_i$. Сделав предположение (подтверждаемое результатом), что $v_i \ll \omega/k_{\parallel} \ll v_e$, получим из (4.1)

$$\omega_3^2 = \frac{T_e}{m_i} k_{\parallel}^2 \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{T_e^{3/2}}{T_i^{3/2}} e^{-\frac{T_e}{2T_i}} + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right) \right]. \quad (4.6)$$

Аналогичное выражение получено в [5]. Магнитное поле приводит к зависимости скорости звука от направления, а также к тому, что волны перестают быть чисто продольными, и в них имеются все три компоненты электрического поля и x , z , компоненты магнитного. Сравнение с (1.2), (1.4) дает $\gamma_e = 1$, что опять связано с изотермическим поведением электронов.

Примечание при корректуре. Кинетическое рассмотрение МГ-волн проделано также в опубликованной недавно подробной работе К. Н. Степанова [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
 2. В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 21, 788 (1951).
 3. С. И. Брагинский. ДАН СССР, 115, 475 (1957).
 4. Б. Н. Гершман. ЖЭТФ, 31, 707 (1956).
 5. I. V. Bernstein. Phys. Rev., 109, 10 (1958).
 6. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов. ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
 7. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
 8. Х. Альфвен. Космическая электродинамика. ИЛ, 1952.
 9. Т. Ф. Волков. Дипломная работа. МИФИ, 1953.
 10. К. Н. Степанов. ЖЭТФ, 34, 1292 (1958).
-

Л. С. Соловьев

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ *

В приближении дрейфовой теории рассчитывается движение частицы в поле ловушки с «магнитными пробками». Определяется длина траектории частицы, допуск на искривление оси ловушки и влияние дополнительных провалов поля на оси.

Г. И. Будкером [1] предложена магнитная ловушка, представляющая собой аксиально-симметричное магнитное поле, минимальное в центре и возрастающее в обе стороны вдоль оси. В настоящей работе рассматривается движение заряженных частиц в такой ловушке в дрейфовом приближении. При задании параболической аппроксимации поля на оси удается в замкнутом виде проинтегрировать уравнения движения частицы.

§ 1. Уравнения дрейфовой теории для аксиально-симметричного магнитного поля

Полная система уравнений дрейфовой теории для движения центра ларморовской окружности в магнитном поле есть [2]

$$\frac{dr}{dt} = u \frac{H}{H} + \frac{mc(v^2 + u^2)}{2eH^3} [H \nabla H], \quad v^2 = u^2 + w^2,$$
$$\frac{w^2}{H} = A = \text{const}, \quad (1.1)$$

* Работа выполнена в 1957 г.

где $v = \text{const}$ — полная скорость частицы, а u и w ее составляющие — параллельная H и перпендикулярная H : $u \parallel H$, $w \perp H$. Система (1.1) эквивалентна векторному уравнению

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sqrt{v^2 - Ah} \frac{\mathbf{H}}{H} + \frac{mc(2v^2 - Ah)}{2eH^3} [\mathbf{H}\nabla H], \quad (1.2)$$

правая часть которого полностью определяется заданием магнитного поля \mathbf{H} .

В аксиально-симметричном магнитном поле $\mathbf{H} = \text{rot } A_\varphi$:

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi), \quad A_\varphi = \frac{1}{2} rh(z) - \frac{r^3}{16} h''(z) + \dots,$$

где $h(z)$ — магнитное поле на оси симметрии z . Ограничиваясь членами порядка r^2 , получаем

$$H_r = -\frac{r}{2} h'(z), \quad H_z = h - \frac{r^2}{4} h'',$$

$$H = h - \frac{r^2}{4} \left(h'' - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{h} \right), \quad \nabla H = e_z h' - \frac{r}{2} e_r \left(h'' - \frac{1}{2} \frac{h'^2}{h} \right),$$

а величина $[\mathbf{H}\nabla H]$ получается в виде:

$$[\mathbf{H}\nabla H] = \frac{r}{4} e_\varphi (-2hh'' + 3h'^2).$$

При учете только линейных по r членов, векторное уравнение (1.2) записывается в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\dot{z} = \sqrt{v^2 - Ah(z)},$$

$$\dot{r} = -\frac{r}{2} \frac{h'}{h} \dot{z}, \quad (1.3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{mc}{2e} \cdot \frac{2v^2 - Ah}{h^3} \left(-\frac{hh''}{2} + \frac{3}{4} h'^2 \right).$$

Второе уравнение (1.3) непосредственно интегрируется:

$$r^2 h(z) = \text{const},$$

т. е. движение по r происходит по поверхности вращения, образованной магнитными силовыми линиями, так как уравнение силовых линий, как нетрудно убедиться, есть $rA_\varphi(z, r) = \text{const}$.

Первое уравнение (1.3) после дифференцирования по t записывается в виде:

$$\dot{z} + \frac{A}{2} h'(z) = 0. \quad (1.4)$$

Если поле на оси $h(z)$ имеет форму потенциальной ямы, то решение уравнения (1.4) является колебательным.

a) Параболическая аппроксимация поля на оси

Наиболее простое выражение для решения (1.4) получается, если принять квадратичную аппроксимацию поля на оси:

$$h(z) = h_0 \left(1 + \frac{z^2}{l^2} \right), \quad (1.5)$$

тогда уравнение (1.4) является уравнением гармонических колебаний

$$z + \frac{Ah_0}{l^2} z = 0.$$

Его решение есть

$$z = l \sqrt{\frac{v^2}{Ah_0} - 1} \sin \frac{\sqrt{Ah_0}}{l} t, \quad (1.6)$$

где начало отсчета t соответствует моменту прохождения частицей плоскости $z=0$.

Деля третье уравнение (1.3) на первое, получим для принятой аппроксимации $h(z)$:

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\sqrt{Ah_0}}{\omega_0 l^2} \frac{(2a^2 + 1 - z^2/l^2) \left(\frac{1}{2} - z^2/l^2 \right)}{(1 + z^2/l^2)^3 \sqrt{a^2 - z^2/l^2}},$$

где $\omega_0 = \frac{eh_0}{mc}$, $a^2 = \frac{v^2}{Ah_0} - 1$. Принимая начало отсчета φ от момента прохождения частицей $z=0$, с помощью подстановки $z = al \sin x$, получим для φ выражение

$$-\varphi = \frac{\sqrt{Ah_0}}{\omega_0 l} \int_0^x \frac{(2a^2 + 1 - a^2 \sin^2 x) \left(\frac{1}{2} - a^2 \sin^2 x \right)}{(1 + a^2 \sin^2 x)^3} dx.$$

Вычисление интеграла приводит к следующей зависимости $\varphi = \varphi(z)$

$$\varphi(z) = -\frac{v}{8\omega_0 l} \left\{ \frac{z\sqrt{1 - c^2(1 + z^2/l^2)} [4 + 3c^2(1 + z^2/l^2)]}{l(1 + z^2/l^2)^2} + (1 + 3c^4) \operatorname{arctg} \frac{z/l}{\sqrt{1 - c^2(1 + z^2/l^2)}} \right\}, \quad (1.7)$$

где $c^2 = Ah_0/v^2$.

При инжекции в плоскости $z=0$ величина $c = \cos \alpha$, где α — угол начальной скорости с нормалью к силовой линии H .

Исследуем поведение траектории $\varphi = \varphi(z)$.

1) Начальный угол ее с осью z определяется при $z \rightarrow 0$:

$$-\varphi = \frac{v}{2\omega_0 l} \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} z.$$

2) В плоскостях $z = \pm l/\sqrt{2}$ (точка перегиба силовых линий **H**), траектория параллельна оси z .

3) Точки возврата траектории соответствуют $z_B = \pm l \operatorname{tg} \alpha$,

$$-\varphi = \frac{v}{8\omega_0 l} (1 + 3 \cos^2 \alpha) \frac{2n+1}{2} \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4) Частица возвращается к плоскости $z = 0$ при азимутах

$$-\varphi_n = \frac{v}{8\omega_0 l} (1 + 3 \cos^2 \alpha) n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

Частица совершает колебательные движения по z , если амплитуда колебаний $a = l \operatorname{tg} \alpha$ не превышает z_m , в котором достигается максимальное поле на оси h_m , откуда

$$\cos \alpha > \sqrt{\frac{h_0}{h_m}}.$$

Записывая формулы (1.7) и (1.8) в виде

$$-\varphi = \frac{v}{8\omega_0 l} \Phi(z), \quad -\varphi_1 = \frac{v}{8\omega_0 l} \Phi(0),$$

получим следующие числовые данные для азимута возвращения частицы к плоскости $z = 0$ и основных точек траектории.

α°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$1/8 \Phi(0)$	1,57	1,50	1,31	1,05	0,80	0,59	0,47	0,41	0,39	0,39

α°	$\Phi(l/\sqrt{2})$	z_B	Φ_B	$\Phi(0)$	$\Phi'(0)$
10	—	0,18	6	12	23,7
30	—	0,58	4,2	8,4	10
35	3,7	0,71	3,7	7,4	9,25
45	3,3	1	2,75	5,5	8,5
66	2,98	2,24	1,7	3,4	8,1
90	2,96		1,57	3,14	8,0

На рис. 1 приведены траектории $\varphi(z)$ для различных начальных углов α .

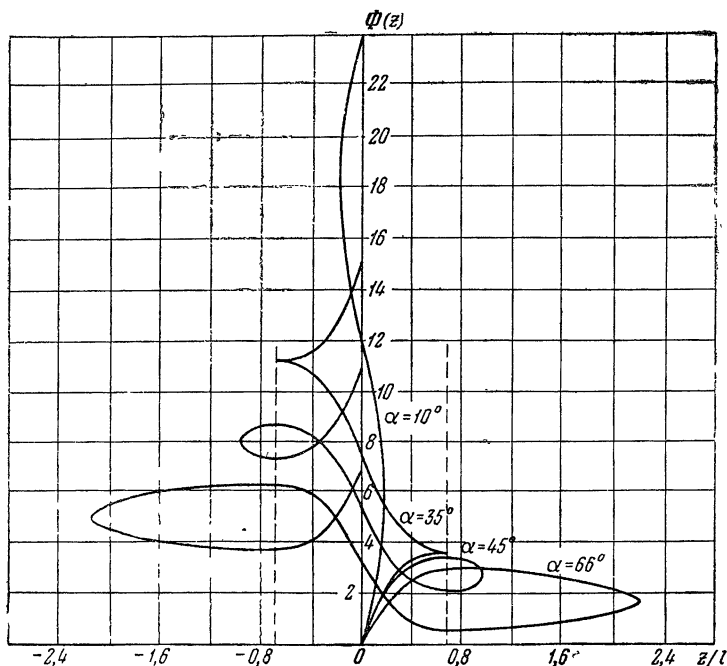


Рис. 1.

б) Влияние дополнительных провалов поля

Рассмотрим кратко движение в поле с дополнительными провалами. Распределение поля на оси представлено на рис. 2. Основной провал в центре, а также дополнительные провалы по бокам и периферийное возрастание от h_1 до h_m , будем аппроксимировать параболлами, характеризующимися параметрами $h_0, l; h_{01}, l_1; h_1, l_2$.

Для расчета траекторий φ удобно выразить как функцию от h

$$\begin{aligned}
 -\varphi(h) = & \frac{mcv}{8eh_0l} \left\{ \frac{\sqrt{h/h_0 - 1} \sqrt{1 - Ah/v^2} (4 + 3Ah/v^2)}{(h/h_0)^2} + \right. \\
 & \left. + \left(1 + \frac{3A^2h_0^2}{v^4} \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h/h_0 - 1}{1 - Ah/v^2}} \right\}. \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Так как A есть величина постоянная для данной траектории, определяющаяся начальными условиями при $z=0$:

$A = \left(\frac{w^2}{h}\right)_{z=0} = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{h_0}$, то $\varphi(h)$ зависит только от двух параметров, определяющих яму: от минимального поля h_{0i} и l_i

$$\varphi = \varphi(h, h_{0i}, l_i).$$

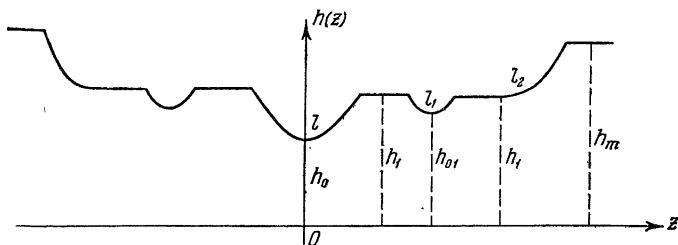


Рис. 2.

При этом следует помнить, что для каждой ямы начало отсчета z и φ принято в ее центре.

На участках постоянного поля дрейфа не происходит, поэтому для схемы рис. 2 получим для азимута при первом возвращении частицы к плоскости $z=0$

$$\begin{aligned} -\varphi_1 = & \\ = & 2\varphi(h_1, h_0, l) + 4\varphi(h_1, h_{01}, l_1) + \\ + & \left(1 + \frac{3A^2 h_1^2}{v^4}\right) \frac{mcv}{8ch_1 l} \pi. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Средний член в (1.10) определяет набег азимута из-за наличия дополнительного провала l_1 . Траектория $\varphi = \varphi(z)$ для поля с провалом (рис. 2) схематически показана на рис. 3.

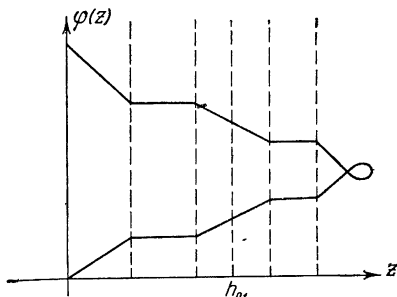


Рис. 3.

§ 2. Длина пути частицы

Длина траектории частицы в магнитном поле вычисляется очень просто, благодаря постоянству ее скорости

$$S = vt.$$

При движении в параболической «потенциальной» яме время возвращения частицы к плоскости $z=0$ определяется из (1.6) $\frac{\sqrt{Ah_0}}{l} t = \pi$, отсюда

$$S = \frac{\pi l}{\cos \alpha} . \quad (2.1)$$

Вообще путь от точки $z=0$ до произвольной точки z есть

$$S = \frac{vl}{\sqrt{Ah_0}} \arcsin \frac{z/l}{\sqrt{\frac{v^2}{Ah_0} - 1}} = \frac{vl}{\sqrt{Ah_0}} \arcsin \sqrt{\frac{h/h_0 - 1}{\frac{v^2}{Ah_0} - 1}} .$$

Отсюда предельным переходом $l \rightarrow \infty$ получаем путь в однородном поле с напряженностью h

$$S = \frac{z}{\sqrt{1 - Ah/v^2}} .$$

Приведенные формулы позволяют написать выражение и для длины траектории в поле, схематически изображенном на рис. 2:

$$S = \frac{2vl}{\sqrt{Ah_0}} \arcsin \sqrt{\frac{h_1/h_0 - 1}{\frac{v^2}{Ah_0} - 1}} + \frac{2z_1}{\sqrt{1 - \frac{Ah_1}{v^2}}} + \\ + \frac{4vl_1}{\sqrt{Ah_{01}}} \arcsin \sqrt{\frac{h_1/h_{01} - 1}{\frac{v^2}{Ah_{01}} - 1}} + \frac{2z_2}{\sqrt{1 - \frac{Ah_1}{v^2}}} + \frac{\pi l_2 v}{\sqrt{Ah_1}} , \quad (2.2)$$

где z_1 и z_2 — длины участков однородного поля с напряженностью h_1 .

§ 3. Допуск на искривление оси соленоида

Предположим, что ось ловушки представляет собой окружность радиуса R . Найдем сначала представление магнитного поля вблизи такой искривленной оси. С этой целью запишем компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат r, θ, z в виде разложения по степеням z и $\rho = r - R$:

$$\begin{aligned} H_\theta &= h + \alpha_1 \rho + \alpha_2 z + \alpha_3 \rho^2 + \alpha_4 z^2 + \alpha_5 \rho z + \dots, \\ H_z &= \beta_1 \rho + \beta_2 z + \beta_3 \rho^2 + \beta_4 z^2 + \beta_5 \rho z + \dots, \\ H_r &= \gamma_1 \rho + \gamma_2 z + \gamma_3 \rho^2 + \gamma_4 z^2 + \gamma_5 \rho z + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Компоненты H_z и H_r не содержат нулевых членов, так как по предположению центральная силовая линия имеет форму окружности $r=R$. Величины h , α , β и γ будем считать функциями $s=R\theta$. Линейные члены при $R=\infty$ имеют порядок малости $\varepsilon \sim h'\rho/h$, квадратичные члены $\sim \varepsilon^2$. Будем предполагать, что

$$\frac{\rho}{R} \sim \varepsilon^2,$$

или еще меньше, тогда, вследствие того что соответствующие члены в (3.1) исчезают при $R \rightarrow \infty$, заключаем

$$\beta_3, \beta_5, \gamma_3, \gamma_4 \sim \varepsilon^3$$

или меньше, и, аналогично,

$$\alpha_4 \approx \alpha_3, \beta_2 \approx \gamma_1.$$

Кроме того, из соображений симметрии H_θ и H_r — четные функции z , а H_z — нечетная, отсюда

$$\alpha_2 = \alpha_5 = \beta_4 = \gamma_2 = \gamma_5 = 0.$$

Таким образом (3.1), с точностью до ε^2 включительно, может быть записано в виде:

$$H_\theta = h + \alpha_1 \rho + \alpha_3 (\rho^2 + z^2), \quad H_z = \beta_1 \rho + \gamma_1 z, \quad H_r = \gamma_1 \rho.$$

Связь между оставшимися коэффициентами находится с помощью уравнений $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, в результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} H_\theta &= h \left(1 - \frac{\rho}{R} \right) - \frac{h''}{4} (\rho^2 + z^2), \\ H_z &= -\frac{h'}{2} z, \\ H_r &= -\frac{h'}{2} \rho, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где штрихи обозначают производные по s .

Согласно формулам (3.2) получим уравнения движения центра ларморовской окружности [2] с принятой ранее точностью в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= \sqrt{v^2 - Ah(s)}, \\ \dot{z} &= \varepsilon - \beta \rho - \gamma z, \\ \dot{\rho} &= \beta z - \gamma \rho, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где $\varepsilon = \frac{h^2}{R} \frac{mc(2v^2 - Ah)}{2eh^3}$, $\beta = \left(\frac{3h'^2}{4} - \frac{hh''}{2}\right) \frac{mc(2v^2 - Ah)}{2eh^3}$,
 $\gamma = \frac{h'}{2h} \dot{s}$, а $h = h(s)$ — распределение поля на оси $r = R$.

Умножая второе из уравнений (3.3) на мнимую единицу и складывая его с третьим, получим, обозначая $\rho + iz = P$,

$$\dot{P} + (\gamma + i\beta)P = i\varepsilon.$$

Отсюда согласно известным формулам для решения линейного уравнения

$$P = \left\{ P_0 + i \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{\int_0^\tau (\gamma + i\beta) dt} d\tau \right\} e^{-\int_0^t (\gamma + i\beta) dt}. \quad (3.4)$$

При заданной функции $h(s)$ функция (3.4) дает решение задачи о движении частицы, если известна зависимость $s = s(t)$. Эта зависимость определяется решением первого уравнения (3.3). Отклонение x от оси $r = R$ и азимут φ вокруг этой оси определяются формулами

$$x = \sqrt{\rho^2 + z^2} = |P|, \quad \varphi = \arg P. \quad (3.5)$$

Для невозмущенного движения ($R \rightarrow \infty$) $\varepsilon = 0$ получаем

$$P = P_0 e^{-\int_0^t (\gamma + i\beta) dt}.$$

Полагая $P_0 = x_0 e^{i\varphi_0}$, найдем x и φ для этого случая

$$x = x_0 e^{-\int_0^t \gamma dt} = x_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad \varphi = \varphi_0 - \int_0^t \beta dt, \quad (3.6)$$

т. е. те же формулы, что и раньше. Влияние искривления центральной силовой линии дает добавку к комплексному вектору P вида

$$\Delta P = i \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{\int_0^\tau (\gamma + i\beta) dt} d\tau = i \int_0^t \varepsilon(\tau) \sqrt{\frac{h(\tau)}{h(t)}} e^{i \int_0^\tau \beta dt} d\tau. \quad (3.7)$$

При параболической аппроксимации поля на оси $r = R$

$$h(s) = h_0 (1 + s^2/l^2), \quad s = l \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \left(\frac{v}{l} \cos \alpha \cdot t \right),$$

интеграл в экспоненте (3.7) равен

$$\int_t^{\tau} \beta(\xi) d\xi = \varphi[s(t)] - \varphi[s(\tau)],$$

где функция $\varphi(s)$ определяется формулой (1.7). Таким образом, подинтегральное выражение в (3.7) представляется через элементарные функции. В общем случае интеграл в (3.7) достаточно сложен, поэтому мы ограничимся его вычислением при малых α , отбрасывая члены $\sim \alpha^2$. В этом приближении

$$h \approx h_0, \quad h'^2 \approx 0, \quad h'' \approx \frac{2h_0}{l^2}, \quad 2v^2 - Ah \approx v^2,$$

и величины ε и β являются постоянными

$$\varepsilon \approx \frac{v^2}{2\omega_0 R}, \quad \beta \approx \frac{-v^2}{2\omega_0 l^2}.$$

Вычисляя интеграл в (3.7), получим:

$$\Delta P = i \frac{2\varepsilon}{\beta} e^{-\frac{i\beta t}{2}} \sin \frac{\beta t}{2},$$

отсюда

$$\Delta x = \frac{2l^2}{R} \sin \frac{v^2 t}{4\omega_0 l^2}, \quad \Delta z = \frac{l^2}{R} \sin \frac{v^2 t}{4\omega_0 l^2}, \quad \Delta \rho = \frac{l^2}{R} \left(1 - \cos \frac{v^2 t}{2\omega_0 l^2}\right). \quad (3.8)$$

Для однородного по θ магнитного поля ($l \rightarrow \infty$) непосредственно из уравнений (3.3) нетрудно получить

$$\Delta z = \frac{v^2(2 - \cos^2 \alpha)}{2\omega_0 R} t, \quad \Delta \rho = 0,$$

что совпадает с предельным случаем (3.8) $l \rightarrow \infty$ для $\alpha^2 \approx 0$.

При $l \rightarrow \infty$ дрейф по z является неограниченным. При конечном же l амплитуда отклонения от невозмущенной траектории не превышает

$$\Delta x_{\max} = \frac{2l^2}{R}. \quad (3.9)$$

Последняя формула позволяет задать допуск на радиус искривления соленоида R .

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, см настоящее издание, т. 3, стр. 3.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, М., 1955.

А. А. Веденов, Л. И. Рудаков

О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ *

§ 1. Введение

В ряде работ [1—3] было рассмотрено движение заряженной частицы в магнитных и электрических полях, медленно меняющихся во времени и в пространстве. Решение при этом получается в виде ряда по возрастающим степеням малых параметров Ω/ω , r_H/L (Ω — частота изменения электромагнитного поля, $\omega = eH/mc$ — ларморовская частота, $r_H = v/\omega$ — ларморовский радиус, L — характерный размер изменения поля в пространстве).

В настоящей работе на конкретном примере показано, каким образом можно снять ограничение $\Omega/\omega \ll 1$, используя для нахождения решения лишь малость r_H/L и δ/L , где δ — смещение частицы за время $1/\Omega$. При изложении будем придерживаться обозначений работы [2].

В уравнениях движения частицы

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{e}{mc} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

разобьем \mathbf{x} на две части:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} + \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} описывает быстрые (осциллирующие) движения в однородном поле, а \mathbf{R} — медленное движение, связанное с неоднородностью \mathbf{F} и $\boldsymbol{\omega}$. Проведем разложение полей:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{F}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{R}), \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cong \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}). \quad 1.3$$

* Работа выполнена в 1958 г.

Учитывая (1. 2) и (1. 3), получим из (1. 1)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{R}) + \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}), \quad (1. 4)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}) + \overline{\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R})} + \overline{(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{R})}. \quad (1. 5)$$

[Черта означает усреднение по быстрому движению; вектор $\ddot{\mathbf{R}}$ в уравнение (1. 4) входит как параметр, т. е. при интегрировании $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R})$ считаются постоянными в пространстве]. Таким образом, необходимо: найти движение частицы в однородных полях; произвести усреднение в (1.5).

§ 2. Движение частицы в однородном, переменном во времени поле

Рассмотрим наиболее интересный случай плоской электромагнитной стоячей волны, поляризованной по кругу перпендикулярно постоянному полю $\mathbf{H} = \epsilon_0 H_0$. Для такой волны

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = H(z) (\epsilon_1 \sin \Omega t - \epsilon_2 \cos \Omega t),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = E(z) (\epsilon_1 \sin \Omega t - \epsilon_2 \cos \Omega t).$$

Здесь $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ образуют правую тройку единичных ортов. Уравнение (1. 4) при этом запишется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} = & F(\epsilon_1 \sin \Omega t - \epsilon_2 \cos \Omega t) + \dot{\mathbf{r}} \times \\ & \times \{ \omega_0 \epsilon_0 + \omega_{\sim} (\epsilon_1 \sin \Omega t - \epsilon_2 \cos \Omega t) \}, \end{aligned} \quad (2. 1)$$

где $F = eE/m$, $\omega_{\sim} = eH/mc$, $\omega_0 = eH_0/mc$; зависимость от z может быть опущена, если $r \ll \lambda = c/\Omega$. Решение уравнения (2. 1) имеет вид (см. Приложение):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & \epsilon_0 \left(v_{\parallel} t \cos \theta + \frac{v_{\perp}}{\xi} \cos \xi \right) \\ & + \epsilon_1 \left\{ -\frac{v_{\parallel}}{\psi} \sin \theta \cos \psi + \frac{v_{\perp}}{2(\psi - \xi)} (1 + \cos \theta) \sin(\psi - \xi) \right. \\ & \left. + \frac{v_{\perp}}{2(\psi + \xi)} (1 - \cos \theta) \sin(\psi + \xi) - \frac{F}{(\omega_0 + \psi)\psi} \sin \psi \right\} \\ & + \epsilon_2 \left\{ -\frac{v_{\parallel}}{\psi} \sin \theta \sin \psi - \frac{v_{\parallel}}{2(\psi - \xi)} (1 + \cos \theta) \cos(\psi - \xi) \right. \\ & \left. - \frac{v_{\perp}}{2(\psi + \xi)} (1 - \cos \theta) \cos(\psi + \xi) + \frac{F}{(\omega_0 + \psi)\psi} \cos \psi \right\}; \end{aligned} \quad (2. 2)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} = & \varepsilon_0 \{v_{\parallel} \cos \theta - v_{\perp} \sin \xi\} + \\
& + \varepsilon_1 \left\{ v_{\perp} \cos \psi \cos \xi + v_{\perp} \cos \theta \sin \psi \sin \xi + v_{\parallel} \sin \theta \sin \psi - \right. \\
& \quad \left. - \frac{F}{\omega_0 + \Omega} \cos \psi \right\} \\
& + \varepsilon_2 \left\{ v_{\perp} \sin \psi \cos \xi - v_{\perp} \cos \theta \cos \psi \sin \xi - v_{\parallel} \sin \theta \cos \psi - \right. \\
& \quad \left. - \frac{F}{\omega_0 + \Omega} \sin \psi \right\}, \tag{2.3}
\end{aligned}$$

где $\xi = \sqrt{a^2 + b^2} t$, $\psi = \Omega t$, $a = \Omega \sin \theta$, $b = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_{\sim}^2} + \Omega \cos \theta$,
 $\theta = \arctg \frac{H_{\sim}}{H_0} - \arctg \frac{a}{b}$,

v_{\parallel} и v_{\perp} — константы, связанные условием $m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/2 = E$.
 При этом в уравнении (1.5) необходимо добавить справа член $+ F \frac{\omega_{\sim}}{\omega_0 + \Omega}$.

§ 3. Уравнение для медленного движения

Для корректного проведения усреднения в уравнении (1.5) нужно, чтобы r содержало только осциллирующие члены. Поэтому перейдем к системе координат, движущейся со скоростью

$$\mathbf{v} = \varepsilon_0 v_{\parallel} \cos \theta.$$

Усреднение по быстрым движениям в (1.5) дает:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}} \times \omega_0(R) + f, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
f = & \frac{1}{2} \{ \varepsilon_2 \times (\varepsilon_1 \cdot \nabla) \omega_0 - \varepsilon_1 \times (\varepsilon_2 \cdot \nabla) \omega_0 \} \times \\
& \times \left\{ -\frac{v_{\perp}^2}{4} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\xi - \psi} + \frac{v_{\perp}^2}{4} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\xi + \psi} + \right. \\
& \left. + \frac{v_{\parallel}^2}{\psi} \sin^2 \theta + \frac{F^2}{(\omega_0 + \psi)^2 \psi} \right\} + F \frac{\omega_{\sim}}{\omega_0 + \Omega} \varepsilon_0 + \\
& + \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\sin \theta}{\xi} (\varepsilon_0 \nabla \omega_{\sim}) \varepsilon_0. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Проектируя (3.1) на направление постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \varepsilon_0 H_0$, получим для продольного движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \varepsilon_0 = \dot{v}_{\parallel} = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{v_{\perp}^2}{4} \frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sqrt{a^2 + b^2} - \Omega} + \frac{v_{\perp}^2}{4} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + \Omega} + \right. \\ & \left. + \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} \sin^2 \theta - \frac{F^2}{\omega_0 (\omega_0 + \Omega)^2} \right\} \varepsilon_0 \cdot \nabla \omega_0 + \frac{F \omega_{\sim}}{\omega_0 + \Omega} + \\ & + \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\varepsilon_0 \nabla \omega_{\sim}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для поперечного (дрейфового) движения имеем (см., например, [2]):

$$\dot{\mathbf{R}}_{\perp} = \frac{\mathbf{f} \times \omega_0}{\omega_0^2}. \quad (3.4)$$

Полученные уравнения (3.3), (3.4) применимы при выполнении условия малости смещения за период осциллирующего движения по сравнению с характерным размером L , т. е. при

$$\frac{|v|}{\Omega L} \ll 1, \quad \frac{|v|}{\omega L} \ll 1.$$

Для малых переменных полей $H_{\sim}/H_0 \ll 1$ и малых Ω/ω_0 (3.3) принимает вид (члены с электрическим полем опущены):

$$\dot{v}_{\parallel} = \left\{ -\frac{v_{\perp}^2}{2\omega_0} + \frac{v_{\parallel}^2}{2\Omega} \left(\frac{H_{\sim}}{H_0} \right)^2 \right\} \varepsilon_0 \cdot \nabla \omega_0. \quad (3.5)$$

В отличие от случая постоянных во времени полей, (3.5) содержит силу $(mv_{\parallel}^2/2) (H_{\sim}/H_0)^2 \frac{\varepsilon_0 \cdot \nabla \omega_0}{\Omega}$, величина и направление которой зависит от знака заряда, массы частицы, частоты и направления вращения внешнего поля. Частота Ω ограничена снизу требованием:

$$\frac{1}{\Omega} \ll \frac{L}{v}, \quad \frac{\Omega}{\omega_0} \gg \frac{r_H}{L}. \quad (3.6)$$

Если H_{\sim} меняется в пространстве значительно медленнее, чем H_0 , то уравнение (3.5) интегрируется:

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} = E \frac{\Omega \omega_0}{\omega_{\sim}^2} \left\{ 1 - e^{-\frac{\omega_{\sim}^2}{\Omega} \left(\frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_{\text{вр}}} \right)} \right\}, \quad (3.5')$$

где E — энергия частоты, а ω_{or} — ларморовская частота в точке поворота.

В случае, когда $H_{\sim} \rightarrow 0$, выражение (3.5') дает известную формулу для статического поля:

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} = E \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_{or}} \right).$$

Существенное отличие имеет место при $\omega_{\sim}/\Omega\omega_0 \geq 1$ или, с учетом (3.6), при $(H_{\sim}/H_0)^2 \gg r_H/L$. В этом случае зависимость v_{\parallel}^2 от поля носит, в соответствии с (3.5), экспоненциальный характер.

Наличие силы, пропорциональной v_{\parallel}^2 , может привести к существенному увеличению времени ухода частицы τ из магнитной ловушки при включении высокочастотного поля.

Если в статическом случае (см. Будкер)

$$\tau \sim \tau_c (H_{\max}/H_{\min})$$

(τ_c — время кулоновского столкновения), то теперь при выполнении условия $(H_{\sim}/H_0)^2 > \Omega/\omega_0$ частицы всех энергий удерживаются уже малым перепадом магнитного поля. Могут уходить лишь частицы, для которых не выполняется критерий $\frac{1}{\Omega} \ll \frac{L}{v}$.

Выражение для силы $(mv_{\parallel}^2/2)(H_{\sim}/H_0)^2 \epsilon_0 \cdot \nabla \omega_0$ [см. (3.5)] можно просто получить в случае $\Omega \ll \omega$; $\frac{H_{\sim}}{H_0} \ll 1$: средняя сила, действующая на частицу в неоднородном поле, есть $(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H}$, где

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c} \overline{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}.$$

Если проекция скорости частицы на мгновенное направление H есть v_{\parallel} , то соответствующие члены в v и r будут:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} (-\boldsymbol{\epsilon}_2 \sin \theta \cos \Omega t + \boldsymbol{\epsilon}_1 \sin \theta \sin \Omega t)$$

$$\mathbf{r} = \frac{v_{\parallel} \sin \theta}{\Omega} (-\boldsymbol{\epsilon}_2 \sin \Omega t - \boldsymbol{\epsilon}_1 \cos \Omega t)$$

и, следовательно: $\boldsymbol{\mu} \simeq \frac{e}{2c} \frac{v_{\parallel}^2}{\Omega} \theta^2 \boldsymbol{\epsilon}_0$, где $\theta = H_{\sim}/H_0$.

§ 4. Кинетическое уравнение

Для решения ряда задач о взаимодействии плазмы с высокочастотным полем нужно пользоваться кинетическим уравнением. Если при этом рассмотрение ведется для вре-

мен, значительно превышающих $1/\Omega$ и $1/\omega$, и расстояний, больших, чем размеры траектории, то в кинетическом уравнении можно провести усреднение по быстрым движениям.

Кинетическое уравнение может быть написано, если известны его характеристики, являющиеся уравнениями движения одной частицы. Используя (3.3) и сохранение энергии, получим в пренебрежении дрейфом:

$$-\frac{\partial F}{\partial t} + v_{\parallel} \varepsilon_0 \cdot \nabla F + \mathbf{f} \cdot \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial F}{\partial v_{\parallel}} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial F}{\partial v_{\perp}} \right\} = \overline{\text{st } F}. \quad (4.1)$$

В заключение приносим благодарность академику М. А. Леонтовичу за ценные обсуждения.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Рассмотрим уравнение (2.1).

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \{ \omega_0 \varepsilon_0 + \omega_{\sim} (\varepsilon_1 \sin \Omega t - \varepsilon_2 \cos \Omega t) \} + F (\varepsilon_1 \sin \Omega t - \varepsilon_2 \cos \Omega t).$$

Вследствие линейности по r , решение этого уравнения распадается на общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнения. Выпишем однородную часть:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \{ \omega_0 \varepsilon_0 + \omega_{\sim} (\varepsilon_1 \sin \Omega t - \varepsilon_2 \cos \Omega t) \}. \quad (I)$$

Она описывает движение частицы в прецессирующем с частотой Ω магнитном поле.

Векторное уравнение (I) можно записать в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{\parallel} &= v_{\perp} \dot{\varepsilon}_0 (e_1 \cos \beta + e_2 \sin \beta), \\ \dot{v}_{\perp} &= -v_{\parallel} \dot{\varepsilon}_0 (e_1 \cos \beta + e_2 \sin \beta), \\ \dot{\beta} &= -\omega - (\dot{\varepsilon}_1 e_2) - \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \dot{\varepsilon}_0 (e_2 \cos \beta - e_1 \sin \beta), \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

где v_{\perp} , v_{\parallel} , β определяются соотношением:

$$\dot{\mathbf{r}} = e_0 v_{\parallel} + v_{\perp} (e_1 \cos \beta + e_2 \sin \beta), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_{\sim}^2}. \quad (III)$$

Орты $e_0, 1, 2$ связаны с полным полем $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\sim}$, $e_0 = \mathbf{B}/B$; $e_0 \times e_1 = e_2$, $e_1 \times e_2 = e_0$. Вращающиеся орты $e_0, 1, 2$ с помощью эйле-

ровых углов выразим через тройку неподвижных ортов $\varepsilon_{0,1,2}$, связанных с полем \mathbf{H}_0 . Тогда уравнения (II) и (III) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\parallel} &= v_{\perp} \dot{\psi} \sin \theta \cos \alpha, \\ \dot{v}_{\perp} &= -v_{\parallel} \dot{\psi} \sin \theta \cos \alpha, \end{aligned} \quad (IV)$$

$$\dot{\alpha} = -\omega - \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \sin \theta \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= (v_{\parallel} \cos \theta + v_{\perp} \sin \theta \sin \alpha) \varepsilon_0 + \\ &+ \varepsilon_1 (v_{\perp} \cos \psi \cos \alpha - v_{\perp} \cos \theta \sin \psi \sin \alpha + v_{\parallel} \sin \psi \sin \theta) + \\ &+ \varepsilon_2 (v_{\perp} \sin \psi \cos \alpha + v_{\perp} \cos \theta \cos \psi \sin \alpha - v_{\parallel} \cos \psi \sin \theta). \end{aligned} \quad (V)$$

Здесь $\alpha = \varphi + \beta$; θ , φ , ψ — эйлеровы углы; угол прецессии $\operatorname{tg} \theta = \omega_{\sim} / \omega_0$; $\dot{\psi} = \Omega t$.

Система (IV) имеет решение:

$$\begin{aligned} v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 &= 2E/m = \text{const}, \\ v_{\parallel} &= v_{\parallel}^0 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + v_{\perp}^0 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \sqrt{a^2 + b^2} t, \\ \sin \alpha &= \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} - \frac{b}{a} \right), \end{aligned}$$

где $a = \Omega \sin \theta$; $b = \omega + \Omega \cos \theta$; v_{\parallel}^0 и v_{\perp}^0 — константы интегрирования, связанные соотношением $(v_{\parallel}^0)^2 + (v_{\perp}^0)^2 = 2E/m$. Подставляя v_{\parallel} и α в (V), получим окончательно:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \varepsilon_0 \{ v_{\parallel}^0 \cos (\theta - \theta_0) - v_{\perp}^0 \sin \xi \} + \\ &+ \varepsilon_1 \{ v_{\perp}^0 \cos \psi \cos \xi + v_{\perp}^0 \cos (\theta - \theta_0) \sin \psi \sin \xi + \\ &+ v_{\parallel}^0 \sin \psi \sin (\theta - \theta_0) \} + \varepsilon_2 \{ v_{\perp}^0 \sin \psi \cos \xi - \\ &- v_{\perp}^0 \cos (\theta - \theta_0) \cos \psi \cos \xi - v_{\parallel}^0 \cos \psi \sin (\theta - \theta_0) \}, \end{aligned} \quad (VI)$$

$$\xi = \sqrt{a^2 + b^2} t, \quad \psi = \Omega t, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{\sim}}{\omega_0}, \quad \theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Х. Альфвен. Космическая электродинамика. ИЛ, 1952.
2. Hellwig. Zs. f. Naturforsch., 10a, 508 (1955).
3. Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев. Укр. мат. журнал, VII, № 1, 5, (1955).

Д. В. Орлинский

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ СТЕРЖНЕЙ

С. И. Брагинский и Б. Б. Кадомцев [1] предложили для стабилизации плазмы с током применять продольные стержни. В настоящей заметке излагаются результаты опытов по изучению влияния продольных стержней на развитие импульсного разряда в цилиндрической камере. Эти опыты имели целью получение предварительных экспериментальных данных о работе такого рода систем.

§ 1. Описание установки

В цилиндрическую разрядную камеру помещались проводящие стержни, параллельные оси камеры (рис. 1). При стягивании плазмы к оси под действием собственного магнитного поля стержни в некоторый момент времени принимают на себя основную часть тока, протекавшего первоначально через газ. Большая же часть плазмы, вследствие значительной скважности стержневой клетки, должна собраться вблизи оси камеры. Конечно, какая-то часть частиц при этом будет потеряна на стержнях.

Схематический чертеж установки, на которой производились измерения, приведен на рис. 1. Для того чтобы в самом начале разряда ток не протекал по стержням, система была изготовлена таким образом, что расстояние между электродами превышало длину стержней. Благодаря этому ток начинает идти через стержни только тогда, когда сжимающаяся плазма проникает в область между медным диском, которым заканчи-

* Работа выполнена в 1958 г.

вается система стержней, и верхним электродом. В ходе опытов емкость конденсаторной батареи C , начальное напряжение U_0 на конденсаторах, число стержней w и начальное давление дейтерия p_0 изменялись. Для фотографирования разряда использовался сверхскоростной фоторегистратор (СФР) в режиме лупы времени. Скорость вращения зеркала СФР была всегда одинакова. Интервал времени между кадрами на всех приводимых ниже фотографиях равен 0,5 мксек.

Во всех опытах с помощью интегрирующих поясков измерялись следующие токи: 1) полный ток разряда \mathcal{I} , соответствующий пояс располагался вне камеры; 2) суммарный ток в области стержней \mathcal{I}_1 , диаметр пояса № 1 — 8,4 см; 3) ток \mathcal{I}_2 через плазму в области, ограниченной стержнями, диаметр пояса № 2 — 4,6 см; 4) ток через один стержень \mathcal{I}_3 , диаметр пояса № 3 — 1,5 см. Поскольку диаметр стержней составлял 0,5 см, а внутренний диаметр пояса № 3 — 1,0 см, то кроме тока, протекающего через самый стержень, этот пояс мог регистрировать ток через плазму, находящуюся непосредственно вблизи стержня (если, разумеется, плазма подходит к стержню достаточно близко). Пояски № 2 и 3 были изготовлены из стеклянной трубки с наружным диаметром 0,8 см.

Использовать для измерения токов магнитные зонды, которые в значительно меньшей степени нарушают конфигурацию разряда, в этом случае не представляется возможным, так как в области стержней магнитное поле заведомо не обладает азимутальной симметрией. Использованный метод, по-видимому, не позволяет достаточно правильно определить время прихода тока в ту область, в которой он измеряется данным пояском, но зато величина тока может быть измерена с хорошей точностью.

Использовать для измерения токов магнитные зонды, которые в значительно меньшей степени нарушают конфигурацию разряда, в этом случае не представляется возможным, так как в области стержней магнитное поле заведомо не обладает азимутальной симметрией. Использованный метод, по-видимому, не позволяет достаточно правильно определить время прихода тока в ту область, в которой он измеряется данным пояском, но зато величина тока может быть измерена с хорошей точностью.

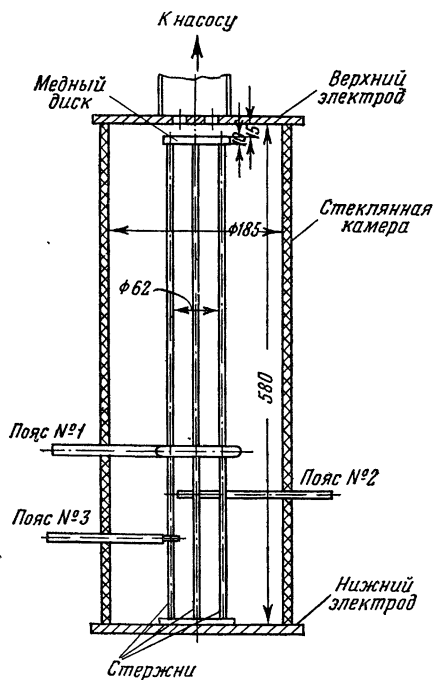


Рис. 1. Схема расположения стержней и измерительных поясков.

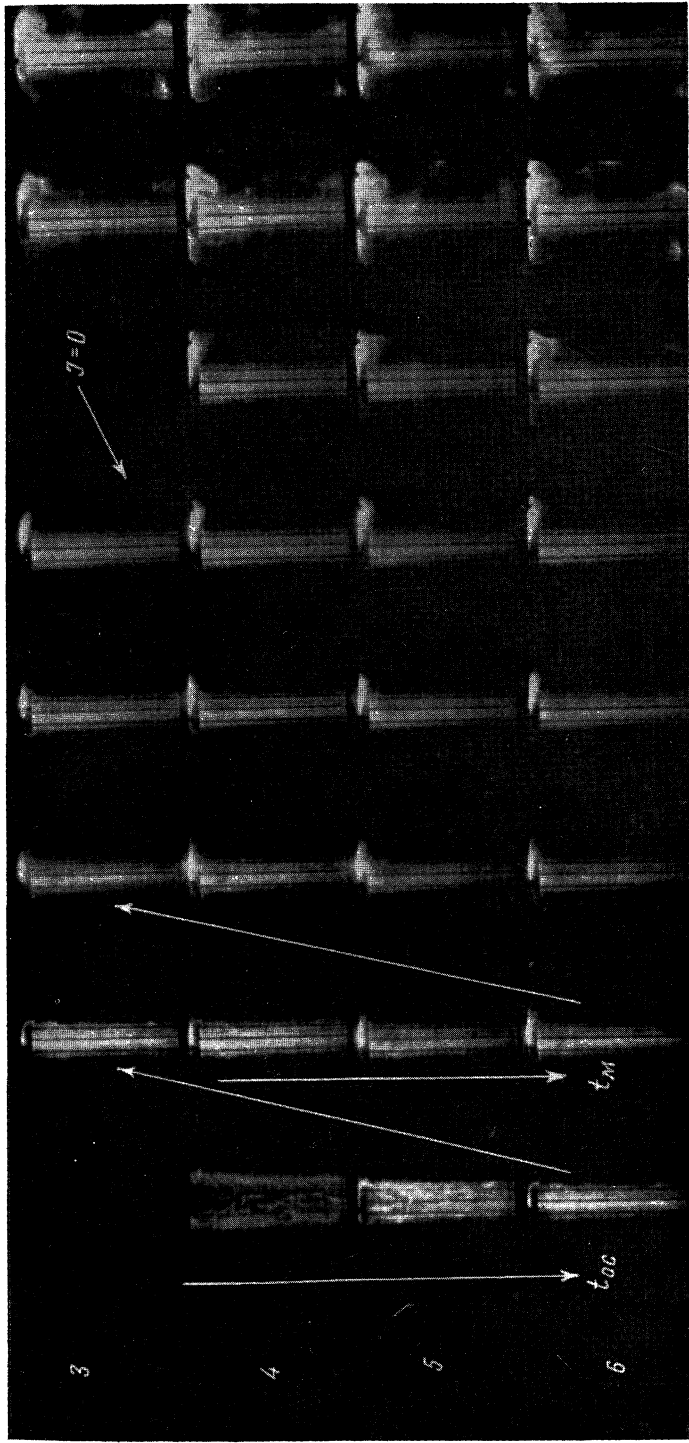


Рис. 2. Фотография разряда в цилиндрической камере с восемью стержнями
 $C = 22 \text{ мкФ}$; $U_0 = 32 \text{ кВ}$; $R_0 = 0,15 \text{ мм рт. ст.}$

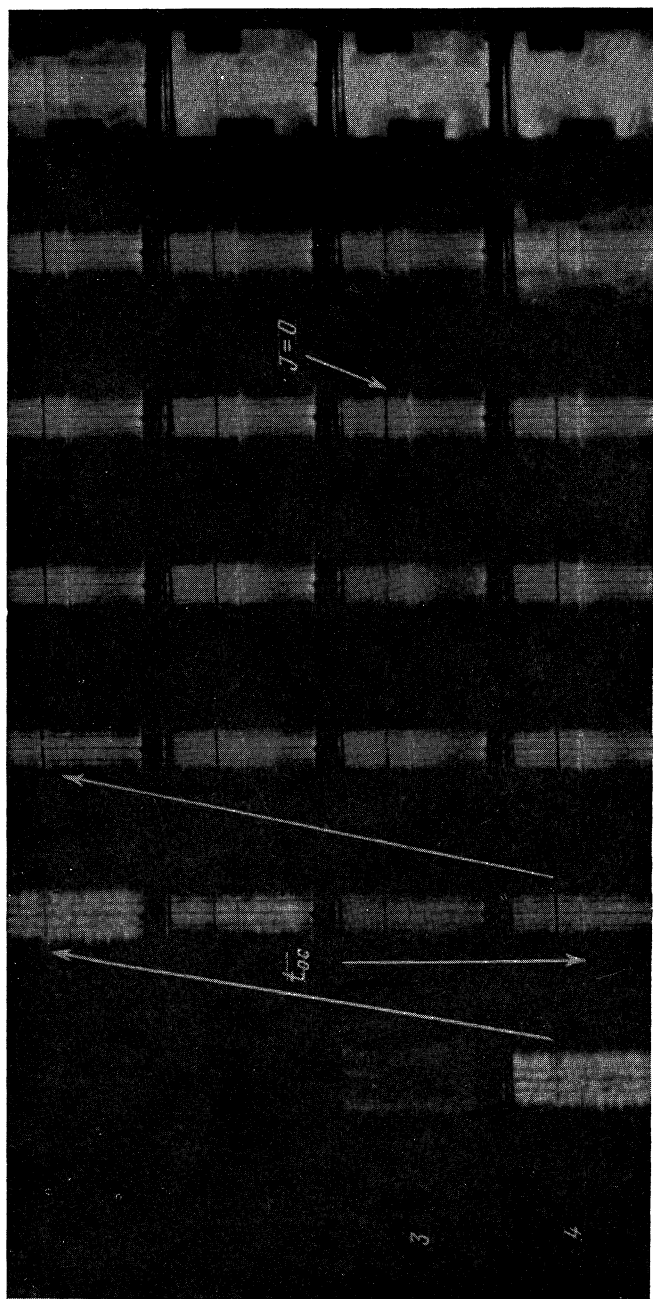


Рис. 3. Фотография разряда в цилиндрической камере с восемью стержнями в области размещения измерительных полюсов

$C = 22$ мкф; $U_0 = 41$ кВ; $P_0 = 0,15$ мм рт. ст.

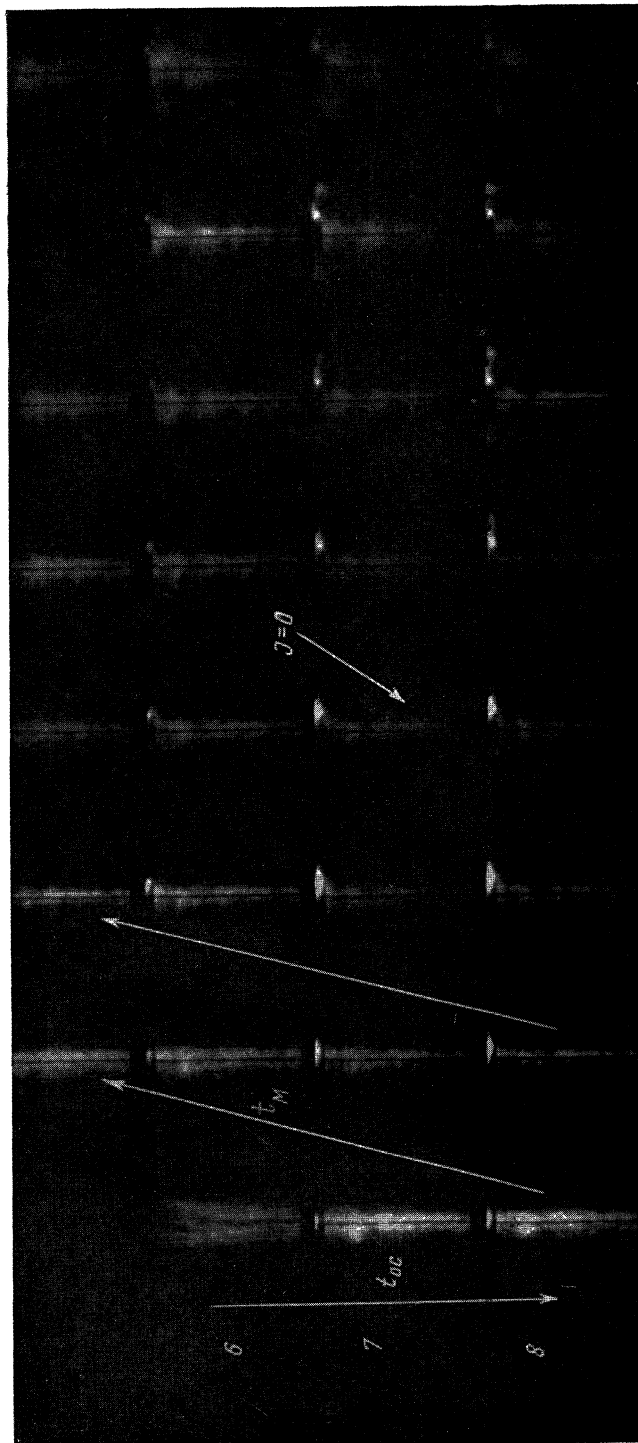


Рис. 4. Фотографии разряда в цилиндрической камере с четырьмя стержнями
 $C = 22$ мкф; $U_0 = 23$ кВ; $P_0 = 0,15$ м.м. рт. ст.

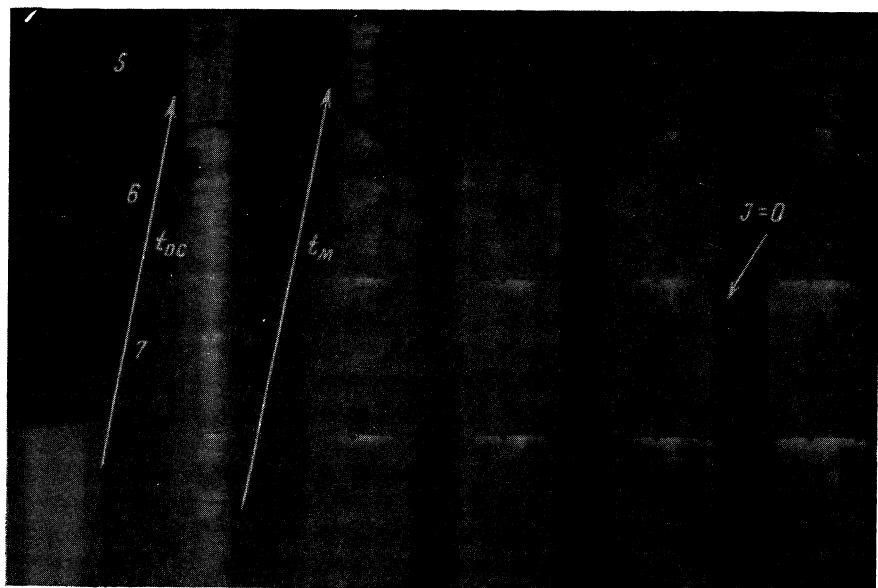


Рис. 5. Фотография разряда в цилиндрической камере без стержней
 $C = 22 \text{ мкФ}$, $U_0 = 32 \text{ кВ}$; $p_0 = 0,15 \text{ мм рт. ст.}$

Осциллограммы токов снимались, как правило, несколько раз в одних и тех же условиях. Во всех случаях повторяемость результатов была вполне удовлетворительной.

§ 2. Результаты измерений

Фотографии разряда приведены на рис. 2 и 3 (8 стержней), рис. 4 (4 стержня) и рис. 5 (без стержней). Из этих фотографий видно, что стержни оказывают на разряд значительное влияние. Если без стержней развал столба плазмы наступает

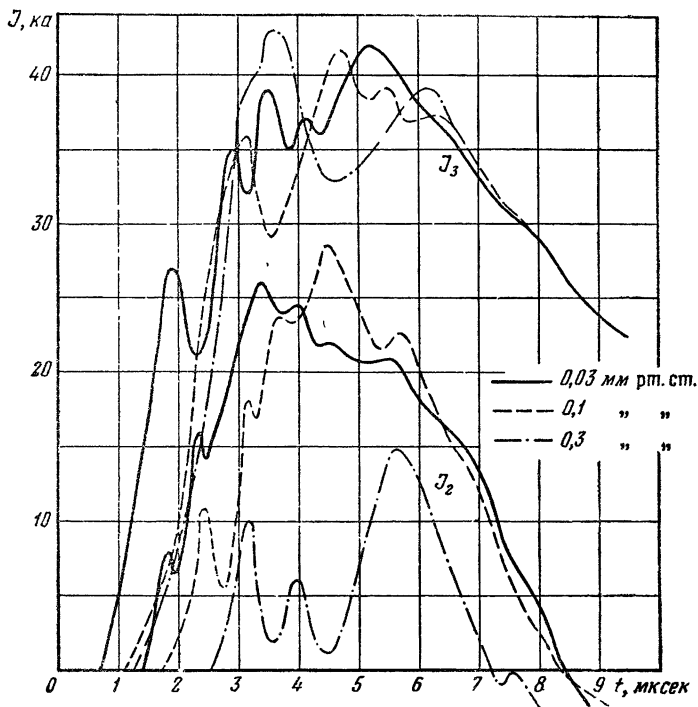


Рис. 6. Кривые изменения токов J_2 и J_3 во времени при различных начальных давлениях деутерия p_0 .

$$C = 22 \text{ мкф}; U_0 = 32 \text{ кв}; w = 4.$$

вскоре после его сжатия (сжавшийся столб виден на двух-трех кадрах, т. е. в течение $1,0 \div 1,5$ мксек), то столб плазмы, окруженный стержнями, не разваливается по меньшей мере до конца первого полупериода изменения тока (составлявшего около 9 мксек). В течение этого времени виден светящийся столб, размеры которого ограничены областью, очень близкой

к стержням. Сами стержни не на всех кадрах видны достаточно хорошо и поэтому можно предполагать, что плазма совершает колебательное движение, касаясь стержней. При $w = 4$ (рис. 5) стержень на фоне светящейся плазмы виден все время отчетливо. По-видимому, в этом случае условия изоляции плазмы от стержней несколько лучше, чем при $w = 8$.

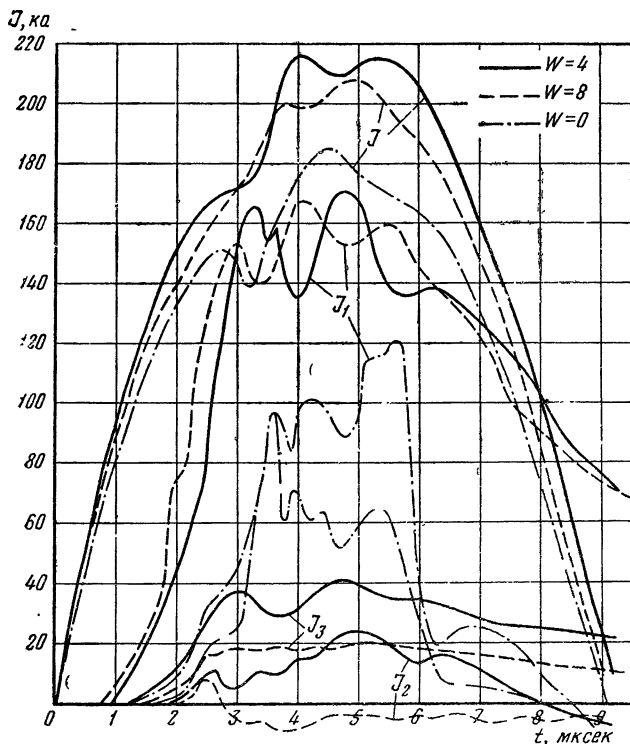


Рис. 7. Кривые изменения токов J_1 , J_2 и J_3 во времени при различном числе стержней.

$C = 22$ мкФ; $U_0 = 32$ мкВ; $r_0 = 0,15$ мм рт. ст.

Как уже указывалось, плазменная оболочка, двигаясь сначала под действием электромагнитных сил протекающего через нее тока, а затем (после того, как ток будет «перехвачен» стержнями) по инерции, будет стягиваться к оси цилиндра. Потери частиц на стержнях должны определяться только скважностью «клетки». Так, при сильном скин-эффекте, в случае восьми стержней, к оси системы должно было бы собраться $0,8 N$, а в случае четырех стержней — $0,9 N$ частиц, где N — число частиц, собирающихся к оси цилиндра в том случае, когда

стержни отсутствуют. К сожалению, в подобных системах сильный скин-эффект не наблюдается [2], и поэтому условия стягивания плазмы к оси несколько хуже. Еще до того, как вся плазма соберется в область, ограниченную стержнями, по ним начинает идти ток, и некоторая доля частиц остается вне стержневой клетки. Отчасти этим можно объяснить тот факт, что при увеличении начального давления p_0 ток \mathcal{I}_2 уменьшается (рис. 6).

Изменение числа экранирующих стержней (рис. 7) сказывается на измеряемых токах сравнительно слабо. При увеличении числа стержней ток \mathcal{I}_3 (ток через один стержень) уменьшается примерно обратно пропорционально числу стержней. Ток \mathcal{I}_2 также уменьшается, что можно объяснить, во-первых, лучшим экранирующим действием большего количества стержней (в результате чего к оси цилиндра собирается меньшая часть заряженных частиц) и, во-вторых, увеличением обратных токов через плазму, которые должны возникать в магнитном поле тока, протекающего через стержни.

Автор выражает благодарность С. И. Брагинскому, Б. Б. Кадомцеву, М. А. Леонтовичу и С. М. Осовцу за обсуждение результатов настоящей работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. И. Брагинский, Б. Б. Кадомцев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 300.
 2. А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, см. настоящее издание, т. 2, стр. 185.
-

Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА
МЕТОДОМ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ***

Исследуется устойчивость цилиндрического плазменного токового шнура, помещенного в продольное магнитное поле. Метод исследования — использование кинетического уравнения в «дрейфовом» приближении, выведенного в работе [1] в пренебрежении столкновениями. В случае изотропии невозмущенного давления критерий оказывается совпадающим с полученным в магнитогидродинамическом приближении. В случае же неравенства продольной и поперечной компонент давления появляется возможность новой неустойчивости даже при отсутствии тока по оси шнура.

В ряде работ рассматривался вопрос об устойчивости различных равновесных конфигураций ионизованной плазмы в магнитном поле на основе магнитогидродинамических уравнений, применимость которых ограничивается условием малости длины свободного пробега по сравнению с характерным размером.

Для высокотемпературной плазмы, где пробеги велики, это, однако, становится некорректным: более разумно исходить из кинетического уравнения, пренебрегая столкновениями.

Анализ кинетического уравнения показывает, что движение плазмы поперек силовых линий магнитного поля можно описывать уравнениями магнитной гидродинамики, если ларморовские радиусы ионов значительно меньше характерного размера [1, 2]. Однако для рассмотрения произвольных возмущений равновесного состояния плазмы этого недостаточно,

* Работа выполнена в 1958 г.

так как возможны движения и вдоль магнитных силовых линий.

В настоящей работе мы предприняли попытку исследовать устойчивость цилиндрического плазменного пинча с помощью кинетического уравнения без столкновений. Применение кинетического уравнения для анализа устойчивости не является новым [3, 4]. Однако круг задач, рассматривавшихся в этих работах, сводился к рассмотрению бесконечно протяженной плазмы, однородной или со слабыми градиентами в пространстве координат (неустойчивости, найденные в этих работах, — суть микроскопические неустойчивости, связанные с локальными свойствами плазмы). Здесь же будет рассмотрена устойчивость ограниченного объема плазмы.

В работе принимаются следующие допущения:

1) не учитываются столкновения между частицами, это будет означать, что инкременты ω будут предполагаться значительно большими частоты столкновений ν ;

2) длины волн возмущений λ предполагаются много меньшими ларморовского радиуса ионов, соответственно инкременты много меньшими ларморовской частоты ионов Ω_H .

(Кроме того, принимается 3-е допущение, не являющееся принципиальным: пренебрегается «температурой» электронов по сравнению с «температурой» ионов. Это должно значительно упростить вычисление). Допущение 2) вместе с соответствующим выбором начального невозмущенного состояния плазмы позволяет нам воспользоваться кинетическим уравнением для ионов, записанным в дрейфовом приближении. Такое уравнение для статического случая выведено С. Т. Беляевым [5] и независимо Ватсоном [6]. Нами оно было обобщено на нестатический случай [1]. Воспользуемся этим уравнением (см. (5) работы [1]).

В равновесном состоянии цилиндр плазмы предполагаем однородным по оси и азимуту $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Имеются компоненты поля $H_{ze}^0, H_{\varphi e}^0$. Внутри цилиндра $B_{\varphi i}^0 = 0, B_{zi}^0 = B_0 = \text{const}$. Функция распределения ионов

$$f_0(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2) = \frac{n_0 M^{3/2}}{\pi^{3/2} 2T_{\perp} \sqrt{2T_{\parallel}}} e^{-\frac{Mv_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}} - \frac{Mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}}},$$

где n_0 — плотность электронов.

Здесь мы допускаем, что распределение ионов по скоростям может быть, вообще говоря, неизотропным: $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$. Вне плазменного цилиндра $H_{\varphi e}^0(r) = \frac{2I}{cr}, H_{ze}^0 = \text{const}$ (индексы

i , e относятся к полям соответственно внутри и вне плазмы).

Условие равновесия

$$8\pi n_0 T_{\perp} = H_{\varphi}^{02}(a) + H_{ze}^{02} - B_{zi}^{02},$$

где a — радиус шнура.

Линеаризованное уравнение для возмущенной функции распределения f_1 плазмы имеет вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{v_{\perp}}{2B_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} - \frac{v_{\perp}^2}{2B_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} = 0. \quad (1)$$

Здесь мы пренебрегли электрическим полем E_z , тем самым предполагая, что оно всегда уничтожается движением электронов вдоль z .

Очевидно это справедливо при условии $\frac{\partial}{\partial t} \ll \omega_0$, где ω_0 — ленгмюровская частота электронов. Предположим, что возмущенные величины имеют вид:

$$F(r, \varphi, z, t) \sim F(r) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)},$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$(\omega + kv_{\parallel}) f_1 = -\frac{B_z}{B_0} \left\{ \frac{v_{\perp}}{2} (\omega + kv_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} - \frac{kv_{\perp}^2}{2} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \right\}, \quad (2)$$

а уравнения Максвелла для самосогласованных электрического и магнитного полей (см. (13) из [1])

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(\frac{dB_z}{dr} - ikB_z \right) = \\ & = \frac{4\pi M}{B_0} \int \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\partial f_1}{\partial r} dv - \frac{4\pi\mu_0}{B_0} \frac{dB_r}{dr} + \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \frac{dB_z}{dr} + ic \frac{4\pi n_0 M}{B_0^2} \omega E_{\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично расписываются остальные компоненты:

$$\begin{aligned} & - \left(1 + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) \left(ikB_{\varphi} - im \frac{B_z}{r} \right) = \\ & = -\frac{4\pi M}{B_0} \frac{im}{r} \int \frac{v_{\perp}^2}{2} f_1 dv + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} \frac{imB_z}{r} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \frac{imB_z}{r} + \\ & + ic \frac{4\pi n_0 M}{B_0^2} \omega E_{r*} \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя в уравнение Максвелла $f_1(r, v_{\perp}, v_{\parallel})$, найденное из (2), получим:

$$\frac{imB_z}{r} \left(1 + \frac{8\pi\mu_0}{B_0} + \frac{4\pi Mk}{4B_0^2} \int \frac{v_{\perp}^4}{\omega + kv_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} d\mathbf{v} \right) = \left. \begin{aligned} & \\ & = \left(1 + \frac{4\pi\mu_0}{B_0} - \frac{4\pi p_0}{B_0^2} \right) ikB_{\varphi} - \frac{4\pi n_0 M}{B_0^2} ic\omega E_r; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$-ikE_{\varphi} = -i \frac{\omega}{c} B_r \quad (6)$$

$$ikE_r = - \frac{i\omega}{c} B_{\varphi} \quad (7)$$

$$ikB_z + \frac{im}{r} B_{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) = 0, \quad (8)$$

где

$$\mu_0 = \frac{M}{B_0} \int \frac{v_{\perp}^2}{2} f_0 d\mathbf{v},$$

$$p_0 = M \int v_{\parallel}^2 f_0 d\mathbf{v}.$$

Выражая все r компоненты полей через B_z , получим и уравнений (4)–(8)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) - \left\{ \frac{m^2}{r^2} - \frac{\frac{\omega^2}{v_{\alpha}^2} - k^2 \left[1 + \frac{4\pi}{B_0} \left(\mu_0 - \frac{p_0}{B_0} \right) \right]}{1 + \frac{8\pi\mu_0}{B_0} + \frac{4\pi k}{B_0^2} \int \frac{v_{\perp}^4}{\omega + kv_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} d\mathbf{v}} \right\} B_z = 0. \quad (9)$$

Таким образом

$$B_z = cI_m(ar), \quad (10)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{k^2 \left[1 + \frac{4\pi}{B_0} \left(\mu_0 - \frac{p_0}{B_0} \right) \right] - \frac{\omega^2}{v_{\alpha}^2}}{1 + \frac{8\pi\mu_0}{B_0} + \frac{4\pi k}{B_0^2} \int \frac{v_{\perp}^4}{\omega + kv_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} d\bar{\mathbf{v}}}, \quad (11)$$

$$v_{\alpha}^2 = \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M}.$$

Далее, находим

$$B_r = -i \frac{kc}{\alpha} I'_m(ar), \quad E_\varphi = \frac{\omega}{ck} B_r, \quad (12)$$

$$\xi_r = c \frac{E_\varphi}{B_0} = -\frac{c I'_m(ar)}{B_0 \alpha}.$$

Магнитные поля вне плазменного цилиндра на его поверхности даются выражениями (8) работы [7].

$$\begin{aligned} H_{r0}^{(1)} &= i \xi_r(a) (m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0), \\ H_{\varphi e}^{(1)} &= \frac{\xi_r(a) m (m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0)}{\left(k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m \right)}, \\ H_{ze}^{(1)} &= \frac{\xi_r(a) k (m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0)}{\left(k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Дальнейшая процедура получения дисперсионного уравнения аналогична проведенной в [7].

На поверхности цилиндра должно удовлетворяться граничное условие

$$8\pi p = H_{\varphi e}^2 + H_{ze}^2 - B_{zi}^2, \quad (14)$$

где

$$p = \mu B = \int \frac{M v_\perp^2}{2} (f_0 + f_1) dv.$$

(Условие (14) можно получить интегрированием уравнений по бесконечно тонкому слою так, как это делается в магнитной гидродинамике).

Опуская несложные, но громоздкие выкладки, окончательно получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{I'_m(a)}{\alpha I_m(a)} \left(1 - \frac{(m + kh_e)^2}{k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m} \right) = \\ & = h_{zi}^2 \left(1 + \frac{8\pi\mu_0}{B_0} + \frac{k\pi}{B_0^2} \int \frac{v_\perp^4}{\omega + kv_\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_\parallel} dv \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $h_i = \frac{B_{zi}^0}{2I/ca}$; $h_e = \frac{H_{ze}^0}{2I/ca}$.

Это уравнение по форме имеет много общего с дисперсионным уравнением, полученным В. Д. Шафрановым в магнито-гидродинамическом приближении [7].

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. $T_{\perp} = T_{\parallel}$. В этом случае критерий устойчивости в точности совпадает с критерием, полученным Шафрановым с $\gamma = 2$. Зависимость же инкремента от волнового вектора будет, естественно, отличной от полученной в [7] в гидродинамическом приближении.

2, $I = 0$, $H_{\varphi e}^0 = 0$, $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$. Магнитогидродинамическое рассмотрение при этом условии не давало никаких неустойчивостей. В нашем случае возможна неустойчивость цилиндра в продольном магнитном поле без тока вдоль оси. Критерий ее особенно просто можно записать для длин волн возмущений по оси много больших радиуса плазменного шнура.

Шнур будет неустойчив, если:

$$H_{z0}^2 + B_{z0}^2 + 4\pi n_0(T_{\perp} - T_{\parallel}) < 0. \quad (16)$$

Это условие может быть выполнено лишь при

$$T_{\perp} < T_{\parallel}.$$

В противоположном предельном случае коротковолновых возмущений возможна неустойчивость и с $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Критерий такой неустойчивости

$$\alpha_{\omega=0}^2 < 0. \quad (17)$$

3. Колебательная ветвь. Учет теплового движения приводит к затуханию магнитозвуковых волн в цилиндре (аналогично затуханию Ландау). Для малых k мнимая часть ω (считая затухание малым) имеет вид:

$$\text{Im}(\omega) = \frac{8\pi n_0 T}{B_z^2} \frac{H_z^2}{B_z^2} \alpha^2 v_a^2 \frac{k \sqrt{\frac{\pi M}{2T}}}{2(m+k)(2m+1)} e^{-\frac{M}{2T} \left(\frac{\omega}{k}\right)^2}. \quad (18)$$

Неустойчивость, связанная с анизотропией температур, могла бы быть наблюдаема в опытах по так называемому адиабатическому нагреву, когда при падении магнитного поля уменьшается лишь поперечная температура плазмы, а продольная остается постоянной (в пренебрежении столкновениями).

В экспериментах по быстрому сжатию плазменного шнура время сжатия может быть меньше времени свободного пробега ионов. Это автоматически приводит к анизотропии температур, что может сделать условия устойчивости более жесткими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Рудаков, Р. Э. Сагдеев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 268.
 2. G. Chew, M. Goldberger, F. Low. Proc. Roy. Soc. A236, 112 (1956).
 3. А. А. Веденов, Р. Э. Сагдеев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 278.
 4. Ю. Церковников. ЖЭТФ, 32, 67 (1957).
 5. С. Т. Беляев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 66.
 6. K. Watson. Phys. Rev. 102, 12 (1956).
 7. В. Д. Шафранов. Атомная энергия, 5, 38 (1956).
-

В. Д. Шафранов

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ТОКОМ ***

Первые исследования устойчивости плазменного шнура при наличии продольного магнитного поля [1—2] были основаны на предположении, что весь ток сосредоточен в бесконечно тонком поверхностном слое, так что распределение полей имеет следующий вид:

$$\mathbf{H} = \{0, 0, h_i\} H_{\mathcal{J}} \quad (r < a),$$

$$\mathbf{H} = \left\{0, \frac{a}{r}, h_e\right\} H_{\mathcal{J}} \quad (r > a),$$

$$h_i = H_{zi}/H_{\mathcal{J}}; \quad h_e = H_{ze}/H_{\mathcal{J}}; \quad H_{\mathcal{J}} = 2\mathcal{J}/ca. \quad]$$

При этом оказывается, что если внутреннее продольное поле больше наружного $h_i^2 > h_e^2$, то шнур может быть устойчивым при наличии хорошо проводящего кожуха, не зависимо от отношения длины шнура к его радиусу. В случае $h_i^2 \leq h_e^2$ устойчивым может быть шнур ограниченной длины L . Так, при $h_e = h_i = h$ условие устойчивости имеет вид $L < 2\pi a \cdot h = cH_z/(\mathcal{J}/\pi a^2)$. Представляет интерес выяснить, как изменяются эти условия при наличии объемных токов. В работе Т. Ф. Волкова [3] показано, что критерий устойчивости аксиально-симметричных возмущений (перетяжки) в случае однородного осевого тока не сильно отличается от критерия устойчивости, полученного для случая поверхностных токов.

* Работа выполнена в 1958 г.

Обычно более жестким оказывается, однако, критерий устойчивости по отношению к извиванию шнура и к более сложным типам возмущений. В случае однородного тока оказывается возможным сравнительно просто произвести исследование всех этих видов возмущений.

§ 1. Исследование устойчивости

Для упрощения вывода критериев устойчивости можно считать плазму несжимаемой. Это оказывается возможным сделать потому, что в дисперсионное соотношение входит только квадрат частоты Ω^2 , так что границей области устойчивости является $\Omega = 0$, но значение $\Omega = 0$ соответствует статическому смещению, когда сжимаемость не играет роли. Для несжимаемой жидкости, как показал Робертс [4], колебания цилиндра с однородным осевым током описываются уравнениями с постоянными коэффициентами, решение которых выражаются через функции Бесселя.

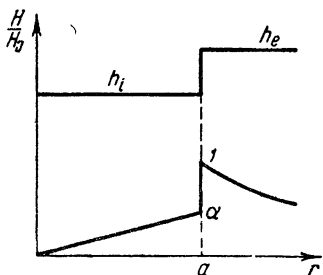


Рис. 1.

Рассмотрим плазменный шнур со следующим распределением магнитного поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \left\{ 0, \alpha \frac{r}{a}, h_i \right\} H_{\mathcal{J}} \quad (r < a), \\ \mathbf{H} &= \left\{ 0, \frac{a}{r}, h_e \right\} H_{\mathcal{J}} \quad (r > a), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Параметры α , h_i , h_e связаны условием непрерывности потока импульса на границе плазмы со скачком давления плазмы на краю шнура

$$8\pi p(a) = (1 + h_e^2 - \alpha^2 - h_i^2) H_{\mathcal{J}}^2. \quad (1.2)$$

При таком распределении полей часть тока течет по поверхности, часть с однородной плотностью по объему плазмы. Значение $\alpha = 0$ соответствует предельному случаю сильного скин-эффекта, значение $\alpha = 1$ — другому предельному случаю стационарного (или близкого к стационарному) распределения полей. Промежуточные значения α дают грубый учет действительного распределения полей.

Дисперсионное соотношение для колебаний, имеющих форму $e^{i(kz+m\varphi)+\Omega t}$ имеет вид (радиус шнура принят равным единице):

$$\frac{\beta}{\beta^2 - 1} \left\{ k \sqrt{\beta^2 - 1} \frac{J_{m-1}(\sqrt{\beta^2 - 1} k)}{J_m(\sqrt{\beta^2 - 1} k)} - m + m\beta \right\} = \frac{2\alpha(am + kh_i)}{\alpha^2 - 1 + \frac{(m + kh_e)^2}{\varphi_2(k, m)}}, \quad (1.3)$$

где

$$\beta = \frac{2\alpha(am + kh_i)}{\Omega_1^2 + (am + kh_i)^2}; \quad \Omega_1^2 = \frac{4\pi\rho a^2}{H_J^2} \Omega^2; \quad \varphi_2(k, m) = k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m.$$

Если плазменный шнур находится внутри проводящего кожуха радиуса b , то φ_2 заменяется на

$$\tilde{\varphi}_2(k, m) = [\varphi_2(k, m) - \chi_m(kb)\varphi_1(k, m)I_m(k)/K_m(k)]/[1 + \chi_m(kb)I_m(k)/K_m(k)],$$

где

$$\varphi_1(k, m) = \frac{kI_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m; \quad \chi_m(kb) = \frac{kbK_{m-1}(kb) + mK_m(kb)}{kbI_{m-1}(kb) - mI_m(kb)}.$$

Вывод этих формул приведен в приложении.

Наиболее трудно стабилизируются продольным полем длинноволновые возмущения. Поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $k \ll 1$, когда критерии могут быть получены в аналитической форме.

Рассмотрим сначала аксиально-симметричные возмущения ($m=0$). В этом случае $\beta = 2\alpha kh_i/(\Omega_1^2 + k^2 h_i^2)$ и дисперсионное соотношение принимает вид

$$k^2 h_i^2 + \Omega_1^2 = \left(1 - \alpha^2 - \frac{2h_e^2}{b^2 - 1} \right) \frac{k}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \frac{J_1(\sqrt{\beta^2 - 1} k)}{J_0(\sqrt{\beta^2 - 1} k)}.$$

Критерий устойчивости $\Omega^2 < 0$ при $k \ll 1$ запишется в виде:

$$\left(1 - \alpha^2 - \frac{2h_e^2}{b^2 - 1} \right) \frac{J_1(x)}{xJ_0(x)} < h_i^2. \quad (1.4)$$

Здесь $x = \sqrt{4\alpha^2/h_i^2 - k^2}$.

В отсутствие проводящего кожуха ($b = \infty$) значение h_i^2 , обеспечивающее устойчивость, при изменении α от 0 до 1

меняется (см. рис. 2) от 0,5 [2] до $4/\mu_1^2$ [4], где $\mu_1 = 2,4$ — первый корень функции $J_0(x)$.

Рассмотрим теперь возмущения $m \geq 1$. При $k \ll 1$ левая часть уравнения (1.3) принимает вид $m\beta/(\beta-1)$, так что

$$\frac{1}{\beta} = 1 - \frac{m[a^2 - 1 + (m + kh_s)^2/\tilde{\varphi}_2]}{2\alpha(am + kh_i)}$$

или $\Omega_1^2 = 2\alpha(am + kh_i) - (am + kh_i)^2 - m[a^2 - 1 + (m + kh_s)^2/\tilde{\varphi}_2]$. Из требования $\Omega_1^2 < 0$ находим минимальное значение h_i , необходимое для устойчивости

$$h_i = \frac{\alpha(m-1) + m^2\varepsilon/\tilde{\varphi}_2}{k(1 + m\varepsilon^2/\tilde{\varphi}_2)} + \sqrt{\frac{[\alpha(m-1) + m^2\varepsilon/\tilde{\varphi}_2]^2}{k^2(1 + m\varepsilon^2/\tilde{\varphi}_2)^2} - \frac{m^2(a^2 + m/\tilde{\varphi}_2) - m(1 + a^2)}{k^2(1 + m\varepsilon^2/\tilde{\varphi}_2)}}. \quad (1.5)$$

1) При $m=1$ выражение для h_i не содержит параметра α , характеризующего распределение тока по сечению шнура.

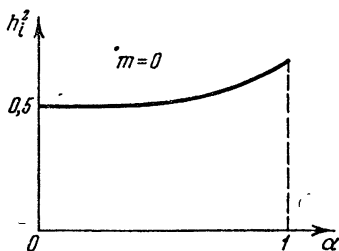


Рис. 2.

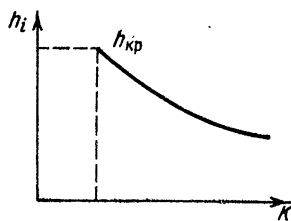


Рис. 3.

Следовательно, критерий устойчивости по отношению к извиванию шнура одинаков как для поверхностного, так и для объемного тока. Так, в отсутствие проводящего кожуха

$$h_i = \frac{2\varepsilon}{k(1 + \varepsilon^2)}. \quad (1.6)$$

Для шнура ограниченной длины L $k_{\min} = 2\pi a/L$ и условие устойчивости по отношению к извиваниям имеет вид:

$$h_i = \frac{L}{2\pi a} \cdot \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}. \quad (1.6')$$

При наличии кожуха в отсутствие внешнего продольного поля ($\varepsilon=0$) (ср. [2])

$$h^2 = \left(\ln \frac{2}{k} - 0,577\right) - \chi_1(kb). \quad (1.7)$$

Правая часть этого равенства, рассматриваемая как функция k , имеет максимум, следовательно, при наличии кожуха может быть достигнута стабилизация всех длин волн при конечном значении h_i^2 .

2) Исследуем возмущения $m \geq 2$. При $k \ll 1$ условие устойчивости имеет вид:

$$h_i = \frac{\alpha(m-1) + m\varepsilon + \sqrt{m\{1 - (m-1)\alpha^2\}\varepsilon^2 - (m-1)(\alpha^2 - 2m\alpha + m)}}{k(1 + \varepsilon^2)}. \quad (1.8)$$

Если подкоренное выражение имеет положительный знак, то при $k \rightarrow 0$ требующееся для стабилизации возмущений значение h_i растет пропорционально длине волны возмущения. Рассмотрим, например, случай «стационарного» распределения полей $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$. В этом случае подкоренное выражение равно единице и для критерия устойчивости получаем:

$$h_i = \frac{m}{k}. \quad (1.9)$$

Это условие показывает, что при любом заданном h_i всегда неустойчивы возмущения с большим m ($m > h_i k_{\min}$).

Если подкоренное выражение имеет отрицательный знак, то область длинноволновых возмущений устойчива. Примерный ход зависимости $h_i(k)$ при этом показан на рис. 3. Полная стабилизация всех длин волн обеспечивается при конечном критическом значении $h_i = h_{\text{кр}}$.

Диаграмма значений ε , α , при которых возможна такая стабилизация, показана на рис. 4 (заштрихованные области). Пунктиром показан ход минимального значения ε^2 , совместимого с условием равновесия (1.1)

Из диаграммы видно, что при малых значениях параметра α , которые соответствуют сильному скин-эффекту, благоприятными для устойчивости являются значения отношения $\varepsilon^2 = (H_{zi}/H_{ze})^2$ меньше некоторого. Так, при $\alpha = 0$ эти значения таковы:

$$\varepsilon^2 < m - 1. \quad (1.10)$$

При значениях же параметра α , близких к единице (что соответствует однородному распределению осевого тока по сечению шнура), благоприятными для устойчивости являются значения ε^2 , большие некоторого. Так, при $\alpha = 1$

$$\varepsilon^2 > 1 + 1/m(m - 2). \quad (1.11)$$

Пусть, например, $\epsilon^2 > 4/3$, тогда при $\alpha = 1$ все значения $m \geq 3$ попадают в область устойчивости длинноволновых возмуще-

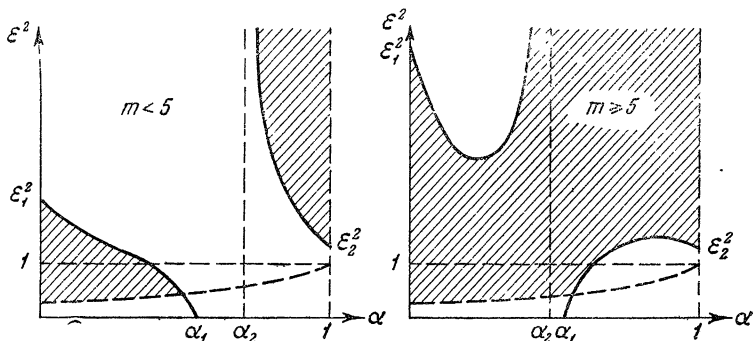


Рис. 4.

$$\alpha_1 = m - \sqrt{m(m-1)}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{m-1}}; \quad \epsilon_1^2 = m - 1; \quad \epsilon_2^2 = 1 + \frac{1}{m(m-2)}$$

ний и критерием устойчивости при $k_{\min} \ll 1$ является критерий (1.9) с $m = 2$:

$$h_i = \frac{2}{k_{\min}} = \frac{L}{\pi a}. \quad (1.12)$$

Следует иметь в виду, что эти результаты получены в предположении, что продольное поле внутри плазмы однородно.

§ 2. Обсуждение результатов

Критерии устойчивости по отношению к основным типам возмущений (перегаски и извивание шнура) несущественно зависят от распределения тока по сечению шнура. Устойчивость же для $m \geq 2$ зависит от величины скин-эффекта. Например, если внешнее и внутреннее продольные поля равны ($\epsilon = 1$), то при сильном скин-эффекте ($\alpha = 0$) длинноволновые возмущения $m \geq 3$ устойчивы [см. условие (1.10)], в случае же однородного тока ($\alpha = 1$) неустойчивы [см. (1.9)]. Устойчивость возмущений $m \geq 2$ зависит также от соотношения внутреннего и внешнего продольных полей. Так, если осевой ток однородный, а внешнее продольное поле больше внутреннего («диамагнетизм»), то длинноволновые возмущения с большим m оказываются устойчивыми. В этом случае при конечном значении продольного поля возможна полная стабилизация плаз-

менного шнура ограниченной длины. Эти результаты получены в предположении, что продольное поле внутри плазмы однородно, поэтому окончательного вывода о роли возмущений $m \geq 2$ сделать еще нельзя.

Следует отметить, что возмущения $m = 0, 1$ определяются главным образом характером электродинамических сил, возникающих при протекании тока, и поэтому несущественно зависят от той модели плазменного шнура, для которой производится расчет. Возмущения $m \geq 2$ сильнее зависят от принимаемой для шнура модели. Весьма вероятно, например, что рассмотрение на основе кинетического уравнения приведет к выводу об устойчивости возмущений, длина волны которых в поперечном направлении ($2\pi a/m$) сравнима с ларморовским радиусом ионов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод дисперсионного уравнения

Уравнения движения несжимаемой идеально проводящей жидкости внутри цилиндра имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H}; & \tilde{p} &= p + H^2/8\pi \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}]; & \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{v} = \Omega \xi(r) e^{i(kz + m\varphi) + \Omega t}$ и отклонения всех величин от равновесных значений меняются по тому же закону. Линеаризованные уравнения для этих отклонений примут вид:

$$\begin{aligned} \rho \Omega^2 \xi &= -\nabla \tilde{p}^{(1)} + \frac{1}{4\pi} \{(\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H}\}^{(1)}, \\ \mathbf{H}^{(1)} &= \text{rot} [\xi \mathbf{H}], \\ \text{div } \xi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если невозмущенные поля равны

$$H_\varphi^0 = H_{\mathcal{J}} a \frac{r}{a}; \quad H_z^0 = \text{const} = h_i H_{\mathcal{J}}, \quad (3)$$

то

$$H^{(1)} = i\xi \left(\frac{m}{r} H_\varphi^0 + k H_z^0 \right) = i\xi (am + kh_i)_{\mathcal{J}},$$

$$\frac{1}{4\pi} \{(\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H}\}^{(1)} = -\frac{H_{\mathcal{J}}^2}{4\pi} (am + kh_i)^2 \xi + \frac{H_{\mathcal{J}}^2}{4\pi} \begin{cases} -2ia(am + kh_i) \xi_r, \\ 2ia(am + kh_i) \xi_r, \\ 0 \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение движения после подстановки в него этих значений может быть записано так:

$$\left[\rho \Omega^2 + \frac{H_{\mathcal{J}}^2}{4\pi} (am + kh_i)^2 \right] \xi = -\nabla \tilde{p} + \frac{H_{\mathcal{J}}^2}{4\pi} \begin{pmatrix} -2i\alpha (am + kh_i) \xi_{\varphi} \\ 2i\alpha (am + kh_i) \xi_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(радиус цилиндра принят за единицу $a = 1$). Граничное условие

$$(H_{\varphi i}^2 + H_{zi}^2 + 8\pi p_i)_{1+\xi_r} = (H_{\varphi e}^2 + H_{ze}^2 + 8\pi p_e)_{1+\xi_r}$$

может быть записано в виде (ср. [2]) (в отсутствие кожуха):

$$\tilde{p} = -\frac{H_{\mathcal{J}}^2}{4\pi} \left\{ 1 - \alpha^2 - \frac{(m + kh_e)^2}{k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m} \right\} \xi_r(a). \quad (6)$$

Разрешая систему уравнений (4) относительно ξ , находим

$$\left. \begin{aligned} (1 - \beta^2) [\Omega_1^2 + (am + kh_i)^2] \xi_r &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - \frac{m^2}{r} \tilde{p}, \\ (1 - \beta^2) [\Omega_1^2 + (am + kh_i)^2] \xi_{\varphi} &= -i \frac{m}{r} \tilde{p} - i\beta \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}, \\ (1 - \beta^2) [\Omega_1^2 + (am + kh_i)^2] \xi_z &= -i (1 - \beta^2) \tilde{p}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$\Omega_1^2 = \frac{4\pi \rho a^2}{H_{\mathcal{J}}^2} \Omega^2; \quad \beta = \frac{2\alpha (am + kh_i)}{\Omega_1^2 + (am + kh_i)^2}. \quad (8)$$

Из условия несжимаемости $\text{div } \xi = 0$ получаем уравнение для \tilde{p} :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \tilde{p} + k^2 (\beta^2 - 1) \tilde{p} = 0,$$

решение которого, ограниченное при $r = 0$, есть

$$\tilde{p} = C J_m(\sqrt{\beta^2 - 1} kr).$$

Выражая из (7) смещение $\xi_r(r)$ и подставляя значения $\tilde{p}(a)$ и $\xi_r(a)$ в (6), получаем приведенное в тексте дисперсионное соотношение. При $\alpha = 0$ оно совпадает с уравнениями, выведенными для полного скин-эффекта [2, 5] при $\alpha = 1$ с уравнением, полученном Тэйлером [6].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. А. Леоптович, В. Д. Шафранов, см. настоящее издание, т. 1, стр. 207.
 2. В. Д. Шафранов. Атомная энергия, 5, 38; (1956); настоящее издание, т. 2, стр. 130.
 3. Т. Ф. Волков, см. настоящее издание, т. 2, стр. 144.
 4. Р. Н. Roberts. Ap. J., 124, 430 (1956).
 5. В. Д. Шафранов. ЖЭТФ, 33, 710 (1957).
 6. R. J. Tauber. Proc. Phys. Soc., B 70, 1049 (1957).
-

Н. М. Полиевктов - Николадзе

**К РАСЧЕТАМ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ
С ТОРОИДАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ ***

Аналитические расчеты нестационарных электромагнитных полей в тороидальных системах чрезвычайно затруднены ввиду того, что уравнения Максвелла в этом случае не допускают разделения переменных. В работе показано, что для тороидально-симметричных тонких проводников указанное затруднение отпадает и задача сводится к решению, вообще говоря, системы интегральных уравнений для функций от одной независимой переменной, что может быть выполнено сравнительно просто обычными численными методами.

Рассмотрим электромагнитную систему, состоящую из безразъемной тороидальной трубы круглого сечения и конечной толщины, внутри которой заключена электронно-ионная плазма, сжатая до состояния кольцевой трубки (шнура), расположенной коаксиально с трубой. Пространство между шнуром и кожухом, как и пространство вне кожуха, является абсолютно пустым. Геометрически такая система получается вращением вокруг оси z кругов, изображенных на рис. 1, на котором заштрихована область проводников. Допустим, что некоторый внешний источник порождает вихревое квазистационарное электрическое поле, обладающее вращательной симметрией относительно оси z . Тогда это поле будет индуцировать как в шнуре, так и в кожухе квазистационарные токи, которые в свою очередь породят дополнительное поле, в результате чего во всем пространстве возникает некоторое квазистационарное электромагнитное поле, которое и требуется найти.

* Работа выполнена в 1958 г.

Предположим, что материал кожуха не является ферромагнитным. Тогда магнитную проницаемость нашей системы можно считать равной единице, в соответствии с чем векторы магнитной индукции и магнитной напряженности будут совпадать друг с другом. Далее, плотность объемных зарядов в нашей системе равна нулю, так как в проводниках объемные заряды существовать не могут. Таким образом, мы имеем дело с квазистационарным электромагнитным полем в отсутствии объемных зарядов и в неферромагнитной среде, которое, как известно, полностью описывается векторным потенциалом \mathbf{A} :

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \quad (1)$$

где \mathbf{H} и \mathbf{E} суть векторы магнитной и электрической напряженности соответственно, а точка означает дифференцирование по

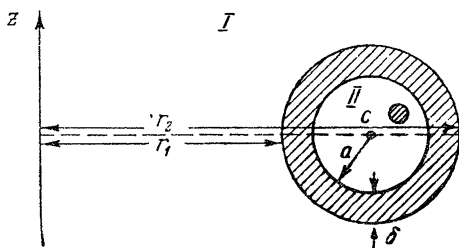


Рис. 1.

времени. Как и во всем дальнейшем, мы пользуемся электромагнитной системой единиц. Векторный потенциал подчиняется условию калибровки

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

и уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}, \quad (3)$$

где \mathbf{j} — объемная плотность тока, а Δ — оператор Лапласа. Заметим, что ввиду отсутствия объемных зарядов $\text{div } \mathbf{j} = 0$, в соответствии с чем условие калибровки (2) совместимо с уравнением (3).

Если распределение объемных токов известно, то тогда векторный потенциал \mathbf{A}' собственного поля тока выражается согласно (3) в виде объемного интеграла

$$\mathbf{A}' = \int \frac{\mathbf{j}}{R} dv, \quad (4)$$

где интегрирование распространено на весь занятый током объем, а R есть расстояние между точкой наблюдения и

элементом тока jdv . В общем случае, однако, непосредственно пользоваться формулой (4) для нахождения поля нельзя, так как плотность тока сама зависит от искомого электромагнитного поля, будучи связанной с ним законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \dot{\mathbf{A}}, \quad (5)$$

где σ — электропроводность проводника. В принятых нами электромагнитных единицах σ имеет размерность $\text{сек}/\text{см}^2$ и выражается следующим образом: $\sigma = \sigma_0/c^2$, где σ_0 — электропроводность в абсолютных единицах, а c — скорость света. Для меди и латуни $\sigma = 5 \cdot 10^{-4} \text{ сек}/\text{см}^2$.

Составим теперь систему уравнений для определения электромагнитного поля в системе, обладающей тороидальной симметрией. Выберем экваториальную плоскость изображенного на рис. 1 тороидального кожуха в качестве плоскости x, y и введем на ней полярные координаты r и α , где r есть расстояние от оси симметрии z , а угол α описывает поворот вокруг оси в направлении, противоположном часовой стрелке. Введем ортогональные единичные векторы $\mathbf{n}_z = \nabla z$, $\mathbf{n}_r = \nabla r$ и $\mathbf{n}_\alpha = r \nabla \alpha$, направленные по соответствующим координатным линиям, и разложим любой вектор \mathbf{x} на компоненты x_z , x_r и x_α по формуле

$$\mathbf{x} = \mathbf{n}_z x_z + \mathbf{n}_r x_r + \mathbf{n}_\alpha x_\alpha. \quad (6)$$

При наличии тороидальной симметрии поля линии тока суть компланарные круги с центром на оси z , в соответствии с чем

$$j_z = 0, \quad j_r = 0, \quad j_\alpha = j(r, z, t), \quad (7)$$

причем компонента j_α не зависит от угла α ввиду условия $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Аналогичную структуру имеют векторы \mathbf{E} и \mathbf{A} , в соответствии с чем положим

$$A_z = 0, \quad A_r = 0, \quad A_\alpha = r^{-1/2} \Phi(r, z, t). \quad (8)$$

В этом случае электромагнитное поле определяется только одной скалярной функцией Φ , зная которую, найдем, согласно (1), компоненты векторов \mathbf{H} и \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} H_z &= r^{-1} \partial (r^{1/2} \Phi) / \partial r, & H_r &= -r^{-1/2} \partial \Phi / \partial z, & H_\alpha &= 0, \\ E_z &= 0, & E_r &= 0, & E_\alpha &= -r^{-1/2} \dot{\Phi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Функция Φ определяется уравнениями (3) и (5), которые после подстановки $\mathbf{A} = r^{-1/2} \mathbf{n}_\alpha \Phi$ принимают следующий вид:

$$\bar{\Delta}\Phi = 4\pi\sigma\Phi \text{ (в проводниках)}, \quad \bar{\Delta}\Phi = 0 \text{ (вне проводников)}, \quad (10)$$

причем на границе между проводником и пустотой функция Φ и ее нормальная производная $\partial\Phi/\partial n$ непрерывны:

$$[\Phi] = 0, \quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right] = 0, \quad (11)$$

где прямая скобка означает скачок соответствующей величины, а оператор

$$\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{3}{4r^2}. \quad (12)$$

В дальнейшем мы будем называть уравнение $\bar{\Delta}f = 0$ квазигармоническим, а его решение — квазигармонической функцией.

В случае постоянных токов нет надобности пользоваться уравнениями (10) и (11) и расчет поля сводится к одному только вычислению интеграла (4). В самом деле, если электрическое поле внешних источников E_0 не зависит от времени, то тогда и создаваемые ими токи не меняются во времени, в соответствии с чем $\Phi = \Phi_0 + \Phi'$, где Φ' — потенциал индуцированных токов, который не зависит от времени. Но тогда, согласно (9), $E = E_0$ и электрическое поле просто совпадает с полем внешних источников, являясь тем самым заданной функцией координат. После этого распределение объемных токов находится по закону Ома $j = \sigma E_0$ и для нахождения величины Φ' достаточно найти интеграл (4), чем и заканчивается нахождение электромагнитного поля. Если вместо плотности тока j ввести величину

$$q = r^{1/2}j, \quad (13)$$

то тогда, подставив в (4) $\mathbf{A}' = r^{-1/2}\mathbf{n}_\alpha\Phi'$ и $\mathbf{j} = r^{-1/2}\mathbf{n}_\alpha q$, мы получим, после элементарного интегрирования по углу α , связь между Φ' и q :

$$\Phi'(M) = 2 \int K(M, M') q(M') ds', \quad (14)$$

где $ds' = dr'dz'$; интегрирование распространяется по всей занятой током части плоскости r, z , а функция $K(M, M')$ точек M и M' имеет следующий вид:

$$K(M, M') = K(M', M) = [1 - (r_1^2/r_2^2)]^{3/2} C [1 - (r_1^2/r_2^2)], \quad (15)$$

причем

$$r_1^2 = (z - z')^2 + (r - r')^2, \quad r_2^2 = (z - z')^2 + (r + r')^2. \quad (16)$$

В этой формуле $C(x)$ есть эллиптический интеграл

$$C(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - x \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi. \quad (17)$$

При близких к единице $x = 1 - y^2$ функция $C(x)$ имеет вид:

$$C(x) = \ln(4/y) - 2 + O(y \ln y), \quad (y \ll 1), \quad (18)$$

где $O(\xi)$ означает малую величину порядка ξ . Заметим также, что величина $K(M, M')$, как функция точки M , подчиняется уравнению

$$\bar{\Delta}_M K(M, M') = -2\pi \delta(r - r') \delta(z - z'). \quad (19)$$

При заданном распределении токов интеграл (14) может быть найден численными методами. Значительно более сложным является случай нестационарного поля ввиду возникающего при этом скин-эффекта, который существенно влияет на характер распределения токов в проводнике и, в частности, в стенках кожуха. Возникающие при этом трудности связаны с наличием исчезающей правой части в уравнении $\bar{\Delta}\Phi = 4\pi\sigma\dot{\Phi}$, пренебречь которой, вообще говоря, нельзя, ибо она описывает скин-эффект. Дело заключается в том, что никакие известные нам координаты не позволяют разделить переменные как в самом уравнении $\bar{\Delta}\Phi = 4\pi\sigma\dot{\Phi}$, так и в граничных условиях (11). Если можно было бы свести задачу к нахождению только квазигармонических функций, то тогда переменные могли бы быть разделены в тороидальных координатах, что существенно упростило бы расчет поля. Мы покажем, что для тонкого кожуха задача действительно сводится к нахождению некоторой квазигармонической функции, а уравнение $\bar{\Delta}\Phi = 4\pi\sigma\dot{\Phi}$ заменяется некоторыми условиями на контуре кожуха.

Введем вместо функции Φ ее операционное изображение

$$\psi(M) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda(t-t_0)} \Phi(M, t) dt, \quad (20)$$

где M означает точку r, z ; λ — параметр с положительной вещественной частью, а t_0 есть момент включения генератора поля, в соответствии с чем $\Phi(M, t_0) = 0$. Учитывая это начальное условие, получим из (10) и (11) систему уравнений для ψ :

$$\bar{\Delta}\psi = k^2\psi \quad (\text{в проводниках}), \quad \bar{\Delta}\psi = 0 \quad (\text{вне проводников}), \quad (21)$$

с условиями на поверхности проводников

$$[\psi] = 0, \quad [\psi_n] = 0, \quad (22)$$

где ψ_n есть нормальная производная от ψ , а параметр k выражается следующим образом:

$$k^2 = 4\pi\sigma\lambda; \quad (23)$$

легко видеть, что $1/k$ является толщиной скин-слоя для частоты λ .

Рассмотрим поведение функции ψ при переходе через стенку кожуха при условии, что толщина кожуха мала. Обозначим через $\psi^+(M)$ функцию $\psi(M)$ снаружи кожуха, в области I (рис. 1), а через $\psi^-(M)$ — функцию $\psi(M)$ в области II между шнуром и кожухом. Наконец, пусть $f(M)$ есть функция $\psi(M)$ внутри кожуха. Функции $\psi^+(M)$ и $\psi^-(M)$ подчиняются однородным уравнениям

$$\Delta\psi^\pm(M) = 0 \quad (24)$$

и граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \psi^+ &= f \Big|_{\xi=a+\delta}, & \psi_n^+ &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_{\xi=a+\delta}, \\ \psi^- &= f \Big|_{\xi=a}, & \psi_n^- &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_{\xi=a}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где стоящие слева величины берутся на поверхностях $\xi = a + \delta$ и $\xi = a$ соответственно, причем ξ есть расстояние точки от внутреннего центра кожуха s . Что касается функции f , то она подчиняется уравнению

$$\Delta f = k^2 f, \quad (a \leq \xi \leq a + \delta). \quad (26)$$

Это уравнение сильно упрощается для тонкого кожуха. В самом деле, перейдем к координатам ξ и φ , где φ есть угол поворота вокруг точки s в плоскости r, z . В этих координатах уравнение (26) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{3}{4r^2} f = k^2 f, \quad (a \leq \xi \leq a + \delta). \quad (27)$$

Оценим эффективное значение величины $x = \xi - a$, на которой функция f заметно меняется по толщине кожуха. Если $k\delta \ll 1$, то тогда скин-эффект в кожухе практически отсутствует и в таком случае $x_{\text{эф}} \sim \delta$. Если же скин-эффект резко выражен и $k\delta \gg 1$, то тогда, очевидно, $x_{\text{эф}} \sim 1/k \ll \delta$. Итак,

$x_{эф} \leq \delta$. Сравним теперь различные члены в левой части (27). Легко видеть, что отношение члена $\partial f / \partial \xi$ к $\partial^2 f / \partial \xi^2$ есть величина порядка $x_{эф} / a \leq \delta / a \ll 1$, в соответствии с чем первую производную можно отбросить.

Рассмотрим теперь два последних члена в левой части (27). При перемещении по контуру кожуха величина r меняется от значения $r = r_1$ до значения $r = r_2 > 2a \gg \delta$ (рис. 1). Если $r_1 \gg \delta$, то тогда последний член в левой части будет пренебрежимо мал по сравнению с первым и им можно в этом случае пренебречь. С другой стороны r_1 есть радиус внутреннего отверстия тора и условие $r_1 \gg \delta$ можно считать всегда выполненным, что мы и будем делать. Но если $r_1 \approx \delta$, то в таком случае угловое распределение функции f по контуру кожуха будет относительно плавным (при $r_1 \leq \delta$ возникает резкая асимметрия в области углов $\varphi \sim \pi$ из-за сближения стенок кожуха), в соответствии с чем член $\partial^2 f / \partial \xi^2 \partial \varphi^2$ может быть оценен как $f / a^2 \ll \partial^2 f / \partial \xi^2 \geq f / \delta^2$, и мы видим, что этим членом также можно пренебречь. Таким образом, в случае достаточно тонкого кожуха уравнение (27) практически сводится к уравнению $\partial^2 f / \partial \xi^2 = k^2 f$, общее решение которого имеет вид:

$$f(M) = f_1(\varphi) \operatorname{ch} k(\xi - a) + f_2(\varphi) \operatorname{sh} k(\xi - a). \quad (28)$$

Для оценки точности этого решения выражение (28) следует подставить в (27) и затем искать следующее приближение обычным методом возмущений. Таким способом легко показать, что искомая поправка будет мала для всех частот, для которых

$$k \gg \delta / a_1, \quad (28')$$

где a_1 наименьшее среди всех геометрических параметров кожуха, исключая его толщину. Для тонкого кожуха $\delta \ll a_1$ и (28') выполняется как при $k\delta \gg 1$, так и при $k\delta \ll 1$, и мы видим, что формула (28) точно учитывает скин-эффект в тонком кожухе практически для всех частот.

Подставим теперь (28) в (25). Мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi^+ &= \psi^- \operatorname{ch} k\delta + \psi_n^- k^{-1} \operatorname{sh} k\delta, \\ \psi_n^+ &= \psi^- k \operatorname{sh} k\delta + \psi_n^- \operatorname{ch} k\delta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Для того чтобы выразить ψ^- и ψ_n^- через ψ^+ и ψ_n^+ , в (29) достаточно заменить δ на $-\delta$:

$$\left. \begin{aligned} \psi^- &= \psi^+ \operatorname{ch} k\delta - \psi_n^+ k^{-1} \operatorname{sh} k\delta, \\ \psi_n^- &= -\psi^+ k \operatorname{sh} k\delta + \psi_n^+ \operatorname{ch} k\delta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

В этих формулах величины со знаком $(-)$ берутся при $\xi = a$, величины же со знаком $(+)$ — при $\xi = a + \delta$. С другой стороны, $\psi^+(M)$ во внешнем пространстве заметно меняется на расстояниях $\gg \delta$, в соответствии с чем мы можем с точностью до отброшенных уже малых величин считать, что в (29) и (30) все величины относятся к одному и тому же контуру $\xi = a$. В таком случае (29) и (30) сводятся к системе уравнений для скачков $[\psi]$ и $[\psi_n]$ квазигармонической функции ψ при переходе через скинированный (в общем случае) контур радиуса a .

Мы показали, что в случае тонкого кожуха $\delta \ll a$ расчет всего электромагнитного поля вне шнура сводится к решению одного только квазигармонического уравнения $\Delta\psi = 0$ в областях I и II , причем наличие кожуха в этом случае точно учтено контурными условиями (29) и (30) для всех частот (28').

Рассмотрим теперь предельные случаи больших и малых частот. Если скин-эффект в кожухе резко выражен и $k\delta \gg 1$, то в таком случае в (29) и (30) можно считать $\text{ch } k\delta \simeq \text{sh } k\delta$, и мы получим:

$$\psi_n^+ - k\psi^+ = 0, \quad \psi_n^- + k\psi^- = 0, \quad (k\delta \gg 1). \quad (31)$$

Оба эти контурные условия имеют чрезвычайно наглядный смысл: первое из них означает, что поле $\psi^+(M)$ экспоненциально спадает (с показателем k) при проникновении в кожух снаружи, а $\psi^-(M)$ — экспоненциально убывает с тем же показателем при проникновении в кожух изнутри. Рассмотрим теперь обратный предельный случай $k\delta \ll 1$. Положив в (29) $\text{ch } k\delta = 1$, $\text{sh } k\delta = k\delta$, получим:

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \psi^- + \delta \cdot \psi_n^-, \\ \psi_n^+ - \psi_n^- &= k^2 \delta \psi^-. \end{aligned}$$

Первое из этих условий можно упростить, если заметить, что ψ_n^- на контуре имеет порядок ψ^-/a , и поэтому величиной $\delta \cdot \psi_n^-$ можно пренебречь по сравнению с ψ^- . В таком случае мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi^+ - \psi^- &= 0, \\ \psi_n^+ - \psi_n^- &= k^2 \delta \psi^- \end{aligned} \right\} (k\delta \ll 1). \quad (32)$$

Мы видим, что в этом случае ψ остается непрерывной при переходе через нескинированный контур, но ее нормальные производные испытывают скачок. Задача расчета поля при

$k\delta \ll 1$ сводится к интегральному уравнению для функции от одной переменной, которое легко получить следующим образом. Представим функцию ψ во всем пространстве вне шнура в следующем виде:

$$\psi(M) = \chi(M) + 2 \int K(M, M') q(M') ds', \quad (33)$$

где $\chi(M)$ есть поле всех токов, кроме тока в кожухе, а последний член описывает поле кожуха. Поскольку кожух является тонким, мы можем положить $ds' = ad\xi'd\varphi'$, где ξ' и φ' — полярные координаты, отсчитанные от внутреннего центра кожуха. Кроме этого можно считать, что функция $K(M, M')$ не меняется при перемещении точки M' внутри кожуха по нормали к последнему*, и если ввести контурный ток

$$\eta(\varphi) = a \int_a^{a+\delta} q(\xi, \varphi) d\xi, \quad (34)$$

то (33) запишется в следующем виде:

$$\psi(\xi, \varphi) = \chi(\xi, \varphi) + 2 \int_0^{2\pi} K(\xi, \varphi; a, \varphi') \eta(\varphi') d\varphi'. \quad (35)$$

Функция χ и ее нормальная производная очевидно непрерывны на контуре. Поэтому скачок ψ_n определяется скачком собственного поля кожуха, для которого из уравнения (19) получается следующее выражение:

$$\psi_n^+ - \psi_n^- = -\frac{4\pi}{a} \eta(\varphi). \quad (36)$$

Положив теперь в (35) $\xi = a$ и подставив (35) и (36) во второе уравнение (32), мы получим интегральное уравнение

$$\bar{\chi}(\varphi) + 2 \int_0^{2\pi} \bar{K}(\varphi, \varphi') \eta(\varphi') d\varphi' + \frac{4\pi}{k^2 a \delta} \eta(\varphi) = 0, \quad (k\delta \ll 1), \quad (37)$$

для определения контурного тока по заданному полю χ . В уравнении (37) через $\bar{\chi}(\varphi)$ обозначено значение функции χ на контуре кожуха и $\bar{K}(\varphi, \varphi') = K(a, \varphi; a\varphi')$. Тем самым,

* Учет нормальной производной $\partial K/\partial n'$ привел бы к контурному скачку функции ψ , которым, как мы видели, можно пренебречь при $k\delta \ll 1$.

при $k\delta \ll 1$ задача сводится к решению одного интегрального уравнения. В общем случае произвольной величины $k\delta$ помимо контурного тока следует учесть и наличие контурного дipoля, связанного со скачком функции ψ , и вместо одного интегрального уравнения (37) мы получили бы систему двух интегральных уравнений, которую выписывать не будем.

Ознакомимся, в общих чертах, с решением уравнения (37). Введем систему собственных функций $\zeta_n(\varphi)$ ядра $\bar{K}(\varphi, \varphi')$:

$$\int_0^{2\pi} \bar{K}(\varphi, \varphi') \zeta_n(\varphi') d\varphi' = \pi \alpha_n \zeta_n(\varphi), \quad (38)$$

где α_n означает соответствующее собственное значение. Ввиду симметрии ядра $\bar{K}(\varphi, \varphi') = \bar{K}(\varphi', \varphi)$ все собственные значения α_n вещественны, причем можно показать, на чем мы не останавливаемся, что все

$$\alpha_n > 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (39)$$

Можно также отметить, что

$$\sum_0^{\infty} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \bar{K}(\varphi, \varphi), \quad (40)$$

и поскольку, согласно (15) и (18), $K(M, M')$ логарифмически расходится при слиянии точек M и M' , то сумма всех α_n расходится также логарифмически, откуда следует, что

$$\alpha_n = \frac{\beta}{n}, \quad (n \geq 1), \quad (41)$$

где β — постоянная порядка единицы.

Разложим теперь функции $\eta(\varphi)$ и $\bar{\chi}(\varphi)$ в ряд по собственным функциям $\zeta_n(\varphi)$:

$$\bar{\chi}(\varphi) = \sum \chi_n \zeta_n(\varphi), \quad \eta(\varphi) = \sum \eta_n \zeta_n(\varphi). \quad (42)$$

Подставив эти ряды в (37), найдем коэффициенты η_n для контурного тока, индуцированного полем $\bar{\chi}$:

$$\eta_n = -\frac{1}{2\pi} \frac{k^2 a \delta}{\alpha_n k^2 a \delta + 2} \cdot \chi_n \quad (43)$$

До сих пор мы все время пользовались операционными изображениями вида (20) для всех рассматриваемых величин. Если теперь в формуле (43) перейти от изображений к оригиналам, мы получим:

$$\eta_n(t) = -\frac{1}{2\pi\alpha_n} \int_{t_0}^t \dot{\chi}_n(\tau) e^{-\frac{\rho}{\alpha_n}(t-\tau)} d\tau, \quad (44)$$

где $\rho = 1/2\pi\sigma a\delta$ есть (выраженное в электромагнитных единицах) сопротивление единицы длины кожуха. Для установившегося режима в (44) следует положить $t_0 = -\infty$.

В. Ф. Демичев, Ю. Г. Прохоров

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЙТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ,
ВОЗНИКАЮЩЕГО В ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ С СИЛОЙ
ТОКА 160 *ка* ***

В работе исследовано нейтронное излучение, идущее из газового разряда в цилиндрической трубе при силе тока 160 *ка*. Показано, что нейтронное излучение обусловлено наличием в разряде дейтронов, ускоренных до больших энергий.

В 1952 г. было обнаружено [1], что импульсные разряды с большой силой тока в дейтерии при некоторых условиях сопровождаются нейтронным излучением. Можно было предположить, что источником этого излучения являются термоядерные реакции, происходящие в нагретой до высокой температуры дейтериевой плазме. Однако нейтронный выход был много больше ожидаемого (до 10^8 нейтронов на разряд) и наблюдался даже при относительно небольших силах тока. Кроме того, одновременно с нейтронным импульсом всегда наблюдался импульс жесткого рентгеновского излучения [2].

Для объяснения этих явлений тогда же было предположено, что в плазме газового разряда возникают сильные электрические поля, в которых могут ускоряться электроны и дейтроны.

Настоящая работа была поставлена с целью прямого экспериментального доказательства существования в плазме ускоренных до больших энергий дейтронов. Энергия дейтронов определялась по измеренной энергии нейтронов, возникших в результате реакций $D(d, n)He^3$.

Эксперименты проводились на установке, разрядная камера которой представляла собой фарфоровый цилиндр длиной

* Работа выполнена в 1957 г.

80 см и внутренним диаметром 18 см с плоскими фланцами из дюралю (рис. 1). После откачки камера наполнялась дейтерием до давления $5 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Источником электрического питания служила конденсаторная батарея емкостью 24 мкф, заряжавшаяся до 40 кв. Максимальная сила тока составляла 160 ка при начальной скорости нарастания $6 \cdot 10^{10}$ а/сек.

На осциллограмме тока (рис. 2) в первом полупериоде всегда наблюдались две особенности (изломы). В момент второй особен-

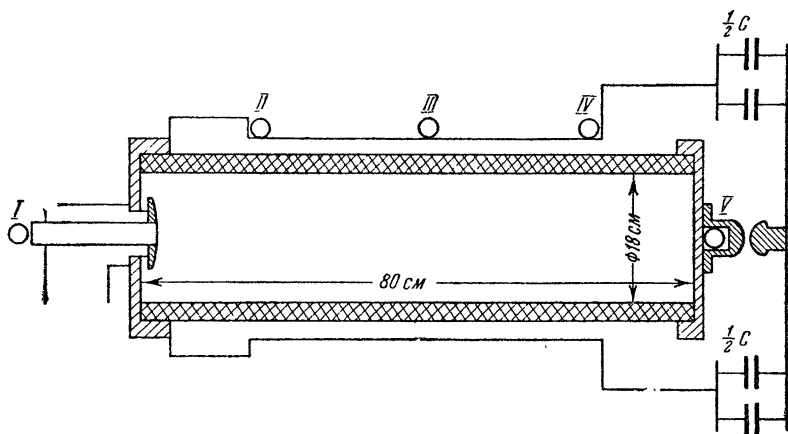


Рис. 1. Схематический чертеж установки и расположения эмульсий при облучении.

I, II, III, IV, V — эмульсии.

ности сцинтилляционный счетчик регистрировал короткий импульс нейтронного излучения. В течение всего нейтронного импульса ($\sim 0,3$ мксек *) на основной ток накладывалась производная тока высокой частоты ($30 \div 50$ мГц). На осциллограмме тока в этом месте видно размытие (рис. 2). При таких частотах использованный для измерения тока пояс Роговского уже не являлся интегрирующим, так как начинала сказываться индуктивность шунта, равная 1 см. При $L = 1$ см и частоте 50 мГц.

$$(\omega I)_{\text{ш}} = 0,3 \text{ ом.}$$

Так как омическое сопротивление шунта $R_{\text{ш}} = 0,1$ ом, то для таких частот шунт являлся индуктивностью и напряжение на нем, возникающее за счет высокочастотной составляющей тока,

* На осциллограмме импульс нейтронного излучения несколько затянут, что объясняется недостаточно широкой полосой пропускания усилителя (5 мГц).

пропорционально его производной. Сила этого тока по осциллографическим измерениям составляет величину порядка килоампера.

Энергия нейтронов измерялась по протонам отдачи, возникшим в толстослойных фотоэмульсиях типа БР-400, толщиной 400 мк. Для предохранения эмульсий от жесткого рентгеновского излучения они были помещены в трехмиллиметровые свинцовые кассеты. Облучение эмульсией производилось

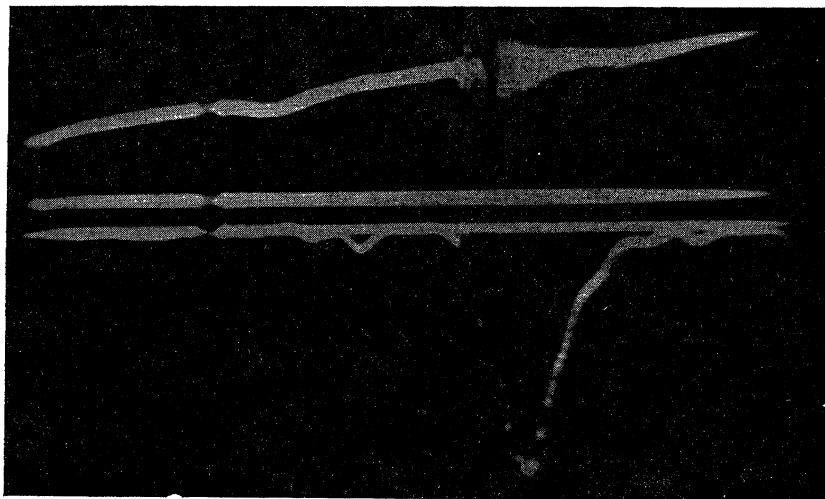


Рис. 2. Осциллограмма тока и нейтронного импульса.

нейтронами, возникшими в плазме за 50 разрядов (положение эмульсий при облучении показано на рис. 1).

Распределение треков протонов отдачи в эмульсиях указывало на то, что нейтроны рождаются вблизи оси разрядной камеры. Нейтроны максимальной энергии (до 3,3 Мэв) зарегистрированы в эмульсии I, облучавшейся со стороны катода (рис. 1). В эмульсии V, облучавшейся у анода, энергия нейтронов не превышала 2,5 Мэв.

Для выяснения энергетического спектра нейтронов, выходящих из разрядной камеры через торцы (под углами 0 и 180° к оси камеры) был использован метод регистрации протонов отдачи в пределах конуса с углом раствора $\pm 12^\circ$. Соответствующие гистограммы представлены на рис. 3*. Для объяс-

* Во время выполнения настоящей работы нами был получен отчет Колгейга с сотрудниками [3], в котором рассматривались аналогичные вопросы.

нения нейтронных гистограмм нужно предположить, что в плазме существуют условия для ускорения дейтронов вдоль оси разрядной камеры вплоть до энергии около 250 *кэв*.

Обработка эмульсий, облучавшихся у боковых стенок камеры, не дала никаких указаний на наличие дейтронов, ускоренных по радиусу.

Наличием в плазме значительного количества ускоренных дейтронов можно объяснить наблюдаемый большой выход нейтронов.

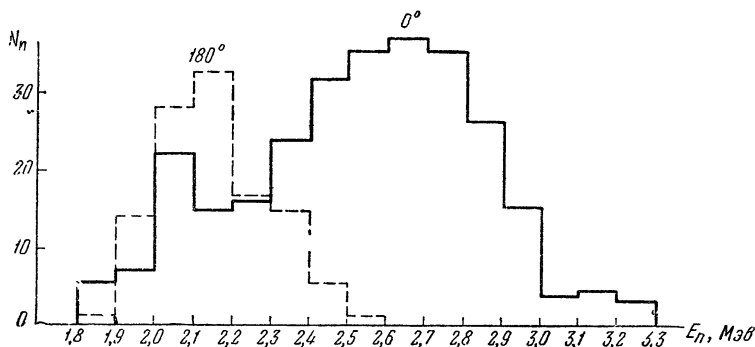


Рис. 3. Распределение по энергиям нейтронов, зарегистрированных в эмульсиях I (0°) и V (180°), см. рис. 1.

По полученным нейтронным спектрам можно построить спектр ускоренных дейтронов (рис. 4). Сплошной тонкой линией на рисунке изображен дейтронный спектр, полученный из результатов обработки эмульсии I , пунктиром — полученный из результатов обработки эмульсии V . Несовпадение этих кривых следовало ожидать. Оно объясняется тем, что нейтронные спектры, по которым построены эти кривые, завышены в области малых энергий, так как в эмульсии попадали и рассеянные нейтроны. Истинный спектр дейтронов должен лежать где-то между полученными кривыми. На рис. 4 он изображен толстой сплошной линией. По оси ординат отложено в логарифмическом масштабе количество дейтронов на 10-киловольтный интервал энергий. При подсчете количества дейтронов было сделано единственное предположение о примерно 50-кратном увеличении плотности дейтерия в центральной области камеры в момент, соответствующий выходу нейтронов. На такое увеличение плотности указывают спектроскопические измерения, проведенные на аналогичной установке [4].

Из спектра видно, что в разряде с приведенными выше параметрами чаще всего возникают дейтроны с энергией до 40 *кэв* —

около 93%; реже с энергией от 40 до 100 кэв — менее 7%; дейтронов с энергией выше 100 кэв возникает менее 0,5% от их общего числа.

Пользуясь спектром, можно вычислить ток, обусловленный дейтронами с энергией выше 10 кэв. Он составляет величину порядка сотен ампер.

По-видимому, наблюдаемый на осциллограммах ток высокой частоты является током ускоренных дейтронов. Этот высокочастотный ток нельзя объяснить током быстрых электронов,

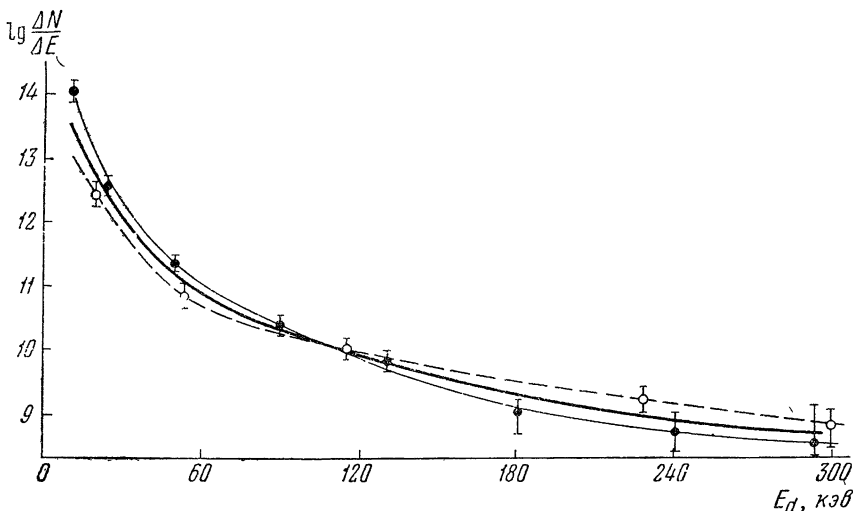


Рис. 4. Спектр ускоренных дейтронов.

● — на катоде; ○ — на аноде

ответственных за жесткое рентгеновское излучение, так как по оценкам, сделанным на основании работы [2], ток быстрых электронов не должен превышать нескольких ампер.

Из результатов обработки эмульсий, экспонированных в разных местах у разрядной камеры (рис. 1), можно определить, как изменяется интенсивность источника нейтронов вдоль оси.

Подсчетом полного числа треков протонов отдачи в эмульсиях было определено количество нейтронов, прошедших через 1 см^2 каждой из эмульсий. Результаты приведены в таблице.

Из таблицы видно, что нейтронное излучение неизотропно. Полученные экспериментальные данные противоречат предположениям как о локализации источника нейтронов в небольшой области разряда, так и о равномерном распределении интенсивности источника вдоль оси. Эти данные могут быть согласованы лишь с предположением о том, что интенсив-

№ эмульсии	Число треков протонов отдачи за вычетом фона	Число нейтронов, про- шедших через 1 см ² эмульсии
Калибровочная	384 ± 19	(12,0 ± 4) 10 ⁶
I	181 ± 13	(5,5 ± 2) 10 ⁶
II	220 ± 15	(6,4 ± 2,4) 10 ⁶
III	115 ± 11	(3,3 ± 1,3) 10 ⁶
IV	72 ± 9	(2,0 ± 0,8) 10 ⁶
V	103 ± 10	(2,7 ± 1,0) 10 ⁶

ность источника нейтронов возрастает вдоль оси от анода к катоду. Количественная оценка показывает, что она должна изменяться как x^α , где x — расстояние по оси от анода, а α лежит в пределах $1 < \alpha < 2$.

Если иметь в виду, что нейтронное излучение возникает при реакциях с ускоренными дейтронами, то такой результат вполне закономерен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, Е. И. Доброхотов, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, В. И. Синицын, Н. В. Филиппов. Атомная энергия, 3 (1956).
2. С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный. Атомная энергия, 3 (1956).
3. О. Андерсон, У. Бейкер, С. Коулгейт, Дж. Айз, Р. Пайл. Проблемы современной физики. ИЛ, 1 (1958).
4. С. Ю. Лукьянов, В. И. Синицын. Доклад, представленный на Женевскую конференцию по мирному использованию атомной энергии, 1958 г.

Б. А. Трубников

**О ВОЗМОЖНОМ МЕХАНИЗМЕ НЕЙТРОННОГО ЭФФЕКТА
ПРИ МОЩНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ РАЗРЯДАХ
В ДЕЙТЕРИИ ***

В работе обсуждается возможный механизм нейтронного эффекта при разрядах в дейтерии. Механизм основан на предположении, что в процессе развития неустойчивых возмущений плазменного шнура плазма может быть полностью вытеснена давлением магнитного поля из некоторых участков шнура. В таких разрывах должны возникать сильные электрические поля, которые и могут явиться причиной ускорения ионов дейтерия, вызывающих некоторое число ядерных реакций.

Как известно, нейтронное излучение, обнаруженное в 1952 г. Л. А. Арцимовичем и др. [1] при разрядах с большой силой тока в дейтериевой плазме, не соответствует закономерностям, которые должны были бы наблюдаться в случае термоядерного происхождения этих нейтронов. Поэтому было признано, что нейтроны возникают за счет некоего ускорительного механизма, при котором ионы дейтерия набирают энергию в электрических полях и, попадая затем в относительно более плотную плазму, вызывают некоторое число ядерных реакций.

Тогда же было высказано предположение, что таким механизмом ускорения могли бы являться электрические поля, возникающие в момент разрыва плазменного шнура при развитии на нем неустойчивых возмущений типа перетяжек. Такие перетяжки представляют единственный вид неустойчивых возмущений плазменного шнура, при которых может

* Работа выполнена в 1958 г.

происходить обрыв цепи тока. Аналогично тому, как это происходит при обычном обрыве проводника в линии тока, в месте разрыва должны возникать сильные электрические перенапряжения. Ввиду отсутствия в то время экспериментальных данных об энергиях быстрых частиц в плазме количественный расчет этого явления не был проведен.

В последнее время получены новые экспериментальные результаты, качественно подтверждающие картину ускорения ионов дейтерия в местах разрывов на пинче. Так, в работе Колгейта и др. [2] была экспериментально определена зависимость энергии нейтронов от угла вылета по отношению к направлению оси прямой разрядной трубы. Наблюдаемая асимметрия свидетельствует о наличии в плазме быстрых дейтронов ($\sim 50 \div 200$ кэВ), движущихся к катоду. В ряде работ, выполненных в СССР [3, 4], также были обнаружены быстрые ионы дейтерия.

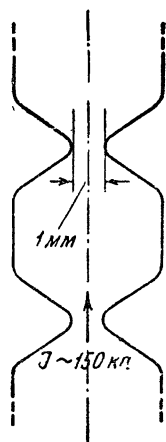


Рис. 1.

В работе Колгейта и др. [2] в качестве возможного механизма ускорения ионов рассматривался процесс ускорения в квазистационарных вихревых электрических полях, возникающих при изменении магнитного поля вблизи перетяжек на пинче.

Чтобы объяснить наличие ионов дейтерия с энергией ~ 50 кэВ, авторам приходится делать допущение, что на пинче образуются пережимы с диаметром $a \sim 1$ мм, через которые течет ток ~ 150 кА, так что магнитное поле в местах наибольшего сужения достигает величины $\sim 6 \cdot 10^5$ гаусс. Электрические

поля требуемой величины получаются, если считать, что сужения продолжают нарастать со скоростью порядка $\dot{a} \sim 10^8$ см/сек.

В настоящей работе для объяснения образования быстрых дейтронов предлагается несколько иной механизм происхождения электрических полей, в которых могли бы ускоряться ионы дейтерия. Именно — мы сделали допущение, что в процессе нарастания перетяжек плазма может быть полностью вытеснена давлением магнитного поля из мест сужений, так что на пинче образуются разрывы, через которые не может проходить ток проводимости. В этих разрывах должны возникать сильные электрические поля, которые и могут явиться причиной образования быстрых дейтронов, наблюдаемых на опыте.

Таким образом, в отличие от работы [2], где рассматривался механизм ускорения в полях, возникающих до момента

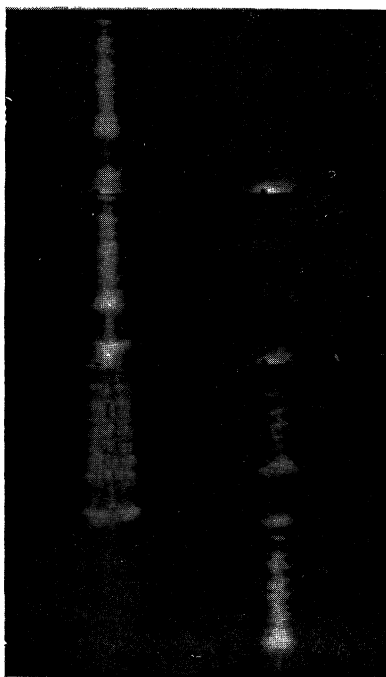


Рис. 2. Восемь последовательных фотографий пинча. Хорошо виден процесс формирования и обрыва большой перемычки.

образования разрывов, мы рассмотрим ускорение в полях, возникающих после образования разрывов.

Для возникновения достаточно сильных электрических полей при втором механизме необходимы более простые условия. В частности, не требуется допускать, что радиус проводящего канала уменьшается до размеров порядка десятых долей миллиметра, как это делалось в работе [2]. Более того, оказывается, что для оценки величины электрических полей вообще не требуется знание микроскопической картины того, как именно происходит образование разрыва. Поэтому все описание можно провести феноменологически.

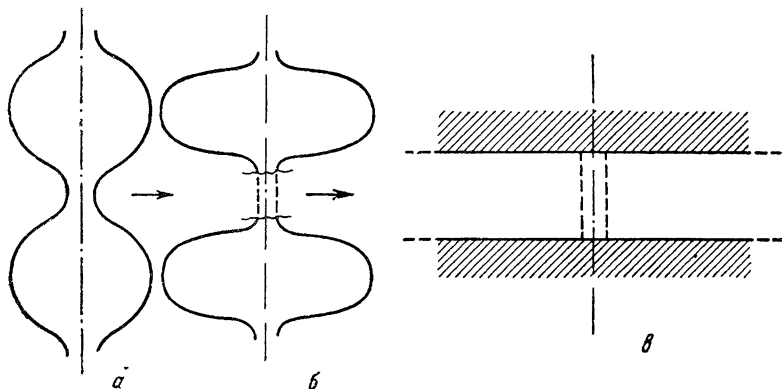


Рис. 3.

В момент, непосредственно предшествующий обрыву перетяжки, мы имеем относительно тонкую нить плазмы, примыкающую к большим грушевидным сгусткам подобно тому, как это имеет место на приводимых здесь фотографиях, полученных Д. В. Орлинским. Идеализируя задачу для возможности математического расчета, заменим эти сгустки бесконечно большими идеально-проводящими плоскостями, между которыми располагается тонкий проводник с текущим по нему током j^0 , распределенным в сечении проводника с плотностью $j^0(\rho)$. Магнитное поле, созданное этим током, очевидно равно:

$$H(\rho) = \frac{2}{c\rho} \int_0^{\rho} j^0(\rho) 2\pi\rho d\rho \quad (1)$$

Относительно слабыми электрическими полями можно пренебречь. Допустим теперь, что в момент $t=0$ (момент обрыва) ток проводимости мгновенно прекращается. Тогда магнитное

поле, распределенное в пространстве по формуле (1), вызовет ток смещения, в точности равный существовавшему до этого току проводимости:

$$j_{\text{см}}(\rho, t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_z(\rho, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = j^0(\rho). \quad (2)$$

В дальнейшем поля будут изменяться в соответствии с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Определение электрического поля, возникающего в разрыве, сводится таким образом к решению уравнения (3) при начальных условиях

$$E(x, y, t) \Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0} = 4\pi j^0(x, y). \quad (4)$$

Воспользовавшись известной формулой Пуассона—Парсеваля, позволяющей выразить решение двумерного волнового уравнения (3) через заданные в начальный момент значения самого поля и его частной производной по времени, получим:

$$E(x, y, t) = \frac{2}{c} \int_0^{ct} \frac{r dr}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \oint j^0(x', y') d\varphi, \quad (5)$$

где

$$x' = x + r \cos \varphi, \quad y' = y + r \sin \varphi.$$

Таким образом, поле в точке наблюдения (x, y) в момент t определяется значениями производной $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{t=0}$ во всем круге радиуса $r = ct$, а не только в точках окружности, как было бы в трехмерном случае. Это обстоятельство является характерной особенностью двумерных волновых процессов, при которых распространяющаяся со скоростью света (звука) волна оставляет за собой медленно спадающий «шлейф».

Для различных конкретных случаев начального распределения тока j^0 из (5) находим поле E :

1) δ -образное распределение $j^0 = \mathcal{J}^0 \delta(x) \delta(y)$

$$E(\rho, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } ct < \rho \\ \frac{2\mathcal{J}^0}{c \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} & \text{при } ct > \rho. \end{cases} \quad (6)$$

В частности, на оси

$$E(0, t) = \frac{2\mathcal{J}^0}{c^2 t}. \quad (7)$$

2) Гауссово распределение $j_0 = \frac{\mathcal{J}^0}{\pi a^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{a^2}\right\}$

$$E(\rho, t) = \frac{4\mathcal{J}^0}{a^2} t e^{-\frac{\rho^2}{a^2}} \int_0^{\pi/2} e^{-\left(\frac{ct}{a}\right)^2 \sin^2 \theta} I_0\left(2 \frac{\rho ct}{a^2} \sin \theta\right) \sin \theta d\theta \quad (8)$$

на оси $E(0, t) = \frac{2\mathcal{J}^0}{ca} \varphi\left(\frac{ct}{a}\right)$, где

$$\varphi(\tau) = 2e^{-\tau^2} \int_0^\tau e^{x^2} dx. \quad (9)$$

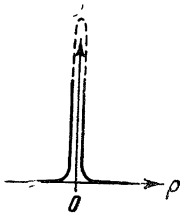


Рис. 4.

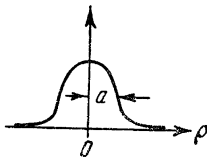


Рис. 5.

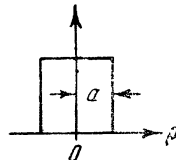


Рис. 6.

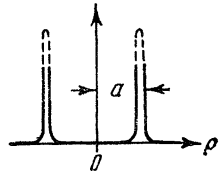


Рис. 7.

3) Однородное по сечению цилиндра $j^0 = \begin{cases} \frac{\mathcal{J}^0}{\pi a^2} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$

$$\text{на оси } E(0, t) = \frac{2\mathcal{J}^0}{ca} 2 \begin{cases} \tau & \text{при } \tau = \frac{ct}{a} < 1 \\ \tau - \sqrt{\tau^2 - 1} & \text{при } \tau > 1 \end{cases} \quad (10)$$

4) По поверхности цилиндра («скин») $j^0 = \frac{\mathcal{J}^0}{2\pi a} \delta(\rho - a)$

$$\text{на оси } E(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } ct < a \\ \frac{2\mathcal{J}^0 a}{ca \sqrt{(ct)^2 - a^2}} & \text{при } ct > a. \end{cases} \quad (11)$$

Во всех случаях поле вблизи оси после резкого увеличения до значений $E_{\max} \sim \left(\frac{2\mathcal{J}^0}{ca}\right) \sim H_{\text{магн}}^0$ (за время $\sim \frac{a}{c}$) убывает затем весьма медленно:

$$E(0, t) \cong \frac{2\mathcal{J}^0}{c^2 t} \quad \text{при } t \gg \frac{a}{c}, \quad (12)$$

причем это асимптотическое поведение не зависит от вида начального распределения тока.

По-видимому, последнее выражение будет справедливо также и в том случае, если ток проводимости прекращается не мгновенно, как считалось выше, а постепенно, как это должно было бы происходить в реальных условиях процесса обрыва перетяжки. В поле (12) заряженные частицы могут ускоряться:

$$M\dot{v} = eE \cong \frac{2e\mathcal{J}^0}{c^2 t}, \quad v(t) \approx \frac{2e\mathcal{J}^0}{Mc^2} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (13)$$

так что их скорость будет логарифмически возрастать. Например, в частном случае 3) (см. выше), считая, что при $t=0$ частица покоилась, и используя (10), найдем:

$$v(t) = \frac{2e\mathcal{J}^0}{Mc^2} \left\{ \tau^2 - \tau\sqrt{\tau^2 - 1} + \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) \right\} \quad (14)$$

$$\text{для } \tau = \frac{ct}{a} > 1,$$

$$z(t) = \frac{2e\mathcal{J}^0}{Mc^2} \frac{a}{c} \left\{ \tau \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 - 1}) + \frac{\tau^3 - (\tau^2 - 1)^{3/2}}{3} - \sqrt{\tau^2 - 1} \right\}. \quad (15)$$

$$\tau > 1$$

$$\tau > 1$$

При $\tau = \frac{ct}{a} \gg 1$ отсюда имеем:

$$v(t) \cong \frac{2e\mathcal{J}^0}{Mc^2} \left[\ln 2\tau + \frac{1}{2} \right], \quad z(t) \cong \frac{2e\mathcal{J}^0}{Mc^2} \frac{a}{c} \left[\ln 2\tau - \frac{1}{2} \right] \tau. \quad (16)$$

Пусть, например, в момент, непосредственно предшествующий обрыву, ток достигал значения $\mathcal{J}^0 = 100$ ка, диаметр перетяжки равнялся 1 см ($a = 0,5$ см) и длина разрыва была 1 см. Для иона дейтерия это дает:

$$\frac{2e\mathcal{J}^0}{Mc^2} = 10^8 \text{ см/сек}, \quad z(t) \cong \frac{\tau}{600} \left(\ln 2\tau - \frac{1}{2} \right). \quad (17)$$

Из последнего уравнения находим время $\tau_z = \frac{ct_z}{a}$, необходимое для пролета длины $z = 1$ см, и далее скорость и энергию, набираемые ионом за это время:

$$\tau_1 = 120, \quad v(\tau_1) = 6 \cdot 10^8 \text{ см/сек}, \quad \varepsilon_1 = \frac{Mv^2}{2} = 360 \text{ кэв}.$$

При длине разрыва $z = 0,1$ см и прежних остальных данных, найдем:

$$\tau_{0,1} = 20, \quad v(\tau_{0,1}) = 4 \cdot 10^8 \text{ см/сек}, \quad \epsilon_{0,1} = 160 \text{ квэ.}$$

Практически для оценок следует пользоваться формулой (13), куда входит время t_0 — начало ускорения. Величина t_0 примерно характеризует длительность реального процесса обрыва перетяжки. Во всяком случае следует считать $t_0 \gg \frac{a}{c}$. Так что приведенные цифры дают несколько завышенные порядки величин и указывают лишь на то, что предлагаемый механизм позволяет объяснить наличие в плазме быстрых ионов.

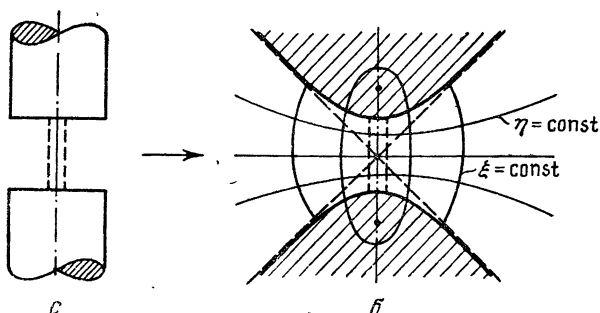


Рис. 8.

Рассмотренная выше картина обрыва перемычки между бесконечными плоскостями является, конечно, модельной идеализацией, достаточно далекой от реальных условий. Ближе к действительности был бы, например, расчет обрыва перемычки, располагающейся между торцами цилиндров (рис. 8, а). Покажем, что в этом случае электрическое поле в разрыве будет больше, чем в плоском случае. Это следует из того, что энергия возникающего поля E приходится в случае цилиндров на меньшую емкость, чем при бесконечных плоскостях. Расчет обрыва перемычки между цилиндрами крайне сложен, и для максимального упрощения задачи мы, во-первых, заменим цилиндры двумя гиперболами вращения (рис. 8, б) и, во-вторых, будем искусственно полагать, что в месте разрыва находится не вакуум, а неоднородная среда с подходяще подобранными свойствами.

Нашей задачей является определение асимптотического поведения поля E на оси при больших временах.

Введем систему вытянутых эллиптических координат (ξ, φ, η) , где поверхности $\xi = \text{const}$ являются эллипсоидами

вращения с расстоянием между фокусами равным $2l$. В этих координатах

$$(ds)^2 = l^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1} (d\xi)^2 + \\ + l^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2} (d\eta)^2 + l^2 (1 - \eta^2) (\xi^2 - 1) (d\varphi)^2. \quad (18)$$

Свойства среды мы подберем так, чтобы фронт волны, распространяющейся от оси ($\xi = 1$) во все моменты времени совпадал с координатной поверхностью $\xi = \xi(t)$. Этого можно добиться, полагая $\varepsilon = 1$, а магнитную проницаемость μ определяя из условия:

$$\frac{ds_\xi}{dt} = l \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\mu(\xi, \eta)}}. \quad (19)$$

Для того чтобы $\xi(t)$ не зависело от η , необходимо положить:

$$\mu(\xi, \eta) = \frac{F(\xi)}{\xi^2 - \eta^2}. \quad (20)$$

При таких ε и μ существует решение уравнений Максвелла, в котором отличны от нуля лишь компоненты полей E_η и H_φ , в то время как в вакууме всегда была бы еще и компонента E_ξ , что крайне осложняет расчет.

Поскольку мы хотим сравнить случай обрыва перемычки между гиперboloидами с плоским случаем, то целесообразно просто положить:

$$F(\xi) = \xi^2, \quad (21)$$

так как при таком выборе: а) на далеких ($\xi \gg 1$) расстояниях имеем $\mu \rightarrow 1$ и среда переходит в вакуум, б) на всей средней ($\eta = 0$) плоскости имеем $\mu = 1$, и наконец с) при предельном переходе к плоскому случаю (когда $l \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$ при $l\eta \rightarrow z$, $l\sqrt{\xi^2 - 1} \rightarrow \rho$) вводимая нами для искусственного упрощения уравнений среда с

$$\varepsilon(\vec{r}) = 1, \quad \mu(\vec{r}) = \frac{\xi^2}{\xi^2 - \eta^2} \quad (22)$$

также переходит в вакуум. Постараемся отыскать наиболее простое решение, аналогичное решениям (6)–(7) плоского случая.

Из $\text{div } \mathbf{E} = 0$ при $E_\varphi = E_\xi = 0$ получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)} E_\eta) = 0,$$

решением которого, очевидно, является функция ξ и t :

$$\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)} E_\eta(\xi, \eta, t) = \mathcal{E}(\xi, t) \neq f(\eta). \quad (23)$$

При подстановке этой функции в волновое уравнение для электрического поля

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} \right) - \frac{l^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (24)$$

Начальные условия при $t=0$, соответствующие δ -образному распределению тока проводимости, существовавшему на оси до момента обрыва:

$$E_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} \right)_0 = 4\pi \mathcal{J}^0 \delta(x) \delta(y) = 4\mathcal{J}^0 \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{\rho^2}{a^2}}}{a^2} \right)$$

в наших переменных запишутся:

$$(\mathcal{E})_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right)_{\xi \rightarrow 1} = (1 - \eta^2) \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} \right)_0 = \frac{4\mathcal{J}^0}{l^2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{\xi^2 - 1}{\Delta^2}}}{\Delta^2} \right). \quad (25)$$

Решение уравнения (24) ищем в виде:

$$\mathcal{E}(\xi, t) = \int_0^\infty C_\omega f_\omega(\xi) \sin \omega t d\omega, \quad (26)$$

где $f_\omega(\xi)$ — регулярное в интервале $1 \leq \xi \leq \infty$ решение само-сопряженного уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \frac{df_\omega}{d\xi} \right) + \nu^2 f_\omega = 0, \quad \nu = \frac{l\omega}{c} \quad (27)$$

с непрерывным спектром собственных значений ω . Из (27) находим условие ортогональности:

$$\int_1^\infty f_\omega f_{\omega'} d\xi = \left(\frac{f_\omega \frac{df_{\omega'}}{d\xi} - f_{\omega'} \frac{df_\omega}{d\xi}}{\nu^2 - \nu'^2} \right)_{\xi \rightarrow \infty} = g(\omega, \omega') \delta(\omega - \omega'). \quad (28)$$

Очевидно, без ограничения общности можно $f_\omega(1) = 1$, однозначно определяя тем самым множитель $g(\omega, \omega')$ в (28). Удовлетворяя теперь начальным значениям (25), находим

$$C_\omega = \frac{2\mathcal{J}^0}{l^2 \omega g(\omega, \omega)}. \quad (29)$$

Ограничимся рассмотрением электрического поля в начале координат ($\xi = 1, \eta = 0$), где мы имеем $\varepsilon = \mu = 1$, и поэтому (см. 23, 26, 29):

$$E_x(\rho, t)|_{\rho=0} = \mathcal{E}(\xi, t)|_{\xi=1} = \frac{2\mathcal{J}^0}{l^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega g(\omega, \omega)} d\omega, \quad (30)$$

так что необходимо вычислить лишь функцию $g(\omega, \omega)$, входящую в (28), при условии $f_{\omega}(1) = 1$. В общем виде нахождение ее затруднительно [уравнение (27) содержит три неправильные особые точки, и его решение не приводится к какому-либо достаточно известным функциям]; однако в двух предельных случаях: $\nu \gg 1$ и $\nu \ll 1$ применимы приближенные методы.

При $\nu \gg 1$ можно применить метод WKВ аналогично квазиклассическому приближению в квантовой механике, и тогда:

$$g(\omega, \omega) \approx \frac{c^2}{l^2 \omega} \quad \text{и} \quad E \approx \frac{2\mathcal{J}^0}{c^2 t} \quad (31)$$

$$\omega \gg \frac{c}{l} \quad t \ll \frac{l^3}{c}$$

Последний результат, совпадающий с решением (7) плоского случая, можно было предвидеть заранее, так как большие частоты в интеграле (30) существенны лишь при малых ($t \sim \frac{1}{\omega}$) временах, соответствующих начальной стадии разлета волны, движущейся вблизи вершин гиперboloидов как между плоскостями. В наиболее интересном для нас случае, когда $t \gg \frac{l}{c}$, в интеграле (30) будут существенны малые частоты, для которых $\frac{\omega l}{c} = \nu \ll 1$. Тогда уравнение (27) имеет приближенное решение:

$$f_{\omega}(\xi) \cong \cos(\nu\xi - \nu). \quad (32)$$

$$\nu \ll 1$$

Последнее получается путем «сшивания» разложения

$$f_{\omega}(\xi) = 1 - \nu^2 \left[\frac{(\xi - 1)^2}{2} + \ln \frac{\xi + 1}{2} \right] + O(\nu^4) \dots \quad (33)$$

[которое при $\nu \rightarrow 0$ справедливо, начиная с $\xi = 1$, вплоть до достаточно больших $\xi^* \left(1 \ll \xi^* \leq \frac{1}{\nu} \right)$] с асимптотическим решением уравнения (27) при $\xi \gg 1$:

$$f''_{ac} + \nu^2 f_{ac} = 0, \quad f_{\omega}(\xi) = C_1 \cos(\nu\xi + C_2). \quad (34)$$

$$\xi \gg 1$$

Подставляя (32) в условие ортогональности (28), найдем:

$$g(\omega, \omega) \cong \frac{\pi c}{2l} \quad \text{и} \quad E \cong \frac{2\sigma^0}{cl}. \quad (35)$$
$$\omega \ll \frac{c}{l} \quad \quad \quad t \gg \frac{l}{c}$$

Как видим, в случае обрыва перемычки между гиперболами поле на оси стремится к постоянному (и довольно большому) значению $E \rightarrow \left(\frac{2\sigma^0}{el}\right)$. Так что скорость заряженной частицы, ускоряемой этим полем, будет нарастать линейно, а не логарифмически, как это имело место в плоском случае, где поле асимптотически убывало как $\sim t^{-1}$.

Приведенные выше оценочные расчеты полей показывают, что наличие быстрых ионов в плазме мощных импульсных разрядов может быть в принципе объяснено предлагаемым механизмом, основанным на допущении, что развитие перетяжек на пинче приводит к обрыву тока проводимости в нем.

Количественные оценки, приведенные выше, не могут претендовать на какую-либо заметную точность, поскольку в теорию входят величины (например, время реального процесса обрыва перетяжек, время существования возникающих электрических полей и др.), значения которых оцениваются лишь весьма приближенно.

Можно надеяться, что более детальные экспериментальные исследования позволят уточнить картину ускорения ионов в канале сильного разряда.

В заключение автор благодарит академика М. А. Леонтовича за весьма полезные замечания и обсуждение результатов работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов и др. Отчет АН СССР 1952 г., Атомная энергия, 3 (1956).
2. O. A. Anderson, W. R. Baker, S. A. Colgate и др. Доклад на III международной конференции по газовому разряду. Венеция, 1957.
3. В. Г. Брежнев. Частное сообщение.
4. Н. В. Филиппов. Частное сообщение.

Т. Ф. Волков

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ *

В работе рассматривается гидродинамическая теория колебаний плазмы в поле бегущей электромагнитной волны. Показано, что частоты звуковых и ленгмюровских колебаний в этом случае становятся функциями амплитуды высокочастотного поля. Обсуждаются возможные механизмы возникновения неустойчивости.

§ 1. Введение

Рассмотрим в гидродинамическом приближении одномерную задачу о влиянии высокочастотного электромагнитного поля на колебания плазмы. Если плазма однородна, то по ней может распространяться плоская и монохроматическая электромагнитная волна произвольной амплитуды (нелинейные эффекты не рассматриваются). Представим себе, что плотность плазмы слегка возмущена, например движением звуковой волны вдоль направления распространения электромагнитных колебаний или в результате какого-нибудь случайного внешнего воздействия. Это значит, что плотность плазмы уже перестает быть однородной, получая малые и медленные, по сравнению с частотой электромагнитного поля, изменения (различие частот составляет много порядков). Электромагнитное поле при этом искажится. Из-за большого различия частоты поля и частоты колебаний плазмы изменения электромагнитного поля можно рассматривать в адиабатическом приближении, т. е. при неподвижном профиле плотности плазмы. Можно ожидать, что электромагнитное поле будет частично отражаться от мест,

* Работа выполнена в 1958 г.

где плотность плазмы больше, и накапливаться в местах, где плотность меньше. Такой процесс должен стать наиболее интенсивным в случае, если характерный размер возмущения (например, длина волны плазменного колебания) будет порядка длины электромагнитной волны. Накопление электромагнитного поля может привести к интенсивному взаимодействию его с плазменными колебаниями и к раскачке последних. Раскачка колебаний может возникать спонтанно за счет наличия случайных неоднородностей плотности. Естественно ожидать также, что скорость распространения возмущений в плазме будет существенно зависеть от амплитуды переменного электромагнитного поля.

§ 2. Ионные электровзвукковые колебания

Рассмотрим плазму, находящуюся в переменном электромагнитном поле, считая, что внешние статические электрические и магнитные поля отсутствуют. Систему уравнений, описывающую плазму и электромагнитное поле, запишем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(MNv + \frac{1}{4\pi c} EH \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(MNv^2 + NT + \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, & j &= eNu, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (Nv) &= 0, & m \frac{du}{dt} &= eE. \end{aligned} \right\} (2.1)$$

В этой системе уравнение движения плазмы написано для удобства в виде закона сохранения, после исключения лоренцевой силы $\rho E + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}]$ с помощью уравнений Максвелла (в рассматриваемом случае ионных колебаний $\rho = 0$). M — масса иона, m — масса электрона, v — скорость плазмы вдоль направления оси z , и u — скорость электрона (заряд электрона $+e$), остальные обозначения стандартные. Предполагается, что все величины меняются вдоль координаты z , электрическое поле имеет только x -компоненту, магнитное поле — y -компоненту. Температура выражена в энергетических единицах. В случае ионных колебаний плотность электронов в каждой точке равна N . В уравнении движения для электронов мы пренебрегли членом $\frac{e}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}]$, т. е. световым давле-

нием, поскольку в лоренцову силу этот член вносит поправку порядка $\frac{v^2}{c^2}$.

Рассмотрим малые колебания. Это значит, что будем искать решение системы (2.1) в виде:

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 + N^{(1)}, \\ H &= H^{(0)} + H^{(1)}, \\ E &= E^{(0)} + E^{(1)}, \\ v &\equiv v^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Индекс «0» относится к некоторым равновесным значениям величин, индексом «1» отмечены малые поправки к ним.

а) Рассмотрим стационарное состояние, в котором плазма покоится и имеет постоянную и однородную плотность N_0 . Поле $E^{(0)}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(0)}}{\partial t^2} - \frac{4\pi N_0 e^2}{mc^2} E^{(0)} = 0. \quad (2.3)$$

Это уравнение допускает решение в виде бегущей волны:

$$E^{(0)} = E_0 \sin(\Omega t + kz), \quad (2.4)$$

k — волновое число, равное $\frac{\sqrt{\varepsilon}\Omega}{c}$; ε — диэлектрическая постоянная плазмы для частоты Ω , равная $1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$; ω_0 — частота ленгмюровских колебаний. В нашем случае обязательно $0 < \varepsilon < 1$.

Пренебрежем смещением ионов в электромагнитном поле высокой частоты Ω (т. е. величина N_0 от времени не зависит). Тогда для равновесных величин имеем:

$$N_0 T = \text{const} \quad \text{и} \quad \overline{\frac{E^{(0)2} + H^{(0)2}}{8\pi}} = \text{const}. \quad (2.5)$$

Черта означает усреднение, которое производится по периоду электромагнитного колебания $\frac{2\pi}{\Omega}$. $H^{(0)}$ определяется по известному $E^{(0)}$ из уравнения Максвелла. После усреднения получаются независящие от z величины. Амплитуда электромагнитного поля, а также плотность N_0 могут быть выбраны произвольными.

б) Определим поправки к электрическому и магнитному полю $E^{(1)}$ и $H^{(1)}$, вызванные наличием неоднородности плот-

ности. Из второго уравнения системы (2.1) получаем для определения $E^{(1)}$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4\pi e^2 N_0}{mc^2} E^{(1)} = \frac{4\pi e^2 N^{(1)}}{mc^2} E_0 \sin(\Omega t + \kappa z). \quad (2.6)$$

Величина $N^{(1)}$ является функцией координаты z и времени. Сделаем предположение, оправдывающееся затем результатом, что характерные времена изменения плотности значительно больше периода электромагнитного колебания. Поле $E^{(1)}$ должно поэтому иметь вид гармонического колебания (частоты Ω) с медленно меняющейся амплитудой и быстрой фазой. Рассмотрим адиабатическое приближение, т. е. при решении уравнения (2.6) вообще пренебрежем зависимостью от времени, рассматривая t как параметр. Вводя величину $n = \frac{N^{(1)}}{N_0}$, получаем:

$$E^{(1)} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\kappa c^2} \int^z n(z', t) \sin \kappa(z - z') \sin(\Omega t + \kappa z') dz' \quad (2.7)$$

и

$$H^{(1)} = \frac{\omega_0^2 E_0}{c\Omega} \int^z n(z', t) \cos \kappa(z - z') \cos(\Omega t + \kappa z') dz'. \quad (2.7')$$

в) Рассмотрим теперь уравнение движения плазмы [первое уравнение системы (2.1)]. Полученные выражения для полей (2.7) подставим в уравнение движения в первом приближении:

$$MN_0 \frac{\partial v}{\partial t} + T \frac{\partial N^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{E^{(0)} E^{(1)} + H^{(0)} H^{(1)}}) = 0. \quad (2.8)$$

Усреднение производится по периоду электромагнитного колебания в предположении, что плотность $N^{(1)}$ за это время не успевает сколько-нибудь заметно измениться. Усредненный электромагнитный импульс

$$\frac{1}{4\pi c} (\overline{E^{(0)} H^{(1)} + E^{(1)} H^{(0)}}),$$

обращаясь в нуль выпадает из уравнения (2.8).

Подставив выражения для полей из (2.7) в уравнение (2.8) и произведя усреднение, получаем уравнение для определения v :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{1}{32\pi} \frac{\omega_0^4 E_0^2}{\kappa N_0 M c^2 \Omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \int^z n(z', t) \sin 2\kappa(z - z') dz'. \quad (2.9)$$

Здесь $a^2 = \frac{T}{M}$; T — температура ионов, a — изотермическая скорость звука. Предположение об изотермичности звука введено ради простоты. Поправка на изменение температуры может быть легко сделана.

Для получения полной системы необходимо еще добавить уравнение непрерывности, которое после линеаризации приобретает вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2.10)$$

г) Решим систему уравнений (2.9) и (2.10). Решение ищем в виде бегущих волн:

$$n = n^* e^{i(\omega t + kz)}, \quad v = v^* e^{i(\omega t + kz)}.$$

Для амплитуд n^* и v^* получаем систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\omega v^* - a^2 k n^* + \frac{n^* k}{\tau^2 (k^2 - 4\chi^2)} &= 0, \\ \omega n^* + k v^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Условием разрешимости системы (2.11) является обращение в нуль детерминанта, что дает дисперсионную зависимость:

$$\omega^2 = a^2 k^2 - \frac{k^2}{\tau^2 (k^2 - 4\chi^2)}. \quad (2.12)$$

Здесь τ — некоторое характерное время, равное

$$\tau^2 = \frac{8\pi N_0 M c^2}{\omega_0^2 E_0^2} \cdot \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = \alpha \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}, \quad (2.13)$$

где $\alpha = \frac{2Mmc^2}{e^2 E_0^2} \approx \frac{2,1 \cdot 10^{-6}}{E_B^2}$ сек². Масса иона взята $3,3 \cdot 10^{-24}$ г.

E_B — амплитуда электрического поля в вольтах на сантиметр.

Отличие частот плазменных колебаний ω от звуковой частоты ($\omega_{зв} = ka$) в отсутствие высокочастотного поля характеризуется безразмерным параметром $\gamma = a^2 \tau^2 \chi^2$, поскольку

$$\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma \left(\frac{k^2}{\chi^2} - 4\right)}, \quad (2.14)$$

Чем меньше величина γ , тем отличие больше. Выразив ее через параметры задачи, считая, что диэлектрическая постоянная $0 < \varepsilon < 1$, получаем:

$$\gamma = a^2 \chi^2 \tau^2 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{T}{\Phi}. \quad (2.15)$$

Здесь Φ — эффективный потенциал, равный:

$$\Phi = \frac{e^2 E_0^2}{m \Omega^2} \approx 4,8 \cdot 10^{-8} E_B^2 \lambda^2 \quad (2.16)$$

(E_B — амплитуда электрического поля в вольтах на сантиметр, λ — длина электромагнитной волны частоты Ω в вакууме в см).

Параметр $\gamma \sim 1$, если $E_B \approx 4,6 \cdot 10^3 \frac{\sqrt{T}}{\lambda}$. Влияние электромагнитного поля особенно существенно при низких температурах и коротких волнах.

Зависимость $\left(\frac{\omega}{ak}\right)^2$ от $\left(\frac{k}{x}\right)^2$ изображена на рис. 1. Если волновое число возмущения лежит в области:

$$4 \leq \left(\frac{k}{x}\right)^2 \leq 4 + \gamma, \quad (2.17)$$

то возможна неустойчивость, так как $\omega^2 < 0$.

Появление неустойчивости в случае, если волновое число возмущения порядка длины электромагнитной волны, вызвано тем, что электромагнитное поле стремится сосредоточиться

в местах, где плотность плазмы меньше. Если длина волны возмущения значительно меньше или, наоборот, значительно больше длины электромагнитной волны, то отражение от мест с повышенной плотностью не столь сильно и неустойчивость отсутствует.

В остальной области колебания устойчивы. Их фазовая скорость $\left(\frac{\omega}{k}\right)$, будучи функцией амплитуды электрического поля, отличается от звуковой. В магнитной гидродинамике перпендикулярно к направлению внешнего магнитного поля могут распространяться продольные магнитозвуковые волны, скорость которых зависит от квадрата напряженности этого поля. Продольные волны в плазме, распространяющиеся вдоль направления движения электромагнитной волны (т. е. перпендикулярно к векторам электромагнитного поля), частота кото-

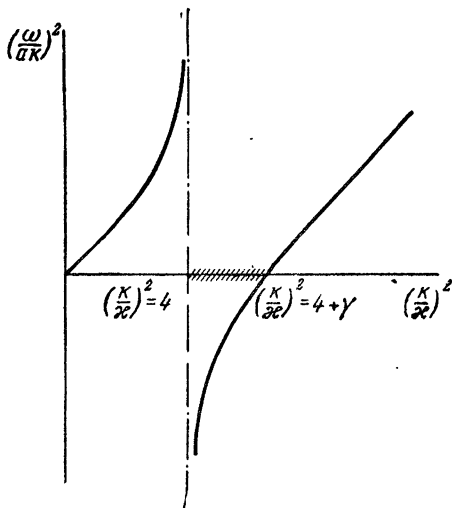


Рис. 1

рых дается выражением (2. 12), можно по аналогии назвать электрозвуковыми.

Рассмотренные нами колебания отличаются от исследованных до сих пор (см., например, [1] и ссылки там на более ранние источники) тем, что дополнительная упругость плазмы создается не постоянным, а переменным, но усредненным по времени электромагнитным полем. Наличие переменного электромагнитного поля (бегущая волна) дает источник, за счет которого могут черпать энергию плазменные колебания и возникать неустойчивость.

Указанная неустойчивость характерна тем, что может возникать, вообще говоря, при любой величине электрического поля. Этот, на первый взгляд, странный факт объясняется возникновением своеобразного явления резонанса в том случае, когда период силы в электромагнитной волне равен периоду изменения плотности. Такой резонанс аналогичен параметрическому резонансу в нелинейных колебательных системах. Строго в резонансе, т. е. когда $|k| = |2x|$, наше рассмотрение не применимо (по причинам, о которых говорится ниже). Если же все положить $|k| = 2|x|$, то из уравнения для E оказывается, что электромагнитное поле (экспоненциально затухая) вообще не может проникнуть в плазму. Если считать, что электромагнитное поле успело ранее распространиться внутрь плазмы, то деформация профиля приводит к накоплению поля в местах с пониженной плотностью. Электромагнитная волна как бы «останавливается», «продавливает» плазму и разбивая ее на отдельные сгустки. Возрастание неустойчивого решения может происходить до тех пор, пока изменение давления плазмы $\Delta p = N^{(1)} T$ не станет по порядку равным $E_0^2/8\pi$. Если $E_0^2 \ll \ll 8\pi N_0 T$, то нарастание будет продолжаться только до малых значений амплитуд $N^{(1)}$. Заметим, что, оставаясь в рамках линейной теории, мы, строго говоря, можем лишь отметить факт наличия неустойчивости. Дальнейшая эволюция описывается нелинейными уравнениями и мы можем делать лишь приблизительные оценки. Весьма вероятно, что образуется одно из тех стационарных распределений плотности плазмы в электромагнитном поле, которые описаны в работе [2].

д) Рассмотрим теперь некоторые факторы, ограничивающие область применимости результата.

При $k^2 = 4x^2$, ω^2 обращается в бесконечность. Вблизи этой точки наше рассмотрение не имеет смысла, поскольку было предположено вначале, что $\omega \ll \Omega$, т. е.

$$\left| a = \frac{1}{\tau^2 (k^2 - 4x^2)} \right| \ll \frac{\Omega^2}{k^2}. \quad (2. 18)$$

Рассматривая значения k^2 , близкие к $4\kappa^2$, получаем, что необходимо выполнение следующих неравенств:

$$4 - \frac{a^2}{c^2\gamma} \leq \frac{k^2}{\kappa^2} \leq 4 + \frac{a^2}{c^2\gamma}. \quad (2.19)$$

Из рассмотрения, следовательно, необходимо исключить небольшую область, где $|k| = |2\kappa|$.

При написании уравнения движения электронов в системе (2.1) мы пренебрегли давлением электронного газа. Это справедливо в том случае, если за период электромагнитного колебания электрон набирает энергию больше средней тепловой, т. е.

$$\frac{\Phi}{T_e} > 1, \quad (2.20)$$

здесь Φ — введенный выше потенциал (2.16), T_e — температура электрона в энергетических единицах.

Невыполнение условия (2.20) приведет к необходимости учета теплового движения электронов. Тепловое движение, по-видимому, внесет некоторое затухание и неустойчивость не будет проявляться столь резко. Корректный учет теплового движения может быть проведен лишь в рамках кинетической теории.

§ 3. Электронные колебания в присутствии электромагнитного поля

Рассмотрим влияние высокочастотного электромагнитного поля бегущей волны на электронные колебания. Будем считать в этом случае, что ионы покоятся. Для электромагнитного поля имеем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathbf{j} &= eN\mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(N_0 - N) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

N_0 — постоянная и однородная плотность ионов, N — плотность электронов.

Следует еще добавить уравнение движения электронов в следующей форме:

$$m \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}] \quad (3.2)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (N\mathbf{u}) = 0.$$

В стационарном состоянии плотность электронов однородна и для электромагнитного поля имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(0)}}{\partial z^2}, \quad (3.3)$$

допускающее решение в виде плоской волны, электрический вектор который направлен вдоль оси x :

$$E_x^{(0)} = E_0 \sin(\Omega t + \kappa z), \quad \kappa = \frac{\Omega}{c}. \quad (3.4)$$

Диэлектрическая постоянная в этом случае положена равной единице. Это связано с предположением, что частота электромагнитного поля значительно больше ожидаемой частоты электронных колебаний, которая не должна сильно превосходить ленгмюровскую частоту ω_0 . Если электронная плотность немного возмущена, то, как и в рассмотренном выше случае ионных колебаний, к электрическому полю $E_x^{(0)}$ добавляется малая поправка $E_x^{(1)}$, удовлетворяющая уравнению, аналогичному (2.6). Поскольку ожидаемая частота электронных колебаний должна быть меньше частоты внешнего поля, то функция $E_x^{(1)}(z, t)$ должна иметь вид гармонического колебания (частоты Ω) с медленно меняющейся амплитудой и быстрой фазой.

В результате смещения электронов появляется пространственный заряд и электрическое поле $E_x^{(1)}$, частота которого должна равняться частоте электронных колебаний.

Поскольку для поля $E_x^{(1)}$ имеем уравнение, по форме сходное с (2.6), то решение будет аналогично (2.7). В формулах (2.7), однако, следует положить $\epsilon = 1$, т. е. $\kappa = \frac{\Omega}{c}$.

При определении движения электрона воспользуемся результатами работы [3]. В поле E_x электрон совершает быстрые колебания вдоль оси x и испытывает медленный «дрейф» вдоль оси z . Если предположить, что за время одного колебания электрон смещается на расстояние, меньшее характерного размера неоднородностей, то для движения вдоль z можно получить (как это сделано в работе [3]) усредненное уравнение движения.

Если w — усредненная скорость вдоль оси z , то это уравнение в наших обозначениях принимает вид:

$$m \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{e^2 \omega_0^2 E_0^2}{2mc^2 \Omega^2} \int^z n(z', t) \cos 2\kappa(z - z') dz' + eE_z^{(1)}. \quad (3.5)$$

Здесь $n = \frac{N^{(1)}}{N_0}$, $N^{(1)}$ — отклонение электронной плотности от ее равновесного значения.

К уравнению (3.5) следует еще добавить линеаризованное уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

и уравнение, определяющее электрическое поле,

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z} = -4\pi N_0 n. \quad (3.7)$$

Решение системы (3.5)–(3.7) ищем в виде

$$n = n^* e^{i(\omega t + k z)}, \quad w = w^* e^{i(\omega t + k z)}, \quad E_z^{(1)} = E_z^* e^{i(\omega t + k z)}.$$

Приравнявая нулю детерминант получающейся системы однородных алгебраических уравнений, получаем дисперсионную зависимость:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Phi}{mc^2} \frac{k^2}{k^2 - 4\kappa^2} \right). \quad (3.8)$$

Здесь, как и раньше, $\Phi = \frac{e^2 E_0^2}{m\Omega^2}$.

Как и в предыдущем случае, при $k = |2\kappa|$ наличие внешнего электромагнитного поля может приводить к расщеплению теперь уже ленгмюровской ветви плазменных колебаний. Область неустойчивости здесь, однако, сильно суживается. Поскольку практически всегда $\Phi/mc^2 \ll 1$, то $\omega^2 < 0$, если

$$4 < \frac{k^2}{\kappa^2} < 4 \left(1 + \frac{\Phi}{mc^2} \right). \quad (3.9)$$

Как и в предыдущем случае ионных колебаний, наше рассмотрение применимо только, если $\omega^2 \ll \Omega^2$, т. е. из рассмотрения необходимо исключить область

$$4 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \frac{\Phi}{mc^2} \right) < \frac{k^2}{\kappa^2} < 4 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \frac{\Phi}{mc^2} \right). \quad (3.10)$$

Характерной особенностью электронных колебаний в присутствии внешнего магнитного поля является наличие двух предельных частот при малых и больших k . Если $|k| \ll |\kappa|$, то $\omega^2 = \omega_0^2$, если $|k| \gg |\kappa|$, то $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\Phi}{mc^2}\right) < \omega_0^2$. Уменьшение частоты лингмюровских колебаний в коротковолновой области объясняется тем, что электромагнитное поле частично накапливается в местах, где плотность электронов меньше, препятствуя возвращению их в положении равновесия.

Условия задачи требуют, чтобы частота электромагнитного поля была значительно больше частоты ленгмюровских колебаний. Это практически осуществимо только в случае достаточно разреженной плазмы.

В заключение отметим, что изложенное гидродинамическое решение задачи из-за неучета теплового движения частиц нельзя считать вполне корректным. Необходимо кинетическое рассмотрение, которое автор надеется провести в ближайшем будущем.

Автор благодарит академика М. А. Леонтовича за обсуждение работы и полезные советы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. И. Брагинский. ДАН СССР, 115, 475, 1957.
 2. Т. Ф. Волков, см. настоящее издание, т. 3, стр. 336.
 3. Г. З. Сагдеев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 446
-

Т. Ф. Волков

О КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ БЕГУЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ *

В работе рассмотрены поверхностные колебания плазмы в поле бегущей электромагнитной волны высокой частоты. Показано, что плоская поверхность плазмы в этом случае неустойчива, независимо от величины внешнего электромагнитного поля. Наибольшим инкрементом обладают возмущения, длина волн которых близка к половине длины волны электромагнитного колебания.

1) Рассмотрим колебания плоской поверхности плазмы, давление которой частично или полностью уравнивается усредненным (по времени) давлением бегущей электромагнитной волны с частотой Ω **. Если давление высокочастотного поля недостаточно для уравнивания давления плазмы, то необходимо присутствие внешнего постоянного магнитного поля, параллельного поверхности. Электромагнитная волна должна возбуждаться между поверхностью плазмы и идеально проводящей стенкой. Плазму будем рассматривать как хорошо проводящую жидкость. Примем, что скин-эффект является достаточно сильным и электромагнитное поле не проникает внутрь плазмы на заметную глубину. Для того чтобы давление переменного электромагнитного поля могло удерживать плазму, его частота должна быть достаточно высока, так чтобы частицы, двигаясь с тепловыми скоростями, за период прохо-

* Работа выполнена в 1958 г.

** Вопрос об устойчивости границы плазмы в поле стоячей электромагнитной волны рассматривался в работе [1].

дили путь меньший, чем расстояние l между плазмой и идеально проводящей стенкой:

$$\Omega > \frac{v_T}{l}, \quad (1)$$

где v_T — средняя тепловая скорость ионов.

Наше рассмотрение не применимо к тем частицам максвелловского распределения, которые имеют скорости, значительно превышающие тепловые.

Рассмотрим двумерную задачу (все величины зависят от x и z). Пусть ось z направлена вдоль плоской поверхности плазмы и совпадает с направлением распространения электромагнитной волны, ось перпендикулярна этой плоскости. Плазма занимает область $x > l$. Плоскость $x=0$ предполагается жесткой и идеально проводящей.

2) Рассмотрим стационарное состояние, отмечая индексом «0» относящиеся к нему величины. В полости между идеально проводящей стенкой и плазмой могут распространяться электромагнитные волны разных типов. Рассмотрим H -волну с отличными от нуля E_y , H_x и H_z . Считая поле монохроматическим с частотой Ω получаем уравнение для определения $E_y^{(0)}$:

$$\frac{\partial^2 E_y^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y^{(0)}}{\partial z^2} + q^2 E_y^{(0)} = 0, \quad q = \frac{\Omega}{c} \quad (2)$$

и граничное условие:

$$E_y^{(0)} = 0 \quad (\text{при } x=0 \text{ и } x=l). \quad (3)$$

Отсюда

$$E_y^{(0)} = E_0 \sin \frac{\pi n x}{l} \sin(\Omega t + \kappa_n z), \quad (4)$$

($\kappa_n^2 = q^2 - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, n — натуральное число).

В стационарном состоянии плазма однородна и имеет плотность N_0 . Температуру будем считать постоянной и равной T . Поля внутри плазмы отсутствуют. Вне плазмы вдоль оси z приложено постоянное и однородное магнитное поле \mathcal{H}_0 .

На поверхности (при $x=l$) должно выполняться условие

$$8\pi N_0 T = \mathcal{H}_0^2 + \overline{H_z^{(0)2}} \quad (5)$$

(черта означает усреднение по колебаниям с высокой частотой Ω). Так как $\overline{H_z^{(0)2}}$ не зависит от z , то стационарная форма поверхности плоская.

3) Рассмотрим возмущения электромагнитного поля, вызванные движением поверхности. Пусть возмущенная поверх-

ность описывается уравнением $x = l + \psi(z, t) = l + \psi_0 e^{i(kz + \omega t)}$, причем $|\psi_0| \ll l$.

Поскольку возмущения поверхности считаются малыми, то и возмущения электромагнитного поля будут малы:

$$E_y = E_y^{(0)} + E_y^{(1)}, \quad (E_y^{(0)} \gg E_y^{(1)}). \quad (6)$$

Будем считать, что возмущенное движение поверхности является медленным по сравнению с частотой электромагнитного поля. Поэтому при определении $E_y^{(1)}$ поверхность будем считать покоящейся, рассматривая время как параметр.

Для $E_y^{(1)}$ имеем уравнение, аналогичное (2). Электрическое поле E_y должно обращаться в нуль на смещенной поверхности, т. е. $\vec{E}_y(l + \psi) = 0$. Разлагая в ряд по ψ , получаем:

$$E_y^{(1)} = -\psi_0 e^{i(\omega t + kz)} \frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial x}, \quad (\text{при } x = l). \quad (7)$$

Ищем $E_y^{(1)}$ в виде

$$E_y^{(1)} = \Phi_1(x, z) \sin \Omega t + \Phi_2(x, z) \cos \Omega t. \quad (8)$$

Для функции $\Phi_i (i = 1, 2)$ опять имеем волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} + q^2 \Phi_i = 0$$

при граничных условиях:

$$\Phi_i(0, z) = 0, \quad \Phi_i(l, z) = F_i(z), \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

Здесь

$$F_1 = -\frac{\pi n}{l} \psi_0 F_0 e^{i(\omega t + kz)} \cos \kappa_n z,$$

$$F_2 = -\frac{\pi n}{l} \psi_0 E_0 e^{i(\omega t + kz)} \sin \kappa_n z.$$

Из дифференциального уравнения для Φ_i и граничных условий (9) получаем:

$$\Phi_1 = -\frac{\pi n}{l} E_0 \psi_0 e^{i(\omega t + kz)} \frac{\text{sh} \sqrt{(k + \kappa_n)^2 - q^2} x}{\text{sh} \sqrt{(k + \kappa_n)^2 - q^2} l} \cos \kappa_n z, \quad (10')$$

$$\Phi_2 = -\frac{\pi n}{l} E_0 \psi_0 e^{i(\omega t + kz)} \frac{\text{sh} \sqrt{(k - \kappa_n)^2 - q^2} x}{\text{sh} \sqrt{(k - \kappa_n)^2 - q^2} l} \sin \kappa_n z. \quad (10'')$$

4) Считая, что функция $\psi(z, t)$ известна, определим движение плазмы, которую можно рассматривать в нашем случае как идеальный газ (внутри плазмы поля отсутствуют).

Для возмущения плотности $N^{(1)}$ имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 N^{(1)}}{\partial t^2}, \quad (11)$$

где $a^2 = \frac{T}{M}$ — скорость звука, который для простоты будем считать изотермическим.

Граничное условие получается из требования равенства нормальной компоненты скорости плазмы при $x=l$ скорости самой поверхности. В предположении малости деформации имеем:

$$v_x = \dot{\psi} \quad (\text{при } x=l). \quad (12)$$

Решение уравнения (11) при граничных условиях (12) имеет вид (выражаем v_x из уравнения движения как $v_x = -\frac{a^2}{N_0} \int \frac{\partial N^{(1)}}{\partial x} dt$):

$$N^{(1)} = -\frac{N_0 \omega^2}{a^2 \sqrt{k^2 - q_1^2}} e^{-\sqrt{k^2 - q_1^2}(x-l) + i(kx + \omega t)}, \quad q_1 = \frac{\omega}{a}. \quad (13)$$

5) На поверхности $x=l$ для возмущенных величин имеем граничное условие:

$$8\pi T N^{(1)} = \overline{H_z^{(0)} H_z^{(1)}}. \quad (14)$$

Магнитное поле определяется из (4), (8), (10) по формуле

$H_z = -c \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt$. Из граничного условия (14) получаем:

$$\frac{\omega^2}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}} = A \cdot B(k), \quad (15)$$

где

$$B(k) = \sqrt{(k - x_n)^2 - q^2} \operatorname{ct} h \sqrt{(k - x_n)^2 - q^2} l + \sqrt{(k + x_n)^2 - q^2} \operatorname{cth} \sqrt{(k + x_n)^2 - q^2} l, \quad (16)$$

величина

$$A = \frac{\pi n^2}{32} \frac{c^2 E_0^2}{l^2 \Omega^2 N_0 M} \approx 10^{-6} n^2 \frac{E_B^2}{\rho} \cdot \frac{c^2}{l^2 \Omega^2}$$

(E_B — амплитудное значение электрического поля в вольтах на сантиметр, ρ — плотность плазмы в $г/см^3$).

б) Рассмотрим дисперсионное уравнение (15). При его исследовании можно считать $k > 0$, поскольку замена $k \rightarrow -k$ оставляет (15) инвариантным. Разрешая это уравнение относительно ω^2 , получаем:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{a} \right)^2 \left[-1 + \text{sign } B \sqrt{1 + \left(\frac{2ka^2}{AB} \right)^2} \right]. \quad (17)$$

Рассмотрим несколько частных случаев, чтобы составить качественное представление о зависимости $\omega = \omega(k)$.

а) Пусть длина волны возмущения значительно превосходит расстояние между плазмой и идеально проводящей стенкой ($kl \ll 1$). Поскольку

$$\lim_{kl \rightarrow 0} B(k) = \frac{1}{c} \left(3 + \frac{\pi^2 n^2}{l^2 \kappa_n^2} \right),$$

т. е. k не зависит, то

$$\omega = \pm ak. \quad (18)$$

Таким образом, частота длинных поверхностных волн совпадает со звуковой частотой.

б) В обратном предельном случае коротких волн ($kl \gg 1$) $\lim_{kl \rightarrow \infty} B(k) = 2k$. Следовательно,

$$\omega^2 \approx 2 \left(\frac{Ak}{a} \right)^2 \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{A} \right)^2} \right]. \quad (19)$$

Заметим, что $A \sim a^2$ (при $\frac{\Omega l}{c} \sim 1$), если $(nE_0)^2 \sim N_0 T$.

в) В случае колебаний несжимаемой жидкости в поле бегущей электромагнитной волны, положив $a = \infty$, получаем

$$\omega^2 = ABk. \quad (20)$$

Требование $|\omega| < \Omega$ ограничивает сверху (как и в предыдущем случае) возможную величину k .

г) Для исследования вопроса об устойчивости рассмотрим знак всегда действительной величины B . Поскольку знак ω^2 всегда совпадает со знаком B , неустойчивость поверхности (т. е. $\omega^2 < 0$) возможна в областях, где B отрицательно. Обозначим:

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv (k - \kappa_n)^2 - q^2, \\ y_2 &\equiv (k + \kappa_n)^2 - q^2. \end{aligned} \quad (21)$$

В области $0 < k < -x_n + q$ функции y_1 и y_2 обе отрицательны. Если $-x_n + q < k < x_n + q$, то $y_1 < 0$, $y_2 > 0$, а при $k > x_n + q$, $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. Как следует из выражения (16) для $B(k)$, неустойчивость может возникнуть в области $0 < k < x_n + q$.

Поскольку $B(k) \rightarrow -\infty$, когда величина k приближается справа к значениям

$$k = x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{\pi^2}{j^2}(n^2 - m^2)}, \quad m = 1, 2 \dots n.$$

то поверхность будет неустойчива относительно возмущений, волновое число которых заключено в пределах:

$$x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{\pi^2}{j^2}(n^2 - m^2)} < k < \delta_m^n, \quad m = 1, 2 \dots n. \quad (22)$$

где δ_m^n — некоторые величины, которые нетрудно получить численно из (16) при заданной величине q .

Рассмотрим случай $n = 1$. В соответствии с (22) неустойчивость возникает при

$$2x < k < \delta_1^1 \quad (23)$$

Наибольшим инкрементом обладают возмущения, длина волны которых близка к половине длины электромагнитной волны, т. е. близка к периоду соответствующей ей силы. Поверхностные колебания плазмы (или вообще любой проводящей, даже и несжимаемой жидкости) в поле бегущей электромагнитной волны обладают неустойчивостью резонансного (по длинам волн) характера.

Неустойчивость возникает потому, что электромагнитное поле усиливается вблизи вогнутых внутрь плазмы мест поверхности и ослабевает вблизи выпуклых. Следовательно, присутствие электромагнитного поля может в некоторых случаях ухудшить устойчивость плазмы. Это обстоятельство необходимо учитывать при проектировании установок, в которых плазма соприкасается с волновыми полями. Без учета затухания неустойчивость существует при любой величине амплитуды внешнего электромагнитного поля. В этом отношении рассматриваемые поверхностные колебания похожи на объемные колебания плазмы в поле бегущей электромагнитной волны [2].

Рассмотрим случай $n = 1$. Если $xl \gg 1$, то неустойчивы возмущения, у которых

$$2x < k < 2x + \frac{\pi^2}{3l^3 x^2 \sqrt{1 - \frac{q^2}{9x^2}}}. \quad (24)$$

При $k \rightarrow 2x$ $\omega(k) \rightarrow \infty$, поэтому наше рассмотрение не применимо для k очень близких к $2x$. Для выполнения неравенства $|\omega(k)| \ll \Omega$, хотя бы на некоторой части отрезка (23), должно быть

$$\frac{\lambda^2 a E_0^2}{l^2 c n T} \ll 1. \quad (25)$$

Здесь $\lambda = \frac{c}{\Omega}$ и, кроме того, положено $x \sim \frac{\Omega}{c}$. Неравенство (25) выполняется всегда, поскольку $a \ll c$. Если величина kl порядка или меньше единицы, то участок, на котором $B(k) < 0$, становится шире, чем при $kl \gg 1$. Неравенство $|\omega(k)| < \Omega$ при этом выполняется на еще большей части длины этого участка.

Автор благодарит академика М. А. Леонтовича за обсуждение работы и полезные советы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. З. Сагдеев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 346.
2. Т. Ф. Волков, см. настоящий том, стр. 98.

*А. Л. Безбатченко, И. Н. Головин,
П. И. Козлов, В. С. Стрелков,
Н. А. Явлинский*

БЕЗЭЛЕКТРОДНЫЙ РАЗРЯД С БОЛЬШОЙ СИЛОЙ ТОКА В ТОРОИДАЛЬНОЙ КАМЕРЕ С ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ *

§ 1. Экспериментальная установка

Установка с тороидальной камерой была спроектирована и построена для изучения зажигания и развития безэлектродного разряда в магнитном поле и изучения нагрева плазмы до температуры хотя и недостаточной для обнаружения нейтронов от термоядерной реакции, но соответствующей высокой ионизации плазмы и вмороженности магнитного поля.

1. 1. Приняв, что температура плазмы в шнуре тока определяется формулой

$$T = 1,6 \cdot 10^9 \eta \frac{\mathcal{I}^2}{N}, \quad (1.1)$$

где η — некоторый коэффициент < 1 ; N — полное число заряженных частиц в сечении шнура; T — температура плазмы в электроновольтах; \mathcal{I} — ток разряда в амперах, и что для быстрой передачи энергии от электронов к ионам необходимо $N > 10^{17} \text{ см}^{-1}$, получаем, что для нагрева плазмы до температуры выше 100 эв необходим ток в разряде более 200 ка.

2. 1. Чтобы изучать явления в заведомо замагниченной плазме, надо иметь возможность создавать продольное магнитное поле, в котором с самого начала разряда для электронов и ионов выполняется условие

$$\omega_{e,i} \cdot \tau_{e,i} \gg 1, \quad (1.2)$$

* Работа выполнена в 1956—1957 гг.

где $\omega_{e,i}$ и $\tau_{e,i}$ — ларморова частота и время между двумя соударениями ионов и электронов соответственно.

Замагничивание ионов требует более сильного магнитного поля, чем замагничивание электронов. Для ионов D_1^+ , движущихся в газе, состоящем из молекул D_2 , условие замагничивания (1.2) принимает вид

$$H > 3,6 \cdot 10^4 p. \quad (1.3)$$

H — в эрстедах; p — в мм рт. ст. Чтобы замагничивание ионов было сильным ($\omega_i^2 \tau_i^2 > 10$), надо, таким образом, чтобы при $p = 0,01$ мм рт. ст. поле H было > 1000 э.

3.1. Столб разряда должен сохранять макроскопическую устойчивость по Шафранову [1] в течение всего времени существования разряда. Для этого при выбранном диаметре тора $2R$, продольном магнитном поле в нем H и максимальном токе разряда \mathcal{J}_m должно выполняться условие

$$a > \sqrt{\frac{2\mathcal{J}_m R}{cH}}, \quad (1.4)$$

где a — радиус плазменного шнура. Это условие выполняется, например, при следующих параметрах: $a = 13$ см, $R = 80$ см, $\mathcal{J}_m = 200$ ка, $H = 20\,000$ э.

В формуле (1.4) предполагается, что максимальная возможная длина волны неустойчивости равна длине средней окружности в торе $2\pi R$.

4.1. Время выравнивания температуры между электронами и ионами

$$\tau \approx \frac{M}{m} \tau_{ei} = 5 \cdot 10^8 \frac{T^{3/2}}{n_e}, \quad (1.5)$$

где M и m — масса иона и электрона; T — температура электронов в эв; n_e — число электронов в 1 см³. Период τ_0 контура, связанного с разрядом, был выбран таким, что $\frac{\tau_0}{4} > \tau$ при температуре электронов 150 эв и плотностях электронов, ожидавшихся в опытах. В разных опытах время $\frac{\tau_0}{4}$ варьировалось от 290 до 2000 мксек.

5.1. За время протекания тока плазменный виток не должен успевать заметно увеличить под действием собственного магнитного поля свой радиус R .

По предположению А. Д. Сахарова для удержания плазменного витка от растяжения камера была окружена медной

оболочкой. Исследование влияния проводящей выполнено в [2]. При наличии проводящей оболочки ось тока смещена по отношению к оси оболочки на величину

$$\xi = \frac{b^2}{2R} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (1.6)$$

где b — радиус оболочки; R — большой радиус тока; a — радиус столба тока в плазме. С течением времени это смещение растет вследствие затухания токов Фуко в оболочке. Время удвоения первоначального смещения есть

$$t_2 = \frac{4\pi\sigma}{c^2} b\Delta, \quad (1.7)$$

где σ — проводимость материала оболочки, Δ — толщина ее. Для меди

$$t_{2м} = 1,7 \cdot 10^{-3} b\Delta. \quad (1.8)$$

Для того чтобы смещение ξ было не слишком велико, медная оболочка должна быть по возможности приближена к разрядной камере и толщина стенок камеры должна быть значительно меньше радиуса оболочки (b).

Магнитное поле в камере возбуждалось ударным генератором за время около 0,01 сек.; чтобы оно проникало в камеру, медная оболочка имела разрез по экватору тора. Кроме этого, оболочка имела 8 поперечных разрезов, чтобы электрическое поле, возбуждающее разряд, было по возможности равномерно распределено вдоль разрядной камеры. Эти разрезы незначительно увеличивают начальное смещение ξ .

6. 1. По ряду соображений мы отказались от железного сердечника. Для того чтобы первичная обмотка имела хорошую связь с током разряда, она была расположена по возможности плотно на поверхности разрядной камеры. В дальнейшем изложении мы будем называть эту обмотку вихревой. При этом было обращено внимание на то, чтобы поле рассеяния от вихревой обмотки обращалось в нуль на оси разрядной трубы. Модельные опыты, выполненные Н. Д. Виноградовой, помогли выбрать необходимую для этого форму обмотки. В случае постоянной плотности тока по сечению разрядной камеры коэффициент связи получился равным 0,85.

7. 1. Учитывая все сказанное, была сконструирована и построена установка (рис. 1) со следующими параметрами:

а) Разрядная камера — фарфоровый тор с большим средним диаметром $2R = 160$ см и малым внутренним диаметром 26 см при толщине стенок 2 см.

б) Медная оболочка, удерживающая виток разрядного тока от расширения, имеет толщину 0,6 см при внутреннем диаметре

33 см. Эта оболочка является одновременно каркасом обмотки продольного поля. Начальное равновесное смещение центра тока разряда при заполнении им всей трубы: $\xi=1,5$ см, время удвоения смещения $t_2=14$ мсек.

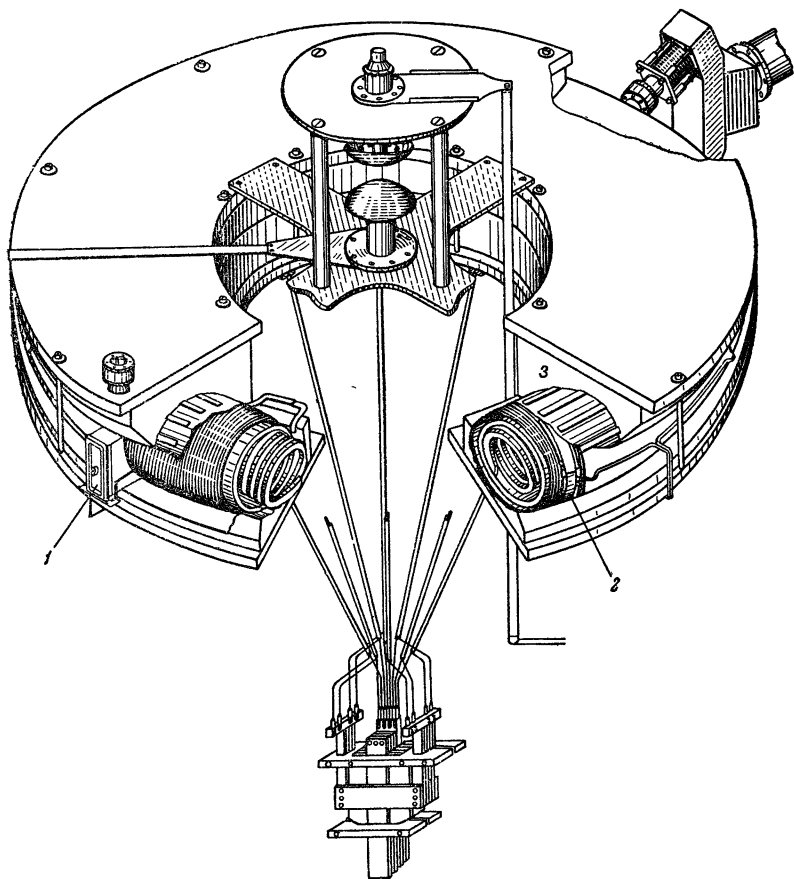


Рис. 1. Схематическое изображение тороидальной камеры с обмотками.

1 — окно для фотографирования; 2 — обмотка продольного магнитного поля;
3 — обмотка возбуждения разряда.

в) Обмотка продольного магнитного поля рассчитана на прочность для полей до 20 000 э, что позволяло бы иметь устойчивый столб разряда с максимальным током не более 200 ка. Питается обмотка от ударного генератора, который дает ток с амплитудой в 110 ка при частоте 25 гц.

г) Вихревая обмотка из 12 витков охватывает трубу тора на 260° и изолирована от обмотки продольного поля на 50 кВ. Малый диаметр вихревой обмотки 42 см. Вихревая обмотка питается от батареи конденсаторов через управляемый шаровой разрядник. В начале разряда мы имеем возможность создавать вихревое электрическое поле с напряженностью от 0,15 до 6,5 в/см. Частоту контура вихревой обмотки можно изменять от 860 до 200 гц. При запасе энергии в конденсаторной батарее в 150 кдж сила тока в газовом разряде могла бы достигнуть 440 ка, если бы плотность тока его была постоянна по сечению трубы и активное сопротивление плазмы мало по сравнению с ее индуктивным сопротивлением.

д) Система питания дает возможность регулировать магнитное поле от 2500 до 15 000 э, или иметь продольное поле $H=0$. Так как период тока разряда много меньше длительности первого полупериода тока ударного генератора, то магнитное поле можно считать постоянным во время разряда.

е) Дейтерий напускается в систему через палладиевый натекаль и дозируется с точностью до 10% мерными объемами, соединенными с масляным манометром.

8. 1. Первые опыты, проведенные на установке, показали, что в ней происходят весьма сложные процессы. Например, увеличивая магнитное поле свыше 5000 э в режимах любой длительности, можно было получить вентиляющую проводимость камеры*. Оказалось, что изолирующие стенки очень усложняют процессы, протекающие в разряде: заряды, возникающие на стенках, создают сильные электрические поля, скрещенные с продольным магнитным полем. Это приводит к дополнительным дрейфам и потерям заряженных частиц на стенках.

Для устранения этих побочных явлений внутрь фарфоровой трубы была вставлена плотно входящая спираль с диаметром просвета 22,5 см из нержавеющей стальной ленты шириной 10 мм и толщиной 2 мм. После установки спирали изменилась зависимость тока заряда от продольного магнитного поля и на осциллограммах напряжения исчезли колебания большой амплитуды.

§ 2. Измеряемые на опыте величины

В описываемых опытах измерялись три величины:

- а) напряжение обхода по поверхности тороида,
- б) полная сила тока в газовом разряде,

* Разряд зажигался при одном направлении E и не зажигался при встречном направлении E . Направление поля E , при котором происходило зажигание, изменялось на обратное вместе с изменением направления внешнего магнитного поля.

в) плотность тока в четырех concentрических зонах внутри газового разряда, и производилось фотографирование газового столба.

1. 2. Измерение напряжения обхода. Как сказано в § 1, обмотка продольного поля намотана на восьми изолированных друг от друга медных каркасах, охватывающих фарфоровую трубу. Каркасы соединены друг с другом проволочными сопротивлениями по 7,4 ом каждое, которые образуют делитель напряжения. Напряжение на одном из сопротивлений регистрировалось импульсным осциллографом ОК-17. Для того чтобы по показаниям осциллографа вычислить напряженность вихревого электрического поля E в произвольной точке разряда, отстоящей на расстояние a от оси разряда, надо знать самоиндукцию рассеяния между данной точкой и медной оболочкой. В частности, если столб разряда имеет радиус a , то напряженность поля на его поверхности есть:

$$E = \frac{V_0}{2\pi R} - 2 \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{d\mathcal{J}}{dt}, \quad (2.1)$$

где V_0 — вычисленное по осциллограммам напряжение обхода; R — большой радиус тора; b — радиус оболочки; \mathcal{J} — полный ток разряда.

Как будет показано ниже, плотность тока разряда во всех наших опытах не очень сильно менялась по сечению. Контрольные расчеты показали, что учет непостоянства плотности тока по сечению вносит поправку порядка 10% в величину E . Чтобы не усложнять расчетов во всей дальнейшей обработке результатов, мы приводим только значение E на поверхности столба разряда, вычисленное в предположении, что разряд заполняет всю трубу и плотность тока постоянна по сечению. Поправочный член $-2 \ln \frac{b}{a} \cdot \frac{d\mathcal{J}}{dt}$ очень существенен. В ряде случаев в начальные периоды разряда величина его возрастет более, чем до половины $\frac{V_0}{2\pi R}$.

2. 2. Ток разряда измерялся поясом Роговского, который помещен поверх фарфорового тора в зазоре между двумя секциями обмотки продольного магнитного поля и закрыт сверху латунными обоймами, экранирующими его от высокочастотных помех.

Для записи на осциллографе силы тока разряда на входе осциллографа стоит интегрирующая ячейка RC . Интегрированный сигнал подается на усилитель; смонтированный в осциллографе.

2. 3. Для измерения плотности тока в столбе разряда внутри разряда одновременно вставлялись три concentриче-

ских пояса Роговского с одинаковой чувствительностью. Все пояса находятся при атмосферном давлении внутри стеклянных колец, сделанных из трубок молибденового стекла с наружным диаметром 8 мм.

Хотя одновременно вставленные пояса и нарушают беспрепятственное движение зарядов вдоль трубы, в интервале давлений от 0,04 до 0,01 мм рт. ст. их влияние не очень существенно.

§ 3. Результаты измерений

Образцы полученных осциллограмм приведены на рис. 2. Мы отметим следующие главные их особенности. Во всех режимах при $H=0$ токи, измеренные концентрическими поясами, имеют неупорядоченные колебания. Магнитное поле уменьшает эти колебания, хотя ни в одном из режимов не устраняет их нацело. Наибольшие относительные изменения тока наблюдаются в самом меньшем поясе с диаметром 5 см. При всех режимах в отсутствие продольного внешнего магнитного поля в этом поясе ток неоднократно обращается в нуль, за первую четверть периода. Полный ток во всех режимах изменяется плавно. Напряжение обхода имеет небольшие колебания. До того как в камеру была вставлена спираль, наблюдались очень сильные колебания напряжения (рис. 3).

Количественная обработка полученных осциллограмм показывает следующее: во всех режимах осциллограммы напряжения обхода и полного тока воспроизводятся полностью от разряда к разряду в пределах, определяемых точностью измерений. Колебания в силе тока, наблюдаемые при $H=0$ на внутренних поясах, не воспроизводятся от разряда к разряду. Форма кривой тока, записываемая при $H=15\,000$ э всеми поясами, воспроизводится со всеми характерными изломами.

На рис. 4 мы видим, что максимальное значение тока растет с зарядным напряжением конденсаторной батареи. Рост замедлен при $V > 25$ кв. Замедление роста тока во всех случаях наблюдается при увеличении величины E/p .

Максимальная сила тока практически не зависит от давления при $0,04 \geq p \geq 0,02$ мм рт. ст., заметно убывает при $p < 0,01$ мм рт. ст. и быстро уменьшается около верхнего предела давлений, при которых зажигается разряд. При $E=6,5$ в/см наибольшее давление, при котором зажигается разряд, 0,2 мм рт. ст.

Максимальная сила тока растет с увеличением внешнего продольного магнитного поля. Как видно на рис. 5, увеличение магнитного поля от 0 до 15 000 э увеличивает максимальное значение тока в 3—8 раз. При $E=2$ в/см уве-

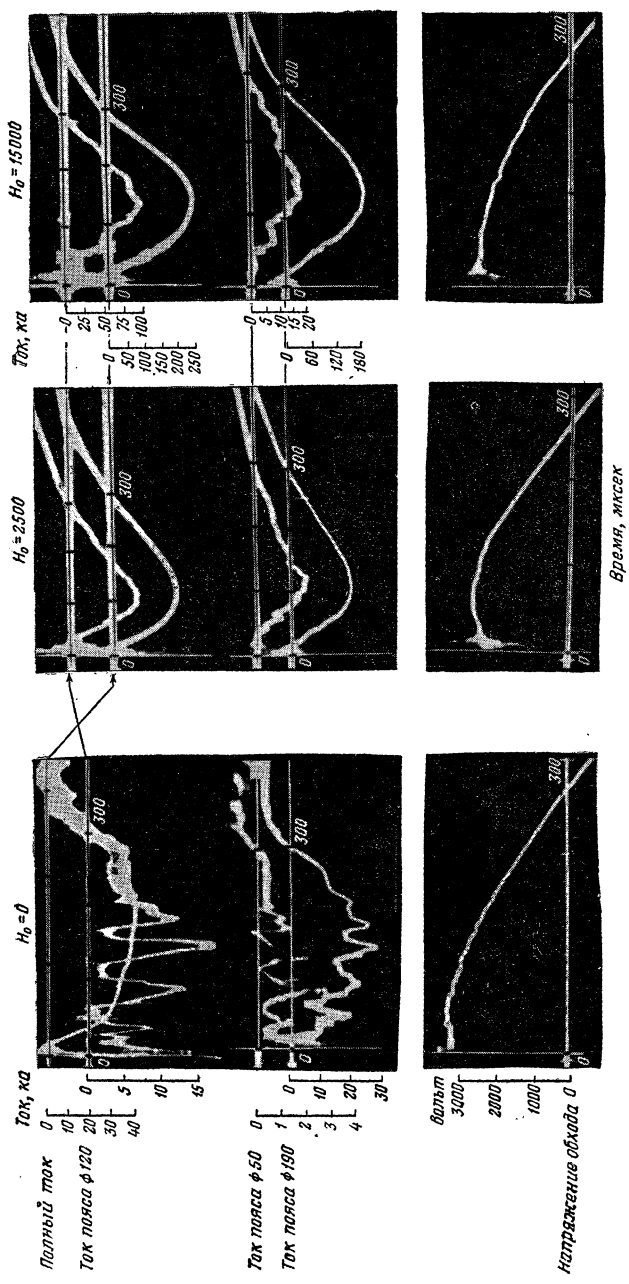


Рис. 2. Образцы осциллограмм разрядного тока, напряжения и токов, измеренных concentрическими поясами в камере.

лишение \mathcal{J}_m происходит в основном в интервале $0 \leq H \leq 2500$ э. Дальнейшее увеличение поля практически не влияет на \mathcal{J}_m . При $E = 6,5$ в/см мы наблюдаем значительный рост вплоть до $H = 15\,000$ э. В фарфоровом тороиде без спирали ток при наложении поля $H = 10\,000$ э возрастал в 2—2,5 раза. Дальнейшее увеличение магнитного поля приводило к уменьшению \mathcal{J}_m .

Во всех наблюдававшихся нами разрядах (как при $H=0$, так при $H \neq 0$) всегда обнаруживаются интенсивные колебания электрического поля и производной магнитного поля. Напряжение на поясах Роговского, служащих для измерения полного тока и распределения тока по сечению разряда, имеет

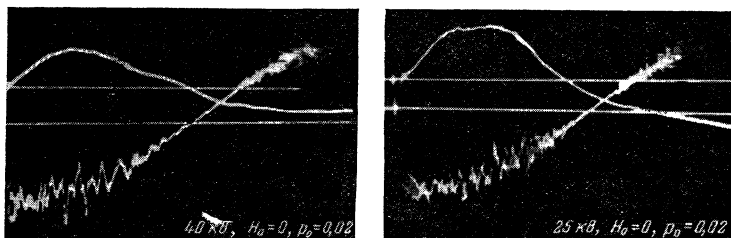


Рис. 3. Образцы осциллограмм разрядного тока напряжения разряда в тороидальной камере до установки металлической спирали.

флуктуативные колебания с амплитудой, сравнимой с полным значением напряжения. На двойных зондах, вставленных в плазму [3], колебания напряжения превосходят среднее значение разности потенциалов между ними.

Скоростные фотографии свечения плазменного столба (рис. 5а) сняты через окно в тороидальной камере, показанное на рис. 1. Щель скоростного фоторегистратора захватывался слой поперек столба разряда от стенки до стенки. Для того чтобы иметь правильный масштаб для измерения ширины светящегося столба разряда, поперек щели натянута две проволоочки, ткань которых видна на фотоснимках. Подавляющую часть времени свечение столба разряда заполняет весь объем разрядной камеры.

Над снимками регистрировалось свечение искры разрядника вихревой обмотки, позволяющее определить момент появления вихревого электрического поля в разрядной камере.

Начальные напряженности электрического поля равны 6,5; 4 и 2 в/см при соответственно 40, 25 и 12 кВ зарядного напряжения батареи.

Для ориентировки на рисунках показано нарастание и спадание тока разряда в камере за первые 350 мксек.

Приведенные снимки показывают, что:

1) Без продольного магнитного поля разряд зажигается в центре камеры и расширяется тем быстрее, чем ниже давление газа и чем скорее нарастает ток в разряде. Столб разряда все

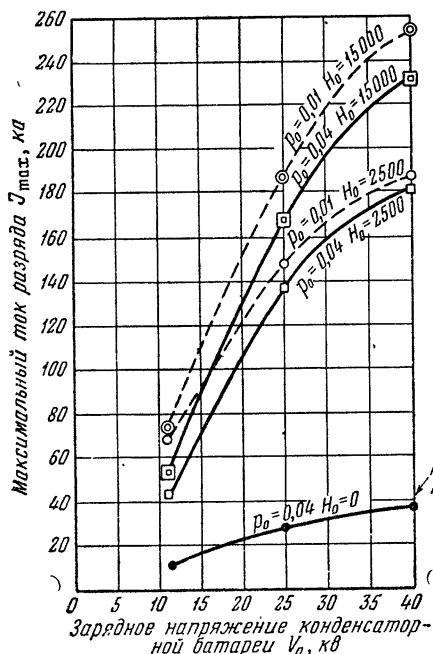


Рис. 4. Зависимость тока разряда от начального напряжения, приложенного к первичной обмотке.

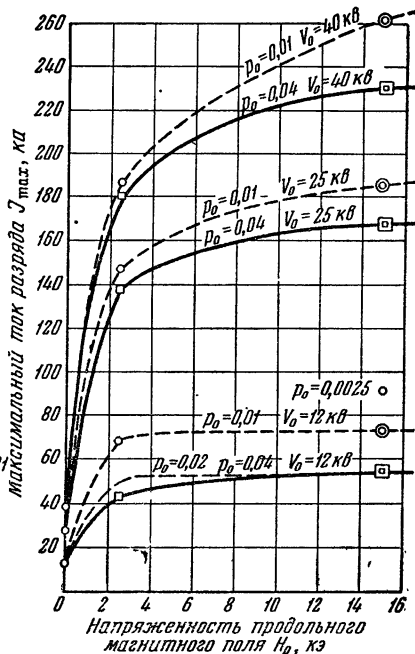


Рис. 5. Зависимость тока разряда от напряженности продольного магнитного поля.

время неустойчив и одновременно с переходом тока через нуль затухает и свечение разряда.

2) При продольном поле в 15 000 э разряд зажигается одновременно по всему сечению камеры и проходит две стадии: а) ламинарную, в течение которой свечение однородно по всему сечению разряда, и б) турбулентную, характеризующуюся перераспределением свечения по сечению разряда.

3) Между ламинарной и турбулентной стадиями в ряде режимов лежит темная область, наиболее простым объяснением которой была бы глубокая ионизация плазмы. Однако в это время проводимость не превышает $3 \cdot 10^{14}$ CGSE, что по клас-

сической теории проводимости дает коэффициент ионизации едва ли больший 5—10%.

4) После трехсотой микросекунды, резкие колебания света ослабляются, что, возможно, связано с повышением давления в камере вследствие гажения стенок.

5) Время существования ламинарной области не меняется при увеличении продольного поля от 2500 до 15 000 э.

§ 4. Обсуждение результатов измерений

Проведенные измерения дают три макроскопические характеристики разряда \mathcal{J} , $j(a)$ и E , усредненные вдоль разрядной камеры при разных значениях трех параметров, определяющих режим разряда V , H , p . Нас интересует, прежде всего, насколько глубоко идет ионизация плазмы и какие получаются во время разряда температуры ее компонент.

Вычисление этих характеристик по измеренным макроскопическим величинам связано с трудностями, вытекающими из отсутствия удовлетворительной теории, учитывающей колебания в плазме и ее многокомпонентный состав.

Для понимания процессов, происходящих во время перехода от слабо ионизированной плазмы к глубокой ее ионизации, одинаково важно знать как механику и электродинамику ее, т. е. условия макроскопической устойчивости, раскачку колебаний в ней, баланс газовых и магнитных давлений, так и полную картину физических явлений, связанных с ее многокомпонентным составом: диссоциацию, ионизацию и возбуждение молекул и атомов, перезарядку и рекомбинацию.

Обратим внимание на следующее. При слабой ионизации в дейтерии электроны взаимодействуют практически только с невозбужденными оболочками молекул D_2 . Этим взаимодействием определяется температура электронов, их подвижность и диффузия. Когда коэффициент ионизации подымается выше нескольких процентов, электроны все чаще встречаются с атомарными ионами D_1^+ и атомами D_1 , с молекулярными ионами D_2^+ и D_3^+ и с возбужденными молекулами D_2 . Подвижность электронов и их диффузия изменяются. Число уровней в электронных оболочках уменьшается, вследствие чего температура электронов при тех же E/p должна быть выше, чем при слабой ионизации.

Исследования этой переходной многокомпонентной плазмы ведутся рядом авторов. Интересные результаты получены Р. А. Демирхановым, но полной ясности о роли молекул и молекулярных ионов в процессе ионизации еще нет (см. также [6]).

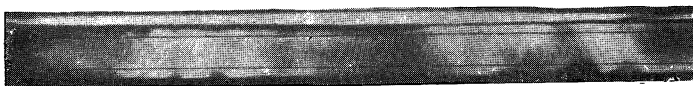
$\kappa\delta$ мм рт. ст.

$H=0$

40 0,04



25 0,1



25 0,04

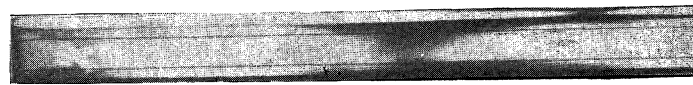


12 0,04

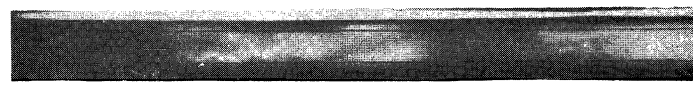


$H = 2500 \text{ э}$

40 0,04



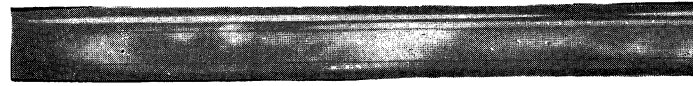
25 0,1



25 0,04

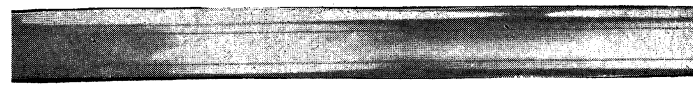


12 0,04



$H = 15000 \text{ э}$

40 0,04



25 0,04

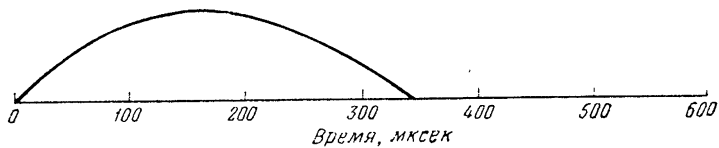
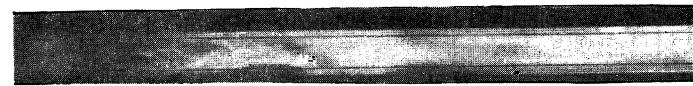


Рис. 5а. Фотографии свечения плазменного столба.

В наших опытах в подавляющем большинстве режимов ярко выражены колебания электрических и магнитных полей в плазме. Коэффициент ионизации в большинстве опытов несомненно превышает 1%. Таким образом, мы имеем дело с плазмой, для которой классическая теория проводимости весьма ненадежна. Чтобы выяснить пределы ее применимости, сравним с нею результаты наших опытов.

1.4. Зажигание разряда должно подчиняться классической теории. Мы не проводили детальных исследований условий зажигания разряда, но полученные закономерности находятся в хорошем качественном согласии с известными в литературе исследованиями газового разряда. В частности, наблюдалось явление, не возникающее при электродном разряде, но вполне понятное из представлений о развитии лавины в теории Таунсенда. А именно, если при заданном E , например $E=2$ в/см, понижать давление газа, то разряд не зажигается в нашей камере уже при давлении 0,003 мм рт. ст. Однако уменьшив напряженность электрического поля до 0,2 в/см, мы получаем устойчивое загорание разряда при давлении вплоть до 0,001 мм рт. ст. и только ниже $7 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст. разряд не загорается ни при $E=0,2$ в/см, ни при меньших E^* . Зажигание разряда при уменьшенном E легко понять, вспомнив, что коэффициент α Таунсенда имеет максимум при $\frac{E}{p} \sim 100$.

2.4. Рост концентрации электронов n_e после начала ионизации должен идти в согласии с уравнением

$$\frac{dn_e}{dt} = \alpha n_e \mu E - q,$$

где μ — подвижность электронов, q — потеря электронов в единицу времени, отнесенная к единице объема. Пренебрегая потерями и считая α , μ и E не зависящими от пространственных координат, мы можем вычислить нарастание n_e со временем, взяв по Розе [12] для дейтерия

$$\alpha = 5,1 pe^{-\frac{125p}{E}}$$

и приняв

$$\mu = \frac{e\tau}{m} \bullet$$

Величину τ мы берем так же, как в [4]. Напряженность поля E в каждый момент времени определяется по осцилло-

* При начальном поле $E = 2$ в/см в некоторый момент времени E , спадая, проходит через оптимальное значение 0,2 в/см, но разряд не развивается, так как на это не хватает времени.

граммам напряжения и формуле (2.1). Начальная концентрация электронов в объеме n_e^0 слабо меняет зависимость n_e от времени. Например, при увеличении n_e^0 в 10^4 раз, на 50-й микросекунде n_e увеличивается на 25%. Мы приняли $n_e^0 = 1 \text{ см}^{-3}$, а ток $\mathcal{J} = \pi a_0^2 \sigma E$, где

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m}.$$

На рис. 6 приведен пример расчетной и экспериментальной кривой изменения во времени тока разряда.

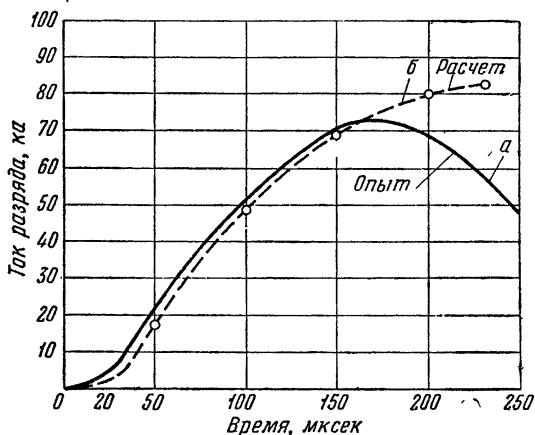


Рис. 6. Зависимость тока разряда от времени.

a — измеренный ток; *b* — вычисленное значение.

3. 4. Проводимость при $E=6,5 \text{ в/см}$ в наших опытах достигает $3,5 \cdot 10^{14} \text{ CGSE}$. При $E=0,2 \text{ в/см}$ проводимость достигала $6 \cdot 10^{14}$ при вдвое меньшем полном токе разряда. На рис. 7 приведена средняя по сечению проводимость как функция времени от начала разряда.

Характерно, что во всех режимах с продольным магнитным полем, кроме режима при $V=12 \text{ кв}$, $H=15 \text{ 000 в}$, проводимость начинает уменьшаться раньше, чем ток достигает максимального значения.

Начальный рост проводимости обусловлен тем, что коэффициент ионизации растет (рис. 8) по мере накопления электронов и ионов в столбе разряда. Падение проводимости может быть обусловлено рядом причин, однозначный выбор между которыми нельзя сделать на основе приведенных выше экспериментальных данных. Этими причинами могут быть: потеря

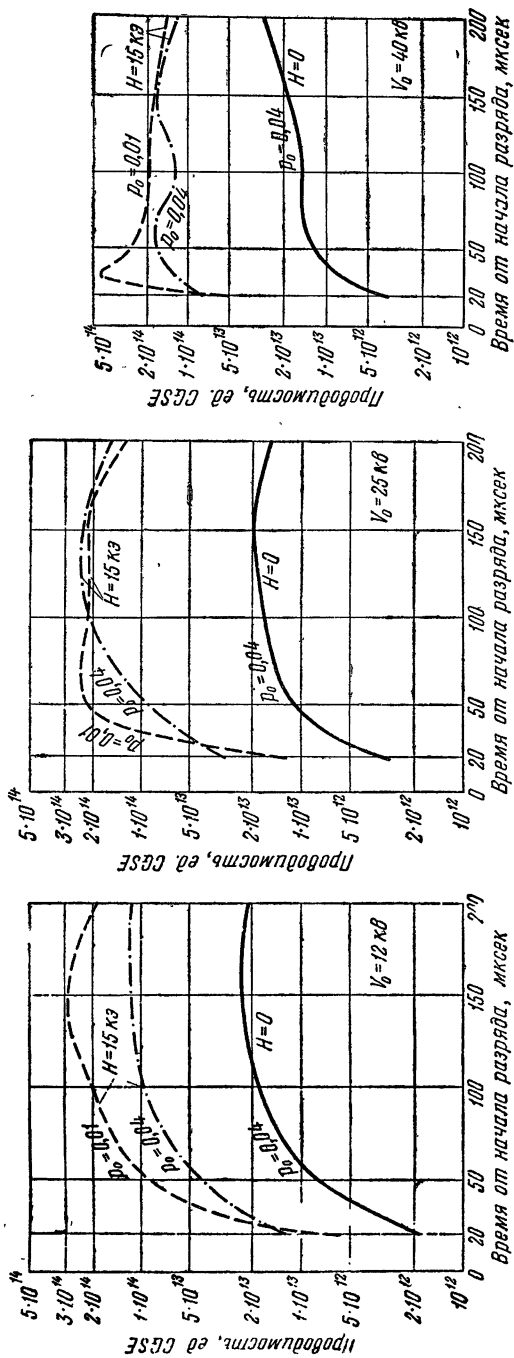


Рис. 7. Средняя по сечению проводимость столба разряда в функции времени.

макроскопической устойчивости столба; развитие плазменных колебаний; поступление в разряд холодного газа со стенок разрядной камеры.

Отметим, что во всех трех режимах с $V=12, 25$ и 40 кэ при $H=15\ 000$ э проводимость растет до одного и того же значения тока в разряде $\mathcal{I} \sim 80-100$ ка. Это значение тока хорошо соответствует условию устойчивости (1.4). Если прекращение роста проводимости обусловлено потерей устойчивости столба разряда, то надо было бы ожидать при поле 2500 э рост проводимости лишь до тока ~ 15 ка. Однако измерения показали, что проводимость при этом поле растет практически вплоть до тех же значений тока, но ее величина в $2-3$ раза меньше, чем при поле $15\ 000$ э.

4.4. Температуру электронов измеряли многие исследователи (например, [7, 8]) для плазмы с низкой концентрацией электронов и при очень низком коэффициенте ионизации ($\eta < 10^{-4}$). Для такой плазмы температура электронов является однозначной функцией E/p . Измерения В. И. Пистуневича [3], проведенные с помощью двойных зондов, показали, что в отсутствие продольного поля при относительно слабых токах температура электронов не отличается заметно от приводимой в [7] и [8]. В присутствии сильного продольного магнитного поля такие измерения выполнить не удастся. Если вычислять E/p по осциллограммам напряжения, формуле (2.1) и по начальному давлению газа, то для разрядов с $E=2$ в/см температура электронов, взятая по [7], остается в пределах 8 эв в течение всего разряда при $0,01 < p < 0,04$ мм рт. ст. При $E > 4$ в/см температура электронов, вычисленная таким же образом, достигает 10 эв и более в те моменты времени, когда проводимость плазмы заметно падает. Температура в 10 эв слишком высока для длительно существующей слабой ионизации. Это противоречие может быть объяснено как поступлением газа со стенок камеры, так и развитием плазменных колебаний. В обоих случаях эффективное E/p было бы ниже, чем вычисленное по начальному давлению газа, и, следовательно, температура электронов получалась бы также ниже 10 эв.

5.4. С целью исключить макроскопическую неустойчивость, как причину, вызывающую остановку в росте проводимости, мы провели следующую серию опытов. Или в цепь вихревой обмотки включалась дополнительная самоиндукция или вихревая обмотка питалась от конденсаторной батареи емкостью до 7000 мкф, заряжаемой до 6 кэ. Ток разряда при этом не превышал 40 ка и мог существовать в течение времени до 2000 мксек. При величине внешнего магнитного поля $15\ 000$ э проводимость нарастала до $900-$, 1000 -й микросекунды, достигая

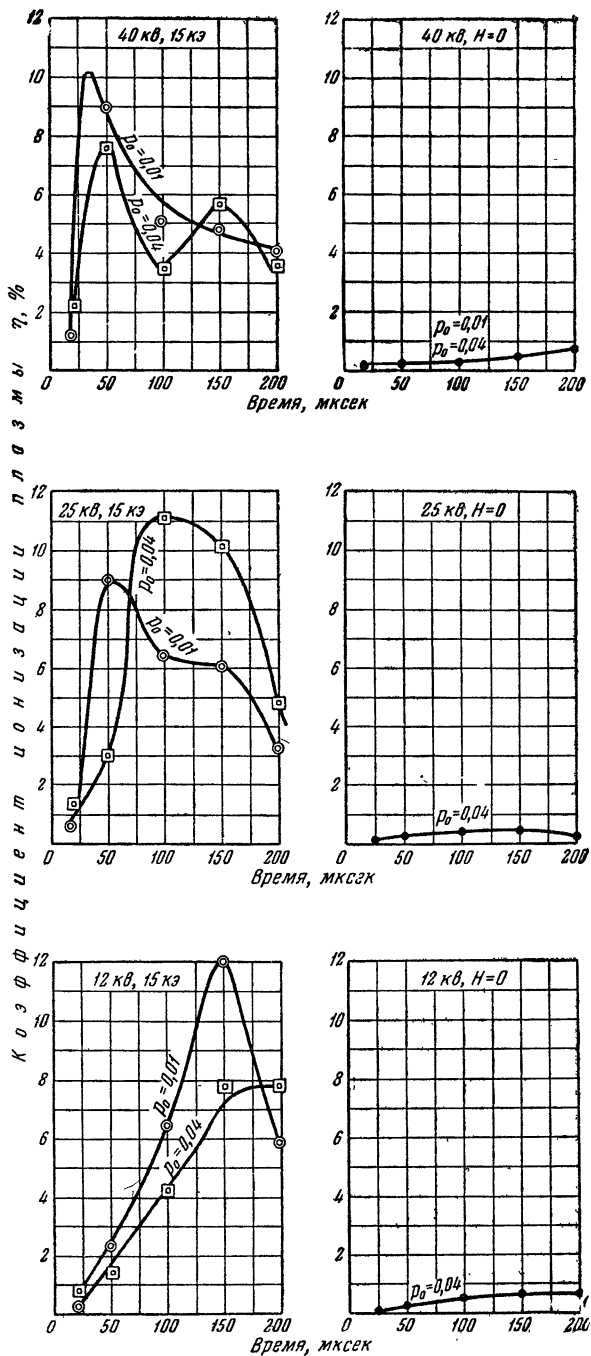


Рис. 8. Средний коэффициент ионизации, вычисленный по проводимости и температуре электронов (см. [4]).

значения $6 \cdot 10^{14}$ CGSE, после чего стремительно падала. По-видимому, рост проводимости в этих условиях прекращался под влиянием потоков холодных частиц со стенок камеры.

Заключение

Исследовался безэлектродный разряд в тороидальной камере без продольного магнитного поля и с продольным полем напряженностью до 15 000 э при электрическом поле от 0,15 до 6,5 в/см, при длительности первого полупериода протекания тока разряда от 350 до 2000 мксек и начальном давлении дейтерия от $7 \cdot 10^{-4}$ до 0,2 мм рт. ст.

1. При безэлектродном разряде в фарфоровой камере явления усложняются электризацией стенок и дрейфами, вызванными скрещенными электрическим и магнитным полями. Металлизация стенок облегчает пробой, увеличивает проводимость плазмы и приводит начальную стадию разряда в хорошее соответствие с классической теорией проводимости и известными в литературе значениями коэффициента Таунсенда α .

2. Разряд без продольного магнитного поля возникает в центре разрядной трубы; затем столб разряда расширяется и заполняет всю камеру. Скорость расширения растет с уменьшением давления и с увеличением скорости роста тока разряда. Средняя по сечению проводимость плазмы не подымается выше $3 \cdot 10^{13}$ CGSE.

3. Разряд в сильном продольном магнитном поле загорается одновременно по всему сечению трубы и не отрывается от стенок. В поле 15 000 э разряд проходит две резко различающиеся стадии. В поле 2500 э границы этих стадий размыты. В первой стадии плазма спокойна, свечение равномерно по сечению трубы, проводимость нарастает в хорошем согласии с классической теорией плазмы. Во второй стадии происходит интенсивное перераспределение плотности тока и свечения разряда по сечению и проводимость уменьшается. При поле 15 000 э первая стадия существует до величины тока в разряде, удовлетворяющей условию устойчивости (1. 4). С уменьшением поля до 2500 э первая стадия продолжает существовать до значений тока, значительно превосходящих допустимые по критерию устойчивости (1. 4).

4. Средняя проводимость в столбе разряда в магнитном поле достигает $(2-3) \cdot 10^{14}$ CGSE к моменту перехода из первой стадии во вторую.

5. Если ток разряда длительно поддерживается при значении, меньшем допустимого по критерию устойчивости, то проводимость дорастает до $6 \cdot 10^{14}$ CGSE и затем быстро падает, по-видимому, вследствие гажения стенок.

Авторы пользуются возможностью выразить свою благодарность Т. П. Чупахину и В. С. Васильевскому, сконструировавшим установку, и А. К. Спиридонову, руководившему ее изготовлением и монтажом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Д. Шафрансв. Атомная энергия, 5, 38 (1956).
 2. Н. М. Полиевктов - Николадзе, см. настоящий том, стр. 70.
 3. В. И. Пистунович, см. настоящий том, стр. 134.
 4. А. Л. Безбатченко и др. Атомная энергия, 5 (1956).
 5. D. J. Rose. Phys. Rev., 104, 273 (1956).
 6. Massey a. Burhop. Electronic and Ionic Impact Phenomena.
 7. L. J. Varnerin a. S. C. Brown. Phys. Rev., 79, 946 (1950).
 8. Hayley a. Reed. Behaviour of Slow Electrons in Gases.
-

В. И. Пистунович

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОНОВ И КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОВ ДВОЙНЫМ ПЛАВАЮЩИМ ЗОНДОМ В БЕЗЭЛЕКТРОДНОМ РАЗРЯДЕ *

В работе рассматривается возможность применения двойного плавающего зонда к изучению параметров плазмы в безэлектродном сильноточном импульсном разряде.

Приводятся значения температуры электронов, концентрации ионов и коэффициента ионизации для двух режимов: $U_{\text{зар}} = 12 \text{ кВ}$, $H_{\text{вн}} = 0$, $p = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$ и $U_{\text{зар}} = 25 \text{ кВ}$, $H_{\text{вн}} = 0$, $p = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$ при разном расположении зондов относительно оси тороидальной камеры и на различных расстояниях от центра камеры.

Введение

Импульсный разряд создавался в тороидальной фарфоровой камере, внутри которой находилась спираль из нержавеющей стали. Батарея конденсаторов разряжалась через вихревую обмотку из 12 витков, расположенных сверху и снизу фарфоровой камеры. С помощью вихревой обмотки создавалось внешнее вихревое электрическое поле, под действием которого в камере зажигался разряд. Для создания внешнего продольного магнитного поля на тороидальную камеру была намотана магнитная обмотка. Чертеж установки показан на рис. 1, а подробное описание приводится в [1].

В фарфоровой камере было сделано окно, в которое вставляли цилиндрические зонды, чтобы снимать зондовые харак-

* Работа выполнена в 1957 г.

теристики. Во всех измерениях использовался двойной плавающий зонд, преимущества которого по сравнению с обычным

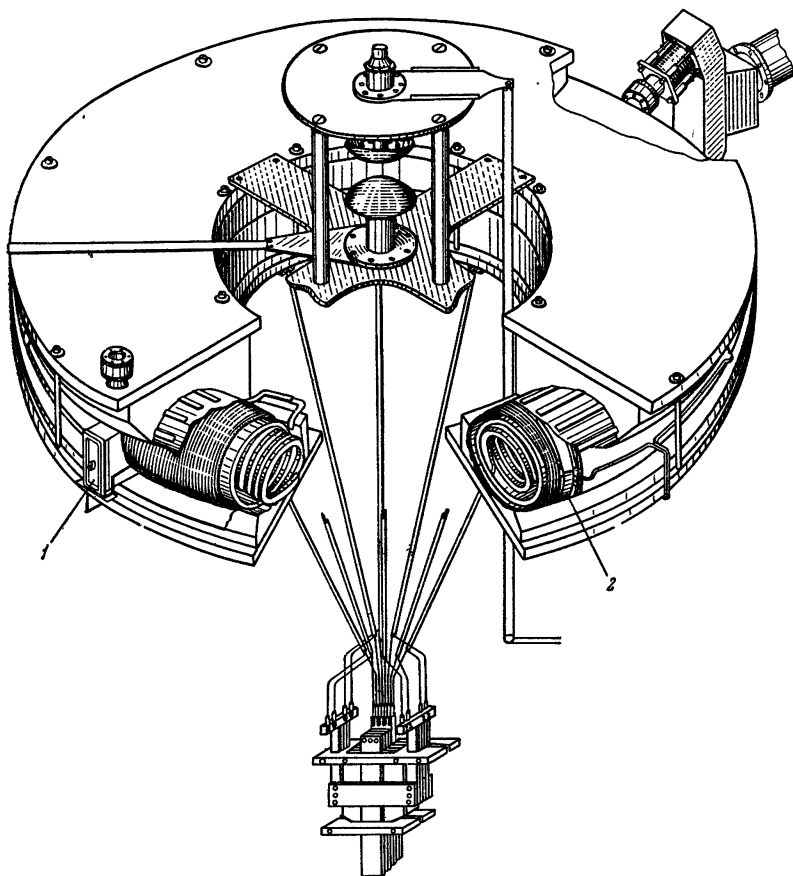


Рис. 1. Общий вид установки.

1 — окно, в которое вставлялись двойные зонды; 2 — место пояса Роговского, измеряющего полный ток разряда.

зондом будут выяснены в дальнейшем. С помощью пояса Роговского определяли ток разряда.

§ 1. Зондовые измерения

Настоящая работа представляет собой попытку непосредственного измерения параметров плазмы сильноточного безэлектродного разряда.

Как известно, одним из способов определения параметров плазмы являются зондовые измерения. В обычных условиях, когда мы имеем разряд с малой плотностью разрядного тока ($j \sim 0,5 \text{ а/см}^2$) при отсутствии внешнего магнитного поля, многими авторами (Каган и Перель, Бом и др.) были применены не вызывающие сомнений обычные методы обработки зондовых характеристик.

Однако для наших целей представляет большой интерес изучение разрядов с плотностями тока, начиная с 30 а/см^2 и выше. В этих режимах на зондах появляются беспорядочные случайные колебания напряжения. Для выяснения возможностей снятия зондовых характеристик были сделаны измерения колебаний напряжения на зондах, когда между ними не подается разность потенциалов.

Двойной зонд представлял собой две медные проволоки диаметром $0,04 \text{ см}$, пропущенные через фарфоровые трубочки с внешним диаметром $0,17 \text{ см}$. Длина кончика проволоки, выступавшей из фарфоровой трубки, была $\approx 0,45 \text{ см}$. Расстояние между зондами было $\approx 1 \text{ см}$. Зонды меньших размеров нельзя было использовать, так как они обгорали при больших плотностях разрядного тока.

Начальные и внешние условия разряда определялись напряжением $U_{\text{зар}}$, до которого заряжалась батарея конденсаторов емкостью $C = 180 \text{ мкф}$, замкнутая через разрядник на вихревую обмотку установки, давлением p дейтерия в камере установки и напряженностью $H_{\text{вн}}$ внешнего магнитного поля.

Вначале были сделаны измерения напряжения между двумя зондами, закороченными на сопротивление $R_{\text{ц}} \approx 100 \text{ ом}$, в следующем диапазоне измерения внешних параметров разряда: $U_{\text{зар}}$ от 12 до 40 кВ, p от 0,005 до 0,04 мм рт. ст.

Измерения показали, что при отсутствии внешнего магнитного поля ($H_{\text{вн}} = 0$) на зондах существуют беспорядочные случайные колебания напряжения, не зависящие от ориентации зондов относительно направления разрядного тока. Типичная осциллограмма показана на рис. 2. Относительно друг друга зонды располагались вдоль оси камеры, по φ и по r трубы тора (рис. 3). Максимальная амплитуда этих беспорядочных случайных колебаний достигает нескольких вольт; растет с увеличением напряжения $U_{\text{зар}}$ и с уменьшением давления в камере p . Были подробно исследованы зависимости колебаний на зондах от размеров самих зондов, расстояния между зондами и от величины напряженности внешнего магнитного поля.

Существенно отметить, что колебания на зондах, расположенных в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю, во всех режимах были приблизительно на порядок

больше, чем на зондах, расположенных в плоскости, параллельной внешнему магнитному полю. Все это, несомненно, представляет интерес для изучения явлений, происходящих в плазме, и выяснения природы колебаний на зондах.

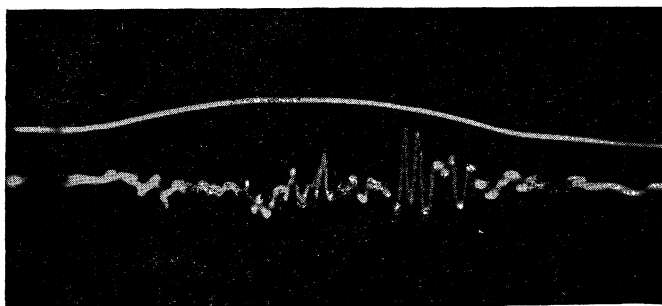


Рис. 2. Верхний луч — ток разряда, нижний луч — колебания напряжения между зондами.

Режим $U_{\text{зар}} = 12 \text{ кВ}$; $r = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$; $H_{\text{вн}} = 0$; $R_{\text{ц}} = 100 \text{ ом}$.

Однако целью настоящей работы является определение параметров плазмы (температуры электронов и плотности ионов), средних по совокупностям некоторого числа измерений в определенном объеме.

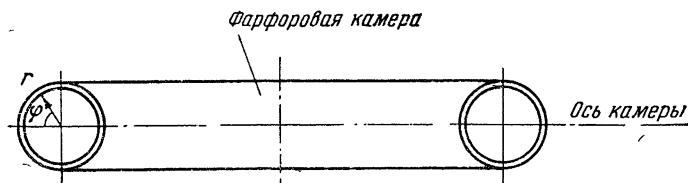


Рис. 3. Газоразрядная тороидальная камера.

При такой постановке задачи существенно знать, для каких значений внешних параметров разряда и значений сопротивления цепи зондов колебания, измеряемые зондами, будут сказываться в меньшей степени и, следовательно, усреднение будет выполнено лучшим способом. Оказалось, что этому условию хорошо удовлетворяет режим $U_{\text{зар}} = 12 \text{ кВ}$, $r = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$ и $H_{\text{вн}} = 0$. При изменении сопротивления в цепи зондов от 1 ома и ниже колебания разности потенциалов на зондах резко уменьшались и были незначительны при

$R_{\text{д}} = 0,04$ ома. Чтобы уничтожить колебания при напряжении $U_{\text{зар}} = 25$ кв и выше, нужно было ставить сопротивление в цепь зондов еще меньше.

Таким образом, колебания напряжения на зондах, вызываемые неоднородностями, которые имеются в плазме в окрестности каждого зонда, сглаживаются током через внешнюю цепь, так как ее сопротивление меньше сопротивления самой плазмы; таким образом создается некоторый объем плазмы, параметры которой (температура электронов, плотность ионов) являются усредненными в каждый момент времени.

§ 2. Метод двойного плавающего зонда

Применение двух плавающих зондов для снятия зондовой характеристики в нашем случае вызвано теми преимуществами, которыми они обладают по сравнению с обычными зондами, и конструктивными особенностями установки.

Для выбранного режима работы на установке ($U_{\text{зар}} = 12$ кв, $p = 0,04$ мм рт. ст. и $H_{\text{вн}} = 0$) общий разрядный ток $\mathcal{J}_{\text{раз}} = 13,6$ ка; максимальное магнитное поле этого тока на радиусе 6 см $H_{\text{в}} = 450$ э; ларморовский радиус электронов при температуре $T_{\text{э}} = 4$ эв будет $r_{\text{э}} \approx 0,015$ см; считая ионы холодными (с тепловыми скоростями), для них получим ларморовский радиус $r_{\text{д}}^+ = 0,12 \div 0,07$ см.

Таким образом, при диаметре зондов $d = 0,04$ см ларморовский радиус ионов в $2 \div 3$ раза больше диаметра зонда, а ларморовский радиус электронов в $2 \div 3$ раза меньше размеров зонда. При работе же с двойным зондом определяющим является ионный ток насыщения на зонды. В нашем случае ионы не замагничены, а замагниченность электронов является несущественной, так как даже при напряженности магнитного поля ~ 4000 э электронный ток в несколько раз превышает ионный ток [2]; электроны необходимы лишь для полной компенсации ионного тока насыщения.

Работа с ионным током насыщения обладает еще и тем преимуществом, что на зонд идет значительно меньший ток, нежели в случае обычного зонда, а это оказывается существенным при больших плотностях разрядного тока, когда зонд может обгорать во время разряда.

Следует отметить, что величина слоя зарядов около зондов, по всей вероятности, меньше размеров зонда, так как мы имеем плотную плазму с концентрацией 10^{14} ионов/см³, т. е. на несколько порядков больше той, с которой работали многие авторы.

Следовательно, предполагая, что ионизация в слое около зондов и вторичная эмиссия с зондов незначительны (что яв-

ляется вполне естественным при малых размерах слоя, небольшой температуре электронов и ионов), имеем случай, когда зондовые характеристики должны обладать насыщением и поэтому для их обработки будут пригодны обычные методы; здесь имеется в виду определение некоторых средних параметров плазмы в данном месте разряда.

Каким образом будет сказываться подобное усреднение на измеряемые величины, можно оценить, снимая зондовые характеристики различными способами.

Первый из них состоит в том, что характеристика снимается за большое число импульсных разрядов (для данного напряжения между зондами 3 ÷ 5 раз пробивают разрядную камеру, меняют напряжение и аналогично снимают всю кривую; из

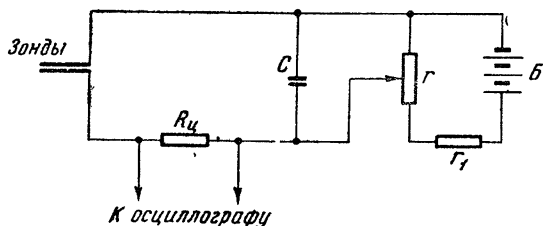


Рис. 4.

осциллограмм определяется величина тока между зондами для определенного момента времени и строится характеристика). Схема измерения показана на рис. 4. Величина емкости C выбиралась так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{\omega C} \ll R_{ц}$ для основной частоты разряда.

В этом случае мы имеем зондовую характеристику для одного и того же момента времени от начала разряда, но усредненную по совокупностям меняющихся от одного пробоя газа к другому величин в данном месте разрядной камеры.

Во втором случае характеристика снимается в течение одного импульсного разряда. В определенный момент времени от начала разряда на зонды подается напряжение, возрастающее за 20 мксек от 0 до 30 в. Полученная таким образом зондовая характеристика является средней для данного объемчика, где находятся зонды, за время ~ 20 мксек (полупериод тока разряда составляет 300 мксек).

На рис. 5 показана схема измерения для снятия зондовых характеристик за один импульсный разряд.

От схемы запуска установки (рис. 6) запускался генератор пилообразных колебаний (ГПК), который через определенное время после начала разряда (время задержки генератора

можно было плавно регулировать от 50 до 215 мксек относительно начала разряда) подавал на зонды импульс возрастающего напряжения. Запускающая осциллограф № 1 от схемы генератора пилообразных колебаний, можно было на экране соответственно на первом и втором лучах видеть одновременное изменение зондового тока и напряжения. Момент подачи напряжения на зонды (момент начала зондовой характеристики) фиксировался на осциллографе № 2, первый луч которого записывал ток разряда, а второй — напряжение между зондами. Запускался осциллограф № 2 от схемы запуска установки.

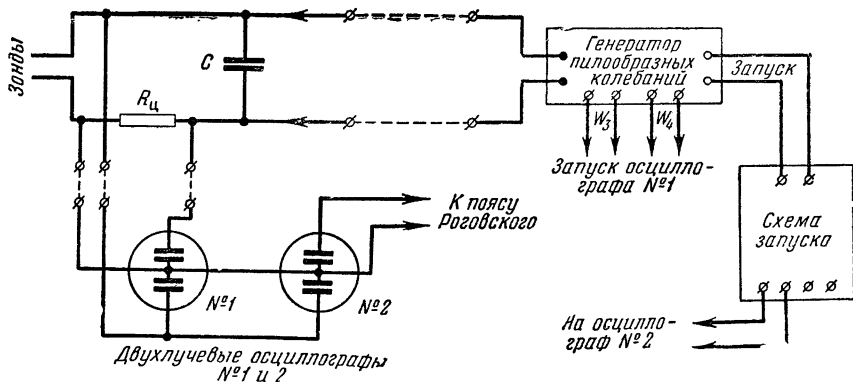


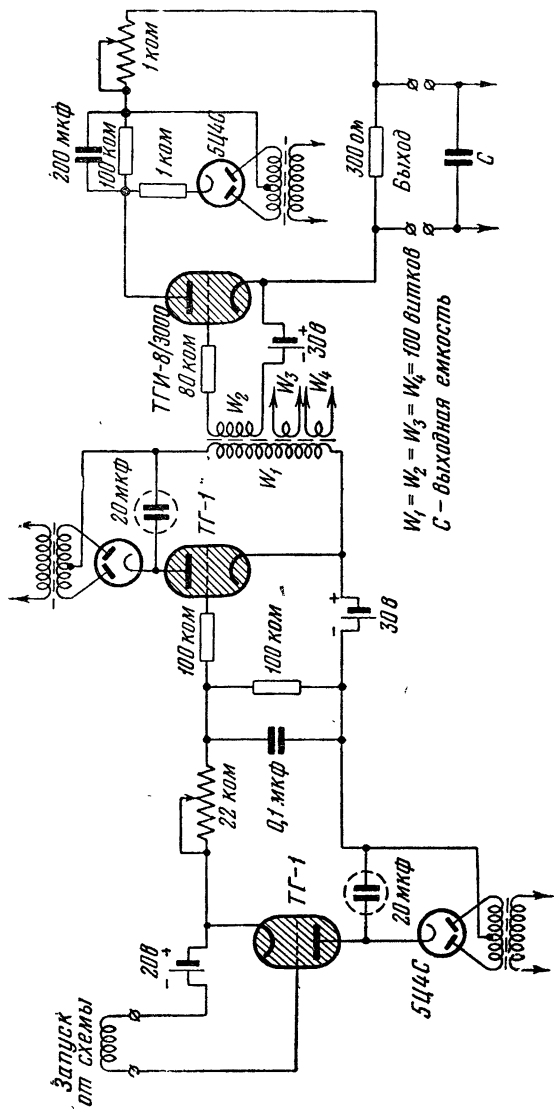
Рис. 5.

Особенностью генератора пилообразных колебаний было то, что он давал мощные импульсы возрастающего напряжения с крутым фронтом, максимальная величина которых достигала 70 в при сопротивлении нагрузки (сопротивлении цепи зондов $R_{ц}$) $\sim 0,04$ ома.

Можно было фотографировать ток на зонды при напряжении между ними U_a от 0 до 70 в. Для нас же интересным было поведение зондовых характеристик до $U_a \sim 40$ в, поэтому развертку осциллографа подбирали так, чтобы видеть нужный нам отрезок характеристики. Осциллограммы, снятые для различных режимов, приведены на рис. 7. (Верхний луч осциллографа записывает ток между зондами, нижний луч — напряжение между зондами; резкое увеличение тока между зондами — пробой — происходит при $U_a \sim 50$ в.)

Обработка характеристики двойного плавающего зонда состоит в следующем (см. [3, 4]). Предполагается, что электроны имеют максвелловское распределение по энергиям.

Пусть: U_a — потенциал между двумя зондами; U_1 — потенциал первого зонда относительно плазмы; U_2 — потенциал



$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 100$ витков
 C - выходная емкость

Рис. 6.

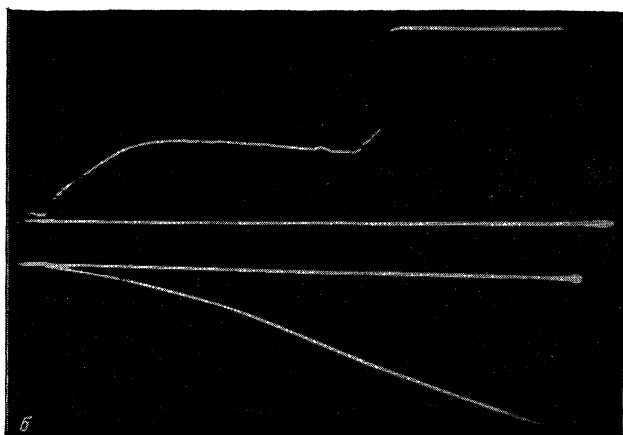
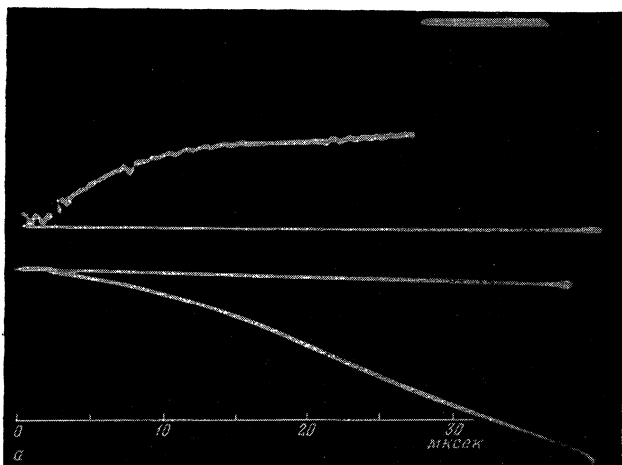


Рис. 7.

а — верхний луч — ток между зондами (i_d), нижний луч —
напряжение между зондами (U_d), приложенное в момент вре-
мени $t = 115$ мксек относительно начала разряда. Режим:
 $U_{зар} = 12$ кэ; $p = 0,04$ мм рт. ст.; $H_{ВН} = 0$; б — верхний луч —
 i_d , нижний луч — U_d в момент времени $t = 215$ мксек. Режим:
 $U_{зар} = 12$ кэ; $p = 0,04$ мм рт. ст.; $H_{ВН} = 0$

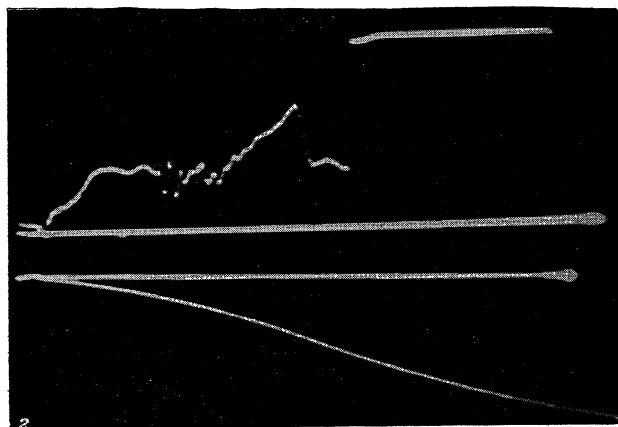
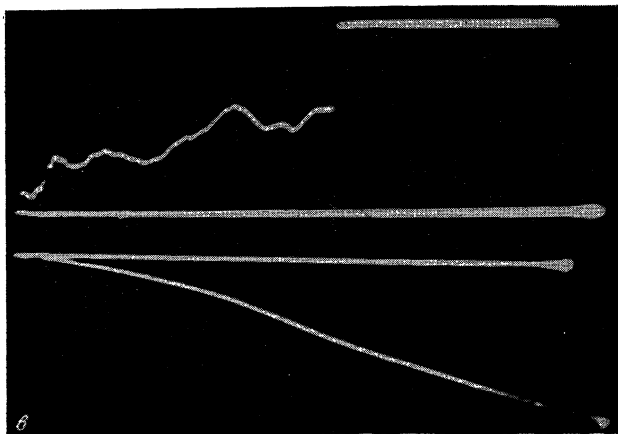


Рис. 7.

ϵ — верхний луч — i_d , нижний луч — U_d в момент времени $t = 50$ мксек. Режим: $U_{\text{зар}} = 25$ кэ; $p = 0,04$ мм рт. ст.; $H_{\text{ВН}} = 0$;
 ϵ' — верхний луч — i_d , нижний луч — U_d в момент $t = 1$ мксек.
 Режим: $U_{\text{зар}} = 25$ кэ; $p = 0,04$ мм рт. ст.; $H_{\text{ВН}} = 0$

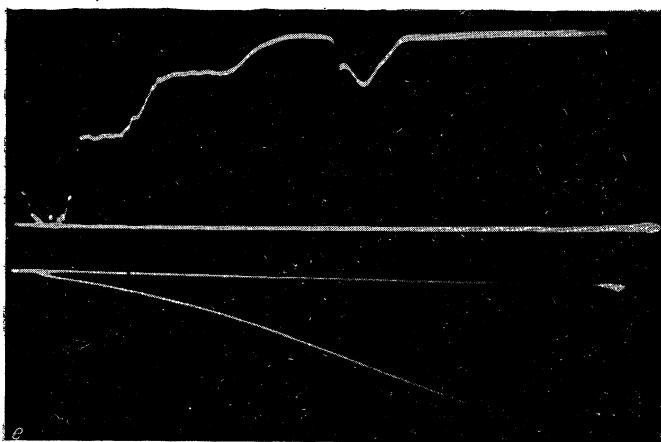
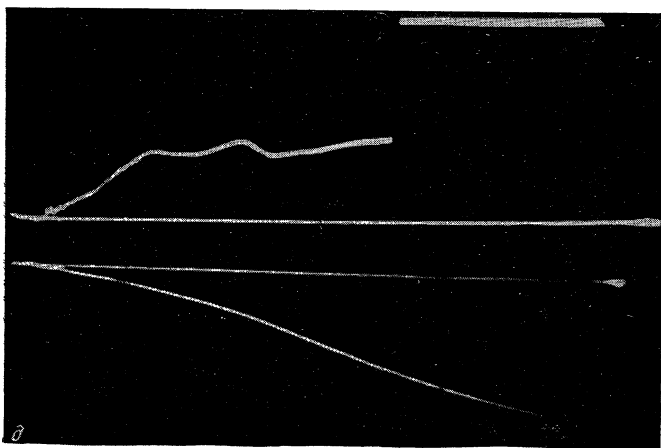


Рис. 7.

а — $U_{\text{зар}} = 25 \text{ кВ}$; $p = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$; $H_{\text{ВН}} = 0$; $t = 215 \text{ мксек}$;
 б — $U_{\text{зар}} = 40 \text{ кВ}$; $p = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$; $H_{\text{ВН}} = 0$; $t = 115 \text{ мксек}$.

второго зонда относительно плазмы; U_c — потенциал между участками плазмы в окрестности первого и второго зондов (неоднородности плазмы в окрестности зондов); i^+ — ионный ток на один из зондов; i^- — электронный ток на один из зондов; i_d — ток между зондами; \mathcal{J}^- — электронный ток на зонд, находящийся при потенциале плазмы; T_- — температура электронов.

Тогда для потенциалов и токов можно написать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} U_1 - U_2 &= U_d - U_c; & (a) \\ i_1^+ + i_2^+ &= i_1^- + i_2^-; & (б) \\ i_d &= i_2^- - i_2^+; & (в) \\ i_1^- &= \mathcal{J}_1^- e^{-\frac{eU_1}{kT_-}}; \quad i_2^- = \mathcal{J}_2^- e^{-\frac{eU_2}{kT_-}}; & (г) \end{aligned} \right\} (1)$$

Преобразуя выражение (б), подставляя в него (а) и (в) и логарифмируя, получим:

$$\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^2 i_i^+}{i_2^-} - 1 \right) = \ln C - \frac{e}{kT_-} U_d, \quad C = \frac{\mathcal{J}_1^-}{\mathcal{J}_2^-} e^{\frac{eU_c}{kT_-}}; \dots \quad (2)$$

Используя (2), строим зондовую характеристику в логарифмическом масштабе и определяем температуру электронов из наклона характеристики.

Когда обе ветви характеристики близки к симметричным, то для быстроты получения характеристик и удобства их обработки можно использовать следующие, в принципе, аналогичные же соображения.

Пусть

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + \Delta U_1, \\ U_2 &= U_0 - \Delta U_2 \end{aligned}$$

где U_0 — некоторое фиксированное значение потенциала
Тогда:

$$\left. \begin{aligned} U_d &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + U_c; & (a) \\ i_1^+ + i_2^+ &= i_1^- + i_2^-; & (б) \\ i_d &= i_2^- - i_2^+; & (в) \\ i_2^- &= \mathcal{J}_2^- e^{-\frac{eU_2}{kT_-}}; & (г) \end{aligned} \right\} (1')$$

Преобразуя (1'), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta U_2}{dU_d} &= 1 - \frac{d\Delta U_1}{dU_d}; & (a) \\ i_1^+ + i_2^+ &= i_1^- + \frac{kT_-}{e} \left(\frac{di_d}{dU_d} + \frac{di_2^+}{dU_d} \right) \cdot \frac{1}{\frac{d\Delta U_2}{dU_d}}; & (б) \\ i_2^- &= \frac{kT_-}{e} \cdot \frac{dU_d}{d\Delta U_2} \left(\frac{di_d}{dU_d} + \frac{di_2^+}{dU_d} \right); & (в) \\ i_2^- &= \mathcal{J}_2^- e^{-\frac{e}{kT_-} U_2}; & (г) \end{aligned} \right\}$$

При $U_d = U_c$ выражение (б) примет вид:

$$\begin{aligned} & i_1^+ \Big|_{U_d=U_c} + i_2^+ \Big|_{U_d=U_c} = \\ &= \frac{kT}{e} \left(\frac{di_d}{dU_d} + \frac{di_2^+}{dU_d} \right) \Big|_{U_d=U_c} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{d\Delta U_1}{dU_d}} \right) \Big|_{U_d=U_c} + i_1^- \Big|_{U_d=U_c}; \end{aligned} \quad (3)$$

Но так как

$$i_1^+ \Big|_{U_d=U_c} = i_1^- \Big|_{U_d=U_c}; \quad \frac{d\Delta U_1}{dU_d} \Big|_{U_d=U_c} \approx \frac{d\Delta U_2}{dU_d} \Big|_{U_d=U_c},$$

то будем иметь:

$$T_- = \frac{e}{2k} \cdot \frac{i_2^+}{\frac{di_d}{dU_d} + \frac{di_2^+}{dU_d}} \Big|_{U_d=U_c}; \quad \dots \quad (3')$$

Концентрацию ионов в нашем случае можно оценивать по формуле, полученной Бомом [2] для максимального ионного тока на зонд:

$$\mathcal{J}_+ = 0,4 \cdot n_+ \sqrt{\frac{2kT_-}{m_+}} \cdot A \dots, \quad (4)$$

где A — собирающая поверхность зонда.

Чтобы получить нижние значения концентрации ионов, положим $A \sim 1,5 \cdot S$, где S — действительная площадь зонда.

Тогда будем иметь:

$$n_+ = 1,6 \cdot 10^{14} \frac{\mathcal{J}(a)}{\sqrt{T_-} \cdot (e\theta)} \text{ ионов/см}^3; \quad (5)$$

Критерием применимости этой формулы является условие $T_+ < T_-$ и степень замагниченности ионов, о величине которой можно судить по наличию или отсутствию насыщения зондовой характеристики.

§ 3. Результаты изменений

Вначале были сняты характеристики двойного зонда, расположенного вдоль оси тороидальной камеры (см. рис. 3), за несколько импульсных разрядов при различных сопро-

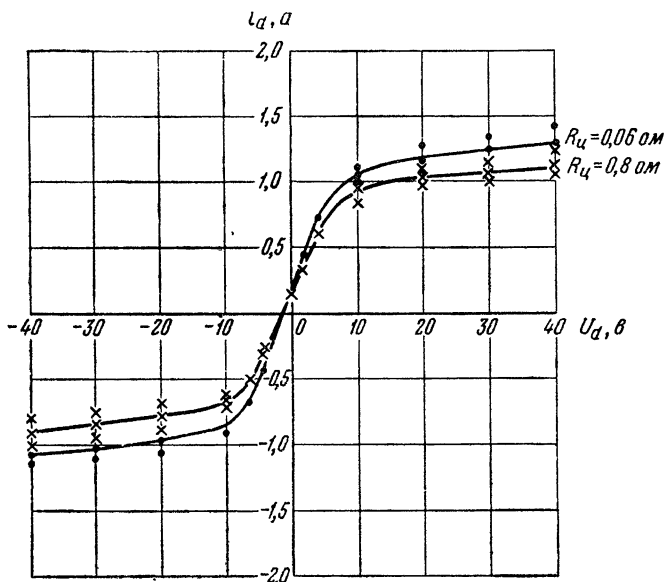


Рис. 8.

тивлениях цепи зондов R_d . Как видно из рис. 8, при изменении сопротивления R_d больше чем в 10 раз характеристика изменилась лишь на 10%, т. е. порядка величины ошибки данного способа измерений. Это в свою очередь незначительно сказывается на величине температуры электронов при обработке этих характеристик [см. формулы (2) и (3')]. Из рисунка видно, что ионный ток на зонды имеет насыщение.

Характеристики зондов, расположенных по разным направлениям, показаны на рис. 9. Они сняты с помощью генератора пилообразных колебаний в момент времени $t = 115 \text{ мксек}$ от начала разряда (что соответствует максимуму разрядного

тока). Каждая кривая является средней из пяти, снятых при разных импульсных разрядах в данном режиме.

Измерения, приведенные на рис. 8 и 9, были обработаны по формулам (2) (см. рис. 10) и (3'). Оказалось, что если учесть несимметрию правой и левой ветвей зондовой характеристики (что достигается параллельным переносом оси абсцисс), то результаты обработок с помощью обеих формул совпадают с хорошей точностью.

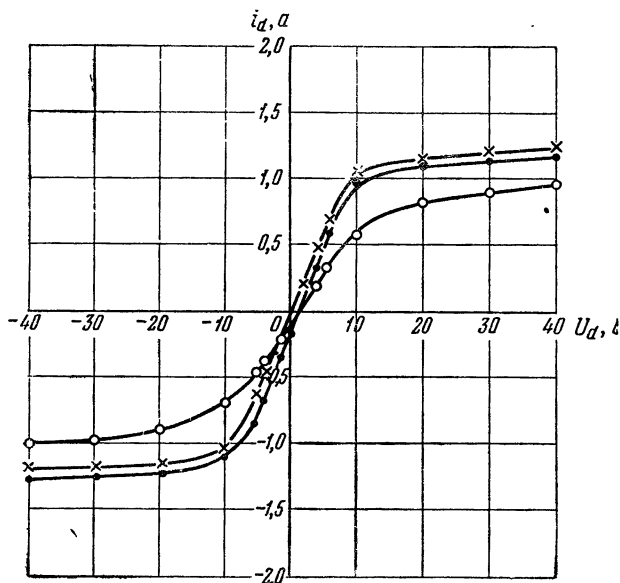


Рис. 9.

● — зонды 1—3 расположены по углу φ камеры; × — зонды 2—3 расположены по оси камеры; ○ — зонды 4—5 расположены по радиусу камеры

Это позволило нам в дальнейшем обрабатывать лишь одну ветвь зондовой характеристики по формуле (3') с учетом ее несимметрии, что сократило время обработки. Ниже будут приводиться правые ветви подобных характеристик.

В режиме $U_{зар} = 12$ кВ, $p = 0,04$ мм рт. ст. и $H_{вн} = 0$ зондовые характеристики снимались не только при различных $R_{ц}$ и при разных расположениях зондов, но и для одной ориентации зондов в различные моменты времени относительно начала разряда и при разных расстояниях зондов от центра камеры. На рис. 11 показаны характеристики для зондов, расположенных вдоль оси камеры, в момент $t =$

≈ 115 мксек от начала разряда при $R_{ц} = 0,69$ ома. Разброс между верхней и нижней характеристиками соответствует

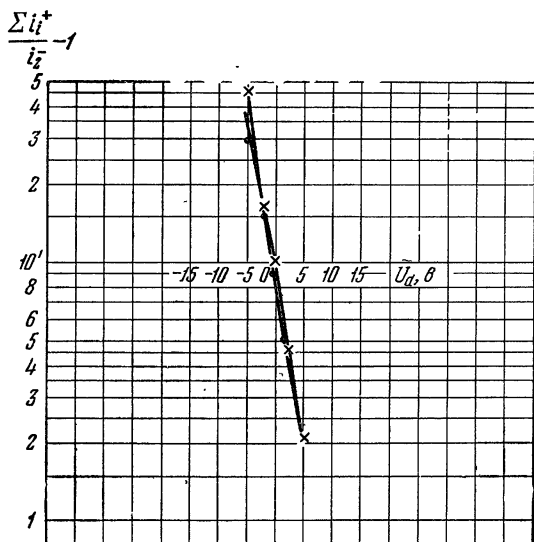


Рис. 10.

пяти импульсным разрядам в данном режиме. Из сравнения рис. 9 и 11 можно заключить, что говорить о каком-то

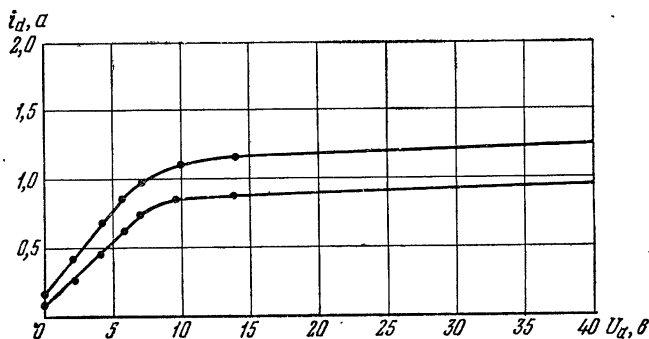


Рис. 11.

принципиальном отличии характеристики зондов, расположенных по радиусу камеры, от остальных кривых не имеет смысла, так как разброс характеристик от разряда к разряду — того же порядка, что и разброс для зондов, по разному ориентированных. Влияние этого разброса на величину

определяемой температуры электронов незначительно, так как уменьшение тока насыщения ионов связано с уменьшением наклона начальной части характеристики, а в фор-

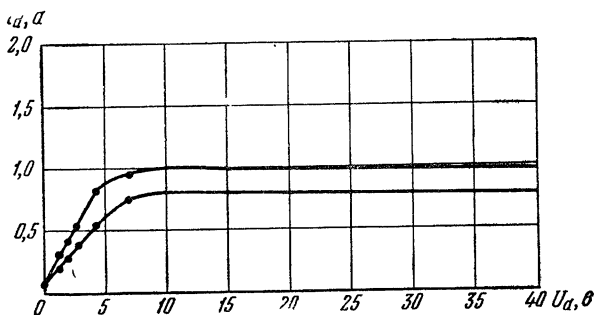


Рис. 12.

муле (3') они действуют с одинаковым весом в разные стороны.

Разброс зондовых характеристик, снятых в момент времени $t = 215$ мксек от начала разряда, показан на рис. 12.

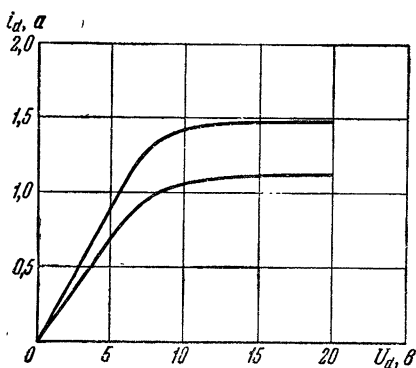


Рис. 13.

Уменьшение тока насыщения ионов с увеличением напряжения между зондами связано здесь, по всей вероятности, с тем, что уменьшается ток разряда во времени. Были сняты характеристики зондов, расположенных по оси камеры, в случае, когда зонды находились в центре тороидальной камеры (радиус камеры до металлической спирали $R \approx 11$ см), на расстояниях $r \approx 6$ см и $r \approx 7$ см.

Оказалось, что температура электронов существенно не меняется по сечению.

На рис. 13 приведен разброс зондовых характеристик с зондов, расположенных по оси камеры и помещенных в центре камеры, для момента времени $t = 115$ мксек при $R_{ц} = 0,69$ ома. Все остальные приводимые в отчете кривые относятся к случаю, когда зонды находятся на расстоянии $r \approx 6$ см от центра. Для расстояния $r \approx 7$ см приводятся значения температуры электронов и плотности (величина плотности вычисляется по формуле (5)).

Таблица 1

Режим: $U_{\text{зар}} = 12 \text{ кВ}$; $p = 0,04 \text{ мм рт. ст.}$ ($n_0 = 2,8 \cdot 10^{15} \text{ атомов/см}^3$); $N_{\text{вн}} = 0$

характеристики снимались вторым способом в момент $t = 115 \text{ мксек}$		характеристики снимались вторым способом в момент $t = 215 \text{ мксек}$		$r = 7 \text{ см}$		
		$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$			
характеристики снимались вторым способом в момент $t = 115 \text{ мксек}$		характеристики снимались вторым способом в момент $t = 215 \text{ мксек}$		$r = 6 \text{ см}$		
$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,06 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,06 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$			
характеристики снимались первым способом		характеристики снимались вторым способом в момент $t = 115 \text{ мксек}$		$r = 7 \text{ см}$		
$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,8 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$	$R_{\text{Ц}} = 0,69 \text{ ом}$			
определяемые параметры		зонды по оси камеры		характеристики снимались вторым способом в момент $t = 115 \text{ мксек}$		
		зонды по углу φ	зонды по радиусу камеры			
		зонды по оси камеры	зонды по радиусу камеры	характеристики снимались вторым способом в момент $t = 115 \text{ мксек}$		
		зонды по углу φ	зонды по радиусу камеры			
$T_- (\text{св})$	4,4	3,5	4	4,9	3,5	4
$\mathcal{E}_+ (a)$	1,3	1,1	1	1,05	0,87	1
n_+ (ионов/см ³)	$1 \cdot 10^{14}$	$0,9 \cdot 10^{14}$	$0,8 \cdot 10^{14}$	$0,9 \cdot 10^{14}$	$0,8 \cdot 10^{14}$	$0,7 \cdot 10^{14}$
$\eta, \%$	3,5	3,3	2,8	3,2	2,7	2,8

Ниже приводятся значения T_- , n_+ и коэффициента ионизации для режима $U_{\text{зар}} = 12$ кВ, $p = 0,04$ мм рт. ст. ($n_0 = 2,8 \cdot 10^{15}$ атомов/см³) и $H_{\text{вн}} = 0$. При обработке зондовых характеристик применяется во внимание то обстоятельство, что ионный ток на зонд мало меняется при изменении U_d около нуля (что следует непосредственно из зондовой характеристики обычного зонда), поэтому для получения величины $i^+ / U_d = U_c$ экстраполируется участок насыщения характеристики в область U_d около нуля.

Если обозначить через: r — расстояние от центра камеры до двойного зонда; \mathcal{J}_+ — средний в области изменения напряжения между зондами U_d от 20 до 40 в ионный ток насыщения на зонд с учетом несимметрии характеристик и η — коэффициент ионизации, то результаты можно свести в табл. 1.

Дальше была сделана попытка снять зондовые характеристики в других режимах, т. е. при $U_{\text{зар}} = 25$ кВ и $U_{\text{зар}} = 40$ кВ.

Значение напряженности магнитного поля тока разряда и ларморовского радиуса электронов и ионов в этих режимах приведены в табл. 2. Напряженность магнитного поля вычисляли по формуле

$$H_{\text{тока}} = \frac{0,2\mathcal{J}_{\text{раз}}(\text{max})}{r}, \text{ где } r = 6 \text{ см}$$

Т а б л и ц а 2

$U_{\text{зар}}$ (кВ)	12	25	40
$\mathcal{J}_{\text{раз}}$ (max) (ка)	13,6	27,9	37,1
$H_{\text{тока}}$ (э)	450	530	1230
r_- (см) при $T_- = 4$ эВ	0,015	0,007	0,005
r_{D+} (см) при $T_{D+} = \frac{1}{16}$ эВ	0,120	0,054	0,041
r_{D+} (см) при $T_{D+} = \frac{1}{40}$ эВ	0,070	0,034	0,026

На рис. 14 и 15 показаны характеристики, снятые при $U_{\text{зар}} = 25$ кВ, $R_{\text{ц}} = 0,06$ ома для зондов, расположенных по оси и по радиусу тороидальной камеры. На этих рисунках приведены по три кривых, каждая из которых является средней характеристикой за пять разрядов. Следует отметить, что разброс величины тока насыщения от разряда

к разряду был $\sim 30\%$, в то время как разброс при $U_{\text{зар}} = 12 \text{ кВ}$ был $\sim 20\%$ от средней величины ионного тока насыщения.

Как уже отмечалось, это мало сказывается на величине T_+ , но значительно сильнее чувствуется при определении вели-

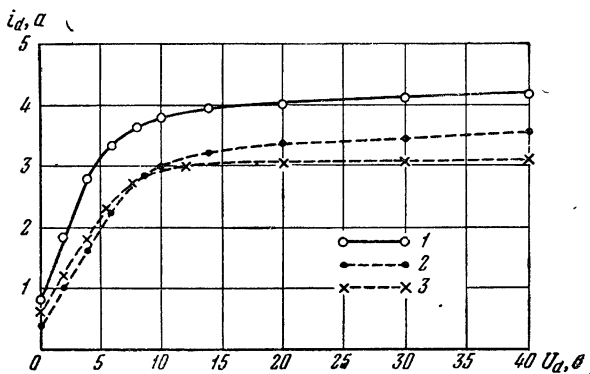


Рис. 14.

1 — характеристика снимается в $t = 115 \text{ мксек}$; 2 — то же, $t = 50 \text{ мксек}$; 3 — то же, $t = 215 \text{ мксек}$.

чины плотности n_+ . На рис. 14 и 15 приведены зондовые характеристики, полученные в различные моменты времени отно-

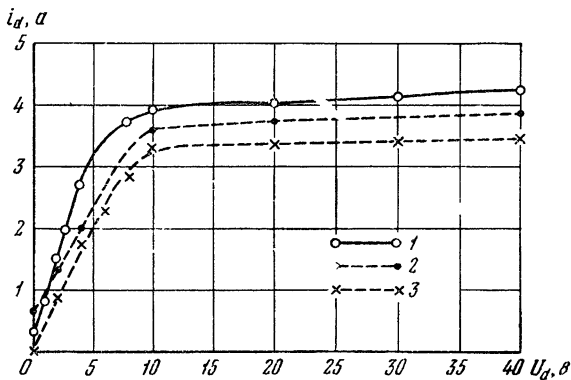


Рис. 15.

Обозначения те же, что на рис. 14.

сительно начала разряда. Естественно, что ток насыщения ионов на зонд оказывается больше в момент максимума тока разряда ($t = 115 \text{ мксек}$), нежели в другие моменты времени.

Результаты зондовых измерений при $U_{\text{зар}} = 25 \text{ кВ}$ приведены в табл. 3. О том, сколь справедливы эти измерения, можно судить по насыщению ионного тока на зондовых

характеристиках. Насыщение в режиме $U_{\text{зар}} = 25$ кэ, вероятно, можно объяснить тем, что ионы имеют температуру, несколько отличную от комнатной, и еще не замагничены, или же замагниченность не существенна, так как в разряде существуют большие флуктуации плотности. При увеличении $U_{\text{зар}}$ флуктуации становятся более мощными и нужно сопротивление $R_{\text{ц}}$ меньше, чем 0,06 ома, чтобы их усреднить. Это отчетливо видно при $U_{\text{зар}} = 40$ кэ, когда разброс в зондовых характеристиках достигает 40% и нет насыщения ионного тока.

Таблица 3

Режим: $U_{\text{зар}} = 25$ кэ, $p = 0,04$ мм рт. ст. ($n_0 = 2,8 \cdot 10^{15}$ атомов/см³);

$$H_{\text{вн}} = 0; E_{\text{ц}} = 0,06 \text{ ома}$$

Измеряемые параметры	Зонды расположены по оси камеры			Зонды расположены по радиусу камеры		
	Момент запуска ГПК			Момент запуска ГПК		
	$t=50$ мксек	$t=115$ мксек	$t=215$ мксек	$t=50$ мксек	$t=115$ мксек	$t=215$ мксек
T_- (эв)	6	5	5,5	5	4	3,5
J_+ (а)	3,2	3,7	2,8	3,5	3,9	3,3
n_+ (ионов/см ³)	$2,1 \cdot 10^{14}$	$2,6 \cdot 10^{14}$	$1,9 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{14}$	$3,1 \cdot 10^{14}$	$2,8 \cdot 10^{14}$
ζ , %	7,4	9,2	6,7	8,8	11	10

Существенно заметить, что при увеличении $U_{\text{зар}}$ приблизительно в два раза (от 12 до 25 кэ) ток разряда меняется также приблизительно в два раза (с 13,6 до 27,9 ка), и ток насыщения на зонды увеличивается в $3 \div 4$ раза. При $U_{\text{зар}} = 40$ кэ разрядный ток возрастает приблизительно в 2,7 раза по сравнению с режимом $U_{\text{зар}} = 12$ кэ, а средний ионный ток на зонды при $U_d = 30$ в увеличивается в $6 \div 6,5$ раза.

Это наводит на мысль, что рост макроскопического тока разряда втрое значительно сильнее увеличивает концентрацию ионов в отдельных местах камеры. Об этом же косвенно свидетельствуют фотографии разряда, снятые фоторегистратором.

Были сделаны попытки снять зондовые характеристики при режиме $U_{\text{зар}} = 12$ кэ, $p = 0,04$ мм рт. ст. и $H_{\text{вн}} = 2500$ э или $H_{\text{вн}} = 5000$ э. В этом случае оказалось, что зондовые

характеристики не имеют насыщения (что было естественным ожидать), и ток между зондами растет с увеличением напряжения U_d .

Выводы

Результаты работы можно свести к следующему:

1. Определены значения электронной температуры, плотности ионов и коэффициента ионизации разряда в тороидальной камере для режимов $U_{зар} = 12$ и 25 кВ, $p = 0,04$ мм рт. ст. и $H_{вн} = 0$, полученные обработкой характеристик двойного плавающего зонда, имеющих насыщение.

2. Показано, что усреднение электрических флуктуаций в плазме с помощью малого сопротивления в цепи зондов не сильно сказывается на результатах измерений температуры электронов.

3. Измерения температуры электронов и плотности ионов на различных расстояниях от центра камеры показали, что определяемые параметры плазмы мало меняются в данном сечении тороидальной камеры.

4. Параметры плазмы не меняются (в пределах ошибок измерения и разброса зондовых характеристик от разряда к разряду) в зависимости от ориентации двойного зонда относительно оси камеры.

5. Показана возможность применения двойного плавающего зонда для измерения температуры электронов и плотности ионов плазмы при наличии магнитного поля до 1000 э.

В заключение автор благодарит Г. А. Егоренкова — за помощь в проведении измерений, А. Л. Безбатченко и Н. Д. Ключникова — за разработку и монтаж схемы генератора пилообразных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Безбатченко, И. Н. Головиц, П. И. Козлов, В. С. Стрелков, Н. Я. Явлинский, см. настоящий том, стр. 116.
2. The characteristics of electrical discharge in magnetic fields. Edited by A. Guthrie and R. K. Wakerling, 1949.
3. Л. Биберман, Б. Папин. ЖТФ, 21, 12 (1951).
4. E. O. Johnson and L. Malter. Phys. Rev., 80, 1, 58 (1950).

В. С. Стрелков

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЙ БЕЗЭЛЕКТРОДНОГО РАЗРЯДА В ДЕЙТЕРИИ *

Описываются опыты по исследованию излучения безэлектродного импульсного разряда в видимой и рентгеновской частях спектра. Рентгеновское излучение возникает вследствие торможения ускоренных электронов в материале мишени или стенок разрядной камеры. Определена область возникновения и средняя энергия ускоренных электронов.

Экспериментально определена зависимость интенсивности спектральных линий дейтерия и кремния в видимой части спектра от времени.

Исследование излучений безэлектродного импульсного разряда выполнены на установке с тороидальной камерой, описанной в [1].

§ 1. Рентгеновское излучение

При протекании тока через газ энергия электрического поля передается в основном электронам, которые отдают ее ионам путем столкновений. Вследствие того, что полное эффективное сечение столкновений достигает максимума при определенном значении относительной скорости частиц и убывает с дальнейшим ростом скорости, в разряде будет иметься некоторое количество электронов, которые, пройдя без столкновений несколько средних длин свободного пробега, будут ускоряться и в дальнейшем. Количество таких электронов будет зависеть от плотности газа, напряженности электрического поля и времени существования ускоренных электронов в камере.

* Работа выполнена в 1958 г.

Рассмотрение условий передачи энергии от электронов к ионам для случая шнура с током, в котором газовое давление уравновешивается давлением собственного магнитного поля тока, приводит к следующему условию равенства температур ионов и электронов:

$$\eta N > 2 \cdot 10^{16},$$

где N — полное число частиц в сечении шнура, а η — так называемый коэффициент использования тока [2]. Это условие для нашей камеры можно записать в виде

$$\eta p > 0,001 \text{ мм рт. ст.},$$

где p — начальное давление газа. В случае оторванного шнура в сильном поле $\eta = \frac{1}{2}$ и условие равенства температур дает $p > 0,002 \text{ мм рт. ст.}$ Если шнур взаимодействует со стенками, то, с одной стороны, $\eta < \frac{1}{2}$, а с другой — взаимодействие со стенками приводит к увеличению числа частиц в объеме за счет испарения материала стенок, поэтому указанное значение $p > 0,002 \text{ мм рт. ст.}$ может служить лишь для ориентировки при выборе рабочего интервала давлений.

Энергия ускоренных электронов определяется напряженностью электрического поля в разряде и величиной пробега электронов. В тороидальном магнитном поле отдельный электрон, движущийся вдоль силовой линии магнитного поля, довольно быстро попал бы на стенку камеры вследствие тороидального дрейфа. Для электрона с энергией 10 кэв это время порядка 10 мксек , если $H = 10\,000 \text{ э}$ и $R = 80 \text{ см}$. Но если ток в газе достаточно велик, то его собственное магнитное поле будет препятствовать попаданию электронов на стенку.

Таким образом, в кольцевом безэлектродном разряде с продольным магнитным полем можно ожидать появления ускоренных электронов при достаточно низких начальных давлениях.

Попадание ускоренных электронов на стенку камеры или специальную мишень должно вызывать появление рентгеновского излучения*.

Детектирование рентгеновского излучения

Наличие рентгеновского излучения определялось по почернению рентгеновской пленки, помещенной между двумя флуоресцирующими экранами в специальной кассете напротив

(*) Рентгеновское излучение безэлектродного разряда впервые описано А. Джибсоном (Харуэлл, Англия).

окошка разрядной камеры. Момент появления рентгеновских лучей определялся по осциллограммам, снятым с помощью двухлучевого импульсного осциллографа ОК-17, один из лучей

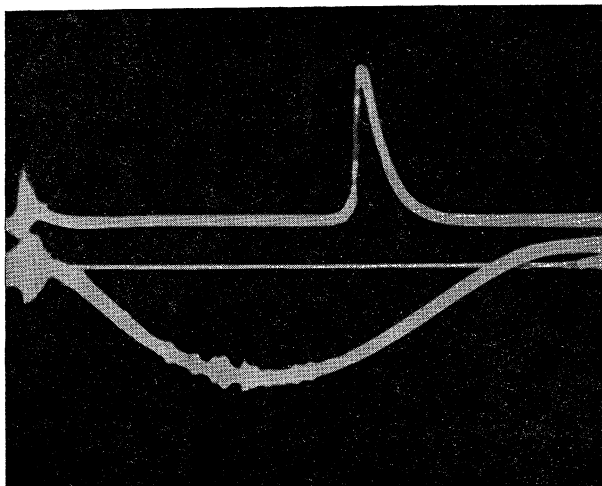


Рис. 1. Осциллограммы тока разряда и импульса рентгеновских лучей, регистрируемого фотоумножителем с кристаллом NaJ.

$\lambda = 0,002$ мм рт. ст ; $H = 10\ 000$ э; $\mathcal{T}_m = 10$ нс.

которого записывал ток разряда, а другой — импульс, поступивший от фотоумножителя с кристаллом NaJ (рис. 1). Проведенные контрольные опыты показали, что этот импульс вызывается рентгеновскими лучами.

Зависимость интенсивности и времени появления излучения от параметров разряда

Зависимость интенсивности излучения от параметров разряда определялась по величине амплитуды импульса, поступившего с фотоумножителя.

Импульс рентгеновских лучей становился заметным на осциллограммах при величине продольного магнитного поля в 5000 э. Дальнейшее увеличение продольного магнитного поля приводило к росту амплитуды импульса. В области от 10 000 до 15 000 э амплитуда импульса оставалась практически постоянной.

Момент появления рентгеновских лучей не зависел от величины внешнего магнитного поля в области от 5000 до 15 000 э. В дальнейшем опыты выполнялись при напряженности магнитного поля в 10 000 э.

При определенном начальном напряжении на конденсаторной батарее имелся некоторый интервал давлений, внутри которого интенсивность рентгеновских лучей достигала максимального значения (рис. 2).

Уменьшение напряжения приводило к сдвигу этого интервала в область более низких давлений. Наличие ограниченного со стороны низких давлений интервала, не соответствующего теории, может быть связано с изменением характера пробоя при низких давлениях (пробой может начинаться от поверхности стенок камеры).

Наиболее удобным в экспериментальном отношении оказался режим разряда с длительностью полупериода тока в 1000 мксек, при давлении дейтерия 0,002 мм рт. ст., с внешним магнитным полем в 10 000 э при начальном напряжении на первичной обмотке в 3 кВ, что соответствовало напряжению на вторичном витке около 200 в, напряженности электрического поля $E = 0,4$ в/см, величине $\frac{E}{p} = 200$ в/см мм рт. ст. и максимальному току $\mathcal{I}_m = 10$ ка. Доза рентгеновского излучения для этого режима вблизи окошка равнялась 0,03 рентгена за один разряд. Все дальнейшие измерения были сделаны для этого режима.

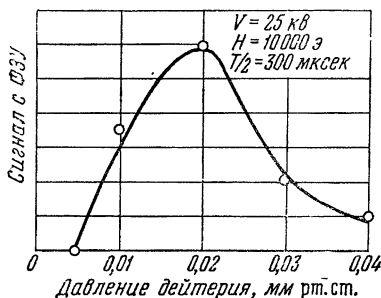


Рис. 2. Зависимость амплитуды импульса рентгеновских лучей от начального давления дейтерия

О область возникновения, размеры и поведение во времени пучка ускоренных электронов

Мишенью для ускоренных электронов являлась стальная полоска, закрытая с обеих сторон пластинками из вольфрама и помещенная вертикально на стержне внутри разрядной камеры (рис. 3). Мишень можно было двигать поперек оси разрядной камеры. Вольфрам использовался для увеличения выхода рентгеновских лучей.

Фотографии мишени, сделанные с помощью камеры-обскуры в рентгеновских лучах, показывали, что электронный пучок

проходит в центре разрядной камеры и имеет высоту меньше 1 см (рис. 4).

Момент появления импульса рентгеновских лучей на осциллограммах оказался связанным с положением мишени в

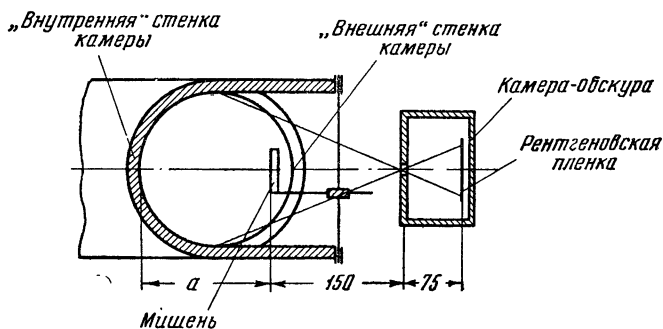


Рис. 3. Схема расположения мишени и камеры-обскуры.

Параметр a определяет положение мишени.

камере. Сравнивая осциллограммы, соответствующие различным положениям мишени, можно было видеть, что электронный пучок зарождается в области, расположенной между центром

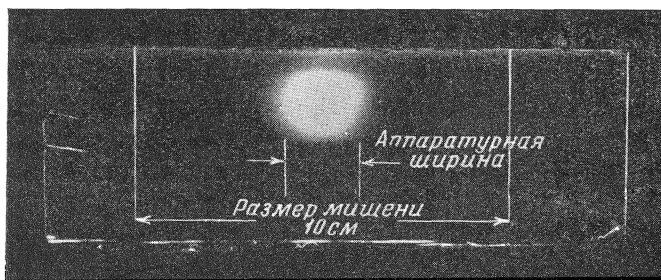


Рис. 4. Фотография мишени в рентгеновских лучах.

камеры и «внутренней» стенкой и с течением времени перемещается к «наружной» стенке, что соответствует расширению витка тока.

На рис. 5 показана зависимость времени появления импульса от положения мишени. Поздно появляющиеся импульсы в положениях мишени 0 и 2 см от «внутренней» стенки камеры соответствуют попаданию электронов на «внешнюю» стенку камеры.

Отсутствие импульсов в положениях 4 и 6 см показывает, что в этой области электроны обладают еще малой энергией, чтобы дать достаточно жесткое излучение. Это есть область зарождения ускоренных электронов. По наклону прямых на рис. 5,

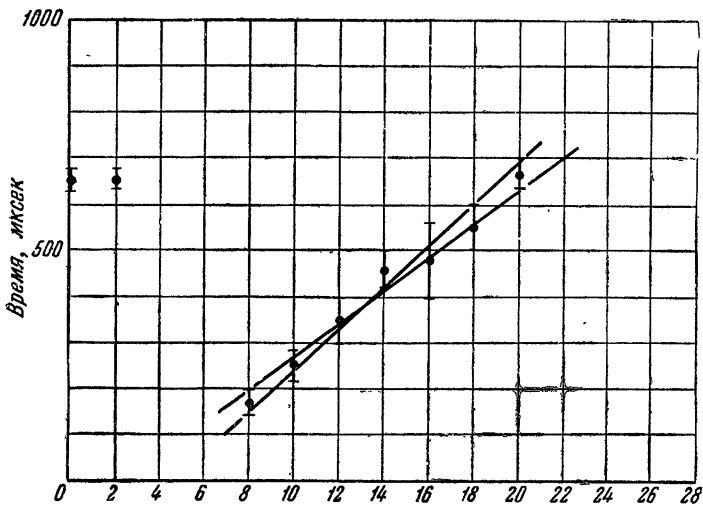


Рис. 5. Момент появления импульса рентгеновских лучей как функция положения мишени.

Положение мишени см. параметр a на рис. 3.

проведенных с учетом ошибок эксперимента, можно определить скорость расширения витка. Она оказалась равной $(2 \div 3) \cdot 10^4$ см/сек. Зная скорость расширения пучка (v) и длительность импульса рентгеновских лучей (τ), можно было вычислить ширину пучка в горизонтальном направлении (l). $v = 2 - 3 \cdot 10^4$ см/сек, $\tau = 2 - 3 \cdot 10^{-5}$ сек., $l = v\tau = 0,4 - 0,9$ см.

Определение энергии рентгеновских лучей

Из возможных методов определения энергии рентгеновских лучей наиболее удобным и просто осуществимым представлялся метод фильтров.

Известно, что интенсивность монохроматического излучения (I), прошедшего через фильтр толщины x , выражается формулой $I = I_0 e^{-\mu x}$, где I_0 — интенсивность падающего излучения, а μ — коэффициент поглощения вещества фильтра. Измерение I и I_0 дает возможность определить μ и, следовательно, энергию излучения.

Если имеется некогерентное излучение с некоторым спектральным распределением $n_{(E)}$, то для этого излучения можно определить $\mu_{эф}$ и соответствующую ему энергию $E_{эф}$. Для определения связи между $E_{эф}$ и E_{max} необходимо значение $n_{(E)}$ — функции распределения квантов излучения по энергии.

Так как в нашем случае спектр излучения был неизвестен, то знание величины $E_{эф}$ могло лишь дать представление о порядке величины энергии ускоренных электронов.

При прохождении излучения через фильтр максимум спектрального распределения смещается в сторону больших энергий, поэтому измерения, сделанные с более толстыми фильтрами, должны давать значение $E_{эф}$, более близкое к E_{max} .

Для определения интенсивности падающего и прошедшего через фильтр излучения применялась рентгеновская пленка с усиливающими флуоресцирующими экранами. Пленка помещалась за медным ступенчатым фильтром с толщиной ступеньки 0,1 см.

Для определения интенсивности излучения (I) по оптической плотности почернения пленок (S) необходимо произвести калибровку пленок и установить, что связь между I и S не зависит от энергии излучения.

Данные, полученные с помощью камеры-обскуры, указывают на то, что линейные размеры источника рентгеновских лучей ~ 1 см и поэтому для расстояний $r \sim 100$ см от мишени интенсивность излучения можно считать спадающей по закону $1/r^2$; это обстоятельство использовалось при калибровке пленок.

Так как спектральное распределение излучения меняется при прохождении через фильтр, то, производя калибровку для участков пленок, закрытых фильтрами различной толщины, можно было убедиться в том, что в некоторых пределах почернение S является функцией только интенсивности I . В наших опытах, для каждой серии пленок, производилась их калибровка и определялась энергия излучения.

Опыт ставился следующим образом. Шесть рентгеновских пленок помещались против окошка камеры на различных расстояниях от мишени. Каждая пленка была закрыта ступенчатым медным фильтром. Пленки экспонировались при определенном количестве разрядов (от 3 до 10). После одновременного появления производилось фотометрирование пленок. Для каждой толщины фильтра строилась зависимость почернения S от $\lg \frac{1}{r^2} = \lg I$, где r — расстояние от мишени до пленки, а I — интенсивность излучения в условных единицах (рис. 6).

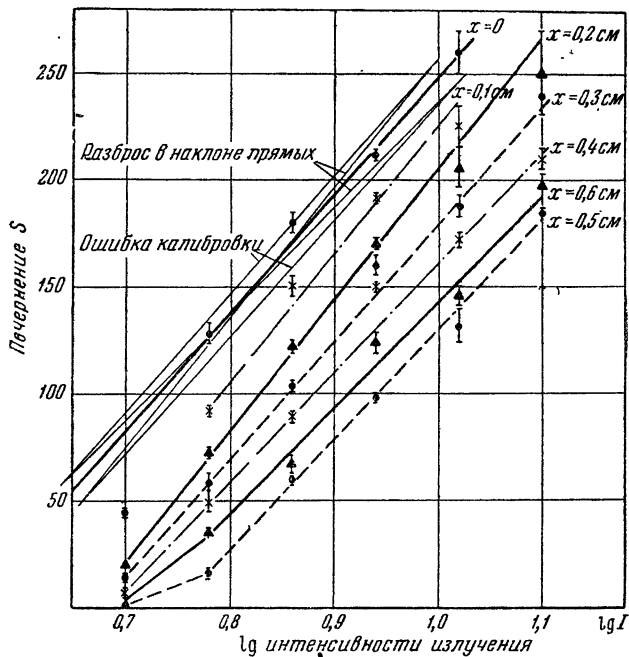


Рис. 6. Зависимость почернения пленок от $\lg I = \lg \frac{1}{r^2}$ для медных фильтров различной толщины (x). Прямая для $x=0$ взята в качестве калибровочной.

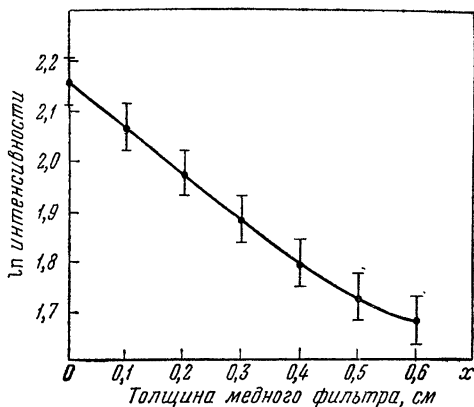


Рис. 7. Зависимость логарифма интенсивности излучения (I) от толщины медного фильтра (x). Нелинейная зависимость указывает на изменение спектрального состава излучения при прохождении через фильтр.

В пределах ошибок эксперимента искомая зависимость оказалась линейной, причем наклоны прямых примерно одинаковы для фильтров разной толщины. Разброс в наклоне прямых определяет ошибку калибровки пленок. По этим же пленкам с помощью калибровочного графика (рис. 6) строилась кривая зависимости логарифма интенсивности излучения от толщины фильтра (рис. 7). Наклон этой кривой определяет $\mu_{эф}$. Для толщины фильтров 0,1—0,3 см $\mu_{эф}$ оказалось равным 0,9, что соответствует $E_{эф} = 400$ эв, и для толщин 0,4—0,6 см $\mu_{эф} = 0,6$ и $E_{эф} = 800$ кэв.

Так как спектральный состав излучения неизвестен, то никакого определенного вывода о максимальной энергии рентгеновских лучей и, следовательно, энергии электронов сделать нельзя, можно только сказать, что энергия ускоренных электронов превышала 800 кэв.

Выводы

1. Появление в безэлектродном разряде электронов с энергией, превышающей 800 кэв, при напряжении на обходе 200 в указывает на существование пучка ускоренных электронов.
2. Виток электронного тока за время процесса увеличивает свой радиус R .

§ 2. Спектральные измерения

Для того чтобы выбрать наиболее подходящие линии для определения зависимости их интенсивности от времени, были сделаны фотографии спектра разряда. Спектр снимался с помощью спектрографа ИСП-51. Пленки экспонировались в течение всего времени разряда. На спектре отчетливо были видны линии серии Бальмера H_α , H_β , H_γ и линии примесей — в основном кислорода, углерода и кремния. Интенсивность линий примесей не менялась с изменением давления дейтерия и величины внешнего магнитного поля. Увеличение тока разряда вызывало увеличение интенсивности линий примесей.

Для изучения зависимости интенсивности от времени были выбраны: для водорода — линия H_β ($\lambda = 4860 \text{ \AA}$), для кремния — линия с длиной волны $\lambda = 4819,6 \text{ \AA}$.

Зависимость интенсивности спектральных линий от времени

Блок-схема аппаратуры для наблюдения зависимости интенсивности линий от времени представлена на рис. 8. Свет из центральной области разряда попадает в монохроматор

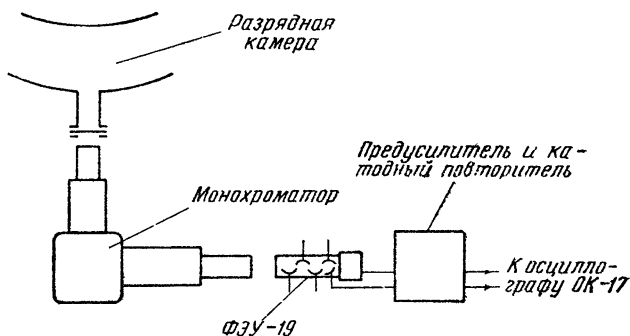


Рис. 8. Схема аппаратуры для определения зависимости спектральных линий от времени.

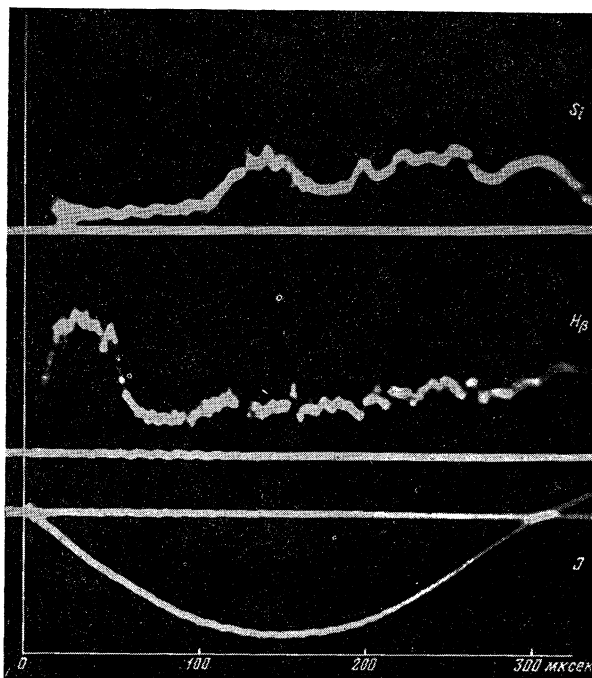


Рис. 9. Осциллограммы зависимости интенсивности спектральных линий водорода и кремния от времени. Нижняя осциллограмма представляет ток разряда ($V = 12$ кв; $p = 0,01$ мм рт. ст.; $N = 2500$ в; $\mathcal{I}_m = 70$ ка).

УМ-2, который выделяет узкий интервал длин волн ($\Delta\lambda = 20 \text{ \AA}$) в области $\lambda = 4860 \text{ \AA}$). Прошедший через монохроматор свет попадает на катод фотоумножителя ФЭУ-19, помещенного в железный экран толщиной 15 мм для защиты от магнитных полей. Ток фотоумножителя пропорционален интенсив-

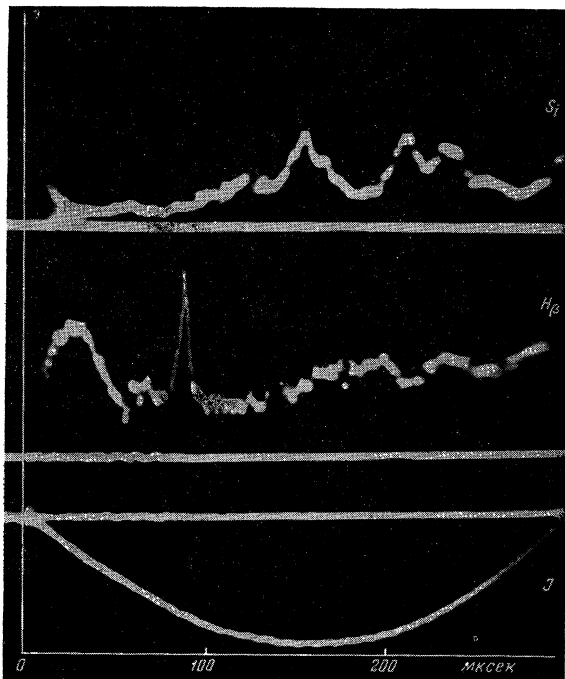


Рис. 10. Осциллограммы зависимости интенсивности спектральных линий водорода и кремния от времени. Нижняя осциллограмма представляет ток разряда ($V = 12 \text{ кэ}$; $p = 0,01 \text{ мм рт. ст.}$; $H = 15000 \text{ э}$; $\mathcal{I}_m = 70 \text{ ка}$).

ности падающего света. После предварительного усиления сигнал с фотоумножителя подавался на импульсный осциллограф ОК-17.

Осциллограммы изменения интенсивности линий показаны на рис. 9, 10, 11. Из осциллограмм следует, что интенсивность линий дейтерия спадает вблизи пятидесятой микро-секунды и остается некоторое время небольшой; дальнейший рост интенсивности линий дейтерия можно связать

с появлением линий примесей (Si). Следует отметить, что осциллограммы для линий H_{β} и Si сняты в двух опытах, а осциллограммы для одной и той же линии, снятые для опытов, следующих друг за другом, совпадали лишь в общем характере поведения кривых. Поэтому нельзя точно сопоставить момент вторичного роста интенсивности линии H_{β}

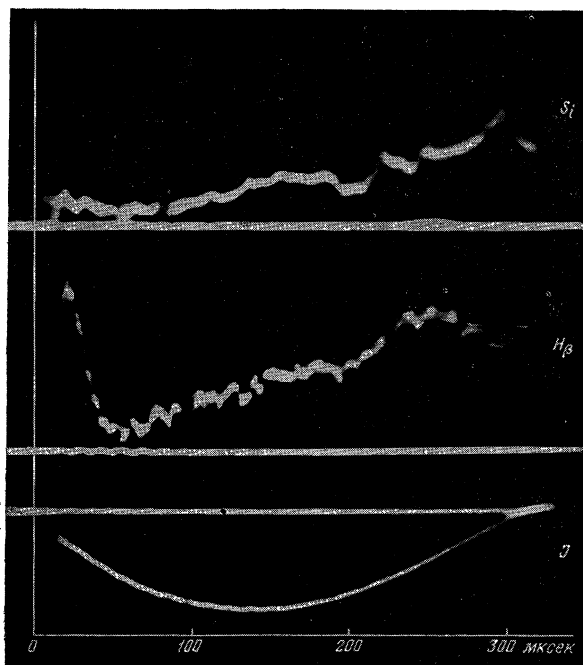


Рис. 11. Осциллограммы зависимости интенсивности спектральных линий водорода и кремния от времени. Нижняя осциллограмма представляет ток разряда ($V = 25$ кв; $p = 0,01$ мм рт ст.; $H = 2500$ э; $\mathcal{I}_m = 150$ ка).

с появлением линии кремния. Спад интенсивности линии H_{β} около пятидесятой микросекунды может быть связан с достижением достаточно высокой ионизации плазмы к этому моменту времени. Это подтверждается рис. 12, где приведены осциллограммы тока разряда и интенсивности линии H_{β} для режима, аналогичного показанному на рис. 10 в тех же масштабах. Здесь ток разряда вследствие затрудненных

условий пробоя* меньше своей обычной величины для данного режима в 6 раз, ионизация плазмы ниже и кривая интенсивности линии H_{β} не имеет характерного провала.

Следует отметить, что к этому же моменту времени проводимость плазмы достигает своего максимального значения [1].

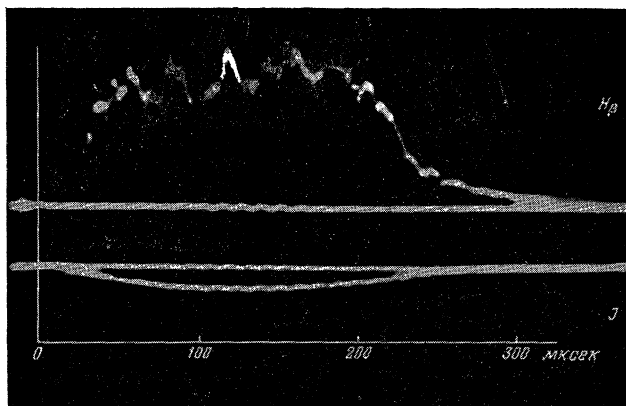


Рис. 12. Осциллограмма зависимости интенсивности спектральной линии дейтерия от времени. Случай затрудненного пробоя ($V = 12$ кв; $p = 0,01$ мм рт. ст.; $H = 15000$ э; $\mathcal{I}_m = 12$ ка).

Можно предположить, что появление линии Si связано с потерей устойчивости шнуром при достаточно большом токе, однако увеличение величины внешнего магнитного поля в 6 раз (от 2500 до 15 000 э), что согласно теории должно привести к устойчивости шнура для режимов с $V = 12$ кв, не ведет к заметному изменению в характере кривых интенсивности.

Выводы

1. Изменение во времени интенсивности спектральных линий дейтерия показывает, что в некоторый момент времени достигается высокая степень ионизации плазмы.

* Режим разряда $V = 12$ кв, $p = 0,01$ мм рт. ст. и $H = 15000$ э находился на границе области режимов с устойчивым зажиганием, поэтому небольшая ошибка в начальном давлении дейтерия приводила к затрудненному пробоям.

2. Последующий рост интенсивности спектральных линий дейтерия, возможно, связан с приходом примесей со стенок камеры. Момент появления примесей не связан с величиной внешнего магнитного поля и, вероятно, определяется временем диффузии примесей со стенок камеры в объем.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Л. Безбатченко и др., см. настоящий том, стр. 116.
 2. С. И. Брагинский, В. Д. Шафранов. К теории высокотемпературного плазменного шнура. Доклад, представленный на Женевскую конференцию по мирному использованию атомной энергии, 1958 г.
-

*Д. П. Петров, Н. В. Филиппов,
Т. И. Филиппова, В. А. Храбров*

МОЩНЫЙ ИМПУЛЬСНЫЙ ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД В КАМЕРАХ С ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ *

Описываются результаты исследования импульсного газового разряда в прямых двухэлектродных камерах с проводящими стенками. Установлено различие процессов формирования разряда по сравнению с керамическими камерами. Обнаружено и исследовано импульсное нейтронное излучение в широком диапазоне давлений газа. Показано, что источники нейтронного излучения разряда локализованы в прианодной области.

Введение

Из экспериментов с мощным газовым разрядом в камерах с изолирующими стенками стало очевидным влияние испаряющегося материала стенок на процесс развития разряда [1]. Вспышка спектральных линий, принадлежащих атомам материала стенок, указывает на то, что примеси испарившихся материалов искажают, на некоторой стадии, развитие разряда. Можно было думать также, что не только старт разряда, но и формирование столба разряда, так же как и перераспределение тока на более поздних стадиях процесса, могут зависеть от потенциала стенок, а следовательно, и от их электропроводности. В связи с этим и было предпринято исследование мощного импульсного газового разряда в камерах с проводящими стенками. Работы, описанные в настоящей статье, включали в себя широкий комплекс исследований. Изучалось влияние

* Работа выполнена в 1954 и 1957 гг.

различных факторов на протекание процесса разряда: размеров камеры, скорости нарастания разрядного тока, величины начального напряжения батареи, начального давления в камере, рода газа, продольного магнитного поля и пр.

Описание установки

Принципиальное устройство установки не отличается от принятого при проведении экспериментов на камерах с изоли-

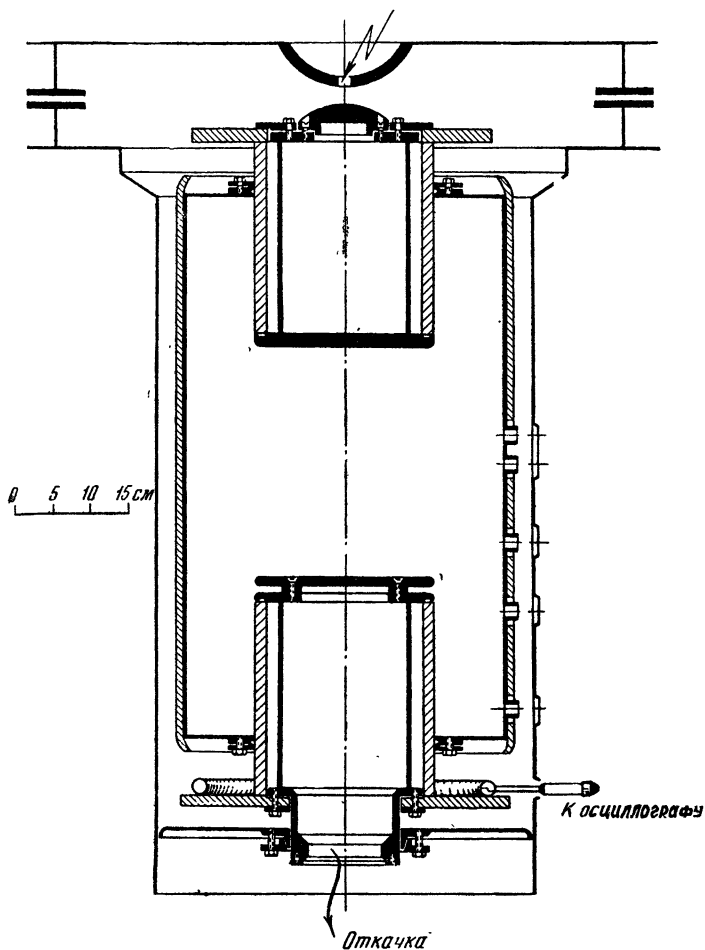


Рис. 1. Схема металлической камеры.

рующими стенками [2]. Камера включается в разрядный контур, состоящий из батареи конденсаторов, подводящих фиде-

ров, устройства, коммутирующего разряд (разрядника), и коаксиального обратного токопровода, окружающего камеру. Камера представляет собой медный цилиндр с медными электродами, введенными внутрь на фарфоровых изоляторах. Измерительные устройства вводятся в камеру через специальные отверстия.

Первоначальные исследования проводились на камере высотой 765 мм, внутренним диаметром 300 мм, с расстоянием между электродами 500 мм и диаметром электродов 110 мм.

В дальнейшем работа проводилась на усовершенствованной камере (рис. 1) высотой 700 мм, внутренним диаметром 420 мм, с расстоянием между электродами 300 мм и диаметром электродов 240 мм. Эта камера обладает некоторыми преимуществами по сравнению с первой конструкцией. Отверстия для ввода в нее измерительных устройств имеют меньшие размеры и меньше искажают симметрию разряда, камера обладает меньшей индуктивностью. Компановка камеры с разрядным контуром обеспечивает большие удобства при проведении экспериментов.

Емкость разрядной батареи C менялась от 30 до 270 мкф, однако большая часть экспериментов выполнена при 85 и 145 мкф. Начальное напряжение батареи V_0 варьировалось от 15 до 45 кВ, начальное давление в камере p_0 менялось от 0,02 до 60 мм рт. ст. Максимальный ток разряда (\mathcal{I}_{\max}) достигал величины от 100 до 600 кА, а максимальная скорость нарастания тока ($\dot{\mathcal{I}}_{\max}$) лежала в пределах от $4 \cdot 10^{10}$ до $2 \cdot 10^{11}$ а/сек в зависимости от условий эксперимента.

Измерительная аппаратура

Измерение разрядного тока осуществлялось с помощью пояса Роговского. Для измерения падения напряжения на разряде применялся низкоомный делитель напряжения. Распределение магнитного поля внутри разряда в различных сечениях камеры определялось магнитными зондами по методу, описанному в [2]. Осциллографирование процессов велось на двухлучевых осциллографах ОК-17М и ОК-19.

На первой камере проводилось скоростное фотографирование центральной области разряда через отверстие (диаметром 100 мм) в боковой стенке. На второй камере регистрировалось видимое излучение разряда в нескольких сечениях камеры с помощью фотоумножителя и узкого (диаметром 8 мм, длиной 140 мм) светового коллиматора.

Регистрация нейтронного излучения производилась двумя способами: по наведению искусственной радиоактивности в серебряной фольге и сцинтилляционным детектором, способным

регистрировать без искажения импульсы длительностью $\sim 0,1$ мксек.

Практически одновременно с нейтронным излучением появлялось жесткое электромагнитное излучение. Раздельная регистрация этих излучений обеспечивалась удалением сцинтилляционного детектора на значительное расстояние (около 30 м) от разрядной камеры, что давало возможность использовать разницу в пролетном времени того и другого излучения.

Пространственное распределение источников нейтронного излучения предварительно исследовалось с помощью парафинового коллиматора, внутри которого помещался сцинтилляционный регистратор. На рис. 2 (справа) показана схема эксперимента с коллимированным регистратором, который при определении продольного и радиального распределения источников нейтронов перемещался параллельно оси камеры и параллельно диаметру ее поперечного сечения. Показания этого регистратора сравнивались с показаниями неколлимированного неподвижного регистратора, служившего монитором. Чтобы исключить возможное влияние жесткого электромагнитного излучения, были проделаны аналогичные эксперименты (рис. 2, слева), в которых вместо сцинтилляционных регистраторов использовались бета-счетчики, регистрировавшие искусственную радиоактивность в серебряной фольге.

Дальнейшим усовершенствованием аппаратуры явился пятицелевой коллиматор с бета-счетчиками, позволявший за один разряд получать сведения об относительной интенсивности нейтронного излучения в пяти равноудаленных сечениях камеры. Все три способа дают согласующиеся между собой результаты и указывают на характерные особенности в распределении излучения, обнаруженные в настоящих исследованиях.

Одновременно с изучением пространственного распределения источников нейтронного излучения проводилось детальное исследование энергетического и углового распределения нейтронов методом ядерных фотоэмульсий.

Результаты измерений

Основные черты, характеризующие мощный газовый разряд в камерах с проводящими стенками, следующие.

а) Установлено различие процессов развития разряда в металлических и керамических камерах. Пробой газового промежутка начинается между стенкой и электродами и у положительного электрода имеет вид симметричной розетки. При этом интенсивное сжатие розетки в узкий шнур начинается с краев положительного электрода и постепенно распространяется вдоль оси камеры. Наблюдения за распространением светового

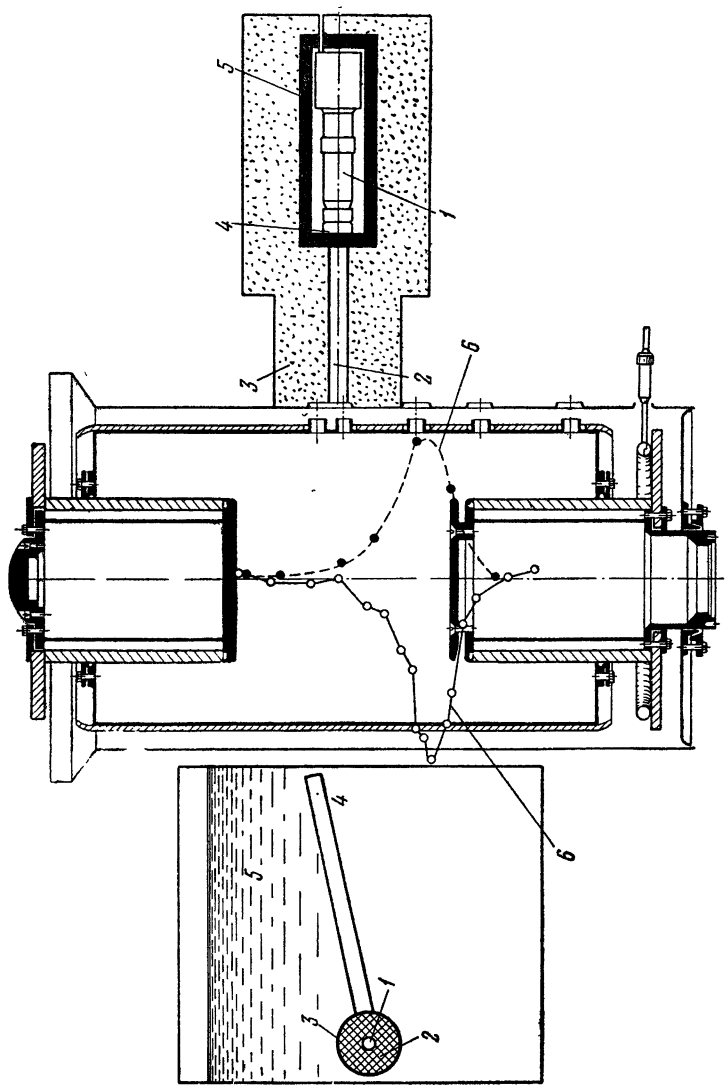


Рис. 2. Схема экспериментов по исследованию продольного распределения источников нейтронного излучения методом коллимации фотоумножителя (справа) и бета-счетчика (слева).
 Слева: 1 — фотоумножитель; 2 — щель; 3 — парафин; 4 — цилиндр; 5 — свинец; 6 — разность амплитуд импульсов сцинтиллятора (в относительных единицах) в соответствующих положениях коллиматора при открытой щели и щели, закрытой парафином; справа: 1 — бета-счетчик; 2 — парафин; 3 — кадмий; 4 — щель; 5 — вода; 6 — отношение «отчетов коллимированного бета-счетчика 1 и неколлимированного бета-счетчика (не показан) для соответствующих положений щели коллиматора».

фронта вдоль оси, выполненные с помощью коллимированного фотоумножителя (для второй камеры), показывают, что скорость распространения светового фронта $\sim 3 \cdot 10^7$ см/сек, т. е.

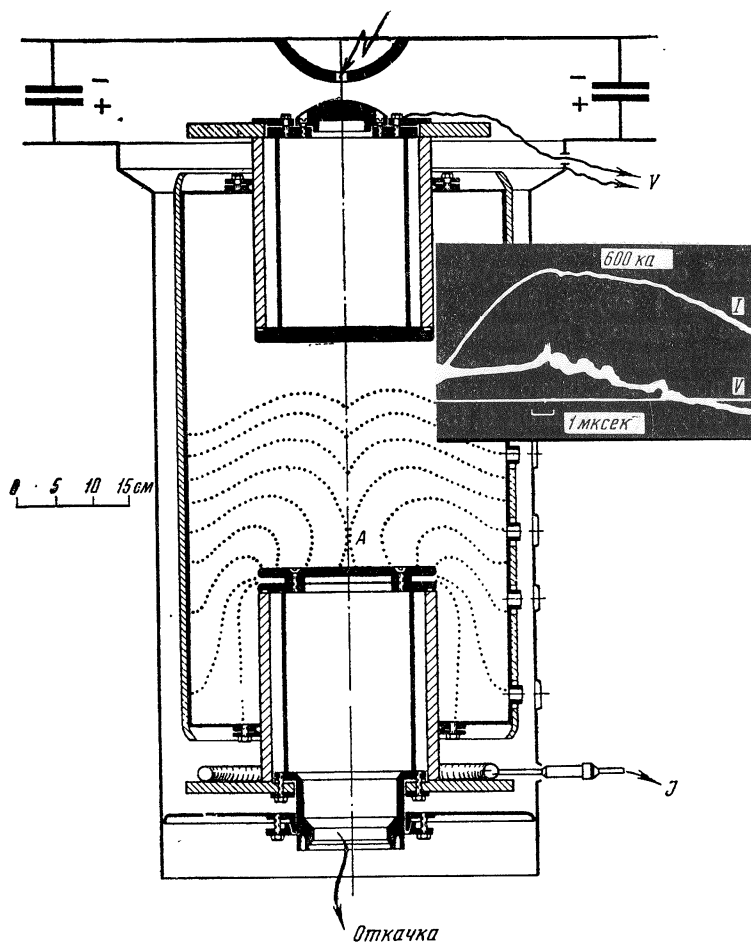


Рис. 3. Картина сжатия тока. Пунктирными линиями показаны положения токового фронта в последовательные моменты времени с интервалами через одну микросекунду. Буквой А отмечена осевая область вблизи анода, где ток раньше всего сжимается к оси (в момент, соответствующий первому излому на осциллограмме тока).

превосходит примерно в три раза максимальную радиальную скорость сжатия.

При давлениях газа больше 1 мм рт. ст. в центральной области камеры не удается обнаружить разрядный ток к

моменту первого излома на его осциллограмме. Скоростное фотографирование центральной области разряда на первой камере также показывает, что эта область начинает светиться позже момента первого излома. На рис. 3 пунктирными линиями схематично показаны последовательные положения токовой розетки при ее сжатии к оси камеры. Видно, что в отличие от керамических камер имеется продольная составляющая скорости сжатия фронта тока.

Такое сжатие вызывает, по-видимому, кумулятивный эффект, под действием которого происходит направленное движение некоторого количества частиц газа вдоль оси. Косвенным доказательством существования осевой кумуляции является образование глубокой впадины (глубиной и диаметром порядка 1 см) в центре положительного электрода, выбитой после большого количества разрядов (около 500) в результате воздействия обратного «следа» струи.

Кроме того, было обнаружено, что диафрагма из нержавеющей стали (толщиной 0,15 мм и диаметром 60 мм), поставленная перпендикулярно к оси камеры на расстоянии 6 см от анода, в результате одного разряда сильно деформируется, принимая вид конуса, направленного вершиной к катоду. Такую деформацию можно объяснить ударом кумулятивной струи.

б) Изломы на осциллограммах разрядного тока появляются раньше, чем в керамических камерах при сравнимых условиях. Момент первого излома на токе наступает раньше момента сжатия, рассчитанного по известной формуле инерционной теории [3] в предположении, что сжатие токовой оболочки в шнур происходит одновременно по всей высоте камеры и что в сжатие к оси вовлекается весь газ, находящийся в камере. Как показали измерения с магнитными зондами, оба эти предположения не соответствуют действительности.

Как и для керамических камер, на осциллограммах разрядного тока отмечалось до трех изломов, соответствующих пикам напряжения между электродами камеры (рис. 4, а).

в) Нейтронное излучение появлялось всегда при первом изломе на осциллограмме тока, а при наличии нескольких изломов нередко сопровождало каждый из них (рис. 4, б).

Из анализа осциллограмм напряжения и нейтронного импульса было замечено, что импульс нейтронного излучения запаздывает по отношению к моменту излома на токе (пика на напряжении) приблизительно на 0,3 мксек.

Длительность нейтронного излучения составляла $0,3 \div 0,5$ мксек. Нейтронное излучение было обнаружено в широком диапазоне давлений газа — от 0,02 до 30 мм рт. ст. Появление его наблюдалось регулярно при большом коли-

честве разрядов без замены газа в камере (ввиду уменьшения гажения стенок и более высокого начального давления).

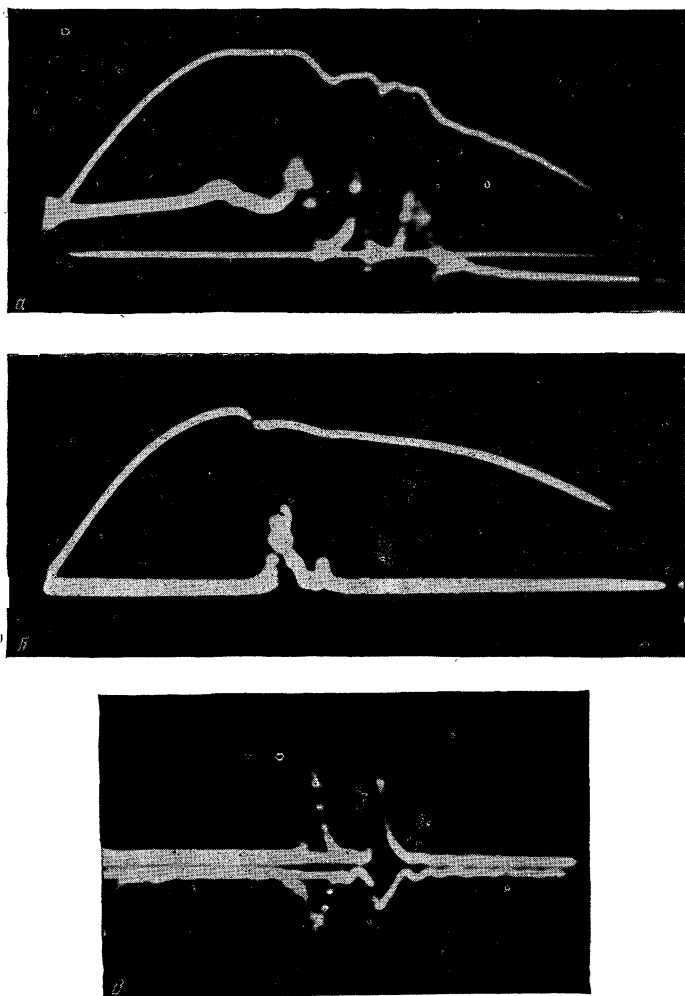


Рис. 4.

Максимальный выход нейтронов за разряд достигал величины $5 \cdot 10^9$ при среднем выходе больше 10^8 . Максимальная интенсивность нейтронного излучения соответствует первому излому на кривой тока, который, как указывалось в п. «а», происходит раньше, чем регистрируется ток в центральной

области оси камеры. Уже это обстоятельство служило косвенным указанием на тот факт, что, во всяком случае, основная доля нейтронного излучения возникает не в средней области камеры. Впоследствии различными методами коллимирования нейтронного излучения на второй камере это было подтверждено. Оказалось, например, что при $p_0 = 2$ мм рт. ст. и $V_0 = 30$ кэ нейтронное излучение возникает в прианодной области диаметром не более 2 см (при диаметре камеры 410 мм) и высотой $6 \div 7$ см, причем «центр тяжести» распределения находится на оси камеры на расстоянии $2 \div 3$ см от анода. На рис. 2, на схеме камеры, показаны кривые продольного распределения интенсивности нейтронного излучения, полученные при коллимации двумя методами. Каждая точка на кривых соответствует среднему значению интенсивности нейтронного излучения (в относительных единицах), полученному за $10 \div 60$ ударов, при значительном разбросе этой величины от разряда к разряду.

На рис. 4, в для примера показаны осциллограммы сигналов от коллимированного (нижние сигналы) и неколлимированного сцинтилляционного детектора. При понижении начального давления осевая область возникновения нейтронного излучения постепенно удлиняется по направлению к катоду и для давлений $p_0 \sim 0,3$ мм рт. ст. есть основания считать распределение нейтронов вдоль оси близким к равномерному.

г) На второй камере проводились исследования влияния на разряд в дейтерии примесей чужеродных газов (гелия и ксенона). Оказалось, что добавление примесей в весьма значительных количествах оказывает слабое влияние на интенсивность нейтронного излучения. Так, например, примесь ксенона в количестве 6% по числу частиц, снижает выход нейтронов приблизительно в три раза, а 1% ксенона, также по числу частиц, практически совсем не влияет на интенсивность нейтронного излучения. К примеси гелия выход нейтронов еще менее чувствителен: 30% гелия, по числу частиц, снижает его примерно вдвое.

В камерах с керамическими стенками нейтронное излучение более чувствительно к примесям чужеродных газов, чем в металлических камерах. Объяснение этому следует искать, по-видимому, в различных условиях сжатия тока к оси камеры.

д) Обнаружена слабая зависимость интенсивности нейтронного излучения от величины статического продольного магнитного поля. Поле $B_z = 200$ гаусс снижает средний выход только в три раза. Максимальная интенсивность при этом составляет $3 \cdot 10^8$ нейтронов на разряд. Эти эксперименты проводились при давлении дейтерия в камере $p_0 = 0,3$ мм рт. ст. и при начальном напряжении на батарее $V_0 = 30$ кэ.

е) Результаты предварительных экспериментов по определению энергетического распределения нейтронов методом ядерных фотоэмульсий приведены на рис. 5.

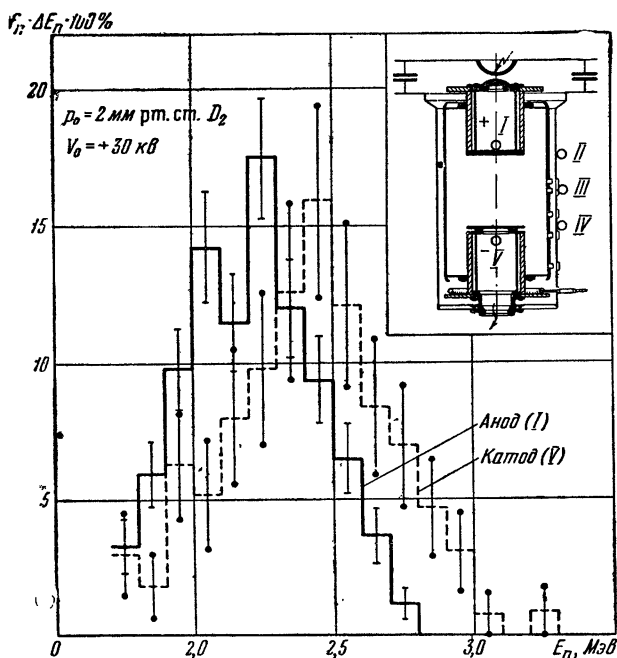


Рис. 5. Энергетические спектры нейтронов, полученные с помощью ядерных эмульсий, установленных у анода (I) и катода (V). Вверху справа показано положение фотопластинок (I—V).

Обсуждение результатов

Совокупность проведенных исследований позволяет сделать некоторые заключения о характере процессов, протекающих при импульсном газовом разряде в металлических камерах.

Из измерений с магнитными зондами выявился своеобразный характер сжатия тока в этих камерах, отличающийся от цилиндрического сжатия, которое, как принято считать, имеет место в камерах с керамическими стенками. При сжатии тока к оси увлекается, по-видимому, только та часть газа, которая находится в прианодной осевой области, диаметр которой ограничен примерно диаметром электродов. Протяженность этой области составляет для второй камеры (при $p_0 = 2 \text{ мм рт. ст. дейтерия}$) не более $1/3$ от межэлектродного расстояния и

постепенно увеличивается по направлению к катоду с уменьшением начального давления.

При таком характере сжатия становится ясным, почему расчет по формуле инерционной теории [3], сделанный при указанных в предыдущем разделе предположениях, дает завышенное значение для времени первого сжатия тока. Это завышение тем больше, чем больше p_0 . Доля частиц, вовлекаемых в процесс интенсивного сжатия, в рассматриваемой картине оказывается значительно меньшей, чем это имеет место в керамической камере при сравнимых условиях. По-видимому, этим объясняется возникновение нейтронного излучения в металлических камерах при более высоких давлениях дейтерия. Это подтверждается также тем фактом, что максимальный выход нейтронов в первой металлической камере, с меньшим диаметром электродов (110 мм), имеет место при больших начальных давлениях дейтерия ($p_0 = 5 \div 10$ мм рт. ст.), чем для второй камеры с электродами большего диаметра (240 мм), где максимальный выход приходится на $p_0 = 1 \div 2$ мм рт. ст.

Наличие нескольких изломов на осциллограмме разрядного тока, по-видимому, объясняется тем, что имеет место ряд чередующихся пробоев промежутка между положительным электродом и стенкой камеры и следующих за ними сжатий тока в шнур. Разность потенциалов на этом промежутке может появляться каждый раз, как только розетка линий тока начинает интенсивно стягиваться в осевой шнур, ибо на нем создается падение напряжения. Эти чередующиеся процессы, по всей видимости, вызывают причины, порождающие нейтронное излучение. На это прямо указывает также факт локализации источников нейтронного излучения в этом месте камеры. Однако у нас нет пока достаточных сведений для того, чтобы выяснить окончательно эти причины. Подробное изложение результатов исследования нейтронного излучения с помощью ядерных фотоэмульсий здесь не приводится, однако из тех результатов, которые показаны на рис. 5, можно сделать вывод, что основная часть излучаемых нейтронов обязана своим происхождением некоторому ускорительному механизму. Отличается ли этот механизм от того, который существует в керамических камерах, сказать пока трудно.

Кроме этого основного ускорительного механизма, по-видимому, существует дополнительный кумулятивный механизм ускорения. Действительно, рассмотрение картины движения токовых линий внутри металлической камеры позволило сделать предположение о возникновении вблизи анода осевой кумулятивной струи за счет конического характера сжатия тока. Поэтому можно высказать предположение о существова-

нии некоторого количества дейтронов, кумулятивно ускоренных вдоль оси камеры.

Как уже отмечалось, одновременно с нейтронами регистрировалось жесткое электромагнитное излучение. Систематических исследований последнего не производилось. При разрядах в дейтерии это жесткое электромагнитное излучение, по-видимому, состоит как из рентгеновского излучения разряда, так и из вторичного гамма-излучения, обусловленного неупругим рассеянием нейтронов на стенках и электродах камеры. Рассеяние нейтронов особенно велико на аноде, так как источники нейтронного излучения расположены вблизи него.

При разрядах в водороде сцинтилляционный детектор регистрирует рентгеновское излучение из разряда, но интенсивность его значительно меньше, чем интенсивность жесткого электромагнитного излучения при разрядах в дейтерии, так что для его обнаружения потребовалось повысить чувствительность регистратора примерно в 100 раз.

В заключение следует отметить целесообразность применения металлической камеры для исследования проникающего излучения разряда, памятуя, что это излучение воспроизводится от разряда к разряду весьма регулярно, причем нет необходимости заменять перед каждым разрядом газ в объеме камеры. Эти обстоятельства могут облегчить выполнение и сократить длительность экспериментов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Ю. Лукьянов, В. И. Синицын. Атомная энергия, **3**, 88 (1956).
 2. Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов. Атомная энергия, **3**, 76 (1956).
 3. М. А. Леонтович, С. М. Осовец. Атомная энергия, **3**, 81 (1956).
-

*А. М. Андрианов, О. А. Базилевская,
Ю. Г. Прохорова*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОГО РАЗРЯДА
В ДЕЙТЕРИИ ПРИ СКОРОСТЯХ НАРАСТАНИЯ
ТОКА ДО 10^{12} а/сек И НАПРЯЖЕНИЯХ ДО 120 кв***

В работе изложены результаты исследования разрядов в дейтерии при скоростях нарастания тока вплоть до 10^{12} а/сек. Показано, что при начальном напряжении, превышающем 80 кв, длительность нейтронного импульса существенно увеличивается (до 2—3 мксек), а длительность импульса жесткого рентгеновского излучения остается той же, что и при более низких напряжениях (0,2—0,3 мксек).

Введение

В статье авторов [1] были изложены результаты исследования разряда в дейтерии при скоростях нарастания тока около $2 \cdot 10^{11}$ а/сек. Работа проводилась на установке, имеющей конденсаторную батарею емкостью 80 мкф и цилиндрическую разрядную камеру диаметром 40 см и высотой 90 см. Максимальное напряжение, допускаемое конденсаторами, составляло 50 кв; обычное рабочее напряжение, при котором получено наибольшее число данных, 40 кв. На этой установке нельзя было заметным образом варьировать напряжение, так как при снижении напряжения до половины максимального, для интересующего нас диапазона давлений, «особенность» (момент излома на токе) попадала за максимум тока, т. е. при сжатии разряда начинала сказываться ограниченность запаса энергии конденсаторов. Новая установка была построена с целью исследова-

* Работа выполнена в 1957—1958 гг.

дования разряда в широком диапазоне начальных напряжений. Представляют интерес режимы, где вкладываемая энергия в расчете на одну частицу заметно больше уже достигнутой. Поэтому имело смысл использовать несколько укороченную камеру. Потери энергии на электродах при выбранном расстоянии еще не сказываются.

§ 1. Описание установки

В настоящей работе исследовался разряд в цилиндрической фарфоровой камере высотой 50 см и диаметром 40 см. Камера заполнялась дейтерием или водородом при различных давлениях (от 0,01 до 0,2 мм рт. ст.). Питание разряда осуществлялось от конденсаторной батареи общей емкостью 64 мкф. Работа велась на напряжениях от 40 до 120 кв. При этом начальная скорость нарастания тока менялась втрое, достигая величины около 10^{12} а/сек при начальном напряжении 120 кв. Запас энергии в конденсаторной батарее достигал 460 кдж (при $U_0 = 120$ кв).

Известно, что существенную долю паразитной индуктивности составляет индуктивность разрядного устройства, причем с повышением напряжения эта доля растет (увеличивается длина искры). Поэтому для сокращения паразитной индуктивности нужно было заняться в первую очередь улучшением разрядного устройства.

Индуктивность разрядника приблизительно равна $2l \ln \frac{D}{a}$, где l — длина и D — диаметр искрового канала. Уменьшение этой индуктивности возможно либо путем уменьшения длины, либо путем увеличения диаметра. Сокращать длину можно только в разрядниках высокого давления. По-видимому, создать такой разрядник, пригодный для многократной работы при силах тока $\sim 10^6$ а, невозможно. Остается другой возможный путь — расширить канал тока замыкающего устройства. Известно, что в начальной стадии разряда в газах с малым начальным давлением у стенок камеры создается цилиндрическая оболочка, в дальнейшем сжимающаяся к центру. Если подобрать условия так, чтобы заметное сжатие в разряднике не успевало происходить за интересующие нас времена, то такое разрядное устройство будет обладать достаточно малой индуктивностью. При этом, очевидно, нужно выбирать минимально возможную высоту разрядника. Кроме того, с целью уменьшения скорости сжатия газ в разряднике должен быть выбран по возможности более тяжелый.

На нашей установке камера разрядника была склеена из органического стекла. Высота камеры 12 см, внутренний диа-

метр 70 см. Схематический чертеж установки с вакуумным разрядником приведен на рис. 1. Инициирование разряда осуществлялось путем впуска в камеру разрядного устройства порции воздуха при открывании клапана *B*. Во время зарядки батареи разрядник непрерывно откачивался. Клапан *A*, отключающий разрядник от вакуумного насоса, закрывался за несколько секунд до начала разряда.

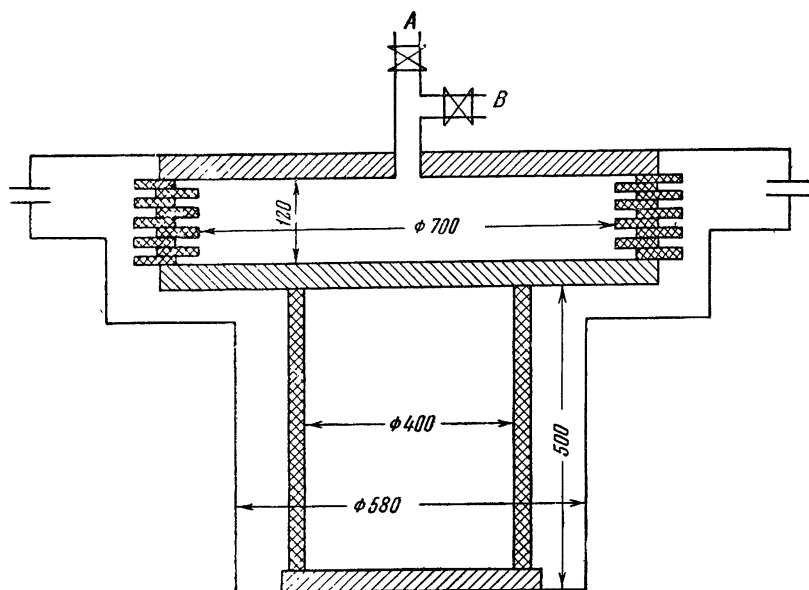


Рис. 1. Схематический чертеж установки с вакуумным разрядником (размеры даны в миллиметрах).

Применение такого разрядника сократило паразитную индуктивность установки с 250 до 180 см, причем индуктивность самого разрядника была 40—60 см. При этом максимальный ток на первом полупериоде увеличился в 1,4 раза. Наибольшая величина начальной производной тока $\left(\frac{d\mathcal{I}}{dt}\right)_0$, определенная непосредственно из осциллограммы, оказалась около 10^{12} а/сек (при начальном напряжении 120 кВ). Эта величина несколько больше значения $\left(\frac{V}{L}\right)_0$. Это можно объяснить тем, что в начальной стадии разряда действует не вся индуктивность ошиновки, а только индуктивность ее центральной части (батарея конденсаторов работает как система с распределенными параметрами).

Паразитная индуктивность установки с вакуумным разрядным устройством могла быть сделана еще меньше путем рационального конструирования подводющих шин и самих конденсаторов. Но в настоящий момент такое уменьшение не имеет смысла. Как будет ясно из изложения экспериментального материала, существенное влияние на разряд оказывают периферические токи, текущие вблизи стенок. Эти токи существуют в течение всего процесса сжатия. Существенное влияние на их величину оказывают загрязнения, попадающие в камеру со стенок вследствие выделения на них энергии в процессе рецрида. Некоторой мерой «энергизации» стенок может служить полная нагрузка на единицу их площади, равная полной энергии конденсаторной батареи, деленной на площадь стенок: Если на прежней установке эта нагрузка при $U_0=40$ кВ составляла 5 дж/см², то на новой установке при $U_0=120$ кВ она равна 53 дж/см², что, по-видимому, близко к пределу, определяемому механической прочностью фарфора. При таких энерговыделениях уже на начальной стадии разряда в дейтерий может попасть большое количество атомов материала стенок. Сильный разогрев поверхности стенок при разряде, по-видимому, меняет их структуру и это приводит к тому, что после разряда на $U_0=100-120$ кВ даже при наличии хорошего начального вакуума в камере требуется ждать некоторое время (2—3 часа) и затем проводить тренировку камеры несколькими разрядами при низком напряжении. Иначе осциллограммы \mathcal{I} и V будут показывать резкую загрязненность газа при разряде (сглаженность в моменты особенностей).

§ 2. Результаты обработки осциллограмм тока и напряжения

На рис. 2 и 3 приведены осциллограммы тока и напряжения при давлении $0,05$ мм рт. ст и различных начальных напряжениях от 40 до 120 кВ для разрядов в дейтерии. На рис. 4 приведены некоторые осциллограммы для других начальных давлений. Все эти осциллограммы получены при работе на искровом разряднике. Аналогичные осциллограммы, полученные при работе на той же установке с вакуумным разрядным устройством, приведены на рис. 5. Сравнение этих двух серий осциллограмм показывает, что качественно они не отличаются друг от друга. Различаются они только тем, что при работе на вакуумном разрядном устройстве: 1) амплитуда тока больше в $1,4$ раза; 2) доля полного напряжения, лежащая на камере в начальный момент, несколько больше; 3) время наступления первой особенности несколько меньше, чем при работе на искровом разряднике. Некоторые данные о зависимости вре-

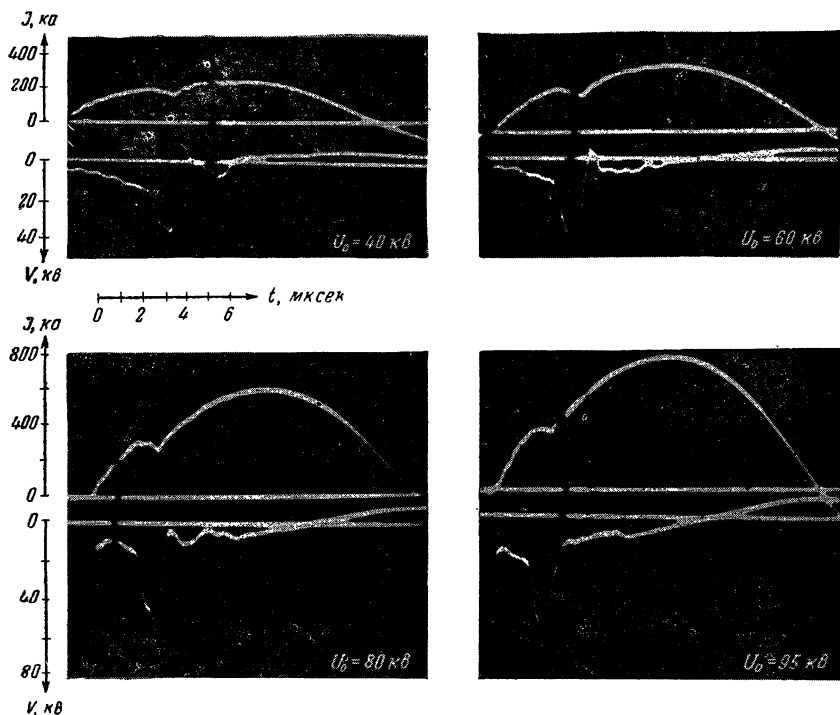


Рис. 2. Осциллограммы тока \mathcal{I} и напряжения V для $r_0 = 0,05$ мм рт. ст. и различных U_0 .

мени особенности от начальных напряжения и давления приведены на рис. 6 и 7.

При начальных напряжениях 40 и 60 кВ на осциллограммах напряжения отчетливо видны выбросы, соответствующие первой и второй особенностям. При повышении начального напряжения выбросы на осциллограмме напряжения, отвечающие второй особенности, сглаживаются, и при $U_0 = 100-120$ кВ вторая особенность не заметна ни на токе, ни на напряжении.

По осциллограммам \mathcal{I} , V можно рассчитать индуктивность L газового промежутка:

$$L_t = \frac{\int_0^t V d\tau}{\mathcal{I}_t}$$

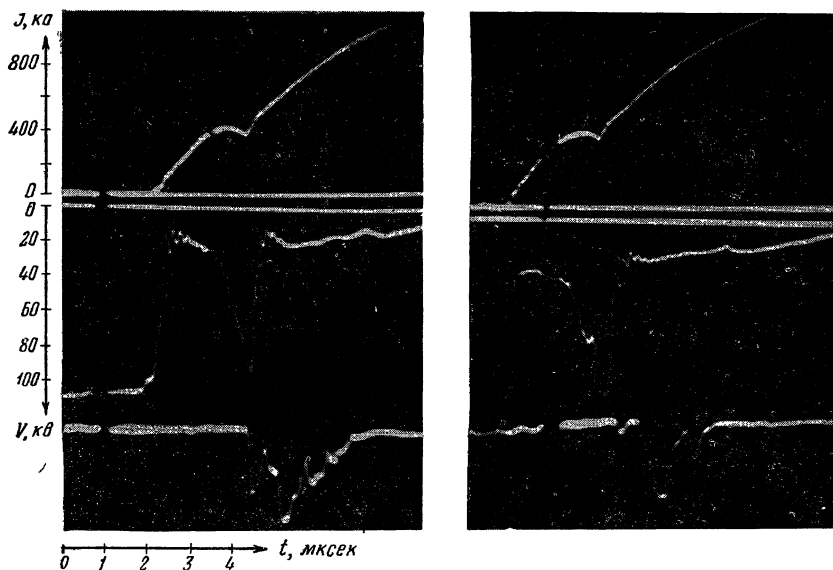


Рис. 3. Осциллограммы тока I , напряжения V и нейтронного импульса для $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и $U_0 = 110$ кВ (слева) и $U_0 = 120$ кВ (справа).

(омическим сопротивлением пренебрегаем), а по индуктивности оценить эффективный радиус токового столба $r_{эф}$ из соотношения

$$L = 2l \ln \frac{R}{r_{эф}},$$

где l — длина камеры, R — радиус коаксиала.

Полученные таким способом кривые индуктивности газового промежутка для разрядов при $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и различных U_0 приведены на рис. 8. Кривые рассчитаны для установки с вакуумным разрядным устройством. Пунктиром нанесена кривая для установки с искровым разрядником при $U_0 = 120$ кВ. На шкале справа нанесены соответствующие значения эффективного радиуса. Отметим, что максимальная индуктивность газового промежутка приблизительно одинакова при всех начальных напряжениях от 60 до 120 кВ. При сокращении паразитной индуктивности установки (когда искровой разрядник был заменен вакуумным) эта максимальная индуктивность несколько уменьшилась: до 0,2 мкГн вместо 0,3 мкГн при работе с искро-

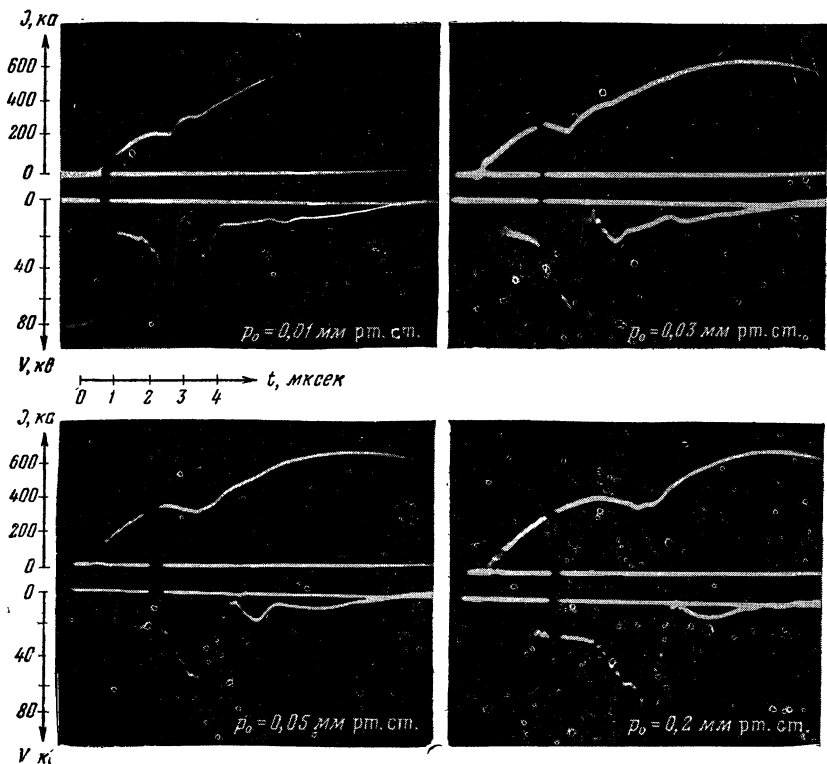


Рис. 4. Осциллограммы тока \mathcal{I} и напряжения V при $U_0 = 80$ кВ и различных p_0 .

вым разрядником. Отсюда вряд ли можно сделать вывод о меньшей степени сжатия при сокращении паразитной индуктивности, так же как и вывод о независимости степени сжатия от напряжения. Дело в том, что полученные значения эффективного радиуса могут заметно отличаться от действительного радиуса сжимающегося тока, так как на значении индуктивности оказывает большое влияние ток на периферии разряда, который, как видно из дальнейшего, на всех стадиях разряда составляет значительную долю полного тока. Например, если предположить, что в стадии максимального сжатия половина тока течет у самых стенок камеры, то вместо значения эффективного радиуса центрального столба 4,2 см мы получим значение 0,9 см. Максимальная скорость сжатия, рассчитанная по изменению индуктивности вблизи особенности, равняется $9 \cdot 10^6$ см/сек для установки с искровым разрядником и

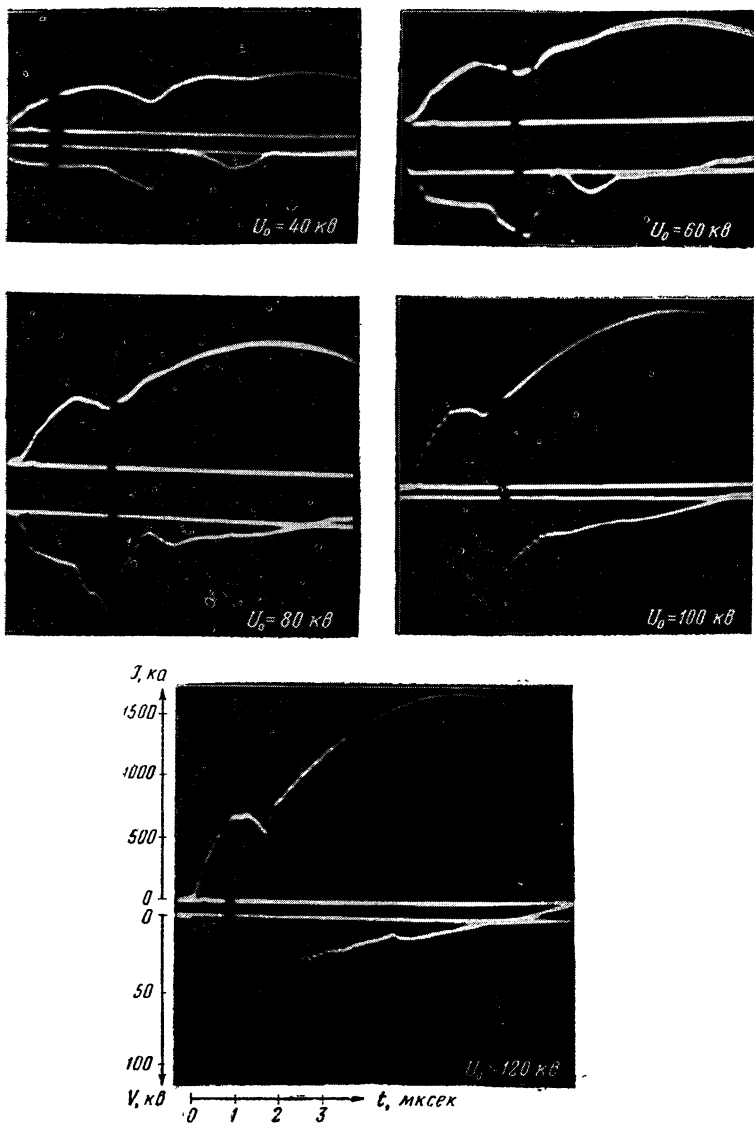


Рис. 5. Осциллограммы тока I и напряжения V для $p_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$ и различных U_0 , полученные на установке с вакуумным разрядником.

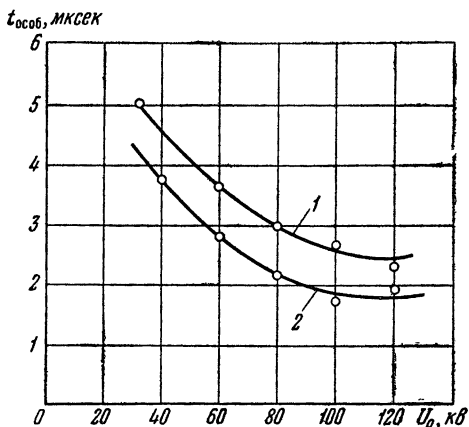


Рис. 6. Зависимость времени первой особенности от U_0 для $p_0 = 0,05$ мм рт. ст.

1 — с искровым разрядником ($L_{\text{пар}} = 250$ см);
2 — с вакуумным разрядником ($L_{\text{пар}} = 180$ см).

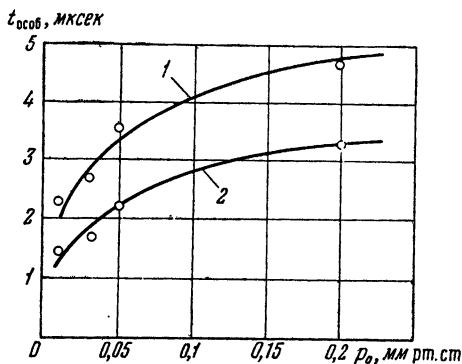


Рис. 7. Зависимость времени первой особенности от p_0 для $U_0 = 80$ кВ.

1 — с искровым разрядником ($L_{\text{пар}} = 250$ см);
2 — с вакуумным разрядником ($L_{\text{пар}} = 180$ см).

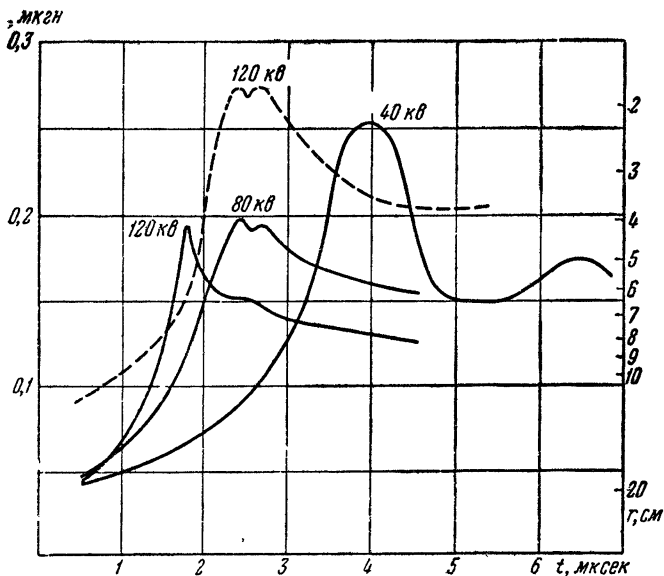


Рис. 8. Индуктивность газового промежутка в зависимости от времени ($p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и разные U_0).

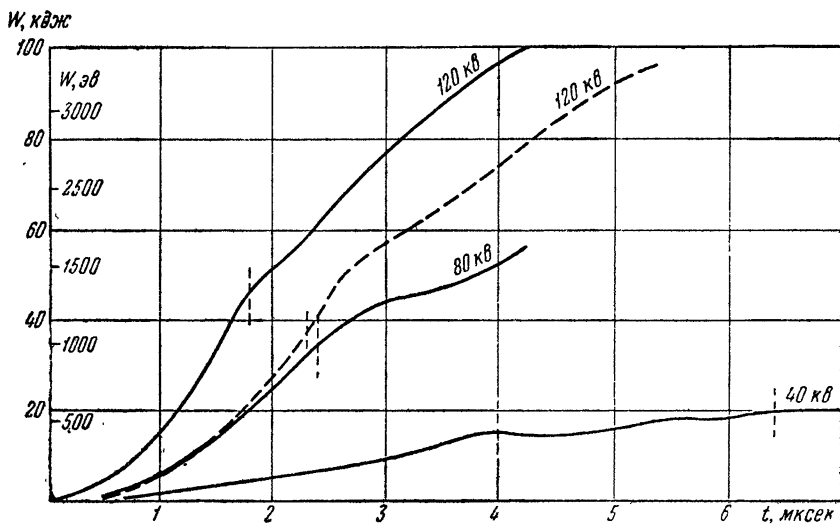


Рис. 9. Энергия W , вкладываемая в разряд, в зависимости от времени при $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и различных U_0 .

$1,6 \cdot 10^7$ см/сек — для установки с вакуумным разрядником (при начальном напряжении 120 кв и начальном давлении дейтерия 0,05 мм рт. ст.). По вышеизложенной причине действительные максимальные скорости, достигаемые в разряде, больше приведенных значений.

Оценим среднюю энергию, выделяющуюся в разряде на одну частицу. Рассчитанная по формуле.

$$W_t = \int_0^t \mathcal{F} V d\tau$$

энергия, вкладываемая в разряд при различных U_0 и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст., изображена на рис. 9. Кривые приведены для установки с вакуумным разрядным устройством. Там же пунктиром нанесена кривая для $U_0 = 120$ кв, полученная на установке с искровым разрядником. На приведенной справа шкале дается энергия в электрон-вольтах, деленная на полное число дейтронов в разрядной камере.

§ 3. Распределение магнитного поля и плотности тока внутри разряда

Магнитное поле в разряде измерялось с помощью маленьких катушек, вставленных внутрь разряда в фарфоровых трубочках с наружным диаметром 6 мм (так называемые магнитные зонды). Напряжение с катушек интегрировалось цепочкой RC и затем усиливалось. Полоса пропускания всей системы была от 10^3 до 10^7 гц. Подробное описание методики дано в работе авторов [1]. Магнитные измерения проводились только на установке с искровым разрядником при напряжениях до 100 кв. Оттенировать трубу с вставленными зондами оказалось очень трудно из-за частых механических поломок зондов при разрядах. Получить более или менее чистые данные при $U_0 = 100$ кв удалось только при введении зондов со стороны низковольтного фланца камеры (рис. 10). Зонды находились на расстоянии 6 см от электрода на различных расстояниях от оси трубы. Сравнение показаний этих зондов с показаниями зондов, введенных в среднюю плоскость трубы сбоку (рис. 10), производилось на плохо тренированной трубе. Серии осциллограмм, полученных при разных способах введения зондов, достаточно хорошо совпадали.

На рис. 11 приведены осциллограммы тока, магнитного поля H_φ на расстояниях 3, 5, 10 см от оси камеры и нейтронного импульса для наиболее чистого случая, который удалось полу-

Таблица 1

Средние скорости перемещения внутренней границы тока в *см/сек* для разряда при $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. и различных начальных напряжениях

U_0 (кв)	от $r = 20$ см до $r = 10$ см	от $r = 10$ см до $r = 5$ см	от $r = 5$ см до $r = 3$ см
100	$4,3 \cdot 10^6$	$9,4 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^7$
80	$4,6 \cdot 10^6$	$8,3 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^6$
60	$3,8 \cdot 10^6$	$5,4 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$

чить при $U_0 = 100$ кв и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. На рис. 12 приведены гистограммы плотности тока в кольцевых зонах в отдельные моменты времени, рассчитанные по осциллограммам рис. 11.

Средние скорости перемещения внутренней границы тока к оси камеры для разрядов при различных U_0 приведены в табл. 1.

Для разряда при $U_0 = 100$ кв и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. из изменения индуктивности получено максимальное значение скорости около $9 \cdot 10^6$ см/сек. Мы видим, что истинное значение скорости раза в полтора больше.

Из осциллограмм рис. 11 видно, что магнитное поле появляется в центре камеры позже момента первой особенности. В том интервале времени, в котором существует магнитное поле в центральной зоне, на осциллограмме напряжения нет никаких выбросов (при $U_0 = 100$ кв). Это естественно объяс-

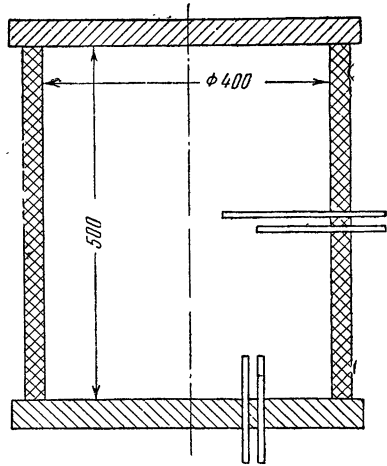


Рис. 10. Схема установки магнитных зондов (размеры даны в миллиметрах).

няется тем, что вид кривых полного тока и напряжения на камере определяются полной индуктивностью камеры, а ее значение сильно зависит от доли тока, текущего у стенок камеры. Из рис. 12 видно, что на всех стадиях разряда плотность тока, текущего в зоне $r = 10 - 20$ см, не меньше чем $0,2$ ка/см². При этом есть все основания считать, что вблизи стенок плотность тока в несколько раз больше этой средней цифры. Напомним, что в работе [1], где измерения были про-

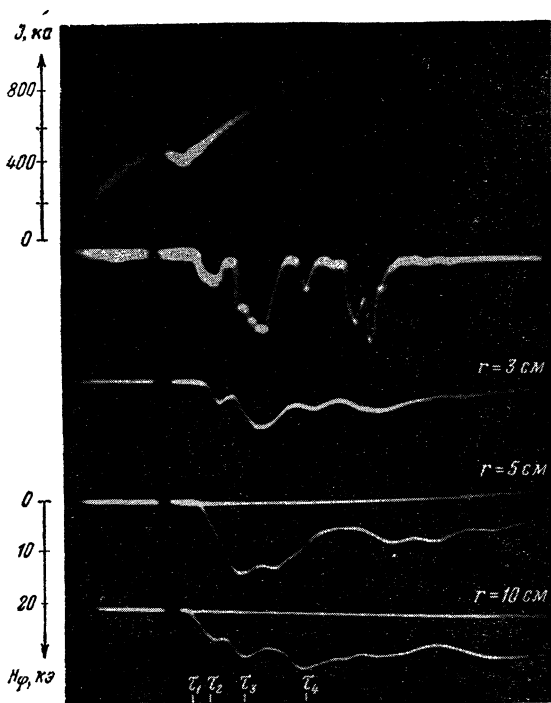


Рис. 11. Осциллограммы тока и магнитного поля H_{ϕ} на различных расстояниях от оси камеры для $U_0 = 100 \text{ кэ}$ и $p_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$

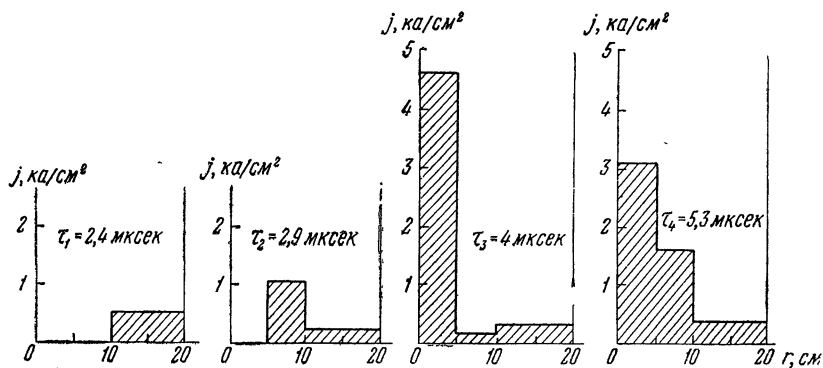


Рис. 12. Распределение плотности тока по сечению камеры в различные моменты времени.

ведены в чистых условиях, плотность тока у стенки в момент максимального сжатия была около $0,02 \text{ ка/см}^2$.

Время существования магнитного поля, а следовательно, и тока в центральной зоне камеры в данной установке относительно больше, чем в установках, рассчитанных на максимальное напряжение $40\text{--}50 \text{ кв}$. Возможно, что большие периферийные токи придают некоторую устойчивость центральному разряду, препятствуя его изгибанию.

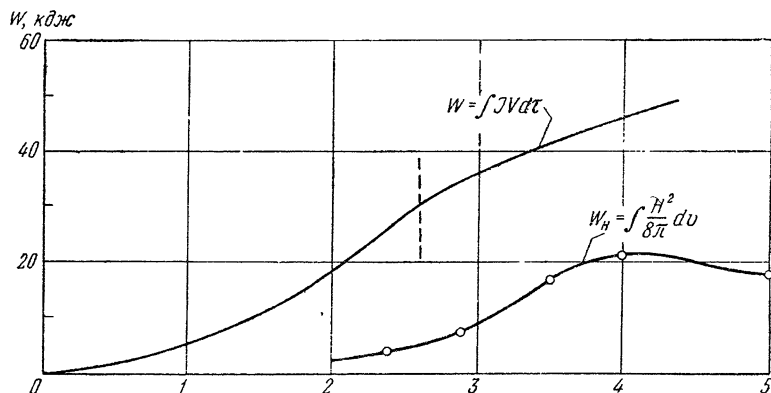


Рис. 13. Энергия W , вкладываемая в разряд, и энергия магнитного поля W_H для $U_0 = 100 \text{ кв}$ и $p_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$

Испускание нейтронов наблюдается в то время, когда в центральной зоне существует значительное магнитное поле.

Зная значения магнитного поля в различных точках разряда, можно рассчитать энергию магнитного поля в предположении цилиндрической симметрии разряда. Результаты такого расчета для $U_0 = 100 \text{ кв}$ и $p_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$ представлены на графике рис. 13. Из этого графика видно, что на всех стадиях разряда до момента первого сжатия энергия магнитного поля меньше половины полной энергии, вложенной в разряд.

Обращаясь к наиболее мощному режиму разряда ($U_0 = 120 \text{ кв}$), мы можем видеть из графиков рис. 9, что вложенная в разряд энергия в расчете на один дейтрон составляет к моменту первой особенности 1500 эв . Отбрасывая в соответствии с вышеизложенным примерно 35% этой энергии, приходящейся на магнитное поле, и пренебрегая потерями, получаем энергию на один дейтрон примерно 1000 эв . Энергии частиц 1000 эв должна соответствовать максимальная скорость сжатия $v \approx 3 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$. Оценки скорости по изменению индуктивности дают максимальную цифру $1,6 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$. Так как оценки скорости по

изменению индуктивности по причинам, изложенным выше, являются заниженными, то можно считать, что имеющиеся в действительности кинетические энергии частиц перед схлопыванием близки к величине 1000 эв. После схлопывания в центральной зоне направленная скорость частиц переходит в беспорядочную и вместе с тем начинается обмен энергией между ионами и электронами. Оценки показывают, что нагрев электронов происходит за достаточно малые времена. В таком случае температура плазмы в центральном столбе будет около 350 эв.

§ 4. Жесткие излучения

На описанной установке разряд в дейтерии сопровождался появлением жестких излучений нейтронного и рентгеновского. Нейтронное излучение измерялось интегрально с помощью бета-счетчика с серебром. Кроме того, снимались осциллограммы нейтронного импульса с помощью сцинтилляционного регистратора, закрытого слоем свинца в 2,5 см (для защиты от жесткого рентгеновского излучения). Осциллограммы импульсов жесткого рентгеновского излучения получались с помощью того же сцинтилляционного регистратора без свинцового экрана, при замене дейтерия водородом. Полоса пропускания аппаратуры была от 10^3 до 10^7 гц.

Жесткое рентгеновское излучение отмечалось во всем рабочем диапазоне напряжений от 40 до 120 кэ, причем при $U_0 = 40$ кэ оно появлялось на второй особенности (рис. 14). Ширина пика рентгеновского излучения была не больше 0,3 мксек.

Нейтронное излучение при $U_0 = 40$ кэ при разрядах в дейтерии наблюдалось редко. При $U_0 = 60$ кэ нейтронное излучение было слабым (в два-три раза превосходило фон бета-счетчика, который соответствовал $1,5 \cdot 10^6$ нейтронов) и только при более высоких напряжениях появлялось значительное нейтронное излучение. Наблюдаемые средние и максимальные абсолютные выходы нейтронов на один разряд при различных U_0 и $p_0 = 0,05$ мм рт. ст. приведены в табл. 2. Таблица составлена по данным работы на установке и искровым разрядником, где была набрана значительная статистика. При $U_0 = 120$ кэ было произведено только три разряда и выводить среднюю цифру не имеет смысла.

Нейтронный импульс при $U_0 = 60$ кэ и выше начинается в районе первой особенности, т. е. приблизительно там же, где появляется импульс жесткого рентгеновского излучения. Что касается интервала времени, в течение которого регистрируется нейтронное излучение, то при $U_0 = 80-120$ кэ он гораздо больше ширины пика жесткого рентгеновского излучения и

достигает 2—3 *мксек*. Ряд контрольных опытов показал, что такая длительность нейтронного импульса не является аппаратурным эффектом. При низких начальных напряжениях (40—60*кв*) ширина нейтронного пика не больше 0,3—0,4 *мксек*.

Сравнительно длительное существование нейтронного излучения на данной установке указывает на длительное существование состояния сжатия.

На всех фотографиях нейтронного импульса при $U_0 = 100—120$ *кв* видно, что интенсивность нейтронного излучения колеблется со временем. Время этих колебаний, по-видимому, можно согласовать с периодом инерционных колебаний токового столба (1,5—2 *мксек*).

Т а б л и ц а 2

U_0 (<i>кв</i>)	Среднее число нейтронов	Максимальное число нейтронов
60	$3,5 \cdot 10^6$	$6,8 \cdot 10^6$
80	$1,8 \cdot 10^7$	$2,6 \cdot 10^8$
100	$3,5 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$

Нейтронное излучение начинается одновременно с жестким рентгеновским излучением, но длится гораздо дольше (рис. 14, 15). Жесткое рентгеновское излучение указывает на то, что в разряде существуют большие электрические поля, а следовательно, возможно появление ускоренных до больших энергий дейтронов. На тех установках, где нейтронное излучение существует одновременно с жестким рентгеновским излучением, прямым экспериментом доказано существование в разряде дейтронов, ускоренных до больших энергий [3]. При этом максимальная энергия дейтронов совпадает с максимальной энергией рентгеновских квантов [4].

Некоторая доля нейтронного излучения, не сопровождаемого жестким рентгеновским излучением, может быть обусловлена термоядерными реакциями. По оценкам § 2 температура сжатого столба составляет около 350 эв. При такой температуре $\langle \sigma v \rangle = 5 \cdot 10^{-26}$ *см³/сек*. Полный выход нейтронов равен

$$N = \frac{1}{2} n^2 \langle \sigma v \rangle t V_{сж} = \frac{1}{2} k n_0 (n_0 V_0) \langle \sigma v \rangle t, \quad (1)$$

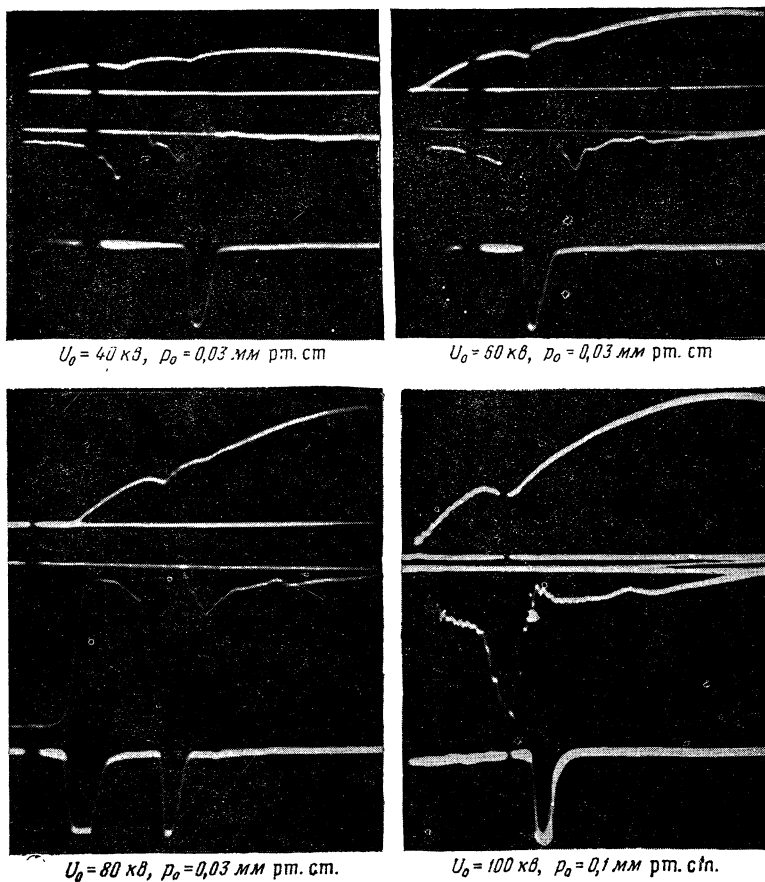
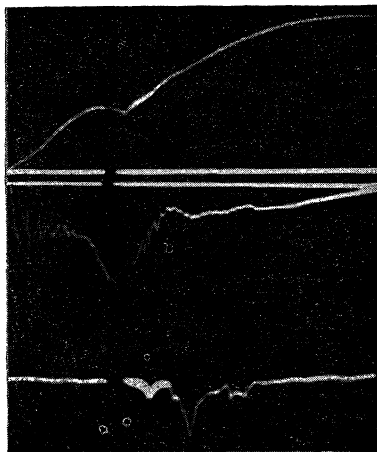
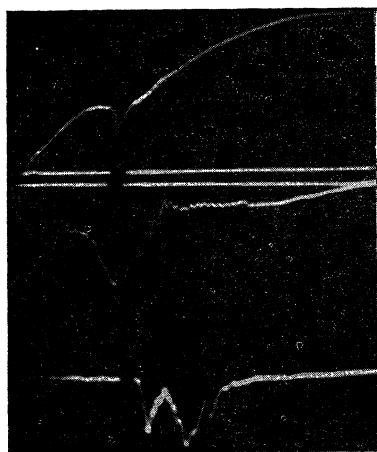
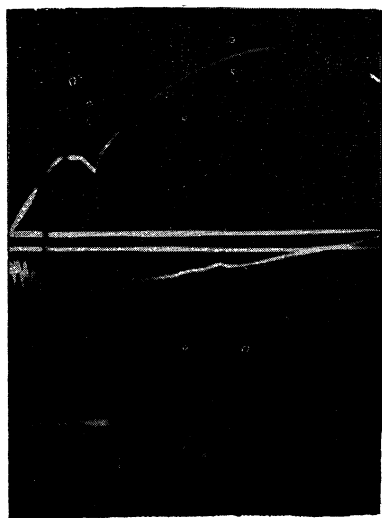


Рис. 14. Осциллограммы тока, напряжения и импульса жесткого рентгеновского излучения для разрядов в водороде.

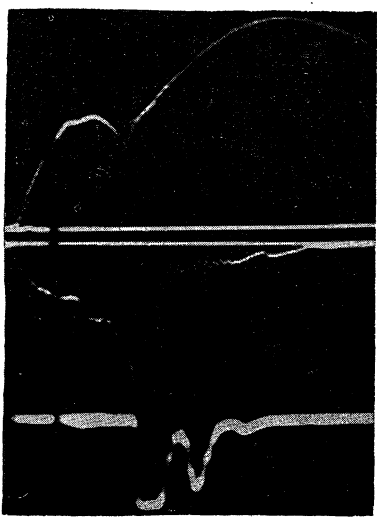
где k — коэффициент сжатия; n_0 — начальная плотность частиц, V_0 — объем камеры; $t \simeq 2 \text{ мксек}$ — длительность испускания нейтронов. Тогда для $p_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$ $N = 5 \cdot 10^4 k$. На данной установке измерение плотности в центральной зоне не производилось, но по данным С. Ю. Лукьянова и В. И. Сивницына [5]; полученным на аналогичной установке, плотность в центре увеличивается в 30—40 раз. Таким образом, небольшая доля нейтронного выхода при $U_0 = 100\text{—}120 \text{ кВ}$ может быть обусловлена термоядерными реакциями в центральной зоне.



$U_0 = 100 \text{ кВ}, \rho_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$



$U_0 = 105 \text{ кВ}, \rho_0 = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$



$U_0 = 120 \text{ кВ}, \rho_0 = 0,2 \text{ мм рт. ст.}$

Рис. 15. Осциллограммы тока, напряжения и нейтронного импульса, полученные на установке с искровым (вверху) и вакуумным (внизу) разрядниками.

При напряжениях 40—60 кэ аналогичные оценки температуры дают значения ниже 200 эв. При таких температурах расчет по формуле (1) дает нейтронный выход на 3—4 порядка меньше наблюдаемого, т. е. в этом случае нейтронный выход может быть объяснен только появлением небольшой группы дейтронов, ускоренных до больших энергий. Напомним, что при $U_0=40—60$ кэ нейтронное излучение возникает одновременно с рентгеновским и длится такое же время.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, см. настоящее издание, т. 2, стр. 185.
 2. С. М. Осовец, см. настоящее издание, т. 3, стр. 165.
 3. В. Ф. Демичев, Ю. Г. Прохоров, см. настоящий том, стр. 81
 4. С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный. Атомная энергия, **3** (1956).
 5. С. Ю. Лукьянов, В. И. Синицын. Доклад, представленный на Женевскую конференцию по мирному использованию атомной энергии, 1958 г.
-

*С. И. Брагинский, И. М. Гельфанд,
Р. П. Федоренко*

ТЕОРИЯ СЖАТИЯ И ПУЛЬСАЦИЙ ПЛАЗМЕННОГО СТОЛБА В МОЩНОМ ИМПУЛЬСНОМ РАЗРЯДЕ *

Рассмотрена магнитогидродинамическая задача о сжатии и пульсациях плазменного столба. Система уравнений в частных производных, описывающая шнур, совместно с электротехническими уравнениями для разрядной цепи проинтегрирована численно на электронной вычислительной машине. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными.

Одним из способов получения высокотемпературной плазмы является использование мощного импульсного разряда в газе.

Плазменный столб, образующийся при пропускании мощного импульса тока в цилиндрической разрядной камере, сжимается под действием магнитных сил со скоростью, которая определяется величиной сжимающей силы и инерцией плазмы. Качественная теория этого сжатия была развита М. А. Леонтовичем и С. М. Осовцом [1] с помощью модели шнура, в которой давление и плотность связаны уравнением адиабаты, и в предположении о линейном росте тока со временем. В дальнейшем С. И. Брагинским и А. Б. Мигдалом [2] были качественно рассмотрены основные физические процессы, существенные в таком мощном импульсном разряде с быстрым нарастанием тока. С. М. Осовец [3] рассмотрел с помощью той же модели шнура, что и в [1], также сжатие и пульсации шнура в том случае, когда индуктивность самого шнура существенно сказывается на характере изменения тока со временем.

* Работа выполнена в 1957—1958 гг.

В настоящей работе для описания шнура используются уравнения магнитной гидродинамики, к которым добавляются электротехнические уравнения для разрядной цепи. При этом одновременно находятся вся картина сжатия и пульсаций шнура и изменение тока и напряжения со временем. Задача сводится к системе нелинейных уравнений в частных производных, которая была проинтегрирована численно на электронной вычислительной машине. Вывод основных уравнений и обсуждение результатов (§ 1, 3) выполнены С. И. Брагинским, численное решение системы уравнения (§ 2) выполнено под руководством И. М. Гельфанда и Р. П. Федоренко.

§ 1. Основные уравнения

Картина мощного импульсного разряда в прямой цилиндрической разрядной камере имеет, в общих чертах, следующий вид. Вначале в камере имеется холодный нейтральный газ. После того как приложено напряжение, происходит пробой газа, и по прошествии некоторого первоначального периода разгорания и появления в газе заметной проводимости разряд сосредоточивается, вследствие скин-эффекта, вблизи стенок камеры. Далее, с течением времени продолжается увеличение ионизации газа, которое в основном происходит в тех областях разряда, где течет ток и, следовательно, выделяется джоулево тепло, хотя наличие излучения может приводить к некоторой ионизации и в тех областях, где большого тока нет. Электропроводность плазмы вначале растет примерно пропорционально степени ионизации, но когда последняя достигает нескольких процентов, становятся преобладающими столкновения электронов с ионами и быстрый рост электропроводности прекращается. Если столкновениями с нейтральными частицами можно пренебречь, то проводимость определяется лишь температурой электронов T_e и равна («кулоновский логарифм» принят равным $\lambda=7$)

$$\sigma = 1,3 \cdot 10^{13} T_{e(\text{эВ})}^{3/2} \text{ сек.}^{-1}$$

Пока ионизация неполная, температура электронов остается примерно постоянной (около 3 эВ), так как увеличение температуры привело бы к резкому возрастанию потерь энергии на возбуждение и ионизацию атомов. Проводимость плазмы при этом тоже остается примерно постоянной ($\sim 10^{13} - 10^{14}$ сек.⁻¹).

Образующаяся в результате ионизации плазма стягивается к оси камеры под действием силы магнитного сжатия $\frac{1}{c} jH$. От заряженных частиц к нейтральному газу эта сила передается посредством столкновений — главным образом столкно-

вений ионов с атомами, приводящих к перезарядке. После достижения достаточно высокой ионизации, обеспечивающей сцепление между ионами и нейтральными частицами, магнитные силы сжимают газ подобно поршню. Быстрое сжатие газа приводит к возникновению в нем сильных ударных волн, сходящихся к оси и затем отражающихся. Разрядный столб испытывает быстро чередующиеся сжатия и расширения. Газ, бывший вначале холодным, сильно нагревается вследствие диссипации в ударной волне и последующего сжатия. Для расчета этих явлений будем схематически рассматривать плазму как одноатомный идеальный газ с постоянной электропроводностью. Эта модель не учитывает ионизацию и потерю энергии на излучение, а также неполноту увлечения нейтральных частиц заряженными, на которые непосредственно действуют электромагнитные силы. Можно, однако, ожидать, что принятая модель правильно учитывает основные механические и электродинамические эффекты: инерцию и движение газа, нагрев в ударной волне и при сжатии, скин-эффект. Свободный пробег частиц при магнитогиродинамическом расчете считается малым. Приведем некоторые оценки. Пусть, например, начальное давление $p_0 = 0,2$ мм рт. ст. При сечении порядка $3 \cdot 10^{-16}$ см² свободный пробег атомов равен 0,2 см. Сечение резонансной перезарядки около $3 \cdot 10^{-15}$ см², соответствующий свободный пробег иона 0,02 см. При сжатии, приняв 30-кратное уплотнение, полную ионизацию и температуру ионов 10^2 эв, получим длину свободного пробега иона около 0,1 см, что соответствует времени свободного пробега порядка 10^{-8} сек. В этих условиях время нагрева электронов при упругих (кулоновских) столкновениях с ионами составляет около 10^{-7} сек.

Будем считать плазменный столб цилиндрическим и однородным по длине, пренебрегая влиянием электродов.

Магнитогиродинамические уравнения для плазмы имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial rv}{r \partial r} = 0, \quad [(1.1a)]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c} jH, \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rv \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right] = jE, \quad (1.1c)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c \frac{\partial E}{\partial r}, \quad (1.1d)$$

$$\frac{\partial rH}{r\partial r} = \frac{4\pi}{c} j, \quad (1.1e)$$

$$j = \sigma \left(E + \frac{v}{c} H \right), \quad (1.1f)$$

$$T = M \frac{p}{\rho}, \quad (1.1g)$$

здесь ρ — плотность; v — скорость; p — давление; H — магнитное поле; E — электрическое поле вдоль оси; j — плотность тока. Все эти величины зависят от радиуса r и времени t . Выражение (1.1g) представляет собой уравнение состояния плазмы. Если все частицы имеют одинаковую температуру, то под M надо понимать среднюю массу частицы. Далее мы будем везде подставлять в качестве M среднюю массу атома, тогда величина T связана с температурами ионов T_i и электронов T_e (в энергетических единицах) соотношением $T = T_i + \xi T_e$, где ξ — степень ионизации, и температуры ионов и атомов считаются одинаковыми. Во время процесса связь температур с величиной T меняется, но это не сказывается в принятой схеме расчета, так как остальные уравнения системы (1.1) не зависят от (1.1g).

В начальный момент покоящийся газ занимает все сечение разрядной камеры $0 \leq r \leq a_0$ и имеет плотность ρ_0 и давление $p_0 \approx 0$, затем он сжимается и занимает область $0 \leq r \leq a(t)$, где $a(t)$ — координата края плазменного цилиндра, должна определяться в процессе интегрирования уравнений. Вне плазмы $\sigma = 0$, $j = 0$, так что для магнитного поля вместо (1.1e) имеем

$$H(t, r) = \frac{2I(t)}{cr} = \frac{a_0}{r} H(t, a_0), \quad (1.1h)$$

где I — полный ток.

Ток в разряде I возбуждается конденсатором с емкостью C , заряженным до начального напряжения V_0 и разряжающимся через соединенные последовательно разрядный промежуток длиной l и некоторую «паразитную» индуктивность L_0 . Соответствующие электротехнические уравнения

$$C \frac{dV}{dt} = -I = -\frac{ca_0}{2} H(t, a_0), \quad (1.2)$$

$$lE(t, a_0) = V - \frac{1}{c^2} L_0 \frac{dI}{dt} = V - \frac{a_0 L_0}{2c} \frac{dH(t, a_0)}{dt} \quad (1.3)$$

дают граничные условия для электрического и магнитного полей. Здесь $V(t)$ — напряжение на конденсаторе в момент t . В области между шнуром и стенкой камеры $a < r < a_0$ электрическое и магнитное поля определяются по уравнениям (1.1d), (1.1h). Электрическое поле в этой области, вообще говоря, неоднородно вдоль оси, но легко показать, что при этом все же получаются правильные граничные условия для шнура, если только сам шнур можно считать однородным в направлении вдоль оси. Уравнения (1.1), (1.2), (1.3) приводят к закону сохранения энергии в виде

$$\int_0^a \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{H^2}{8\pi} \right) 2\pi r dr + \left(\frac{2l}{c^2} \ln \frac{a_0}{a} + L_0 \right) \frac{I^2}{2} + \frac{CV^2}{2} = \frac{CV_0^2}{2}. \quad (1.4)$$

Для численного интегрирования удобно выбрать за единицу измерения длины радиус разрядной камеры a_0 , за единицу плотности — плотность невозмущенного газа ρ_0 , за единицу напряжения начальное напряжение конденсатора V_0 , и принять для остальных величин следующие единицы измерения (обозначим их теми же буквами, что и сами величины, но с индексом 1):

$$v_1 = \frac{a_0}{t_1}; \quad p_1 = \rho_0 v_1^2; \quad T_1 = M v_1^2;$$

$$E_1 = \frac{v_1}{c} H_1 = \frac{V_0}{l}; \quad H_1 = (4\pi\rho_0)^{1/2} v_1 = \frac{ct_1}{a_0} \frac{V_0}{l}; \quad (1.5)$$

$$t_1 = \left(\frac{\sqrt{4\pi\rho_0} a_0^2 l}{cV_0} \right)^{1/2} = 4,13 \cdot 10^{-6} p_{\text{мм рт. ст.}}^{1/4} a_0 \left(\frac{l_{\text{см}}}{V_{0e}} \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Численный коэффициент в (1.6) подсчитан для дейтерия. Введем также безразмерные параметры:

$$K_C = \frac{2lC}{c^2 t_1^2}, \quad (1.7)$$

$$K_L = \frac{L_0}{2l}, \quad (1.8)$$

$$K_\sigma = \frac{4\pi a_0^2 \sigma}{c^2 t_1}. \quad (1.9)$$

В выбранных единицах уравнения и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial rv}{r \partial r} = 0, \quad (1.10a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} - H \frac{\partial rH}{r \partial r}, \quad (1.10b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[rv \left(\frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} \right) \right] = E \frac{\partial rH}{r \partial r}, \end{aligned} \quad (1.10c)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial r},$$

$$\frac{\partial rH}{r \partial r} = K_\sigma (E + vH), \quad (1.10e)$$

$$T = \frac{p}{\rho}, \quad (1.10f)$$

при $a(t) \leq r \leq 1$

$$H(t, r) = \frac{1}{r} H(t, 1), \quad (1.10g)$$

$$E(t, r) = E(t, 1) - \frac{dH(t, 1)}{dt} \ln \frac{1}{r}, \quad (1.10h)$$

$$\text{при } t=0 \quad \rho=1; \quad v=0; \quad p=0; \quad H=0; \quad V=1, \quad (1.11)$$

$$\text{при } r=0 \quad v=0; \quad H=0, \quad (1.12)$$

$$\text{при } r=a(t) \quad p=0; \quad E, H \text{ — непрерывны}, \quad (1.13)$$

$$\text{при } r=1 \quad K_\sigma \frac{dV}{dt} = -H(t, 1), \quad (1.14a)$$

$$E(t, 1) + K_L \cdot \frac{\partial H(t, 1)}{\partial t} = V. \quad (1.14b)$$

Для численного интегрирования были выбраны следующие значения безразмерных параметров:

$$\gamma = 1,66; \quad K_L = 1; \quad 1/K_\sigma = 0,46; \quad K_\sigma = 8; \quad 64; \quad 512.$$

Значения K_L , K_σ были взяты близкими к соответствующим параметрам одной из экспериментальных установок [4] для начального давления $p = 0,2$ мм рт. ст. Дальнейшее уменьшение паразитной индуктивности (уменьшение K_L) практи-

чески затруднительно и уже не дает большого выигрыша в скорости нарастания тока. Величина емкости батареи (значение параметра K_c) соответствует тому, что на первой полувольте тока укладываются три сжатия. Обычно плазменный цилиндр разрушается вследствие неустойчивости вскоре после второго сжатия, поэтому значительное увеличение емкости (увеличение K_c) не имеет смысла. Параметр K_c (его иногда называют магнитным числом Рейнольдса) может, вообще говоря, для различных установок изменяться в широких пределах. Для расчета были выбраны значения этого параметра, дающие слабый $K_c = 8$, умеренный $K_c = 64$ и сильный $K_c = 512$ скин-эффект.

§ 2. Численное интегрирование

Для численного интегрирования систему (1.10) удобно переписать в лагранжевых координатах t, x , где $x = r|_{t=0}$. Тогда получаем следующую математическую задачу: проинтегрировать систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{r}{x\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{H}{\rho_0} \frac{\partial rH}{x\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{T}{\gamma - 1} + \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial rv}{x\partial x} - (E + vH) \frac{\partial rH}{\rho_0 x \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{H}{\rho r} &= \frac{1}{\rho_0 x} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_c^{-1} \frac{\partial rH}{r\partial r} \right), \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= v, \\ \rho r dr &= \rho_0 x dx, \\ \frac{\partial rH}{r\partial r} &= K_c (E + vH), \\ p &= \rho T, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

Здесь r — эйлеров радиус частицы. Эти уравнения действуют в области $0 \leq r \leq r(t, x=1)$, где $r(t, x=1)$ — внешняя граница шнура.

В области $r(t, x=1) \leq r \leq R = 1,03$ магнитное поле описывается системой уравнений:

$$H(t, r) = \frac{R}{r} H(t, R), \quad (2.2a)$$

$$E(t, R) - E(t, r) = \frac{dH(t, R)}{dt} \ln \frac{R}{r}. \quad (2.2b)$$

Граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad v=0; \quad H=0,$$

при $x=1$ $p=0$; H, E — непрерывны,
при $r=R$

$$\left. \begin{aligned} E(t, R) + K_L \frac{dH(t, R)}{dt} &= V(t), \\ K_C \frac{dV}{dt} &= -H(t, R), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

при $t=0$

$$\left. \begin{aligned} \rho(0, x) &= \rho_0 = 1, \\ T(0, x) &= 10^{-3}, \\ H(0, x) &= 0, \\ v(0, x) &= 0, \\ V(0) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1) в области $0 \leq x \leq 1$ интегрировалась численно методом конечных разностей. Уравнения (2.2) служили для переноса граничных условий (2.3) из точки $r=R$ в точку $r=r(t, x=1)$ — на границу шнура. Методика разностного счета содержит в этой задаче известные трудности, способ их преодоления представляет некоторый интерес и будет опубликован отдельно. Кроме того, при расчете данного явления мы сталкиваемся с наличием разрыва в решении (ударная волна) и большой скоростью движения ударной волны вблизи центра цилиндра. Для счета разрывных решений методом конечных разностей с успехом применяется метод введения искусственной нелинейной «вязкости», типа хорошо известной «вязкости» Неймана. При этом фронт ударной волны «размывается» на небольшое число счетных точек, а общая картина решения не искажается вне этой зоны размазанной ударной волны и скачки величин через зону волны удовлетворяют соотношениям на фронте ударной волны. Однако следует заметить, что проверка выполнения этих соотношений проста и дает хорошие результаты в простых случаях, близких к известному автомоделльному движению под действием равномерно движущегося поршня. В случае же, когда решение за фронтом ударной волны сильно возмущается (например, ускоренно движущийся поршень или в случае, когда ударную волну догоняет волна разрежения) — эти соотношения трудно проверить, так как нет четко выраженной зоны ударной волны.

Этим объясняется тот факт, что при первом сжатии, когда волна идет по холодному газу, нет ясно выраженного возрастания плотности в четыре раза, так как рассчитываемое явление в какой-то степени близко к движению под действием уско-ряющегося поршня и трудно точно выделить зону волны.

Следует заметить, что у внешней границы газового столба (Лагранжева координата $x=1$) рассчитываемое явление имеет довольно сложный характер — большое выделение джоулева тепла, значительные градиенты величин p , ρ , H ; кроме того, как это обычно бывает на границе счетной области, разностные формулы в крайней точке менее точны, чем во внутренних. Взаимодействие этих двух факторов (менее точные формулы и сложные процессы на границе) могло привести к некоторым ошибкам в счете в последнем счетном интервале. Можно предпо-лагать с достаточными основаниями, что заметные искаже-ния могут быть только в счете температуры в последней точке.

Численное решение уравнений вблизи особенности в системе координат ($r=0$) представляет известные трудности и требует особых предосторожностей.

Дело в том, что разностный оператор, аппроксимирующий соответствующий дифференциальный в обычных точках — мо-жет не аппроксимировать его вблизи особенности, где коэффи-циенты системы уравнений становятся величинами порядка $1/h$ (h — шаг по пространству). Разностный оператор, аппро-ксимирующий систему (2.1) выбирался таким, чтобы точность его не терялась в центре в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям.

При схождении цилиндрической ударной волны в центре могут возникнуть особенности. Результаты расчетов никаких особенностей не содержат. Это объясняется тем, что разност-ный счет дает величины в некотором смысле средние по счет-ному интервалу, — поэтому слабые особенности пропадают при численном решении уравнений.

На внешней границе газового столба должно выполняться граничное условие $p=0$. На графиках давление в крайней точке $p \neq 0$. Здесь дело в том, что в счете мы относим величины p , ρ , T к «полуцелым» счетным точкам с лагран-жевыми координатами $x=(m+1/2)h$, а величины r , v , H к «целым» $x=mh$. Граница газового столба находится в «целой» точке. В ней вводится еще нестандартное $p=0$, которое и используется в счете.

При анализе результатов следует помнить, что графики начерчены в лагранжевых координатах (в которых велся счет), и это объясняет кажущийся излом в графике H в последней точке. В графике же величины $j = \frac{drH}{rdr}$, учи-

тывающем расположении счетных точек в физическом пространстве — нет разрыва в последней точке.

Наличие локализованных в лагранжевых координатах и не исчезающих со временем неровностей в графиках плотности объясняется следующим образом. Одним из наиболее сильных источников ошибок при численном решении задачи является для данного процесса слишком сильное продвижение ударной волны за один счетный шаг по времени. При размазывании фронта ударной волны на 3—4 точки счет идет достаточно хорошо при продвижении зоны ударной волны не более чем на $\frac{1}{2}$ пространственного шага — при более быстром движении зоны волны появляется локализация во времени и пространстве погрешности. Рассчитываемое явление отличается значительной неравномерностью движения ударной волны, поэтому счет требовал постоянного наблюдения и частой смены шага по времени. Возникавшие по указанным выше причинам локальные погрешности в величинах p , v , H — быстро затухали и не заметны на результатах. Однако ошибки в энтропии ввиду адиабатического характера процесса локализовались в лагранжевых координатах — и проявляются в виде неровностей на графиках T и ρ (особенно заметно в ρ — из-за масштаба). На рис. 5—8 приведены в лагранжевых координатах распределения v , ρ , p , H по шнуру для разных моментов времени, на оси x указаны номера счетных точек. На рис. 9 приведено $j = \frac{\partial r H}{r \partial r}$ в эйлеровых координатах. Задача сосчитана на быстродействующей счетной машине по программе, составленной З. Ф. Бочковой.

§ 3. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментом

Для сравнения результатов расчета с экспериментальными данными на рис. 1 нанесено значение тока по осциллограмме, а на рис. 4,а нанесено значение радиуса, определенного по измерению индуктивности разрядного промежутка вычисленной из осциллограмм тока и напряжения. На рис. 4,а кружками отмечено также положение максимума магнитного поля по измерениям с магнитными зондами. Эти данные относятся к описанной в работе [4] разрядной камере радиусом $a_0 = 20$ см, длиной $l = 90$ см при начальном давлении дейтерия $p_0 = 0,2$ мм рт. ст., напряжении и емкости батареи конденсаторов $V_0 = 40$ кВ, $C = 83$ мкФ, паразитной индуктивности $L_0 = 180$ см. Соответствующее значение выбранной единицы времени $t_1 = 2,62 \cdot 10^{-6}$ сек. Общий характер изменения со временем тока и радиуса столба в расчете и в эксперименте находятся

в удовлетворительном согласии. Кривая $V - L_0I$ (рис. 2) имеет непосредственно за моментом максимального сжатия очень резкий спуск, соответствующий наблюдаемым «срывам» на осциллограммах напряжения.

В работе [4] была измерена для различных моментов времени разность между полной энергией, поступившей в разрядную камеру, и энергией магнитного поля. Эта разность дает энергию частиц (кинетическую и тепловую). Она имеет два максимума, соответствующих моментам первого и второго сжатия. Величина максимумов примерно одинакова и при $p_0=0,2$ мм рт. ст. равна 100 эв на частицу (на атом). При $p_0=0,05$ и $p_0=0,03$ получается 200 и 250 эв. Согласно расчету (рис. 3) энергия частиц также имеет максимумы в эти моменты времени. При $p_0=0,2$ величина максимума составляет 100 эв для первого сжатия и 120 эв — для второго. С изменением давления эти величины изменяются пропорционально $\sqrt{p_0}$, в согласии с экспериментом.

Для определения температуры ионов необходимо знать, как распределяется энергия между ионами и электронами. Если степень ионизации мала или если $T_e \ll T_i$, то $T_i \approx T$ и приведенным вычисленным значениям энергии соответствует $T_i=66$ и 80 эв. В другом крайнем случае, при полной ионизации и $T_e=T_i$, получается $T_i=T/2$, что соответствует $T_i=33$ и 40 эв.

Механизм нагрева наглядно демонстрируется графиками давления, приведенными на рис. 7. Первоначальный нагрев холодного газа происходит в сходящейся ударной волне, затем происходит дополнительный нагрев вследствие сжатия за фронтом волны и, наконец, нагрев в отраженной ударной волне, распространяющейся по уже горячему газу и поднимающей давление до максимума.

Измерения давления с помощью пьезоэлектрических датчиков были проделаны в [4] и [5]. В [4] было получено для $p_0=0,05$ мм рт. ст. (при разрешающем времени аппаратуры в 1 мксек) давление при сжатии 20 атм. В [5] (параметры разряда: $a_0=19$ см, $p_0=0,2$ мм рт. ст., при первом сжатии в момент $t=3,2 \cdot 10^{-6}$ сек. ток имеет минимум, равный 300 ка) было измерено при лучшем временном разрешении максимальное давление 120 атм. Эти величины удовлетворительно согласуются с расчетными.

В [4] приход импульсов давления и тока в область вблизи оси наблюдался одновременно. В экспериментах [5] импульс давления вблизи оси наблюдался заметно позже, чем импульс магнитного поля. Это указывает на сравнительно небольшую величину проводимости плазмы и «умеренный» скин-эффект, так как при значении параметра $K_s=512$ (что соответствует

$\sigma \approx 1,5 \cdot 10^{14}$) в момент прихода импульса давления в центр магнитное поле там еще отсутствует. Величина электропроводности достаточно точно не измерена, но вся совокупность данных, полученных в [4], не противоречит значению порядка нескольких единиц на 10^{13} сек.⁻¹ на стадии сжатия шнура.

Пользуясь результатами численного интегрирования, можно связать температуру с электрическими параметрами разрядной цепи. Усредненное по сечению шнура значение T удобно выразить через ток (в тот же момент времени) и число частиц на единицу длины шнура соотношением, аналогичным обычной «равновесной» формуле:

$$T = \frac{\eta I^2}{2c^2 N} = 3,12 \cdot 10^{12} \frac{\eta I_{кв}^2}{N} \text{ кэв.} \quad (3.1)$$

Здесь при $K_s = 64$ для максимума температуры при первом сжатии $\eta = 2,7$, а при втором $\eta = 2,1$, при $K_s = 512$ соответствующие значения $\eta = 3,2$ и $2,9$. В среднем за все время пульсаций $\eta \approx 1$, как и в равновесии, но в моменты сжатия $\eta > 1$ из-за влияния инерции. Ток, достигаемый к моменту сжатия, зависит от приложенного напряжения и индуктивности цепи. Пользуясь (1.5), (1.6), получим

$$T = \frac{\beta M c V_0}{\sqrt{4\pi\rho_0 l}} = \frac{\beta e V_0 a_0}{2l \sqrt{\Pi}}, \quad (3.2)$$

где

$$\Pi = \frac{e^2 \rho_0 \pi a_0^2}{M^2 c^2} = \frac{e^2 N}{M c^2}. \quad (3.3)$$

Коэффициент β совпадает со значением безразмерной температуры, он примерно одинаков для $K_s = 64$ и 512 и равен для первого сжатия $\beta = 0,54$, для второго $\beta = 0,67$. Эти результаты лишь коэффициентом порядка единицы отличаются от полученных в [3], а также от результатов, которые может дать элементарная теория. Если «паразитная» индуктивность отличается от принятой здесь $L_0 = 2l$, то в (3.2) можно для приближенных расчетов вместо $V_0/2l$ подставлять $1,7V_0/(2l + 0,7L_0)$, что дает приблизительно правильный средний ход тока.

Следует отметить, что температура не постоянна по сечению шнура. Вблизи оси температура значительно выше средней (кумуляция), имеется также некоторый подъем температуры к краю шнура.

Отметим также, что при расширении шнура плотность вблизи оси падает значительно ниже своего начального значения ρ_0 . Так, при $K_s = 64$ для момента (безразмерного)

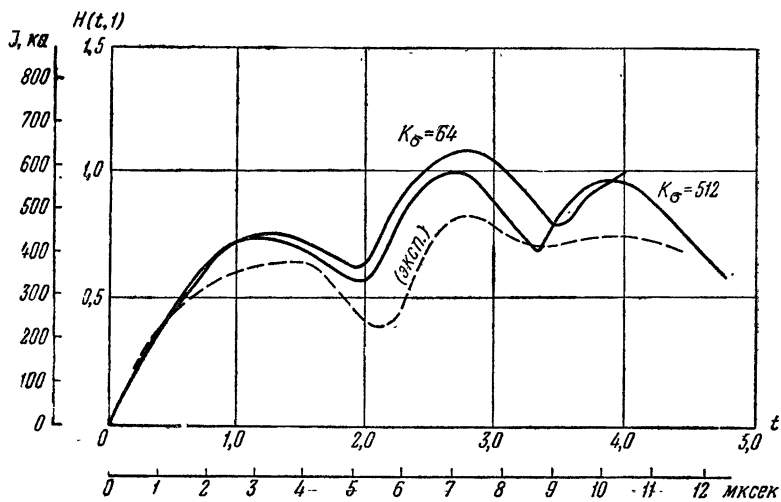


Рис. 1. Зависимость тока от времени

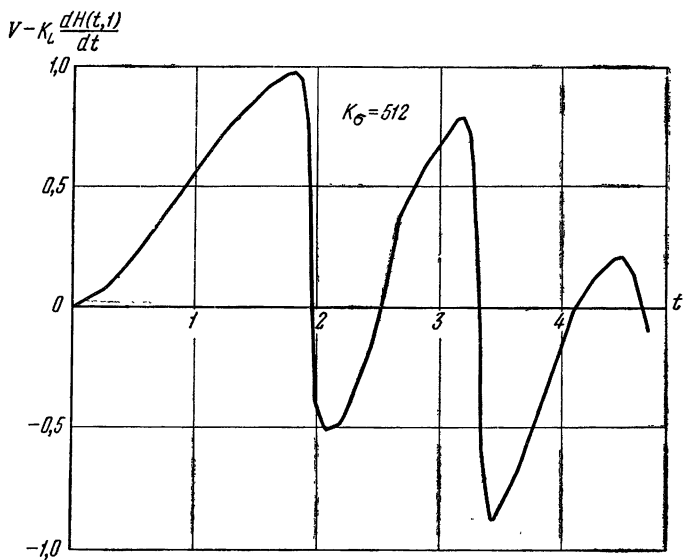


Рис. 2.

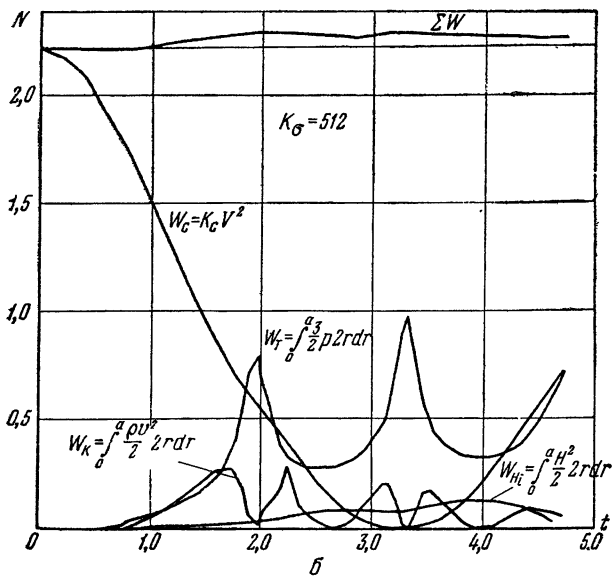
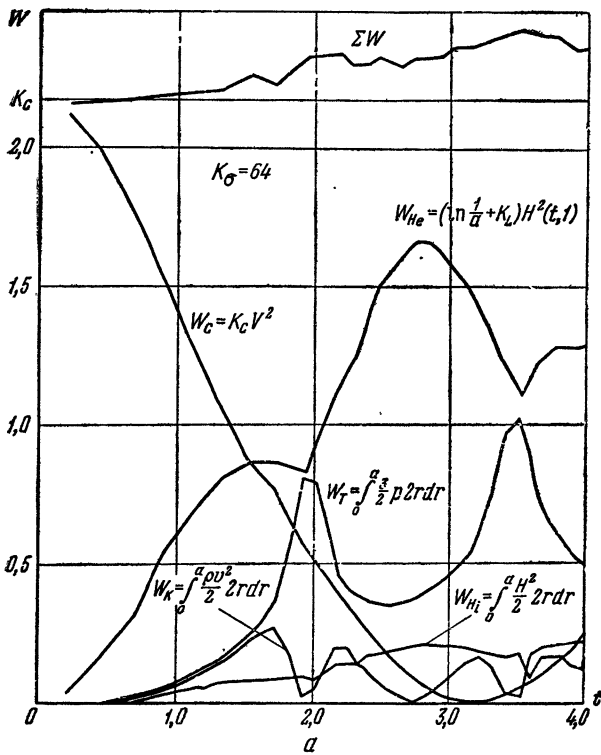


Рис. 3. Распределение энергии

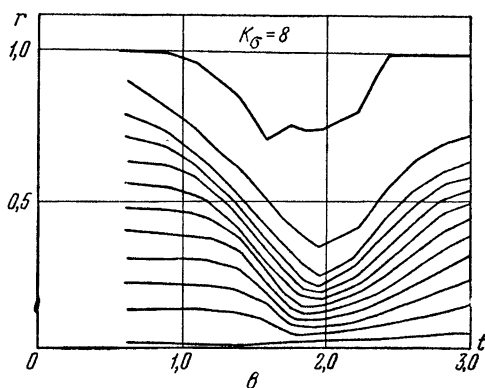
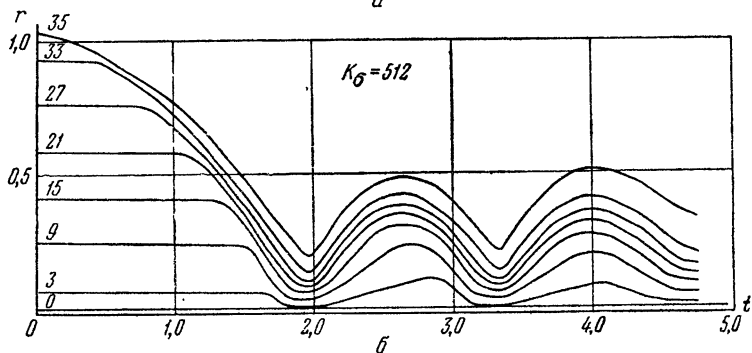
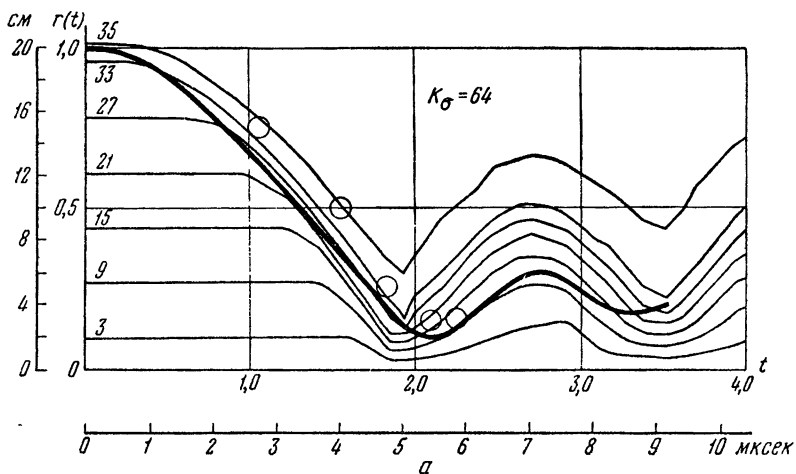


Рис. 4. Графики траекторий.

а; жирная линия — зависимость радиуса от времени по измерениям индуктивности (из осциллограмм); кружки — положение максимума магнитного поля по измерениям с магнитными зондами.

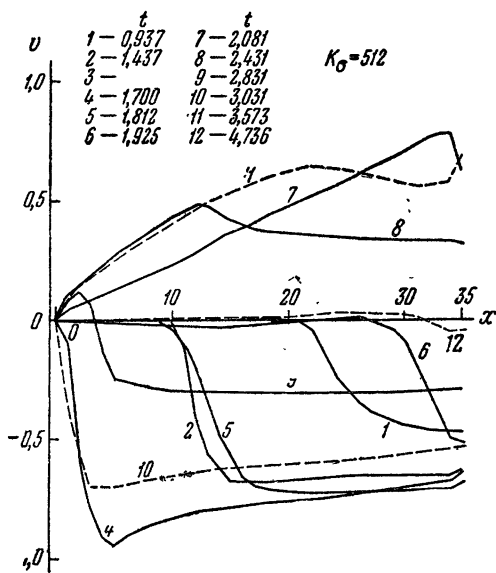
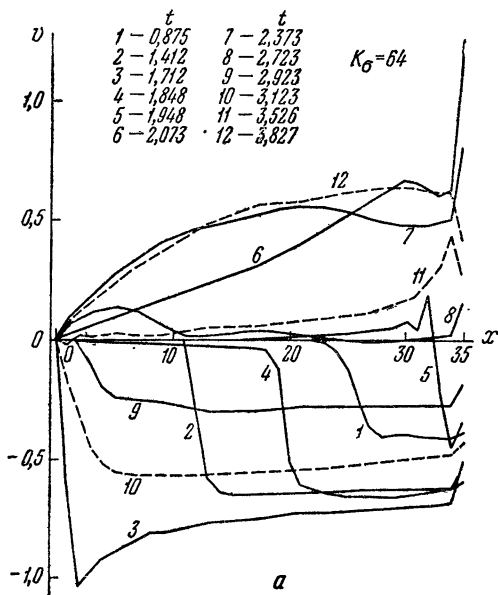


Рис. 5.

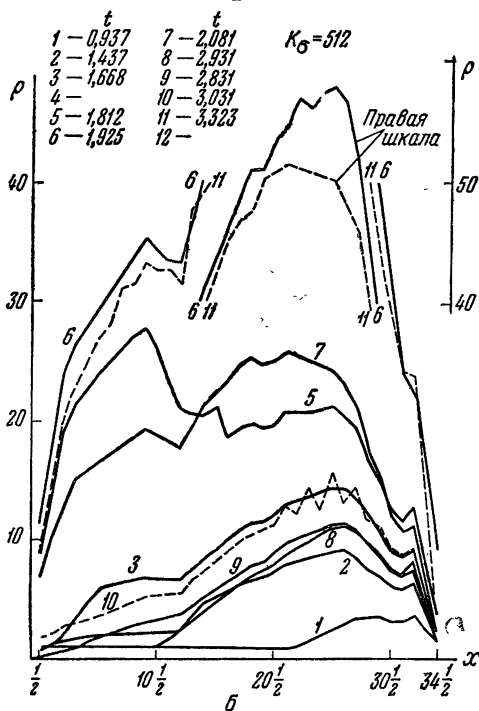
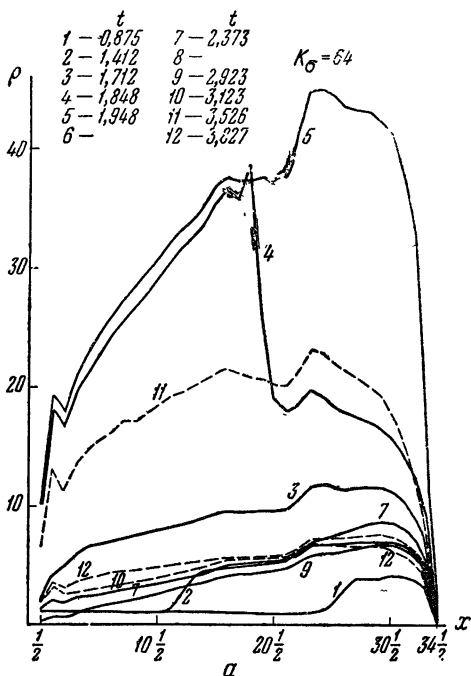


Рис. 6.

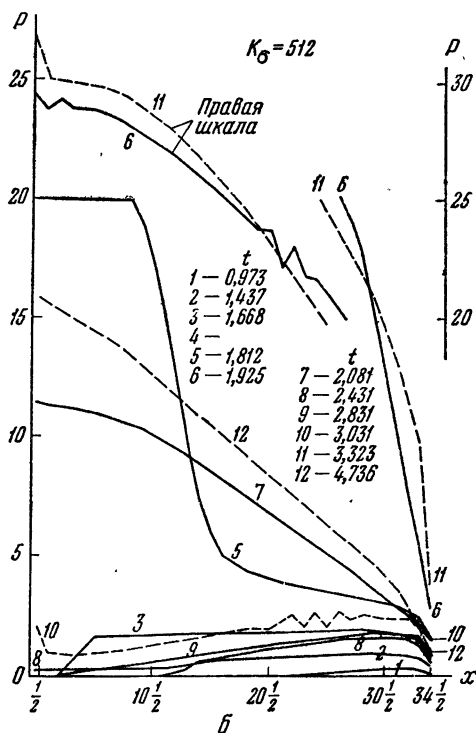
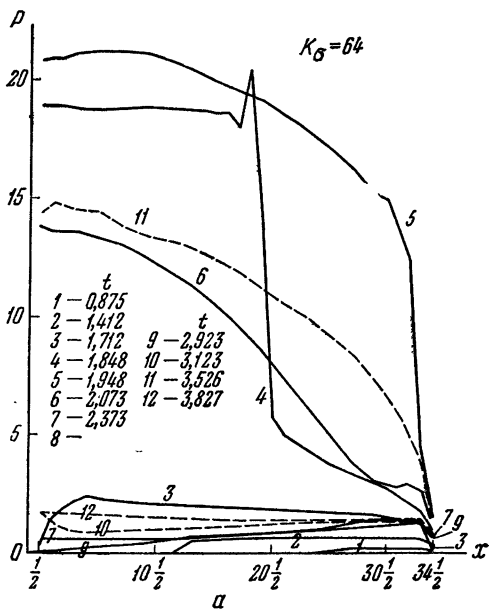


Рис. 7.

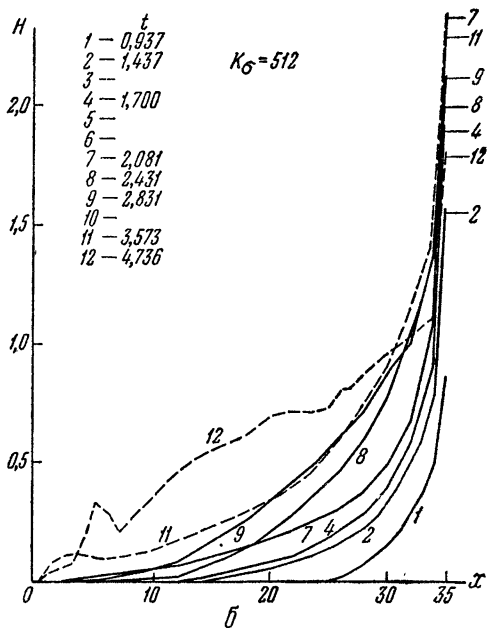
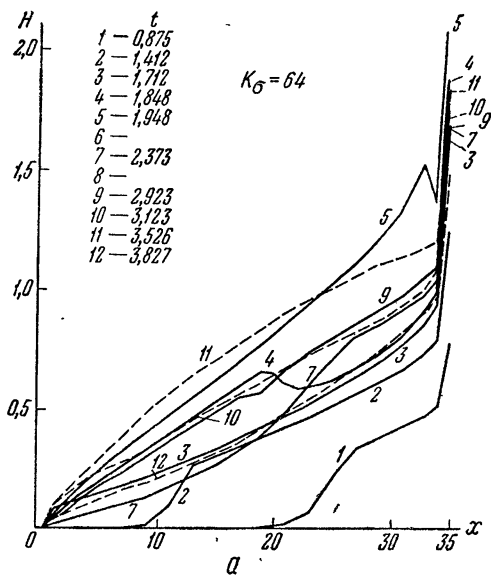


Рис. 8.

$t = 2,73$ имеем на оси (в нулевой счетной точке) $\rho = 0,28$, при $K_s = 512$, соответственно, при $t = 2,83$ имеем $\rho = 0,225$, что в десятки раз меньше, чем плотность окружающего вещества. Это обстоятельство может оказаться существенным

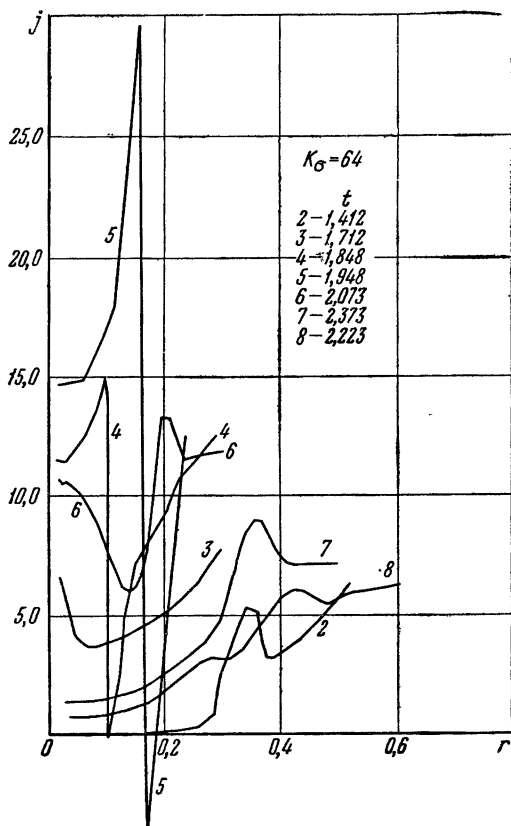


Рис. 9.

для выяснения природы ускорительного механизма, проявляющегося в импульсных разрядах.

Можно отметить следующие расхождения между теоретическими и экспериментальными результатами.

Наблюдающееся сжатие несколько больше расчетного. После первого сжатия наблюдается расширение, более слабое, чем расчетное, а затем сильное затухание осцилляций. Это указывает на то, что упругость реального плазменного шнура меньше, чем по принятой магнитогидродинамической модели, которая не учитывает потерь энергии на ионизацию, возбуждение и

излучение, а также действия различных механизмов неустойчивости. Последние могут приводить к перемешиванию плазмы в шнуре и действовать как эффективная вязкость, а также могут увеличивать сопротивление шнура. Кроме того, возникает, как известно, некоторый механизм ускорения части ионов до большой энергии, которая уносится из шнура, что также соответствует уменьшению упругости.

Измерения поля с помощью магнитных зондов обнаруживают после сжатия рост тока на периферии камеры. Это явление связано, по-видимому, с тем, что часть газа не увлекается ионами и остается снаружи, кроме того, нейтральные частицы могут вылетать (испаряться) из шнура на периферию и, наконец, может выделяться газ из стенок камеры. Быстрый рост тока в этой периферической области с малой индуктивностью приводит к подъему на осциллограмме тока, более резкому, чем расчетный. В начале процесса ток сравнительно долго течет на периферии камеры вблизи стенок. Расчет, конечно, не учитывает этой задержки сжатия, связанной с образованием достаточно плотной плазмы, которая может эффективно увлечь нейтральные частицы.

Приносим глубокую благодарность М. А. Леонтовичу за инициативу и помощь в постановке задачи и многочисленные обсуждения. Благодарим также А. Е. Бажанову за помощь в оформлении графиков.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. А. Леонтович, С. М. Осовец. Отчет АН СССР (1953). Атомная энергия, 3, 81 (1956).
 2. С. И. Брагинский, А. Б. Мигдал, см. настоящее издание, т. 2, стр. 20.
 3. С. М. Осовец, см. настоящее издание, т. 3, стр. 165.
 4. М. А. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, см. настоящее издание, т. 2, 185.
 5. Н. В. Филиппов, см. настоящее издание, т. 3, стр. 231.
-

*И. М. Подгорный, С. А. Чуватин,
Г. А. Быков, В. Д. Письменный*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ СГУСТКОВ ПЛАЗМЫ. II*

В работе содержится анализ экспериментов по определению скорости и размеров сгустка плазмы с помощью фотоэлектрической методики. Кроме того, проводится сравнение теоретически рассчитанной кривой тока с экспериментально наблюдаемой.

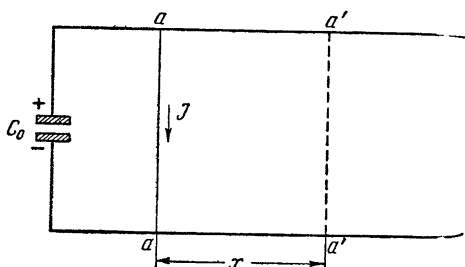


Рис. 1. Схема контура (a — a — подвижной элемент).

В работе [1] приведена система уравнений, которая описывает процесс электродинамического ускорения подвижного элемента контура (рис. 1).

$$y'' = q\varphi'^2, \quad (1)$$

$$\varphi = -\frac{d}{d\tau} [(1+y)\varphi']. \quad (2)$$

* Работа выполнена в 1957 г. (Работа I опубликована ранее [1]).

Здесь $y = \frac{b}{L_0}x$ — путь, пройденный движущимся элементом, в безразмерных единицах; $\varphi = V/V_0$, φ' и $\tau = \omega_0 t$ — соответственно, напряжение на конденсаторной батарее, ток в контуре и время, выраженные также в безразмерных единицах; $q = \frac{b^2 C_0^2 V_0^2}{2mc^2 L_0}$ — постоянная величина, являющаяся основной характеристикой процесса ускорения в конкретных условиях опыта.

Выясним физический смысл величин, входящих в уравнение (2),

$$(1 + y)\varphi'' + y'\varphi' + \varphi = 0. \quad (2')$$

Множитель $(1 + y)$ перед φ'' обусловлен возрастанием индуктивности при движении элемента контура $a - a$; $y'\varphi' = \varphi_i$ — электродвижущая сила, возникающая в результате изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.

Уравнения (1) и (2) описывают процесс ускорения в предположении неограниченной его длительности. В реальных условиях длительность ускорения ограничена длиной электродов. Будем считать длину ускоряющих электродов, а следовательно, и максимальное значение y заданными. Обозначим это значение y через y_1 ; соответствующее время ускорения — через τ_1 . В рассматриваемых условиях процесс разряда конденсатора состоит из двух последовательных стадий: стадии ускорения ($0 \leq \tau \leq \tau_1$) и стадии дугового разряда, который, как правило, возникает в момент времени τ_1 . Опыт показывает, что затухание в дуговой стадии разряда невелико. Поэтому ток и напряжение, в моменты времени следующие за τ_1 , можно считать гармоническими функциями времени с частотой $\omega_2 = \omega_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y_1}}$. Таким образом, для упрощения вычисления можно принять для $\tau \geq \tau_1$:

$$\begin{aligned} \varphi'_2 &= \varphi'_{2\max} \cdot \sin\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} \cdot \tau + \psi_2\right), \\ \varphi_2 &= \varphi_{2\max} \frac{\omega_0}{\omega_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega_2}{\omega_0} \cdot \tau + \psi_2\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi'_{2\max}$ и ψ_2 — амплитуда и фаза колебания; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ — частота контура с неподвижным элементом и $\tau = \tau_1 + \Delta\tau$. Для определения $\varphi'_{2\max}$ и ψ_2 используем условие непрерывности тока и напряжения. Приведем результаты расчета

конкретного случая ($y_1 = 0,84; \frac{\omega_2}{\omega_0} = 0,74$) при различных значениях параметра q (см. табл. 1 и рис. 2). Как видно из рис. 2, на кривой тока имеются характерные изломы, отчетливо выраженные для $q = 4; 8; 16$. Выясним физический смысл этих изломов. Напомним, что при электродинамическом ускорении возникает электродвижущая сила $\varphi_i = y' \varphi'$. По мере увеличения тока φ' скорость движения плазменного сгустка y' возрастает (ускорение $\sim \varphi'^2$), а следовательно, возрастает и величина φ'_i . Так как напряжение

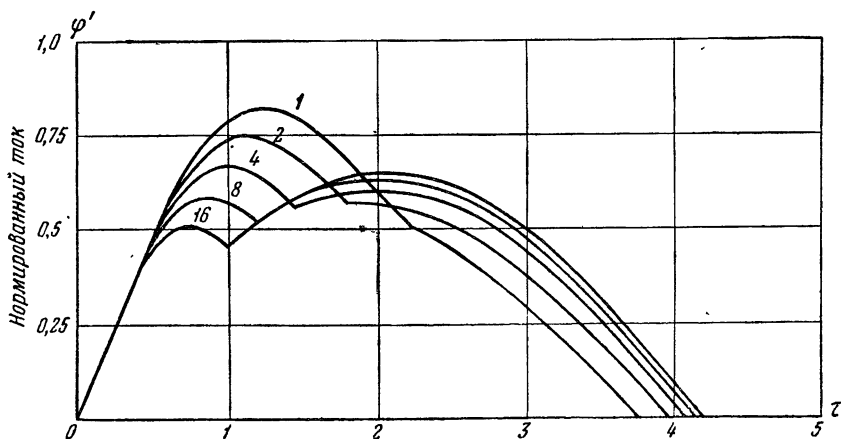


Рис. 2. Зависимость разрядного тока от времени ($y_1 = 0,84$). Различные кривые соответствуют различным значениям параметра q (1; 2; 4; 8; 16).

на конденсаторе φ монотонно падает, то в некоторый момент времени τ_0 электродвижущая сила φ_i скомпенсирует напряжение на конденсаторе. Аналогично тому, как при гармоническом разряде конденсатора максимальное значение тока достигается при $\varphi = 0$, в данном случае максимум тока достигается при $(\varphi_i + \varphi) = 0$. Если время ускорения $\tau_0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2}$, то с началом второй стадии разряда конденсатора величина тока снова будет возрастать, достигая второго максимума при $(\frac{\omega_2}{\omega_0} \cdot \tau + \psi_2) = \frac{\pi}{2}$. Возрастание тока в момент возникновения дугового разряда на концах электродов обусловлено исчезновением обратной электродвижущей силы.

Допустим теперь, что плазменный сгусток растянут в направлении движения. Резкая граница между стадиями

процесса в этом случае исчезает и происходит постепенный переход. Излом на кривой тока будет сглажен. Если реальное распределение тока в плазменном сгустке шириной S (безразмерная ширина $\Delta = \frac{b}{L_0} S$) заменить равномерным и не

Таблица 1

q	τ_1	$\varphi'_{2 \max}$	ψ_2
1	2,22	0,56	0,37
2	1,78	0,57	0,23
4	1,45	0,60	0,13
8	1,20	0,63	0,075
16	1,0	0,65	0,035

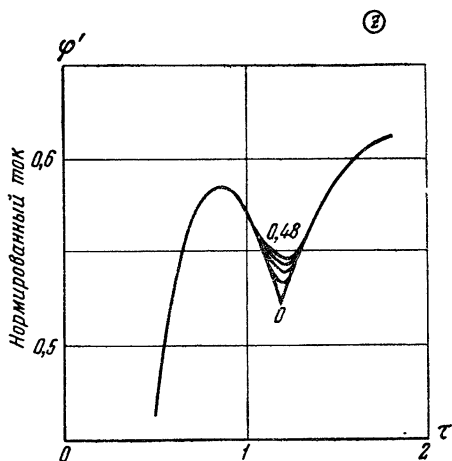


Рис. 3. Вычисленные кривые тока в районе излома ($y_1 = 0,84$ и $q = 8$) для различных значений ширины плазменного сгустка Δ (0; 0,1; 0,2; 0,36; 0,48).

меняющимся в процессе ускорения распределением тока вдоль ускоряющих электродов, то для различных ширин сгустка (рис. 3) получатся различные формы изломов.

Выясним теперь, как изменяется форма кривой тока в зависимости от того, по какому закону происходит перемещение

сгустка плазмы вдоль ускоряющих электродов. Рассмотрим следующие четыре конкретных примера движения сгустка на пути ускорения:

- I* $y' = 0$ при $0 \leq \tau \leq 0,9$ и $y' = 2,8$ при $0,9 \leq \tau \leq 1,2$;
- II* процесс электродинамического ускорения ($q = 8$ и $y_1 = 0,84$);
- III* $y' = 1,17 \cdot \tau$ при $0 \leq \tau \leq 1,2$;
- IV* $y' = 0,7$ при $0 \leq \tau \leq 1,2$.

Зная законы движения плазменного сгустка, можно на основании уравнения (2) вычислить соответствующие формы тока, которые и приведены на рис. 4.

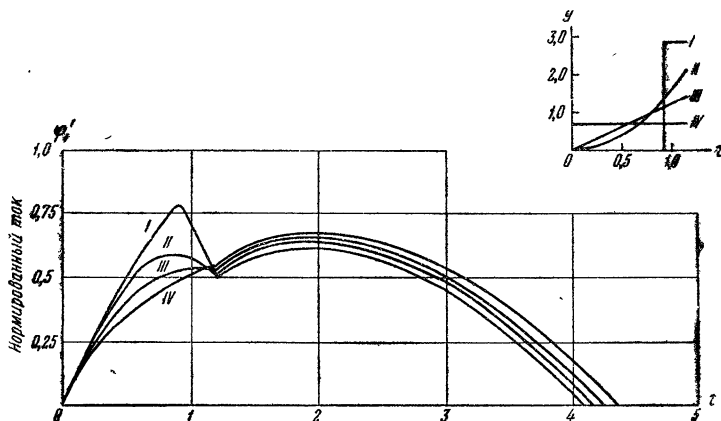


Рис. 4. Кривые разрядного тока при различных законах перемещения сгустка плазмы вдоль ускоряющих электродов.

Таким образом, при наличии в цепи электрического контура движущегося элемента, кривая тока существенно отличается от затухающей синусоиды. На основании анализа наблюдаемой кривой тока можно высказать некоторые утверждения о развитии процесса ускорения плазмы. Простой расчет позволяет получить некоторые количественные оценки. В частности, удастся определить мгновенную скорость движения, по крайней мере, для двух положений сгустка и тем самым дополнить результаты прямых методов измерения.

Приведенные соображения легли в основу обработки экспериментального материала, полученного при изучении процесса ускорения сгустков плазмы, образованных при электрическом взрыве тонкой металлической проволоочки.

Все рассмотренные в работе эксперименты проведены на установке со следующими параметрами:

- $b = 3,76 \text{ см/см}$ — приращение индуктивности на единицу длины пути;
- $C_0 = 75 \text{ мкф}$ — емкость конденсаторной батареи;
- $V_0 = 15 \text{ кВ}$ — начальное напряжение на батарее;
- $m = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ г}$ (нихром диаметром $0,01 \text{ мм}$) и $1,35 \cdot 10^{-4} \text{ г}$ (медь диаметром $0,02 \text{ мм}$) — масса ускоряемого элемента контура;
- $L_0 = 200 \text{ см} \div 313 \text{ см}$ — начальная индуктивность контура;
- $l = 70 \text{ см} \div 100 \text{ см}$ — длина ускоряющих электродов;

Для определения скорости движения сгустка плазмы был использован метод фотоэлектрической регистрации. По сравнению с ранее описанной методикой с использованием сверхскоростной фотосъемки этот метод обладает большей точностью и чувствительностью. По сравнению с методом магнитных зондов он обладает одним несомненным преимуществом — измерение происходит без всякого вмешательства в ход изучаемого явления.

В качестве фотоэлектрического регистратора использовался фотоумножитель типа ФЭУ-19М. Сигнал с ФЭУ усиливался широкополосным усилителем с полосой пропускания до 10 мГц и подавался на вход двухлучевого импульсного осциллографа типа ОК-17М. Контрольные опыты показали, что используемая в экспериментах аппаратура пропускает без искажения сигналы длительностью до $0,1 \text{ мксек}$. Запаздыванием сигнала, обусловленным измерительной аппаратурой, можно пренебречь.

Еще в первых опытах [1] было отмечено, что часть тока в течение всего процесса ускорения продолжает протекать в районе взрыва проволоочки. Более внимательное исследование этого вопроса показывает, что без принятия специальных мер основная часть тока неизменно оказывается сосредоточенной в этой области. К такому выводу можно прийти как из анализа осциллограммы разрядного тока, приведенной на рис. 6 в работе [1], так и из осциллограмм, приведенных на рис. 5. Действительно, кривые тока представляют собой в обоих случаях практически неискаженную синусоиду с амплитудой и периодом, отвечающим начальной индуктивности контура L_0 . Приведем численный пример. Если полная индуктивность контура $L = L_0$, то полупериод тока должен быть равен 12 мксек (рис. 5, а). Если же полная индуктивность контура возрастает до величины $L = L_0 + bl$, то полупериод должен составлять 21 мксек . Экспериментальное значение полупериода тока, полученное при взрыве проволоочки, составляет 12 мксек (рис. 5, б). Полученные результаты прямо указывают на то, что в данных условиях подавляющая часть тока остается на месте взрыва

проволочки. В этих же опытах наблюдалось возникновение пробоев непосредственно у ввода ускоряющих электродов в вакуумную камеру. При этом длительность полупериода оказывалась еще меньше. По-видимому, при взрыве проволочки создаются условия, способствующие возникновению таких пробоев.

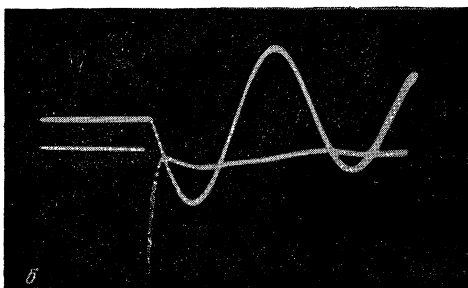
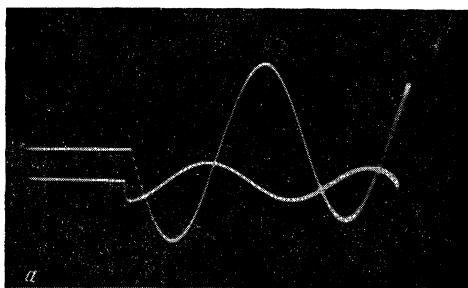


Рис. 5. Осциллограммы тока в контуре и напряжения на ускоряющих электродах.

а — при постоянной индуктивности контура $L_0 = 0,2$ мкгн, полупериод тона равен 12 мксек;
б — разряд конденсаторной батареи $C_0 = 75$ мкф через медную проволочку диаметром 0,02 мм, полупериод тока равен ~ 12 мксек.

Образовавшаяся в результате пробоя плазма должна двигаться вдоль ускоряющих электродов под действием электродинамических сил. Чтобы убедиться в этом, с помощью фотомножителя регистрировалось появление свечения на участке между вводами электродов и первоначальным положением проволочки. Полученные осциллограммы (рис. 6) показывают, что пробой, хотя и значительно меньшей интенсивности, возникает в каждом полупериоде тока, когда напряжение на ускоряющих электродах близко к максимальному.

Можно было предполагать, что существенным фактором, влияющим на возникновение пробоев, является не только взрыв проволоочки, но и состояние поверхности электродов, их материал и конфигурация. Однако многочисленные опыты показали, что при работе с тщательно отполированными электродами из различных материалов (медь, никель, хром, нержавеющая сталь, тантал) появления разрядов ликвидировать не удалось.

Ослабить влияние пробоев на процесс ускорения удалось путем применения более тонких проволоочек (нихром диаметром

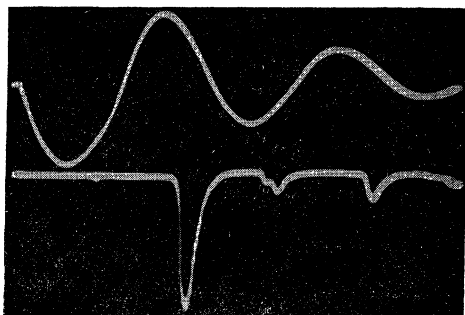


Рис. 6. Оциллограмма тока и сигнала от фотоумножителя. Регистрируется появление света, обусловленного пробоями.

Длительность развертки ~ 52 мксек.

0,01 мм) и улучшения вакуума до $5 \cdot 10^{-7}$ мм рт. ст. В дальнейшем рассматриваются результаты экспериментов, выполненных в этих условиях.

Средняя скорость движения сгустка плазмы на некотором участке пути определялась с помощью одного фотоумножителя, снабженного V-образным светопроводом, или с помощью двух фотоумножителей, регистрирующих появление свечения на различных расстояниях от первоначального положения проволоочки. Следует заметить, что для определения скорости на начальном участке пути нужно точно знать положение регистратора. Действительно, фотоумножитель регистрирует появление свечения на расстоянии 2 см от начального положения проволоочки примерно через 2 мксек после начала процесса, что соизмеримо со временем прохождения остального участка пути в 70 см ($t=4,5$ мксек).

В качестве примера анализа экспериментальных данных рассмотрим результаты обработки оциллограммы, представленной на рис. 7. Средняя скорость на участке пути 2—42 см

(за начало отсчета принято первоначальное положение проволочки), определенная по временному сдвигу сигналов от фотомножителя с V-образным светопроводом, составляет $1,2 \cdot 10^7$ см/сек. Средняя скорость на участке пути 0—42 см, определенная по запаздыванию максимума сигнала от фотомножителя относительно начала тока, равна $0,8 \cdot 10^7$ см/сек. Если предположить, что излом на кривой тока соответствует окончанию ускорения той части плазменного сгустка, которая обладает максимальной яркостью, то средняя скорость на всем

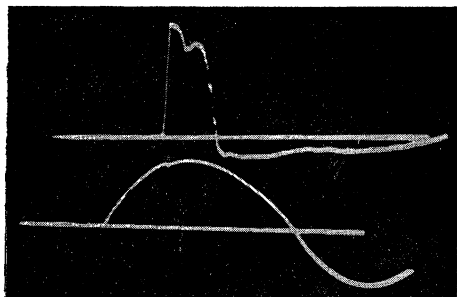


Рис. 7. Оциллограмма тока и светового импульса, зарегистрированного одним фотомножителем с V-образным светопроводом (расстояние между коллиматорами равно 40 см).

Длительность полупериода тона равна 21 мксек.

пути составляет $1 \cdot 10^7$ см/сек, а на последнем участке пути длиной 30 см — $2,2 \cdot 10^7$ см/сек.

Выше было отмечено, что фотомножитель регистрирует появление свечения на расстоянии 2 см от первоначального положения проволочки, в направлении ускорения, через 2 мксек после начала тока. В противоположном направлении фотомножитель регистрирует появление свечения на расстоянии 3 см, только через 35 мксек после начала процесса. Отсюда можно сделать вывод, что все ионизованные частицы вовлекаются в процесс ускорения, а появление света обусловлено, по-видимому, вторичным пробоем.

Как указывалось выше, отчетливо выраженный излом на кривой тока появляется при достижении больших скоростей движения. Опыты с использованием фотоэлектрической методики показывают, что при отсутствии излома на кривой тока средняя скорость плазменного сгустка в конце пути уменьшается от $(1,5 \div 1,8) \cdot 10^7$ см/сек до $(0,4 \div 0,5) \cdot 10^7$ см/сек и плазменный сгусток растягивается вдоль электродов (рис. 8).

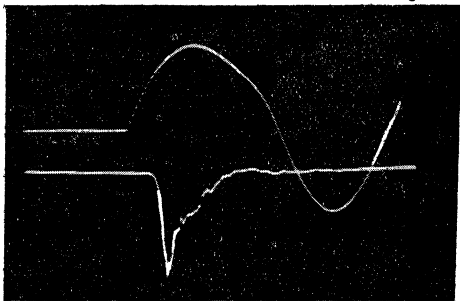


Рис. 8. При отсутствии излома на кривой тока фотоумножитель регистрирует световой импульс с медленно спадающим задним фронтом.

Длительность полупериода тока равна
18 мксек.

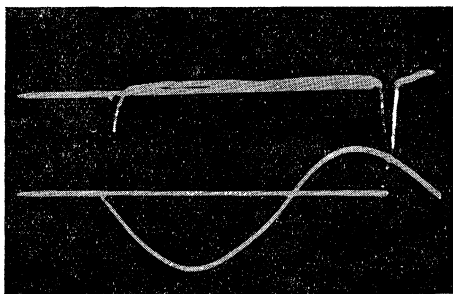


Рис. 9. Осциллограмма тока и импульса от фотоумножителя. Регистрируется появление свечения вблизи первоначального положения проволоочки. Ширина импульса определяется временем прохождения светящегося сгустка плазмы мимо коллиматора. Второй импульс от фотоумножителя соответствует прохождению сгустка плазмы, образовавшейся в результате пробоя.

Длительность полупериода тока равна
21 мксек.

Собственное поле тока, оказывая на плазму давление, равное $H^2/8\pi$, должно препятствовать разлету заряженных частиц и может привести к стягиванию токового шнура. Исследование размеров движущихся плазменных сгустков с помощью фотоумножителей показало, что ширина светящейся области составляет несколько сантиметров (рис. 9). Таким образом, если считать, что распределение плотности тока соответствует распределению свечения плазмы, то результаты опытов свидетельствуют о локализации тока по крайней мере на начальной стадии процесса.

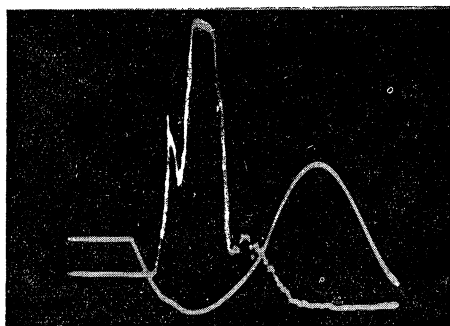


Рис. 10. Осциллограмма тока и светового импульса. Регистрируется появление свечения в конце ускоряющих электродов одним фотоумножителем с V-образным светопроводом.

Длительность полупериода тока равна
20 мксек.

Обратимся теперь к результатам экспериментов, в которых было проведено сравнение наблюдаемой формы тока с расчетной. Рассмотрим в качестве примера осциллограмму, приведенную на рис. 10. Величинами, характеризующими форму кривой тока при электродинамическом ускорении, являются: эффективный полупериод $T_{эф}/2$; момент появления излома на кривой тока $t_{ос}$ и относительная величина первого и второго максимумов тока. Здесь приняты следующие: I_1 — ток в момент первого максимума (максимум, предшествующий излому на кривой тока); I_2 — ток в момент второго максимума; I_0 — максимальное значение тока в разрядном контуре, индуктивность которого равна L_0 . Рассматриваемому процессу соответствует значение $y_1 = 0,54$ и безразмерный параметр

Таблица 2

	$t_{ос},$ мксек	$T_{э\Phi/2},$ мксек	I_1/I_0	I_2/I_0
Экспериментальное .	6,0	20,0	0,62	0,76
Теоретическое . . .	6,6	21,0	0,60	0,73

$q = 7,2$. Экспериментальные и соответствующие расчетные значения указанных величин приведены в табл. 2.

Обработка осциллограмм тока дает для средней скорости движения сгустка плазмы значение $(1,1 - 1,2) \cdot 10^7$ см/сек. Прямые методы измерения с помощью фотоумножителей приводят к значениям средних скоростей на всей длине 70 см $(1,2 \div 1,3) \cdot 10^7$ см/сек. Анализ кривой тока позволяет определить мгновенное значение скорости плазменного сгустка в момент времени, соответствующий первому максимуму на кривой тока. Как указывалось ранее, в момент первого максимума тока должно выполняться условие $(\varphi_i + \varphi) = 0$,

откуда $y' = \frac{\varphi}{\varphi'}$. Определенная из этого соотношения мгновенная скорость составляет $2,2 \cdot 10^7$ см/сек. Это значение скорости хорошо согласуется с результатами непосредственного измерения скорости на последних 30 см пути.

Независимым методом определения скорости движения сгустка плазмы является измерение доплеровского смещения спектральных линий, излучаемых сгустком. Однако достоверность данных, полученных в экспериментах при использовании в качестве электроннооптического затвора ячейки Керра, оказалась пока недостаточной для того, чтобы сделать однозначные выводы.

Остановимся, в заключение, на других возможных причинах происхождения наблюдаемого излома на кривой тока. Это следует сделать потому, что значительная часть работы основана на анализе формы кривой тока и следует исключить какие-либо сомнения, относящиеся к происхождению обсуждаемого эффекта.

Известно, например, что при электрическом взрыве проводочки на токе наблюдается своеобразный излом, соответствующий так называемой паузе тока. Излом на кривой тока также может быть вызван резким изменением собственной индуктивности плазменного сгустка. Однако прямые методы наблюде-

ния (фотоэлектрическая методика и сверхскоростная фото-
съемка) и некоторые количественные оценки противоречат
указанным предположениям. Кроме того, совпадение момента
появления свечения у концов ускоряющих электродов и
момента возникновения излома является убедительным дока-
зательством правильности исходных теоретических предпо-
сылки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгор-
ный, С. А. Чуватин. ЖЭТФ, 33, 3, (1957).
-

Е. Е. Юшманов

РАДИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ ПРИ МАГНЕТРОННОМ СПОСОБЕ ИНЖЕКЦИИ ИОНОВ *

В работе изложены результаты исследований распределения потенциала по радиусу в цилиндрической магнитной ловушке с магнитными «пробками» при «магнетронном» способе создания плазмы, содержащей быстрые ионы. Распределение потенциала измерялось в зависимости от величины приложенного напряжения, магнитного поля и некоторых других параметров. Измеренные распределения потенциала резко отличаются от теоретического распределения, отвечающего нескомпенсированному объемному заряду в магнетроне. Обнаружены регулярные колебания потенциала плазмы с частотой 200—400 кГц, при некоторых режимах. Измерена амплитуда этих колебаний.

§ 1. Введение

В работе Г. И. Будкера [1] изложены принцип и теория стационарной ловушки с магнитными «пробками» для высокотемпературной плазмы. Там же описаны некоторые возможные способы создания плазмы в такой ловушке, в частности, путем внешней инжекции молекулярных ионов D_2^+ и последующей их диссоциации в объеме.

М. С. Иоффе и В. Г. Тельковским был предложен метод заполнения ловушки с магнитными «пробками» плазмой, осно-

* Работа выполнена в 1957 г.

ванных на использовании внутренней инжекции ионов по принципу ионного магнетрона*.

Идея этого метода состоит в следующем.

В центре одной из пробки по оси ловушки устанавливается плазменный источник, испускающий вдоль магнитного поля цилиндрический пучок плазмы относительно высокой концентрации (10^{12} — 10^{13} см⁻³) и небольших поперечных размеров. Энергия ионов в пучке составляет величину ~ 1 эв. Пучок простирается до противоположного конца ловушки, где он

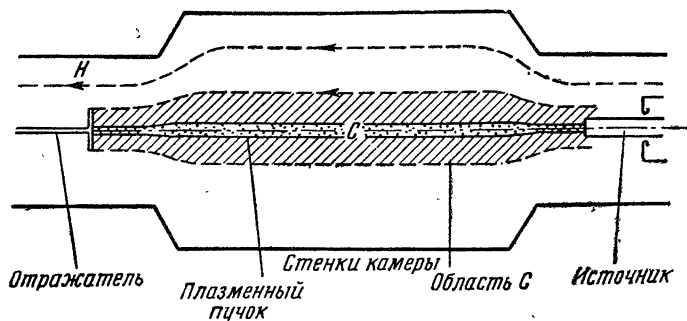


Рис. 1. Схема ионного магнетрона.

улавливается так называемым «отражателем» — электродом, расположенным симметрично с источником и соединенным с ним электрически (рис. 1). Если на источник и отражатель подать потенциал U_0 , положительный относительно стенок камеры, то получается подобие магнетрона. Центральный плазменный шнур служит эмиттером ионов, которые ускоряются радиальным электрическим полем, описывая магнетронные траектории. При этом максимальная энергия ионов будет порядка eU_0 . Магнитное поле берется значительно больше критического (магнетрон сильно заперт), чтобы ионы не попадали на стенки. При этом ускоренные ионы не могут также выйти и через пробки, так как обладают поперечной энергией, намного превосходящей продольную. Вследствие ионизации остаточного газа ловушка оказывается заполненной плазмой, содержащей быстрые ионы. Плотность этих ионов и их энергия в различных точках траекторий существенно определяются плотностью инжектируемой плазмы и распределением электрического поля по радиусу в такой системе.

* Схема ионного магнетрона выдвигалась в 1952 г. П. М. Морозовым для получения нейтронов путем пропускания ускоренных ионов дейтерия через газообразный дейтерий.

Для электронного магнетрона рассмотрение задачи проводилось без учета столкновений электронов между собой и с молекулами остаточного газа (см., например, [2 и 3]). Если интерполировать решения, данные в [2] для нашего случая, предполагая, что центральный пучок имеет потенциал U_0 относительно стенок и неограниченную ионную эмиссию, то полученная при этом кривая распределения потенциала будет иметь вид, представленный на рис. 2 сплошной линией. Пунктирная линия показывает качественно распределение плотности объемного заряда ионов.

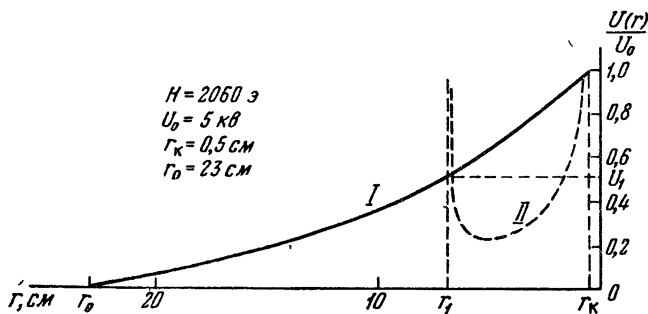


Рис. 2.

Бриллуэном [3] дается качественно иное решение задачи магнетрона, но в [2] показано, что это решение ошибочно.

В работе [4] описано экспериментальное исследование распределения пространственного заряда в электронном магнетроне. Автор приходит к выводу, что обычная теория, не учитывающая столкновений электронов, неприменима. Многократные малые отклонения при далеких кулоновых соударениях сбивают электроны с орбит и ведут к захвату их в пространстве между катодом и анодом. Эти захваченные электроны и образуют основной пространственный заряд. Обмениваясь энергией, электроны диффундируют на анод, создавая ток в запертом магнетроне.

А. А. Веденовым и Р. З. Сагдеевым в неопубликованной работе был произведен полуколичественный анализ, относящийся специально к случаю ионного магнетрона. Существенными элементами являются, во-первых, учет ионизации остаточного газа в объеме при наличии потенциального барьера для электронов, препятствующего их уходу вдоль магнитного поля; во-вторых, наличие пробок на торцах объема.

Характер радиального распределения потенциала при учете ионизации определяется в значительной мере потенциалом

торцевых электродов. Если эти электроды соединены с боковыми стенками (имеющими потенциал земли), то медленные вторичные ионы, образующиеся при ионизации остаточного газа быстрыми ионами, могут беспрепятственно уходить вдоль магнитного поля на торцы, в то время как уходу электронов препятствует имеющееся электрическое поле. В приосевой же части объема, ограниченной трубкой магнитных силовых линий, проходящих через края высоковольтного электрода (область C , см. рис. 1), электроны свободно уходят вдоль магнитного поля. В результате, если время диффузионного ухода электронов поперек магнитного поля из периферийной области в область C будет значительно больше времени ионизации, то в периферийной области будет происходить накапливание электронов и, соответственно, понижение потенциала этой области. Установившееся распределение будет, очевидно, таким, при котором скорость ухода электронов на торцы сравняется с числом электронов, образующихся в объеме в единицу времени. При этом потенциал плазмы в периферийной области может превышать потенциал стенок лишь на величину порядка средней энергии электронов, а все основное падение потенциала между стенками и осью камеры окажется сосредоточенным в области C . Впервые эта мысль была высказана А. В. Жариновым.

Можно показать, что при классической диффузии электронов в нейтральном газе (кулоновым рассеянием можно пренебречь вследствие малой плотности плазмы) условием осуществления такого распределения является

$$\frac{n_e}{n_{i0}} \frac{Emc^2}{2leH^2} \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{i0}} \sqrt{\frac{T_e}{eU_0}} \sqrt{\frac{M}{m}} < 1; \quad (1.1)$$

здесь n_e — средняя плотность электронов вне области C ; n_{i0} — средняя плотность быстрых ионов; E — радиальное электрическое поле; l — среднее расстояние электрона до границы области C ; σ_{e0} — сечение расстояния электрона на угол порядка единицы на нейтральном газе; σ_{i0} — сечение ионизации быстрыми ионами; T_e — средняя энергия электронов; M и m — масса иона и электрона, H — напряженность магнитного поля. Предполагается, что вся ионизация производится только быстрыми ионами.

Грубая оценка (см. ниже) показывает, что неравенство (1.1) выполняется. Таким образом, если не существует каких-либо механизмов аномально большой поперечной диффузии электронов, то все электрическое поле оказывается сосредоточенным вблизи осевого плазменного пучка в области C , вне которой существует плазма при потенциале, близком к потенциалу торцевых стенок. Ионы, ускоренные электрическим полем из

осевого пучка, поступают в периферийную область с энергией, отвечающей полной разности потенциалов, и движутся по соответствующим ларморовским окружностям.

Предполагая указанное распределение потенциала по радиусу, а также, что все ионы, выходящие из источника, сразу включаются в магнетронное ускорение, А. А. Веденовым и Р. З. Сагдеевым был произведен учет влияния «пробок». Используя адиабатическую инвариантность величины $\frac{W_{\perp}}{H}$, закон сохранения энергии и равенство тока через любое поперечное сечение камеры, можно получить формулу для потенциала на оси камеры в центральной части между пробками:

$$U_1 = U_0 \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{eU_0}{E_0} \left(1 - \frac{H_{\text{ц}}}{H_{\text{пр}}}\right)}}{1 + \frac{eU_0}{E_0} \left(1 - \frac{H_{\text{ц}}}{H_{\text{пр}}}\right) + \sqrt{1 + \frac{eU_0}{E_0} \left(1 - \frac{H_{\text{ц}}}{H_{\text{пр}}}\right)}}; \quad (1.2)$$

здесь E_0 — продольная энергия ионов при выходе из источника, $\frac{H_{\text{ц}}}{H_{\text{пр}}}$ — отношение поля в центральной части к полю

в пробке. Согласно соотношению (1.2), величина $\frac{U_1}{U_0}$ всегда меньше единицы и уменьшается с увеличением $\frac{eU_0}{E_0}$. Физический смысл этого в том, что при увеличении U_0 увеличивается абсолютная величина продольной скорости, когда ионы из пробки переходят в более слабое поле центральной части; а так как продольный ток через любое поперечное сечение камеры одинаков, то увеличение продольной скорости означает уменьшение плотности ионов в центральной части по отношению к пробкам, где продольная скорость ионов определяется E_0 . Относительное уменьшение плотности ионов в центральной части приводит к относительному уменьшению U_1 . Абсолютная же величина U_1 должна возрастать и при

$$\frac{eU_0}{E_0} \rightarrow \infty \quad U_1 \rightarrow \sqrt{\frac{eU_0 E_0}{1 - \frac{H_{\text{ц}}}{H_{\text{пр}}}}}.$$

§ 2. Экспериментальная установка

Схема установки изображена на рис. 3. Рабочая камера 1 изготовлена из нержавеющей стали. Внутри камеры установлена медная рубашка 2, охлаждаемая проточной водой.

Длина рабочего объема центральной части 100 см, диаметр 46 см. Длина каждой пробки 40 см, диаметр 34 см. Магнитное поле создается четырьмя катушками 3—6. Максимальное поле в центре равняется 2100 э. В пробках поле в 1,7 раза больше. Катушки намотаны медной трубкой и питаются от генератора постоянного тока. Потребляемая мощность достигает 80 кв. Тепло отводится дистиллированной водой, циркулирующей под давлением 25 атм в замкнутой системе с теплообменником.

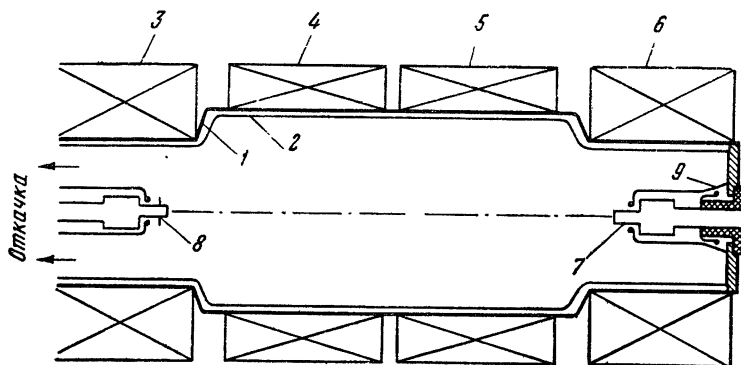


Рис. 3.

Откачка камеры производится паромасляным насосом Н5Т, снабженным ловушкой с жидким азотом, помещенным со стороны отражателя. При отсутствии подачи газа давление в камере не превосходило $1 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст. При подаче в источник водорода в количестве 200—300 см³/час давление в центральной части составляло $4-5 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст.

Источник 7 и отражатель 8, собранные на отдельных фланцах, вводятся в камеру через отверстия на торцах и устанавливаются по оси камеры. Концы источника и отражателя находятся на расстоянии 10 см от центров пробок по направлению к центральной части. Источник и отражатель помещены в экраны 9, находящиеся при потенциале земли. Диаметр незащищенных экранами центральных частей, равный 30 мм, определяет размер области S . Для увеличения этого размера на отражатель надевается молибденовый диск диаметром d . Тогда в центральной части камеры область S имеет диаметр

$$d \sqrt{\frac{H_{\text{пр}}}{H_{\text{ц}}}}$$

На рис. 4 схематически изображена конструкция газоразрядной части источника.

Газоразрядная камера 1 представляет собой медную цилиндрическую трубку длиной 150 мм и диаметром 10 мм, охлаждаемую водой. Газ вводится через канал 2. Ионизация производится потоком электронов, эмитируемых подогреваемым катодом 3, который нагревается электронной бомбардировкой с расположенной за ним нити 4*. Плазма из разрядной камеры вытекает вдоль магнитного поля в виде цилиндрического шнура, проходящего через всю установку до отражателя. Плотность плазмы

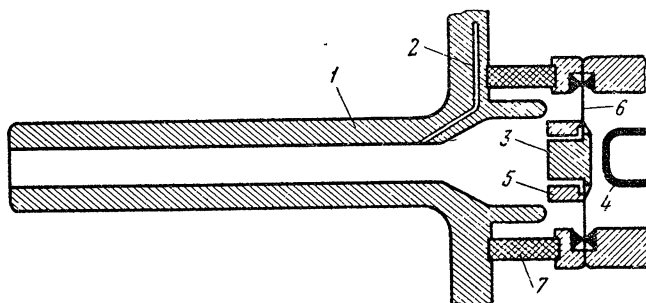


Рис. 4. Конструкция источника.

1 — анод; 2 — канал для впуска газа; 3 — вольфрамовый катод; 4 — вольфрамовая нить; 5 — молибденовый экран; 6 — танталовая диафрагма; 7 — керамический изолятор.

в шнуре, при расходе газа в $200\text{--}300\text{ см}^3/\text{час}$, составляет величину $10^{12}\text{--}10^{13}\text{ см}^{-3}$, при этом ток ионов, выходящих из источника, равен $300\text{--}500\text{ ма}$.

Для увеличения количества ионов, поступающих из источника в камеру, необходимо увеличивать подачу газа, что ведет к ухудшению вакуума. Наибольшее допустимое давление соответствует тому случаю, когда пробег ионов до перезарядки становится сравнимым с размерами камеры. При энергии ионов в несколько киловольт их пробег до перезарядки становится порядка 10 м при давлении в несколько единиц на 10^{-5} мм рт. ст. Такое давление устанавливалось при расходе газа в $200\text{--}300\text{ см}^3/\text{час}$.

§ 3. Методика измерений

Для исследования распределения потенциала был использован метод зондовых характеристик. Хотя, как известно, этот метод при наличии магнитного поля не позволяет произвести точного определения параметров плазмы, тем не менее

* Подогреваемый катод подобной конструкции разработан Б. Н. Маковым.

для приблизительного определения потенциала плазмы он может быть использован. Более точные результаты могут быть получены с помощью накаливаемого зонда. Если в плазме происходят колебания, то этот последний метод позволяет определить максимальное во времени значение потенциала, достигаемое в процессе колебаний.

Устройство применявшихся зондов показано на рисунке 5. Холодный зонд (рис. 5, а) состоит из танталового диска диаметром 4 мм, приваренного к вольфрамовой ножке. Накаливаемый зонд (рис. 5, б) представляет спиральку диаметром 3 мм

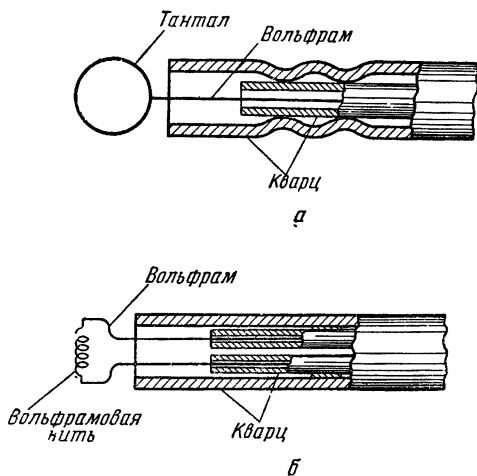


Рис. 5.

из вольфрамовой нити 0,1 мм. Ножки зондов защищаются кварцевыми трубками, как показано на рисунке. Диаметр внешней трубки 4 мм. Особое внимание обращено на то, чтобы подводящие ножки не касались края внешней трубки, которая при длительной работе металлизуется и также может служить коллектором тока.

Зонды помещались в центральном сечении камеры и в пробке отражателя, в 40—50 мм от него по направлению к центральной части. Характеристики снимались с помощью двухкоординатного гальванометра. При этом в случае холодного зонда потенциал плазмы определяется по точке нуля тока на зонд, а в случае накаленного зонда — по точке схождения характеристик. На рис. 6 кривые, снятые вблизи оси камеры, переходят в электронную часть раньше, чем кривые, соответствующие несколько большему радиусу. Этот факт

отнюдь не свидетельствует о понижении потенциала на оси. Причиной этого, по-видимому, является наличие вблизи оси электронов с энергией в несколько сотен электрон-вольт, которые начинают идти на зонд задолго до того, как достигается потенциал плазмы. Отсутствие насыщения ионной ветви и наличие, вместо этого, линейного роста тока объясняется тем, что при имеющихся плотностях плазмы экранирующий слой больше размеров зонда. Поэтому эффективный размер зонда растет с понижением потенциала зонда. При этом ток на зонд должен расти линейно. Вопрос этот разобран в приложении.

§ 4. Экспериментальные результаты

При исследовании распределения потенциала по радиусу изменяемыми величинами служили независимые параметры U_0 , магнитное поле H и диаметр отражателя d . Другие параметры, такие, как ток ионов, давление в камере, натекание газа, параметры дуги в источнике, по мере возможности поддерживались неизменными.

Визуальное наблюдение показывает, что при постепенном увеличении U_0 , начиная с нуля, интенсивность пучка, проходящего по оси камеры, все более ослабевает. При некотором U_0 (зависящем от многих условий) происходит срыв пучка и переход в новый режим, отличающийся появлением интенсивного свечения во всем объеме камеры и неустойчивым увеличением тока. При этом из источника все еще выходит слабый пучок длиной 20—30 см. Переход в новый режим происходит скачком, при этом вблизи точки срыва пучка имеется неустойчивая область шириной около киловольта, когда режимы быстро сменяют друг друга (разряд мигает). При дальнейшем увеличении U_0 свечение быстро слабеет, пучок плазмы укорачивается, сохраняясь в виде маленького языка у сопла источника. При увеличении напряжения этот режим сохраняется. Таким образом, можно выделить три режима: начальный, с пучком через всю камеру; промежуточный, сопровождаемый свечением, и конечный, темный и без пучка. Смена режимов зависит от ряда условий, в первую очередь — от магнитного поля H и диаметра отражателя d . В табл. 1 приведены значения U_0 (в кэ), соответствующие моменту срыва пучка при разных H и d .

Эти цифры имеют частное значение, так как вообще момент срыва зависит от режима разряда источника, величины ионного тока и давления. Но общая закономерность хорошо иллюстрируется этой таблицей.

На рис. 6—8 приведены семейства зондовых характеристик, снятых в каждом из указанных режимов. Под каждым семей-

ством приведено соответствующее ему распределение потенциала. В режиме с пучком (рис. 6) — и только в этом режиме —

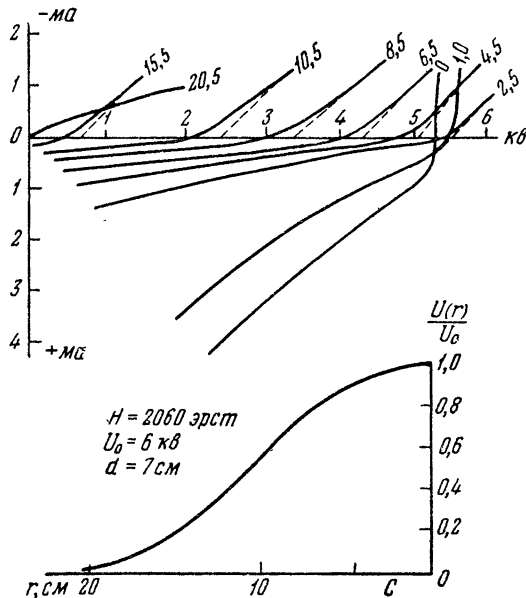


Рис. 6.

наблюдается пологое распределение потенциала, причем потенциал на оси равен U_0 . Во втором режиме (рис. 7) потенциал

на оси чуть ниже или равен U_0 , но все падение сосредоточено в основном в области C . В третьем режиме (рис. 8) потенциал на оси значительно меньше U_0 , падение сосредоточено в области C . При увеличении U_0 в этом режиме потенциал на оси уменьшается не только относительно, но и абсолютно. Все указанные особенности

Таблица 1

$H, \text{э}$	$d, \text{см}$		
	7	5	3
1150	3	2,7	1,5
1650	5	4	2
2150	7,5	4,3	3

распределения потенциала зависят только от типа режима, значения же параметров могут быть различны.

Существование первого режима, когда вдоль всей камеры потенциал на оси равен U_0 , противоречит формуле (1.2), так же как и абсолютное уменьшение U_1 при больших значениях U_0 . Это связано с тем, что формула (1.2) относится лишь к тому

случаю, когда из источника выходит как раз столько ионов, сколько необходимо для создания в пробке в области S пространственного заряда, обеспечивающего на оси потенциал U_0 . На самом же деле ток ионов из источника может быть как большим, так и меньшим. Для дальнейшего рассмотрения выделим условно область однородного поля в центральной части камеры, две симметричных области однородного поля

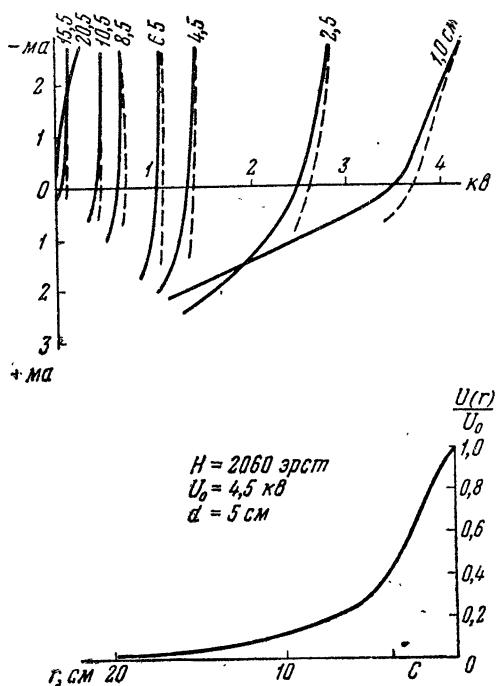


Рис. 7.

в пробках и две промежуточные области с неоднородным полем. Заметим, что разность потенциалов U_0 между осью и внешней границей области S поддерживается за счет пространственного заряда ионов, участвующих в радиальном движении. Если для создания такого объемного заряда в области однородного поля в пробке достаточно лишь части ионов, инжектируемых из источника, то плазменный пучок пройдет в область неоднородного поля. Здесь ранее вытянутые и вновь возвращающиеся к оси ионы, увеличивая свою параллельную скорость при переходе в более слабое магнитное поле, уже не смогут обеспечить плотность заряда, необходимую для поддержания разности

потенциалов U_0 . Поэтому из пучка будет вытягиваться и включаться в радиальное ускорение дополнительное количество ионов, пока пучок не исчерпается. При этом потенциал U_1 на оси центральной части камеры будет выше, чем вычисленный по формуле (1.2). Если ток инжектируемых ионов столь велик, что пучок сохраняется вплоть до границы центральной однородной области, то он проходит через всю камеру, а потенциал

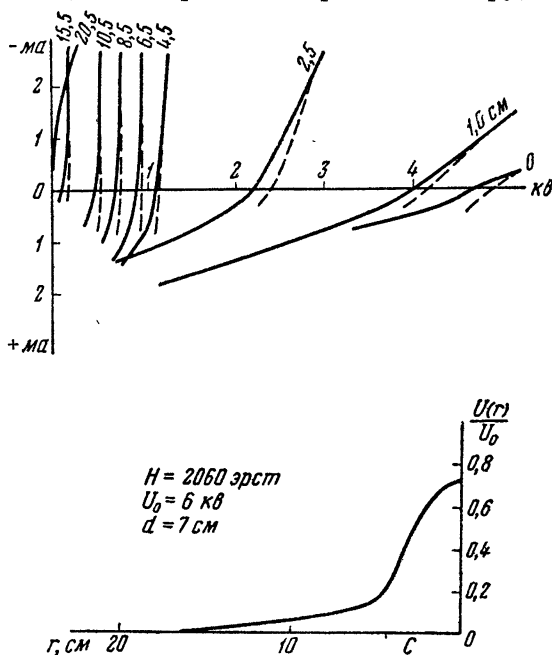


Рис. 8.

на оси всюду будет U_0 . В том же случае, когда ток ионов из источника недостаточен, чтобы создать в пробке в области C падение потенциала U_0 , потенциал на оси в пробке понижается, и при этом увеличивается продольная скорость ионов, приходящих на границу неоднородного поля. Потенциал в центральной части будет связан с потенциалом на границе однородного поля пробки соотношением, аналогичным (1.2), где величина E_0 определяется понижением потенциала на оси в пробке по отношению к потенциалу источника. В этих рассуждениях повсюду не учитывалось, что значительная часть ионов теряется при перезарядке. Поэтому ток из источника должен быть еще бóльшим, чтобы компенсировать эту потерю.

Исходя из сказанного, можно объяснить последовательность явлений, происходящих при постепенном увеличении U_0 . При малых U_0 имеется большое количество ионов, выходящих из источника и не включающихся в радиальное ускорение. При этом пучок проходит через всю камеру. По мере увеличения U_0 все больше ионов вытягивается из пучка, прежде чем он достигнет центральной области однородного поля. Когда в радиальное ускорение оказываются включенными одновременно все ионы, происходит срыв пучка. Переходный режим соответствует случаю, когда пучок обрывается в области неоднородного поля. Третий режим соответствует случаю, когда пучок

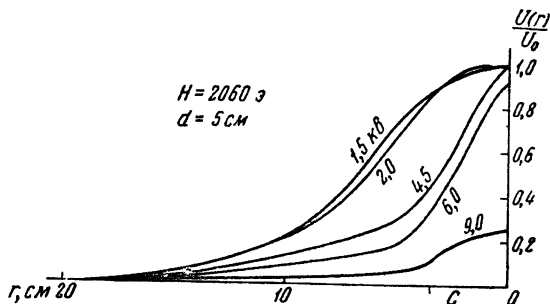


Рис. 9.

не достигает неоднородной части, а обрывается в пробке. При этом потенциал U_1 в центре камеры понижается с увеличением U_0 , так как возрастает продольная скорость ионов при выходе из пробки.

Изложенная картина объясняет также влияние параметров d и H на переход от одного режима к другому. Действительно, падение потенциала в области C пропорционально квадрату размера этой области и плотности заряда ρ :

$$U \sim \rho d^2.$$

Увеличение d приводит к тому, что при неизменном токе нужно приложить большую разность потенциалов, чтобы вытянуть из пучка все ионы. Увеличение H ведет к тому же, так как вследствие сокращения размеров орбиты, с одной стороны, увеличивается плотность ионов в области C , и с другой — уменьшаются потери ионов вследствие перезарядки. Увеличение тока инжектируемых ионов \mathcal{I} также должно приводить к тому, что пучок будет срывать при больших значениях U_0 , если при этом давление в камере остается постоянным. Если же с увеличением \mathcal{I} давление повышается, то потери на перезарядку могут свести на нет влияние увеличения тока.

Результаты проведенных измерений хорошо соответствуют изложенной картине.

На рис. 9—11 приведены кривые, иллюстрирующие зависимость распределения потенциала от указанных параметров. На рис. 9 параметром является U_0 . Видно, как при возрастании напряжения распределение потенциала от пологого переходит к крутому. Рис. 10 иллюстрирует подобный же переход при уменьшении магнитного поля. На рис. 11 видно, что уменьшение размеров отражателя сокращает ширину области, в которой сосредоточивается основное падение потенциала. Все приведенные кривые сняты в центральной плоскости камеры. Измерения в пробке отражателя показывают, что каче-

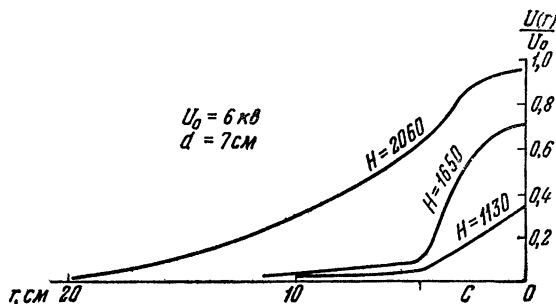


Рис. 10.

ственно распределение потенциала совпадает с распределением в центральной части.

Режим после срыва пучка характерен близостью потенциала пространства вне области C к потенциалу стенок, что означает компенсацию пространственного заряда ионов накапливающимися в объеме электронами. Одним из условий, необходимых для этого, является малость диффузии электронов в область C . Выше приводилось неравенство, выражающее условие накопления электронов при учете только классической диффузии:

$$\frac{n_e}{n_{i0}} \frac{Emc^2}{2leH^2} \frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{i0}} \sqrt{\frac{T_e}{eU_0}} \sqrt{\frac{M}{m}} < 1. \quad (4.1)$$

Для типичного режима можно положить следующие значения входящих в неравенство величин: $E \simeq 150 \text{ в/см} = 0,5 \text{ CGSE}$, $l \simeq 5 \text{ см}$, $H = 2000 \text{ э}$, $U_0 = 6 \text{ кВ}$.

Если взять $T_e \simeq 100 \text{ эв}$, то $\frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{i0}}$ будет меньше 10. Тогда подсчет левой части дает величину $10^{-3} \div 10^{-4} \frac{n_e}{n_{i0}}$, что много

меньше единицы. Таким образом, неравенство (4.1) выполняется очень сильно. Это означает, что из факта накапливания электронов нельзя делать вывод о классическом механизме их диффузии.

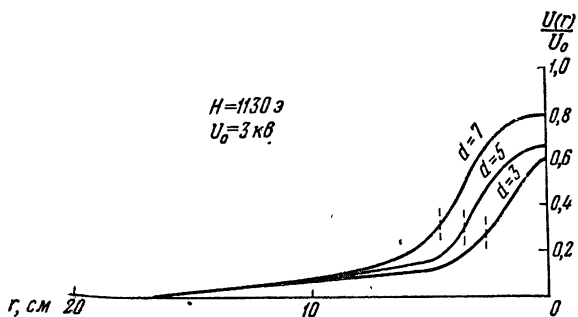


Рис. 11.

Режим с пучком через всю камеру отличается пологим распределением потенциала, больше напоминающим теоретическую кривую для классического магнетрона, чем распределение,

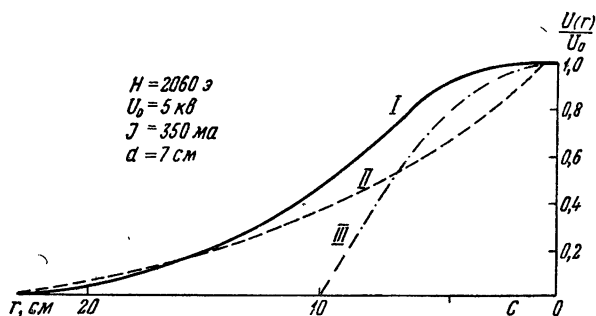


Рис. 12.

отвечающее скомпенсированному пространственному заряду. Приведенная на рис. 12 кривая I снята накаливаемым зондом для режима $H=2060 \text{ э}$, $U_0=5 \text{ кВ}$, $J=350 \text{ мА}$. Кривая II соответствует теоретическому распределению для идеального магнетрона с теми же значениями H и U_0 . Распределение потенциала, изображаемое кривой I, не может быть стационарным, так как электроны должны накапливаться вне области C. Кроме того, при таком ходе потенциала становится неясным, каким образом ионы покидают пучок. В самом деле, для того

чтобы ионы могли покидать пучок, необходимо, чтобы потенциал вблизи оси убывал быстрее, чем по закону

$$U(r) = U_0 - \frac{H^2}{8c^2} \frac{e}{M} r^2,$$

что следует из закона сохранения энергии. Кривая *III* изображает эту функцию, дающую величину потенциала в точке поворота иона. Пересечение истинного распределения U_r с кривой *III* дает точку поворота ионов, выходящих с оси. Так как кривая *I* проходит всюду выше кривой *III*, то это и означает, что при данном распределении потенциала ионы не могут покинуть центральный пучок. Поэтому необходимо допустить, что в объеме происходят колебания потенциала плазмы, и в таком случае кривая *I*, построенная по точкам схождения характеристик холодного и накаливаемого зондов, должна давать максимальное значение потенциала во времени. Наблюдения с осциллографом подтвердили наличие интенсивных регулярных колебаний с частотой в пределах 200—400 кГц.

Колебания этого типа наблюдаются только в таких режимах, когда пучок проходит через всю камеру. Срыв пучка с переходом к крутому распределению потенциала и срыв колебаний происходят одновременно.

§ 5. Амплитуда и частота колебаний потенциала плазмы

Амплитуду колебаний потенциала можно определить на основании измерения амплитуды колебаний тока на зонд при потенциале земли, в линейной области ионной ветви характеристики, если допустить, что мгновенное значение $\frac{di}{dV}$ равно крутизне ионной части статической характеристики. Такое допущение справедливо, если плотность плазмы меняется мало, а время установления стационарного тока на зонд много меньше периода колебаний. Под временем установления понимается время перехода от одного стационарного распределения плотности и тока на зонд к другому, если потенциал зонда мгновенно изменить на некоторую величину. Это время можно оценить как $\tau \simeq \frac{L}{v}$, где L — размер возмущенного объема плазмы, а v — средняя скорость ионов. Размер возмущения определяется толщиной экранирующего слоя, окружающего зонд, и в нашем случае примерно равен 1 см (см. приложение). В радиальном электрическом поле ~ 300 в/см средняя энергия ионов будет порядка 250 эв, что соответ-

ствуует скорости $v = 2 \cdot 10^7$ см/сек. Таким образом, $\tau \approx 5 \cdot 10^{-8}$ сек., что значительно меньше периода наблюдаемых колебаний.

Зонд описанной выше конструкции обладает относительно плазмы емкостью ~ 10 мкмкф. Поэтому при частотах в сотни килогерц ток смещения на зонд много больше тока частиц на коллектор зонда. На рис. 13 изображен применявшийся для

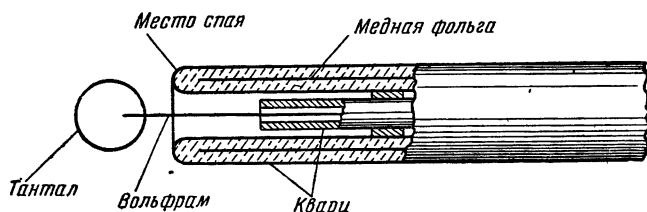


Рис. 13.

измерения амплитуды экранированный зонд, позволяющий выделить только ток частиц на коллектор. Экран из медной фольги через большую емкость соединялся с землей.

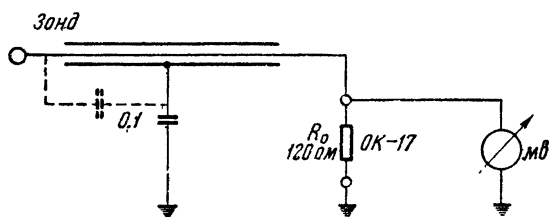


Рис. 14.

Измерения амплитуды производились по схеме, изображенной на рис. 14. Зонд соединен с землей через входное сопротивление осциллографа ОК-17, равное 120 омам. Параллельно включен ламповый милливольтметр, показания которого контролируются по осциллографу. Типичный вид получающихся осциллограмм для режима $U_0 = 5$ кв, $H = 2060$ э, $I = 350$ ма, $d = 7$ см, изображен на рис. 15. Зонд находится в 65 мм от оси. Верхний луч записывает сигнал с коллектора зонда, нижний — сигнал с экрана. Амплитуда колебаний потенциала в данной точке определяется по формуле

$$V_0 = V_{R_0} \frac{R_i}{R_0},$$

где V_{R_0} — амплитуда сигнала на сопротивлении R_0 , а $R_i = \frac{dV}{di}$ — величина, обратная крутизне ионной части характеристики,

снятой в той же точке. Для указанного режима эта величина составляет $\sim 0,85$ мом. При этом амплитуда V_0 колебаний потенциала плазмы получилась равной примерно 1400 в.

Полученный результат можно подвергнуть проверке с помощью схемы, изображенной на рис. 16.

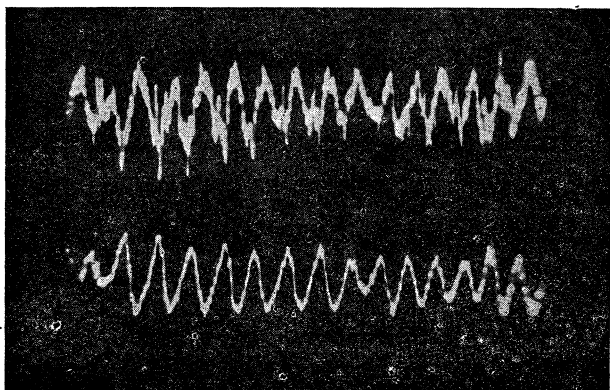


Рис. 15.

Отличие ее в том, что экран соединен с зондом, который заземляется через малую емкость C_0 . Емкостная связь зонда с плазмой в этом случае весьма велика, и амплитуда колебаний потенциала на емкости C_0 будет сравнима с ампли-

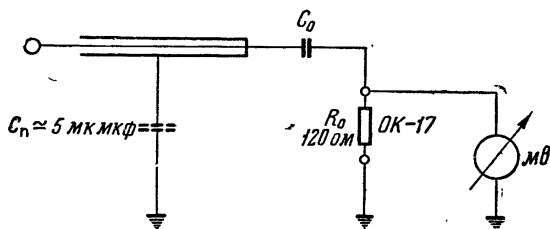


Рис. 16.

тудой колебаний потенциала плазмы V_0 , стремясь к этой величине при $C_0 + C_{\text{пар}} \rightarrow 0$. На рис. 17 построена экспериментальная кривая $V_{c_0}(C_0)$, снятая в той же точке и при том же режиме, которые приведены выше. Видно, что при общей емкости ~ 8 мк.мкф амплитуда колебания потенциала зонда достигает 930 в, при этом кривая еще не испытывает насыщения.

Следует заметить, что предельным значением амплитуды в этом случае будет амплитуда колебаний плазмы, усредненная по длине зонда. Учитывая это, следует считать, что полученный результат подтверждает величину амплитуды, полученную из измерений по первой схеме. Эта величина достигает киловольта и более. Осциллограмма колебаний во втором случае приведена на рис. 18.

Результаты измерения амплитуды колебаний в различных точках по радиусу (в центральной части камеры) приведены в табл. 2. При расчете бралась крутизна $1,2 \cdot 10^{-6}$ а/е. Для радиусов $R=25$ и 10 мм крутизна характеристик при нулевом

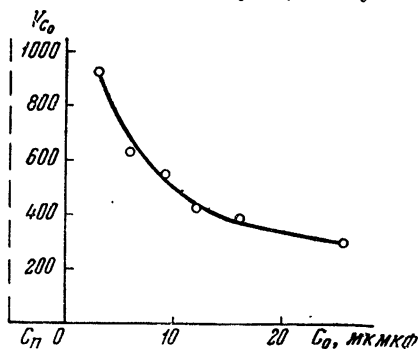


Рис. 17.

потенциале зонда много больше, что видно из рис. 19, где приведено семейство характеристик для данного режима ($H=2060$,

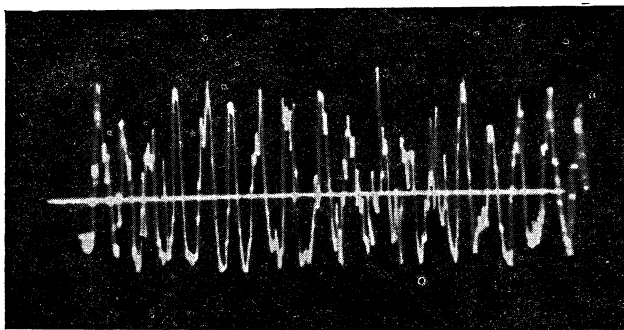


Рис. 18.

$U_0=5$ кв, $\mathcal{I}=350$ ма, $d=7$ см). Поэтому величины V_0 , полученные для указанных точек, сильно завышены (отмечены звездочкой). Кроме того, вблизи оси колебания теряют регулярность и приобретают вид шумов, эффективная величина которых измеряется вольтметром.

На рис. 20 кривая I изображает ход максимального во времени потенциала плазмы в зависимости от радиуса. Кри-

вая *II* изображает ход амплитуды колебаний. Если из ординат кривой *I* вычесть удвоенные значения ординат кривой *II*, то

Таблица 2

$R, \text{ см}$	$V_{R_0}, \text{ мв}$	$V_0, \text{ в}$
15,5	50	490
10,5	100	980
8,5	130	1270
6,5	140	1380
4,5	175	1710
2,5	125	1230*
1,0	170	1650*

получится радиальное распределение минимального во времени потенциала плазмы (кривая *III*). Кривая показывает,

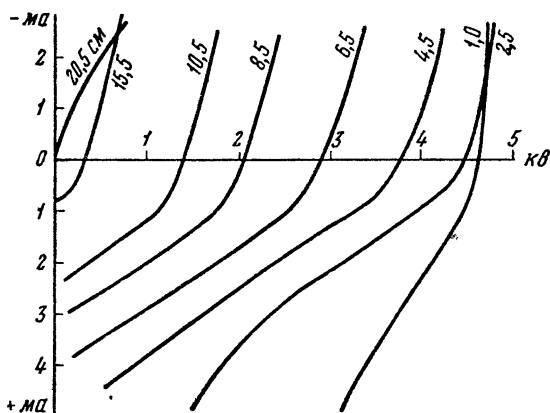


Рис. 19.

что в процессе колебаний в периферийной области потенциал достигает значений, близких к потенциалу стенок.

Измерение частоты колебаний в зависимости от различных параметров показывает, что четко выраженное изменение частоты наблюдается только при изменении величины U_0 . При

изменении U_0 от 2 до 8 кВ частота возрастает от 220 до 400 кГц. Заметных изменений частоты при изменении H , d и J не обнаруживается.

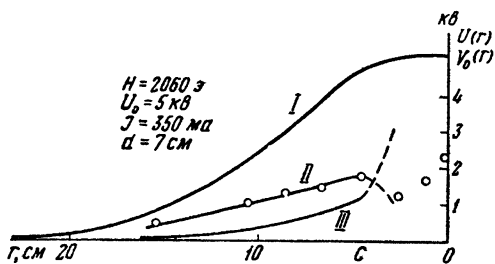


Рис. 20.

Заключение

Проведенные измерения показывают, что радиальное распределение потенциала плазмы в ловушке с магнитными «пробками» при магнетронном способе инжекции сильно отличается от распределения, соответствующего нескомпенсированному ионному пространственному заряду. В том случае, когда величина U_0 достаточно велика для разрушения центрального плазменного пучка, наблюдается устойчивое распределение потенциала по радиусу. При этом объемный заряд ионов в периферийной области скомпенсирован электронами, и почти все электрическое поле сосредоточено вблизи оси. В том же случае, когда плазменный пучок из источника проходит через всю камеру, потенциал плазмы не является стационарным, а испытывает колебания с частотой до 400 кГц. При этом верхнему состоянию соответствует пологое распределение потенциала, когда в периферийной области пространственный заряд ионов не компенсируется электронами. Нижнему состоянию соответствует крутое распределение потенциала, когда на периферии заряды скомпенсированы. Объяснение механизма колебаний требует дальнейших исследований.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. С. Иоффе за советы и предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ионную часть зондовой характеристики можно использовать для оценки плотности плазмы. Для сферического зонда радиуса a , имеющего потенциал $-V_0$ относительно бесконечности, из законов сохранения получается соотношение (см. [5]):

$$h_m = a \sqrt{1 + \frac{eV_0}{E_0}};$$

здесь h_m — максимальный параметр соударения, при котором ион с энергией E_0 попадает на зонд. Тогда ионный ток на зонд будет иметь величину:

$$\mathcal{J}_m = \frac{env}{4} \cdot 4\pi a^2 \left(1 + \frac{eV_0}{E_0}\right); \quad (1)$$

здесь n — плотность ионов, v — скорость, соответствующая энергии E_0 . Эта формула дает верхний предел тока, так как применима лишь в случае достаточно медленного падения потенциала в слое вокруг зонда, когда выполняется условие:

$$2 \left(1 + \frac{eV(r)}{E_0}\right) + e \frac{r}{E_0} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \geq 0,$$

где $V(r)$ — модуль отрицательного относительно плазмы значения потенциала в точке r . Для оценки можно пользоваться формулой (1), если радиус экранирующего слоя больше h_m . В нашем случае это имеет место. Для пологого распределения потенциала величины E_0 и v можно оценить, приняв во внимание, что в объеме камеры есть радиальное электрическое поле около 300 в/см . При этом ионы описывают магнетронные циклоиды, достигая максимальной энергии в 500 эв . В качестве E_0 можно взять половину этой величины. Тогда $v \approx 2,2 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$. Хотя распределение скоростей не изотропно, для сферического зонда формула (1) остается справедливой. Дисконный зонд приближенно заменим сферическим с той же площадью ($\approx 0,3 \text{ см}^2$). При этом $h_m = 0,35 \text{ см}$ при $V_0 = 1000 \text{ в}$.

В режиме $H = 2000 \text{ э}$, $U_0 = 5 \text{ кэ}$, $\mathcal{J} = 310 \text{ ма}$, $d = 7 \text{ см}$ при $V_0 = 1000 \text{ в}$ ток на зонд равен 1,5 ма . Подставляя в (1), получаем плотность $n \approx 1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Для оценки толщины экранирующего слоя предположим, что плотность ионов внутри слоя та же, что и в плазме. Такое предположение не является слишком грубым, если большая часть ионов, движущихся в слое, проходит его, не попадая на зонд, а только отклоняясь. Тогда радиус экранирующегося слоя r_1 можно определить из решения уравнения Пуассона $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -4\pi ne$ с граничными условиями $V = 0$ и $\frac{dV}{dr} = 0$ при $r = r_1$ и $V = -V_0$ при $r = a$. Решение имеет вид:

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi ne \left[r_1^3 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} (r^2 - r_1^2) \right], \quad (a \leq r \leq r_1).$$

При $r = a$ получается соотношение:

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi ne (r_1 - a) \left(\frac{r_1^2}{a} - \frac{r_1 + a}{2} \right).$$

Полагая $V_0 = 1000 \text{ в}$, $n = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $a = 1,6 \text{ мм}$, находим, что это соот-

ношение удовлетворяется при $r_1 = 0,75$ см. Таким образом, внешний радиус экранирующего слоя имеет величину около 1 см.

При оценках не учитывалось влияние магнитного поля на движение ионов. Такое приближение допустимо, если высота циклоиды больше эффективного размера зонда. Это условие выполняется, так как высота циклоиды около 2 см.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. И. Будкер, см. настоящее издание, т. 3, стр. 3.
 2. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
 3. Теория магнетрона. Сборник переводов, изд-во «Советское радио», М., 1946.
 4. Nodderman. Journ. Appl. Phys., 26, N 12 (1956).
 5. Guthrie and Wakerling. The characteristics of electrical discharges in magnetic fields. N.-Y., 1949.
-

В. И. Коган

УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ *

В работе развита теория уширения спектральных линий в идеальной плазме, учитывающая (в рамках классически-адиабатической модели) одновременное возмущение излучающего атома большим числом заряженных частиц, находящихся в тепловом движении. Получены общие формулы для распределения интенсивности в штарковской компоненте линии, уширенной вследствие линейного и квадратичного штарк-эффекта. Эти формулы упрощены для предельных случаев больших и малых плотностей и температур плазмы. Показана неприменимость существующей ударной теории к уширению, обусловленному линейным штарк-эффектом. Рассмотрено совместное уширяющее действие ионов и электронов. Найдена форма линии при одновременном учете хольцмарковского и доплеровского механизмов уширения. Обсуждаются результаты (а также роль некоторых других механизмов уширения линий) применительно к плазме мощного импульсного разряда в водороде.

§ 1. Введение

Из всего обширного круга вопросов теории уширения спектральных линий ** к числу наиболее актуальных относятся вопросы уширения линий в плазме. Некоторым из этих вопросов и посвящена настоящая работа. Основное место (§ 1—5)

* Работа выполнена в 1956—1957 гг.

** Современное состояние этой теории подробно освещено в обзорах [1—4]; ниже мы часто будем ссылаться на эти обзоры, а не на оригинальные работы.

уделено теории уширения линий водорода вследствие взаимодействия излучающих атомов с окружающими заряженными частицами (уширение вследствие линейного штарк-эффекта). Кроме того, кратко рассматриваются уширение вследствие квадратичного штарк-эффекта (§ 7), а также некоторые нештарковские механизмы уширения линий, играющие роль в условиях мощного импульсного разряда (§ 6, 8).

Основой для анализа уширения линий вследствие линейного штарк-эффекта является статистическая теория Хольцмарка [5, 1, 4]. Эта теория, учитывающая совместное воздействие многих ионов на излучающий атом, связана со следующими главными упрощающими предположениями: 1) неучет теплового движения ионов; 2) неучет влияния электронов; 3) пренебрежение влиянием взаимной корреляции положений заряженных частиц (идеальность плазмы). Развитие теории уширения водородных линий со времени появления основополагающей работы Хольцмарка [5] происходит в основном по линии отказа от какого-либо одного из этих упрощающих предположений, а также по линии квантовомеханического обоснования самой теории Хольцмарка [6].

В интересующих нас условиях водородной плазмы с плотностью заряженных частиц N порядка $(10^{14} \div 10^{17}) \text{ см}^{-3}$ и температурой T , значительно превышающей хотя бы несколько электрон-вольт *, неучет теплового движения возмущающих ионов оказывается, вообще говоря, недопустимым. С другой стороны, при этих условиях оказываются законными пренебрежение корреляционными эффектами, а также, по-видимому, квазиклассическое описание электронов (а не только ионов).

Таким образом, мы приходим к следующей постановке задачи: найти форму уширенной линии, обусловленную воздействием на атом электрического поля, создаваемого большим числом хаотически (и независимо) движущихся заряженных частиц (ионов и электронов).

Если пока отвлечься от более трудной проблемы уширения электронами, то первый и самый простой вопрос состоит в следующем: какова форма и ширина линии в предельном случае, противоположном хольцмарковскому, т. е. при больших тепловых скоростях ионов? ** В качестве такого рода альтернативы

* Поскольку при таких температурах термодинамически равновесное количество неионизованных атомов весьма мало, то практически здесь речь идет о температуре ионов T_i в неравновесном случае $T_i \gg T_e$ (он реализуется, например, в начальной стадии мощных импульсных разрядов).

** Здесь и, как правило, в дальнейшем мы будем считать среднюю плотность заряженных частиц фиксированной, а изменяющимся параметром будем считать их среднюю тепловую скорость.

к теории Хольцмарка в литературе [1—4, 7] фигурирует ударная теория, в основе которой лежит допущение о последовательных изолированных столкновениях излучающего атома с отдельными возмущающими частицами.

Нетрудно видеть, что подобная чисто «бинарная» схема тем менее адекватна рассматриваемому явлению, чем больше радиус сил взаимодействия между атомом и возмущающей частицей (при данной плотности и скорости частиц). Это обстоятельство не учитывалось ни в самой ударной теории, ни в ее обобщениях. Между тем для интересующего нас случая линейного штарк-эффекта (являющегося самым «дальнодействующим» из всех механизмов уширения) существующая ударная теория Линдхольма—Унзольда [1, 2] приводит к расходящимся значениям ширины и особенно сдвига штарковской компоненты линии, что, на наш взгляд, прямо указывает на ее неприменимость к этому случаю. Игнорирование же расходящегося (линейно) сдвига компоненты на том основании, что линия в целом симметрична [1], недопустимо, так как именно сдвигами компонент определяется эффективная ширина линии в целом.

На поставленный выше вопрос из существующей ударной теории [1, 2] вытекает следующий ответ: при $\bar{v}_i \rightarrow \infty$ (и фиксированном N) форма линии, обусловленная линейным штарк-эффектом, стремится к $\delta(\omega - \omega_0)$ (невозмущенная линия). Между тем рассмотрение § 4 показывает ошибочность этого результата.

Еще менее удовлетворительно обстоит дело с построением общей теории, которая синтезировала бы для линейного штарк-эффекта два противоположных приближения — статистическое и ударное * (хотя бы при учете одних только ионов). В этой связи необходимо кратко остановиться на трех работах.

Наиболее ограниченную цель преследовала тонкая работа Холстейна [8], где приведен результат вычисления первой поправки к статистической теории для крыла линии в (справедливом здесь) приближении парных столкновений для возмущения вида $\Delta\omega = C_n r^{-n}$. Результат [8] для $n=2$ (линейный штарк-эффект) автоматически вытекает в качестве предельного случая из развиваемой ниже теории (см. § 3).

В серии содержательных работ Спитцера [9—11] развита общая теория уширения линий водорода под действием ионов, включающая в качестве предельных случаев ударную и статистическую теории. В этих работах рассмотрены, в частности, квантовые эффекты в возмущении излучающего атома элект-

* В действительности, как показано ниже, ударное приближение не является даже предельным случаем общей теории и должно быть заменено другим.

трическим полем — неадиабатичность возмущения и вращение атома (при этом получилось, что оба эффекта в значительной мере взаимно компенсируются). Однако все рассмотрение ведется только в бинарном приближении. В соответствии с этим Спитцер говорит о «не поддающемся трактовке» случае умеренных плотностей, когда уже нельзя пренебрегать множественными столкновениями для внутренней части линии*. К тому же все расчеты в [9—11] проведены только для линии *Ly α* , а распространение их, скажем, на линии Бальмера, связано с едва ли преодолимыми вычислительными трудностями (ввиду быстрого возрастания кратности вырождения уровней с увеличением главного квантового числа).

К сожалению, независимо от «утилитарной» неполноты теории Спитцера, она страдает также и принципиальными недостатками. Во-первых, как указал Грим [12], расчет Спитцера уже для сравнительно простого случая линии *Ly α* содержит некорректное переупрощение в части, относящейся к учету неадиабатичности, и, следовательно, даже для этого случая задача не решена строго.

Во-вторых, — и это представляется нам весьма существенным — в работах Спитцера не обоснована (вопреки мнению их автора) законность использованного в них для малых плотностей бинарного приближения. Метод Спитцера основан на нахождении точного распределения интенсивности в штарковской компоненте линии при одном столкновении, с последующим суммированием этих интенсивностей по всем отдельным столкновениям в духе ударной теории Лорентца—Вейскопфа. Такая процедура законна лишь при малой когерентности последовательных «суб-линий» от отдельных столкновений, иначе говоря, при достаточно большой величине эффективных фазовых сдвигов δ . Но это условие в наиболее интересном случае $h_i \ll 1$ [см. ниже (2.9)] определенно не выполняется, поскольку, как это видно из логарифмической расходимости интегралов у Спитцера, основную роль в уширении играют «далекие» пролеты ионов ($R \sim N^{-1/2}$), при которых $\delta_{эф} \ll 1$ **.

По курьезному стечению обстоятельств сделанное Спитцером неправильное физическое допущение оказалось отчасти замаскированным прямой расчетной ошибкой, заключающейся в том, что в его первой работе [9] при переходе от формулы (17) к формуле (20) на число столкновений умножалось только

* Этот случай охватывает примерно три порядка по плотности (или два порядка по температуре), причем частично в наиболее интересной для нас области (см. § 8).

** Это можно пояснить и иначе: как легко убедиться, в этом случае время между столкновениями одного порядка с длительностью столкновения.

одно из слагаемых в (17). Эта ошибка несущественна только для $\delta \gg 1$; напротив, для $\delta \ll 1$ она оказывается качественной. В результате, найденный Спитцером контур компоненты правилен, по нашему мнению, только там, где справедливо бинарное приближение и где $\delta \gg 1$, т. е. на «статистическом» крыле.

В работе Кругдаль [13], напротив, развита теория уширения линий водорода хотя и чисто классическая, но учитывающая множественные столкновения. Эта работа представляет собой в основном модификацию обобщенной ударной теории Линдхольма [14, 4] применительно к случаю «векторного» сложения возмущений (т. е. полей) от отдельных ионов*. Однако работа [13] целиком неправильна. Действительно, помимо неприменимой к дальнедействующим силам модели столкновения с прямоугольной модуляцией частоты, в [13] содержатся совершенно необоснованные и некорректные математические манипуляции уже в исходных формулах теории. Хотя эти манипуляции и позволили найти в замкнутой форме весь контур штарковской компоненты линии для любых плотностей и температур, но контур этот правилен только в тривиальном предельном случае $\bar{v}_i = 0$ (теория Хольцмарка), тогда как уже первая поправка к «статистической» форме крыла линии, полученная в [13], не только по функциональной зависимости, но даже и по знаку отличается от бесспорного результата, полученного двумя независимыми способами в [8] и в § 3 настоящей работы. Далее, согласно [13] интенсивность при любых N и \bar{v}_i обращается в нуль в центре несмещенной линии, и вообще контур компоненты даже при $\bar{v}_i \rightarrow \infty$ мало отличается от хольцмарковского. Результаты Кругдаль, разумеется, совершенно расходятся также и с результатами Спитцера.

Работ, посвященных уширению водородных линий электронами, мы бегло коснемся в § 8.

В данной работе мы пошли по пути, в известном смысле дополнительно по отношению к избранному Спитцером. А именно, ниже развита теория хотя и чисто адиабатическая**, но зато последовательно учитывающая одновременно возмущение излучающего атома большим числом хаотически движущихся заряженных частиц. В свете сказанного ранее

* Сама теория [14] относится к случаю «скалярного» сложения возмущений ($\Delta\omega = \sum_i \Delta\omega_i$) и потому применима только к уширению линий чужеродными атомами.

** Некоторым основанием для этого является выясненная Спитцером [11] на примере линии $Ly \alpha$ (в рамках бинарной схемы!) значительная взаимная компенсация эффектов неадиабатичности и вращения (ср. [12]).

ясно, что для интересующего нас случая линейного штарк-эффекта такой подход имеет решающее значение.

Представляется необходимым продвигнуться как можно дальше в этой, довольно общей постановке задачи, последовательно используя метод интеграла Фурье [1—4], а не прибегая к каким-либо искусственным обобщениям неадекватной данному случаю ударной теории. И действительно, в развиваемой ниже теории самый термин «столкновение» имеет обычно лишь качественный смысл.

Таким образом, наиболее существенным недостатком нашей теории является учет квантовых эффектов в возмущении излучающего атома переменным электрическим полем совокупности заряженных частиц. Тем не менее, последовательно проводимое ниже классически-адиабатическое рассмотрение является, по нашему мнению, необходимым этапом на пути к строгой теории, которая должна учесть в рамках той же «множественной» схемы также и квантовые эффекты*.

Намеченная здесь программа расчета формы линии является, по существу, обобщением программы, выдвинутой еще Ленцем [15] и недавно реализованной Андерсоном [3, 4]. Последняя исходит из скалярного закона сложения возмущений от отдельных частиц ($\Delta\omega = \sum_i \Delta\omega_i$), и потому применимость теории Ленца-Андерсона ограничивается, строго говоря, случаем уширения силами Ван-дер-Ваальса**. В интересующих нас случаях уширения вследствие линейного и квадратичного штарк-эффектов мы имеем дело с векторным сложением возмущений ($\Delta\omega \propto E$ или $\Delta\omega \propto E^2$, где $E = \sum_i E_i$). При этом законе сложения как общие формулы теории (§ 2, 7), так и все вычисления, естественно, резко усложняются по сравнению со «скалярным» случаем.

Основные результаты настоящей работы были кратко резюмированы ранее [26].

§ 2. Общее выражение для формы штарковской компоненты линии, уширенной вследствие линейного штарк-эффекта в полях ионов и электронов

Рассмотрим некоторую штарковскую компоненту спектральной линии, испускаемой покоящимся атомом водорода. В адиабатическом приближении распределение интенсивности

* Заметим в этой связи, что самый критерий адиабатичности в «множественной» теории будет не таким, как во всегда рассматриваемой бинарной теории [1, 2].

** См. также § 7 настоящей статьи.

$I(\omega)$ в этой компоненте дается фурье-разложением цуга волн, излучаемого соответствующим ей «эквивалентным осциллятором», мгновенная частота которого определяется конфигурацией системы возмущающих заряженных частиц*. Введем обозначения: ω_0 — невозмущенная частота линии; ω — наблюдаемая частота, $\omega_1(t)$ — мгновенная частота эквивалентного осциллятора; $\chi(t) \equiv [\omega_1(t) - \omega_0]$ — соответствующий мгновенный сдвиг компоненты. Для линейного штарк-эффекта $\chi(t) = \frac{\alpha}{e} |\mathbf{E}(t)|$, где e — элементарный заряд; α — штарковская постоянная рассматриваемой компоненты; $\mathbf{E}(t)$ — электрическое поле совокупности ионов и электронов в месте излучающего атома (начале координат):

$$\mathbf{E}(t) = e \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{v}_k t}{|\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{v}_k t|^3} - e \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_{0j} + \mathbf{v}_j t}{|\mathbf{r}_{0j} + \mathbf{v}_j t|^3} \quad (2.1)$$

(индексами j и k нумеруются соответственно ионы и электроны; \mathcal{N} — полное число заряженных частиц каждого знака в объеме V).

Распределение интенсивности рассматриваемой компоненты (нормированное на единицу) имеет вид

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T/2}^{T/2} \exp \left[i \int_{-\infty}^t \omega_1(t') dt' - i\omega t \right] dt \right|^2. \quad (2.2)$$

Преобразуя (2.2) по формулам теории корреляций [3, 4] и заменяя возникающее среднее по времени средним по статистическому ансамблю величин, определяющих $\chi(t)$, получаем

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} \varphi(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

где $\varphi(\tau) \equiv \left\langle \exp \left[i \int_0^{\tau} \chi(t) dt \right] \right\rangle$ (угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю).

Для нахождения $\varphi(\tau)$ нужно знать статистическое распределение всех аргументов величины $\exp \left[i \int_0^{\tau} \chi dt \right]$, каковыми

* По поводу квантовомеханического обоснования применяемого нами метода интеграла Фурье см. [1—4].

являются значения напряженности поля (2. 1) в последовательные (бесконечно близкие) моменты времени. Разбивая отрезок времени $0 \div \tau$ на M одинаковых малых участков, нумеруя их значком $a = 1, 2, \dots, M$ и заменяя интегрирование по t суммированием по a , получаем

$$\varphi(\tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \dots \int \exp \left[i \frac{\alpha \tau}{eM} \sum_{a=1}^M |\mathbf{E}_a| \right] W(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_M) d\mathbf{E}_1 \dots d\mathbf{E}_M, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{E}_a \equiv \mathbf{E}(t_a)$, а $W(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_M)$ — нормированное на единицу статистическое распределение значений поля в последовательные M моментов времени $t_a \equiv \frac{a}{M} \tau$, т. е. плотность вероятности того, что в момент t_a поле в центре атома равно \mathbf{E}_a ($a = 1, 2, \dots, M$) (интегрирование без указания пределов здесь и всюду в дальнейшем происходит по всему пространству соответствующих переменных).

Это распределение нетрудно найти методом А. А. Маркова [16], обобщая его с трехмерного на $3M$ -мерный случай*. Считая пространственное распределение ионов и электронов пуассоновским, т. е. случайным при заданной средней плотности N , и переходя к пределу $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ при $\frac{\mathcal{N}}{V} \equiv N = \text{const}$, находим:

$$W(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_M) = \frac{1}{(2\pi)^{3M}} \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\rho_a e^{i\rho_a \mathbf{E}_a}) e^{-N C(\rho_1, \dots, \rho_M)}, \quad (2.5)$$

где

$$C(\rho_1, \dots, \rho_M) = \int \int \left\{ 1 - \exp \left[i e \sum_{a=1}^M \rho_a \frac{(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t_a)}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t_a|^3} \right] \right\} [f_i(\mathbf{v}) + f_e(\mathbf{v})] d\mathbf{v} d\mathbf{r}_0. \quad (2.6)$$

Здесь $f_i(\mathbf{v})$, $f_e(\mathbf{v})$ — нормированные на единицу максвелловские распределения скоростей ионов и электронов. Из (2.4)–(2.6), вводя еще безразмерные переменные $\chi_a = \frac{eM}{\alpha \tau} \rho_a$, $\sigma_a = \frac{\alpha \tau}{eM} \mathbf{E}_a$, окончательно находим:

$$\varphi(\tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3M}} \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\sigma_a d\chi_a e^{i\sigma_a \chi_a + i\chi_a \sigma_a}) e^{-N C(\chi_1, \dots, \chi_M; \tau)}, \quad (2.7)$$

* Заметим кстати, что все расчеты по методу Маркова значительно удобнее производить не как обычно — с помощью разрывного множителя Дирихле [16], а с помощью δ -функции.

где

$$C(\chi_1, \dots, \chi_M; \tau) = \iint \left\{ 1 - \exp \left[i \frac{\alpha \tau}{M} \sum_{a=1}^M \chi_a \frac{\left(\mathbf{r}_0 + \frac{a}{M} \mathbf{v} \tau \right)}{\left| \mathbf{r}_0 + \frac{a}{M} \mathbf{v} \tau \right|^3} \right] \right\} [f_i(\mathbf{v}) + f_e(\mathbf{v})] d\mathbf{v} d\mathbf{r}_0. \quad (2.8)$$

Выражения (2.3), (2.7), (2.8) и определяют искомую форму уширенной штарковской компоненты линии в классически-адиабатическом приближении. Легко убедиться, что $I(\omega)$ сводится к функции некоторого безразмерного сдвига частоты, зависящей от двух характерных безразмерных параметров:

$$h_i \equiv N \left(\frac{\alpha}{v_{0i}} \right)^3, \quad h_e \equiv N \left(\frac{\alpha}{v_{0e}} \right)^3, \quad (2.9)$$

где $v_{0i} \equiv \sqrt{2kT_i/M}$, $v_{0e} \equiv \sqrt{2kT_e/m}$ (T_i , T_e — температуры ионов и электронов; M , m — их массы). Вычисление этой функции в самом общем виде не представляется возможным; однако в наиболее интересных областях величин она значительно упрощается. Схема и результаты соответствующих вычислений приводятся в § 3—5. При этом в § 3, 4 рассматривается уширение под действием одних только ионов, а в § 5 качественно учитывается также и влияние электронов.

§ 3. Линейный штарк-эффект; обобщенное статистическое приближение

Рассмотрим вначале область сравнительно низких температур и больших плотностей плазмы, т. е., согласно (2.9), область достаточно больших значений $h_i \equiv h^*$. Перейдем в общих формулах (2.3), (2.7), (2.8) к безразмерным переменным $z = \alpha N^{2/3} \tau$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}/v_{0i}$, $\mathbf{s} = N^{1/3} \mathbf{r}_0$ и введем безразмерное расстояние от центра линии

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha N^{2/3}}. \quad (3.1)$$

* Как будет видно, излагаемое ниже приближение справедливо при достаточно большом ($\omega - \omega_0$) также и для малого h ; однако вычисление удобнее вести именно считая h большим.

Тогда, определяя $I_h(\beta)$ равенством $I(\omega)d\omega = I_h(\beta)d\beta$, получаем

$$I_h(\beta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i\beta z} \varphi_h(z) dz, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_h(z) = & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3M}} \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\sigma_a e^{i\sigma_a}) \times \\ & \times \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\chi_a e^{i\chi_a \sigma_a}) e^{-C_h(\chi_1, \dots, \chi_M; z)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} C_h(\chi_1, \dots, \chi_M; z) = \\ = \iint \left\{ 1 - \exp \left[\frac{iz}{M} \sum_{a=1}^M \frac{\chi_a \left(s + \frac{a}{M} \frac{z}{h^{1/3}} \mathbf{u} \right)} \left| s + \frac{a}{M} \frac{z}{h^{1/3}} \mathbf{u} \right|^3 \right] \right\} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$f(\mathbf{u}) = \pi^{-3/2} e^{-u^2}.$$

Перейдем к разложению $I_h(\beta)$ в ряд по обратным степеням h . Соответствующее вычисление хотя и оказывается довольно длинным, но не содержит особых тонкостей, и потому мы ограничимся кратким изложением его хода.

Нулевое приближение находим, полагая в (3.4) $h = \infty$ и используя соотношения [16]:

$$\int \left[1 - \exp \left(i \frac{\mathbf{a} \mathbf{r}}{r^3} \right) \right] d\mathbf{r} = (\lambda |\mathbf{a}|)^{3/2}, \quad (3.5)$$

$$e^{-|\mathbf{x}|^{3/2}} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{H}(\gamma)}{\gamma^2} e^{-i\mathbf{x}\boldsymbol{\gamma}} d\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.6)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{x} — произвольные векторы; $\lambda \equiv 2\pi(4/15)^{2/3} = 2,6031$; \mathcal{H} — функция Хольцмарка [1, 4, 16], нормированная условием

$\int_0^{\infty} \mathcal{H}(\gamma) d\gamma = 1$. Простые выкладки с использованием свойств δ -функции дают *

$$I^{(0)}(\beta) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{H} \left(\frac{\beta}{\lambda} \right), \quad (3.7)$$

* Верхним индексом здесь и в § 4, 5, 7 обозначается порядок приближения.

что, как и должно было быть, совпадает с формулой Хольцмарка [1, 4].

Для нахождения первого приближения нужно, очевидно, считать h настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\left(\frac{a}{M} \frac{z}{h^{1/3}} u\right)_{\text{эф}} \ll s_{\text{эф}}$. Последнее может выполняться и при малом h , если достаточно мало $z_{\text{эф}}$ (очевидно, что $\left(\frac{a}{M} u\right)_{\text{эф}} \sim 1$), что в свою очередь имеет место при достаточно большом положительном β (т. е. на крыле линии), когда входящий в (3.2) осциллирующий множитель $e^{-i\beta z}$ обуславливает малость $z_{\text{эф}} \sim 1/\beta$.

В соответствии со сказанным представим (3.4) в виде $C_h = C^{(0)} + C_h^{(1)}$, где $C^{(0)} \equiv C_{h=\infty}$, $C_h^{(1)} \equiv C_h - C_{h=\infty}$. Далее, учитывая, что при достаточно большом h будет $|C_h^{(1)}| \ll 1$, имеем $\exp(-C_h) \approx (1 - C_h^{(1)}) \exp(-C^{(0)})$. Подставляя это в (3.3) и (3.2), пользуясь соотношением вида (3.6) и выполняя интегрирование по всем χ_a , а затем по всем σ_a с использованием свойств δ -функции, находим

$$I_h(\beta) = I^{(0)}(\beta) + I_h^{(1)}(\beta), \quad (3.8)$$

где $I^{(0)}(\beta)$ равно (3.7), а $I_h^{(1)}(\beta)$ имеет вид

$$I_h^{(1)}(\beta) = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\beta z} dz \int \mathcal{H}(\gamma) \frac{d\gamma}{\gamma^2} \iint f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds e^{iz \left| \lambda\gamma + \frac{s}{s^3} \right|} \times \\ \times \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \exp \left[\frac{iz}{M} \sum_{a=1}^M \left| \lambda\gamma + \frac{\left(s + \frac{a}{M} \frac{z}{h^{1/3}} \mathbf{u} \right)}{\left| s + \frac{a}{M} \frac{z}{h^{1/3}} \mathbf{u} \right|^3} \right| - iz \left| \lambda\gamma + \frac{s}{s^3} \right| \right] - 1 \right\}. \quad (3.9)$$

При $h \rightarrow \infty$ показатель экспоненты в фигурных скобках стремится к нулю. В соответствии с этим разложим ее в ряд по степеням $h^{-1/3}$ до членов второго порядка включительно [члены первого порядка линейны в компонентах \mathbf{u} и потому дают нуль при интегрировании по сферически-симметричному распределению $f(\mathbf{u})$]. Это разложение законно, во-первых, при $\left(\frac{a}{M} \frac{z}{h^{1/3}} u\right)_{\text{эф}} \ll s_{\text{эф}}$ и, во-вторых, при не слишком малых $|\lambda\gamma + s/s^3|$. Так как существенные значения последней величины близки к β (условие взаимного погашения быстрых осцилляций в интеграле по z), то это означает, что разложе-

ние справедливо лишь при не слишком малых β (даже и при $h \gg 1$).

После выполнения вышеуказанного разложения дальнейшее упрощение $I_h^{(1)}(\beta)$ удастся провести до конца точно. Выполняя предельный переход $M \rightarrow \infty$ и переходя к новым переменным $\rho = zs/s^3$, $x = z(\lambda\gamma + s/s^3)$, выполняем вначале интегрирование по u в сферических координатах с полярной осью вдоль ρ . Затем разлагаем функцию $\frac{1}{|x-\rho|^2} \mathcal{H}\left(\frac{|x-\rho|}{\lambda z}\right)$ в интеграл Фурье с помощью фурье-обращения формулы (3.6); возникающую при этом новую переменную интегрирования y выбираем в качестве полярной оси при интегрировании по ρ . Воспользовавшись разложением плоской волны по полиномам Лежандра:

$$e^{-iy\rho} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^l \sqrt{\frac{\pi}{2y\rho}} J_{l+\frac{1}{2}}(y\rho) P_l(\cos\theta) \quad (3.10)$$

($J_{l+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя, θ — угол между y и ρ), выполняем интегрирование по углам вектора ρ , а затем — суммирование по l . Используя, далее, равенство (справедливое для всех p , при которых интеграл конечен) $\int_0^{\infty} J_p(x) dx = 1$, разлагая e^{ixy} по формуле вида (3.10) и выполняя интегрирование по углам вектора x (относительно полярной оси y), а затем — суммирование по l и интегрирование по углам u и, наконец, выражая бесселевы функции $J_{1/2}$ и $J_{3/2}$ через тригонометрические функции, получаем:

$$\begin{aligned} I_h^{(1)}(\beta) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{h^{2/3}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dz z^{5/2} e^{-i\beta z} \int_0^{\infty} dx x^{1/2} e^{ix} \times \\ & \times \left[\frac{i}{x} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\lambda z}{x} y\right)^{3/2}} \frac{\sin y}{y^{1/2}} dy - \right. \\ & \left. - \left(\frac{i}{x} + \frac{3}{4}\right) \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\lambda z}{x} y\right)^{3/2}} \frac{(\sin y - y \cos y)}{y^{3/2}} dy \right]. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Получившиеся интегралы по y совпадают, с точностью до множителя, с функциями, введенными Чандрасекаром и фон Нейманом [17, 18]:

$$G(\alpha) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{3/2}} y^{-1/2} \sin y dy, \quad (3.12)$$

$$\tilde{I}(x) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{x}\right)^{3/2}} y^{-5/2} (\sin y - y \cos y) dy. \quad (3.13) *$$

Вводя эти функции в (3.11) и выполняя несложные преобразования с использованием соотношений для производных δ -функции:

$$\int_0^{\infty} \sin(kz) z^3 dz = \pi \delta'''(k), \quad \int_0^{\infty} \cos(kz) z^4 dz = \pi \delta^{(IV)}(k), \quad (3.14)$$

$$\delta^{(n)}(\lambda x - \beta) = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \delta^{(n)}\left(x - \frac{\beta}{\lambda}\right),$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x - x_1) dx = (-1)^n \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_1}, \quad (3.15)$$

приходим к результату:

$$I_h^{(1)}(\beta) = \frac{1}{\lambda h^{2/3}} S\left(\frac{\beta}{\lambda}\right), \quad (3.16)$$

где

$$S(x) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{15}{4}\right)^{5/3} \left\{ \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{G(x) - \tilde{I}(x)}{\sqrt{x}} \right] - \frac{3}{4} \frac{d^4}{dx^4} [\tilde{I}(x) \sqrt{x}] \right\}. \quad (3.17)$$

После подстановки G и \tilde{I} из (3.12), (3.13) эта функция сводится к виду

$$S(x) = \frac{1}{128\pi^2} \left(\frac{15}{4}\right)^{5/3} \frac{1}{x^5} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{x}\right)^{3/2}} [P(y) \cos y + Q(x, y) \sin y] dy, \quad (3.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P(y) &= 192 - 42y^2, \\ Q(x, y) &= 111y - 12y^3 - \frac{192}{y} - 5 \frac{x^{3/2}}{y^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Результат табуляции функции $S(x)$ приведен в табл. 1 (см. также рис. 1). Для последующего отметим, что, как показало специальное вычисление, максимум функции $S(x)$ расположен несколько правее максимума $\mathcal{H}(x)$, а именно: $\mathcal{H}_{\max} = \mathcal{H}(1,607)$; $S_{\max} =$

* В отличие от [17, 18], мы снабдили эту функцию значком \sim , чтобы не смешивать ее с интенсивностью $I(\omega)$.

x	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$10^2 \cdot S(x)$	-3,66	-3,45	-3,29	-2,66	-1,67	-0,589	+0,376	1,09	1,50	1,64
x	2,0	2,4	2,8	3,2	3,4	3,8	4,2	4,6	5,0	$\rightarrow \infty$
$10^4 \cdot S(x)$	$\frac{1}{3}134$	80,8	37,9	13,0	5,86	-1,60	-3,95	-4,23	-3,71	$-447x^{-7/2}$

$= S(1,613)$. Как и функции G и \bar{I} , функция S определена, очевидно, только в области $x \geq 0^*$. Асимптотический вид ее при больших x проще всего получить из (3.17), используя

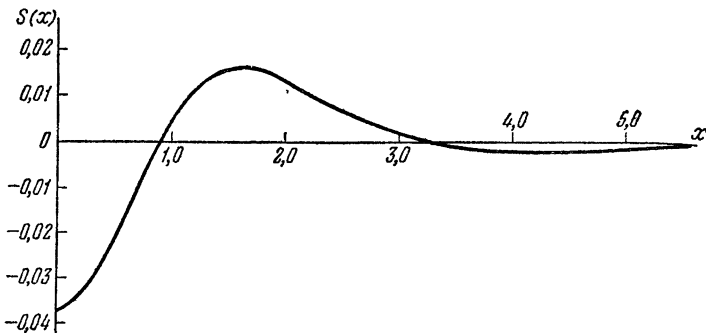


Рис. 1.

предельные выражения для $G(x)$ и $\bar{I}(x)$ [18]: $G(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}$,

$\bar{I}(x) \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ($x \gg 1$). Это дает

$$S(x) \approx -\frac{5}{256\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{15}{4}\right)^{5/3} x^{-7/2} \quad (x \gg 1). \quad (3.20)$$

Разложение при малых x удобнее получить из (3.18), разлагая выражение в квадратных скобках в ряд по y и т. д. При этом получаем

$$S(x) \approx \frac{2}{135\pi^2} \left(\frac{15}{4}\right)^{5/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left[-1 + \frac{25}{7} \frac{2^{1/6}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) x^2\right] \quad (x \ll 1). \quad (3.21)$$

* Формально ее можно продолжить и в область $x < 0$, причем здесь, как нетрудно убедиться, $S(x) \equiv 0$.

Далее, с помощью (3.17) и предельных выражений для G и \tilde{I} , легко убедиться, что $\int_0^{\infty} S(x) dx = 0$.

Согласно (3.8), (3.7), (3.16) и (3.1), форма штарковской компоненты в рассматриваемом приближении — мы назовем его обобщенным статистическим приближением — дается окончательно выражением

$$I_h(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega_0} \left[\mathcal{H} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0} \right) + \frac{1}{h^{2/3}} S \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0} \right) \right], \quad (3.22)$$

где введен характерный масштаб уширения

$$\Delta\omega_0 = \lambda\alpha N^{2/3} = 2,6031\alpha N^{2/3}. \quad (3.23)$$

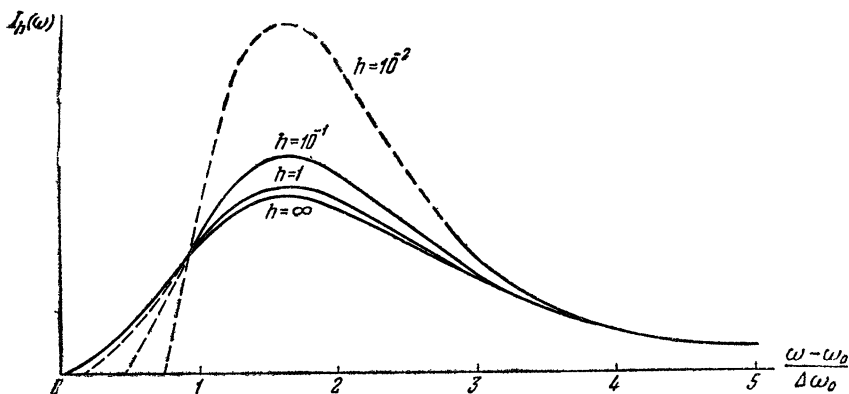


Рис. 2.

Распределение интенсивности (3.22) автоматически удовлетворяет (при любом h) условию нормировки $\int_0^{\infty} I_h(\omega) d\omega = 1$.

Согласно (3.22) и (2.9), поправка к теории Хольцмарка, учитывающая тепловое движение ионов, пропорциональна ионной температуре T_i . При этом с ростом T_i распределение интенсивности в компоненте сужается, а его максимум несколько сдвигается в сторону крыла. В качестве иллюстрации на рис. 2 представлены кривые (3.22) для $h = \infty$, $h = 1$, $h = 10^{-1}$ и $h = 10^{-2}$ (пунктиром даны те участки кривых, где уже нарушается условие их применимости).

По смыслу проделанного вывода второй член в (3.22) является поправочным. Условие его малости по сравнению

с первым членом представляет собой условие применимости теории Хольцмарка.

При $h \gg 1^*$ приближенная справедливость этой теории нарушается только вблизи центра линии. При $\omega - \omega_0 \ll \Delta\omega_0$, с учетом (3. 21) и соответствующего разложения для $\mathcal{H}(x)$ [1, 16], имеем

$$I(\omega) \approx \frac{75(\omega - \omega_0)^2}{32\pi^4 \alpha^3 N^2} \left[1 - \frac{2\pi}{45} \left(\frac{15}{4}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{N^{2/3} v_{0i}^2}{(\omega - \omega_0)^2} \right]. \quad (3. 24)$$

Следовательно, условием применимости теории Хольцмарка при $h \gg 1$ является

$$\omega - \omega_0 \gg N^{1/3} v_{0i}, \quad (3. 25)$$

т. е. эта теория справедлива почти для всего контура линии за исключением малой области вблизи ω_0 .

Вычисление формы компоненты в области $\omega - \omega_0 \ll N^{1/3} v_{0i}$ и $\omega - \omega_0 < 0$ (при $h \gg 1$) еще не окончено. При интересующих нас N ширина этой области для бальмеровских линий сравнима с доплеровской шириной (§ 6). Спад интенсивности в этой области при (алгебраическом) убывании $(\omega - \omega_0)$ является, по-видимому, экспоненциальным.

При $h \ll 1$ второй член в (3. 22) мал по сравнению с первым только при больших $(\omega - \omega_0)$. Для этой области, используя (3. 20) и асимптотическое разложение $\mathcal{H}(x)$ [1, 16], получаем

$$I(\omega) \approx \frac{2\pi N \alpha^{3/2}}{(\omega - \omega_0)^{5/2}} \left[1 - \frac{5}{64} \frac{v_{0i}^2}{\alpha(\omega - \omega_0)} \right]. \quad (3. 26)$$

Таким образом, в случае $h \ll 1$ статистическая теория применима при

$$\omega - \omega_0 \gg \frac{v_{0i}^2}{\alpha} \equiv \Omega, \quad (3. 27)$$

т. е. на далеком крыле линии.

Выражение (3. 26) совпадает с результатом упомянутого в § 1 расчета Холстейна [8], если в этом результате положить $n=2$, $C_n = \alpha$ и усреднить его по максвелловскому распределению скоростей ионов.

§ 4. Линейный штарк-эффект; квазибинарное приближение

Перейдем к определению формы уширенной компоненты для случая малых плотностей и высоких температур плазмы, т. е. для случая $h_i \equiv h \ll 1$. Здесь удобно перейти в форму-

* При оценках здесь и в § 4 мы отвлекаемся от численных коэффициентов; они будут учтены в § 8.

лах (2.3), (2.7), (2.8) к безразмерным переменным $y = N^{1/3} v_{0i} \tau$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}/v_{0i}$, $\mathbf{s} = \mathbf{r}_0/(v_{0i} \tau)$, а также

$$\xi = \frac{\omega - \omega_0}{N^{1/3} v_{0i}}. \quad (4.1)$$

Полагая $I(\omega) d\omega = I_h(\xi) d\xi$, получаем

$$I_h(\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\xi y} \varphi_h(y) dy, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_h(y) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3M}} \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\sigma_a e^{i\sigma_a}) \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\chi_a e^{i\chi_a \sigma_a}) \times \\ \times e^{-C_h(\chi_1, \dots, \chi_M; y)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} C_h(\chi_1, \dots, \chi_M; y) = y^3 \iint \left\{ 1 - \exp \left[\frac{ih^{1/3}}{yM} \sum_{a=1}^M \frac{\chi_a \left(\mathbf{s} + \frac{a}{M} \mathbf{u} \right)}{\left| \mathbf{s} + \frac{a}{M} \mathbf{u} \right|^3} \right] \right\} \times \\ \times f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Нас интересует вид $I_h(\xi)$ при малом h . Для дальнейшего условимся, что предельный переход $h \rightarrow 0$ означает $v_{0i} \rightarrow \infty$ при $N = \text{const}$ *.

Найдем разложение $\varphi_h(y)$ при $h \rightarrow 0$. Нетрудно убедиться, что к этой цели не ведет ни один из двух напрашивающихся прямых путей: 1) разложение C_h в ряд по $h^{1/3}$, интегрирование по \mathbf{u} , \mathbf{s} и затем — по всем χ_a , σ_a ; 2) разложение $\exp(-C_h)$ в ряд по C_h (на том основании, что $C_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$), интегрирование по всем χ_a , σ_a и лишь затем — по \mathbf{u} , \mathbf{s} . В обоих случаях получаются расходящиеся интегралы. Однако анализ этих расходимостей, возникающих при незаконных способах разложения, позволяет выяснить существенные при $h \rightarrow 0$ области переменных интегрирования и, тем самым, найти правильный способ разложения.

Так, при первом из названных способов интеграл по \mathbf{s} расходится в «иглообразной» области $\mathbf{s} \approx -\frac{a}{M} \mathbf{u}$, что указывает на ее существенную роль при правильном способе разложения. При втором из способов получается расходимость

* Предельный же переход $h \rightarrow 0$ в тривиальном смысле $N \rightarrow 0$ приводит, как это видно из (2.3), (2.7), к заранее очевидному результату: $I(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$.

типа $\int ds$, что указывает на неприменимость бинарного приближения (т. е. приближения последовательных парных столкновений) к уширению вследствие линейного штарк-эффекта (см. также § 1 и 7). Учитывая это, мы будем называть приближение, развиваемое ниже, квазибинарным приближением.

Как и в § 3, необходимо выделить из величины C_h главное слагаемое, которое должно быть оставлено в экспоненте. Рассмотрим входящий в (4.4) интеграл по s (при фиксированном u). Нетрудно сообразить, что область существенных s определяется тем условием, чтобы показатель экспоненты в (4.4) был порядка единицы*. Следовательно, при достаточно малом h основную роль в интеграле будет играть «иглообразная» область $s_{эф} \approx s_a \equiv -\frac{a}{M} u$. При $h \rightarrow 0$ эта область становится все более тонкой и, кроме того, расчленяется на дискретные равноотстоящие «бусинки» с центрами в точках s_a ($a = 1, 2, \dots, M$).

В соответствии со сказанным, тождественно преобразуем (4.4) к виду: $C_h = C_h^{(0)} + C_h^{(1)}$, где

$$C_h^{(0)} = y^3 \sum_{a=1}^M \iint \left\{ 1 - \exp \left[\frac{ih^{1/3}}{yM} \frac{\chi_a \left(s + \frac{a}{M} u \right)}{\left| s + \frac{a}{M} u \right|^3} \right] \right\} f(u) du ds, \quad (4.5)$$

$$C_h^{(1)} = y^3 \iint \left\{ 1 - \exp \left[\frac{ih^{1/3}}{yM} \sum_{a=1}^M \frac{\chi_a \left(s + \frac{a}{M} u \right)}{\left| s + \frac{a}{M} u \right|^3} \right] \right\} f(u) du ds - \\ - y^3 \sum_{a=1}^M \iint \left\{ 1 - \exp \left[\frac{ih^{1/3}}{yM} \frac{\chi_a \left(s + \frac{a}{M} u \right)}{\left| s + \frac{a}{M} u \right|^3} \right] \right\} f(u) du ds. \quad (4.6)$$

Слагаемое $C_h^{(0)}$ (сумма интегралов по дискретным «бусинкам») является главным, а слагаемое $C_h^{(1)}$ — поправочным (критерий его малости выяснится впоследствии). Поэтому произведем в (4.3) разложение: $\exp(-C_h) \approx (1 - C_h^{(1)}) \exp(-C_h^{(0)})$. Упро-

* Кстати, этот критерий сразу показывает, что при $h^{1/3} \gg u_{эф}$ [в частности, при $\xi \gg h^{-1/3}$, что эквивалентно (3.27)] $s_{эф} \gg u_{эф}$, так что справедливо рассмотренное в § 3 статистическое приближение.

щая, далее, (4.5) с помощью (3.5) и вводя обозначение $\gamma = h^{1/2} (\lambda y / M)^{3/2}$, без труда находим

$$\varphi_h(y) \approx \varphi_h^{(0)}(y) + \varphi_h^{(1)}(y), \quad (4.7)$$

где

$$\varphi_h^{(0)}(y) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{a=1}^M \left[d\sigma_a e^{i\sigma_a} \int \frac{d\chi_a}{(2\pi)^3} e^{i\chi_a \sigma_a - \gamma \chi_a^{3/2}} \right], \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_h^{(1)}(y) = & y^3 \int \int f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds \lim_{M \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\sigma_a e^{i\sigma_a}) \times \\ & \times \int \dots \int \prod_{a=1}^M \left(\frac{d\chi_a}{(2\pi)^3} e^{i\chi_a \sigma_a - \gamma \chi_a^{3/2}} \right) \cdot \left\{ \sum_{a=1}^M \left[1 - \exp \left(\frac{i h^{1/3} \chi_a \left(s + \frac{a}{M} \mathbf{u} \right)}{yM \left| s + \frac{a}{M} \mathbf{u} \right|^3} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[\frac{i h^{1/3}}{yM} \sum_{a=1}^M \chi_a \left(s + \frac{a}{M} \mathbf{u} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Для вычисления (4.8) воспользуемся фурье-обращением равенства (3.6):

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\chi_a e^{i\chi_a \sigma_a - \gamma \chi_a^{3/2}} = \frac{1}{4\pi \gamma^{2/3} \sigma_a^2} \mathcal{H} \left(\frac{\sigma_a}{\gamma^{2/3}} \right). \quad (4.10)$$

После дальнейших, очевидных, упрощений (в частности, перехода $M \rightarrow \infty$) получаем

$$\varphi_h^{(0)}(y) = e^{i\lambda \gamma h^{1/3} y}, \quad (4.11)$$

где введен первый момент распределения Хольцмарка [19]

$$\lambda_1 \equiv \int_0^{\infty} x \mathcal{H}(x) dx = \frac{4}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 3,4109. \quad (4.12)^*$$

Вычисление (4.9) оказывается гораздо более сложным. Ход его изложен в приложении, так что здесь мы коснемся

* Число λ_1 , очевидно, имеет смысл средней абсолютной величины напряженности электрического поля в заданной точке, измеренной в хольцмарковских «нормальных» единицах $E_0 \equiv \lambda e N^{2/3}$.

лишь основных моментов. Вначале, после ряда упрощений, не связанных с какими-либо приближениями, получаем:

$$\varphi_h^{(1)}(y) = y^3 e^{i\lambda\lambda_1 h^{1/2} y} \int \int f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds \times \\ \times \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{a=1}^M \left[1 - e^{i \frac{\lambda h^{1/2} y}{M} \psi_1(b_a)} \right] + \left[e^{i \frac{\lambda h^{1/2} y}{M} \sum_{a=1}^M \psi_1(b_a)} - 1 \right] \right\} \quad (4.13)$$

где

$$b_a \equiv \frac{1}{\lambda y^2 \left| s + \frac{a}{M} \mathbf{u} \right|^2}, \quad (4.14)$$

$$\psi_1(x) \equiv \frac{1}{3x} \int_0^x t^2 \mathcal{H}(t) dt + x \int_0^x \mathcal{H}(t) dt - \int_0^x t \mathcal{H}(t) dt + \\ + \frac{x^2}{3} \int_x^\infty \mathcal{H}(t) \frac{dt}{t}. \quad (4.15)$$

Функция ψ_1 — монотонно возрастающая*, причем ее предельные выражения имеют вид: при $x \rightarrow \infty$ $\psi_1(x) \approx x$, при $x \rightarrow 0$ $\psi_1(x) \approx 0,192x^2$.

Нетрудно убедиться, что выражение (4.13) не имеет особенностей ни при $s = -\frac{a}{M} \mathbf{u}$, ни при $|s| = \infty$; напомним, что именно за счет этих областей s возникают расходимости при упомянутых выше некорректных способах разложения $\varphi_h(y)$.

Необходимым условием законности принятой нами схемы вычисления является $|\varphi_h^{(1)}(y)| \ll |\varphi_h^{(0)}(y)| = 1$; как видно из (14) (см. приложение), это требование эквивалентно условию $h^{2/3} y_{\text{эф}} \ll 1$. (Можно показать, что это ограничение обуславливает неприменимость рассматриваемого приближения к далекому «отрицательному» крылу компоненты; но эта область ввиду симметричности шарковского расщепления практически не влияет на профиль линии в целом). При выполнении последнего условия существенные значения b_a велики**, так что в (4.13) можно положить $\psi_1(b_a) \approx b_a$. Переходя к пределу

* Более подробно об этой функции см. приложение и § 5.

** Эта оценка получается из условия, что существенные значения показателя последней экспоненты в (4.13) должны быть порядка единицы.

$M \rightarrow \infty$, заменяя суммирование по a интегрированием по $t \equiv a/M$ и т. д., находим

$$\varphi_h^{(1)}(y) = h e^{i\lambda\lambda_1 h^{1/3} y} \int \int f \left(\sqrt{\frac{h^{1/3}}{y}} \mathbf{u} \right) d\mathbf{u} ds \times \\ \times \left[-i \int_0^1 \frac{dt}{|s + t\mathbf{u}|^2} + e^{i \int_0^1 \frac{dt}{|s + t\mathbf{u}|^2}} - 1 \right], \quad (4.16)$$

где по определению $f(\mathbf{u})$

$$f \left(\sqrt{\frac{h^{1/3}}{y}} \mathbf{u} \right) = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-\frac{h^{1/3}}{y} u^2}. \quad (4.17)$$

Подставляя (4.11) и (4.13) в (4.7) и вводя экспоненту (поскольку в рассматриваемом приближении $|\varphi_h^{(1)}| \ll 1$), получаем

$$\varphi_h(y) \approx \exp \left[i\lambda\lambda_1 h^{1/3} y + hB \left(\frac{h^{1/3}}{y} \right) \right], \quad (4.18)$$

где функция B имеет вид

$$B(a) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int \int e^{-a u^2} d\mathbf{u} ds \left[-i \int_0^1 \frac{dt}{|s + t\mathbf{u}|^2} + e^{i \int_0^1 \frac{dt}{|s + t\mathbf{u}|^2}} - 1 \right]. \quad (4.19)$$

После элементарных упрощений (4.19) сводится к трехкратному интегралу, табуляция которого несомненно потребовала бы большой вычислительной работы (даже в том случае, если — как обычно поступают в теории уширения — принять скорость всех возмущающих частиц равной \bar{v} и тем самым дополнительно сэкономить одно интегрирование).

Мы избрали иной способ упрощения выражения (4.19), позволяющий провести вычисление функции $\varphi_h(y)$ до конца аналитически и дающий для нее хорошую интерполяционную формулу. Как нетрудно сообразить, во входящем в (4.19) интеграле по s при $a \gg 1$ существенна только полая сферическая область $|s| \gg |\mathbf{u}|$, а при $a \ll 1$ — только иглообразная область $s \approx -t\mathbf{u}$ ($0 \leq t \leq 1$). Поэтому естественно аппроксимировать интеграл по s суммой двух интегралов: по бесконечной полой сфере внутреннего радиуса $|\mathbf{u}|$ и по иглообразной области. При этом оказывается, что значение второго интеграла зависит от толщины «иглы» лишь логарифмически, так что этот интеграл охватывает практически всю область

$|s| < |u|$. Толщину «иглы» удобно принять за свободный параметр, значение которого определяется из требования, чтобы вычисленная вышеописанным способом функция $B(a)$ в пределе $a \rightarrow 0$ принимала вид, который удается найти независимым, строгим способом (приложение, п. 2). В результате интегрирование по s в (4.19) охватит, как и должно быть, все пространство, а неточность в учете области $|s| \sim |u|$ сгладится при последующем интегрировании по u . Поэтому вычисленная таким способом функция $B(h^{1/3}/y)$ даст функцию $\varphi_h(y)$, совпадающую с истинной не только (автоматически) при $y \ll h^{1/3}$ и $y \gg h^{1/3}$, но также (приближенно) и при $y \sim h^{1/3}$.

Соответствующие вычисления кратко изложены в приложении (п. 3). Результат имеет вид:

$$B(a) = 4\sqrt{\pi} \left[0,444a^{-3} - 0,96ia^{-2} - 1,33a^{-3/2}e^{i\pi/4} \int_0^z K_0(x) dx + \right. \\ \left. + 2,67ia^{-2}K_0(z) - 5,92ia^{-2}K_0(1,83z) - \right. \\ \left. - 1,33a^{-3/2}e^{i\pi/4}(1 - 2ia^{-1})K_1(z) - 3,24a^{-5/2}e^{3\pi i/4}K_1(1,83z) \right], \quad (4.20)$$

где K_0, K_1 — функции Макдональда; $z \equiv 2\sqrt{ae}^{-\frac{i\pi}{4}}$. Предельные выражения функции B таковы:

$$B(a) \approx -\frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}}{3a^{3/2}}(1+i) \quad (a \gg 1), \quad (4.21)$$

$$B(a) \approx -\frac{2\pi^{5/2}}{a} \ln\left(\frac{0,520}{a}\right) - \frac{i\pi^{7/2}}{a} \quad (a \ll 1). \quad (4.22)$$

Для распределения интенсивности получаем, согласно (4.2), (4.18), (4.1) и (2.9), выражение

$$I_h(\omega) = \frac{1}{\Omega} F_h\left(\frac{\omega - \omega_0 - \lambda_1 \Delta\omega_0}{\Omega}\right), \quad (4.23)$$

где масштабы уширения Ω и $\Delta\omega_0$ определены формулами (3.27) и (3.23), а функция F_h — выражением

$$F_h(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ixy + hB(1/y)} dy. \quad (4.24)$$

Формулы (4.23), (4.24), (4.20) определяют искомую форму штарковской компоненты линии в квазибинарном приближении $h_i \ll 1$.

Переходя в (4.24) в комплексную плоскость переменной y , можно получить (приложение, п. 4) выражения функции $F_h(x)$, удобные для ее табуляции в различных областях x . Кривые $F_h(x)$ для нескольких значений h приведены в конце параграфа.

Рассмотрим общий характер и предельные выражения найденного распределения интенсивности (4.23). Оно автоматически удовлетворяет условию $\int_0^{\infty} I_h(\omega) d\omega = 1$. Далее, в пределе $h \rightarrow 0$ имеем $F_h(x) \rightarrow \delta(x)$, откуда

$$I^{(0)}(\omega) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} I_h(\omega) = \delta(\omega - \omega_0 - \lambda_1 \Delta \omega_0). \quad (4.25)$$

На положительном крыле, точнее, при $\omega - \omega_0 - \lambda_1 \Delta \omega_0 \gg \Omega$ [ср. (3.27)], в интеграле (4.24), вследствие осцилляций, $y_{\text{эф}} \ll 1$, так что можно использовать (4.21), после чего несложное вычисление (приложение, п. 5) дает

$$I(\omega) \approx \frac{2\pi N a^{3/2}}{(\omega - \omega_0 - \lambda_1 \Delta \omega_0)^{5/2}}, \quad (4.26)$$

т. е., как и должно быть, статистическую формулу для крыла линии*. Таким образом, квазибинарное и статистическое приближения не альтернативны.

Для внутренней, преобладающей, по интенсивности части компоненты, при $|\omega - \omega_0 - \lambda_1 \Delta \omega_0| \ll \Omega$, в интеграле (4.24) $y_{\text{эф}} \gg 1$, так что справедливо (4.22). Отсюда находим

$$F_h(x) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[(x + \pi^{7/2} h) y] e^{-2\pi^{5/2} h y \ln(0,520y)} dy \quad (4.27)$$

и соответствующее $I_h(\omega)$ согласно (4.23). Максимум интенсивности компоненты расположен при

$$\omega = \omega_0 + \lambda_1 \Delta \omega_0 - \pi^{7/2} h \Omega = \omega_0 + \left(\lambda_1 - \frac{\pi^{7/2}}{\lambda} h^{1/2} \right) \Delta \omega_0 \quad (4.28)$$

и, следовательно, с ростом h смещается к центру линии (этого и следовало ожидать, поскольку в обратном предельном случае $h \gg 1$ максимум интенсивности расположен при $\omega \approx \omega_0 + 1,6 \Delta \omega_0$, а с уменьшением h смещается от центра линии). Отметим, что форма компоненты (4.23), (4.27) заметно

* Отличие от главного члена формулы (3.26), разумеется, пренебрежимо мало, так как при $h \ll 1$ $\lambda_1 \Delta \omega_0 \ll \Omega$ и т. д.

отличается от дисперсионной (лорентцовой), вытекающей из ударной теории [1—4]. Ширина компоненты имеет порядок $N\alpha^2/v_0$, (с логарифмической точностью)*, что много меньше сдвига ее максимума (4.28). Приближение (4.27) будем называть «квазиударным».

Формула (4.25) выражает статический штарк-эффект, вызываемый усредненным по хольцмарковскому распределению полем $\bar{E} = \int_0^{\infty} EW(E) dE = \lambda_1 \lambda_e N^{2/3}$. Таким образом,

при $h_i \ll 1$ действие совокупности большого числа движущихся ионов сводится (в рамках адиабатической модели) в основном к «статическому» штарковскому расщеплению линии средним полем, сопровождаемому относительно малым «ударным» уширением отдельных компонент. При этом величина главного эффекта — расщепления — принципиально обусловлена совместным действием большого числа ионов. Этот эффект может быть получен по порядку величины, если вместо произвольного отбрасывания расходящегося сдвига компоненты в ударной теории [1, 2] обрезать соответствующий интеграл на расстояниях порядка $N^{-1/3}$ (учет взаимной компенсации влияния более далеких пролетов). Более того, можно получить даже правильный численный коэффициент ($\lambda_1 \lambda_e$), если несколько обобщить приведенное в [1, 2] правило вычисления сдвига (а именно, нужно производить усреднение возмущений вне вейскопфовского радиуса не по распределению прицельных параметров, а по распределению полей).

Предельный результат (4.25) можно получить еще одним путем. Выделим из абсолютной величины поля $E(t)$ ее (постоянную) среднюю слагающую \bar{E} ; тогда (2.3) примет вид

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)\tau + i \frac{\alpha}{\sigma} \bar{E} \tau} \left\langle e^{i \frac{\alpha}{\sigma} \int_0^{\tau} f(t) dt} \right\rangle d\tau, \quad (4.29)$$

где $f(t) \equiv [E(t) - \bar{E}]$ — переменная слагающая поля. В рассматриваемом пределе ($h \rightarrow 0$, т. е. $v_0 \rightarrow \infty$) функция $f(t)$ быстро осциллирует, так что интеграл от нее очень мал, и (4.29) переходит в (4.25)**.

* Напомним, что согласно ударной теории [1, 2] эта же величина дает порядок ширины линии в целом.

** Это рассуждение наглядно показывает, что «статичность» расщепления (4.25) отнюдь не означает постоянства во времени возмущающего электрического поля. И действительно, совпадение распределений интенсивности и поля имеет место только на статистическом крыле [1, 2], тогда как в данном случае компонента лежит в «квазиударной» области.

Основной качественный результат проведенного рассмотрения состоит в том, что эффективная ширина $\delta\omega$ линии

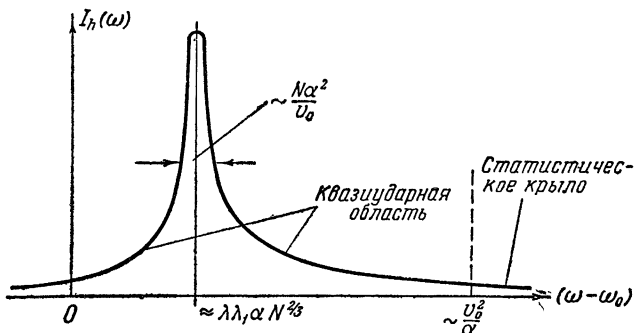


Рис. 3.

в целом (она определяется «раздвижкой» компонент) характеризуется при $h_i \ll 1$ той же зависимостью, что и при $h_i \gg 1$,

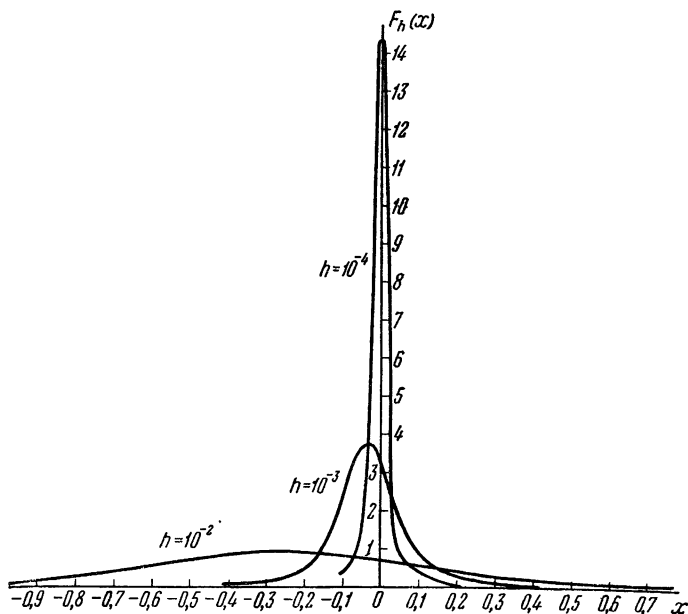


Рис. 4.

а именно, $\delta\omega \sim \bar{\alpha} N^{2/3}$ ($\bar{\alpha}$ — некоторая эффективная штарковская постоянная линии в целом) — вопреки существующей ударной теории, согласно которой $\delta\omega \sim N(\bar{\alpha})^2/\bar{\nu}_i$.

Распределение интенсивности штарковской компоненты при $h_i \ll 1$ («квазибинарный» случай) схематически представлено на рис. 3. При увеличении h_i кривая рис. 3 становится шире, причем на долю статистического крыла начинает приходиться все ббльшая доля полной интенсивности.

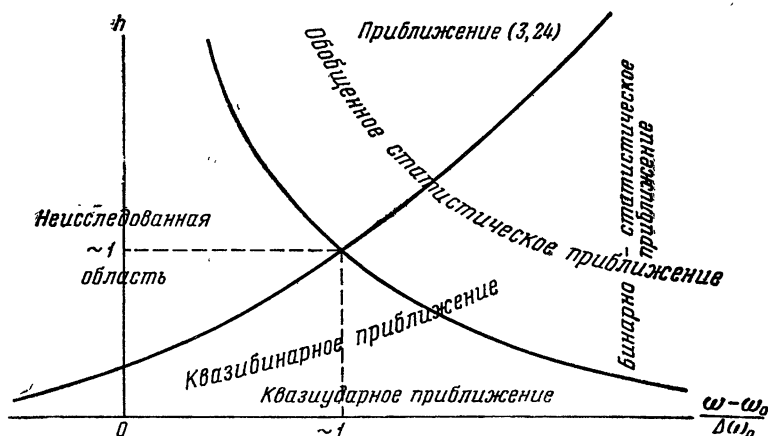


Рис. 5.

Приведем графики функции $F_h(x)$ для трех значений* параметра h (рис. 4).

В заключение представим схему областей применимости приближений, рассмотренных в § 3 и 4, а также не исследованную нами область (рис. 5).

§ 5. Совместное действие ионов и электронов

Результат § 4 указывает на необоснованность обычного, вытекающего из ударной теории, утверждения о малости уширяющего влияния электронов по сравнению с ионами при линейном штарк-эффекте. Поэтому имеет смысл исследовать, хотя бы в рамках классически-адиабатической схемы, совместное уширяющее действие совокупности ионов и равного числа электронов, т. е. учесть в (2.8) также и «электронное» слагаемое. При $h_i \gg h_e \gg 1$ или $h_e \ll h_i \ll 1$ $I^{(0)}(\omega)$ получается, очевидно, просто заменой N на $2N$ в результатах § 3 и 4, соответственно. Наиболее интересен случай $h_i \gg 1$, $h_e \ll 1$ («статистические» ионы и «квазиударные» элек-

* См. замечание в конце п. 4 приложения.

троны). Ввиду грубости нашей схемы в применении к электронам, ограничимся предельным случаем $v_{oi} = 0$, $v_{0e} = \infty$.

В соответствии с этим заменим «ионное» слагаемое в (2.8) его нулевым приближением по образцу § 3, а «электронное» нулевым приближением по образцу § 4. Это дает

$$C^{(0)}(\chi_1, \dots, \chi_M; \tau) = \left(\frac{\lambda \alpha \tau}{M}\right)^{3/2} \left(\left| \sum_{a=1}^M \chi_a \right|^{3/2} + \sum_{a=1}^M \chi_a^{3/2} \right). \quad (5.1)$$

Подставляя (5.1) в (2.7) и выполняя несложные преобразования с использованием формул типа (3.6) и (4.10), получаем

$$\varphi^{(0)}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int d\gamma \frac{\mathcal{H}(\gamma)}{\gamma^2} \left[\int dx e^{i \frac{\lambda \alpha \tau N^{2/3}}{M} |\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}|} \frac{\mathcal{H}(x)}{4\pi x^2} \right]^M. \quad (5.2)$$

Переход к пределу $M \rightarrow \infty$ и интегрирование по углам дают

$$\varphi^{(0)}(\tau) = \int_0^\infty e^{i \lambda \alpha N^{2/3} \tau \psi(\gamma)} \mathcal{H}(\gamma) d\gamma, \quad (5.3)$$

где введена функция

$$\begin{aligned} \psi(\gamma) \equiv & \int |\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{x}| \mathcal{H}(x) \frac{d\mathbf{x}}{4\pi x^2} = \frac{1}{3\gamma} \int_0^\gamma \mathcal{H}(x) x^2 dx + \\ & + \gamma \int_0^\gamma \mathcal{H}(x) dx + \int_\gamma^\infty \mathcal{H}(x) x dx + \frac{\gamma^2}{3} \int_\gamma^\infty \mathcal{H}(x) \frac{dx}{x}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Эта функция представлена в табл. 2. Ее предельные выражения имеют вид:

$$\psi(\gamma) \approx \lambda_1 + \lambda_2 \gamma^2 \quad (\gamma \rightarrow 0); \quad \psi(\gamma) \approx \gamma \quad (\gamma \rightarrow \infty), \quad (5.5)$$

где $\lambda_1 = 3,41$ (см. § 4), $\lambda_2 = \frac{1}{3} \int_0^\infty \mathcal{H}(x) \frac{dx}{x} = 0,192$.

Подставляя (5.3) в (2.3) и выполняя несложные выкладки с использованием свойств δ -функции, приходим к следующему предельному выражению для формы штарковской компоненты

Таблица 2

γ	0	1	2	3	4	5	
$\psi(\gamma)$	3,41	3,60	4,09	4,77	5,57	6,42	
γ	6	8	10	15	30	50	100
$\psi(\gamma)$	7,31	9,15	11,0	15,9	30,8	50,8	101

при учете (в классически-адиабатической схеме) совместного действия ионов и электронов:

$$I^{(0)}(\omega) \equiv 0 \text{ при } \omega - \omega_0 \leq \lambda_1 \Delta\omega_0, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

$$I^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega_0} L\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0}\right) \text{ при } \omega - \omega_0 \geq \lambda_1 \Delta\omega_0,$$

где функция L имеет вид

$$L(x) = \frac{\mathcal{K}[\psi^{-1}(x)]}{\psi'[\psi^{-1}(x)]}, \quad (5.7)$$

а через ψ^{-1} и ψ' обозначены соответственно функция, обратная функции ψ , и производная от ψ . Функция $L(x)$ представлена в табл. 3.

Таблица 3

x	3,41	3,42	3,46	3,52	3,58	3,64	3,76	
$10^3 \cdot L(x)$	0	245	510	673	745	780	754	
x	4,0	4,4	5,0	6,0	8,0	10	20	50
$10^3 \cdot L(x)$	616	380	203	80	19	8,5	1,9	0,1

Контур (5.6) является, грубо говоря, результатом наложения двух эффектов — сдвига под действием электронов и уширения под действием ионов. На крыле, при $\omega - \omega_0 \geq \lambda_1 \Delta\omega_0$, этот контур принимает «статистический» вид [см. главный

член в (3.26)], в то время как при $\omega - \omega_0 \leq \lambda_1 \Delta\omega_0$ расхождение его с хольцмарковским контуром очень велико. Разумеется, не следует придавать значения детальной форме контура (5.6). Так широкий провал во внутренней области у действительной линии должен быть в значительной мере заполненным — прежде всего вследствие резкой неадиабатичности воздействия электронов на атом (см. § 8), приводящей к «перемешиванию» штарковских компонент*.

В целом результат данного параграфа следует расценивать как качественное указание на то, что роль электронов в уширении линий водорода не мала, а вполне сравнима с ролью ионов.

§ 6. Сложение хольцмарковского и доплеровского уширений

В интересующих нас условиях (см. § 1) существенную роль в уширении линий водорода может играть эффект Доплера, обусловленный тепловым движением излучающих атомов. При «сложении» его с эффектом Штарка ограничимся рассмотрением наиболее простого случая, когда штарковское уширение описывается теорией Хольцмарка. В предположении статистической независимости обоих эффектов** результирующий контур компоненты может быть найден тем же общеизвестным способом, что и результирующий контур от доплер-эффекта и затухания вследствие столкновений (см., напр., [20]), поэтому приведем прямо результат. Нормированное на единицу распределение интенсивности в двух симметричных относительно центра линии ω_0 штарковских компонентах выражается формулой

$$I(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega_0} P_\gamma \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0} \right), \quad (6.1)$$

где $\Delta\omega_0 = 2,60 |\alpha| N^{2/3}$, $\gamma = \frac{\delta/2}{\Delta\omega_0}$, $\frac{\delta}{2} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2kT_n}{M}}$ (T_n — температура атомов, M — масса атома), и функция P_γ имеет вид

$$P_\gamma(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\gamma} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x+t)^2}{\gamma}} + e^{-\frac{(x-t)^2}{\gamma}} \right] \mathcal{H}(t) dt. \quad (6.2)$$

* Возможный способ качественного учета этого эффекта намечен в § 8.

** Оценка, основанная на [2], показывает, что для бальмеровских линий это предположение законно при $N \ll 2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, что в рассматриваемых условиях хорошо выполняется.

На фиг. 6 представлено семейство функций $P_\gamma(x)$ для ряда значений γ^* . В силу четности функции $P_\gamma(x)$ распределение интенсивности $I(\omega)$ симметрично относительно ω_0 . На крыльях линии, при $|\omega - \omega_0| \gg \delta/2$, имеем

$$I(\omega) \approx \frac{1}{2\Delta\omega_0} \mathcal{H}\left(\frac{|\omega - \omega_0|}{\Delta\omega_0}\right).$$

Для перехода к контуру линии нужно произвести суммирование (6.1) по всем парам компонент. Для качественных

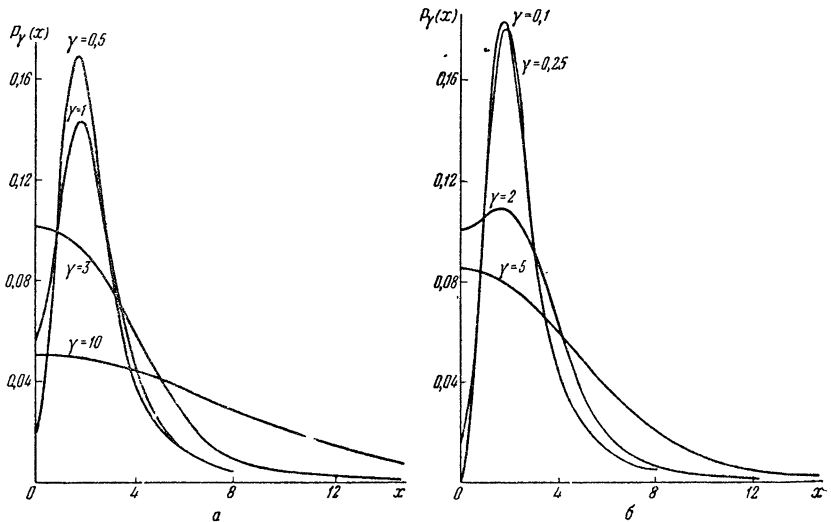


Рис. 6.

суждений можно, впрочем, прямо воспользоваться формулой (6.1), положив в ней $\alpha = \bar{\alpha}$ [или $\alpha = (\bar{\alpha}^{3/2})^{2/3}$ — для крыльев линии] в соответствии с табл. 4. Разумеется, это имеет смысл лишь для тех линий (например, H_{β} , H_{δ} и т. п.), которые не обладают центральной штарковской компонентой.

Из возможных характерных значений γ , определяющих относительную роль штарковского и доплеровского механизмов уширения в водороде, остановимся на следующем. Как видно из фиг. 6, при некотором $\gamma = \gamma^*$ ($2 < \gamma^* < 3$) исчезает штарковское раздвоение в центре линии. Принимая $\gamma^* \approx 2,5$, получаем следующее соотношение между T_n^* и N :

$$T_{n, \text{эв}}^* = 2,0 \cdot 10^{10} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2 N^{4/3}. \quad (6.3)$$

* Табулирование функции P выполнено Д. Ф. Давиденко.

Эта зависимость представлена для бальмеровских линий на рис. 7*. При $\gamma = \gamma^*$ ширина линии возрастает на $(40 \div 50)\%$ по сравнению с хольцмарковской шириной для того же N (удвоение же ширины достигается лишь при $\gamma \approx 6$). Исчезновение штарковского раздвоения в центре линий H_{β} или H_{δ} может, в принципе, явиться критерием для оценки T_n (а следовательно, и $T_i \approx T_n$). Впрочем, как видно из сравнения рис. 7 и 8, равенство (6.3) при интересующих нас T и N реализуется в основном уже в «квазиударной» области, для

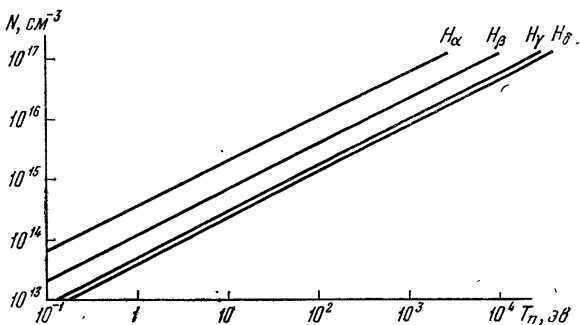


Рис. 7.

которой [самый расчет формы линии должен быть соответственно видоизменен.

В рассматриваемой области температур и плотностей плазмы, в отличие от типичных астрофизических условий [1], вообще говоря, не осуществляется случай, когда вся нехольцмарковская часть линии оказывалась бы внутри доплеровской ширины. Для случая $h_i \ll 1$ это очевидно, так как здесь ширина нехольцмарковской области пропорциональна T , тогда как $\delta_{\text{допл}} \propto \sqrt{T}$, а рассматриваемые температуры значительно выше астрофизических. В случае $h_i \gg 1$ ширина нехольцмарковской части линии сравнивается с $(\delta/2)_{\text{допл}}$, как следует из (3.24) для $T_n = T_i$, при $N\lambda^3 \approx 200$, где λ (см) — длина волны линии. Для серии Бальмера это равенство наступает при $N \sim 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

§ 7. Уширение линий вследствие квадратичного штарк-эффекта

Рассмотрим в рамках принятой выше расчетной схемы вопрос о форме линии, уширенной (и сдвинутой) вследствие квадратичного штарк-эффекта. В этом случае нет особых

* При этом принято $a = \bar{a}$ в соответствии с табл. 4 (§ 8).

оснований сомневаться по крайней мере в формальной* приближенной правильности результатов существующих предельных теорий — не только статистической, но и ударной. Однако проводимое ниже рассмотрение позволяет, во-первых, обосновать область применимости теории Ленца—Андерсона (см. § 1) к случаю квадратичного штарк-эффекта; во-вторых, выявить принципиальную неточность ударного приближения для самой внутренней части линии; в-третьих, ясно продемонстрировать качественное отличие «короткодействующего» квадратичного штарк-эффекта от «дальнодействующего» линейного.

Вывод общего выражения для распределения интенсивности в линии совершенно аналогичен проделанному в § 2, с тем только отличием, что теперь $\kappa = \frac{\beta}{e^2} E^2$; для определенности примем, что введенная таким образом штарковская постоянная β положительна. Ограничимся учетом возмущающихся частиц одного сорта. Вводя безразмерные переменные ξ, y, s, u по тем же формулам, что и в § 4, а также безразмерный параметр $g \equiv N\beta/v_0$, получаем

$$I_g(\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-izy} \varphi_g(y) dy, \quad (7.1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_g(y) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3M}} \int \dots \int \prod_{a=1}^M \left(d\sigma_a e^{i\sigma_a^2} \right) \times \\ \times \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\chi_a e^{i\chi_a \sigma_a}) e^{-C_g(\chi_1, \dots, \chi_M; y)}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} C_g(\chi_1, \dots, \chi_M; y) = y^3 \iint \left\{ 1 - \exp \left[i \sqrt{\frac{g}{My^3}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{a=1}^M \chi_a \left(s + \frac{a}{M} u \right) \right] \right\} f(u) du ds. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Нетрудно сообразить, что при $g \gg y_{\text{эф}}^3$ в экспоненте (7.3) основную роль играют значения $s_{\text{эф}} \gg u_{\text{эф}} \sim 1$, и мы приходим (по образцу § 3) к формулам обобщенного статистического приближения. Этот случай реализуется либо при $g \gg 1$ (кроме

* Практически во многих случаях квадратичный штарк-эффект переходит в линейный, что приводит к новым своеобразным эффектам [21].

как на малоинтенсивном «отрицательном» крыле), либо, если $g \ll 1$, при $g_0^{2/3} \gg 1$ (поскольку здесь $y_{\text{эф}} \sim 1/\xi$), т. е. при $\omega - \omega_0 \gg v_0^{4/3}/\beta^{1/3}$.

В предельном случае $v_0 = 0$ (т. е. $g = \infty$) несложное вычисление по образцу § 3 дает

$$I^{(0)}(\omega) = \frac{1}{2\lambda \sqrt{\beta N^{4/3}(\omega - \omega_0)}} \mathcal{H} \left(\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega - \omega_0}{\beta N^{4/3}}} \right), \quad (7.4)$$

т. е. формулу Хольцмарка для случая квадратичного штарк-эффекта [1].

Рассмотрим, далее, практически наиболее интересный случай $g \ll 1$ *. По качественному смыслу, нам предстоит проделать расчет того же типа, что и в § 4. Однако сделанный там конкретный выбор нулевого приближения здесь непригоден, поскольку он, как легко убедиться, приводит к появлению расходимости за счет значений $\sigma \rightarrow \infty$ (т. е. за счет больших возмущающих полей E , или близких пролетов). С другой стороны, благодаря достаточно быстрому убыванию квадратичного штарк-эффекта с расстоянием здесь оказывается законным использование малости g путем разложения $\exp(-C_g)$ в ряд по C_g и т. д. (в случае же линейного эффекта аналогичное разложение приводит к расходимости за счет больших расстояний, см. § 4). Используя вытекающее из (7.2), (7.3) равенство $\lim_{g \rightarrow 0} \varphi_g(y) = 1$, имеем

$$\varphi_g(y) \equiv e^{\ln[1+(\varphi_g(y)-1)]} \approx e^{\varphi_g(y)-1}. \quad (7.5)$$

Производя в (7.2) указанное выше разложение, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_g(y) - 1 \approx & -\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3M}} \int \dots \int \prod_a \left(d\sigma_a e^{i\sigma_a^2} \right) \times \\ & \times \int \dots \int \prod_a (d\chi_a e^{i\chi_a \cdot \sigma_a}) C_g(\chi_1, \dots, \chi_M; y). \end{aligned} \quad (7.6)$$

После подстановки (7.3) и несложного преобразования с использованием свойств δ -функции выражение (7.6) значительно упрощается. Подставляя (7.5), (7.6) в (7.1) и переходя

* Мы будем называть этот случай «бинарным», так как g имеет смысл (по порядку величины) среднего числа возмущающих частиц в сфере «вейскопфовского» радиуса $(\beta/v_0)^{1/3}$.

к обычным единицам, получаем следующее выражение для формы линии в рассматриваемом «бинарном» приближении:

$$I(\omega) \approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)\tau + [\varphi(\tau) - 1]} d\tau, \quad (7.7)$$

где

$$\varphi(\tau) - 1 \approx -2\pi N \int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ 1 - e^{i\beta \int_0^{\tau} \frac{dt}{[\rho^2 + (z + vt)^2]^2}} \right\}. \quad (7.8)$$

Результат (7.7), (7.8) совпадает (с точностью до усреднения по скоростям) с тем, который получается при формальном применении к рассматриваемому случаю ($x_j = \beta r_j^{-4}$) теории Ленца—Андерсона [15, 3], основанной на «скалярном» сложении возмущений от отдельных частиц: $x = \sum_{j=1}^{N'} x_j$. Это естественно, ибо при $g \ll 1$ среднее число возмущающих частиц внутри вейскопфовского радиуса мало, так что характер сложения возмущений не играет роли. Итак, «скалярная» теория Ленца—Андерсона (строго справедливая только для случая $x_j \propto r_j^{-6}$ и неприменимая к случаю $x_j \propto r_j^{-2}$) для $x_j \propto r_j^{-4}$ эквивалентна бинарному приближению излагаемой «векторной», т. е. основанной на сложении полей, теории.

Нетрудно убедиться, что «бинарный» результат (7.7), (7.8) содержит в качестве предельных случаев результаты ударной и статистической теорий. Мы не будем приводить здесь соответствующих вычислений, поскольку одновременно с завершением настоящей работы вышел в свет обзор [3], в котором изложена схема аналогичных расчетов Андерсона и Тальмана, основанных на теории Ленца—Андерсона. Заметим лишь, что выражение (7.8) можно приближенно упростить по образцу § 4 еще до перехода к предельным случаям, что позволит численно рассчитать весь контур линии при $g \ll 1$. Этот расчет автор надеется произвести в ближайшее время.

В заключение отметим, что рассмотрение условий применимости бинарной аппроксимации (7.5), (7.7), (7.8) показывает, что даже и при $g \ll 1$ эта аппроксимация, а следовательно, и ударная теория, строго говоря, несправедливы вблизи максимума $I(\omega)$: для этой части линии играет роль одновременное действие многих частиц. Впрочем, практически это мало искажает результат ударной теории.

§ 8. Обсуждение

1. Границы применимости и степень надежности результатов § 2—5. Применение их к бальмеровским линиям водорода

Прежде всего, обсудим кратко законность допущений, положенных в основу развитой выше теории (все численные оценки относятся к водороду; n — главное квантовое число верхнего уровня; N всюду выражено в см^{-3} , T — в электрон-вольтах, \bar{a} — в $\text{см}^2/\text{сек}$).

Допущение об идеально-беспорядочном распределении ионов справедливо при $T \gg 2 \cdot 10^{-5} N^{1/3}$; этот критерий получен на основании результатов работы [22]. В рассматриваемой области величин (см. § 1) он удовлетворительно выполняется; между прочим, он сильно сужает область интегральной применимости теории Хольцмарка к линии H_α (ср. рис. 8).

Законность допущения о квазиклассичности ионов не вызывает сомнений. Что касается электронов, то для них это допущение, как можно заключить из работы [23], справедливо при $T_e \gg 13,5n^{-4}$, т. е. в рассматриваемых условиях выполняется.

Для достаточно близких пролетов поле иона уже нельзя считать однородным на протяжении размеров излучающего атома; кроме того, при этих больших полях эффект Штарка в водороде перестает быть чисто линейным, и в нем возникает квадратичная добавка. Для учета каждого из этих эффектов достаточно рассмотреть влияние одного ближайшего иона. Если потребовать, чтобы оба эффекта были малы, скажем, вплоть до $|\omega - \omega_0| = 10\Delta\omega_0$ [см. (3. 23)], то для эффекта неоднородности, исходя из [6], приходим к ограничению: $N \ll 4 \cdot 10^{23}n^{-6}$, а для эффекта квадратичной добавки, исходя из [9], — к ограничению: $N \ll 3,5 \cdot 10^{22}n^{-6}$. Следовательно, для основных бальмеровских линий ($n = 3 \div 6$) оба эффекта в интересующих нас условиях несущественны.

Наиболее серьезным ограничением нашей теории является допущение об адиабатичности воздействия электрического поля на атом*. Оно справедливо в области применимости статистического приближения, т. е. по крайней мере для внешних частей линии [1, 2], но нарушается для внутренней, «квазиударной», части линии. Правда, для ионов, согласно [11], эффект неадиабатичности в значительной мере компенсируется эффектом вращения излучающего атома, и это позволяет рассчитывать на качественную справедливость квазиударного приближения

* Пока это ограничение не снято, невозможен и корректный расчет коштура всей линии.

применительно к ионам *. Но для электронов эффективные времена пролета ρ/v_e уже не только малы по сравнению с $(\omega - \omega_0)^{-1}$ (обычный критерий неадиабатичности), но и сравнимы зачастую с периодом обращения электрона в возбужденном атоме [24]. Полагая $\rho_{эф} \sim (e/E)^{1/2}$, находим, что эти времена сравниваются при (легко реализующемся) условии $T_e^{1/2} N^{1/2} n^3 \sim 3 \cdot 10^7$. Это, разумеется, значительно осложняет задачу правильного учета роли электронов в уширении.

Следует, однако, отметить, что качественное утверждение о том, что вклад электронов, как и ионов, в ширину линии порядка $\bar{\alpha} N^{2/3}$, основано на учете одновременного действия многих далеких электронов, т. е. на учете как раз медленной слагающей возмущения, тогда как существующие (в том числе и квантовые, развитые главным образом Г. Маргенау и его сотрудниками) теории ударного уширения электронами (обзор их см. в [4]) носят чисто бинарный характер, т. е. учитывают влияние лишь ближайших электронов (эффект, пропорциональный N/\bar{v}_e) **. Сказанное дает основание считать, что эти теории не описывают главного (пропорционального $N^{2/3}$) эффекта электронного уширения ***.

Из результатов § 3 и 4 можно найти количественные критерии применимости статистического и квазиударного приближений для ионов в виде некоторых неравенств для $(\omega - \omega_0)$. Однако здесь мы ограничимся установлением более грубых, интегральных критериев. Если взять в качестве такого критерия для статистического приближения нечто среднее между требованием малости максимального отклонения $I(\omega)$ от $I^{(0)}(\omega)$ и требованием малости этого отклонения на полувысоте $I^{(0)}(\omega)$, а для квазиударного приближения — требование малости дополнительного сдвига по сравнению с основным в (4.28), то оба полученные таким образом критерия хорошо дополняют друг друга, а именно: при $h_i \gg 0,004$ влияние ионов является в основном статистическим, а при $h_i \ll 0,004$ — в основном квазиударным; в промежуточной же области ($h_i \sim 0,004$) можно утверждать, что внешние

* Возникающее в квазиударной области «перемешивание» штарковских компонент можно попытаться качественно учесть, применяя метод Фурье к уже «размазанной» (скажем, в прямоугольник) штарковской картине линии — аналогично тому, как это в статистической схеме делал Хольцмарк [5].

** Теория [25] также эквивалентна бинарному приближению.

*** Отметим в этой связи, что, как видно из [6], лежащее в основе развитой нами теории сложение полей заряженных частиц более адекватно реальной физической картине, чем сложение их энергий в атомном взаимодействии с атомом (последнее эквивалентно, согласно § 7, бинарному рассмотрению).

склоны (а не только крылья) линии описываются статистической теорией*. Равенство $h_i = 0,004$ ** отвечает следующему:

$$T_{i, \text{эВ}} \approx 1 \cdot 10^{-11} (\bar{\alpha})^2 N^{2/3}. \quad (8.1)$$

Области интегрального преобладания статистического и квазиударного приближений для линий Бальмера разграничены

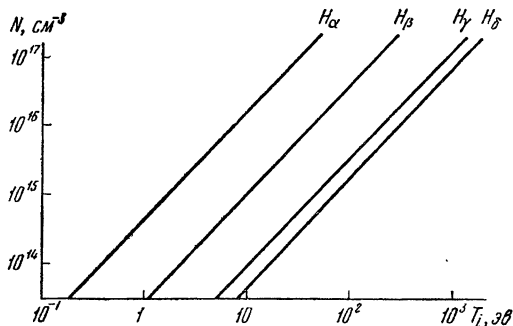


Рис. 8.

в соответствии с (8.1) на рис. 8. При этом приняты следующие значения эффективных штарковских постоянных***.

Т а б л и ц а 4

Линия	H_α	H_β	H_γ	H_δ
$\bar{\alpha}$	3,9	10,5	21	25

Из рис. 8 видно, что в широком интервале интересующих нас значений N , T_i (см. § 1) преобладающая часть интенсивности бальмеровских линий (особенно H_α и H_β) попадает в квазиударную область.

* Отметим, что «не поддающийся трактовке случай» Спитцера [10] охватывает, в наших обозначениях, область $0,002 < h_i < 2$, или $1,6 \cdot 10^{-13} \alpha^2 N^{2/3} < T_{i, \text{эВ}} < 1,6 \cdot 10^{-11} \alpha^2 N^{2/3}$ (конечно, за исключением статистических крыльев линии).

** При этом внутри сферы вейскопфовского радиуса $\pi a, v_0$ находится в среднем около «0,5 иона».

*** Они получены из сопоставления ряда теоретических и эмпирических данных и близки к средним значениям, вытекающим из [1].

Следует отметить, что основная характеристика линии — ее ширина — в обоих предельных случаях больших и малых h_i практически не зависит от температуры, а ее зависимость от плотности также мало различается в этих двух случаях. Так, ширина линии на ее полувысоте в хольцмарковском случае без учета электронов равна $\delta\omega$ (сек.⁻¹) $\approx 15,6\bar{\alpha}N^{2/3}$, а с учетом электронов (по 5.6) $\delta\omega \approx 23\bar{\alpha}N^{2/3}$. В квазиударном случае эти ширины равны, соответственно, $17,7\bar{\alpha}N^{2/3}$ и $28\bar{\alpha}N^{2/3}$. Разумеется, использование одних и тех же значений $\bar{\alpha}$ в обоих (физически совершенно различных) предельных случаях вносит в эти результаты некоторую неопределенность. Однако и с учетом этого обстоятельства различие этих формул не может изменить порядка величины концентрации заряженных частиц, извлекаемой из наблюдаемых ширин.

2. Эффекты уширения, специфичные для мощных разрядов

Наличие в плазме сильного магнитного поля обуславливает значительное зеемановское расщепление, а также своеобразный эффект электродинамического уширения линий, связанный с тем, что при быстром тепловом (или упорядоченном) движении атомов поперек магнитного поля в их системе возникает электрическое поле и соответствующий штарк-эффект (пропорциональный для водорода произведению vH). Оценка показывает, что при температурах, превышающих $kT^* \sim \frac{Me^4}{4\hbar^2 n^2 (n-1)^2}$; основным эффектом магнитного поля является электродинамическое уширение, а при $T < T^*$ — эффект Зеемана. Переходная температура T^* сильно зависит от конкретной линии. Так, для H_α имеем $T^* \sim 300$ эв, а для H_β $T^* \sim 10$ эв. Следовательно, в рассматриваемой области температур оба эффекта могут играть сравнимую роль. Зеемановское расщепление сравнивается с хольцмарковской шириной при

$$H = H^* \sim 1 \cdot 10^{-8} n (n-1) N^{2/3} \text{ (эрстед).}$$

Отсюда видно, что в условиях мощных разрядов (скажем, при $N \sim 10^{16}$ см.⁻³, $H \geq 10^4$ э) магнитные эффекты играют хотя и второстепенную, но не пренебрежимо малую роль в уширении бальмеровских линий, и в ряде случаев их нужно рассматривать, строго говоря, совместно с эффектом Штарка.

Отметим еще, что поскольку в мощных импульсных разрядах происходят быстрые радиальные движения плазмы со скоростями порядка 10^7 см/сек, то в их свечении могут наблюдаться соответствующие доплеровское и электродинамическое уширения того же порядка, что и от теплового движения с $T_n \sim 100$ эв,

причем вследствие зависимости локальной скорости плазмы от расстояния до оси разряда получается уширение (а не просто сдвиг или расщепление) линий*.

Приношу глубокую благодарность М. А. Леонтовичу за ценные советы и обсуждение, Г. И. Бирюк — за проведение численных расчетов и В. С. Фурсову, И. И. Собельману, Д. А. Франк-Каменецкому, С. Ю. Лукьянову — за обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Покажем переход от (4.9) к (4.13). Вначале после простого преобразования [включающего, в частности, перемену порядка суммирования по a и интегрирования по χ_1, \dots, χ_M и использование соотношений типа (4.10)] приводим (4.9) к виду

$$\begin{aligned} \varphi_h^{(1)}(y) = & y^3 \iint f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds \lim_{M \rightarrow \infty} \int \dots \int \prod_{a=1}^M (d\sigma_a e^{i\sigma_a}) \times \\ & \times \left\langle \sum_{a=1}^M \left\{ \prod_{a' \neq a} \left[\frac{1}{4\pi\gamma^{2/3}\sigma_{a'}^2} \mathcal{H}\left(\frac{\sigma_{a'}}{\gamma^{2/3}}\right) \right] \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{1}{4\pi\gamma^{2/3}} \left[\frac{1}{\sigma_a^2} \mathcal{H}\left(\frac{\sigma_a}{\gamma^{2/3}}\right) - \frac{1}{|\sigma_a + \mathbf{b}'_a|^2} \mathcal{H}\left(\frac{|\sigma_a + \mathbf{b}'_a|}{\gamma^{2/3}}\right) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \prod_{a=1}^M \left[\frac{1}{4\pi\gamma^{2/3}|\sigma_a + \mathbf{b}'_a|^2} \mathcal{H}\left(\frac{|\sigma_a + \mathbf{b}'_a|}{\gamma^{2/3}}\right) \right] - \prod_{a=1}^M \left[\frac{1}{4\pi\gamma^{2/3}\sigma_a^2} \mathcal{H}\left(\frac{\sigma_a}{\gamma^{2/3}}\right) \right] \right\rangle, \quad (1) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\mathbf{b}'_a = \frac{h^{1/3}}{yM} \frac{\left(s + \frac{a}{M} \mathbf{u}\right)}{\left|s + \frac{a}{M} \mathbf{u}\right|^3}. \quad (2)$$

Меняя местами суммирование по a и интегрирование по $\sigma_1, \dots, \sigma_M$, выполняя, где возможно, интегрирование по углам и производя очевидные замены переменных, получаем

* Электродинамическое уширение этого типа может иметь место, конечно, лишь при неполной «вмороженности» магнитного поля в плазме.

$$\varphi_h^{(1)}(y) = y^3 \iint f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} ds \lim_{M \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{a=1}^M \left\{ \prod_{a' \neq a} \left[\int_0^\infty e^{i\gamma^{2/3}\sigma_{a'}} \mathcal{H}(\sigma_{a'}) d\sigma_{a'} \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\int_0^\infty e^{i\gamma^{2/3}\sigma_a} \mathcal{H}(\sigma_a) d\sigma_a - \frac{1}{4\pi} \int e^{i|\gamma^{2/3}\sigma_a - b'_a|} \mathcal{H}(\sigma_a) \frac{d\sigma_a}{\sigma_a^2} \right] \right\} + \right. \\ \left. + \prod_{a=1}^M \left[\frac{1}{4\pi} \int e^{i|\gamma^{2/3}\sigma_a - b'_a|} \mathcal{H}(\sigma_a) \frac{d\sigma_a}{\sigma_a^2} \right] - \prod_{a=1}^M \left[\int_0^\infty e^{i\gamma^{2/3}\sigma_a} \mathcal{H}(\sigma_a) d\sigma_a \right] \right\rangle. \quad (3)$$

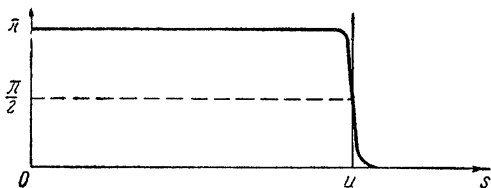


Рис. 9.

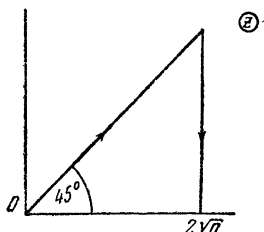


Рис. 10.

Дальнейшее упрощение (с учетом того, что $M \rightarrow \infty$) происходит по образцу вывода (4.11); имеем

$$\prod_{a=1}^M \left[\int_0^\infty e^{i\gamma^{2/3}\sigma_a} \mathcal{H}(\sigma_a) d\sigma_a \right] = e^{i\lambda_1 h^{1/3} y}, \quad \prod_{a' \neq a} \left[\int_0^\infty e^{i\gamma^{2/3}\sigma_{a'}} \mathcal{H}(\sigma_{a'}) d\sigma_{a'} \right] = \\ = e^{i\lambda_1 h^{1/3} y \left(1 - \frac{1}{M}\right)}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int e^{i|\gamma^{2/3}\sigma_a - b'_a|} \mathcal{H}(\sigma_a) \frac{d\sigma_a}{\sigma_a^2} = 1 + i \frac{h^{1/3} \lambda y}{M} \psi(b_a), \quad (5)$$

$$\prod_{a=1}^M \left[\frac{1}{4\pi} \int e^{i|\gamma^{2/3}\sigma_a - b'_a|} \mathcal{H}(\sigma_a) \frac{d\sigma_a}{\sigma_a^2} \right] = \exp \left[i \frac{h^{1/3} \lambda y}{M} \sum_{a=1}^M \psi(b_a) \right], \quad (6)$$

где b_a определено формулой (4.14), а функция ψ — формулой (5.4)*. После подстановки (4)–(6) и простого преобразования выражение (3) приводится к требуемому виду (4.13), где $\psi_1(b_a) \equiv \psi(b_a) - \lambda_1$ (ср. (5.4), (4.12) и (4.15)).

2. Найдем предельный вид функции $\varphi_h^{(1)}(y)$ при $h \rightarrow 0$, для чего разложим двойной интеграл в (4.13) по степеням $h^{1/3}$. Первый член этого разложения, очевидно, обращается в нуль. Следующий член

* В этой формуле можно, очевидно, заменить $|\gamma + x|$ на $|\gamma - x|$.

нельзя найти прямым разложением подынтегральной функции, так как при этом получается расходимость. Поскольку для этого члена играет роль (ввиду $M \rightarrow \infty$) только второе слагаемое в (4.13), исследуем выражение

$$A(h, y) \equiv \iint f(u) \, duds \lim_{M \rightarrow \infty} \left[e^{i \frac{\lambda h^{1/3} y}{M} \sum_{a=1}^M \psi_1(b_a)} - 1 \right]. \quad (7)$$

Вторая производная этого выражения по $h^{1/3}$ равна

$$\frac{\partial^2 A}{(\partial h^{1/3})^2} = -\lambda^2 y^2 \iint f(u) \, duds \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{1}{M} \sum_a \psi_1(b_a) \right]^2 e^{i \frac{\lambda h^{1/3} y}{M} \sum_a \psi_1(b_a)} \right\}. \quad (8)$$

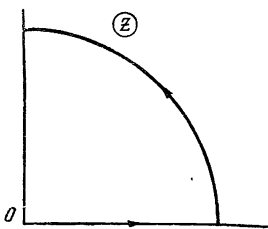


Рис. 11.

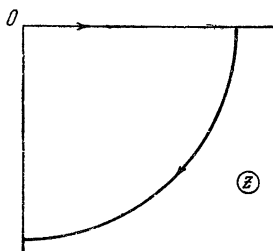


Рис. 12.

При $h=0$ полученный интеграл расходится, причем за счет больших b_a . При $h \neq 0$ он сходится (благодаря осциллирующей экспоненте). Следовательно, в рассматриваемом пределе ($h \rightarrow 0$) в интеграле существенны только большие b_a , и в нем можно положить $\psi_1(b_a) \approx b_a$. Подставляя, далее, b_a из (4.14), заменяя суммирование интегрированием и т. д., находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{(\partial h^{1/3})^2} \approx & -\frac{1}{y^2} \iint \left[\frac{\arctg\left(\frac{u \sin \theta}{s + u \cos \theta}\right)}{us \sin \theta} \right]^2 \times \\ & \times e^{i \frac{h^{1/3}}{y} \arctg\left(\frac{u \sin \theta}{s + u \cos \theta}\right)} f(u) \, duds, \end{aligned} \quad (9)$$

где θ — угол между u и s , а арктангенс заключен между 0 и π . При $h \rightarrow 0$ в интеграле по s существенны только те значения θ и s , которые обуславливают его расходимость при $h=0$, а именно, $\theta \approx \pi$ и $s \leq u^*$. С другой стороны, входящий в (9) арктангенс, рассматриваемый

* Разумеется, совокупность условий $\theta_{\text{эф}} \approx \pi$, $s_{\text{эф}} \leq u$ эквивалентна указанному в § 4 условию $s_{\text{эф}} \approx -\frac{a}{M} u$ ($a=1, \dots, M$).

мый как функция s при фиксированном u , имеет при $\theta \approx \pi$ вид, показанный на рис. 9. В пределе $\theta \rightarrow \pi$ эта кривая переходит в строго прямоугольную «ступеньку», так что арктангенс во всей существенной области интегрирования равен π . Производя в (9) соответствующую замену, учитывая, что $(\pi - \theta)_{\text{эф}} \ll 1$, и подставляя $f(u)$, получаем после некоторых преобразований

$$\frac{\partial^2 A}{(\partial h^{1/3})^2} = -\frac{4\pi^{5/2}}{y^2} \chi\left(\frac{h^{1/3}}{y}\right), \quad (10)$$

где введена функция $(\text{si}$ и ci — интегральный синус и интегральный косинус)

$$\chi(v) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{t}} \left[\frac{\cos t}{t} + \text{si } t + i \left(\frac{\sin t}{t} - \text{ci } t \right) \right] dt. \quad (11)$$

При интересующих нас малых значениях аргумента эта функция, как нетрудно показать, имеет вид

$$\chi(v) \approx \ln \frac{1}{v} - 2C - 1 + i \frac{\pi}{2}, \quad (12)$$

где $C = 0,5772$ — постоянная Эйлера. Таким образом, при $h \rightarrow 0$ [точнее, при $(h^{1/3}/y_{\text{эф}}) \ll 1$] имеем

$$\frac{\partial^2 A}{(\partial h^{1/3})^2} \approx -\frac{4\pi^{5/2}}{y^2} \left(\ln \frac{y}{h^{1/3}} - 2C - 1 + i \frac{\pi}{2} \right). \quad (13)$$

Интегрируя это уравнение дважды по $h^{1/3}$, находим, в частности, искомый член второго порядка в разложении интеграла (4.13), что дает окончательно

$$\varphi_h^{(1)}(y) \approx -2\pi^{5/2} h^{2/3} y \left(\ln \frac{y}{h^{1/3}} - 2C + \frac{1}{2} + i \frac{\pi}{2} \right) e^{i\lambda_1 h^{1/3} y} \quad (y \gg h^{1/3}). \quad (14)$$

3. Изложим ход вычисления, приводящего от (4.19) к (4.20), а также вывод предельных выражений (4.21), (4.22). Вначале выполним в (4.19) интегрирование по s с помощью аппроксимации, указанной в § 4. Имеем точное равенство

$$\int_0^1 \frac{dt}{|s + tu|^2} = \frac{1}{u\rho} \left(\text{arctg } \frac{z+u}{\rho} - \text{arctg } \frac{z}{\rho} \right), \quad (15)$$

где ρ , z — проекции \mathbf{s} в цилиндрической системе координат с осью z , параллельной \mathbf{u} *; значения арктангенса заключены между $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\frac{\pi}{2}$.

В области $\mathbf{s} \approx -\mathbf{tu}$ имеем. очевидно, $\rho \ll u$, $(-u) \leq z \leq 0$, так что

$$\int_0^1 \frac{dt}{|\mathbf{s} + \mathbf{tu}|^2} \approx \frac{1}{u\rho} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{u\rho}. \quad (16)$$

В области $|\mathbf{s}| > |\mathbf{u}|$ достаточно ограничиться приближением $\int_0^1 \frac{dt}{|\mathbf{s} + \mathbf{tu}|^2} \approx \frac{1}{s^2}$. В результате аппроксимированное выражение (4. 19) принимает вид

$$B(a) \approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-au^2} [\Phi_1(u) + \Phi_2(u)] u^2 du, \quad (17)$$

где

$$\Phi_1(u) \equiv 2\pi \int_{-u}^0 dz \int_0^{\rho_{\max}} \rho d\rho \left(-i \frac{\pi}{u\rho} + e^{i \frac{\pi}{u\rho}} - 1 \right), \quad (18)$$

$$\Phi_2(u) \equiv 4\pi \int_u^{\infty} s^2 ds \left(-\frac{i}{s^2} + e^{\frac{i}{s^2}} - 1 \right). \quad (19)$$

Ввиду логарифмической зависимости интеграла по ρ от верхнего предела, можно принять $\rho_{\max} = b_1 u$, где $b_1 \sim 1$ — свободный параметр, подлежащий подгонке (см. § 4). После несложного преобразования (интегрирования по частям и т. д.) приводим (17) к виду ($b \equiv \pi/b_1$):

$$B(a) = 8\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-au^2} \left[\frac{\pi^2}{b^2 a} (u^3 e^{ib^2 u^2} - u^3 - ibu) - \frac{2}{3} u^5 (e^{i/u^2} - 1) - \right. \\ \left. - \frac{4}{3} i u^3 e^{i/u^2} + 2iu^3 - \frac{4}{3} u^2 \int_0^{1/u^2} e^{ix} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right] du. \quad (20)$$

* Ср. выше (п. 2) представление интеграла типа (15) в сферических координатах.

Этот интеграл вычисляем почленно, переходя к интегрированию по $au^2 \equiv x$ и пользуясь соотношением для функций Макдональда:

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-x - \frac{z^2}{4x}\right) x^{-p} dx = 2 \left(\frac{z}{2}\right)^{1-p} K_{p-1}(z), \quad (21)$$

где $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$. После несложных выкладок с использованием известных рекуррентных формул для функций Макдональда находим:

$$\begin{aligned} B(a) = 4\sqrt{\pi} \left[-\frac{\pi^2}{b^2 a^3} - i \frac{\pi^2}{b a^2} + \frac{4}{3a^3} + \frac{2i}{a^2} - \frac{4}{3a^{3/2}} \int_0^{2\sqrt{a}} K_0(ze^{-i\pi/4}) dz + \right. \\ \left. + \frac{8i}{3a^2} K_0(2\sqrt{ae^{-i\pi/4}}) - \frac{2\pi^2 i}{b a^2} K_0(2\sqrt{bae^{-i\pi/4}}) + \right. \\ \left. + \frac{4}{3a^{3/2}} \left(\frac{2}{a} e^{-i\pi/4} - e^{-3\pi i/4} \right) K_0'(2\sqrt{ae^{-i\pi/4}}) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^2}{a^{3/2} b^{3/2}} e^{3\pi i/4} K_0'(2\sqrt{bae^{-i\pi/4}}) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Свободный параметр b определяется из предельного выражения $B(a)$ при $a \rightarrow 0$, для получения которого нужно взять первые три члена разложения функции K_0 . Это дает

$$B(a) \approx -\frac{i\pi^{7/2}}{a} - \frac{2\pi^{5/2}}{a} \ln\left(\frac{e^{3/2+2/\pi^2-2\sigma}}{ba}\right) \quad (a \ll 1). \quad (23)$$

С другой стороны, как видно из сравнения (4.19) с (4.16) и (14), то же самое предельное выражение, вычисленное совершенно строго, должно иметь вид

$$B(a) \approx -\frac{i\pi^{7/2}}{a} - \frac{2\pi^{5/2}}{a} \ln\left(\frac{e^{1/2-2\sigma}}{a}\right). \quad (24)$$

Сравнивая (23) с (24), находим искомое значение b :

$$b = e^{1+2/\pi^2} = 3,33. \quad (25)$$

Подставляя в (24) $e^{1/2-2\sigma} = 0,520$, получаем (4.22). Подставляя (25) в (22) и используя соотношение $K_0'(z) = -K_1(z)$, приходим к требуемому результату (4.20).

Для получения предельного выражения $B(a)$ при $a \gg 1$ достаточно удержать в (4.20) лишь интегральный член, что дает

$$B(a) \approx -\frac{16\sqrt{\pi}}{3a^{3/2}} \int_0^{2\sqrt{a}} K_0(ze^{-i\pi/4}) dz. \quad (26)$$

Перейдем в комплексную плоскость z и будем интегрировать вдоль пути, показанного на рис. 10. Так как при $|z| \gg 1$ $K_0(z) \approx \sqrt{\pi/2z} e^{-z}$, то интеграл по вертикальному участку экспоненциально мал, а в интеграле по наклонному участку можно (выбрав $ze^{-i\pi/4}$ за новую переменную) заменить верхний предел на ∞ . После этого, как нетрудно убедиться, (26) приводится к виду (4.21).

4. Покажем, как функция $F_h(x)$ приводится к виду, удобному для табуляции. В общем случае, выражая (4.24) через одни лишь вещественные функции и определяя $\operatorname{Re} B(1/y)$, $\operatorname{Im} B(1/y)$ из (4.20) с помощью соотношений

$K_0(ze^{-i\pi/4}) \equiv \ker(z) - ikei(z)$, $K_1(ze^{-i\pi/4}) = -e^{i\pi/4} [\ker'(z) - ikei'(z)]$ (\ker , kei , \ker' , kei' — функции Томсона и их производные), находим

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{4\sqrt{\pi h} \varphi_1(y)} \cos[xy - 4\sqrt{\pi h} \varphi_2(y)] dy, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) \equiv & 0,444y^3 - 1,33y^{3/2} \int_0^{2/\sqrt{y}} (\ker t) dt + 2,67y^2 kei\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) - \\ & - 5,92y^2 kei\left(\frac{3,65}{\sqrt{y}}\right) + 2,67y^{3/2} \ker'\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) + 1,33y^{3/2} kei'\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) - \\ & - 3,24y^{5/2} \ker'\left(\frac{3,65}{\sqrt{y}}\right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(y) \equiv & -0,96y^2 + 1,33y^{3/2} \int_0^{2/\sqrt{y}} (kei t) dt + 2,67y^2 \ker\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) - \\ & - 5,92y^2 \ker\left(\frac{3,65}{\sqrt{y}}\right) + 1,33y^{3/2} \ker'\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) - 2,67y^{3/2} kei'\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right) + \\ & + 3,24y^{5/2} kei'\left(\frac{3,65}{\sqrt{y}}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (27) справедлива при всех x . Однако при положительных и при не слишком малых отрицательных x для табуляции функции $F_h(x)$ более удобны другие ее представления, при которых под

знаком интеграла оказывается произведение сравнительно быстро затухающей экспоненты на медленно осциллирующую функцию.

Так, при $x > 0$ переходим в (4.24) к интегрированию в плоскости комплексной переменной $z \equiv iy$ и заменяем получающийся интеграл по мнимой оси интегралом по контуру, изображенному на рис. 11. Нетрудно убедиться, что интеграл по дуге бесконечно большого радиуса равен нулю, и с учетом (4.20) окончательно получаем

$$F_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xz} \sin [4\sqrt{\pi}hf(z)] dz, \quad (x > 0), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} f(z) \equiv & 0,444z^3 + 0,96z^2 + 1,33z^{3/2} \int_0^{2/\sqrt{z}} K_0(x) dx + \\ & + z^2 \left[5,92K_0\left(\frac{3,65}{\sqrt{z}}\right) - 2,67K_0\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right) \right] - \\ & - 1,33z^{3/2}(2z-1)K_1\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right) + 3,24z^{5/2}K_1\left(\frac{3,65}{\sqrt{z}}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

При $x < -2\pi^{7/2}h$ (это ограничение получается из условия сходимости нижеследующего интеграла) переходим в (4.24) к интегрированию по $z \equiv -iy$ и заменяем интеграл по (отрицательной) мнимой оси интегралом по контуру рис. 12. Используя (4.20), а также известные соотношения между цилиндрическими функциями $K, H^{(1)}, J, N$, убеждаемся, что интеграл по дуге равен нулю, и приходим к результату

$$F_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{xz+4\sqrt{\pi}h\chi_1(z)} \sin [4\sqrt{\pi}h\chi_2(z)] dz \quad (x < -2\pi^{7/2}h), \quad (32)$$

где J_0, J_1, N_0, N_1 — соответствующие функции Бесселя и Неймана)

$$\begin{aligned} \chi_1(z) \equiv & 2,09z^{3/2} \int_0^{2/\sqrt{z}} J_0(x) dx + 4,19z^2 J_0\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right) - 9,30z^2 J_0\left(\frac{3,65}{\sqrt{z}}\right) - \\ & - 2,09z^{3/2}(2z+1)J_1\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right) + 5,09z^{5/2}J_1\left(\frac{3,65}{\sqrt{z}}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \chi_2(z) \equiv & 0,444z^3 - 0,96z^2 - 2,09z^{3/2} \int_0^{2/\sqrt{z}} N_0(x) dx - 4,19z^2 N_0\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right) + \\ & + 9,30z^2 N_0\left(\frac{3,65}{\sqrt{z}}\right) + 2,09z^{3/2}(2z+1)N_1\left(\frac{2}{\sqrt{z}}\right) - 5,09z^{5/2}N_1\left(\frac{3,65}{\sqrt{z}}\right). \end{aligned} \quad (34)$$

По формулам (30), (32) и построены соответствующие части кривых рис. 4. В промежуточной же области $-2\pi^{1/2}h \leq x \leq 0$ (область максимума) использована общая формула (27). Мы не считали нужным производить табуляцию $F_h(x)$ для многих значений h , поскольку согласно § 8 соответствующие контуры штарковских компонент в своей большей части имеют лишь качественный смысл.

5. Продемонстрируем переход от (4.23), (4.24) к (4.26). Интегрируя в комплексной плоскости точно так же, как при выводе формулы (30), без труда приводим (4.24) к виду

$$F_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xz} \sin\left(\frac{8\pi^{3/2}}{3} hz^{3/2}\right) dz. \quad (35)$$

В рассматриваемом случае ($x \gg 1$) имеем $z_{\text{эф}} \ll 1$, а так как и $h \ll 1$, то синус можно заменить его аргументом. Это дает $F_h(x) \approx 2\pi h x^{-5/2}$, что и приводит к (4.26).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Унзольд. Сб. статей «Современные проблемы астрофизики и физики Солнца», ИЛ. стр. 7 (1951); «Physik der Sternatmosphären», 2 Auflage (1955).
2. И. И. Собельман. УФН, 54, 551 (1954).
3. S. Ch'een, M. Takeo. Rev. Mod. Phys., 29, 20 (1957).
4. R. Vreene. Rev. Mod. Phys., 29, 94 (1957).
5. J. Holtzmark. Ann. d. Phys., 58, 577 (1919).
6. H. Margenau, R. E. Meyerott. Astrophys. J., 121, 194 (1955).
7. С. Л. Мандельштам, Н. Н. Соболев. ЖЭТФ, 20, 323 (1950).
8. T. Holstein. Phys. Rev., 79, 744 (1950).
9. L. Spitzer. Phys. Rev., 55, 699 (1939).
10. L. Spitzer. Phys. Rev., 56, 39 (1939).
11. L. Spitzer. Phys. Rev., 58, 348 (1940).
12. H. Griem, Zs. f. Phys., 137, 280 (1954).
13. M. K. Krogdahl. Astrophys. J., 110, 355 (1949).
14. E. Lindholm. Ark. f. Mat. Astr. o. Fys., 32A, № 17 (1945).
15. W. Lenz. Zs. f. Phys., 80, 423 (1933).
16. С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, 1947.
17. S. Chandrasekhar, J. von Neumann. Astrophys. J., 95, 489 (1942).
18. S. Chandrasekhar. Astrophys. J., 97, 1 (1943).
19. S. Chandrasekhar. Proc. Cambr. Phil. Soc., 45, 219 (1949).
20. В. А. Амбарцумян, Э. Р. Мустель, А. Б. Северный, В. В. Соболев. Теоретическая астрофизика. ГТТИ, 1952.
21. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман. Оптика и спектроскопия (в печати).
22. G. Esker. Zs. f. Phys., 148, 593 (1957).
23. H. Margenau, B. Kivel. Phys. Rev., 98, 1822 (1955).
24. G. J. Odgers. Astrophys. J., 116, 444 (1952).
25. И. И. Собельман. Оптика и спектроскопия, 1, 617 (1956).
26. В. И. Коган. ДАН, 118, 907 (1958); Изв. АН СССР, сер. физ., 22, 714 (1958).

Б. А. Трубников

**СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ПОГЛОЩЕНИЯ И ИСПУСКАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ
ДЛЯ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ***

В уравнении переноса лучистой энергии

$$\frac{\partial I_{\omega}^i}{\partial s} = \langle \eta_{\omega}^i \rangle - \langle \alpha_{\omega}^i \rangle I_{\omega}^i \quad (i \text{ — поляризация}) \quad (1)$$

излучательная способность среды $\langle \eta_{\omega}^i \rangle$ и коэффициент поглощения $\langle \alpha_{\omega}^i \rangle$ являются величинами, проинтегрированными по функции распределения электронов:

$$\langle \eta_{\omega}^i \rangle = \int \eta_1^i(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad \langle \alpha_{\omega}^i \rangle = \int \alpha_1^i(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (2)$$

здесь $\eta_1^i(\mathbf{p})$ — коэффициент спонтанного излучения, а $\alpha_1^i(\mathbf{p})$ — коэффициент эффективного поглощения, приходящиеся на один электрон с импульсом \mathbf{p} .

При максвелловском распределении электронов величины $\langle \eta \rangle$ и $\langle \alpha \rangle$ связаны законом Кирхгофа: $\langle \alpha \rangle = \langle \eta \rangle / I_{\omega}^{(0)}$, где $I_{\omega}^{(0)}$ — равновесный поток излучения, определяемый формулой Релея—Джинса $I_{RJ}^{(0)} = \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2}$ (или формулой Планка в квантовом случае).

При произвольной функции распределения электронов $\langle \eta \rangle$ и $\langle \alpha \rangle$ следует вычислять по формулам (2), для чего необходимо знать коэффициенты $\eta_1^i(\mathbf{p})$ и $\alpha_1^i(\mathbf{p})$. Коэффициент $\eta_1^i(\mathbf{p})$

* Работа выполнена в 1957 г.

во многих случаях вычисляется сравнительно просто, в то время как непосредственное определение $\alpha_1^i(\mathbf{p})$ требует подчас достаточно громоздких расчетов. Можно, однако, получить удобную формулу, позволяющую найти $\alpha_1^i(\mathbf{p})$ по известному $\eta_1^i(\mathbf{p})$.

В качестве конкретной среды рассмотрим плазму, находящуюся в магнитном поле. Коэффициенты преломления будем полагать равными единице.

При излучении кванта с импульсом \mathbf{k} электрон, находящийся в магнитном поле и обладающий импульсом \mathbf{p}' , переходит в состояние с импульсом \mathbf{p} , причем

$$\mathbf{p}_{\parallel} = \mathbf{p}'_{\parallel} - \hbar \mathbf{k}_{\parallel}, \quad \epsilon = \epsilon' - \hbar \omega. \quad (3)$$

Значок \parallel означает направление, параллельное полю \mathbf{H} . Поперечный импульс квант получает от магнитного поля.

Обозначим через $\eta_1^{i*}(\mathbf{p}') = \chi_1^i(\mathbf{p}') I_{\omega}^i$ — коэффициент индуцированного излучения электрона, обладающего импульсом \mathbf{p}' , и через $\alpha_1^{i*}(\mathbf{p})$ — коэффициент «истинного» поглощения излучения частоты ω электроном с импульсом \mathbf{p} . Введенные коэффициенты связаны известными соотношениями Эйнштейна:

$$\eta_1^i(\mathbf{p}') = \chi_1^i(\mathbf{p}') \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^3 c^2} \quad \text{и} \quad \Omega_{\mathbf{p}'} \chi_1^i(\mathbf{p}') = \Omega_{\mathbf{p}} \alpha_1^{i*}(\mathbf{p}), \quad (4)$$

где $\Omega_{\mathbf{p}}$ — статистический вес состояния с импульсом \mathbf{p} . Второе равенство в (4) является выражением принципа «детального равновесия».

Уравнение (1) переноса лучистой энергии можно в наших обозначениях записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\omega}^i}{\partial s} &= \int f(\mathbf{p}') [\eta_1^i(\mathbf{p}') + \chi_1^i(\mathbf{p}') I_{\omega}^i] d\mathbf{p}' - I_{\omega}^i \int f(\mathbf{p}) \alpha_1^{i*}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \\ &= \langle \eta_{\omega}^i \rangle - I_{\omega}^i \int f(\mathbf{p}) [\alpha_1^{i*}(\mathbf{p}) - \chi_1^i(\mathbf{p})] d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая это выражение с (1) и (2), можно, ввиду произвольности $f(\mathbf{p})$, заключить, что:

$$\alpha_1^i(\mathbf{p}) = \alpha_1^{i*}(\mathbf{p}) - \chi_1^i(\mathbf{p}). \quad (6)$$

Из (4) нетрудно получить

$$\chi_1^i(\mathbf{p}) = \eta_1^i(\mathbf{p}) \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar \omega^3} \quad \text{и} \quad \alpha_1^{i*}(\mathbf{p}) = \frac{\Omega_{\mathbf{p}'}}{\Omega_{\mathbf{p}}} \chi_1^i(\mathbf{p}') = \frac{\Omega_{\mathbf{p}'}}{\Omega_{\mathbf{p}}} \eta_1^i(\mathbf{p}') \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar \omega^3} \quad (7)$$

и поскольку из (3) следует

$$\frac{\Omega_{\mathbf{p}'}}{\Omega_{\mathbf{p}}} = \frac{d\mathbf{p}'}{d\mathbf{p}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \quad (8)$$

то подставляя (7) в (6), находим интересующую нас формулу

$$\alpha_1^i(\mathbf{p}) = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2 \varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon' \eta_1(\mathbf{p}') - \varepsilon \eta_1(\mathbf{p})}{h\omega}. \quad (9)$$

В классическом случае, когда энергия квантов мала, это выражение имеет вид производной:

$$\alpha_1^i(\mathbf{p}) = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2 \varepsilon} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon' \eta_1(\mathbf{p}') - \varepsilon \eta_1(\mathbf{p})}{h\omega} \right). \quad (10)$$

Функция $\eta_1^i(\mathbf{p})$ в однородном магнитном поле является аксиально-симметричной и ее можно представить в виде

$$\eta_1^i(\mathbf{p}) = \eta_1^i(\varepsilon, p_{\parallel}, \omega, \theta), \quad (11)$$

где $\theta = \text{arctg} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}$. Тогда, учитывая (3), найдем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon' \eta_1(\varepsilon', p'_{\parallel}) - \varepsilon \eta_1(\varepsilon, p_{\parallel})}{h\omega} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \eta_1(\varepsilon, p_{\parallel}) + \frac{\cos \theta}{c} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \varepsilon \eta_1(\varepsilon, p_{\parallel}). \quad (12)$$

В частности, для излучения, распространяющегося перпендикулярно магнитному полю, когда $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\cos \theta = 0$, имеем

$$\alpha_1^i(\mathbf{p}) = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2 \varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon \eta_1(\varepsilon, p_{\parallel}). \quad (13)$$

Подставляя (9) в (2), найдем:

$$\langle \alpha_{\omega}^i \rangle = \int f(\mathbf{p}) \alpha_1^i(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2} \int \eta_1^i(\mathbf{p}') \frac{f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}')}{h\omega} d\mathbf{p}', \quad (14)$$

где \mathbf{p}' и \mathbf{p} связаны соотношениями (3).

При максвелловском распределении отсюда можно получить формулу Кирхгофа:

$$\langle \alpha_{\omega}^i \rangle = \langle \eta_{\omega}^i \rangle / I_{\omega}^{(0)}, \quad (15)$$

где $I_{\omega}^{(0)}$ — равновесный поток, определяемый формулой Планка. В классическом случае (когда $h\omega \rightarrow 0$), предполагая распре-

деление произвольным, но сферически симметричным, из (14) с помощью (3) найдем

$$\langle \alpha_{\omega}^i \rangle = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2} \int \eta_1^i(\mathbf{p}) \left[-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right] d\mathbf{p}. \quad (16)$$

При максвелловском распределении это дает $\langle \alpha \rangle = \langle \eta \rangle / I_{RJ}^{(0)}$, где $I_{RJ}^{(0)} = \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2}$ — поток Релея—Джинса.

Формула (16) была использована нами в работе [1] для определения коэффициентов поглощения излучения плазмой в магнитном поле при неравновесном распределении электронов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. А. Трубников. ДАН СССР, 118, 913 (1958).
-

Б. А. Трубников

ПОВЕДЕНИЕ ПЛАЗМЫ В БЫСТРОПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

В работе рассмотрены методы термоизоляции и нагрева плазмы с помощью внешних быстропеременных магнитных полей. Показано, что при подходящем выборе геометрии поля сгусток плазмы может находиться в равновесии и притом устойчивом. Частично рассмотрены вопросы нагрева плазмы.

§ 1. Введение

Как известно, основной трудностью, возникающей при попытках достижения высоких температур в газе, является проблема изоляции горячей плазмы от стенок сосуда. Все предла- гавшиеся до сих пор способы основывались на применении для этой цели различных комбинаций магнитных полей. Если поле при этом создается током, текущим по самой плазме, например при стягивании плазменного шнура собственным магнитным полем («пинч-эффект») то, как показывают эксперименты и теория, такая система является неустойчивой. В этом случае нельзя создать изоляцию плазмы на время, большее времени развития неустойчивости.

Более устойчивыми являются системы, в которых изолирующее магнитное поле создается токами, текущими по внешним проводникам [1]. Давление плазмы при этом может уравновешиваться на границе магнитным давлением снаружи скин-слоя (см., например, [2]). В таких системах плазма будет изолирована на время, равное времени существования скин-слоя.

* Работа выполнена в 1957 г. и частично переработана при подготовке к печати в 1958 г.

Изоляция плазмы на неограниченно долгое время в принципе могла бы быть достигнута в системах с периодически меняющимся внешним удерживающим полем, при котором имело бы место непрерывное скинирование плазмы. В этом случае переменное поле не проникает внутрь плазмы, и давление последней $p_{\text{газ}}$ уравнивается на границе средним по времени давлением магнитного поля.

Если оценивать необходимые частоты ω из условия сильного скинирования плазменного сгустка размером a , то имеем

$$\omega \gg \frac{c^2}{4\pi a^2 \sigma}, \quad (1.1)$$

где $\sigma_{\text{абс}} \approx 2 \cdot 10^{17} T_{\text{КЭВ}}^{3/2}$, что по порядку величины соответствует частотам $\omega \sim 10^{-3} \text{ сек.}^{-1}$ (при $a \sim 10^2 \text{ см}$, $T \sim 1 \text{ кэВ}$) и легко достижимо с технической точки зрения.

Необходимость более высоких частот возникает из условий равновесия и устойчивости сгустка.

Потребуем, чтобы за период одного колебания поля плазма не успевала заметно переместиться из положения равновесия, что по порядку величины можно записать в виде

$$\omega > \frac{u_i}{\Delta_{\text{max}}}, \quad (1.2)$$

где Δ_{max} — максимально допустимое смещение границы плазмы, а u_i — скорость ее макроскопического движения, т. е., по существу, скорость звука для ионов. При этих достаточно высоких частотах ($\omega \sim 10^7 \text{ сек}^{-1}$, $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} \sim 100 \text{ м}$) все же можно рассматривать магнитное поле, создаваемое токами, текущими по внешним проводникам, как квазистационарное, и соответственно пренебрегать членом $\frac{\partial E}{\partial t}$ в уравнениях Максвелла, что мы и будем делать в дальнейшем. Сами токи при этом считаются заданными и не зависящими от поведения плазмы.

Среди систем с удержанием плазмы быстропеременными магнитными полями можно указать ряд вариантов, относительно которых можно утверждать, что плазма в них будет находиться в состоянии устойчивого равновесия, и которые представляют поэтому особый интерес.

Необходимо отметить, что на создание переменного поля требуются весьма большие затраты энергии. Если обозначить посредством Q — добротность колебательного контура, создаю-

щего переменное поле H в объеме V , то потребляемую мощность можно оценить по формуле:

$$N \approx \left(\frac{H^2}{8\pi} V \right) \frac{\omega}{Q}. \quad (4.3)$$

Если, например, принять $V=100 \text{ л}=10^5 \text{ см}^3$, $H=10\,000$, гаусс, $\omega=10^7 \text{ сек}^{-1}$ и $Q=500$, то найдем:

$$N \approx 0,8 \cdot 10^{16} \text{ эрг/сек} = 800\,000 \text{ квт},$$

что является, конечно, большой, но все же технически достижимой величиной, например при импульсном режиме работы.

В качестве положительных свойств рассматриваемых систем следует отметить отсутствие в них магнитного излучения плазмы. Последнее, как было установлено [3], уносит значительную часть энергии, выделяющейся при термоядерных реакциях в системах, где внутри плазмы имеется сильное магнитное поле

$$\frac{H^2}{8\pi} \sim P_{\text{газ}}.$$

§ 2. Система с бегущим магнитным полем

1. Рассмотрим простейшую одномерную задачу об удержании плазмы переменным магнитным полем.

Пусть плазма располагается по одну сторону от некоторой плоскости xy (рис. 1), занимая все полупространство $z < 0$; по другую сторону плоскости ($z > 0$) имеется периодически меняющееся внешнее магнитное поле $H = H_x(z, t)$, параллельное границе плазмы. Сходная задача с удержанием плазмы давлением падающей электромагнитной волны была рассмотрена ранее Т. Ф. Волковым [4].

Градиент давления плазмы на границе в среднем уравновешен силой взаимодействия поля с током:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\overline{jH}] \quad \text{или} \quad \frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{1}{2cT} \overline{j_y H_x}. \quad (2.1)$$

Здесь полагается $p = 2nT$, причем температура плазмы считается постоянной.

Если считать, что частота колебаний поля ω много больше частоты взаимных столкновений частиц плазмы $\nu_{\text{ст}} = \frac{1}{\tau_{\text{ст}}}$, то столкновения можно в первом приближении вообще не учитывать. Тогда тангенциальную компоненту тока j_y , текущего вдоль границы перпендикулярно магнитному полю, проще

всего получить из законов сохранения обобщенного импульса: $p_y + \frac{e}{c} A_y = \text{const} = 0$, имеющих место для электронов и ионов вследствие однородности системы вдоль направления y (\mathbf{A} — векторный потенциал поля). Отсюда

$$j_y = en \left(\frac{P_{iy}}{M} + \frac{P_{ey}}{m} \right) = -\frac{e^2 n}{mc} A_y(t, z) \left(1 + \frac{m}{M} \right). \quad (2.2)$$

Подставляя это выражение для j_y вместе с $H_x = \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}$ в формулу (2.1), получим, пренебрегая $\frac{m}{M}$:

$$\frac{\partial n}{\partial z} = -n \frac{e^2}{4Tmc^2} \frac{\partial}{\partial z} \overline{A_y^2},$$

откуда

$$n(z) = n_0 e^{-\left(\frac{e^2 A_y^2}{4Tmc^2} \right)}, \quad (2.3)$$

где $n_0 = n(-\infty)$ — плотность плазмы вдали от границы.

Наконец, используя (2.2) и (2.3), находим уравнение для самосогласованного поля:

$$\text{rot}_y \text{rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} j_y = -\frac{4\pi e^2 n_0}{mc^2} A_y e^{-\left(\frac{e^2 A_y^2}{4Tmc^2} \right)}. \quad (2.4)$$

Вдали от плазмы поле $H_x(t, z)$ можно считать однородным:

$$H_x(t, z) \underset{z \rightarrow +\infty}{=} H_0 f(t),$$

тогда

$$A_y(t, z) = -z H_0 f(t) \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.5)$$

Очевидно равновесие возможно лишь при условии

$$2n_0 T = H_0^2 f^2 / 8\pi. \quad (2.6)$$

Вводя обозначения

$$A_y(z, t) = \sqrt{\frac{4Tmc^2}{e^2 f^2}} \Phi(v) f(t), \quad \text{где } v = z \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{mc^2}},$$

можно (2.4) привести к виду:

$$\frac{d^2 \Phi}{dv^2} = \Phi e^{-\Phi^2} \text{ с условиями } \Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi(v) \underset{v \rightarrow +\infty}{=} -v. \quad (2.7)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\left(\frac{d\Phi}{d\nu}\right)^2 = 1 - e^{-\Phi^2} \quad (2.8)$$

и отсюда $\nu = \int_{\alpha}^{-\Phi(\nu)} \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$.

Здесь число α определяет границу плазмы и может быть найдено из соотношения

$$\alpha = \int_{\alpha}^{\infty} dx \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} \right\} = 1. \quad (2.9)$$

Равенство (2.8), очевидно, соответствует интегралу:

$$p + \frac{\overline{H^2}}{8\pi} = \text{const}, \quad (2.10)$$

имеющему место в рассматриваемой простейшей задаче с плоской геометрией. Граница плазмы не является резкой, причем плотность $n(z)$, как это видно из (2.3), распределяется по своеобразной «барометрической» формуле: $n = n_0 \exp(-U/T)$, которая в том или ином виде встречается во всех задачах с высокочастотным удержанием плазмы [4].

Можно видеть, однако, что в рассмотренной простейшей задаче равновесие плазмы является неустойчивым. Это следует из того, что, например, малейшее изменение температуры плазмы нарушает равенство $p_{\text{газ}} = \overline{H^2}/8\pi$ и приводит к движению всей массы газа.

Для устойчивости, очевидно, необходимо, чтобы при отклонении плазмы от равновесной конфигурации возникали бы силы, стремящиеся вернуть ее в исходное положение. Этого, по-видимому, нельзя добиться наложением *однородных* удерживающих полей, но вполне можно осуществить путем наложения *неоднородных* внешних полей подходящей геометрии.

2. В простейшем случае такое поле можно осуществить, расположив вблизи границы плазмы систему параллельных проводов и пропуская токи поочередно через каждый из них так, чтобы над плазмой создавалось бы бегущее магнитное поле (рис. 2). Поля вокруг отдельных проводов с токами образовывали бы своеобразные «магнитные валики», которые, набегая на плазму, непрерывно отбрасывали бы ее от проводов, осуществляя удержание и термоизоляция. Для простоты будем рассматривать плазму как идеальный проводник.

Чтобы найти поле системы проводов, в плоском случае удобно воспользоваться комплексным потенциалом поля:

$W = -\psi + iA_x$, ($\mathbf{H} = -\nabla\psi = \text{rot } \mathbf{A}$). Потенциал одного тока \mathcal{J} , текущего в точке z_k в направлении от бумаги к читателю, как известно, равен $W_k = \frac{2\mathcal{J}}{ci} \ln(z - z_k)$. Воспользовавшись далее известным разложением синуса на простые дроби:

$$\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right) = \frac{\pi z}{2l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{4l^2 k^2}\right), \quad (2.11)$$

легко найти потенциал бесконечной системы параллельных токов, расположенных через равные промежутки $2l$ вдоль линии $y = h$

$$W_h^0(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W_k = \frac{2\mathcal{J}}{ci} \ln \left[\sin\left(\pi \frac{z - ih}{2l}\right) \right] + \text{const.} \quad (2.12)$$

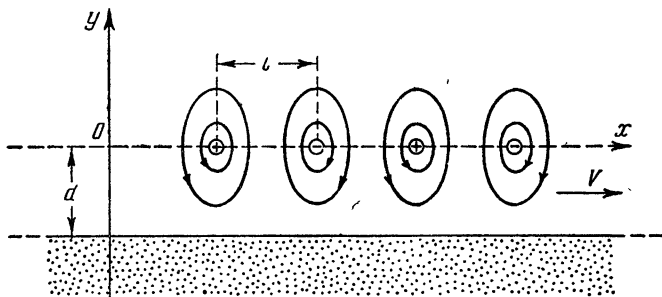


Рис. 2.

Будем полагать, что скорость V перемещения бегущего поля больше тепловой скорости ионов плазмы v_{Ti} , которая, как известно, по порядку величины близка к скорости звука для ионов. Тогда можно считать возмущения плазмы малыми и в первом приближении рассматривать границу плазмы как плоскую идеально-проводящую поверхность.

Тогда, добавляя к комплексному потенциалу реальных токов потенциалы их «изображений», найдем полный потенциал системы, представленной на рис. 2, где соседние токи противоположны:

$$W(z) = \frac{2\mathcal{J}}{ci} \ln \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{z}{2l}\right) \sin\left(\pi \frac{z + i2d + l}{2l}\right)}{\sin\left(\pi \frac{z + i2d}{2l}\right) \sin\left(\pi \frac{z + l}{2e}\right)} \right] \quad (2.13)$$

Производная этой функции равна

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{8\pi\mathcal{J}}{cl} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\pi\frac{d}{l}\right) \cos\left(\pi\frac{z+id}{l}\right)}{\operatorname{ch}\left(2\pi\frac{d}{l}\right) - \cos\left(2\pi\frac{z+id}{l}\right)}. \quad (2.14)$$

Поскольку $\left|\frac{dW}{dz}\right|^2 = \mathbf{H}^2$, находим магнитное давление в различных точках пространства:

$$p_H = \frac{1}{8\pi} \left|\frac{dW}{dz}\right|^2 = 4\pi \left(\frac{\mathcal{J}}{cl}\right)^2 \frac{\operatorname{sh}^2\left(\frac{Y_0}{2}\right) [\cos X + \operatorname{ch}(Y + Y_0)]}{[\operatorname{ch}(Y + Y_0) - \cos X][\operatorname{ch} Y - \cos X]}, \quad (2.15)$$

где обозначено: $X = 2\pi\frac{x}{l}$, $Y = 2\pi\frac{y}{l}$, $Y_0 = 2\pi\frac{d}{l}$. Чтобы учесть теперь перемещение поля вдоль оси x очевидно, достаточно во всех формулах сделать замену $x \rightarrow x - Vt$. Усредняя (2.15) по X находим среднее по времени магнитное давление:

$$\overline{p_H(\Delta N_e, d)} = \pi \left(\frac{\mathcal{J}}{cl}\right)^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\left(2\pi\frac{d + \Delta N_e}{l}\right)} + \frac{1}{\operatorname{sh}\left(2\pi\frac{d - \Delta N_e}{l}\right)} \right], \quad (2.16)$$

где ΔN_e — расстояние по нормали N_e наружу от границы плазмы (см. рис. 3).

В частности, на поверхности плазмы ($\Delta N_e = 0$):

$$\overline{(p_H)_s} = \left(\frac{\mathcal{J}}{cl}\right)^2 \frac{2\pi}{\operatorname{sh}\left(2\pi\frac{d}{l}\right)} = \begin{cases} 4\pi \left(\frac{\mathcal{J}}{cl}\right)^2 e^{-Y_0} & \text{при } d > l \\ \mathcal{J}^2/c^2ld & \text{при } d \leq l \end{cases} \quad (2.17)$$

Как видим $\overline{(p_H)_s}$ падает до нуля при удалении плазмы от проводов ($d \rightarrow \infty$) и неограниченно возрастает при приближении к проводам ($d \rightarrow 0$), что, очевидно, приведет к устойчивости равновесия относительно смещений плоской границы плазмы как целого. Равновесное d определяется равенством:

$$\overline{(p_H)_s} = p_{\text{газ}} = p_0. \quad (2.18)$$

Из выражения (2.16) можно также найти, что при фиксированном d давление p_H возрастает в направлении наружу от границы плазмы (рис. 3):

$$\overline{p_H(\Delta N_e)} = \overline{p_H(0)} + \frac{1}{2} (\Delta N_e)^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{p_H}}{\partial N_e^2} \right)_s + \dots$$

$$\left(\frac{\partial \overline{p_H}}{\partial N_e} \right)_s = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \overline{p_H}}{\partial N_e^2} \right)_s = \pi \left(\frac{\mathcal{J}}{cl}\right)^2 \frac{\operatorname{ch}^2 Y_0 + 1}{\operatorname{sh}^3 Y_0} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 2 > 0. \quad (19)2.$$

В работе С. И. Брагинского и Б. Б. Кадомцева [2] сформулирован достаточный критерий устойчивости границы плазмы относительно малых возмущений для случая стационарных полей, согласно которому поле должно возрастать в направлении нормали наружу от границы плазмы: $\frac{\partial H^2}{\partial N_e} > 0$.

Устойчивость границы плазмы в случае переменных полей не была достаточно исследована. Можно думать, однако, что условие возрастания поля наружу от границы и в этом случае приведет к стабилизации. Например, при выделении из

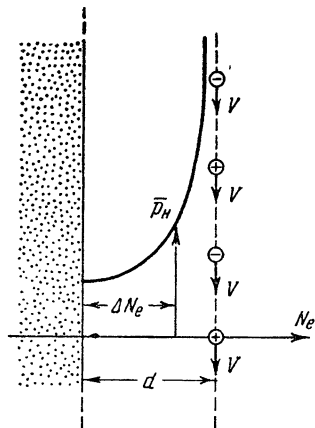


Рис. 3.

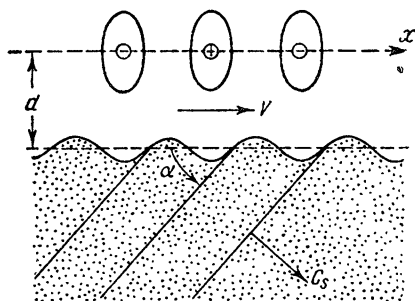


Рис. 4.

основной массы газа небольшого сгустка плазмы, последний попадает в область большего магнитного давления (в среднем) и выталкивающая сила вследствие диамагнетизма плазмы стремится вернуть его обратно. По-видимому, это рассуждение справедливо лишь в случае, когда скорость перемещения поля больше тепловой скорости ионов плазмы.

3. Рассмотрим в заключение нагревание газа в системе с бегущим полем. Магнитное давление, создаваемое бегущим полем на поверхности плазмы [см. (2.15)]:

$$p_H(t)_s = \left(\frac{\mathcal{J}}{cl}\right)^2 4\pi \frac{\text{sh}^2\left(\frac{Y_0}{2}\right) \left[\cos\left(2\pi \frac{x-Vt}{l}\right) + 1 \right]}{\left[\text{ch} Y_0 - \cos\left(2\pi \frac{x-Vt}{l}\right) \right]^2} \quad (2.20)$$

можно рассматривать в виде суммы двух составляющих

$$p_H(t)|_s = \overline{(p_H)_s} + (\Delta p_H)_s, \quad (2.21)$$

где $\overline{(p_H)_s} = p_0$ и $(\Delta p_H)_s = p_H(t)|_s - p_0$.

Если скорость V перемещения поля больше скорости звука в плазме c_s , то пульсации $\Delta p_H|_s$ давления на границе создают звуковые волны, уходящие вглубь плазмы, подобно излучению электромагнитных волн в эффекте Черенкова. Поскольку плазма в нашей идеализированной задаче безгранична, можно не рассматривать конкретные механизмы поглощения звука и просто полагать, что вся энергия, излучаемая в виде звуковых волн, целиком диссипируется и идет на нагревание плазмы.

Потенциал скоростей φ возникающих звуковых волн удовлетворяет волновому уравнению $\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{c_s^2\partial t^2} = 0$, решением которого является произвольная функция одного аргумента:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{nr} - c_s t) = \Phi\left(x \frac{c_s}{V} - y \sqrt{1 - \left(\frac{c_s}{V}\right)^2} - c_s t\right). \quad (2.22)$$

Звуковые волны отходят под углом Маха α от поверхности плазмы: $\sin\alpha = c_s/V$ (рис. 4). Поскольку в звуковой волне пульсации давления равны:

$$p_{\sim} = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = c_s \rho_0 \Phi'(\mathbf{nr} - c_s t), \quad (2.23)$$

то приравнивая эту величину на границе ($y = -d$) переменной составляющей магнитного давления $\Delta p_H|_s$ из формул (2.20) — (2.23) получаем

$$p_{\sim}|_{y=-d} = p_0 \left(2\text{sh } Y_0 \text{sh}^2\left(\frac{Y_0}{2}\right) \frac{\cos\left(2\pi \frac{x - Vt}{l}\right) + 1}{\left[\text{ch } Y_0 - \cos\left(2\pi \frac{x - Vt}{l}\right)\right]^2} - 1 \right). \quad (2.24)$$

Если здесь теперь сделать замену:

$$x \rightarrow x - (y + d) \sqrt{(V/c_s)^2 - 1},$$

то получим давление волны в произвольной точке пространства:

$$p_{\sim}(\mathbf{r}, t) = p_0 \left[2\text{sh } Y_0 \text{sh}^2\left(\frac{Y_0}{2}\right) \frac{\cos\psi + 1}{(\text{ch } Y_0 - \cos\psi)^2} - 1 \right], \quad (2.25)$$

где

$$\psi = \frac{2\pi}{l} [x - Vt - (y + d) \sqrt{(V/c_s)^2 - 1}].$$

Скорость газа в рассматриваемой нами простой волне связана с давлением соотношением $\mathbf{v}_{\sim} = \mathbf{n} \frac{p_{\sim}}{\rho_0 c_s}$, а плотность энергии

(кинетической и потенциальной) выражается формулой $E_{\sim} = \rho_0 v^2 = \frac{P_{\sim}^2}{\rho_0 c_s^2}$. Для плотности усредненного потока энергии от поверхности по нормали вглубь плазмы, используя (2. 25), получим выражение

$$q = c_s \overline{E_{\sim}} \cos \alpha = \sqrt{1 - (c_s/V)^2} \frac{\overline{P_{\sim}^2}}{\rho_0 c_s} = \\ = \sqrt{1 - (c_s/V)^2} \frac{P_0^2}{\rho_0 c_s} \left\langle \left[2 \operatorname{sh} Y_0 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{Y_0}{2} \right) \frac{\cos \psi + 1}{(\operatorname{ch} Y_0 - \cos \psi)^2} - 1 \right]^2 \right\rangle_{\text{cp}(t)}. \quad (2. 26)$$

Очевидно, усреднение по времени эквивалентно усреднению по углу ψ :

$$\left\langle \left[2 \operatorname{sh} Y_0 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{Y_0}{2} \right) \frac{\cos \psi + 1}{(\operatorname{ch} Y_0 - \cos \psi)^2} - 1 \right]^2 \right\rangle_{\text{cp}(\psi)} = \\ = \frac{1 + \frac{3}{2} \operatorname{ch} Y_0}{\operatorname{sh} Y_0} - 1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } Y_0 \gg 1 \\ \frac{5}{2Y_0} & \text{при } Y_0 \ll 1 \end{cases} \quad (2. 27)$$

Используя соотношение, определяющее скорость звука в газе: $c_s^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}$ и выражая c_s через тепловую скорость ионов: $c_s = v_{Ti} \sqrt{\gamma/3}$, можно полную мощность, передаваемую через поверхность S , на которой действует переменное удерживающее поле, записать в виде:

$$N = qS = \eta (P_0 v_{Ti} S), \quad (2. 28)$$

где $\eta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3}\gamma} \left(\frac{1 + \frac{3}{2} \operatorname{ch} \left(2\pi \frac{d}{l} \right)}{\operatorname{sh} \left(2\pi \frac{d}{l} \right)} - 1 \right)$.

Тангенциальную силу, увлекающую плазму в направлении перемещения поля, можно, очевидно, найти по формуле

$$F_{\tau} = \frac{N}{V} = \eta \left(\frac{P_0 v_{Ti}}{V} \right) S. \quad (2. 29)$$

Она будет мала, если скорость перемещения поля V достаточно велика. При $\cos \alpha \approx 1$, $\frac{d}{l} \approx 1$ и $\gamma = \frac{5}{3}$, коэффициент

$\eta \approx \frac{1}{5}$, и тогда $N \approx \frac{1}{5} (p_0 v_{Ti} S)$, что составляет весьма большую величину.

В реальных системах, где плазма не является безграничной, не вся эта мощность сможет диссипироваться в газе и перейти в тепло, так что формулу (2.28) следует рассматривать лишь как верхнюю оценку для нагрева плазмы в системах, где удержание осуществляется быстропеременными магнитными полями.

§ 3. Система с вращающимся магнитным полем

1. В качестве примера с изоляцией и удержанием плазмы в ограниченном объеме рассмотрим шарообразный сгусток плазмы, находящийся в трех взаимно-перпендикулярных однородных магнитных полях одинаковой амплитуды, меняющихся с различными частотами (рис. 5).

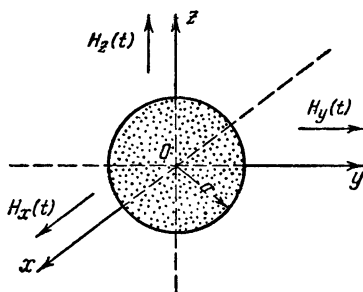


Рис. 5.

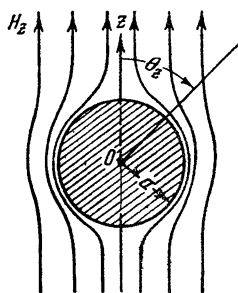


Рис. 6.

Усредненное магнитное давление на поверхности идеально-проводящего шара, создаваемое квазистационарным полем, однородным на бесконечности $H_z(\mathbf{r}, t) = H_0(t)$ (рис. 6), пропорционально квадрату синуса полярного угла θ_z .

$$\overline{p_1(\theta_z)} = \frac{\overline{H_z^2}}{8\pi} = \frac{9}{32\pi} \overline{H_0^2} \sin^2 \theta_z. \quad (3.1)$$

Если теперь имеем указанную выше суперпозицию трех полей, то учитывая соотношения: $\overline{H_i H_k} = 0$ при $i \neq k$ и $\sum_1^3 \sin^2 \theta_i = 2$, найдем, что усредненное по времени магнит-

ное давление оказывается постоянным на всей поверхности шара.

$$\overline{p_H}|_s = \frac{1}{8\pi} \overline{H_s^2} = \sum_1^3 \overline{p_i} = \frac{9}{16\pi} \overline{H_0^2}. \quad (3.2)$$

Если не считать границу плазмы идеально-проводящей поверхностью, то для указанной конфигурации можно провести гидродинамическое рассмотрение, аналогичное проделанному в п. 1 § 2 для плоской задачи.

Вновь полагаем [см. (2.4)]:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}] \text{ или } \frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{1}{2cT} \sum_1^3 \overline{j_\varphi^{(i)} H_\theta^{(i)}}. \quad (3.3)$$

Пользуясь законом сохранения обобщенного импульса:

$p_\varphi + \frac{e}{c} A_\varphi = \text{const} = 0$, находим ток:

$$j_\varphi^{(i)} = -\frac{e^2 n(r)}{mc} A_\varphi^{(i)}(r, \theta) \left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad (3.4)$$

Подставляя это выражение для $j_\varphi^{(i)} \left(\frac{m}{M} - \text{пренебрегаем}\right)$ вместе с $H_\theta^{(i)} = \text{rot}_\theta A^{(i)} = -\frac{\partial}{r\partial r} (r A_\varphi^{(i)})$ в (3.3), получим

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} = -\frac{e^2}{4Tmc^2} \cdot \frac{\partial}{r^2 \partial r} \overline{(r^2 A_\varphi^{(i)} A_\varphi^{(i)})}. \quad (3.5)$$

При этом предполагается, что в каждый данный момент времени отлична от нуля лишь какая-либо одна из трех компонент потенциала:

$$A_\varphi^{(i)} = A(r) \sin \theta_i f_i(t); \quad \dot{f}_i f_k = 0 \text{ при } i \neq k \text{ и } \dot{f}_i^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

Тогда $\overline{A_\varphi^{(i)} A_\varphi^{(i)}} = A^2(r) \left(\text{поскольку } \sum_1^3 \sin^2 \theta_i = 2\right)$. Интегрируя (3.5), находим:

$$n(r) = n(0) \exp \left[-\frac{e^2}{4Tmc^2} \int_0^r \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 A^2) dr \right]. \quad (3.7)$$

Наконец, имеем уравнение

$$\text{rot}_\varphi \text{rot} A^{(i)} = \frac{4\pi}{c} j_\varphi^{(i)} = -\frac{4\pi e^2 n(r)}{mc^2} A_\varphi^{(i)}. \quad (3.8)$$

Подставляя сюда $n(r)$ из (3.7) и вводя обозначения:

$$A(r) = \sqrt{\frac{4Tmc^2}{e^2}} \Phi(v), \text{ где } v = r \sqrt{\frac{4\pi e^2 n(0)}{mc^2}},$$

получим

$$\frac{1}{v} \frac{d^2}{dv^2} (v\Phi) - \frac{2\Phi}{v^2} = \Phi e^{-\int_0^v \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} (v^2\Phi^2) dv}, \quad (3.9)$$

что соответствует уравнению (2.7) плоского случая. В отличие от последнего в сферическом случае нет интеграла $p_{\text{газ}} + \frac{H^2}{8\pi} = \text{const}$, что затрудняет исследование уравнения (3.9), которое поэтому может быть решено лишь численными методами. Любопытно отметить, что хотя из-за наличия интеграла в экспоненте уравнение (3.9) является фактически уравнением третьего порядка, однако введением новой функции

$$y(\Phi) = ve^{-\int_0^v \Phi^2 \frac{dv}{v}}, \quad (3.10)$$

откуда $\frac{v(\Phi)}{v'(\Phi)} = \frac{y(\Phi)}{y'(\Phi)} (1 - \Phi^2)$,

оно может быть сведено к уравнению второго порядка.

2. Итак, шарообразный сгусток плазмы в трех однородных взаимно-перпендикулярных полях, меняющихся с разными амплитудами, может находиться в равновесии. Это равновесное состояние является, однако, неустойчивым относительно малых возмущений. Последнее легко установить, если учесть, что усредненное магнитное давление в данном случае уменьшается в направлении наружу от границы:

$$\overline{p_H} = \frac{\overline{H^2}}{8\pi} = \frac{H_0^2}{8\pi} 3 \left(1 + \frac{a^6}{2r^6} \right),$$

где a — радиус сферы (границу считаем резкой). Поэтому из большого плазменного шара может выделиться (например, за счет флуктуации) маленький сгусток плазмы, который, стремясь перейти в область с меньшим давлением, будет удаляться от основного шара.

Чтобы устранить этот недостаток, можно расположить ряд кольцевых проводников по меридианам сферы и пропускать по ним переменные токи со сдвигом фаз, так чтобы создавалось вращающееся магнитное поле, подобно тому, как это делается в асинхронных двигателях.

Расчеты показывают, что в *однородном* вращающемся магнитном поле не существует поверхности, на которой усредненное по времени магнитное давление было бы всюду постоянным. Например, на поверхности $\xi = \xi_0$ сплюснутого идеально-проводящего эллипсоида (рис. 7):

$$p_H|_s = \frac{H_s^2}{8\pi} = \frac{H_0^2}{8\pi} f^2(\xi_0) \left[1 - \left(1 - \frac{1 - \eta^2}{1 - \frac{\eta^2}{\xi_0^2}} \right) \cos^2(\omega t - \varphi) \right], \quad (3.11)$$

где

$$f(\xi_0) = 1 + \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1} - \xi_0^2 \arcsin \frac{1}{\xi_0}}{\xi_0^2 \arcsin \frac{1}{\xi_0} - \frac{\xi_0^2 + 1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}}$$

ξ, η, φ — сплюснутые сфероидальные координаты (см. рис. 7). При быстром вращении усредненное по времени давление

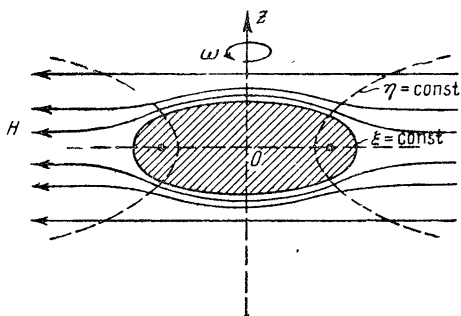


Рис. 7.

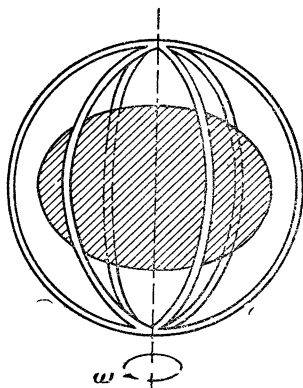


Рис. 8.

получим, положив здесь $\overline{\cos^2(\omega t - \varphi)} = \frac{1}{2}$. При $\xi_0 = \infty$, $f(\infty) = 1,5$ и эллипсоид превращается в сферу, а при $\xi_0 = 1$, $f(1) = 1$ имеем плоский диск. Из выражения $p_H|_s$ можно видеть, что любой эллипсоид стремится к дальнейшему сплюсчиванию.

Однако вращающееся поле, создаваемое витками, расположенными по меридианам сферы, не является однородным, и в нем может существовать поверхность, на которой усредненное магнитное давление постоянно. Форма такой поверхности будет близка к овалу, изображенному на рис. 8.

3. Ввиду трудности расчета полей, создаваемых кольцевым проводником, рассмотрим в качестве близкой модели идеально-проводящий шар, находящийся в магнитном поле двух бесконечных параллельных оси z проводов с противоположно направленными токами \mathcal{J} (рис. 9). Скалярный потенциал поля двух антипараллельных линейных токов равен

$$\Psi_{\parallel} = \frac{\mathcal{J}}{c} \Omega_P = \frac{2\mathcal{J}}{c} \alpha_P, \quad (3.12)$$

где Ω_P — полный телесный угол, под которым видна из точки наблюдения P плоская полоса, заключенная между проводами.

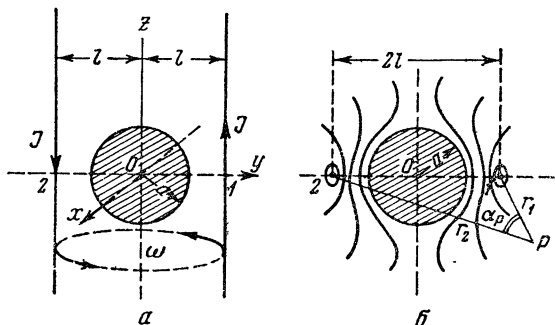


Рис. 9.

Непосредственно из рис. 9, б находим:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_P &= \frac{-(2l)^2 + r_1^2 + r_2^2}{2r_1 r_2} = \\ &= \frac{(\rho \sin \theta)^2 - 1}{\sqrt{1 + 2(\rho \sin \theta)^2 \cos 2\varphi + (\rho \sin \theta)^4}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\rho = \frac{r}{l}$, θ , φ — сферические координаты точки наблюдения P . Поэтому:

$$\begin{aligned} \Psi_{\parallel}(r, \theta, \varphi) &= F_{\parallel}(\rho, \theta, \varphi) \Big|_{\rho = \frac{r}{l}} = \\ &= \frac{2\mathcal{J}}{c} \arccos \left[\frac{(\rho \sin \theta)^2 - 1}{\sqrt{1 + 2(\rho \sin \theta)^2 \cos 2\varphi + (\rho \sin \theta)^4}} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Поскольку эта функция является решением уравнения Лапласа $\Delta \Psi_{\parallel}(r, \theta, \varphi) = 0$, она может быть разложена в области

$r < l$ по сферическим гармоникам: $\Psi_{\parallel} = \sum_{nm} A_{nm} \left(\frac{r}{l}\right)^n \times$
 $\times P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$. Потенциал Ψ_0 токов, текущих по поверх-
ности идеально-проводящего шара радиуса a , также удов-
летворяет уравнению Лапласа и вне сферы представляется
в виде разложения $\Psi_0 = \sum_{nm} C_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$. Скла-
дывая оба выражения, получим $\Psi_{\parallel} + \Psi_0 = \Psi$ — полный
потенциал в области $a < r < l$. Этот последний должен
удовлетворять на поверхности сферы условию: $\frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=a} =$
 $= -H_r|_a = 0$, что позволяет выразить неизвестные коэф-
фициенты C_{nm} в разложении Ψ_0 через известные A_{nm} разло-
жения Ψ_{\parallel} . Таким путем получим:

$$\Psi = \frac{\mathcal{J}}{c} 2\pi + \sum_{\substack{n=1 \\ m}}^{\infty} A_{nm} \left[\left(\frac{r}{l}\right)^n + \frac{n}{n+1} \frac{l}{a} \left(\frac{a^2}{rl}\right)^{n+1} \right] \times \\ \times P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi. \quad (3.15)$$

Пользуясь введенной в (3.14) функцией $F_{\parallel}(\rho, \theta, \varphi)$, это вы-
ражение можно записать в виде

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = F_{\parallel}(\rho, \theta, \varphi) \Big|_{\rho=\frac{r}{l}} + \frac{l}{a} \int_0^l \rho \frac{\partial F_{\parallel}(\rho, \theta, \varphi)}{\partial \rho} d\rho. \quad (3.16)$$

Положив здесь $r = a$ и вычисляя интеграл, находим по-
тенциал на поверхности шара:

$$\Psi(a, \theta, \varphi) = \frac{2\mathcal{J}}{c} \left\{ \arccos \frac{\xi - 1}{\sqrt{R}} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\xi}} \ln \sqrt{R} - \right. \\ \left. - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\xi}} \arccos \frac{1 + \xi \cos 2\varphi}{\sqrt{R}} \right\}, \quad (3.17)$$

где $R = 1 + 2\xi \cos 2\varphi + \xi^2$ и $\xi = \left(\frac{a}{l} \sin \theta\right)^2 < 1$.

Магнитные поля на поверхности можно теперь найти по формулам:

$$H_{\theta}|_a = -\frac{\partial\Psi(a, \theta, \varphi)}{a\partial\theta} = \frac{2\mathcal{J}}{cl} \cos\theta \left\{ 4\frac{1+\xi}{R} - \frac{\ln\sqrt{R}}{\xi} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\xi} \operatorname{arc}\cos\frac{1+\xi\cos 2\varphi}{\sqrt{R}} \right\} \cos\varphi, \quad (3.18)$$

$$H_{\varphi}|_a = -\frac{\partial\Psi(a, \theta, \varphi)}{a\sin\theta\partial\varphi} = -\frac{2\mathcal{J}}{cl} \left\{ 4\frac{1-\xi}{R} + \frac{\ln\sqrt{R}}{\xi} - \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\xi} \operatorname{arc}\cos\frac{1+\xi\cos 2\varphi}{\sqrt{R}} \right\} \sin\varphi. \quad (3.19)$$

При вращении проводов вокруг оси z усредненное по времени давление на поверхности шара найдем по формуле:

$$\begin{aligned} \langle p_H(a) \rangle_{\text{ср.}(t)} &= \frac{1}{8\pi} \langle H_{\theta}^2(a) + H_{\varphi}^2(a) \rangle_{\text{ср.}(\varphi)} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2\mathcal{J}}{cl} \right)^2 (1 + \cos^2\theta) \Phi(\xi), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где функция $\Phi(\xi)$ ($\xi = \frac{a^2}{l^2} \sin^2\theta$) выражается рядом:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= 8 \sum_0^{\infty} \xi^{2n} \left(\frac{n + \frac{3}{4}}{n+1} \right)^2 = \\ &= \frac{8}{1-\xi^2} - \frac{4}{\xi^2} \ln \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{1}{2\xi^2} \sum_1^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{n^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

и в предельных случаях имеет вид:

$$\Phi(\xi) \cong \begin{cases} \frac{9}{2} + \frac{49}{8}\xi^2 + \frac{121}{18}\xi^4 + \dots & \text{при } \xi \ll 1 \\ \frac{4}{1-\xi} - 4\ln\frac{1}{1-\xi} + 4\ln 2 + \frac{\pi^2}{12} + \dots & \text{при } (1-\xi) \ll 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Из первого разложения, положив $\frac{a}{l} = 0$, что соответствует удалению проводов на бесконечность, можно, в частности, получить распределение давления на сфере в однородном

вращающемся магнитном поле. При этом давление у полюсов в два раза превышает усредненное давление на экваторе. При приближении проводов к поверхности сферы ($\frac{a}{l} \rightarrow 1$)

давление на экваторе, как видно из второго разложения, может превысить давление у полюсов в произвольное число раз. Эти давления сравниваются примерно при $l = 1,5 a$.

Чтобы сделать давление на сфере по возможности более равномерным, можно, например, наложить два неоднородных поля, вращающихся вокруг взаимно-перпендикулярных осей (рис. 10, а).

По-видимому, целесообразно также окружить систему меридианных проводников внешним хорошо проводящим экраном, что улучшает геометрию поля (рис. 10, б).

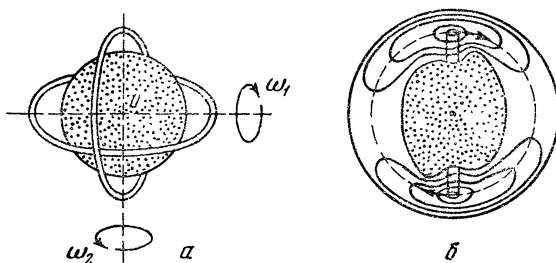


Рис. 10.

Вследствие неоднородности магнитного поля кольца с током плазма в подобных установках будет деформироваться приблизительно так, как изображено на рис. 10, б. Магнитное поле, стремясь сгладить эти деформации, будет совершать работу над плазмой, нагревая ее и одновременно приводя во вращение. Чтобы избежать сильного закручивания сгустка, следует периодически изменять направление вращения поля.

4. Рассмотрим в заключение вопрос об удержании отдельных частиц плазмы в системах с вращающимся полем.

Поскольку над большей частью поверхности плазмы имеется тангенциальное магнитное поле, уход частиц возможен лишь из малых участков поверхности, где поле равно нулю. Скорость такого ухода определяется движением тяжелых ионов: более быстрые электроны будут удерживаться электростатическими полями ионов.

Как известно, вращение постоянного магнитного поля приводит к появлению вихревого электрического поля. Например, поле H_0 , вращающееся в плоскости xu (рис. 11),

создает в неподвижной системе координат $k^{(0)}$ электрическое поле:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{vH}] = \frac{\omega}{c} (\mathbf{rH}) \quad (\text{так как } \omega \perp \mathbf{H}), \quad (3.23)$$

направленное по оси вращения.

Проекции обоих полей на оси равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{H_0 \cos \omega t, H_0 \sin \omega t, 0\}, \\ \mathbf{E} &= \left\{ 0, 0, \frac{\omega H_0}{c} (x \cos \omega t + y \sin \omega t) \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

и могут быть получены из векторного потенциала $\mathbf{A} = \{0, 0, H_0 (y \cos \omega t - x \sin \omega t)\}$ с помощью обычных соотношений

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$$

Лагранжиан заряженной частицы с массой μ в этом поле равен:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e}{c} (\mathbf{vA}) = \frac{\mu}{2} (\dot{x}^2 + \\ & y^2 + \dot{z}^2) + \frac{eH_0}{c} \dot{z} (y \cos \omega t - \\ & -x \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

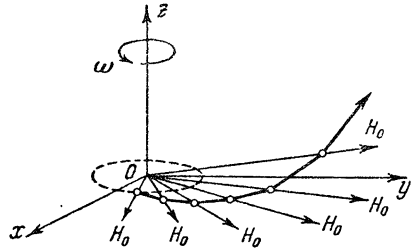


Рис. 11.

и уравнения движения имеют два очевидных интеграла:

$$P_z = p_z + \frac{e}{c} A_z = \text{const} \quad \text{и} \quad E^* = \frac{\mu v^2}{2} - \omega [\text{rp}]_z = \text{const}, \quad (3.26)$$

здесь E^* — «энергия» во вращающейся вместе с полем системе координат $k^{(\omega)}$, сохраняющаяся, поскольку там электрическое поле отсутствует.

В системе $k^{(\omega)}$ с осями $(x'y'z')$ уравнения движения имеют вид $(\omega_H = \frac{eH_0}{\mu c})$

$$\ddot{x}' - \omega^2 x' = 2\omega y', \quad \ddot{y}' - \omega^2 y' = -2\omega x' + \omega_H^2 z', \quad \ddot{z}' = -\omega_H y' \quad (3.27)$$

и вследствие линейности могут быть проинтегрированы до конца. Исключая x' и z' , эту систему можно свести к уравнению

$$Y^{IV} + (\omega_H^2 + 2\omega^2) Y^{II} - (\omega_H^2 \omega^2 - \omega^4) Y = 0, \quad (3.28)$$

где $Y = y' - \text{const}$, а $\text{const} = \frac{y'_0 + (z'_0/\omega_H)}{1 - (\omega/\omega_H)^2}$, общее решение которого имеет вид

$$Y(t) = C_1 e^{\frac{t}{\tau}} + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_3 \sin \Omega t + C_4 \cos \Omega t, \quad (3.29)$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_H}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2} - 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2 \right]^{1/2};$$

$$\Omega = \frac{\omega_H}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2} + 1 + 2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

В условиях $\frac{\omega}{\omega_H} \ll 1$ приближенно имеем $\frac{1}{\tau} = \omega$, $\Omega = \omega_H$. Определяя постоянные интегрирования через начальные значения координат и скоростей и оставляя в решениях лишь экспоненциально нарастающие члены, получим (при $\frac{\omega}{\omega_H} \ll 1$ и $t \gg \tau$)

$$x' \cong A e^{\omega t}, \quad z' \cong 2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right) A e^{\omega t}, \quad y' \cong -2 \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2 A e^{\omega t}, \quad (3.30)$$

где

$$A = \frac{1}{2} [x_0 + y_0 + (v_x^0/\omega)],$$

энергия при этом экспоненциально нарастает:

$$T = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu}{2} (\omega A)^2 e^{2\omega t}. \quad (3.31)$$

Частица движется так, как если бы «ларморовский кружок», по которому вращается заряд в магнитном поле, был бы «надет» на силовую линию поля как на спицу (рис. 11). При вращении силовых линий центробежная сила отбрасывает кружок от центра вращения, увеличивая энергию частицы:

$$m\dot{r} = F = mr\omega^2, \quad (3.32)$$

откуда $r \sim e^{\omega t}$ и $T \sim e^{2\omega t}$. Таким образом, в однородном вращающемся поле частицы как в центрифуге разбрасываются по сторонам от оси вращения.

Исследование движения частиц в неоднородном вращающемся поле является более сложной задачей.

Рассмотрим в качестве примера вращающееся поле вблизи идеально-проводящего цилиндра, переходящее в однородное на бесконечности (рис. 12, а).

Векторный потенциал такого поля, во вращающейся системе $k^{(0)}$ имеет вид (при $\rho' > a$)

$$A_{z'} = H_0 y' \left(1 - \frac{a^2}{\rho'^2} \right), \quad (3.33)$$

где $\rho'^2 = x'^2 + y'^2$ (при $a \rightarrow 0$ это выражение соответствует однородному полю, рассмотренному выше). В неподвижной системе движение описывается лагранжианом:

$$L = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{eH_0}{c} \dot{z} (y \cos \omega t - x \sin \omega t) \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (3.34)$$

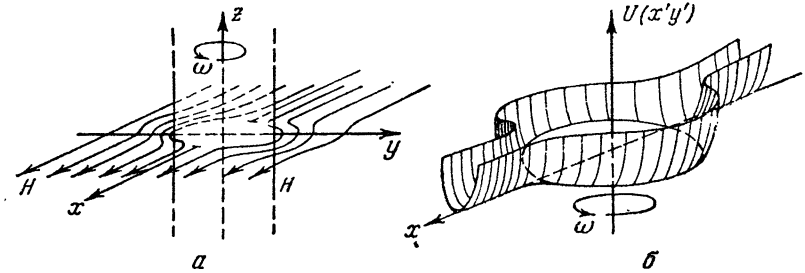


Рис. 12.

из вида которого вновь заключаем, что сохраняются величины P_x и E^* . Уравнения для x и y можно представить в виде

$$\mu \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{и} \quad \mu \ddot{y} = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.35)$$

где роль потенциальной энергии играет зависящая от времени функция

$$U(x, y, t) = \frac{\mu}{2} \left[\frac{P_x}{\mu} - \omega_H (y \cos \omega t - x \sin \omega t) \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \right]^2. \quad (3.36)$$

Уравнения движения теперь уже не являются линейными и решить их в общем виде не представляется возможным, поэтому ограничимся качественным исследованием.

Движение, описываемое уравнениями (3.35), можно рассматривать как плоское. Рельеф потенциальной энергии $U(x, y, t)$ изображен на рис. 12, б и представляет собой чашу с плоским дном и двумя примыкающими к чаше параболическими желобами.

В лабораторной системе координат эта чаша вращается с частотой ω .

Поскольку русла желобов являются плавными, частица, вошедшая в русло, может быть отброшена при столкновении со стенкой обратно к центру чаши, как это схематически изобра-

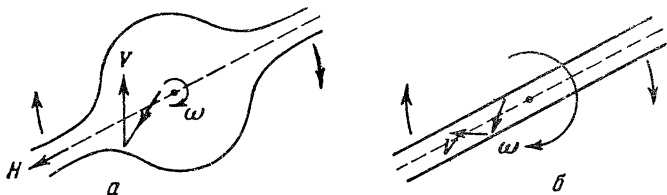


Рис. 13.

жено на рис. 13, *a*. Очевидно, такой эффект возможен лишь, если скорость стенки превышает скорость частицы, т. е. при $\omega a > v_{Ti}$. В однородном поле был один лишь желоб и не было чаши, поэтому любое столкновение со стенкой отдаляло частицу от центра (рис. 13, *б*).

В заключение автор благодарит Н. А. Явлинского за полезные дискуссии по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Будкер, см. настоящее издание, т. 3, стр. 3.
2. С. И. Брагинский, Б. Б. Кадомцев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 300.
3. Б. А. Трубников, А. Е. Бажанова, см. настоящее издание, т. 3, стр. 121.
4. Т. Ф. Волков, см. настоящее издание, т. 3, стр. 336.

А. И. Морозов

ЧЕРЕНКОВСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН *

Рассмотрена генерация магнитозвуковых волн в неограниченной и ограниченной плазме.

Источником волн считаются движущиеся с большими скоростями контуры с током.

К работе Б. А. Трубникова [1] была рассмотрена в гидродинамическом приближении задача о генерации звука в сжимаемой полугораниченной немагнитной среде возмущениями давления, бегущими по поверхности.

В высокотемпературной плазме без магнитного поля результаты, полученные Б. А. Трубниковым, не применимы, поскольку звук в такой плазме распространяться не может из-за большой величины свободного пробега ионов.

Если же внутри плазмы находится магнитное поле, то, как известно, в этом случае в дисперсионном уравнении содержится ветвь, соответствующая магнитозвуковым волнам (см., например, [2]). Эти волны получаются как при большом, так и при малом свободном пробеге частиц, если частота волны ω много меньше ларморовской частоты ионов [3]. Если частота столкновений ионов с нейтралами ν_{in} много больше или много меньше частоты ω , то магнитозвуковые волны затухают слабо. При этом условии магнитозвуковые волны, как известно, могут быть описаны также системой магнитогидродинамических уравнений для идеальной жидкости, чем мы и воспользуемся в данной работе.

* Работа выполнена в 1958 г.

Вопрос о генерации магнитозвуковых волн имеет определенный интерес в связи с проблемой нагрева плазмы [4], а также в связи с разработкой гофрированных магнитных систем, внутри которых движется плазма [5, 6].

§ 1. Общие свойства магнитозвукового черенковского излучения

Рассмотрим плазму, находящуюся в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z . Малые адиабатические возмущения в такой среде описываются системой линеаризованных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -c_T^2 \frac{\nabla \rho}{\rho_0} + \frac{1}{4\pi\rho_0} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}_0], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь невозмущенные значения величин отмечены значком «0». c_T — гидродинамическая скорость звука. Нетрудно показать, что эта система описывает два типа волн. Волны первого типа — поперечные, альфвеновские — распространяются без возмущения давления и удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = (c_A \nabla)^2 \mathbf{H}; \quad c_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (1.2)$$

Распространение волн второго типа сопровождается изменением давления. Эти волны представляют собой магнитозвуковые волны и подчиняются уравнению

$$\frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} - (c_T^2 + c_A^2) \Delta \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + c_T^2 c_A^2 \Delta \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0, \quad (1.3)$$

здесь ρ — возмущение плотности. Смещение ξ частиц среды и возмущения магнитного \mathbf{H} поля при прохождении волн связаны с возмущениями плотности соотношениями:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (c_A \nabla)^2 \right) \Delta \xi = (c_A \Delta (c_A \nabla) - \nabla \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \rho, \quad (1.4)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (c_A \nabla)^2 \right) \Delta \mathbf{H} = \sqrt{4\pi\rho_0} (c_A \Delta - (c_A \nabla) \nabla) \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

В дальнейшем вместо системы (1.4) мы будем обычно пользоваться системой (1.2)—(1.5).

Рассмотрим некоторые особенности магнитозвуковых волн. Подставляя в (1.3)

$$\rho = \rho_1 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.6)$$

получим хорошо известное дисперсионное уравнение [7]

$$\omega^4 - k^2(c_A^2 + c_T^2)\omega^2 + k^2c_T^2(\mathbf{k}\mathbf{c}_A)^2 = 0. \quad (1.7)$$

Это биквадратное уравнение указывает на существование двух видов магнитозвуковых волн: «ускоренных» с фазой скоростью

$$V_+^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left\{ c_T^2 + c_A^2 + \sqrt{(c_T^2 + c_A^2)^2 - 4c_T^2c_A^2 \cos^2 \theta} \right\} \quad (1.8)$$

и «замедленных» с фазовой скоростью

$$V_-^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left\{ c_T^2 + c_A^2 - \sqrt{(c_T^2 + c_A^2)^2 - 4c_T^2c_A^2 \cos^2 \theta} \right\}. \quad (1.9)$$

Здесь через θ обозначен угол между волновым вектором и направлением внешнего однородного поля \mathbf{H}_0 .

Физическое различие обеих волн состоит в том, что в первой — гидродинамическое и магнитное давления складываются, тогда как во второй — вычитаются.

Величина фазовой скорости ускоренных волн изменяется в пределах

$$\max(c_A^2, c_T^2) \leq V_+^2 \leq c_T^2 + c_A^2, \quad (1.10)$$

тогда как величина скорости замедленных волн изменяется в пределах

$$0 \leq V_-^2 \leq \min(c_A^2, c_T^2). \quad (1.11)$$

Поскольку фазовая скорость магнитозвуковых волн зависит от направления волнового вектора, направление групповой скорости, а следовательно, и потока энергии не совпадает, вообще говоря, с направлением волнового вектора.

Здесь имеет место та же картина, что и в обычной кристаллооптике, где направление нормальной скорости не совпадает в общем случае с направлением лучевой, т. е. групповой скорости.

Групповая скорость магнитозвуковых волн равна [см. (1.8), (1.9)]:

$$V_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \frac{1}{2\omega} \left\{ \mathbf{k} \left(w_0^2 \pm \frac{w_0^4 k^2 - 2c_T^2 (\mathbf{k}\mathbf{c}_A)^2}{k \sqrt{w_0^4 k^2 - 4c_T^2 (\mathbf{c}_A \mathbf{k})^2}} \right) \mp \frac{c_A 2c_T^2 k^2 (\mathbf{k}\mathbf{c}_A)}{k \sqrt{w_0^4 k^2 - 4c_T^2 (\mathbf{k}\mathbf{c}_A)^2}} \right\}; \quad w_0^2 = c_T^2 + c_A^2. \quad (1.12)$$

Написанное выражение показывает, что групповая скорость ускоренных волн при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ совпадает по величине и направлению с фазовой скоростью.

То есть:

$$\left. \begin{aligned} (V_g)_+ &= \max(c_T, c_A) \quad \text{при } \theta \rightarrow 0 \\ (V_g)_+ &= \sqrt{c_T^2 + c_A^2} \quad \text{при } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Иначе ведет себя групповая скорость замедленных волн.

Если при $\theta \rightarrow 0$ она также стремится к фазовой по направлению и величине равной $\min(c_T, c_A)$, то при $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ она направлена по внешнему полю и стремится не к нулю, а к конечному пределу

$$c_0 \equiv \frac{c_T c_A}{\sqrt{c_T^2 + c_A^2}}. \quad (1.14)$$

Следует отметить, что если $c_T \gg c_A$ или $c_T \ll c_A$, групповая скорость замедленной волны практически постоянна по величине и направлению: она направлена вдоль внешнего поля и равна $\min(c_T, c_A)$.

Выражение (1.12) показывает также, что, во-первых, угол между \mathbf{k} и \mathbf{V}_g острый и проекции \mathbf{k} и \mathbf{V}_g на направление внешнего поля имеют одинаковые знаки, а, во-вторых, что проекции \mathbf{k} и \mathbf{V}_g на направление, перпендикулярное внешнему полю, имеют одинаковые знаки, если волна ускорения (рис. 1, а), и — противоположные, если волна замедленная (рис. 1, б).

Можно сказать, что замедленная волна уносит энергию на опережающих (по фазе) волнах.

Прежде чем покончить с общими свойствами магнитозвуковых волн отметим, что при

$$\frac{c_T}{c_A} \leq 1 \quad (1.15)$$

вместо (1.3) мы получаем обычное волновое уравнение. В первом случае со скоростью сигнала, равной c_A , а во втором — со скоростью c_T . В этих случаях анизотропия отсутствует и групповая скорость совпадает с фазовой. Из сказанного выше следует, что при выполнении (1.15) остаются фактически только «ускоренные» волны.

Черенковскими волнами мы будем называть волны вида [8]

$$e^{ik(r-vt)}, \quad (1.16)$$

где v — скорость источника. Очевидно, кроме формы записи (1.16) ничем не отличаются от обычного выражения $e^{ikr-i\omega t}$. Вся специфика черенковской волны, таким образом, состоит в том, что

$$\omega = kv. \quad (1.17)$$

В данной работе нас будет в основном интересовать тот случай, когда скорость v направлена вдоль магнитного поля.

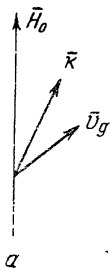


Рис. 1.

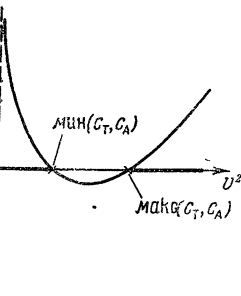
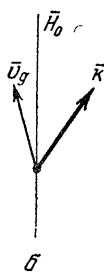


Рис. 2.

В этом случае, при соответствующем выборе координатных осей волну (1.16) можно записать в виде

$$e^{ik(x-vt)+ikay}, \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в (1.3), получим для α^2 выражение

$$\alpha^2 = \frac{c_0^2}{c_T^2 c_A^2} \cdot \frac{(v^2 - c_A^2)(v^2 - c_T^2)}{(v^2 - c_0^2)}. \quad (1.19)$$

Здесь через c_0^2 обозначена величина

$$c_0^2 = \frac{c_T^2 c_A^2}{c_T^2 + c_A^2},$$

которая нам уже встречалась раньше [формула (1.14)].

Зависимость α^2 от скорости изображена на рис. 2. Если $\alpha^2 > 0$, то волна (1.16) распространяется вдоль оси и мы

имеем черенковское излучение. Если же $\alpha^2 < 0$, то излучения нет. Величина α^2 положительна в областях:

$$c_0 \leq v \leq \min(c_A, c_T), \quad (1.20')$$

$$v \geq \max(c_A, c_T). \quad (1.20'')$$

В области (1.20') с увеличением скорости черенковский угол $\theta = \arctg |\alpha|$ уменьшается от $\frac{\pi}{2}$ до 0, тогда как в области (1.20'') он увеличивается от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Учитывая эти замечания, мы убеждаемся с помощью (1.8), (1.9), что в первой области генерируются замедленные волны, тогда как во второй — ускоренные.

При конкретном построении поля движущегося источника мы должны выбрать такой знак α , при котором на бесконечности получится поток энергии черенковского излучения, идущий от источника. Это надо делать в соответствии со сказанным на стр. 334 о направлении групповой скорости.

Мощность черенковского излучения движущегося источника может быть вычислена или с помощью выражения для потока энергии

$$\left. \begin{aligned} g &= \rho v \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} [v\mathbf{H}], \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

(где w — удельная энтальпия) или по величине силы самодействия. Мы будем пользоваться вторым способом.

Если выполнено условие (1.15), то вся существующая теория черенковского излучения автоматически переносится на случай генерации магнитозвуковых волн.

Мы покажем в следующем параграфе, что в интересующих нас случаях черенковская генерация альфвеновских волн отсутствует.

§ 2. Генерация магнитозвуковых волн в однородной среде

Рассмотрим в линейном приближении генерацию магнитозвуковых волн жестким контуром с током, движущимся в однородной среде, причем будем считать, что плазма пронизывает контур.

При сделанных предположениях точная система уравнений магнитной гидродинамики для идеально-проводящей жидкости с внешними токами имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -c_T^2 \frac{\nabla \rho}{\rho} + \frac{1}{c_p} [\mathbf{j} \mathbf{H}]; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}]; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

здесь \mathbf{j} обозначает плотность тока, текущего в среде, а \mathbf{j}_0 — плотность тока движущегося шнура.

Система (2.1) нелинейная, но, предполагая \mathbf{j}_0 малым, можно считать малыми \mathbf{j} , \mathbf{v} и возмущения ρ и p . Это позволяет линеаризовать систему. В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -c_T^2 \nabla \rho + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}_0]; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Кажется весьма вероятным, что подобная линеаризованная система будет хорошо описывать поле на больших расстояниях, а также длинноволновое излучение любого сильно-точного контура. Поэтому полученные с помощью (2.2) результаты будут иметь довольно-таки широкую область применимости. Разумеется, коротковолновая часть спектра излучения поля в окрестности сильноточного шнура этой системой будет даваться неправильно. Из системы (2.2) можно получить уравнения для магнитного поля, созданного внешним током \mathbf{j}_0 в намагниченной жидкости.

Ввиду громоздкости уравнений мы ограничимся случаем, когда

$$c_T \ll c_A. \quad (2.3)$$

При этом условии поле в жидкости описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0], \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\rho_0} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}_0] - \frac{1}{c\rho_0} [\mathbf{j}_0, \mathbf{H}_0]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Вводя операторы

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \square = \Delta - \frac{1}{c_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

можно уравнения для \mathbf{H} представить в виде:

$$\square H_x = -\frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right); \quad L \square H_x = \frac{4\pi}{c} \left(L \frac{\partial j_y}{\partial z} - \frac{\partial^3 j_z}{\partial y \partial z^2} \right); \quad (2.6)$$

$$L \square H_y = \frac{4\pi}{c} \left(-L \frac{\partial j_x}{\partial z} + \frac{\partial^3 j_z}{\partial x \partial z^2} \right). \quad (2.7)$$

Из этих уравнений видно, что если $j_{z0} = 0$, возмущение магнитного поля удовлетворяет уравнению магнитозвуковых волн и, значит, альфвеновские волны генерироваться не могут. Если же $j_{0z} \neq 0$ альфвеновские волны будут генерироваться.

Из (2.6) и (2.7) также видно, что в стационарном состоянии поле удовлетворяет обычному уравнению Пуассона

$$\Delta \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}_0. \quad (2.8)$$

Если $c_T \sim c_A$, то уравнения для поля в жидкости при $j_{0z} \neq 0$ громоздки. Поэтому мы выпишем уравнение для вектор-потенциала, считая, что $j_{0z} = 0$.

Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^4 \mathbf{A}}{\partial t^4} - \left(1 + \frac{c_A^2}{c_T^2} \right) \Delta \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + c_A^2 \Delta \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = \\ = -\frac{4\pi}{c} c_A^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{j}_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из соображений простоты мы ограничимся точным решением (2.9) только в том случае, когда контур движется вдоль внешнего магнитного поля. Учитывая, что в этом случае $-v \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}$, мы можем уравнению (2.9) придать вид обычного уравнения Даламбера

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1, \quad (2.10)$$

где величины ϵ_1 и \mathbf{j}_1 , играющие роль диэлектрической постоянной и плотности тока, равны

$$\epsilon_1 = \frac{c_T^2 v^2}{(c_T^2 + c_A^2)(v^2 - c_0^2)}, \quad (2.10')$$

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_0 \frac{c_A^2 (c_T^2 - v^2)}{(c_A^2 + c_T^2)(c_0^2 - v^2)}. \quad (2.10'')$$

Черенковское излучение контуров, движущихся перпендикулярно своей плоскости в однородной среде, рассмотрено в [9]. В частности, там вычислено поле и мощность излучения бесконечно-тонкой прямой нити и кольца. Так, поле прямой нити с током \mathcal{J}_1 , движущейся перпендикулярно своей длине в однородной среде с диэлектрической постоянной ϵ_1 , имеет вид

$$A_x = i \frac{\mathcal{J}}{c} \int e^{ik(x-vt) + i s |y|} \frac{dk}{s}, \quad (2.11)$$

где

$$\left(1 - \epsilon_1 \frac{v^2}{c^2}\right) k^2 + s^2 = 0; \quad \text{Im } s > 0. \quad (2.11')$$

В нашем случае, как нетрудно убедиться,

$$\left(1 - \epsilon_1 \frac{v^2}{c^2}\right) = -\alpha^2. \quad (2.11'')$$

Если $\alpha^2 > 0$, то появляется черенковское излучение, так как $s = \alpha k$ — вещественно, причем в соответствии со сказанным на стр. 334, для ускоренных волн надо взять $\alpha > 0$, а для замедленных волн $\alpha < 0$.

Если вместо \mathcal{J}_1 подставить в (2.11) в соответствии с (2.10) выражение

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0 \frac{c_A^2 (c_T^2 - v^2)}{(c_T^2 + c_A^2)(c_0^2 - v^2)}, \quad (2.10''')$$

то окончательная формула для вектор-потенциала поля нити, движущейся в намагниченной жидкости, будет иметь вид ($\alpha^2 > 0$)

$$A = i \frac{\mathcal{J}_0}{c} \cdot \frac{c_A^2 (c_A^2 - v^2)}{(c_T^2 + c_A^2)(c_0^2 - v^2)} \int \frac{e^{ik\xi + i\alpha k|y|}}{\alpha k} dk. \quad (2.12)$$

$$\xi = z - vt.$$

Поскольку α не зависит от k , выражение (2.12) можно проинтегрировать и мы получим

$$A = 2\pi \frac{\mathcal{J}_0}{c} \frac{c_A^2 (c_T^2 - v^2)}{(c_T^2 + c_A^2)(c_0^2 - v^2)} \theta_+(-\xi - \alpha|y|), \quad (2.13)$$

где

$$\theta_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Выражение (2.13) дает форму фазового фронта черенковского поля нити.

Фактически наблюдаемая форма поля нити будет определяться групповой скоростью и при $\alpha < 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 3. Из него видно, что все поле сосредоточено в двух бесконечно-тонких листах, нормаль к которым составляет со скоростью v угол

$$\theta = \arctg \alpha. \quad (2.14)$$

Мощность черенковского излучения нити можно найти по силе самодействия:

$$P = -\mathcal{J}_0 E \Big|_{\substack{\xi=0 \\ y=0}} = 2 \frac{\mathcal{J}_0^2}{c^2} \frac{c_A^2 (v^2 - c_T^2)}{(c_T^2 + c_A^2)(v^2 - c_0^2)} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \right), \quad (2.15)$$

то есть

$$P = 2 \frac{\mathcal{J}_0^2}{c^2} \cdot \frac{c_A^2 \sqrt{|v^2 - c_T^2|}}{\sqrt{(c_T^2 + c_A^2) |(v^2 - c_0^2)(v^2 - c_A^2)|}} \omega_{\max}; \quad \alpha^2 > 0. \quad (2.16)$$

$$P = 0; \quad \alpha^2 < 0.$$

Если шнур имеет эффективную толщину d , то $\omega_{\max} \sim \frac{v}{d}$ и при $c_T \ll c_A$ мощность излучения равна,

$$P \simeq 2 \frac{\mathcal{J}_0^2}{c^2} \cdot \frac{c_A}{\sqrt{v^2 - c_A^2}} \cdot \frac{v}{d}. \quad (2.17)$$

Скачок мощности излучения, содержащийся в (2.16) при $v \rightarrow c_A$, обязан геометрии источника, т. е. тому, что взята бесконечная прямая нить. Этого скачка не будет, если рассматривать конечный контур.

Если в намагниченной жидкости движется кольцо с током, то поле этого кольца с учетом (2.10) и (2.11) [9] имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} A_\varphi &= \frac{2\mathcal{J}_1 a}{c} \int \mu K_1 \left(a \frac{s}{i} \right) I_1 \left(r \frac{s}{i} \right) e^{ik\xi} dk; & r < a \\ A_\varphi &= \frac{2\mathcal{J}_1 a}{c} \int \mu K_1 \left(r \frac{s}{i} \right) I_1 \left(a \frac{s}{i} \right) e^{ik\xi} dk; & r > a \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$\xi = z - vt$$

Мощность излучения кольца равна [см. (33'')]

$$P = \frac{4\pi^2 a^2 \mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1}{c^2} v \operatorname{Re} \int_0^\infty \mu k J_1^2(aka) dk. \quad (2.19)$$

Эта формула при $aka \gg 1$ переходит в (2.15).

В заключение заметим, что если $c_T \ll c_A$, мы получим (2.17) и в том случае, когда нить движется перпендикулярно внешнему полю.

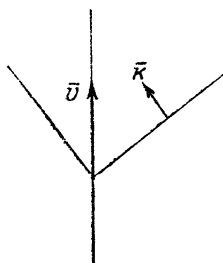


Рис. 3.

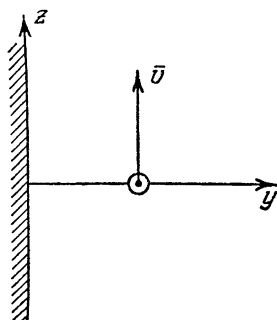


Рис. 4.

Изложенные выше расчеты не учитывали поведения тока в контуре при изменении скорости контура, что и привело к расходимости (2.19) при $v = c_0$. Простые результаты получаются только для $c_T \ll c_A$ и бесконечно тонких контуров.

В этом случае сила тока, например в кольце, будет изменяться так, что величина $\frac{\mathcal{J}a}{a}$ остается постоянной [9].

§ 3. Черенковская генерация магнитозвуковых волн в полупространстве

Пусть плазма занимает полупространство $y < 0$. Магнитное поле внутри плазмы H_{0i} в невозмущенном состоянии будем считать постоянным и направленным вдоль оси z .

Состояние равновесия плазмы поддерживается внешним магнитным полем H_{0e} , также направленным вдоль оси z .

Давление плазмы и магнитные поля, очевидно, связаны соотношением

$$8\pi p_0 = H_{0e}^2 - H_{0i}^2. \quad (3.1)$$

Пусть вдоль поверхности плазмы движется со скоростью v прямой шнур с током, плотность которого равна $j_x(y, z - vt)$.

Единственная отличная от нуля компонента вектор-потенциала A_x этого тока в однородном пространстве имеет вид ($v \ll c$)

$$\left. \begin{aligned} A_x^\delta &= \int a^\delta(k) e^{ik\xi + |k|y} dk; \quad y \leq 0; \quad \xi = z - vt; \\ a^\delta(k) &= \frac{1}{c} \int \frac{j(y', \xi')}{|k|} e^{-ik\xi' - |k|y'} d\xi' dy'. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Магнитное поле шнура возмущает поверхность плазмы и при достаточно большой скорости шнура начнется генерация магнитозвуковых волн.

Сделаем теперь основное для дальнейшего предположение, а именно будем считать, что поле шнура много меньше H_{0e} , так что допустимо линейное рассмотрение процесса. В таком случае мы можем описывать возмущения плотности в среде уравнением (1.3), а смещения среды и возмущения поля найти с помощью (1.4) и (1.5).

Возмущения плотности мы будем искать в виде (1.18)

$$\rho = \rho_1 e^{ik\xi - ik\alpha y}, \quad (3.3)$$

где α определено с точностью до знака формулой (1.19). Знак выбирается в соответствии с направлением групповой скорости.

Если наличие шнура с током вызывает возмущения в плазме, то наличие плазмы искажает поле (3.2). Результирующее поле мы запишем в виде

$$A = A^\delta + A^s, \quad (3.4)$$

где A^s — «отраженное» поле:

$$A^s = \int a^s(k) e^{ik\xi - |k|y} dk. \quad (3.5)$$

В данной задаче неизвестными являются амплитуда возмущения плотности ρ_1 и амплитуда «отраженного» поля $a^s(k)$. Эти величины находятся из двух граничных условий: во-первых, равенства давлений

$$8\pi c^2 \rho_1 = 2H_{0e} (H_z^\delta + H_z^s) - 2H_{0e} H_z^i \quad (3.6')$$

и, во-вторых, отсутствия составляющей магнитного поля, нормальной к поверхности раздела,

$$nH^e = 0; \quad H_y^\delta + H_y^s - H_0 \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \quad (3.6'')$$

Здесь использованы следующие обозначения: H_z — возмущения внутреннего магнитного поля; $\mathbf{n} = \left(1, -\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)$ — вектор нормали к поверхности возмущенной плазмы; η — компонента смещения плазмы в направлении оси y .

Подставляя в (3.6'') выражения (3.2) и (3.5), получим

$$a^s(k) = -a^{\delta}(k) + H_0 \eta(k). \quad (3.7)$$

Первый член в правой части дает зеркальное изображение поля, тогда как второй — учитывает влияние волн на поверхности плазмы. Подставляя (3.2), (3.5), (3.7) в (3.6') и учитывая, что $H_z = -\frac{\partial A}{\partial y}$, получим

$$8\pi c_T^2 \rho_1 + 2H_{0z} H_z^i - 2H_{0e}^2 |k| \eta(k) = -4H_{0e} |k| a^{\delta}. \quad (3.8)$$

Из (1.4) и (1.5) вытекают соотношения:

$$\eta = -\frac{ia}{k\rho_0} \cdot \frac{(c_T^2 + c_A^2)(v^2 - c_0^2)}{v^2(v^2 - c_A^2)} \rho_1, \quad (3.9)$$

$$H_z^i = H_{0z} \left(\frac{v^2 - c_T^2}{v^2} \right) \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (3.10)$$

Из (3.9), (3.10) и (3.8) получаем, что

$$\rho_1 = \frac{-H_{0e} |k| v^2 a^{\delta}}{2\pi (c_T^2 + c_A^2) (v^2 - c_0^2) \left[1 + i \frac{k}{|k|} u_e^2 \frac{\alpha}{v^2 - c_A^2} \right]}. \quad (3.11)$$

$$u_e = \frac{H_{0e}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

Следовательно, [см. (3.9)],

$$\eta = \frac{ia}{k\rho_0} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{H_{0e} |k| \cdot a^{\delta}}{\left[(v^2 - c_A^2) + i \frac{k}{|k|} u_e^2 a \right]}. \quad (3.12)$$

и [см. (49)]

$$a^s = -a^{\delta} + H_{0e} \eta = a^{\delta} \left(-1 + \frac{2iau_e^2 |k|}{k \left[(v^2 - c_A^2) + i \frac{k}{|k|} u_e^2 a \right]} \right). \quad (3.13)$$

Формулы (3.11), (3.12), (3.13) дают полное решение задачи. Мощность излучения единицы длины нити может быть найдена по силе самодействия:

$$P = -\frac{v}{c} \int j(y', \xi') H_y^*(y', \xi') dy' d\xi' =$$

$$= -2v \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i |k|^2 a^{\delta} a^{\delta*} dk. \quad (3.14)$$

Подставляя сюда a^{δ} и учитывая (3.13) и (3.2), а также то, что зеркальная часть a^{δ} не дает излучения, получим окончательную формулу для мощности излучения

$$P = 4v \frac{u_e^2 (v^2 - c_A^2)}{(v^2 - c_A^2)^2 + u_e^4 \alpha^2} \operatorname{Re} \alpha \int_0^{\infty} k^2 dk a^{\delta} a^{\delta*}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим два частных случая:

1) Пусть на расстоянии l от поверхности плазмы движется одиночная бесконечно тонкая нить. В этом случае

$$j = \mathcal{J} \delta(y - l) \delta(\xi) \quad (3.16)$$

и, значит, (3.2):

$$a^{\delta} = \frac{\mathcal{J}}{c} \frac{e^{-|k|l}}{|k|}. \quad (3.17)$$

Интегрируя (3.15) при учете (3.17), найдем, что

$$P = 2v \frac{\mathcal{J}^2}{lc^2} \cdot u_e^2 \frac{\alpha (v^2 - c_A^2)}{(v^2 - c_A^2)^2 + u_e^4 \alpha^2}. \quad (3.18)$$

Формула (3.18) отчетливо показывает, что в случае замедленных волн α должно быть отрицательно. Подставляя вместо α его значение (1.19), получим

$$P = 2v \frac{\mathcal{J}^2}{lc^2} u_e^2 \sqrt{\left| \frac{(v^2 - c_A^2)(v^2 - c_T^2)}{(v^2 - c_0^2)(c_T^2 + c_A^2)} \right|} \times$$

$$\times \frac{(v^2 - c_0^2)(c_T^2 + c_A^2)}{(v^2 - c_A^2)(v^2 - c_0^2)(c_T^2 + c_A^2) + u_e^4 (v^2 - c_T^2)}. \quad (3.19)$$

При $v \gg c_T, c_A$

$$P \rightarrow 2 \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 l} \cdot \frac{u_e^2}{\sqrt{c_T^2 + c_A^2}}; \quad u_e = \frac{H_{0e}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (3.20)$$

2) Пусть на расстоянии l от поверхности плазмы движется бесконечно тонкий слой тока, с синусоидальной плотностью

$$j = \mathcal{J}_1 \delta(y - l) \cos k_0 \xi; \quad \xi = z - vt. \quad (3.21)$$

Здесь \mathcal{J}_1 имеет смысл плотности тока на единицу длины (в z -направлении) слоя, а $L = \frac{2\pi}{k_0}$ — длина периода тока.

Выбранной геометрии тока соответствует

$$a^\delta = \frac{\mathcal{J}_1 \pi}{c |k|} (\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)) e^{-|k|l} \quad (3.22)$$

и, после простых вычислений, мы получаем следующее выражение для мощности излучения одного периода «ленты» с током:

$$P = 2 \frac{\mathcal{J}_1^2}{c^2} \cdot \frac{v u_e^2 (v^2 - c_A^2) \alpha}{(v^2 - c_A^2)^2 + u_e^4 \alpha^2} e^{-\frac{4\pi l}{L}} \cdot \pi L. \quad (3.23)$$

Эта мощность отнесена к единице длины ленты вдоль оси x . Если $v \gg c_T, c_A$, то

$$P \rightarrow 2 \frac{\mathcal{J}_1^2}{c^2} \cdot \frac{u_e^2}{\sqrt{c_T^2 + c_A^2}} e^{-\frac{4\pi l}{L}} \cdot \pi L. \quad (3.24)$$

В заключение остановимся на генерации альфвеновских волн при движении тока вдоль границы раздела. Из (1.2) следует, что эта генерация может быть лишь при движении нити с альфвеновской скоростью, но в этом случае магнитозвуковая волна совпадает с альфвеновской (см. стр. 333) и, следовательно, дополнительного вклада в излучение она не дает.

§ 4. Черенковская генерация магнитозвуковых волн в цилиндрическом столбе плазмы

Практически наибольший интерес представляет генерация магнитозвуковых волн в столбе плазмы с помощью движущегося кольцевого тока, коаксиального к цилиндру плазмы.

Радиус плазменного цилиндра обозначим через a . Как и раньше, будем считать, что внутри плазмы находится однородное поле H_{0z} , направленное вдоль оси z , а вне плазмы — поле H_{0e} . При отсутствии кольцевого тока плазма находится в равновесии:

$$8\pi p_0 = H_c^2 - H_{0z}^2. \quad (4.1)$$

Распределение тока в кольце характеризуем φ -компонентой вектор-потенциала этого тока в вакууме

$$A_{\varphi}^{\delta} = \int a^{\delta} I_1(rk) e^{ik\xi} dk; \quad r < R. \quad (4.2)$$

Здесь R — внутренний радиус кольца. Поле кольца считаем малым по сравнению с внешним магнитным полем H_{0e} . В этом случае задача описывается линеаризованной системой, и возмущение плотности в столбе определяется (1.3).

Подставляя в (1.3)

$$\rho = \rho_1(r) e^{ik\xi}, \quad (4.3)$$

получим для $\rho_1(r)$ уравнение $\Delta \rho_1(r) + (\alpha^2 + 1) k^2 \rho_1(r) = 0$, (4.4)

откуда

$$\rho_1 = b J_0(\alpha kr). \quad (4.5)$$

С помощью (4.5) и (1.4) находим нужное нам для дальнейшего радиальное смещение частиц плазмы:

$$\eta_r = \frac{v^2 \alpha}{\rho_0 k (v^2 - c_A^2) (\alpha^2 + 1)} b J_1(\alpha kr) \quad (4.6)$$

и возмущение z -компоненты внутреннего магнитного поля:

$$H_{zi} = H_{0i} \frac{b}{\rho_0} \left(\frac{v^2 - c_T^2}{v^2} \right) J_0(\alpha kr). \quad (4.7)$$

Поле вне цилиндра можно представить в виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{0e} + \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^{\delta}, \quad (4.8)$$

где \mathbf{H}^s определяется вектор-потенциалом

$$A_{\varphi}^s = \int a^s(k) e^{ik\xi} K_1(rk) dk. \quad (4.9)$$

Из первого граничного условия $\mathbf{Hn} = 0$ вытекает

$$H_r^{\delta} + H_r^s - H_0 \frac{\partial \eta_r}{\partial z} = 0, \quad (4.10)$$

то есть

$$A_{\varphi}^{\delta} + A_{\varphi}^s + H_0 \eta_r = 0. \quad (4.11)$$

Подставляя сюда (4.2), (4.9), (4.6), найдем, что

$$a^s = -\frac{1}{K_1} \left(a^\delta I_1 + \frac{H_{0e} v^2 \alpha b J_1}{\rho_0 k (v^2 - c_A^2) (1 + \alpha^2)} \right) \quad (4.12)$$

$$K_1 \equiv K_1(ak); \quad I_1 \equiv I_1(ak); \quad J_1 \equiv J_1(aka); \quad J_0 \equiv J_0(aka).$$

Второе граничное условие, равенство давлений, имеет вид

$$8\pi c_T^2 \rho_1 = 2H_{0e} (H_z^\delta + H_z^s) - 2H_{0i} H_{iz}. \quad (4.13)$$

Учитывая, что

$$H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_z}{\partial r}; \quad \frac{\partial z I_1(z)}{z \partial z} = I_0(z),$$

мы с помощью (4.5), (4.7), (4.12), (4.9) получим

$$8\pi c_T^2 b J_0 = 2H \left[a^\delta k I_0 + k \frac{K_0}{K_1} \left(a^\delta I_1 + \frac{H_{0e}^2 v^2 \alpha}{\rho_0 k (v^2 - c_A^2) (\alpha^2 + 1)} b J_1 \right) \right] - \\ - 2H_{0i}^2 \frac{b}{\rho_0} \left(\frac{v^2 - c_T^2}{v^2} \right) J_0,$$

откуда

$$b = \frac{v^2 (v^2 - c_A^2)}{J_0 \cdot 8\pi \alpha \cdot K_1 (c_T^2 + c_A^2) (v^2 - c_0^2)} \times \\ \times \frac{a^\delta H_{0e}}{(v^2 - c_A^2) - \frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \alpha u_e^2} \quad (4.14)$$

и, значит,

$$a^s = -a^\delta \left\{ \frac{I_1}{K_1} + \frac{J_1}{2K_1^2 J_0} \cdot \frac{\alpha u_e^2}{ka \left[(v^2 - c_A^2) - \frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \alpha u_e^2 \right]} \right\}. \quad (4.15)$$

Радиальное смещение частиц на поверхности цилиндра легко находится с помощью (4.6) и (4.14). Оно равно

$$\eta_r = \frac{J_1}{J_0} \cdot \frac{\alpha u_e^2}{2K_1 k a H_{0e}} \cdot \frac{a^\delta}{\left[(v^2 - c_A^2) - \frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \alpha u_e^2 \right]}. \quad (4.16)$$

Мощность излучения так же, как и раньше, найдем по формуле:

$$\begin{aligned}
 P &= -vF_z = \frac{v}{c} \int j_\varphi H_r^s dz dr = -\frac{v}{c} \int j_\varphi \frac{\partial A^s}{\partial z} dz dr = \\
 &= -2 \frac{v}{c} \operatorname{Re} \int_0^\infty ika^s dk \int j_\varphi e^{ik\xi'} K_1(r'k) d\xi' dr'.
 \end{aligned}$$

Подставляя сюда (4.15), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 P &= u_e^2 \frac{v}{c\rho_0} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{i}{K_1^2} \frac{J_1}{J_0} \cdot \alpha \frac{a^\delta dr' d\xi'}{\left[(v^2 - c_A^2) - \frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \alpha u_e^2 \right]} \times \\
 &\quad \times \int j_\varphi e^{ik\xi'} K_1(r'k) dk.
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если $j_\varphi = j(\xi) \delta(r - R)$, то

$$a^\delta = \frac{2R}{c} \left(\int j(\xi') e^{-ik\xi'} d\xi' \right) K_1(kR) \quad (4.17')$$

и

$$P = u_e^2 \frac{v}{2Ra} \operatorname{Re} \int_0^\infty dk \frac{ia}{K_1^2(ka)} \cdot \frac{J_1}{J_0} \cdot \frac{a^\delta a^{*\delta}}{Z}. \quad (4.17'')$$

Формула (4.17) показывает, что излучаться будут только те гармоники (k_s), для которых знаменатель подинтегрального выражения обращается в нуль, т. е.

$$Z(k_s) \equiv (v^2 - c_A^2) - \frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \alpha u_e^2 = 0. \quad (4.18)$$

Это дисперсионное уравнение совпадает с уравнением, полученным в [11]. Взяв вычеты в нулях Z , найдем окончательное выражение для мощности излучения.

$$P = \frac{v\pi}{2Ra} \cdot \frac{(v^2 - c_A^2)}{\alpha u_e^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a^\delta(k_s) a^{*\delta}(k_s)}{K_0 K_1 \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \right)_s}. \quad (4.19)$$

Применим эту формулу к расчету генерации магнитозвуковых волн бесконечно тонким кольцом с током радиуса R , движущимся вдоль столба плазмы. В этом случае (4.17'):

$$\left. \begin{aligned} j &= \mathcal{J}_0 \delta(\xi) \delta(r - R), \\ a^\delta &= \frac{2\mathcal{J}_0 R}{c} K_1(Rk). \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в (4.19), получим:

$$P = \frac{v\pi}{au_e^2} \left(\frac{v^2 - c_A^2}{a} \right) \cdot \frac{2\mathcal{J}^2}{c^2} R \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{K_1^2(Rk)}{K_0(ka) K_1(ak)} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{J_1 K_0}{J_0 K_1} \right) \right)_s. \quad (4.21)$$

Если $\frac{a}{R} \sim 1$, $ka \gg 1$, то мощность излучения кольца, движущегося вдоль цилиндра, стремится к (3.18) мощности излучения прямой нити, движущейся вдоль плоской границы раздела. Нетрудно убедиться, что предположение о том, что ka , $kR \gg 1$ не является жестким. Действительно, для первого корня (4.18) можно считать $ka \ll 1$, только в том случае, если

$$(ka)^2 \ln \frac{ka}{2} \approx \frac{c_T^2 c_A^2 (v^2 - c_0^2)}{u_e^2 c_0^2 (v^2 - c_T^2)} \ll 1,$$

а это, вообще говоря, не имеет места.

Если вдоль плазменного цилиндра бежит цилиндрическая волна тока с плотностью

$$j = \mathcal{J}_1 \delta(r - R) \cos k_0 \xi, \quad (4.22)$$

то излучения не будет, если k_0 не удовлетворяет (4.18), и будет — если k_0 удовлетворяет (4.18). В последнем случае мощность излучения бесконечна и равна (на один период

$$L = \frac{2\pi}{k_0})$$

$$P = \frac{v}{au_e^2} \cdot \frac{\pi^2 R}{a} \cdot \frac{\mathcal{J}_1^2}{c^2} L \frac{K_1^2(k_0 R) (v^2 - c_A^2) \delta(k - k_0)}{K_0(k_0 a) K_1(k_0 a) \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\mathcal{J}_1 K_0}{J_0 K_1} \right)}, \quad (4.23)$$

так как

$$a^\delta = \frac{\mathcal{J}_1 2R}{c} K_1(kR) \pi [\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)]. \quad (4.24)$$

Проведенное линейное рассмотрение генерации магнитозвуковых волн приводит к бесконечной амплитуде установившихся колебаний. При этом мощность излучения будет или конечной, если $a^{\delta}(k)$ конечно, или бесконечной, если $a^{\delta}(k) \sim \delta(k - k_0)$. Неопределенность в амплитуде колебаний можно было бы устранить путем учета поглощения, нелинейности или же рассмотрения нестационарного процесса. В данной работе такого рода уточнениями мы заниматься не будем, а отметим только, что если $a^{\delta}(k)$ конечно, то при достаточно слабом поглощении $\frac{\text{Im } \omega}{\text{Re } \omega} \ll 1$, полученная формула (4.19) для мощности излучения остается в силе. Если же $ka \gg 1$ и поглощение волн происходит на расстоянии порядка радиуса, то для расчета мощности излучения можно использовать формулы для полубесконечного пространства.

§ 5. Заключение

Мы рассмотрели ряд примеров черенковской генерации магнитозвуковых волн.

Полученные в линейном приближении формулы для мощности излучения позволяют составить некоторое представление о порядках величин, с которыми здесь можно встретиться.

Рассмотрим прежде всего генерацию волн плазменным контуром, движущимся в однородной среде. Если сила тока в контуре \mathcal{J} , то кинетическую энергию контура, приходящуюся на единицу длины, можно считать рав-

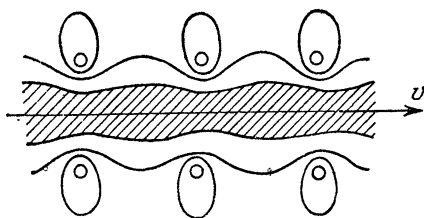


Рис. 6.

ной по порядку $\frac{\mathcal{J}^2}{c^2}$ (см. [11]). Следовательно, на основании (2.17)

мы приходим к выводу, что при $v \gg c_A$ контур затормозится на расстоянии порядка диаметра шнура. Этот вывод представляет определенный интерес в связи с проблемой нагрева плазмы сгустками ускоренной плазмы.

Результаты, полученные в § 3 и 4, можем применить к двум задачам: во-первых, к нагреву плазмы с помощью бегущего вдоль поверхности возмущения поля; во-вторых, к вопросу о торможении плазмы, текущей по гофрированной магнитной трубе (рис. 6). Это, очевидно, связанные задачи,

поскольку передача энергии сопровождается передачей импульса.

Для определенности рассмотрим генерацию волн круговым током (4.22), текущим по поверхности радиуса R . Время, в течение которого происходит удвоение внутренней энергии единицы столба плазмы, равно

$$t_{\text{удв}} = \frac{3}{2} \frac{NkT}{P \cdot 2\pi R}.$$

Здесь N — число частиц на единицу длины столба плазмы, $P \cdot 2\pi R$ — мощность излучения, отнесенная к единице длины (в z -направлении токовой ленты).

Предполагая, что $\frac{R-a}{R} \ll 1$, и $v \geq \max(c_A, c_T) \equiv v_0$, мы можем использовать формулу (4.1) и получить следующее выражение для $t_{\text{удв}}$:

$$t_{\text{удв}} \approx \frac{3R}{64\pi} \frac{(H_e^2 - H_i^2) e^{\frac{4\pi l}{L}}}{\frac{\mathcal{J}_1^2}{c^2} \cdot \frac{u_e^2}{v_0}}.$$

Магнитное поле ленты вблизи ленты $H_b \sim \frac{\mathcal{J}_1 \pi}{c}$ и, следовательно,

$$t_{\text{удв}} \sim \frac{R}{v_0} e^{\frac{4\pi l}{L}} \left(\frac{H_{0e}}{H_b} \right)^2.$$

Если $4\pi l \ll L$ и $H_b \sim H_{0e}$, то время удвоения энергии будет приближаться к пролетному времени.

Наряду с ростом энергии на плазменный шнур будет действовать сила

$$F = \frac{P}{v},$$

в результате чего начнет увеличиваться кинетическая энергия плазмы: $W_{\text{кин}} \sim \frac{(Ft)^2}{m}$, где m — масса шнура. Легко видеть, что за время $t_{\text{удв}}$ кинетическая энергия шнура сравняется по порядку с внутренней энергией плазмы.

Однако последовательное рассмотрение этого вопроса, как было сказано выше, требует учета диссипации и нелинейных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Трубников, см. настоящий том, стр. 309.
 2. С. И. Брагинский. ДАН СССР, 115, № 3 (1957).
 3. В. Л. Гинзбург. ЖЭФТ, 21, 788 (1951).
 4. Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов. Доклад, представленный на Женевскую конференцию, 1958 г.
 5. С. И. Брагинский, Б. Б. Кадомцев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 300.
 6. С. М. Осовец, см. настоящий том, стр. 3.
 7. С. И. Сыроватский. УФН, 62, № 3 (1957).
 8. Б. М. Болотовский, УФН, 62, № 3 (1957).
 9. А. И. Морозов. Диссертация, МГУ, 1957.
 10. В. Д. Шафранов. Атомная энергия, 5 (1956).
 11. А. И. Морозов. ЖЭТФ, 32, № 2 (1957).
-

Б. Б. Кадомцев

МАГНИТНЫЕ ЛОВУШКИ ДЛЯ ПЛАЗМЫ*

В работе производится гидродинамическое рассмотрение магнитных ловушек. Показано, что системы с «охраняющими проводниками» являются вместе с тем магнитными ловушками, утечка из которых происходит в основном за счет подвесок. Установлено наличие устойчивости в «ловушках с гофрированным полем».

§ 1. Введение

Под магнитной ловушкой принято понимать такое магнитное поле, при движении в котором отдельная заряженная частица очень долгое время продолжает оставаться внутри некоторой ограниченной части пространства. Представляется естественным, что поле, способное удерживать плазму в ограниченном объеме, должно быть «ловушечного» типа, т. е. оно должно удерживать и отдельные частицы. Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно: поле, удерживающее отдельные частицы, совсем не обязано удерживать квазинейтральную плазму, так как в плазме возникают собственные электрические поля, которые могут существенно изменить характер движения отдельных частиц. Напрашивается вопрос: какие же поля могут удерживать плазму? Рассмотрению именно таких полей, которые можно назвать магнитными ловушками для плазмы, и посвящена настоящая работа.

Мы будем предполагать, что движение плазмы описывается гидродинамическими уравнениями. Для этого необходимо, строго говоря, чтобы средний свободный пробег ионов плазмы

* Работа выполнена в 1957 г.

был много меньше характерных размеров системы. Если длина свободного пробега одного порядка или даже больше размеров системы, то следует пользоваться кинетическими уравнениями. Однако и в этом случае гидродинамическое рассмотрение представляет вполне определенный интерес, поскольку оно, будучи гораздо проще кинетического, позволяет получить некоторые качественно правильные результаты.

Итак, задача ставится следующим образом: необходимо определить каково должно быть магнитное поле, чтобы квазинейтральная плазма, расположенная в некоторой ограниченной области пространства, находилась в устойчивом равновесии. При этом следует считать, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля, так как плазма должна играть роль некоторого «пробного тела», мало искажающего изучаемое нами поле.

Гидродинамическая задача о равновесии и устойчивости идеально проводящей плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля, была рассмотрена в работе Розенблюта и Лонгмайра [1] и более строгим методом — в работе автора [2]. Из этих работ следует, что такая плазма ведет себя, до некоторой степени, подобно неоднородному газу в поле тяжести, причем роль потенциальной энергии сил тяжести играет функция $U = - \oint \frac{dl}{H}$, где интеграл берется вдоль силовой линии, а dl — элемент длины этой линии. Подобно тому как неоднородный или неравномерно нагретый газ в поле сил тяжести стремится, вообще говоря, к состоянию, в котором более тяжелые его участки располагаются там, где потенциальная энергия минимальна, так и плазма стремится, грубо говоря, к такому устойчивому расположению, когда ее давление постоянно на эквипотенциальных поверхностях $U = \text{const}$ и убывает при возрастании U .

Физический смысл этого совершенно очевиден. Действительно, пусть в магнитное поле внесено некоторое количество плазмы. Так как магнитное поле не оказывает воздействия на плазму вдоль своего направления, то плазма быстро, с тепловой скоростью, расширится вдоль силовых линий, заполнив некоторую силовую трубку. Если давление плазмы мало, то магнитное поле внутри трубки при этом почти не изменится. Если проводимость плазмы бесконечно велика, то поле «вморожено» в плазму и она должна двигаться вместе со своим полем. При этом трубка с плазмой не может двигаться произвольным образом: всякое сильное искривление трубки связано с большим увеличением магнитной энергии и поэтому недопустимо. Допустимым является лишь такое перемещение, когда поле трубки «замещает» вытесняемое ею поле. Таким образом, на

движение плазмы оказывается наложенной связью: трубка с плазмой должна «пробираться» между силовыми линиями так, чтобы магнитное поле при этом почти не искажалось.

Так как плазма стремится расшириться, то трубка с плазмой будет двигаться в сторону увеличения своего объема.

Объем трубки есть $V = \int s dl$, где s — поперечное сечение трубки, а интеграл берется вдоль силовой линии. Но $sH = \varphi$ есть магнитный поток этой трубки, который остается постоянным как вдоль трубки, так и во времени в силу вмороженности поля. Таким образом, $V = \varphi \int \frac{dl}{H}$ и, следовательно,

трубка с плазмой будет двигаться в сторону уменьшения «потенциальной энергии» $U = - \int \frac{dl}{H}$ до тех пор, пока не достигнет области, где U минимальна, или не встретит область, заполненную плазмой. Если давление этой плазмы меньше, чем давление плазмы в движущейся трубке, то трубка вытеснит ее и будет «опускаться» дальше до тех пор, пока не достигнет области, где давление в трубке станет равным давлению плазмы. И вообще, при любом начальном распределении плазмы, она будет «переливаться» в сторону уменьшения U , пока не заполнит область, где U минимальна.

Что касается этого конечного устойчивого состояния, то оно совсем не обязательно должно быть таким, чтобы давление плазмы возрастало при убывании U .

Подобно тому как в земной атмосфере возможно устойчивое равновесие, когда температура воздуха падает с высотой, но градиент температуры при этом не превышает некоторого предельного значения $\sim 10^{-2}$ град/м, так и в плазме устойчивость не теряется, если ее давление убывает при убывании U очень быстро.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Пусть плазма находится в равновесии, а ее давление $p(\mathbf{r})$ возрастает в направлении возрастания U . Предположим, что некоторая трубка с плазмой, проходящая через точку \mathbf{r} , смещается на некоторую бесконечно малую величину, «раздвигая» другие трубки. Так как давление и потенциал U вдоль трубок постоянны, то нам достаточно рассмотреть, что происходит в окрестности точки \mathbf{r} . Обозначим смещение трубки в окрестности точки \mathbf{r} через $\delta \mathbf{r}$. Тогда для относительного изменения объема трубки при таком смещении получаем

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta U}{U} = \frac{\delta \mathbf{r} \nabla U}{U}.$$

Если процесс происходит адиабатически, то давление плазмы внутри трубки изменится на величину

$\delta p = -\gamma p \frac{\delta V}{V} = -\gamma p \frac{\delta r \nabla U}{U}$. (Если теплопроводность большая, то нужно положить $\gamma = 1$). Давление же в трубках, окружающих рассматриваемую нами, равно, очевидно, $p(r + \delta r) = p(r) + \delta r \nabla p$. Если смещение происходит в сторону падения потенциала U , т. е. $\delta U < 0$, $\frac{\delta U}{U} > 0$, а давление в смещенной трубке оказывается больше, чем давление окружающей плазмы, то трубка будет стремиться «погружаться» дальше в сторону падения U . Если же давление в трубке окажется меньше давления плазмы, т. е. $-\gamma p \frac{\delta r \nabla U}{U} < \delta r \nabla p$, то смещенная трубка будет вытесняться обратно и плазма будет устойчива. Наоборот, при смещении в сторону возрастания U устойчивость имеет место, если давление в трубке меньше давления окружающей плазмы, т. е. знак написанного выше неравенства должен измениться. Оба эти условия можно, очевидно, записать в виде одного $(\delta r \nabla p) \frac{\delta U}{U} > -\gamma p \frac{\delta r \nabla U}{U} \cdot \frac{\delta U}{U}$. Учитывая, что $\frac{\delta U}{U} = \frac{\delta r \nabla U}{U}$ и что в равновесии $\nabla U \uparrow \uparrow \nabla p$, мы запишем это условие устойчивости в виде $\frac{\nabla p \nabla U}{p} > -\gamma \left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2$ или

$$\nabla p \nabla U < \gamma p |U| \left(\frac{\nabla U}{U}\right)^2 \quad (1)$$

(следует учесть, что U всегда отрицательно).

Отсюда следует, что равновесие плазмы является устойчивым также и в том случае, когда давление плазмы возрастает при увеличении U , т. е. $\nabla p \nabla U > 0$, но при этом градиент давления не должен превосходить некоторого предельного значения, определяемого неравенством (1). Условие (1) выведено более строгим путем в работе [2], где установлено, что оно справедливо, вообще говоря, только для полей с замкнутыми силовыми линиями (возможно на бесконечности) и неприменимо, например, к винтовому полю. Если плазма имеет резкую границу, то на этой границе $\nabla p \rightarrow \infty$ и условие (1) принимает вид $\nabla p \nabla U < 0$, т. е. плазма должна находиться по ту сторону от границы, где U меньше. Это условие было получено ранее в работе [1].

Таким образом, вопрос об удержании плазмы заданным магнитным полем сводится к исследованию потенциала U для этого поля. Рассмотрим с этой точки зрения различные частные случаи.

§ 2. Поле прямого тока

Поле прямого проводника с током \mathcal{J} равно, как известно, $H = \frac{2\mathcal{J}}{cr}$, отсюда $U = -\frac{2\pi r}{H} = -\frac{\pi c}{\mathcal{J}} r^2$. Как мы видим, потенциал U монотонно убывает с увеличением r . Это означает, что любая трубка с плазмой в таком поле будет вытесняться наружу в сторону увеличения r . Устойчивое равновесие возможно лишь в том случае, когда плазма удерживается от разлета какими-то стенками. Но это не означает, что давление на стенках должно быть велико. Согласно критерию устойчивости (1), плазма устойчива и в том случае, когда ее давление падает по направлению к стенкам, но при этом должно соблюдаться условие $-\frac{1}{p} \frac{dp}{dr} < \gamma \frac{1}{U} \frac{dU}{dr}$, т. е. $-\frac{1}{p} \frac{dp}{dr} < \frac{2\gamma}{r}$. Даже в случае хорошей теплопроводности, когда $\gamma = 1$, давление плазмы может падать как r^{-2} , т. е. довольно быстро. Таким образом, уже небольшого взаимодействия со стенками может оказаться достаточным для того, чтобы плазма была устойчивой*.

Что касается случая, когда давление падает в направлении к проводнику с током, то такое расположение всегда устойчиво. Это означает, между прочим, что если в созданную каким-то образом плазму ввести проводник с током, то плазма отодвигается от этого проводника и никакой дополнительной неустойчивости при этом не возникает.

§ 3. Ловушки с «охраняющими проводниками»

В работе С. И. Брагинского и Б. Б. Кадомцева [3] для стабилизации плазмы было предложено использовать «охраняющие проводники», которые должны как бы отгораживать плазму от слишком «экспансивного» магнитного поля. Среди всех возможных систем с охраняющими проводниками выделяются две простейшие — с прямыми стержнями и с кольцами, которые, естественно, следует проанализировать в первую очередь. В работе [3] подробно рассмотрен вопрос о поведении в таких системах полностью скинированной плазмы без вмороженного в нее поля. Здесь мы подойдем к системам с проводниками с противоположной стороны, а именно — рассмотрим, как будет вести себя в них плазма с низким давлением, т. е. с большим вмороженным полем. Другими словами, мы будем рассматривать эти системы как магнитные ловушки.

* Если проводник с током окружить стержнями с током, текущим в том же направлении, то плазма может быть устойчивой и в том случае, когда давление у стенок равно нулю (ср. § 3 и 4).

Начнем с рассмотрения системы с кольцами. Магнитное поле этой системы представлено качественно на рис. 1.

Мы предположим, что на оси z направление поля совпадает с направлением внешнего магнитного поля (что, впрочем, не существенно). Такая ситуация возникает при условии, что кольца короткозамкнутые и перед включением внешнего поля внутри колец поля не было: тогда полный поток внутри колец должен быть равен нулю. При таком поле внутри колец есть точки, например A , на которых поле обращается в нуль. Силовые линии, проходящие через эти точки, начерчены на рис. 1 пунктиром. Общей картины рис. 1 уже вполне достаточно для того, чтобы

написать уравнение для потенциала U . Силовые линии, проходящие через эти точки, начерчены на рис. 1 пунктиром. Общей картины рис. 1 уже вполне достаточно для того, чтобы

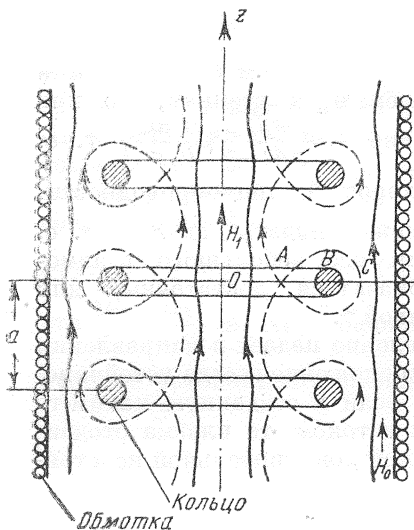


Рис. 1.

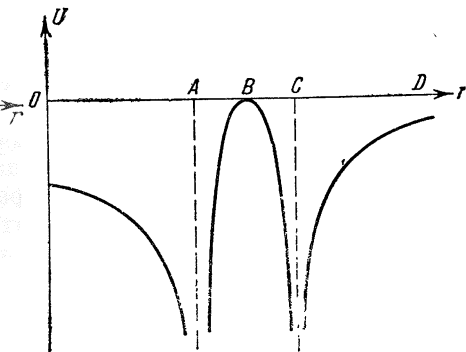


Рис. 2.

установить качественное поведение потенциала U . Так как система рис. 1 периодическая, то под U можно понимать интеграл по одному периоду $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$, где a — расстояние между соседними кольцами. Потенциал U есть функция силовой линии, поэтому его удобно рассматривать на плоскости $z = 0$, пересекающей все силовые линии. Качественно U имеет вид, представленный на рис. 2.

При $r = 0$ $U = -\frac{a}{H_1}$, где H_1 — некоторое среднее значение поля на оси z , в точке D $U \approx -\frac{a}{H_0}$, а в точках A и B , лежащих на «пунктирной» силовой линии, потенциал U логарифмически (поскольку в точке A поле линейно обращается в нуль) стремится к $-\infty$. Как мы видим, потенциал U имеет «яму» на силовой линии, проходящей через точку A , где

поле обращается в нуль. Не ограничивая себя условием отсутствия больших градиентов давления плазмы $p(r)$, мы примем здесь в качестве критерия устойчивости условие $\nabla p \nabla U < 0$. Тогда из рис. 2 следует, что любое такое расположение плазмы, когда ее давление убывает в направлении от «пунктирной» силовой линии, наверняка является устойчивым. Более того, если в пространство между кольцами и внешней обмоткой будет внесена каким-то образом плазма, то она сама начнет двигаться в сторону колец, т. е. в сторону падения потенциала U , до тех пор, пока не «уляжется» на пунктирную силовую линию. Следующая порция плазмы либо

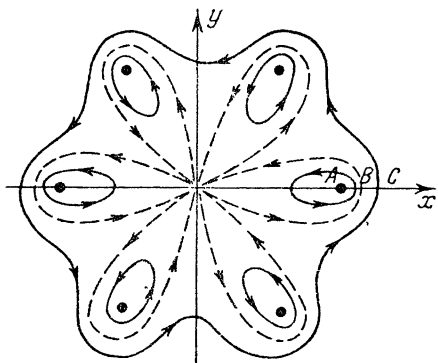


Рис. 3.

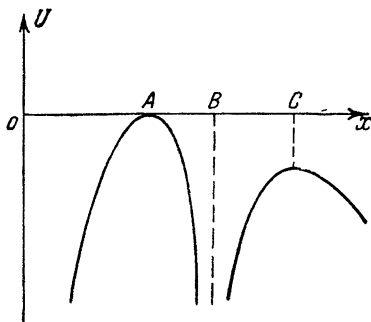


Рис. 4.

«ляжет» поверх первой, либо вытеснит ее на соседние линии в зависимости от того, давление которой из этих порций больше. (Мы предполагаем, что в плазме есть некоторая диссипация, которая «успокаивает» ее колебание около минимума потенциала U). Таким образом, уже при простой инжекции плазмы снаружи система сама будет стремиться к устойчивому равновесию.

Итак, система с кольцами является магнитной ловушкой для плазмы. Точно так же можно показать, что ловушкой является и система с прямыми стержнями. Действительно, поле и в этом случае (рис. 3) имеет силовые линии, проходящие через точку 0, где $H=0$, поэтому потенциал U обращается в $-\infty$ на этих линиях (рис. 4).

Как мы видим из рис 4, плазма устойчива, если она не выходит за пределы силовой линии, на которой потенциал U имеет максимум (точка C). Будучи устойчивыми, системы рис. 1 и 3 могут быть свернуты в тор. При этом потенциал U , конечно, немного изменится, в системе рис. 1, например, он возрастет на внутренней границе тора и уменьшится на его

внешней границе. Однако общий характер потенциала, в частности, наличие «ям», останется прежним и, следовательно, сохранятся устойчивые состояния.

Итак, системы с «охраняющими проводниками» являются устойчивыми в двух предельных случаях — как для плазмы без вмороженного поля, так и для плазмы, давление которой много меньше давления магнитного поля. Это дает основание думать, что данные системы обладают широким классом устойчивых равновесных состояний и в том случае, когда давление

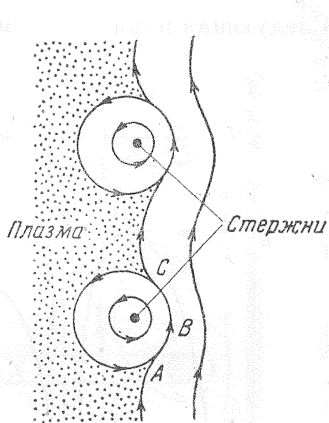


Рис. 5.

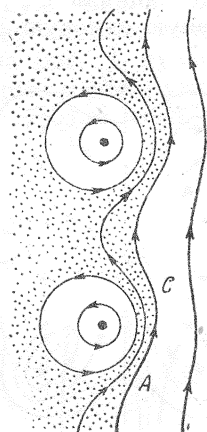


Рис. 6.

плазмы приближается к магнитному. В частности, значительно уменьшаются опасения относительно появления неустойчивости в системе с «охраняющими проводниками» при проникновении поля в плазму. Напомним, в чем они заключались. В работе [3] было показано, что полностью скинированная плазма располагается около стержней таким образом, что на ее границе появляются особые точки (A и C на рис. 5).

При таком расположении плазмы ее граница устойчива, так как магнитное поле во всех ее точках возрастает в направлении от поверхности плазмы, а этого, как показано в [3], вполне достаточно для устойчивости. Но как только поле начнет проникать в плазму за счет конечной проводимости, плазма выйдет на силовую линию ABC и около каждого стержня образуется плазменная «перемычка» или, вернее, «чехол» (AC на рис. 6). Возникает опасение, не появится ли неустойчивость в этих чехлах. Наличие вышеприведенных устойчивых решений для плазмы с низким давлением, имеющих точно такие же чехлы, хотя и не является строгим доказательством, но служит серьезным аргументом в пользу того, что чехлы могут быть

устойчивыми и в случае, когда давление плазмы приближается к магнитному.

Но даже и при отсутствии неустойчивости само наличие этих чехлов является серьезным недостатком рассматриваемых систем. Действительно, как кольца, так и стержни в тороидальной системе должны быть каким-то образом подвешены к стенкам камеры, причем подвески должны обязательно пройти сквозь плазменные чехлы, которые окружают стержни. Следовательно, в системе необходимо возникнут потери на подвесках. Оценим величину этих потерь. Пусть система содержит N подвесок, диаметр которых равен d . Предположим, что толщина чехла есть b и что плотность плазмы в чехле равна плотности внутри системы и равна n . Тогда число частиц, гибнущих в единицу времени на подвесках, равно $Nnvbd$, где v — тепловая скорость частиц. Отсюда время жизни системы с объемом V $t = \frac{nV}{Nnvbd} = \frac{V}{Nbdv}$. Полагая $\frac{V}{N} \sim 10^8 \text{ см}^3$, $v \sim 10^8 \text{ см/сек}$, $bd \sim 1 \text{ см}^2$, получаем $t \sim 10^{-2}$ сек., что хотя и меньше времени жизни системы относительно «размораживания» поля (см. [3]), но не слишком мало.

Гораздо более опасным является засорение плазмы газом испаряющихся подвесок за счет бомбардировки их горячими ионами. Испарение подвесок можно значительно уменьшить с помощью пропускания по ним тока настолько большого, чтобы магнитные силовые линии около подвесок были замкнутыми. При этом ионы смогут попасть на подвески только за счет диффузии, так что плотность выделения энергии на подвесках будет порядка $\frac{nT}{d} \frac{\rho^2}{\tau}$, где ρ — средний ларморовский радиус ионов, τ — среднее время ион-ионных соударений. Если $d \sim \rho$, то выделение энергии уменьшается в $\omega\tau = \frac{eH}{Mc} \tau$ раз по сравнению с выделением энергии на подвесках без тока. Однако утечка частиц из системы при этом вряд ли уменьшится. Вдоль каждой подвески образуется «канал» с очень малым магнитным полем, и потенциал U будет иметь «яму» на силовых линиях, проходящих через этот канал. По этой «яме» плазма будет проходить из системы, и так как уход происходит, в конечном счете, за счет перепада давления в «канале», то утечка плазмы останется прежней, если ширина «канала» будет порядка ширины подвески d .

§ 4. Ловушки с «гофрированным полем»

В работе автора [4] было показано, что «гофрирование» магнитного поля, т. е. наложение на однородное поле небольшого периодического изменения, приводит к стабилизации движения

отдельных частиц и, следовательно, к возможности создания магнитной ловушки. Теперь мы можем произвести гидродинамическое рассмотрение этих ловушек. Нам опять нужно найти потенциал U . Впрочем, качественный ход потенциала U нам уже известен: поле вблизи оси z в системе с кольцами (рис. 1) как раз и является гофрированным полем и для него потенциал U , как видно из рис. 2, монотонно убывает при удалении от оси. Это означает, что плазма с резкой границей, расположенная вблизи оси z , неустойчива: малые возмущения формы граничной поверхности будут нарастать со временем. Этот результат содержится и в работе Розенблюта и Лонгмайра [1]. Однако он еще не означает, что в системе с гофрированным полем невозможны устойчивые состояния. Согласно условию (1) устойчивость не нарушается, если давление не очень быстро падает с U . В области от оси z до «пунктирной» силовой линии $\frac{\nabla r U}{U} > 0$, и поэтому условие (1) принимает вид $\frac{\nabla r p}{p} > -\gamma \frac{\nabla r U}{U} = -\gamma \frac{\nabla r |U|}{|U|}$, т. е. плазма устойчива, если ее давление убывает с r не быстрее, чем $\text{const } |U|^{-\gamma}$. Так как U обращается в бесконечность на пунктирной силовой линии, то мы приходим к выводу, что существует широкий класс устойчивых расположений плазмы с нулевым давлением на пунктирной линии. При этом обмотка для создания магнитного поля (включая кольца) располагается снаружи от вакуумной камеры.

Разумеется, совершенно не обязательно, чтобы поле было в точности таким, как на рис. 1. Необходимо лишь, чтобы все гофрированное поле, включая пунктирные силовые линии, проходящие через точки с $H=0$, находилось бы внутри вакуумной камеры.

Как показано в [4], каждая отдельная частица в таком гофрированном поле совершает усиленный дрейф около оси системы. Поэтому в этой системе будет отсутствовать «перемешивание» температуры в направлении от оси к стенкам камеры, т. е. сохраняется нормальная замагниченная теплопроводность. (В этом отношении рассуждения работы [4] сохраняются).

Таким образом, в системе с гофрированным полем существуют устойчивые состояния плазмы с малой замагниченной теплопроводностью. Однако эти состояния отвечают, фактически, плазме, соприкасающейся со стенками, так как давление на пунктирной линии все время равно нулю.

При этом потери энергии из системы не могут быть снижены до такой степени, как в конфигурациях, оторванных от стенок. Это означает, по-видимому, что ловушки с гофрированным

полям должны практически выполняться как системы с охраняющими кольцами.

За обсуждение работы приношу благодарность академику М. А. Леонтовичу.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. Rosenbluth, C. Longmire. *Annals of Phys.*, 1, 120 (1957).
 2. Б. Б. Кадомцев, см. настоящий том, стр. 16.
 3. С. И. Брагинский, Б. Б. Кадомцев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 300.
 4. Б. Б. Кадомцев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 285.
-

Б. Б. Кадоццев

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИОННЫХ ПУЧКОВ *

1. В некоторых случаях в плазме могут иметь место направленные потоки ионов. Например, в плазме «ионного магнетрона», создаваемой с помощью ускорения ионов в радиальном электрическом поле, все ионы совершают приблизительно одинаковое периодическое движение: двигаясь в радиальном направлении, они изменяют направление скорости под действием магнитного поля, затем в некоторой точке поворачивают обратно и возвращаются в центральную область плазмы. Такое движение приводит к образованию двух встречных потоков ионов в радиальном направлении.

Аналогичная ситуация может возникнуть в адиабатической ловушке с «магнитными пробками» при создании плазмы путем накопления ионов от ионного источника. Такая плазма занимает кольцевую область с толщиной, равной диаметру ионного кружка, а ионы опять образуют два встречных потока в радиальном направлении.

Как известно, электронные пучки в плазме могут быть неустойчивыми. Аналогичное положение может иметь место и в данном случае.

2. Мы рассмотрим здесь неустойчивость плазмы по отношению к коротковолновым возмущениям, длина волны которых много меньше среднего ларморовского радиуса ионов.

Временная зависимость таких возмущений определяется в основном локальными характеристиками плазмы и слабо зависит от краевых условий. Поэтому направленные скорости ионных потоков и их плотность можно считать постоянными.

* Работа выполнена в 1958 г.

Кроме того, поскольку частота рассматриваемых колебаний много больше циклотронной частоты ионов $\Omega_H = \frac{eH}{Mc}$, в уравнении для ионов можно пренебречь силой Лоренца.

Введем систему координат, в которой ось z направлена вдоль магнитного поля, а ось x — вдоль пучка, и предположим, что все величины, описывающие малые колебания плазмы, изменяются по закону $e^{-i\omega t + iqz + ikx}$, где $\frac{q}{k} \ll 1$.

Частота колебаний ω может быть найдена из уравнений Максвелла и линеаризованных уравнений движения для электронов и ионов.

Движение электронов мы будем описывать гидродинамически, в соответствии с чем полагаем:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega v_x + i \frac{c_e^2 k}{\omega} (kv_x + qv_z) &= -\frac{e}{m} E_x + \frac{eH}{mc} v_y, \\ -i\omega v_y &= -\frac{e}{m} E_y - \frac{eH}{mc} v_x, \\ -i\omega v_z + i \frac{c_e^2 k}{\omega} (kv_x + qv_z) &= -\frac{e}{m} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из уравнений Максвелла в пренебрежении током смещения получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -i\omega \frac{4\pi e n_0}{c^2} \mathbf{v} + i\omega \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{j}_i, \quad (2)$$

где \mathbf{j} — полный, а \mathbf{j}_i — ионный ток, n_0 — плотность электронов. В рассматриваемом нами случае $k_y = 0$, $\frac{q}{k} \ll 1$ в ионном токе можно оставить только x -компоненту, которую можно записать в виде $j_x = -\frac{i\omega}{4\pi} \varepsilon E_x$, где ε — диэлектрическая постоянная ионов, зависящая, вообще говоря, от k (пространственная дисперсия). Если подставить в (2) $j_x = -\frac{i\omega}{4\pi} \varepsilon E_x$, $j_y = j_z = 0$, то из уравнений (1), (2) можно получить дисперсионное уравнение для ω . В пренебрежении величинами $\frac{q^2}{k^2}$

и $\frac{\omega^2}{\omega_H^2} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{c^2 k^2} \right)$ по сравнению с единицей оно имеет вид:

$$\omega_0^2 \left(\omega^2 \chi^2 - \omega_H^2 \cdot \frac{q^2}{k^2} \right) = -\varepsilon \left\{ \omega^2 \omega_H^2 \chi + c_e^2 k^2 \left(\omega^2 \chi^2 - \omega_H^2 \frac{q^2}{k^2} \right) \right\}, \quad (3)$$

где $\omega_H = \frac{eH}{mc}$, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$, $\chi = 1 + \frac{\omega_0^2}{c^2 k^2}$.

Совместно с уравнениями движения для ионов оно определяет зависимость частоты ω от k и q .

3. Ради простоты мы воспользуемся гидродинамическим приближением также и для ионов. Уравнения гидродинамики для малых одномерных колебаний пучка ионов с плотностью n_{0i} , скоростью v_0 и с «тепловым» разбросом по скоростям c_i в пренебрежении действием магнитного поля имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n + ik(nv_0 + n_{0i}v) &= 0, \\ -i\omega v + ik\left(v_0v + \frac{c_i^2}{n_{0i}}n\right) &= \frac{e}{M} E, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где n , v , E — представляют собой малые отклонения от стационарных значений соответственно плотности, скорости и электрического поля. Из уравнений (4) получаем

$$j_x = e(nv_0 + n_{0i}v) = i \frac{e^2 n_{0i}}{M} \cdot \frac{\omega}{(\omega - kv_0)^2 - k^2 c_i^2},$$

откуда находим диэлектрическую постоянную пучка:

$$\varepsilon_i = - \frac{4\pi n_{0i} e^2}{M} \frac{1}{(\omega - kv_0)^2 - k^2 c_i^2}. \quad (5)$$

Для двух встречных потоков ионов с плотностью каждого $n_{0i} = \frac{n_0}{2}$ ионная диэлектрическая постоянная равна

$$\varepsilon = - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \omega_0^2 \left\{ \frac{1}{(\omega - kv_0)^2 - k^2 c_i^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2 - k^2 c_i^2} \right\}, \quad (6)$$

где $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$. Подставляя это в (3), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(\omega^2 \chi^2 - \omega_H^2 \cdot \frac{q^2}{k^2} \right) \cdot [(\omega^2 - k^2 v_0^2)^2 - 2k^2 c_i^2 (\omega^2 + k^2 v_0^2) + k^4 c_i^4] - \frac{m}{M} (\omega^2 + k^2 v_0^2 - k^2 c_i^2) \cdot \left[\omega^2 \omega_H^2 \chi + c_e^2 k^2 (\omega^2 \chi^2 - \omega_H^2 \frac{q^2}{k^2}) \right] = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является кубическим для ω^2 и имеет, следовательно, три корня. Устойчивость имеет место только в том случае, когда все три корня ω^2 действительны и имеют положительный знак. В противном случае существует решение, в котором при действительном k ω имеет положительную мнимую часть, что приводит к нарастанию со временем ма-

лых возмущений. Так как отыскание корней уравнения (7) в общем виде представляет трудности, то мы рассмотрим два предельных случая $\frac{q^2}{k^2} \rightarrow 0$ и $\frac{q^2}{k^2} \gg \frac{v_0^2 k^2 \kappa^2}{\omega_H^2}$.

В случае $\frac{q^2}{k^2} \rightarrow 0$ один из корней также стремится к нулю.

Полагая $\omega^2 = \omega_1^2 \sim \frac{q^2}{k^2}$, получаем из (7):

$$\omega_1^2 = \frac{q^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_H^2}{\kappa^2} \cdot \frac{v_0^2 - c_i^2 - \frac{m}{M} c_e^2}{v_0^2 - c_i^2 - \frac{m}{M} c_e^2 - \frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{\kappa k^2}}. \quad (8)$$

При больших k $\kappa \approx 1$, и последнее слагаемое в знаменателе (8) будет больше первого при условии $k < \sqrt{\frac{m}{M} \frac{\omega_H}{v_0}} = \sqrt{\frac{M}{m} \frac{\Omega_H}{v_0}}$.

При малых k , когда $\kappa \sim \frac{\omega_0^2}{c^2 k^2} \gg 1$, $\frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{\kappa k^2} = \frac{H^2}{4\pi M n_0 v_0^2} \cdot v_0^2 \gg v_0^2$, если давление магнитного поля больше или порядка давления плазмы. Таким образом, при не очень больших k :

$$\omega_1^2 \approx \frac{M}{m} \frac{q^2}{k^2 \kappa} \cdot k^2 \left(v_0^2 - c_i^2 - \frac{m}{M} c_e^2 \right), \quad (9)$$

т. е. при достаточно малом «тепловом» движении, $v_0^2 > c_i^2 + \frac{m}{M} c_e^2$, плазма неустойчива относительно возмущений с малым q . Согласно (9), инкремент растет с q и достигает значения $\sim k v_0$ при $\frac{q^2}{k^2} \sim \kappa \cdot \frac{m}{M}$ [при дальнейшем увеличении q перестает быть справедливым разложение (7) по $\frac{q^2}{k^2}$].

Другие два корня при $\frac{q^2}{k^2} \rightarrow 0$ могут быть получены из (7), если положить в них $\frac{q^2}{k^2} = 0$. Пренебрегая опять величинами v_0^2 , c_i^2 , $\frac{m}{M} c_e^2$ по сравнению с $\frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{k^2 \kappa}$, получаем

$$\omega_2^2 \approx \frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{\kappa}, \quad \omega_3^2 \approx - (k^2 v_0^2 - k^2 c_i^2). \quad (10)$$

Как мы видим, при $v_0 > c_i$ $\omega_3^2 < 0$, т. е. опять имеется неустойчивость.

Рассмотрим второй случай, когда q^2/k^2 не является слишком малым: $q^2/k^2 \gg \frac{v_0^2 k^2 \kappa^2}{\omega_H^2}$. В этом случае один из корней

уравнения (7) $\omega_1^2 \approx \frac{\omega_H^2}{\chi^2} \cdot \frac{q^2}{k^2}$ соответствует колебаниям электронов при неподвижных ионах. Остальные два корня имеют порядок величины $k^2 v_0^2$; мы найдем их, пренебрегая в (7) ω^2 по сравнению с $\omega_H^2 q^2 / \chi^2 k^2$:

$$\begin{aligned} \omega^4 \left(1 + \frac{m}{M} \frac{k^2}{q^2} \chi \right) - \omega^2 \left[2k^2 v_0^2 + 2k^2 c_i^2 + \frac{m}{M} c_e^2 k^2 - \right. \\ \left. - \frac{m}{M} \frac{k^2}{q^2} \cdot \chi (k^2 v_0^2 - k^2 c_i^2) \right] + \\ + (k^2 v_0^2 - k^2 c_i^2) \left(k^2 v_0^2 - k^2 c_i^2 - \frac{m}{M} c_e^2 k^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Как мы видим, свободный член, а следовательно, и один из корней уравнения (11), является отрицательным при

$$0 < v_0^2 - c_i^2 < \frac{m}{M} c_e^2. \quad (12)$$

Итак, при условии $v_0 > c_i$ имеется целый ряд нарастающих решений с различными k и q . То обстоятельство, что мы использовали гидродинамическое приближение, не сказывается на этом выводе, так как затухание Ландау становится существенным только при $\frac{\omega}{k c_i} \leq 1$, или $v_0 \leq c_i$, когда гидродинамическое рассмотрение указывает на устойчивость.

4. Неустойчивость аналогичного вида может иметь место и в том случае, когда через плазму проходит пучок ионов малой плотности со скоростью, большей тепловой. Рассмотрим случай пучка, перпендикулярного к оси z . Ограничиваясь опять коротковолновыми возмущениями, мы будем считать пучок однородным и бесконечно широким. Пусть v_0 — скорость ионов в пучке, c_{i1} — их разброс по скоростям, $n_{01} = \gamma n_0$ — плотность пучка ($\gamma \leq 1$).

В гидродинамическом приближении диэлектрическая постоянная ионов плазмы и пучка равна

$$\varepsilon = -\frac{m}{M} \omega_0^2 \left\{ \frac{1}{\omega^2 - k^2 c_i^2} + \frac{\gamma}{(\omega - k v_0)^2 - k^2 c_{i1}^2} \right\}.$$

Подставляя это в (3), получаем дисперсионное уравнение для рассматриваемой нами задачи:

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\omega^2 - \frac{\omega_H^2 q^2}{k^2 \chi^2} \right) \left(\omega^2 - k^2 c_i^2 - \frac{m}{M} c_e^2 k^2 \right) - \frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{\chi} \omega^2 \right\} \left(\omega^2 - k^2 c_i^2 \right)^{-1} = \\ = \frac{m}{M} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - k v_0)^2 - k^2 c_{i1}^2} \cdot \left\{ \omega^2 \frac{\omega_H^2}{\chi} + c_e^2 k^2 \left(\omega^2 - \omega_H^2 \frac{q^2}{\chi^2 k^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем искать корень, близкий к kv_0 , в соответствии с чем полагаем $\omega = kv_0 + \nu$, где $|\nu| \ll kv_0$, и пренебрегаем ν по сравнению с kv_0 . Предполагая, что $v_0 \gg c_i \sim \sqrt{\frac{m}{M}} c_e$, мы пренебрежем также c_i и c_e в левой части (14), откуда получаем

$$\nu^2 = c_{i1}^2 k^2 + \gamma \frac{m}{M} \cdot \frac{\omega_H^2}{\chi} \cdot \frac{k^2 v_0^2 \left(1 + \frac{c_e^2 k^2 \chi}{\omega_H^2} \right) - \frac{q^2 c_e^2}{\chi}}{k^2 v_0^2 - \frac{\omega_H^2}{\chi^2} \left(\frac{q^2}{k^2} + \frac{m}{M} \chi \right)}. \quad (14)$$

Если $\gamma \ll 1$, то второе слагаемое становится существенным при условии, что частота kv_0 попадает в резонанс с частотой «магнито-электронных» [1] колебаний, т. е. при

$$D = k^2 v_0^2 - \frac{\omega_H^2}{\chi^2} \left(\frac{q^2}{k^2} + \frac{m}{M} \chi \right) \rightarrow 0.$$

Так как при $D \sim kv_0 \nu$ уже нельзя пренебрегать величиной ν в левой части уравнения (13), то второе слагаемое в (14) может быть больше первого лишь при условии

$$(c_{i1} k)^3 \leq \gamma \frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{\chi} \cdot kv_0 \quad \text{или, если} \quad \frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{\chi} \sim k^2 v_0^2, \\ \frac{c_{i1}}{v_0} \leq \gamma^{1/3}. \quad (15)$$

Отсюда видно, что пучок ионов в плазме может быть неустойчивым, если разброс ионов по скоростям очень мал.

За обсуждение работы приношу благодарность академику М. А. Леонтовичу.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Брагинский. ДАН СССР, 115, 475 (1957).

Б. Б. Кадомцев

О ДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

В работе показано, что медленные по сравнению с циклотронной частотой ионов движения плазмы могут быть описаны совокупностью уравнений гидродинамики для движения поперек магнитного поля и кинетических уравнений для продольного движения. Эти уравнения могут быть несколько упрощены в случае плазмы, давление которой много меньше магнитного.

Рассмотрен вопрос об устойчивости плазмы низкого давления в гофрированном поле.

§ 1. Уравнения движения плазмы в сильном магнитном поле

Если плазма находится в сильном магнитном поле, то даже в отсутствие соударений распределение электронов и ионов по скоростям обладает осевой симметрией относительно направления магнитного поля. Это обстоятельство, как было показано Чью, Гольдбергером и Лоу [1], приводит к тому, что при наличии определенной симметрии, вследствие которой отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий, медленные движения плазмы могут быть описаны уравнениями гидродинамики с неизотропным тензором давления. Если симметрия подобного рода отсутствует, то такое приближение неправильно. Как будет показано ниже, движение плазмы в этом случае описывается системой уравнений гидродинамики для движения поперек поля и кинетических уравнений для продольного движения.

* Работа выполнена в 1958 г.

Точные уравнения движения плазмы представляют собой систему уравнений Максвелла и кинетических уравнений с самосогласованными полями для ионов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = S \quad (1.1)$$

(где S — член столкновений) и аналогичного уравнения для электронов.

В разреженной высокотемпературной плазме средняя свободная длина пробега частиц может быть много больше характерного размера L , и в этом случае в (1.1) можно пренебречь членом столкновений.

В сильном магнитном поле средний ларморовский радиус ионов ρ_i много меньше L и третье слагаемое в (1.1) много больше первых двух. Действительно, если ω — характерная частота, которую мы будем считать порядка v_T/L , где v_T — тепловая скорость ионов, то первые два члена в (1.1) меньше третьего в $\frac{\omega}{\Omega_H} \sim \frac{\rho_i}{L}$ раз, где $\Omega_H = \frac{eH}{Mc}$ — циклотронная частота ионов.

Фактически только перпендикулярная компонента электрического поля \mathbf{E}_\perp является большой величиной; слагаемое с продольной компонентой \mathbf{E}_\parallel имеет тот же порядок величины, что и первые два члена в (1.1). Пренебрегая малыми величинами, имеем:

$$\left\{ \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

откуда следует, что $f(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v} - \mathbf{v}_d)$, где $\mathbf{v}_d = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}$ с есть скорость электрического дрейфа, а функция F обладает осевой симметрией относительно направления магнитного поля. Таким образом, в нулевом приближении электроны и ионы дрейфуют с одинаковыми скоростями \mathbf{v}_d поперек магнитного поля.

Это обстоятельство можно выразить и другим образом. Если ввести поперечные макроскопические скорости для ионов \mathbf{v}_0 и электронов \mathbf{v}_{0e}

$$n_i \mathbf{v}_0 = \int \mathbf{v}_\perp f_i d\mathbf{v}, \quad n_e \mathbf{v}_{0e} = \int \mathbf{v}_\perp f_e d\mathbf{v}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{v})}{H^2}$, n_i , n_e — плотности ионов и электронов соответственно, то мы можем сказать, что в нулевом прибли-

жении \mathbf{v}_0 и \mathbf{v}_0 совпадают, и $\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}]$. Поэтому первые два уравнения Максвелла можно приближенно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}], \quad (1.3)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \mathbf{v}_0 - n_e \mathbf{v}_{0e}), \quad (1.4)$$

где во втором уравнении мы пренебрегли током смещения. Будем считать, что плотность плазмы достаточно велика, так что ленгмюровская частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}}$ больше циклотронной частоты электронов $\omega_H = \frac{eH}{mc}$. При этом условии плазму можно считать квазинейтральной

$$n_e = n_i = n, \quad (1.5)$$

и это условие заменяет нам третье уравнение Максвелла $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e)$.

Уравнения (1.3), (1.4) совместно с уравнением

$$\text{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.6)$$

служат для определения самосогласованных полей.

Найдем теперь следующее приближение в кинетических уравнениях. При этом мы рассмотрим только уравнение для ионов — преобразование уравнения для электронов производится совершенно аналогично.

Уравнение (1.1) без члена столкновений запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f + \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \\ = -\frac{e}{Mc} [\mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \mathbf{H}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Левая часть этого уравнения является малой по сравнению с правой, и поэтому решение уравнения (1.7) можно искать в виде разложения по обратным степеням оператора, стоящего в правой части.

В уравнении (1.7) удобно перейти к новым переменным u, w, α , где $u = h\mathbf{v}$ есть продольная компонента скорости, w — поперечная компонента относительной скорости $w = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2} = (h\mathbf{v})^2$, $h = H/H$, α — фаза. Если ввести локальный триедр $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, где \mathbf{n} — нормаль к силовой линии, \mathbf{b} — бинормаль, то скорость частицы можно представить в виде

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + u\mathbf{h} + w \cos \alpha \mathbf{n} + w \sin \alpha \mathbf{b}$. В переменных u, w, α правая часть в уравнении (1.7) записывается в виде $\Omega_H \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ и, следовательно, в нулевом приближении $f = f_0(\mathbf{r}, t, u, w)$. В следующем приближении полагаем $f = f_0 + f_1$, пренебрегая f_1 в левой части (1.7):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_0 + \left\{ \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{h} + \frac{e}{M} \mathbf{E}\mathbf{h} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial u} + \\ & + \left\{ -\frac{u}{w} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{u}{w} \mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{h} - \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{w} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} - \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{w} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_0 + \right. \\ & \left. + \frac{e}{M} \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{w} (\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}]) \right\} \frac{\partial f_0}{\partial w} = \Omega_H \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Чтобы это уравнение было разрешимо относительно f_1 , должно, как известно, выполняться условие ортогональности левой части (1.8) к решению уравнения, сопряженного с $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0$. Одно условие разрешимости получается в результате усреднения (1.8) по α . С учетом условия $\mathbf{h}\mathbf{v}_0 = 0$ и следующего из уравнений (1.3), (1.6) соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{h} = (\mathbf{h}\nabla)_\perp \mathbf{v}_0 = (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{v}_0 - \mathbf{h} \{ \mathbf{h} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{v}_0 \}, \quad (1.9)$$

усреднение по α приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) f + u \mathbf{h}\nabla f + \left\{ \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{e}{M} \mathbf{E}\mathbf{h} + u \mathbf{v}_0 (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} + \right. \\ & \left. + (\mathbf{h}\nabla) \frac{v_0^2}{2} \right\} \frac{\partial f}{\partial u} - \left\{ \frac{uw}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{w}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \frac{w}{2} \mathbf{v}_0 (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} \right\} \frac{\partial f}{\partial w} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где мы опустили индекс «0» у функции распределения. Второе условие ортогональности является следствием нашего определения (1.2) скорости поперечного движения \mathbf{v}_0 , означающего, что $\int w f_1 d\mathbf{v} = 0$. Это условие получается путем умножения (1.8) на $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 - \mathbf{h}(\mathbf{h}\mathbf{v})$ и интегрирования по \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} & Mn \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} \right)_\perp + (\mathbf{v}_0 \nabla)_\perp \mathbf{v}_0 + u_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + u_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{h} + u_0 (\mathbf{h}\nabla)_\perp \mathbf{v}_0 \right\} + \\ & + \nabla_\perp p'_\perp + (p'_{||} - p'_\perp) (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} - en \left\{ \mathbf{E}_\perp + \left[\frac{\mathbf{v}_0}{c} \mathbf{H} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $u_0 = \frac{1}{n} \int f u dv$ — продольная компонента макроскопической скорости, p_{\perp}^i и p_{\parallel}^i — соответственно поперечное и продольное давление ионов:

$$p_{\perp}^i = \int \frac{Mw^2}{2} f dv, \quad p_{\parallel}^i = \int M u^2 f dv. \quad (1.12)$$

Аналогичные уравнения имеют место и для электронов. Если сложить уравнение (1.11) с аналогичным уравнением для электронов, то члены с электрическим полем сокращаются, члены с магнитным полем дают силу $\frac{1}{c} [\mathbf{jH}]$, давления складываются. Пренебрегая инерцией электронов и учитывая (9), мы запишем окончательно уравнение для поперечного движения в виде

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla) \frac{v_0^2}{2} + 2(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_0 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} \right\} + \\ + \nabla p_{\perp} - \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla) p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] = 0, \quad (1.13)$$

где $\rho = Mn$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{h} u_0$, $p_{\perp} = p_{\perp}^i + p_{\perp}^e$, $p_{\parallel} = p_{\parallel}^i + p_{\parallel}^e$.

Уравнение (1.13), совместно с уравнениями для давлений (1.12) и для полей (1.3)—(1.6) и кинетическими уравнениями для продольного движения ионов (1.10) и электронов, дает полное описание движения плазмы с частотой, значительно меньшей Ω_H . Как мы видим, эти уравнения являются первым приближением в разложении точных уравнений по степеням малого параметра ω/Ω_H .

Пользуясь этим регулярным методом, можно получить приближения более высоких порядков. В частности, нетрудно получить второе приближение, в котором учитываются дрейфовые потоки. Кроме того, в приведенных уравнениях можно учесть член столкновений. В уравнении (1.10) он описывал бы процесс установления максвелловского распределения, а в (1.11) привел бы к появлению силы трения между электронами и ионами, т. е. к диффузии плазмы за счет конечной проводимости. Учет членов столкновений во втором приближении приведет к поперечной вязкости и теплопроводности плазмы. Все эти эффекты являются малыми и в ряде задач, как, например, при исследовании устойчивости плазмы, могут не учитываться.

Вопрос о сочетании гидродинамического описания поперек силовых линий и кинетического вдоль линий рассматривался

в применении к малым колебаниям в работе [2]. Приведенный здесь метод обладает большей простотой и может быть использован для описания нелинейных течений плазмы.

§ 2. Плазма низкого давления

Если давление плазмы много меньше давления магнитного поля, то в приведенных выше уравнениях можно произвести дальнейшее разложение по степеням малого параметра $\frac{8\pi p}{H^2}$. Такое разложение производится совершенно аналогично тому, как это делается в обычной магнитной гидродинамике [3].

В случае магнитного поля с замкнутыми силовыми линиями можно ограничиться первым приближением по $\frac{8\pi p}{H^2}$. При этом уравнения (1.5), (1.6), а также (1.10) и аналогичное уравнение для электронов остаются без изменений; уравнение (1.4) принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (2.1)$$

а из уравнения (1.3) следует

$$\mathbf{v}_0 = \frac{[h\nabla\Phi]}{H}, \quad (2.2)$$

где Φ — функция r, t , удовлетворяющая условию

$$h\nabla\Phi = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение поперечного движения (1.13) для плазмы низкого давления принимает вид:

$$\int \operatorname{div} \left[\frac{h}{H}, \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + h(h\nabla) \frac{v_0^2}{2} + 2(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_0 (h\nabla) h \right) + \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp})(h\nabla) h \right] \frac{dl}{H} = 0, \quad (2.4)$$

где \mathbf{v}_0 дается соотношением (2.2), а интегрирование производится вдоль силовой линии.

Полученные уравнения мы применим к рассмотрению устойчивости плазмы низкого давления. Для простоты ограничимся случаем поля с осевой симметрией: это может быть поле адиабатической ловушки с «магнитными пробками» или гофрированное поле.

Условия равновесия получаются из (1.8), (2.4), если положить в них нулю $\mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0$, а также производную по времени. Если равновесное распределение плазмы обладает осевой симметрией, что мы будем предполагать в дальнейшем, то

условие, следующее из (2.4), удовлетворяется тривиальным образом. Второе условие имеет вид

$$u\mathbf{h}\nabla f_0 + \left\{ \frac{w^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} + \frac{e}{M} \mathbf{E}_0 \mathbf{h} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial u} - \frac{uw}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0, \quad (2.5)$$

где через f_0 обозначена равновесная функция распределения, $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi$ — электрическое поле в равновесии. С учетом $\operatorname{div} \mathbf{h} = -\frac{1}{H} (\mathbf{h}\nabla)H$, из (2.5) получаем, что f_0 вдоль силовой линии является функцией только I , ε , где $I = \frac{w^2}{H}$ — адиабатический инвариант, $\varepsilon = u^2 + w^2 + \frac{2e}{M} \varphi$ — умноженная на $\frac{2}{M}$ энергия иона.

Предположим теперь, что на равновесное состояние плазмы наложено малое возмущение. Полагаем

$$f = f_0 + f', \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad p_{\perp} = p_{\perp}^0 + p'_{\perp}, \quad p_{\parallel} = p_{\parallel}^0 + p'_{\parallel},$$

где величины со штрихами представляют собой отклонение от равновесного состояния, подставляем это в (1.10), (2.4) и пренебрегаем малыми высших порядков. При этом мы должны считать малой величиной также и скорость \mathbf{v}_0 . Как следует из (2.1), (2.2), $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = -\frac{\mathbf{v}_0 \nabla H}{H}$, поэтому линеаризованное уравнение (1.10) в переменных I , ε можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial t} + u (\mathbf{h}\nabla) f' + \mathbf{v}_0 \nabla f' + \left\{ \frac{e}{M} \mathbf{E}' \mathbf{h} \cdot 2u - \mathbf{v}_0 \nabla (u^2) + \right. \\ \left. + 2u^2 \mathbf{v}_0 (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $u = \sqrt{\varepsilon - IH - \frac{2e}{M} \varphi}$, $f' = f'(r, t, I, \varepsilon)$, $f_0 = f_0(r, I, \varepsilon)$, причем функция f_0 постоянна вдоль силовой линии. Учитывая, что вследствие (2.1) $(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = -\frac{\nabla_{\perp} H}{H}$ и что

$$\operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{h}}{H}, \nabla p_{\perp} - 2p_{\perp} \frac{\nabla H}{H} \right] = 0,$$

запишем линеаризованное уравнение (2.4) в виде

$$\int \operatorname{div} \left[\frac{\mathbf{h}}{H}, \rho \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (p'_{\parallel} + p'_{\perp}) \frac{\nabla H}{H} \right] \frac{dl}{H} = 0. \quad (2.7)$$

Задача об устойчивости плазмы низкого давления состоит в исследовании решения уравнений (2. 6), (2. 7).

Гидродинамическое исследование устойчивости плазмы [4], [5] показывает, что квадрат собственной частоты ω^2 малых колебаний плазмы является действительной величиной, поэтому устойчивость теряется при переходе частоты ω через нуль. Можно думать, что и при кинетическом рассмотрении будет иметь место близкий к этому результат. Поэтому для получения критерия устойчивости можно рассмотреть только случай частот, близких к нулю. При этом в уравнении (2. 6) второе слагаемое оказывается много больше остальных, поскольку оно описывает процесс установления функции распределения вдоль силовой линии, происходящий с тепловой скоростью. Поэтому уравнение (2. 6) можно решать в виде разложения по обратным степеням оператора u ($h\nabla$). В первом приближении получаем $h\nabla f' = 0$, т. е. f' является постоянной вдоль силовой линии. Условие ортогональности получается с помощью умножения (2. 6) на u^{-1} и последующего интегрирования вдоль силовой линии. Слагаемое с электрическим полем при этом пропадает, поскольку при колебаниях плазмы низкого давления $\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

Если ввести смещение плазмы от положения равновесия η , так что $\mathbf{v}_0 = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, то из соотношения ортогональности получим:

$$f' = - \left\{ \int \eta \nabla f_0 \frac{dl}{u} - 2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \cdot \int H \eta \nabla \left(\frac{u}{H} \right) dl \right\} \left(\int \frac{dl}{u} \right)^{-1}. \quad (2. 8)$$

Введем ортогональную криволинейную систему координат $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ такую, чтобы линии ξ_3 совпадали с силовыми линиями, а координата ξ_2 представляла собой азимут. В этой системе координат $\eta \nabla f_0 = - \frac{\sqrt{g_{33}}}{H \sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \frac{\partial f_0}{\partial \xi_1}$, где g_{33} — компонента метрического тензора, $g = \text{Det } g_{ik}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Phi$. Согласно условию $\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} = 0$, величина $\frac{\sqrt{g_{33}}}{H \sqrt{g}}$ является постоянной вдоль силовой линии. Так как Ψ и f_0 также не зависят от ξ_3 , то выражение $\eta \nabla f_0$ в (2. 8) можно вынести за знак интеграла. Учитывая, что $dl = \sqrt{g_{33}} d\xi_3$ и что согласно условию $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ выражение $\sqrt{g_{33}} H$ не зависит от ξ_1 , мы можем вынести за знак второго интеграла в (2. 8) оператор $(\eta \nabla)$. Таким образом,

$$f' = - \eta \nabla f_0 + 2 (\eta \nabla \int u dl) \left(\int \frac{dl}{u} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (2. 9)$$

Заметим, что взятый с обратным знаком коэффициент перед $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$ в (2.9) представляет собой изменение энергии частицы $\delta \varepsilon$ при условии сохранения продольного адиабатического инварианта J :

$$\delta J = \delta \int u dl = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \eta \nabla J = 0.$$

Обратимся теперь к уравнению (2.7). Оно может быть получено из вариационного принципа $\delta \int L dt = \delta \int (T - V) dt = 0$, где кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (2.10)$$

а потенциальная

$$V = -\frac{1}{2} \int \eta \frac{\nabla H}{H} (p'_{\parallel} + p'_{\perp}) dx. \quad (2.11)$$

Действительно, в (2.11) входит только радиальная компонента смещения $\eta^1 \sim \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2}$. Этой же компоненте пропорциональна сумма $p'_{\parallel} + p'_{\perp}$. Поэтому при варьировании (2.11) можно проварьировать только первый множитель, удвоив затем результат. Учитывая, что варьирование по $\eta = \frac{[h \nabla \Psi]}{H}$ означает фактически варьирование по Ψ , и что $h \nabla \Psi = 0$, нетрудно убедиться в правильности вариационного принципа.

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия была положительна.

Подставляя в (2.11)

$$p'_{\parallel} + p'_{\perp} = \int M \left(u^2 + \frac{w^2}{2} \right) f dv = \frac{\pi M}{2} \int \left(u^2 + \frac{IH}{2} \right) \frac{H}{u} dI d\varepsilon, \quad (2.12)$$

получаем

$$V = \frac{\pi}{2} \int \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{gH}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \right)^2 \cdot W_i(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.13)$$

где

$$W_i = M \int \left(u^2 + \frac{IH}{2} \right) \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \xi_1} - 2 \frac{\partial J}{\partial \xi_1} \left(\int \frac{dl}{u} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right\} \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \frac{dI d\varepsilon}{uH} dl. \quad (2.14)$$

Добавляя сюда энергию электронов, получаем следующий критерий устойчивости:

$$W_i + W_e > 0, \quad (2.15)$$

где W_i дается формулой (2.14), а W_e — аналогичное выражение для электронов.

Критерий (2.15), в отличие от гидродинамического, в общем виде выглядит довольно сложно. В случае резкой границы у плазмы он значительно упрощается и в точности совпадает с критерием Розенблюта и Лонгмайра [6]. Некоторое упрощение имеет место также в случае максвелловского распределения электронов и ионов по скоростям с постоянной температурой вдоль силовых линий. При этом $E_0 = 0$, и условие (2.15) приводится к виду

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} < \frac{\pi}{2} \int \left(\frac{M^2}{T} f_0 + \frac{m^2}{T_e} f_{0e} \right) \left(\frac{\partial I}{\partial \xi_1} \right)^2 \left(\int \frac{dl}{u} \right)^{-1} dI d\varepsilon, \quad (2.16)$$

где $U = - \int \frac{dl}{H}$, $J = \int u dl = \int \sqrt{\varepsilon - IH} dl$, f_{0e} — функция распределения электронов, T — температура.

Условие (2.16) означает, что давление плазмы не может слишком быстро возрастать с увеличением «потенциальной энергии» U , как это имело место и при гидродинамическом рассмотрении [3].

За обсуждение работы выражаю благодарность академику М. А. Леонтовичу.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Chew, M. Goldberger, F. Low. Proc. Roy. Soc., A236, 112 (1956).
2. S. Chandrasekhar, A. Kaufman, K. Watson. Annals of Phys., 2, 433 (1957).
3. Б. Б. Радомцев. Настоящий том, стр. 16.
4. K. Hain, R. Lüst, A. Schlüter. Zs. f. Naturforsch., 12a, 833 (1957).
5. I. Bernstein, E. Frieman, M. Kruskal, R. Kulsrud. Proc. Roy. Soc., A244, 17 (1958).
6. M. Rosenbluth, C. Longmire. Annals of Phys., 1, 120 (1957).

Б. Б. Кадоцьев

О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ *

В работе рассмотрен вопрос о неустойчивости равновесных магнитогидродинамических конфигураций с замкнутыми силовыми линиями по отношению к определенному виду возмущений.

При исследовании устойчивости магнитогидродинамических конфигураций с замкнутыми силовыми линиями особый интерес представляют возмущения, соответствующие «перестановке» соседних силовых трубок. В самом деле, в плазме с замкнутыми силовыми линиями отдельные силовые трубки с плазмой могут перемещаться на значительные расстояния без заметного искажения магнитного поля, которое могло бы приостановить такое движение. Поэтому отсутствие устойчивости по отношению к такого рода возмущениям приведет, очевидно, к конвективному перемешиванию силовых трубок с плазмой — простейшему виду турбулентности в плазме.

Так как с точки зрения стабилизации плазмы представляют особый интерес неоднородные магнитные поля, то является желательным получить условия конвективной неустойчивости без ограничения симметрии системы. Однако точное рассмотрение этой задачи с помощью кинетического уравнения представляет значительные трудности, поэтому мы воспользуемся гидродинамическим приближением.

Если ввести смещение $\eta(r)$ данного участка плазмы из положения равновесия, то уравнение для малых колебаний плазмы может быть записано [1,2] в виде

* Работа выполнена в 1958 г.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \nabla (\eta \nabla p_0) + \gamma \nabla (p_0 \operatorname{div} \eta) + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\eta \mathbf{H}], \mathbf{H}] + \\ + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} [\eta \mathbf{H}]], \quad (1)$$

где ρ_0 — плотность, p_0 — давление плазмы, γ — показатель адиабаты, \mathbf{H} — равновесное магнитное поле.

Уравнение (1), как было показано в работах [1, 2], и для случая $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ в работе [3], является самосопряженным и может быть получено из вариационного принципа $\delta \int L dt = 0$, где $L = \int (\mathbf{T} - V) dt = 0$, где $\mathbf{T} = \frac{1}{2} \int \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dr$ — кинетическая, а V — потенциальная энергия плазмы. Отвлекаясь от граничных эффектов, что справедливо при условии обращения в нуль нормальной компоненты смещения η_n на границе плазмы, имеем:

$$V = \frac{1}{2} \int \gamma p_0 (\operatorname{div} \eta)^2 dr - \frac{1}{2} \int \eta \nabla (\eta \nabla p_0) dr + \\ + \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{rot} [\eta \mathbf{H}])^2 dr - \frac{1}{8\pi} \int \eta [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} [\eta \mathbf{H}]] dr. \quad (2)$$

Для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы при всех возмущениях потенциальная энергия V была положительна. Введем для удобства криволинейную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с силовыми линиями в качестве одного из семейств координатных линий, а именно ξ_3 . Координату ξ_2 выбираем таким образом, чтобы $\frac{\partial p_0}{\partial \xi_2} = 0$, т. е. чтобы поверхности $\xi_1 = \text{const}$ совпадали с поверхностями $p_0 = \text{const}$.

Если потенциальную энергию (2) записать в криволинейных координатах, то во всех слагаемых, кроме первого, контрвариантная компонента смещения η^3 выпадает. Минимизирование первого слагаемого в (2) по η^3 приводит (ср. [4]) к условию:

$$\operatorname{div} \eta = - \frac{1}{U} \int \frac{\operatorname{div} \eta_{tr}}{H} dl, \quad (3)$$

где

$$U = - \int \frac{dl}{H}, \quad (4)$$

а интегралы в (3), (4) берутся вдоль силовых линий. Через η_{tr} в (3) обозначена составляющая смещения, третья компонента которой η_{tr}^3 равна нулю: $\eta_{tr} = \{\eta^1, \eta^2, 0\}$. Мы рассмот-

рим здесь только возмущения, с η^1, η^2 , не зависящими от ξ_3 . Тем самым мы получим лишь необходимые, но не достаточные условия устойчивости плазмы в магнитном поле с замкнутыми силовыми линиями.

Потенциальная энергия (2) для таких возмущений имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V = & -\frac{1}{2} \int \gamma p_0 \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H U} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} U \chi^1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} U \chi^2 \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 + \\
 & + \frac{1}{8\pi} \int W \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H} \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_2} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 - \\
 & - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g} H} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} \cdot \chi^1 \left(\frac{\partial U \chi^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U \chi^2}{\partial \xi_2} + U \frac{\partial \chi^1}{\partial \xi_1} + U \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1 d\xi_2, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где $\chi^i = \frac{\sqrt{g} H}{\sqrt{g_{33}}} \eta^i$, g_{33} — компонента метрического тензора, $g = \text{Det } g_{ik}$,

$$W = \int H dl. \quad (6)$$

Заметим, что из условия равновесия

$$\nabla p_0 = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] \quad (7)$$

следует $\frac{4\pi}{c} j^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_2} H \sqrt{g_{33}} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{H g_{23}}{\sqrt{g_{33}}} = 0$, откуда с помощью интегрирования по ξ_3 получаем $\frac{\partial W}{\partial \xi_2} = 0$, т. е. W является постоянной на поверхности $p_0 = \text{const}$. Аналогичным образом, интегрируя вдоль силовой линии первую компоненту (7), деленную на H , получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_1} = 4\pi U \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}, \quad (8)$$

откуда следует, что U также является функцией только ξ_1 .

Учитывая это обстоятельство, получаем, что подынтегральное выражение в (5) является квадратичной формой относительно $\left(\frac{\partial \chi^1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \chi^2}{\partial \xi_2} \right)$ и χ^1 . Условия того, что эта форма является положительно определенной, имеют вид:

$$-\frac{W}{4\pi} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \right)^2 < \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1} < \frac{\gamma p_0}{|U|} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} \right)^2,$$

или, так как W и U зависят лишь от ξ_1 ,

$$-\frac{W}{4\pi} \left(\frac{\nabla U}{U} \right)^2 < \nabla U \nabla p_0 < \gamma p_0 \frac{(\nabla U)^2}{|U|}. \quad (9)$$

Неравенства (9) и являются условиями отсутствия конвективной неустойчивости. Второе неравенство в (9), совпадающее с условием устойчивости плазмы низкого давления [4], показывает, что давление плазмы не может слишком быстро убывать с U . Первое неравенство показывает, что в плазме, вообще говоря, имеет место неустойчивость при наличии крутого спада давления в сторону возрастания U .

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hain, R. Lüst, A. Schlüter. *Zs. f. Naturforsch.*, **12a**, 833 (1957).
 2. I. Bernstein, E. Frieman, M. Kruskal, R. Kulsrud. *Proc. Roy. Soc.*, **A244**, 17 (1958).
 3. С. И. Брагинский, Б. Б. Кадомцев, см. настоящее издание, т. 3, стр. 300.
 4. Б. Б. Кадомцев, см. настоящий том, стр. 16.
-

Р. З. Сагдеев

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЯХ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ *

Найдено решение для установившихся магнитозвуковых волн большой амплитуды, распространяющихся поперек магнитного поля.

Известно, что движение плазмы поперек магнитного поля даже в отсутствие столкновений описывается уравнениями гидродинамического типа, если пространственные и временные градиенты всех величин достаточно малы $R_n \ll L$, $\frac{1}{\omega_n} \ll T$, где R_n — ларморовский радиус электрона (иона), L и T — характерные пространственный и временной масштабы. Однако для произвольного движения плазмы, вообще говоря, по истечении некоторого времени эти условия перестанут выполняться.

Действительно, формальное сходство системы уравнений, описывающих движение разреженной плазмы поперек магнитного поля, с уравнениями обычной газодинамики при $\gamma=2$ (γ — показатель адиабаты), позволяет непосредственно обобщить на случай разреженной плазмы в магнитном поле известное решение Римана для одномерных бегущих волн. Согласно этому решению, произвольный профиль возмущения, распространяющегося в газе, с течением времени будет деформироваться таким образом, что крутизна его переднего фронта будет непрерывно возрастать. Момент «опрокидывания» фронта в обычной газодинамике отождествляется с моментом образования ударной волны, резкий перепад скорости и температуры

* Работа выполнена в 1958 г.

на фронте которой приводит к сильному возрастанию энтропии вследствие вязкости и теплопроводности. В разреженной плазме, однако, картина образования разрыва должна протекать иначе, так как столкновения не играют роли. В [1] нами была выдвинута гипотеза о возможности ударной волны и в этом случае. В качестве механизма, приводящего к неадиабатичности, рассматривалось несохранение магнитного момента ионов в поле с большими градиентами. Если проследить за изменением энергии ларморовского вращения заряда на скачке магнитного поля, что могло бы служить простейшей идеализацией процессов внутри фронта волны, то окажется, что дополнительное (неадиабатическое) возрастание энергии ларморовского вращения отдельных ионов еще не означает неадиабатического возрастания энергии хаотического движения (т. е. величины $(V - \bar{V})^2$), так как происходит группировка фаз вращения ионов на ларморовской окружности. Эта группировка фаз приводит к тому, что суммарный локальный заряд ионов будет осциллировать. В самосогласованной задаче это должно привести к возникновению колебаний. Расстояние, на котором эти колебания затухнут, будет определять ширину ударной волны. Затухание таких колебаний в принципе может иметь место и в отсутствие столкновений (например, вследствие механизма Ландау или из-за «размешивания» фаз в неоднородном магнитном поле).

В обычной газовой динамике единственным типом установившегося нетривиального движения является ударная волна, причем для исследования структуры такой волны необходимо искать решения уравнений газодинамики (включающих диссипативные члены), зависящие от переменной $\xi = x - ut$, где u — скорость волны.

В разреженной плазме соответственно структура гипотетической ударной волны должна автоматически описываться решением системы кинетических уравнений и уравнений Максвелла (без ограничения малостью градиентов), зависящим от переменной $\xi = x - ut$. Кроме того, в разреженной плазме, являющейся двухкомпонентной системой и обладающей поэтому большим количеством степеней свободы, чем одноатомный газ, могут существовать установившиеся движения ($\xi = x - ut$), отличные от ударной волны.

Ниже мы найдем одно из таких решений, описывающее стационарную магнитозвуковую волну большой амплитуды, распространяющуюся поперек магнитного поля.

Пусть волна движется вдоль оси x , а магнитное поле направлено по оси z . Тогда кинетическое уравнение для функции распределения ионов имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{M} \left(E_x + \frac{v_y}{c} H \right) \frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{e}{M} \left(E_y - \frac{v_x}{c} H \right) \frac{\partial f}{\partial v_y} = 0. \quad (1)$$

Электроны для простоты будем предполагать «холодными» ($T=0$). Будем также считать, что для них применимо дрейфовое приближение ($v_{др} = c \frac{[EH]}{H^2}$, $r_{He} \ll L$). (L — характерный размер, r_{He} — ларморовский радиус электрона).

Уравнение непрерывности для электронов в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} n \frac{E_y}{H} = 0. \quad (2)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнения Максвелла для самосогласованного поля:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi e (N - n) \quad (N = \int f d\nu), \quad (3)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} e \left(nc \frac{E_x}{H} - \int v_y f d\nu \right), \quad (4)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5)$$

(током смещения мы пренебрегаем).

Будем рассматривать случай, когда справедливы следующие допущения (границы применимости их будут рассмотрены ниже):

а) линейные размеры возмущенной области значительно меньше ларморовского радиуса ионов и можно не учитывать действие магнитного поля на ионы в волне;

б) в уравнении (4) будем пренебрегать ионным током по сравнению с электронным.

Тогда для решения, зависящего от $\xi = x - ut$, получим систему уравнений

$$(v_x - u) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{eE_x}{M} \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dE_x}{d\xi} = 4\pi e (N - n), \quad (7)$$

$$-\frac{dH}{d\xi} = 4\pi e \frac{n_0}{H_0} E_x, \quad (8)$$

$$\frac{n}{H} = \frac{n_0}{H_0}, \quad (9)$$

n_0, H_0 — невозмущенные плотность и магнитное поле (пусть $n_0 = N_0$).

Принимая во внимание уравнение (8), находим, что решение для функции распределения $f(\xi, v_x)$ ионов имеет вид

$$f = f_0 \left[\left(u \mp \sqrt{(v_x - u)^2 + \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}} \right)^2 \right],$$

где $f_0(v_x^2)$ — невозмущенная функция распределения ионов. Знак — при $v_x < u$, + при $v_x > u$. Подставляя найденное решение в (7) и исключая E_x с помощью (8), получим уравнение для H

$$-\frac{d^2 H}{d\xi^2} = (4\pi e)^2 \frac{n_0}{H_0} \times \left(\int f_0 \left[\left(u \mp \sqrt{(v_x - u)^2 + \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}} \right)^2 \right] dv_x - \frac{n_0}{H_0} H \right). \quad (10)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка для H с граничным условием: $H \rightarrow H_0, \frac{dH}{d\xi} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \xi_0$.

Выберем сначала f_0 в виде δ -функции, что соответствует «холодным» ионам $f_0(v_x^2) = n_0 \delta(v_x)$. В этом случае уравнение (10) примет вид

$$-\frac{d^2 H}{d\xi^2} = (4\pi e)^2 \frac{n_0^2}{H_0} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}}} - \frac{H}{H_0} \right). \quad (11)$$

Интегрируя один раз, будем иметь

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dH}{d\xi} \right)^2 = \frac{(4\pi e)^2 n_0^2}{H_0^2} \frac{H^2}{2} + \frac{(4\pi e)^2 n_0^2 u}{H_0^2} \sqrt{u^2 - \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}} + C. \quad (12)$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия $\frac{dH}{d\xi} = 0$ при $H = H_0$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{dH}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{(4\pi e)^2}{H_0^2} n_0^2 (H^2 - H_0^2) + 2 \frac{(4\pi e)^2 n_0^2 u}{H_0^2} \left(\sqrt{u^2 - \frac{(H - H_0)H_0}{2\pi n_0 M}} - u \right)}, \quad (13)$$

Если выбрать определенный знак перед корнем в (13), то нельзя построить физически разумного решения для H на всей оси x . Существуют, однако, решения всюду непрерывные (до второй производной включительно, в которых при некотором $\xi = \xi_1$ производная $\frac{dH}{d\xi}$ меняет знак. В этой точке H достигает своего максимального значения H_1 . Уравнение $\frac{dH}{d\xi}(\xi_1) = 0$ связывает амплитуду магнитного поля H_1 со скоростью распространения волны и играет роль, аналогичную дисперсионному уравнению

$$\frac{H_1^2}{2} + 4\pi n_c M u \sqrt{u^2 - \frac{(H_1 - H_0)H_0}{2\pi n_0 M} - \frac{H_0^2}{2}} - 4\pi n_0 M u^2 = 0. \quad (14)$$

Оно имеет действительное решение:

$$u^2 = \frac{(H_1 + H_0)^2}{16\pi n_0 M} \quad (15)$$

только при $H_1 \leq 3H_0$.

Из (15) видно, что скорость волны при уменьшении амплитуды стремится к $\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$, а при возрастании до максимально возможной ($H_1 = 3H_0$) $u \rightarrow 2 \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$. Интегрирование (13) дает профиль изменения H в такой волне. Профиль решения оказывается симметричным относительно $\xi = \xi_1$ и представляет собой одиночный импульс магнитного поля с шириной

$$\delta \sim \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M \Omega_0}},$$

где $\Omega_0^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{M}$.

Величина δ зависит от плазменной ионной частоты Ω_0 , поэтому можно ожидать, что в такой волне существует эффект отступления от квазинейтральности (допущению о квазинейтральности соответствует переход $\Omega_0 \rightarrow \infty$).

Теперь мы должны обосновать принятые ранее допущения. Компонента скорости вдоль оси y , приобретаемой ионом внутри волны под действием магнитного поля $v_y \sim \frac{e}{Mc} H_1 v_x \times \frac{\delta}{u} \sim \frac{\Omega_H}{\Omega_0} v_x$. Сравнивая с $c \frac{E_x}{H}$, получим условие пренебрежимой малости ионного тока в сравнении с электронным (учитывая, что $v_x \sim \frac{e}{M} E_x \cdot \frac{\delta}{u}$) $\Omega_H^2 \ll \Omega_0^2$.

Так как движение электронов рассматривалось в дрейфовом приближении, то окончательно критерий применимости полученных результатов примет вид

$$mc^2 \ll \frac{H^2}{4\pi n} \ll Mc^2$$

где ω_H и Ω_H — ларморовские частоты электронов и ионов.

Рассмотрим теперь случай, когда невозмущенное распределение ионов максвелловское,

$$f_0 = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T}} \sqrt{M} e^{-\frac{Mv_x^2}{2T}}$$

(электроны по-прежнему холодные).

Тогда N в уравнении (10) для H имеет вид

$$N = \frac{n_0 \sqrt{M}}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{Mu^2}{2T}} 2 \int_{\sqrt{\beta}}^{\infty} \left(e^{-\frac{M}{2T}(t^2-2ut)} + e^{-\frac{M}{2T}(t^2+2ut)} \right) \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\beta}}, \quad (16)$$

где

$$\beta = \frac{(H - H_0) H_0}{2\pi n_0 M}.$$

Подставляя (16) в (10) и интегрируя один раз, получим уравнение для скорости распространения волны большой амплитуды с учетом теплового движения:

$$\begin{aligned} 8\pi n_0 M \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} \int_{\sqrt{\beta}}^{\infty} t \sqrt{t^2 - \beta} \left(e^{-\frac{M}{2T}(t-u)^2} + e^{-\frac{M}{2T}(t+u)^2} \right) dt + H_1^2 = \\ = 8\pi n_0 M \sqrt{\frac{M}{2\pi T}} \int_0^{\infty} t^2 \left(e^{-\frac{M}{2T}(t-u)^2} + e^{-\frac{M}{2T}(t+u)^2} \right) dt + H_0^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Это уравнение легко решить в случае, если $Mu^2 \gg T$. В нулевом приближении связь между u и H_1 определяется уравнением (15). Найдем поправку u_1 к скорости волны, обусловленную влиянием теплового движения. Разлагая (17) по степеням T и ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$u_1 = \frac{2 \frac{T}{M} \left(\sqrt{u_0^2 - \beta} - \frac{3}{2} u_0 \right)}{2u_0^2 - \beta - 2u_0 \sqrt{u_0^2 - \beta}}, \quad (18)$$

где $u_0 = \frac{H_1 + H_0}{4\sqrt{\pi n_0 M}}$.

В этом выражении нельзя устремлять β к нулю (слабая волна), так как при $\beta = 0$ знаменатель обращается в нуль. Это связано, по-видимому, с тем, что в линейной теории существует так называемое «затухание Ландау», обусловленное тепловым движением, и нет установившейся волны.

В заключение приношу благодарность академику М. А. Леонтовичу и Д. А. Франк-Каменецкому за интерес к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, А. А. Веденов. О механизме инжекций в атмосферах звезд. Доклад на VI Всес. совещании по космогонии, Москва, 4—6 июня 1957 г. (будет опубликовано в Трудах совещания).
-

А. И. Морозов, Л. С. Соловьев

О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА *

Рассмотрены вопросы гашения колебаний плазменного цилиндра с помощью различных экранов, расположенных над поверхностью плазмы.

§ 1. Введение

В тороидальных системах плазменный шнур может существовать значительные промежутки времени. Под действием как внутренних, так и внешних причин этот шнур непрерывно колеблется. Спектр этих колебаний теоретически изучен достаточно хорошо [1], однако вопрос о гашении этих колебаний фактически не исследовался. В данной работе рассмотрено гашение колебаний плазменного шнура с помощью джоулевых потерь в кожухе. Мы увидим, что можно так подобрать условия, чтобы волна затухала за время нескольких колебаний.

В работе исследуются только высокочастотные колебания шнура и не исследуются медленные «ползания» шнура. Последние должны подавляться совсем другими средствами, хотя бы так, как они подавляются теперь, т. е. с помощью толстого медного кожуха.

Прежде чем переходить к исследованию электромагнитного гашения колебаний плазменного шнура, остановимся кратко на некоторых результатах [3], касающихся взаимодействия нитей с током, движущихся вблизи поверхности среды с заданными $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

Рассмотрим прямую нить с током \mathcal{J} , движущуюся параллельно границе раздела, на расстоянии l от нее, со ско-

* Работа выполнена в 1958 г.

ростью v . Введем систему координат, направив ось z вдоль v , ось x вдоль нити и ось y вдоль внешней нормали к среде. Если нить бесконечно тонкая, то

$$j_x = \mathcal{J} \delta(\xi) \delta(y-l); \quad \xi = z - vt, \quad (1.1)$$

и поле такой нити в вакууме может быть описано с помощью x -компоненты векторного потенциала

$$A_x^\delta = \int a^\delta e^{ik\xi - s(y-l)} dk; \quad a^\delta = \frac{\mathcal{J}}{cs}, \quad (1.2)$$

где

$$s^2 - (1 - \beta^2) k^2 = 0; \quad \text{Re } s > 0. \quad (1.3)$$

Наличие вещества в левом полупространстве искажает поле нити. В области $y > 0$ его теперь можно представить как $A = A^\delta + A^s$, где A^s — «отраженное» поле, равное

$$A^s = \int a^\delta \frac{1 - \chi}{1 + \chi} e^{ik\xi - s(y+l)} dk, \quad (1.4)$$

а в области $y < 0$, поле имеет вид

$$A' = \int a^\delta \frac{2}{1 + \chi} e^{ik\xi - s'l + s'y} dk \quad (1.5)$$

$$s'^2 - (1 - \mu\epsilon\beta^2) k^2 = 0.$$

Величина

$$\chi = \frac{s'}{\mu s} = \frac{\sqrt{1 - \mu\epsilon\beta^2}}{\mu \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.6)$$

при $\beta = 0$ переходит в обычное в магнитостатике выражение $\frac{1}{\mu}$.

Характер закономерностей, которые имеют здесь место, особенно отчетливо выступает при движении шнура с током вблизи среды с вещественными ϵ и μ , т. е. среды без поглощения. В этом случае при скорости нити, меньшей скорости света в среде, величина χ падает с ростом скорости, оставаясь вещественной. Из этого вытекает интересный факт, что независимо от свойств среды при $v \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ в области $y > 0$ отраженное поле стремиться к тому, которое создается идеальным магнетиком с $\mu \rightarrow \infty$. При переходе через скорость света в среде величина χ становится мнимой, а поле A' — чисто волновым, т. е. появляется черенковское излучение. «Отраженное» поле A^s действует на нить с силой

$$F = \frac{\mathcal{J}}{c} \nabla A^s \Big|_{y=l; \xi=0}. \quad (1.7)$$

Подставляя сюда (1. 4), получим

$$F = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2} \int \frac{1}{s} \nabla e^{ik\xi - s(y+l)} \frac{1-\chi}{1+\chi} dk \Big|_{y=l, \xi=0} \quad (1. 8)$$

Отсюда видно, что сила притяжения пропорциональна $\text{Re} \frac{1-\chi}{1+\chi}$ тогда как сила торможения пропорциональна $\text{Im} \frac{1-\chi}{1+\chi}$.

Если движение происходит около непоглощающей среды, то торможение появляется только при переходе через скорость света в среде.

Очевидно, полная мощность электромагнитных потерь при движении нити равна

$$P = -F_z v. \quad (1. 9)$$

Если движение происходит около непоглощающей среды, то при $|\chi|=1$ сила притяжения меняет знак, т. е. становится силой отталкивания. Скорость, соответствующую $|\chi|=1$, будем называть скоростью инверсии. Она равна

$$u_{\text{инв}} = c \sqrt{\frac{1+\mu^2}{\mu\varepsilon + \mu^2}}. \quad (1. 10)$$

При $\mu = 1$, $u_{\text{инв}} = c\sqrt{2}/\sqrt{\varepsilon}$, а при $\varepsilon \gg \mu \gg 1$,

$$u_{\text{инв}} = c \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \equiv u_\mu. \quad (1. 11)$$

На рис. 1 изображена зависимость компоненты силы F_y , действующей на бесконечно тонкую нить, движущуюся вблизи диэлектрика, от скорости v . Если нить движется в щели, то, очевидно, ее движение будет устойчиво, только когда $v > u_{\text{инв}}$. При скорости нити $v \gg u_{\text{инв}}$ мощность излучения около непоглощающей среды стремится в нерелятивистском случае к постоянному пределу

$$P \rightarrow \frac{2\mathcal{J}^2}{c^2 l} c \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (1. 12)$$

Отсюда следует, что для получения больших мощностей излучения желательно выбирать u_μ как можно большим.

Если движение происходит около металла, то и в этом случае можно ввести скорости, аналогичные скорости света

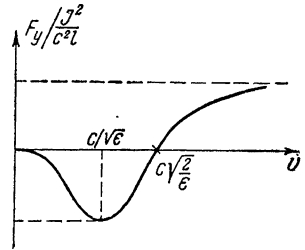


Рис. 1.

в диэлектрике и скорости инверсии u_μ [3]. Первая из них равна

$$u_1 = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu l},$$

а вторая

$$u_2 = \mu^2 u_1.$$

Следует иметь в виду, что только при $\mu > 1$ вторая скорость соответствует по порядку величины скорости, при которой происходит перемена знака F_y .

Мощность потерь при движении нити вдоль металлической поверхности со скоростью $v \gg u_2$ равна $P = \frac{\sigma^2}{2lc^2} \sqrt{\pi} (u_2 v)^{1/2} = \left(\frac{\sigma^2}{2c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v \right) \frac{\delta\mu}{l}$. Здесь $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu} (v/l)}$ — характерная толщина скин-слоя. Отсюда видно, что максимум потерь при соблюдении требования устойчивости $v > u_2$ будет иметь место в том случае, если $\frac{\delta\mu}{l} \sim 1$.

Наибольший практический интерес представляет тот случай, когда скорость шнура с током значительно превосходит скорость света в среде. При этом режиме решение задач резко упрощается в связи с возможностью использовать граничные условия М. А. Леонтовича [4] и тем самым ограничиться расчетом поля только в той среде, где находится источник волн. В [3] показано, что применение этих условий эквивалентно для плоской границы раздела разложению по степеням $\frac{c^2}{\mu\varepsilon v^2}$, а вблизи кривой границы раздела параметром малости является

$$\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon} v} \left(\frac{1}{R_{1j}} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{k},$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности раздела, k — волновое число. Условия М. А. Леонтовича позволяют ввести в ряде случаев скорость потока энергии магнитного поля. Она может быть определена как

$$v_0 = \frac{S_n}{W} = \frac{\frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]_n}{\frac{1}{8\pi} H^2} = 2c \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{H_t^2}{H^2}.$$

Если $v \gg u_\mu$, магнитное поле произвольно движущегося контура на границе раздела обладает той особенностью, что

нормальная составляющая поля много меньше тангенциальной составляющей $\frac{H_n}{H_t} \sim \frac{v}{u_\mu}$, и поэтому $v_0 \approx 2c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 2u_\mu$.

§ 2. Уравнения и граничные условия

Пусть плазма, ограниченная цилиндрической поверхностью S_0 , находится в равновесии во внешнем поле H_{20} , которое касательно к поверхности плазмы.

Магнитное поле внутри плазмы H_{10} будем считать однородным и направленным вдоль оси z цилиндра.

Малые колебания плазмы могут быть описаны линеаризованной системой уравнений [4]:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H}_1 &= 0; & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_{10}]; & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{c_1^2}{\rho_0} \nabla \rho - \frac{1}{4\pi\rho_0} [\mathbf{H}_{10} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1]. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь значком «0» отмечены невозмущенные значения величин; $c_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ — гидродинамическая скорость звука,

известно [1], что в плазменном цилиндре существуют только волны, распространяющиеся с возмущением плотности. Поэтому эти уравнения для наших целей удобно преобразовать таким образом, чтобы получить одно уравнение для ρ и найти выражения для \mathbf{v} и \mathbf{H} через ρ . Используя равенства

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_{10} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1] &= \nabla (\mathbf{H}_{10} \mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_{10} \nabla) \mathbf{H}_1; \\ \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}_{10}] &= (\mathbf{H}_{10} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H}_{10} \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.2)$$

и дифференцируя второе и третье уравнения (2.1) по t и подставляя в них четвертое уравнение (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= c_1^2 \nabla^2 \rho + \frac{H_{10}}{4\pi} \nabla^2 H_{1z}; \\ \frac{\partial^2 H_{1z}}{\partial t^2} &= -\frac{c_1^2 H_{10}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{H_{10}}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда, дифференцируя еще два раза по t , найдем

$$\frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} = L \nabla^2 \rho, \quad (2.4)$$

где через L обозначен оператор

$$L = (c_1^2 + v_1^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_{10} / \sqrt{4\pi\rho_0}$ — альфвеновская скорость, соответствующая внутреннему магнитному полю \mathbf{H}_{10} . Введем еще оператор L_1

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathbf{v}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применяя к четвертому уравнению (2.1) оператор L_1 и используя (2.2) и (2.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} L_1 \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho_0} \left\{ L \nabla \rho - v_1 \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \right\}. \quad (2.5)$$

Аналогично из третьего уравнения (2.1) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_1 \mathbf{H}_1 = - \sqrt{\frac{4\pi}{\rho_0}} \left\{ v_1 \frac{\partial}{\partial z} L \nabla \rho - \mathbf{v}_1 \frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} \right\}. \quad (2.6)$$

Формулы (2.5) и (2.6) выражают \mathbf{H}_1 и \mathbf{v} через скалярную функцию ρ , удовлетворяющую уравнению (2.4).

На поверхности S идеально-проводящей плазмы должны быть выполнены два условия: равенство нулю нормальной составляющей поля и равенство давлений с обеих сторон поверхности:

$$(\mathbf{H}_2 \mathbf{n})_S = 0; \quad p + \frac{H_1^2}{8\pi} = \frac{H_2^2}{8\pi} \Big|_S, \quad (2.7)$$

где через \mathbf{n} обозначена внешняя нормаль к поверхности S . Считая эти условия выполненными для невозмущенных величин ρ_0 , \mathbf{H}_{10} и \mathbf{H}_{20} на невозмущенной поверхности S_0 с нормалью \mathbf{n}_0

$$(\mathbf{H}_{20} \mathbf{n}_0)_{S_0} = 0; \quad p_0 + \frac{H_{10}^2}{8\pi} = \frac{H_{20}^2}{8\pi} \Big|_{S_0}, \quad (2.8)$$

получим с точностью до членов первого порядка малости:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2 \mathbf{n}_0) &= (\mathbf{H}_{20} \nabla \xi_n) \Big|_{S_0}; \quad c_1^2 \rho + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}_{10} \mathbf{H}_1) = \\ &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}_{20} \mathbf{H}_2) + \frac{\xi_n}{8\pi} (\mathbf{n}_0 \nabla H_{20}^2) \Big|_{S_0}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь ξ_n — расстояние между поверхностями S и S_0 по нормали \mathbf{n}_0 . Для нормали к возмущенной поверхности S исполь-

зована приближенная формула $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 - \nabla \xi_n$, где ξ_n — функция от координат на поверхности S_0 . Формулы (2.8) — (2.9) и являются граничными условиями, заданными на невозмущенной поверхности S_0 . Целесообразно преобразовать (2.9) таким образом, чтобы они выражались только через ρ и возмущенное магнитное поле \mathbf{H}_2 .

Для преобразования граничных условий (2.9) воспользуемся уравнениями (2.3) и (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{H}_1}{\partial t^2} &= \frac{\mathbf{H}_{10}}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho; \\ \frac{\partial}{\partial t} (L_1 v_n) &= -\frac{1}{\rho_0} (\mathbf{n}_0 \nabla L \rho). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_1 \xi_n = -\frac{1}{\rho_0} (\mathbf{n}_0 \nabla L \rho). \quad (2.11)$$

Применяя оператор $L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ к обоим уравнениям (2.9) с учетом (2.10) — (2.11) окончательно получим

$$L \left\{ L_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{n}_0 \nabla v_2^2) (\mathbf{n}_0 \nabla) \right\} \rho = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{v}_2 \mathbf{H}_2) |_{S_0}, \quad (2.12)$$

$$L (\mathbf{v}_2 \nabla (\mathbf{n}_0 \nabla)) \rho = -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{n}_0 \mathbf{H}_2) |_{S_0}$$

через \mathbf{v}_2 аналогично \mathbf{v}_1 обозначена величина $\mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_{20} / \sqrt{4\pi\rho_0}$. Невозмущенные поля \mathbf{H}_{10} и \mathbf{H}_{20} считаются заданными и связаны соотношениями (2.8). Уравнения (2.4) и (2.12) составляют полную систему уравнений и граничных условий на поверхности невозмущенной плазмы S_0 , если к ним добавить еще уравнения Максвелла для возмущенного поля \mathbf{H}_2 во внешней по отношению к плазме области. Величины \mathbf{v} и \mathbf{H}_1 определяются через ρ посредством соотношений (2.5) и (2.6). Отметим, что из (2.5) и (2.6) следует, что \mathbf{v} и \mathbf{H}_1 удовлетворяют тому же уравнению (2.4), что и ρ .

§ 3. Волны на плоской границе плазмы

Рассмотрим случай, когда \mathbf{H}_{10} и \mathbf{H}_{20} параллельны оси z и однородны. Они должны быть связаны условием равенства давлений (2.8). Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_2 можно выразить через векторный потенциал A , имеющий одну компоненту $A = A_y$

$$H_{2x} = -\frac{\partial A}{\partial z}; \quad H_{2z} = \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Тогда граничные условия на поверхности плазмы $x=0$ запишутся согласно (2.12) в виде

$$\left. \begin{aligned} L\rho &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} v_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial A}{\partial x}, \\ v_2 L \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Скалярные функции ρ и A удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} - L\nabla^2 \rho = 0; \quad \nabla^2 A = 0. \quad (3.2)$$

Решения (3.2) ищем в виде

$$\rho = \rho_1 e^{\alpha x + ikz - i\omega t} \quad (x < 0); \quad A = A_1 e^{\beta x + ikz - i\omega t}, \quad (x > 0).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.2), найдем α и β :

$$\alpha^2 = -k^2 \frac{(u^2 - v_1^2)(u^2 - c_1^2)}{(c_1^2 + v_1^2)u^2 - c_1^2 v_1^2}; \quad \beta^2 = k^2. \quad (3.3)$$

Здесь через $u = \frac{\omega}{k}$ обозначена фазовая скорость волны возмущения поверхности. Если плазма занимает все нижнее полупространство $x < 0$, то необходимо выбирать $\text{Re } \alpha > 0$. Аналогично, если пространство над плазмой $x > 0$ неограничено, то следует выбирать $\text{Re } \beta < 0$. Величина $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ определяет длину волны колебаний плазмы. Для несжимаемой жидкости $c_1 \rightarrow \infty$ из (3.3) получаем $\alpha^2 = k^2$.

При наличии экранов над поверхностью плазмы векторный потенциал A можно записать в виде

$$A = f_2(x) e^{ikz - i\omega t}.$$

Подстановка в граничные условия (3.1) приводит к соотношению

$$\alpha = -k^2 \left(\frac{u^2 - v_1^2}{v_2^2} \right) \cdot \frac{f_2(0)}{f_2'(0)}, \quad (3.4)$$

которое вместе с (3.3) определяет фазовую скорость волны u . Таким образом, для получения дисперсионного уравнения остается только определить $f_2(0)/f_2'(0)$.

Добавление однородных магнитных полей как внешнего, так и внутреннего, перпендикулярных направлению z рас-

пространения волн, не влияет на законы распространения волн, а сказывается только на условия равновесия (2.8). Действительно, граничные условия (2.9) останутся выполненными для возмущений H_{1y} и H_{2y} , равных нулю.

1. Свободные колебания плоской поверхности плазмы

Магнитное поле над свободной поверхностью плазмы описывается векторным потенциалом $A = A_1 e^{-kx + ikz - i\omega t}$. Отсюда $f_2/f_2' = -1/k$ и для α согласно (3.4) получаем

$$\alpha = k \frac{u^2 - v_1^2}{v_2^2}. \quad (3.5)$$

Исключая α из (3.3) и (3.5), получим для фазовой скорости волн выражение

$$u^2 = \frac{2c_1^2 v_1^2 + v_1^4 - v_2^4 + \sqrt{4c_1^4 v_2^4 + (v_1^4 - v_2^4)^2}}{2(c_1^2 + v_1^2)}. \quad (3.6)$$

При выводе (3.6) опущен корень $u = v_1$, соответствующий плоской альфвеновской волне $\alpha = 0$. Квадратный корень выбран со знаком (+) в силу того, что знак (-) дает $\alpha < 0$.

Отметим предельные случаи:

а) для несжимаемой жидкости $c_1 \rightarrow \infty$.

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2;$$

б) для плазмы без внутреннего магнитного поля $v_1 \rightarrow 0$

$$u^2 = v_2^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{v_2^2}{2c_1^2}\right)^2} - \frac{v_2^2}{2c_1^2} \right\}.$$

2. Колебания плоской поверхности плазмы при наличии диэлектрической стенки параллельной этой поверхности

Электромагнитное поле в области 2 между плазмой и диэлектриком и в области 3 — в диэлектрике с характеристиками μ и $\varepsilon = \varepsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ описывается векторным потенциалом $A = A_y$.

$$H_{2z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial x}; \quad H_{2x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad E_{2y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}.$$

Решения волнового уравнения в области 3 и уравнения Лапласа в области 2 для A_y выбираем в виде

$$A_{3y} = C e^{-\beta x + i k z - i \omega t}; \quad A_{2y} = (A e^{-kx} + B e^{kx}) e^{i k z - i \omega t},$$

где $\beta^2 = k^2 - \frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2}$. Из условия непрерывности A_y и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial x}$ на границе диэлектрика $x = b$ можно выразить A и B через C ; таким образом, получаем

$$-k \frac{f_2}{f_2'} = \frac{A - B}{A + B} = \frac{1 + \frac{\beta}{\mu k} \operatorname{cth} kb}{\operatorname{cth} kb + \frac{\beta}{\mu k}}$$

или, вводя фазовую скорость волн $u = \frac{\omega}{k}$, мы можем переписать эту формулу в виде

$$\frac{A - B}{A + B} = \frac{1 + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - u^2/c_\varphi^2} \operatorname{cth} kb}{\operatorname{cth} kb + \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - u^2/c_\varphi^2}}. \quad (3.7)$$

Здесь $c_\varphi = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Это выражение показывает, что если экран является непроводящим, т. е. μ и ε — вещественны, то затухание волн начнется в том случае, когда фазовая скорость волн станет больше фазовой скорости света в диэлектрике.

А это означает, что отвод энергии при этих условиях осуществляется с помощью Черенковского эффекта.

Проанализируем подробнее дисперсионное уравнение для несжимаемой плазмы при условии, что $\frac{u}{c_\gamma} \gg 1$. В этом случае

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 \frac{1 - i \frac{u}{u_\mu} \operatorname{cth} kb}{\operatorname{cth} kb - i \frac{u}{u_\mu}}; \quad u_\mu = c \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (3.8)$$

Полагая $u = u_0 + iw$ и считая $\frac{w}{u_0} \ll 1$, а $\frac{w}{u_\mu} \ll 1$, получим:

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \frac{\operatorname{cth} \left(kb \frac{u_0^2}{u_\mu^2} + 1 \right)}{\operatorname{cth}^2 kb + \frac{u_0^2}{u_\mu^2}}, \quad (3.9)$$

$$w = -\frac{1}{2} \frac{v_2^2}{u_\mu} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 kb} \left(\operatorname{cth}^2 kb + \frac{u_0^2}{u_\mu^2} \right)^{-1}. \quad (3.10)$$

При этом мы дополнительно предположили, что $\frac{w}{u_\mu} \operatorname{cth} kb \ll 1$. Рассмотрим (3.9), (3.10) для двух крайних случаев:

1) Пусть $\operatorname{cth} kb \ll \frac{u_0}{u_\mu}$ («короткие волны»).

Тогда

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \operatorname{cth} kb, \quad (3.11)$$

$$w = -\frac{1}{2} v_2^2 \frac{u_\mu}{u_0^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 kb}. \quad (3.12)$$

Если $kb \gg 1$, то $u_0^2 \approx v_1^2 + v_2^2$ и

$$w = -u_\mu \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}^2 kb}. \quad (3.13)$$

Интересующий нас режим сильного гашения может быть определен из условия $w \sim u_0$.

Но, как видно из (3.13), это возможно лишь при условии, что $u_\mu \sim u_0 \operatorname{sh}^2 kb$, что противоречит сделанным предположениям. Следовательно, при $kb \gg 1$ сильное гашение невозможно.

Если же $kb \ll 1$, то

$$u_0^2 \approx v_1^2 + v_2^2 \frac{1}{kb},$$

$$w = -\frac{1}{2} v_2^2 \frac{u_\mu}{k^2 b^2 \left(v_1^2 + v_2^2 \frac{1}{kb} \right)}.$$

Если $kbv_1^2 \ll v_2^2$, то $w \ll u_0$ при условии $\frac{u_0 kb}{u_\mu} \geq 1$.

Последнее соотношение можно записать в двух формах

$$\omega b \geq u_\mu; \quad b \geq \mu \delta, \quad (3.14)$$

первое из которых относится к непроводящей среде, а второе к проводящей среде со скин-слоем, равным $\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$.

Структуру соотношения (3.14) легко понять, если учесть, что $u_0 \gg u_\mu$ и поэтому в данном случае можно использовать выражение для скорости потока энергии, данное во введении. Считая, что энергия возмущения поля между плазмой и средой порядка энергии колебаний плазмы, мы получим следующее выражение для порядка времени τ_0 затухания колебаний

$$\tau_0 \sim \frac{b}{u_\mu},$$

которое находится в полном согласии с (3.14).

2) Рассмотрим теперь случай столь длинных волн, для которых $\text{cth } kb \gg \frac{u_0}{u_\mu}$.

В этом случае

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \frac{u_0^2}{u_\mu^2} \text{th } kb, \quad w = -\frac{1}{2} \frac{v_2^2}{u_\mu}.$$

В общем случае (3.10) показывает, что максимум поглощения при данных u_0 и kb имеет место при $\text{cth } kb \sim \frac{u_0}{u_\mu}$. Если $kb \ll 1$, то это условие совпадает с (3.14), а если $kb \gg 1$, то оно совпадает с условием $u_0 \sim u_\mu$, указанным во введении.

§ 4. Волны на поверхности круглого плазменного цилиндра

При исследовании колебаний круглого плазменного цилиндра, в отличие от плоской задачи, представляют интерес рассмотрение влияния обеих компонент внешнего поля как H_z , так и H_φ . Будем считать, что невозмущенное внешнее поле имеет две компоненты $(H_{0z})_z$ и $(H_{0\varphi})_\varphi$, удовлетворяющие условию равновесия на поверхности плазменного цилиндра $r = a$: $(H_{0z})_z^2 + (H_{0\varphi})_\varphi^2 = 8\pi p_0 + H_{10}^2$. Поле $(H_{0z})_z$ — однородно, а $(H_{0\varphi})_\varphi \sim \frac{1}{r}$, соответственно $\frac{\partial v_2^2}{\partial r} = -\frac{2}{a} v_{2\varphi}^2$ при $r = a$. Граничные условия (2.12) для волн на поверхности круглого цилиндра запишутся в виде

$$L \left\{ L_1 - \frac{1}{a} v_{2\varphi}^2 \frac{\partial}{\partial r} \right\} \rho = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_2 \mathbf{H}_2) \quad (4.1)$$

$$L (v_2 \nabla) \frac{\partial \rho}{\partial r} = - \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} L_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (H_{2r}).$$

Уравнение (2.4) для ρ в цилиндрической системе координат имеет решения

$$\rho = [A_n I_n(\alpha r) + B_n K_n(\alpha r)] e^{ikz + in\varphi - i\omega t}, \quad (4.2)$$

где α определяется той же формулой (3.3), что и для плоской задачи. Если ρ и H_z представлены в виде

$$\rho = f_1(r) e^{ikz + in\varphi - i\omega t}; \quad \mathbf{H}_2 = F_2 e^{ikz + in\varphi - i\omega t},$$

то подставляя в граничные условия (4.1), получим

$$u^2 = v_1^2 + \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left\{ i \left(kv_{2z} + \frac{nv_{2\varphi}}{a} \right) \frac{(\mathbf{F}_2 \mathbf{v}_2)}{k^2 F_{2r}} - \frac{v_{2\varphi}^2}{k^2 a} \right\}, \quad (4.3)$$

где $F_2 = F_2(a)$. Уравнение (4.3) вместе с (3.3) — определяющим α дают дисперсионное уравнение. Для случая когда плазма заполняет весь цилиндр $0 < r < a$, которым мы ограничимся, $f_1'(a)/f_1(a) = \alpha I_n'(\alpha a)/I_n(\alpha a)$. Член в (4.3), содержащий $\mathbf{F}_2(a)$, определяется характером внешнего возмущенного магнитного поля. Если представить \mathbf{H}_2 через магнитный потенциал ψ , $\mathbf{H}_2 = -\nabla\psi$, а ψ записать в виде

$$\psi = f_2(r) e^{ikz + in\varphi - i\omega t},$$

то вместо уравнения (4.3) получим

$$u^2 = v_1^2 + \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left\{ -\frac{f_2'(a)}{f_2(a)} \left(v_{2z} + \frac{nv_{2\varphi}}{ka} \right)^2 - \frac{v_{2\varphi}^2}{k^2 a} \right\}. \quad (4.4)$$

Так возмущенное магнитное поле вне цилиндрического плазменного столба, находящегося в «свободном» пространстве, описывается скалярным потенциалом

$$\psi = C_1 K_n(kr) e^{ikz + in\varphi - i\omega t}.$$

Отсюда $f_2'(a)/f_2(a) = K_n'(ka)/K_n(ka)$, и согласно (4.4) получим

$$u^2 = v_1^2 + \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{I_n'(\alpha a)}{I_n(\alpha a)} \left\{ -\frac{K_n'(ka)}{K_n(ka)} \left(v_{2z} + n \frac{v_{2\varphi}}{ka} \right)^2 - \frac{v_{2\varphi}^2}{ka} \right\}. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) и (3.3) определяют зависимость фазовой скорости волн u от волновых чисел k и n . Эквивалентное уравнение получено и подробно исследовано В. Д. Шафрановым [1].

1. Плазменный цилиндр внутри цилиндрического канала в диэлектрике при условии применимости граничных условий М. А. Леонтовича

Для описания поля в пространстве между плазменным цилиндром и диэлектриком необходимо использование двух скалярных функций [5], удовлетворяющих уравнению Лап-

ласа. Магнитное и электрическое поле в этой области можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial r}; & E_r &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} - i \frac{\omega n}{kc} \psi_1; \\ H_z &= -ik\psi_1; & E_z &= -ik\psi_2; \\ H_\varphi &= -\frac{in}{r} \psi_1; & E_\varphi &= -\frac{in}{r} \psi_2 + \frac{\omega}{kc} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \end{aligned}$$

где ψ_i — решения уравнения Лапласа

$$\psi_i = [A_i I_n(kr) + B_i K_n(kr)] e^{ikz + in\varphi - i\omega t},$$

ψ_1 является скалярным потенциалом для магнитного поля, $\mathbf{H} = -\nabla\psi_1$. Члены с функцией ψ_2 обязаны наличию «поперечно-магнитного» поля. Граничные условия при $r = b$ возьмем в форме М. А. Леонтовича

$$E_z = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi; \quad E_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_z; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

Эти условия дают связь между A_1 и B_1 , с помощью которой определяется отношение $f_2(a)/f'_2(a)$:

$$\begin{aligned} \frac{f_2(a)}{f'_2(a)} &= \frac{1}{k} \times \\ &\times \frac{\left(1 + \frac{n^2}{k^2 b^2}\right) (K_{nb} I_{na} - I_{nb} K_{na}) - \frac{i\omega}{kc} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (K'_{nb} I_{na} - I'_{nb} K_{na})}{\left(1 + \frac{n^2}{k^2 b^2}\right) (K'_{nb} I'_{na} - I_{nb} K'_{na}) - \frac{i\omega}{kc} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (K'_{nb} I'_{na} - I'_{nb} K'_{na})}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $I_{na} = I_n(ka)$; $K'_{nb} = K'_n(kb)$ и т. д. Для идеально проводящего экрана отсюда получается [1]

$$\frac{f_2(a)}{f'_2(a)} = \frac{1}{k} \frac{K'_{nb} I_{na} - I'_{nb} K_{na}}{K'_{nb} I'_{na} - I'_{nb} K'_{na}}. \quad (4.7)$$

Поскольку рассмотренный в предыдущем параграфе случай плоской границы соответствует $\frac{a}{b} \rightarrow 1$, $kb \rightarrow \infty$, здесь мы ограничимся обратным случаем: длинноволновыми колебаниями тонких шнуров. При условии $kb \ll 1$ дисперсионное уравнение (4.4), (4.6) записывается в виде

$$\frac{f_2(a)}{f'_2(a)} = -a \frac{1 - D \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 + D \left(\frac{a}{b}\right)^n}; \quad D = \frac{1 + i \frac{u}{u_\mu} \frac{kb}{n^2}}{1 - i \frac{u}{u_\mu} \frac{kb}{n^2}}. \quad (4.8)$$

Здесь, как обычно, $u = \omega/k$, $u_\mu = c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

Упростим (4.8), еще раз считая $n = 1$ и $\frac{a}{b} \ll 1$. В этом случае из (4.4), (4.8) вытекает:

$$u^2 = v_1^2 + 2 \frac{v_{2\varphi} v_{2z}}{ka} - 2D \frac{v_{2\varphi}^2}{k^2 b^2}. \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) и (4.9) указывают, что при $ka \ll k^2 b^2$ максимум поглощения будет иметь место при $\frac{u}{u_\mu} kb \sim 1$, что совпадает с условием (3.14) предыдущего параграфа.

Заметим, что если $kb \frac{u}{u_\mu} \ll 1$, и kb очень мало, то колебания неустойчивы, тогда как при $\frac{u}{u_\mu} \gg 1$ они устойчивы при любых, kb при которых верно (4.9). Используя (4.9), найдем время затухания колебаний при условии, что $\frac{2v_2 v_{2z}}{ka} \gg v_1^2$:

$$\tau_0 \sim T \frac{b}{a} kb \left(\frac{v_{2z}}{v_2} \right). \quad (4.10)$$

Мы видим отсюда, что затухание колебаний тонкого шнура в оптимальном режиме, вообще говоря, достаточно быстрый процесс.

В заключение заметим, что применение условий Леонтовича к цилиндру эквивалентно разложению по степеням $\frac{1}{kb} \cdot \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon u}}$.

2. Плазменный цилиндр в цилиндрическом канале в диэлектрике; поперечные колебания

Поперечными колебаниями плазменного цилиндра мы будем называть колебания, не зависящие от продольной координаты z . В этом случае электромагнитное поле над поверхностью плазмы может быть описано векторным потенциалом $A = A_z$.

$$H_z = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}; \quad H_\varphi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}; \quad E_r = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

В областях (2) и (3) между плазмой и диэлектриком и внутри диэлектрика векторный потенциал равен

$$A_{2z} = \left[A \left(\frac{r}{a} \right)^n + B \left(\frac{a}{r} \right)^n \right] e^{in\varphi - i\omega t};$$

$$A_{3z} = CH_n^{(1)}(\gamma r) e^{in\varphi - i\omega t}, \quad (4.11)$$

где через γ^2 обозначена величина $\gamma^2 \equiv \frac{\mu \varepsilon \omega^2}{c^2}$, $(\text{Re } \gamma)(\text{Re } \omega) > 0$.

Дисперсионное уравнение для волн на поверхности плазмы получается из (4.3) предельным переходом $k \rightarrow 0$:

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \cdot \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left\{ 1 - in \frac{F_{2z}(a)}{F_{2r}(a)} \right\}. \quad (4.12)$$

Функция $f_1(r)$ равна $I_n(ar)$, где a согласно (4.3) определяется формулой $a^2 = -\omega^2/(c_1^2 + v_1^2)$. В дисперсионном уравнении (4.12) остается определить величину $F_{2\varphi}/F_{2r} = H_\varphi(a)/H_r(a)$. Для ее определения достаточно потребовать непрерывности A_z и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}$ на границе диэлектрика $r = b$. Дисперсионное уравнение получается в виде

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \cdot \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + n \frac{\left(H_n + \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{a}{b} \right)^n - \left(H_n - \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{b}{a} \right)^n}{\left(H_n + \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{a}{b} \right)^n + \left(H_n - \frac{\gamma b}{\mu n} H_n' \right) \left(\frac{b}{a} \right)^n} \right\}, \quad (4.13)$$

где $H_n = H_n^{(1)}(\gamma b)$. Для поперечных колебаний плазменного цилиндра без диэлектрического экрана, устремляя $\gamma \rightarrow 0$ (или b к бесконечности), найдем

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \cdot \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} (1 - n). \quad (4.14)$$

При наличии идеально-проводящего экрана получим при $\gamma \rightarrow \infty$

$$\omega^2 = -\frac{v_{2\varphi}^2}{a} \cdot \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \cdot \left\{ 1 - n \frac{1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}}{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n}} \right\}. \quad (4.15)$$

Эти предельные случаи можно получить и из формул (4.4), (4.5) и (4.7), устремляя k к нулю.

Свободные колебания (4.14) являются устойчивыми при $n > 1$ в силу положительности $f'_1(a)/f_1(a)$. Случай $n = 1$ соответствует колебаниям плазменного цилиндра как целого, без изменения его формы. При этом в «свободном» пространстве плазменный цилиндр находится в безразличном равновесии $\omega = 0$. При наличии идеально проводящего экрана

$$\omega^2 = \frac{2v_\varphi^2}{a} \cdot \frac{f'_1(a)}{f_1(a)} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \quad (4.16)$$

плазменный цилиндр устойчиво колеблется около $r = 0$.

Для тонкого плазменного шнура $\frac{a}{b} \ll 1$ в первом приближении $f'_1/f_1 \approx \frac{1}{a}$ и для наиболее интересного случая $n = 1$

$$\omega^2 = -\frac{2v_\varphi^2}{b^2} \left(\frac{H_1(\gamma b) + \frac{\gamma b}{\mu} H'_1(\gamma b)}{H_1(\gamma b) - \frac{\gamma b}{\mu} H'_1(\gamma b)} \right). \quad (4.17)$$

Поведение колебаний шнура становится значительно более прозрачным в том случае, когда $\gamma b = \frac{2\pi b}{\lambda_3} = \frac{b}{\delta} \gg 1$.

В этом случае из (4.17) вытекает простое дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = -\frac{2v_\varphi^2}{b^2} \cdot \frac{1 + i\frac{b\gamma}{\mu}}{1 - i\frac{b\gamma}{\mu}} = \frac{2v_\varphi^2}{b^2} \frac{\left(\frac{b^2\gamma^2}{\mu^2} - 1\right) - 2i\frac{b\gamma}{\mu}}{1 + \frac{b^2\gamma^2}{\mu^2}}. \quad (4.18)$$

Из написанного выражения видно, что колебания неустойчивы, если $\frac{b\gamma}{\mu} = \frac{b\omega}{u_\mu} < 1$, и устойчивы, если $\frac{b\gamma}{\mu} \gg 1$.

Максимум поглощения, очевидно, приходится на промежуточный режим, при котором $\frac{b\gamma}{\mu} \sim 1$.

Если кожух является проводящим, то последнее условие принимает обычный вид: $\frac{b}{\mu\delta} \sim 1$.

Разумеется, практически естественно выбирать $\frac{b}{\mu\delta} \sim 2 \div 3$. При этом условии колебание будет затухать за $2 \div 3$ периода,

который с достаточной степенью точности можно считать равным $\frac{2\pi b}{\sqrt{2} v_\varphi}$.

Полученные в данном пункте критерии устойчивости и максимума гашения совпадают, как и следовало ожидать, с полученными ранее (3.14).

Если плазменный шнур толстый, т. е. $a/b \sim 1$, а $\gamma b \gg 1$, то дисперсионное уравнение (4.13) может быть записано в ином виде. Полагая $1 + \frac{i\gamma b}{\mu} = e^{i\psi}$, запишем

$$\omega^2 = -\frac{2v_\varphi^2}{b^2} a \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \cdot \frac{e^{2i\psi} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cos 2\varphi}$$

Отсюда видно, что переход от устойчивых колебаний к неустойчивым происходит в окрестности

$$\cos 2\psi + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 0.$$

Этим же условием определяется, очевидно, и максимум поглощения. В заключение отметим, что «область уползания», о которой мы говорили выше, может быть уничтожена с помощью хорошо проводящего экрана, охватывающего гасящий кожух. Этому и посвящен следующий пункт.

3. Поперечные колебания плазменного цилиндра внутри диэлектрической трубы

В этом пункте рассматриваются два предельных случая двуслойного диэлектрического экрана:

I. Диэлектрическая труба, окруженная идеальным проводником.

II. Диэлектрическая труба в свободном пространстве.

I. Обозначим через b и l — внутренний и внешний радиусы диэлектрической трубы, и через $d = l - b$ — ее толщину. Векторный потенциал $A = A_z$ внутри трубы (3) и между трубой и плазменным цилиндром (2) представляется формулами:

$$A_{3z} = C[H_n^{(1)}(\gamma r) H_n^{(2)}(\gamma l) - H_n^{(2)}(\gamma r) H_n^{(1)}(\gamma l)] e^{in\varphi - i\omega t},$$

$$A_{2z} = \left[A \left(\frac{r}{a}\right)^n + B \left(\frac{a}{r}\right)^n \right] e^{in\varphi - i\omega t}.$$

Дисперсионное уравнение (4.12) можно записать через A и B в виде

$$\omega^2 = -\frac{v_\varphi^2}{a} \cdot \frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \left\{ 1 - n \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \frac{A}{B}}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \frac{A}{B}} \right\}.$$

Отношение $\frac{A}{B}$, как обычно, определяется из граничных условий непрерывности A_z и $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r}$ на границе $r=b$. Таким образом, находим

$$\frac{A}{B} = -\frac{H'_{1b}H_{2l} - H'_{2b}H_{1l} + \frac{\mu n}{\gamma b} (H_{1b}H_{2l} - H_{2b}H_{1l})}{H'_{1b}H_{2l} - H'_{2b}H_{1l} - \frac{\mu n}{\gamma b} (H_{1b}H_{2l} - H_{2b}H_{1l})},$$

где через H_{ib} и H_{il} обозначены $H_n^{(i)}(\gamma b)$ и $H_n^{(i)}(\gamma l)$, штрихи означают производные по всему аргументу. Полученная формула существенно упрощается при условии $\gamma b \gg 1$. Заменяя ханкелевы функции на экспоненты для этого случая получим

$$\frac{A}{B} = -\frac{1 - \frac{\mu n}{\gamma b} \operatorname{tg} \gamma d}{1 + \frac{\mu n}{\gamma b} \operatorname{tg} \gamma d}.$$

Для колебаний плазменного цилиндра как целого ($n=1$) формула для частоты имеет вид

$$\omega^2 = \frac{2v_\varphi^2}{b^2} \cdot \frac{af_1'(a)}{f_1(a)} \cdot \frac{1 - \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)}{1 + \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d) - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left[1 - \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)\right]}.$$

Определение $f_1(r)$ содержится в пункте 2. Для поперечных колебаний тонкого плазменного шнура $\frac{a}{b} \rightarrow 0$, $\frac{f_1'(a)}{f_1(a)} \rightarrow \frac{1}{a}$ и при $n=1$ для ω^2 получается выражение

$$\omega^2 = \frac{2v_\varphi^2}{b^2} \cdot \frac{1 - \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)}{1 + \frac{\mu}{\gamma b} \operatorname{tg}(\gamma d)}. \quad (4.20)$$

При вещественных μ и ϵ здесь будут иметь место резонансные эффекты. Чтобы их избежать, мы будем считать ϵ мнимым.

Если $\gamma d \rightarrow \infty$, то $\omega^2 \rightarrow \frac{2v_\varphi^2}{b^2}$, т. е. к частоте колебаний в идеально-проводящем коаксиале, радиуса b .

Если же $\mu = 1$, и $\gamma d \rightarrow 0$, то $\omega^2 \rightarrow \frac{2v_\varphi^2}{(b+d)^2}$, т. е. также к частоте колебаний в идеальном коаксиале, но уже радиуса $b+d$. Очевидно переход от одной частоты к другой происходит при $|\gamma d| \sim 1$, т. е. при $d \sim \delta$. В этой переходной области будет наблюдаться и максимум поглощения, который, как видно из (4.20), будет иметь место при $\frac{b\gamma}{\mu} \sim 1$ (рис. 2).

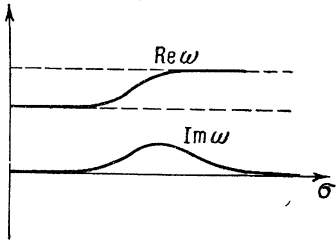


Рис. 2.

II. Для случая диэлектрической трубы в свободном пространстве векторный потенциал внутри трубы (A_{3z}) и вне (A_{4z}) записывается в виде

$$A_{3z} = [AH_n^{(1)}(\gamma r) + BH_n^{(2)}(\gamma r)] e^{in\varphi - i\omega t}, \quad A_{4z} = Cr^{-n} e^{in\varphi - i\omega t}$$

В области 2 векторный потенциал определяется той же формулой, что и в области 1. Сшивание решений на границах $r=b$ и $r=l$ приводит к следующей формуле для $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A}{B} = \frac{\left(H'_{2l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{2l}\right) \left(H_{1b} + \frac{\gamma l}{\mu n} H'_{1b}\right) - \left(H'_{2l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{2l}\right) \left(H_{1b} - \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{1b}\right) - \left(H'_{1l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{1l}\right) \left(H_{2b} + \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{2b}\right) - \left(H'_{1l} + \frac{n\mu}{\gamma l} H_{1l}\right) \left(H_{2b} - \frac{\gamma l}{n\mu} H'_{2b}\right)}{\quad} \quad (4.21)$$

При условии $\gamma b \gg 1$ из этой формулы получаем

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - \frac{b}{l} + \left(\frac{n\mu}{\gamma l} + \frac{\gamma b}{n\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d}{1 + \frac{b}{l} + \left(\frac{n\mu}{\gamma l} - \frac{\gamma b}{n\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d} \quad (4.22)$$

Для бесконечно тонкого плазменного шнура получаем ($n=1$)

$$\omega^2 = -\frac{2v_\varphi^2}{b^2} \cdot \frac{1 - \frac{b}{l} + \left(\frac{\mu}{\gamma l} + \frac{\gamma b}{\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d}{1 + \frac{b}{l} + \left(\frac{\mu}{\gamma l} - \frac{\gamma b}{\mu}\right) \operatorname{tg} \gamma d} \quad (4.23)$$

Наконец, для частоты колебаний бесконечно тонкого плазменного шнура в тонкой диэлектрической трубе (при условии $\gamma d \ll 1$), из формулы (4.23) находим (для $\mu \ll \gamma^2 b^2$):

$$\omega^2 = -\frac{2v_\varphi^2}{b} \cdot \frac{\gamma^2 d}{2\mu - \gamma^2 b d}.$$

Для идеально-проводящей трубы ($\gamma \rightarrow \infty$) получаем прежнюю формулу $\omega^2 = \frac{2v_\varphi^2}{b}$, а при условии $\gamma^2 b d \ll \mu$, $\omega^2 = \frac{v_\varphi^2 \gamma^2 d}{\mu b}$. Если труба металлическая не идеально-проводящая, то $\gamma^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$, $\mu = 1$, и последняя формула дает $\omega = -i\omega_0$, где $\omega_0 = 0$ и

$$\omega_0 = \frac{4\pi\sigma d}{c^2 b} \cdot v_\varphi^2(a). \quad (4.24)$$

Полученные выражения для частот колебаний плазменного шнура как целого в металлической трубе, идеально-проводящей, и с учетом конечной проводимости (4.24) совпадают с результатами, полученными в [6], где рассматривались силы, действующие на проводник с током внутри металлической трубы, при малом его смещении от оси трубы.

Смещение шнура от оси трубы при идеальной проводимости трубы и в случае (4.24) описывается уравнениями:

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t + \frac{\xi_0}{\omega} \sin \omega t; \quad \xi = \xi_0 + \frac{\xi_0}{\omega_0} (1 - e^{-\omega_0 t}).$$

То есть в первом случае шнур колеблется около положения равновесия, а во втором случае — приближается к $\xi_\infty = \xi_0 + \frac{\xi_0}{\omega_0}$.

§ 5. Влияние изменения во времени внешнего магнитного поля на колебания плазмы

Граничные условия (2.8) и (2.9) на поверхности цилиндрической плазмы справедливы и для изменяющегося во времени внешнего магнитного поля \mathbf{H}_{20} . Для получения граничных условий типа (2.12), но справедливых для переменного \mathbf{H}_{20} исключим сначала ξ_n из второго уравнения (2.9). Применяя к нему оператор $\frac{1}{H_{20}} (\mathbf{H}_{20} \nabla)$ с учетом первого уравнения (2.9), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}} \nabla p \right) + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}} \nabla \right) (\mathbf{H}_{10} \mathbf{H}_1) = \\ & = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}} \nabla \right) (\mathbf{H}_{20} \mathbf{H}_2) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{n}_0 \nabla H_{20}) (\mathbf{n}_0 \mathbf{H}_2), \end{aligned}$$

При дифференцировании учтено, что $(\mathbf{H}_{20}\nabla)(\mathbf{n}_0\nabla\mathbf{H}_{20}^2) = 0$, так как \mathbf{H}_{20} вдоль поверхности плазмы постоянно. Ограничимся случаем, когда внешнее магнитное поле меняется только по величине, но не по направлению $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}_{20}/H_{20}) = 0$, тогда можно исключить \mathbf{H}_1 из полученного уравнения применением к нему оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и подстановкой $\frac{\partial^2 H_{1z}}{\partial t^2}$ из (2. 10).

Аналогично, записывая первое уравнение (2. 9) в виде

$$\left(\frac{\mathbf{H}_{20}}{H_{20}}\nabla\xi_n\right) = \left(\frac{\mathbf{H}_2}{H_{20}}\mathbf{n}_0\right),$$

исключим из него ξ_n , применив к нему оператор $L_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ и используя (2. 11). Таким образом, получим граничные условия типа (2. 12), справедливые в случае несжимаемой плазмы и для переменного внешнего поля $\mathbf{H}_{20}(t)$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_2\nabla)L_1p &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \left\{ (\mathbf{v}_2\nabla)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{v}_2\mathbf{H}_2) + v_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{n}_0\nabla v_2)(\mathbf{n}_0\mathbf{H}_2) \right\} \\ (\mathbf{v}_2\nabla)(\mathbf{n}_0\nabla p) &= -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} v_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{v_2}(\mathbf{n}_0\mathbf{H}_2). \end{aligned} \quad (5. 1)$$

Ограничиваясь случаем плазмы с плоской границей, запишем условия (5. 1) в виде

$$\left. \begin{aligned} L_1p &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{v}_2\mathbf{H}_2), \\ \left(\frac{\mathbf{v}_2}{v_2}\nabla\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{(\mathbf{n}_0\mathbf{H}_2)}{v_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5. 2)$$

Если внешнее магнитное поле параллельно оси z , $\mathbf{v}_2 \parallel oz$ и задано с помощью векторного потенциала $A = A_y$, то (5. 2) могут быть представлены как:

$$\left. \begin{aligned} L_1p &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_2\frac{\partial A_y}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{A_y}{v_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5. 3)$$

Уравнение (2. 4) для ρ в случае несжимаемой плазмы переходит в уравнение $\nabla^2(L_1p) = 0$ для p . Опуская решения, соответствующие альфвеновским волнам, распространяющимся со скоростью v_1 , получим, что p , так же как и A_y , удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2 A_y = 0. \quad (5. 4)$$

Решения уравнений (5.4), удовлетворяющие граничным условиям (5.3), ищем в виде

$$p = p_t e^{kx + ikz}; \quad A_y = A_t e^{-kx + ikz},$$

где p_t и A_t — неизвестные функции времени t . Подставляя в (5.3), получаем

$$\frac{d^2 p_t}{dt^2} + v_1^2 k^2 p_t = -\sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} k \frac{d^2}{dt^2} (v_2 A_t),$$

$$p_t = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi}} \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{A_t}{v_2} \right).$$

Исключая сначала p_t , найдем уравнения для A_t

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{A_t}{v_2} \right) + k^2 (v_1^2 + v_2^2) \left(\frac{A_t}{v_2} \right) = 0. \quad (5.6)$$

Для определения p_t введем вспомогательную функцию P_t такую, что $p_t = \ddot{P}_t$. P_t удовлетворяет тому же уравнению, что и $\frac{A_t}{v_2}$. При медленном изменении внешнего поля решение (5.6) можно получить по методу Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна, что приводит к следующим формулам для A_t и p_t :

$$A_t = \frac{\text{const} \cdot v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} e^{-ik \int_0^t \sqrt{v_1^2 + v_2^2} dt},$$

$$p_t = \text{const} (v_1^2 + v_2^2)^{3/4} e^{-ik \int_0^t \sqrt{v_1^2 + v_2^2} dt}.$$

Для плазмы без внутреннего поля $v_1 = 0$, при возрастании внешнего поля H_{20} , амплитуда колебаний внешнего поля растет как $(H_{20})^{1/2}$, а амплитуда колебаний давления p как $(H_{20})^{3/4}$.

Однако амплитуда колебаний поверхности плазмы ξ_n , как это видно из первой формулы (2.9), уменьшается $\sim (H_{20})^{-1/2}$.

При наличии идеально-проводящей стенки, параллельной поверхности плазмы, решение ищется в виде

$$p = p_t e^{kx + ikz}, \quad A = A_t \text{sh } k(x - b) e^{ikz}.$$

Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к тому результату, что в этом случае в предыдущих формулах следует заменить v_2^2 на $v_2^2 \operatorname{cth} kb$, т. е. внешнее поле как бы увеличивается в $\sqrt{\operatorname{cth} kb}$ раз, так же, как в § 3.

Заключение

Рассмотренные в данной работе различные случаи колебаний плазмы указывают на то, что эти колебания могут эффективно гаситься с помощью соответствующим образом подобранного кожуха. Если кожух является непроводящим, то гашение происходит за счет эффекта Черенкова, причем для интенсивного гашения при выполнении требования устойчивости необходимо, чтобы отношение b/u_μ было в несколько раз ($2 \div 10$) меньше периода волны (3. 14)

$$\frac{b}{u_\mu} \leq T, \quad (6. 1)$$

здесь b — расстояние от плазмы до экрана, $u_\mu = c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, T — период данной волны.

Если кожух является проводящим, то для эффективного гашения необходимо, чтобы скин-слой, соответствующий частоте колебаний волны, был в несколько раз ($2 \div 10$) меньше $\frac{b}{\mu}$

$$\delta \leq \frac{b}{\mu}, \quad (6. 2)$$

где μ — магнитная проницаемость экрана.

Учитывая, что реально наблюдаемые частоты в тороидальной камере лежат в пределах от $\omega_1 \sim \omega_i$ до $\omega_2 \sim \frac{\omega_i}{\sqrt{\pi 11}} \sqrt{\frac{a}{R}}$ (где R — большой радиус тора; $\Pi \equiv \frac{e^2 N}{M c^2}$; M — масса протона, N — число частиц в сечении; ω_i — ионная ларморовская частота), мы видим, что практически этот интервал частот достаточно узкий, так как обычно $\Pi \sim 10$ [2]. Это позволяет получить эффективное гашение волн всего диапазона с помощью плохо проводящего слоя, толщина которого ограничена (6.1) и равна толщине скин-слоя для частоты ω_2 . Оценим требуемую проводимость этого слоя. Если $H_i \sim 2 \cdot 10^3$, $b \sim 10^2$ см, $\mu \sim 10$, то $\delta \sim 10$ см, $\sigma \sim 10^{10}$ CGSE.

* См. (3. 9).

Мы, отмечали, что не обязательно гасить колебания с помощью проводящего слоя и, следовательно, джоулевого нагрева этого слоя. Возможно гашение волн и с помощью черенковского эффекта, при котором энергия колебаний плазмы отводится в виде высокочастотных электромагнитных волн.

Сказанное выше касалось только стабилизации высокочастотных колебаний плазмы. Медленное «уползание» плазменного шнура может быть стабилизировано внешним полем типа [7] или толстым медным экраном. Слой, гасящий колебания, естественно нанести на внутреннюю поверхность такого экрана.

Отметим в заключение, что гасящий слой может эффективно выравнивать вихревое электрическое поле внутри тороидальной камеры с медным разрезанным кожухом и, таким образом, служить в качестве лайнера, если его вакуумные свойства окажутся достаточно хорошими.

Авторы приносят искреннюю благодарность М. А. Леонтовичу за полезные обсуждения данной работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Д. Шафранов. Атомная энергия, 5 (1956).
 2. С. И. Брагинский. ЖЭТФ, 33, 459 (1957).
 3. А. И. Морозов. Диссертация МГУ, Вестник МГУ, № 1 (1957).
 4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
 5. Дж. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма. ГИТТЛ, М., 1948.
 6. М. А. Леонтович, см. настоящее издание, т. 1, стр. 110.
 7. С. М. Осовец, см. настоящее издание, т. 2, стр. 238.
-

В. Д. Шафранов

**К ВЫВОДУ ТЕНЗОРА
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ ***

В настоящей заметке получено, с помощью интегрирования кинетического уравнения по траекториям зарядов, общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в отсутствие столкновений.

Представим функцию распределения зарядов одного сорта (ионы, электроны) при наличии электромагнитной волны в виде

$$f = f_0 + f_1, \quad (1)$$

где $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — невозмущенная функция распределения, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (2)$$

f_1 — поправка, связанная с волной. Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \right) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = \\ = -e \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическое и магнитное поле волны.

* Работа выполнена в 1958 г.

Вместо независимых переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} , t введем переменные \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 , t , определив связь между ними в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0), \\ \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= e \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t) \mathbf{H}_0] \right), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Новые переменные представляют собой «лагранжевы координаты» зарядов. Уравнение (3) в этих переменных принимает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -e \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t) \mathbf{H}(\mathbf{r}(t), t)] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}(t)}. \quad (5)$$

Решение его, удовлетворяющее условию $f_1 = 0$ при $t = -\infty$, есть

$$f_1 = -e \int_{-\infty}^t \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}(t'), t') + \frac{1}{c} [\mathbf{v}(t') \mathbf{H}(\mathbf{r}(t'), t')] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}(t')} dt'. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь однородную среду. Пусть поле представлено в виде суперпозиции плоских волн вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (7)$$

Тогда магнитное поле выразится через электрическое с помощью уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ в виде

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \mathbf{E}]. \quad (8)$$

Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ определится из связи средней плотности тока, вызванного электромагнитной волной с электрическим полем волны:

$$\bar{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} \omega E_\beta(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

причем в «лагранжевых координатах» $E_\beta(\mathbf{r}, t) = E_{\beta 0} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}(t) - \omega t)}$. Учитывая (6), (7), (8), имеем для средней плотности тока, вызванного одним сортом зарядов:

$$\begin{aligned} \bar{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= -e^2 n E_{\beta 0} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}(t) - \omega t)} \int d\mathbf{p}_0 \int_{-\infty}^t e^{i\mathbf{k}[\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)] + i\omega(t - t')} v_\alpha(t) \times \\ &\times \left\{ \left(1 - \frac{k_\gamma v_\gamma(t')}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta(t')} + \frac{k_\beta v_\gamma(t')}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_\gamma(t')} \right\} dt'. \end{aligned} \quad (10)$$

Из сравнения (10) с (9) видим, что тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ определяется входящим в определение \bar{j}_α интегралом. Преобразуем этот интеграл, введя разность $\tau = t - t'$ за новую переменную интегрирования. При этом получим интеграл по τ в пределах от 0 до ∞ . Он не должен зависеть от t или t' . Подынтегральное выражение в (10) поэтому есть функция только разности $\tau = t - t'$. В частности можно положить в подынтегральном выражении $t' = 0$. Тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ оказывается равным

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi}{\omega} \cdot \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \sum e^2 n \int d\mathbf{p}_0 \int_0^\infty v_\alpha(t) \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}_0}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta^0} + \right. \\ \left. + \frac{k_\beta}{\omega} \mathbf{v}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}_0} \right] e^{i \left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' \right)} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Суммирование в (12) производится по сортам зарядов (электроны, ионы).

В случае начальной максвелловской функции распределения тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеет вид [1]

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \sum \frac{4\pi e^2 n}{\omega T} \int f_0(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0 \int_0^\infty v_\alpha(t) v_{\beta 0} e^{i \left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v} dt' \right)} dt. \quad (13)$$

Эту формулу можно рассматривать как обращение формулы для корреляционной функции микротоков $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \overline{j_\alpha(\mathbf{r}, t) j_\beta(\mathbf{r}', t')}$, связь которой с тензором $\epsilon_{\alpha\beta}$ была установлена в работах [2—4]. В области применимости закона Релея—Джинса эта связь такова

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = T \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (14)$$

здесь $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ — ядро интегрального оператора, связывающего электрическое поле с плотностью тока:

$$\bar{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_\beta(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'. \quad (15)$$

Тензор $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) - \delta_{\alpha\beta}}{4\pi} \omega$ связан с $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$ ($\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\tau \equiv t - t'$) соотношением

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{\infty} \int_V \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\mathbf{R})} d\mathbf{R} d\tau. \quad (16)$$

Таким образом, зная корреляционную функцию микротоков $G_{\alpha\beta}$, можно определить $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (и наоборот). Корреляционная функция $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ может быть найдена из закона движения зарядов путем составления произведения различных компонент микроскопической плотности тока

$$\mathbf{j} = \sum_i e_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (17)$$

и усреднения его по ансамблю*. Заметим, что пространственно-временная корреляционная функция в пренебрежении взаимодействием между зарядами имеет сравнительно простой вид. Например, для свободного движения зарядов

$$\left. \begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{R_\alpha R_\beta}{\tau^2} G_{00}, \\ G_{00} &= \sum (n - \bar{n})^2 = \sum \frac{e^2 n A}{(c^2 \tau^2 - R^2)^{3/2}} e^{-\frac{mc^2}{T} \frac{c^2 \tau^2}{(c^2 \tau^2 - R^2)^{1/2}}}, \\ G_{\alpha\beta} &= G_{00} = 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R^2 &< c^2 \tau^2, \\ R^2 &\geq c^2 \tau^2, \end{aligned} \quad (18)$$

здесь $A = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{T}{mc^2} K_0 \left(\frac{mc^2}{T} \right) + 2 \left(\frac{T}{mc^2} \right)^2 K_1 \left(\frac{mc^2}{T} \right) \right\}^{-1}$ — нормировочная константа релятивистского распределения Максвелла.

В отсутствие взаимодействия между зарядами корреляция между точками \mathbf{r} , t и \mathbf{r}' , t' происходит вследствие перемещения заряда, имеющего скорость $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{t - t'}$, из первой точки во вторую.

Корреляционной функции (18) соответствует тензор диэлектрической проницаемости плазмы с учетом теплового

* Идея непосредственного вычисления корреляционной функции микротоков из закона движения зарядов принадлежит М. А. Леонтовичу. Она послужила отправным пунктом при выполнении этой работы.

движения зарядов. В нерелятивистском случае (18) переходит в

$$G_{\alpha\beta} = \frac{R_\alpha R_\beta}{\tau^2} G_{00} = \sum e^2 \bar{n} \frac{R_\alpha R_\beta}{\tau^5} \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mR^2}{2T\tau^2}}. \quad (19)$$

Предельное значение этого выражения при $T \rightarrow 0$ (преенебрежение тепловым движением):

$$G_{\alpha\beta} = \frac{R_\alpha R_\beta}{\tau^2} G_{00} = \sum \frac{T}{m} e^2 \bar{n} \delta(\mathbf{R}) \delta_{\alpha\beta}. \quad (20)$$

Этому значению $G_{\alpha\beta}$ соответствует диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{\alpha\beta} = \left(1 - \sum \frac{4\pi e^2 \bar{n}}{m\omega^2} \right) \delta_{\alpha\beta}$.

При наличии магнитного поля тензор $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, T)$ имеет несколько более сложный вид.

Спектральная плотность $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ определяется по формуле

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma} G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau) e^{-i(\mathbf{kR} - \omega\tau)} d\mathbf{R} d\tau. \quad (21)$$

Практически спектральную плотность $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ (и, соответственно, $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$) удобнее определять не как фурье-компоненту функции $G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \tau)$, а исходя из выражений для фурье-компонент спектрального разложения плотности тока

$$\left. \begin{aligned} j_\alpha(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint j_\alpha(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{kr} - \omega t)} d\mathbf{r} dt, \\ \overline{j_\alpha(\mathbf{k}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{k}', \omega')} &= G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ получим при этом

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \sum \frac{e^2 \bar{n}}{(2\pi)^4} \int f_0(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0 \int_{-\infty}^{\infty} v_\alpha(t) v_{\beta 0} e^{i\left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v} dt'\right)} dt. \quad (23)$$

Из сопоставления (21) с (16) и (14) следует, что $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ отличается от $G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ кроме множителя $(2\pi)^4/T$ тем, что интеграл по t берется в пределах от 0 до ∞ :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \sum \frac{e^2 \bar{n}}{T} \int f_0(\mathbf{p}_0) d\mathbf{p}_0 \int_0^{\infty} v_\alpha(t) v_{\beta 0} e^{i\left(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v} dt'\right)} dt. \quad (24)$$

Как видно, тензор $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}$, полученный таким путем, совпадает с тензором $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (13), выведенным из кинетического уравнения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Д. Шафранов. ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
 2. М. А. Леонтович, С. М. Рытов, ЖЭТФ, 23, 246 (1952).
Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГТТИ, М., 1957.
 3. С. М. Рытов, ДАН СССР, 106, 822 (1956).
 4. Ю. А. Климонтович. ЖЭТФ, 34, 173 (1958).
-

Р. З. Сагдеев

**О ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ,
РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ПОСТОЯННОГО
МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕ ***

Рассматривается вопрос о поглощении электромагнитной волны в плазме за счет теплового движения электронов.

Представляет интерес анализ механизмов поглощения энергии плазмой в условиях, когда парными соударениями частиц можно пренебречь. Это особенно существенно при высоких температурах, когда джоулево поглощение резко занижено и необходимо искать более эффективно действующие при этих условиях механизмы, в первую очередь не связанные со столкновениями частиц.

Известные дисперсионные формулы, характеризующие распространение поперечных электромагнитных волн в плазме в присутствии постоянного магнитного поля, полученные из рассмотрения линеаризованного кинетического уравнения с самосогласованными полями, содержат эффекты поглощения волны даже при пренебрежении парными столкновениями зарядов в плазме [1—3]. Однако рассматривавшееся до сих пор линейное приближение не может дать ответа на вопрос о дальнейшей судьбе энергии волны, диссипируемой в плазме.

В настоящем сообщении приводится решение задачи о распространении электромагнитной волны вдоль постоянного магнитного поля без использования процедуры линеаризации, а лишь в пренебрежении воздействием магнитного поля волны на электроны при довольно общих начальных условиях. Проведенное рассмотрение содержит в себе как частный случай результаты линеаризованной теории.

* Работа выполнена в 1958 г.

Пусть невозмущенное магнитное поле H_0 направлено по оси z и все величины зависят лишь от одной пространственной координаты z и от времени t . Рассмотрим задачу о бесконечно протяженной плазме с начальными условиями. Исходная система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + \frac{e}{m} E_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

$$-\text{rot rot } \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} en_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} f(z, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (2)$$

Здесь $f(z, \mathbf{v}, t)$ — функция распределения электронов (ионы считаются неподвижными).

В уравнении (1) опущен член, учитывающий действие на электроны магнитного поля волны $\frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$. Известным оправданием такого подхода может служить предположение о нерелятивизме электронов (подробнее см. ниже).

Начальные условия принимаем в виде:

$$\left. \begin{aligned} f(z, \mathbf{v}, 0) &= f_0(v_x^2 + v_y^2, v_z^2), \\ E_x(z, 0) &= E_x^0(z), \quad E_y(z, 0) = E_y^0(z), \\ \frac{\partial}{\partial t} E_x(z, 0) &= E_x^0(z), \quad \frac{\partial}{\partial t} E_y(z, 0) = E_y^0(z, 0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение уравнения (1) с учетом (3) будет иметь вид

$$f(\mathbf{v}, z, t) = f_0[v_{x0}^0(v_x, v_y, t) + v_{y0}^2(v_x, v_y, t), v_z^0], \quad (4)$$

где $v_x = v_x(v_{x0}, v_{y0}, t)$ и $v_y = v_y(v_{x0}, v_{y0}, t)$ решение системы уравнений движения

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v}_x &= eE_x(z(t), t) + \frac{e}{c} v_y H_0, \\ m\dot{v}_y &= eE_y(z(t), t) - \frac{e}{c} v_x H_0, \end{aligned} \right\} \left(\omega = \frac{eH_0}{mc} \right) \quad (5)$$

с начальными условиями $v_x(0) = v_{x0}$, $v_y(0) = v_{y0}$. Из (5) находим

$$v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = [v_x - V_x(t)]^2 + [v_y - V_y(t)]^2, \quad (6)$$

где, например,

$$V_x(t) = \frac{e}{m} \cos \omega t \int_0^t \{E_x[z(t'), t'] \cos \omega t' - E_y[z(t'), t'] \sin \omega t'\} dt' + \\ + \frac{e}{m} \sin \omega t \int_0^t \{E_y[z(t'), t'] \cos \omega t' + E_x[z(t'), t'] \sin \omega t'\} dt'.$$

Подставив найденное для $f(z, \mathbf{v}, t)$ выражение в (3), получим уравнение, определяющее \mathcal{E} . Удобнее, однако, ввести переменную $\mathcal{E} = E_x + iE_y$. Тогда \mathcal{E} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} \int d\mathbf{v} \cdot f_0(v_x^2 + v_y^2, v_z^2) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathcal{E}[z - v_z(t - t'), t'] e^{i\omega(t' - t)} dt' \left(\omega_0^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \right). \quad (7)$$

Пусть, например, $f_0 = \frac{m^{3/2}}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2T}}$. Применяв к (7) преобразование Фурье по z и Лапласа по t , получим

$$\mathcal{E}(k, p) = \frac{p\mathcal{E}(k, t=0) + \mathcal{E}'(k, t=0)}{(kc)^2 + p^2 + p\omega_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{k^2\tau^2}{2m} T - (i\omega + p)\tau} d\tau}. \quad (8)$$

Возвращаясь к оригиналу, можно найти затем и $f(z, \mathbf{v}, t)$ из (4) и (6). Уравнение

$$(kc)^2 + p^2 + p\omega_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{k^2\tau^2}{2m} T - (i\omega + p)\tau} d\tau = 0, \quad (9)$$

связывающее ω и k , можно без труда исследовать, например, в области, далекой от резонанса, где поглощение мало. Пусть $p = \alpha + i\beta$, причем $|\alpha| \ll |\beta|$. Уравнение для действительной части (9) имеет вид $k^2 c^2 - \beta^2 + \frac{\beta \omega_0^2}{\omega + \beta} = 0$. Таким образом, обозначив через ϵ величину $\frac{k^2 c^2}{\beta^2}$ (эта величина аналогична соответствующей компоненте тензора диэлектрической проницаемости линейной теории), получим

$$\epsilon = \frac{k^2 c^2}{\beta^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\beta(\omega + \beta)}. \quad (10)$$

Из мнимой части (9) находим декремент затухания

$$\alpha = -\frac{1}{|k|} \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{T}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\omega + \beta)^2 \exp \left\{ -\frac{(\omega + \beta)^2}{2Tk^2} m \right\}. \quad (11)$$

(10) и (11) совпадают с соответствующими формулами линеаризованной теории [3].

Пользуясь (4) и (6), можно легко убедиться, что энергия теплового движения электронов, пропорциональная $(v - \bar{v})^2$, остается постоянной. Таким образом, энергия волны, диссипируемая в плазме рассмотренным механизмом, не приводит к увеличению энергии теплового движения электронов (вопреки утверждению, содержащемуся в [1]), а идет, как нетрудно показать, на создание упорядоченного ларморовского вращения электронов.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что все эти результаты получены в пренебрежении действием магнитного поля волны, т. е. $\sqrt{\epsilon} \frac{v}{c} \ll 1$. Раскрывая выражение для ϵ , легко показать,

что это ограничение эквивалентно условию: $\frac{H_0^2}{8\pi} \gg nT$.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность академику М. А. Леонтовичу и профессору Д. А. Франк-Каменецкому за ценное обсуждение и В. Д. Шафранову, вместе с которым неоднократно обсуждался круг вопросов, затронутых в настоящей заметке.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Н. Гершман, В. Л. Гинзбург, Н. Г. Денисов. УФН, 10, 561 (1957).
 2. T. Pradhan. Phys. Rev., 107, 1222 (1957).
 3. В. Д. Шафранов. ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
-

В. Д. Шафранов

ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ОБЛАСТИ ИОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА *

В связи с проблемой диссипации энергии в плазме в отсутствие столкновений [1] представляет интерес определение условий, при которых происходит поглощение энергии электромагнитного поля частицами плазмы (область частот, направление распространения поля и т. д.).

Для установления областей поглощения электромагнитного поля ионами вычислим квадрат показателя преломления плазмы при учете движения ионов вдоль силовых линий магнитного поля. Введение показателя преломления оправдывается, если длина волны мала по сравнению с размерами области, занятой плазмой. В случае плазменного столба радиуса a это условие имеет вид $ka \ll 1$, где k — волновое число. При частотах ω , сравнимых с ионной циклотронной частотой

$\omega_H = \frac{eH}{Mc}$, показатель преломления плазмы по порядку вели-

чины равен $N \approx \omega_0/\omega_H$, где $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n/M}$. Следовательно, по порядку величины $k = N \frac{\omega_H}{c} = \frac{\omega_0}{c}$ и $ka = 2\sqrt{\Pi}$, где $\Pi = \frac{e^2 \pi a^2 n}{Mc^2}$.

Мы будем предполагать, что $\Pi \gg 1$. Предположим также, что давление плазмы сравнимо с давлением магнитного поля $nT \sim H^2/8\pi$. Эти два условия позволяют рассматривать ионы как точечные диполи, совершающие тепловое движение только вдоль силовых линий магнитного поля. Действительно, при $\Pi \gg 1$ и $nT \sim \frac{H^2}{8\pi}$ отношение среднего ларморовского радиуса

* Работа выполнена в 1958 г.

к радиусу плазменного столба $\frac{v_T}{\omega_H a} = \frac{(8\pi nT/H^2)^{1/2}}{2\Pi^{1/2}} \ll 1$ и смещениями ионов вследствие теплового движения поперек магнитного поля можно пренебречь.

В этом приближении тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеет такой же вид, как и без учета теплового движения. Если ось z направлена вдоль постоянного магнитного поля, то

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

причем для волны, распространяющейся под углом θ к полю:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 1 + i\pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{2\omega} \langle \delta_+(\omega - \omega_{H\alpha} - kv_z \cos \theta) + \\ &\quad + \delta_+(\omega + \omega_{H\alpha} - kv_z \cos \theta) \rangle \\ g &= i\pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{2\omega} \langle \delta_+(\omega - \omega_{H\alpha} - kv_z \cos \theta) - \\ &\quad - \delta_+(\omega + \omega_{H\alpha} - kv_z \cos \theta) \rangle \\ \eta &= 1 + i\pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\omega} \langle \delta_+(\omega - kv_z \cos \theta) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь $\delta_+(x) = \delta(x) + \frac{i}{\pi x}$, суммирование производится по сортам частиц (электроны, ионы), v_z — скорость заряда вдоль поля, угловые скобки означают усреднение по максвелловскому распределению скоростей. Стоящие в мнимых частях ϵ , g , η , δ -функции определяют характер поглощения волн. Так, мнимые части ϵ , g ответственны за поглощение на циклотронном резонансе (с учетом доплер-эффекта), мнимая часть η — за черенковское поглощение.

Без учета теплового движения ($v=0$) получают хорошо известные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega - \omega_{He}} + \frac{1}{\omega + \omega_{He}} \right) - \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega + \omega_H} + \frac{1}{\omega - \omega_H} \right), \\ g &= \frac{\omega_{0e}^2}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega - \omega_{He}} - \frac{1}{\omega + \omega_{He}} \right) + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega + \omega_H} - \frac{1}{\omega - \omega_H} \right), \\ \eta &= 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$, $\omega_{He} = \frac{|e|H}{mc}$ (m — масса электрона). В предположении $\omega \ll \omega_{He}$ и $8\pi nT \sim H^2$ эти выражения значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \equiv \varepsilon_0, \\ g &= \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\omega_H} \equiv g_0, \\ \eta &= -\frac{M}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \equiv \eta_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Квадрат показателя преломления N^2 в среде с тензором $\varepsilon_{\alpha\beta}$ вида (1) равен

$$N^2 = \frac{(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^2 \theta + 2\varepsilon\eta \pm \sqrt{(\varepsilon^2 - g^2 - \varepsilon\eta) \sin^4 \theta + 4\eta^2 g^2 \cos^2 \theta}}{2(\varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}. \quad (5)$$

Так как η содержит большой множитель M/m , то это выражение можно упростить разложением по $1/\eta$. В нулевом приближении

$$N^2 = \frac{\varepsilon(1 + \cos^2 \theta) \pm \sqrt{\varepsilon^2 \sin^4 \theta + 4g^2 \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

Квадрат показателя преломления без учета теплового движения p^2 согласно (4), (6) запишется в виде

$$p^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \frac{2}{1 + \cos^2 \theta \mp \sqrt{1 + 2\left(2\frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} - 1\right) \cos^2 \theta + \cos^4 \theta}}. \quad (7)$$

Зависимость p_1^2 (знак минус перед корнем) и p_2^2 от ω изображена схематически на рисунке. При $\omega = \omega_H$ p_1^2 обращается в бесконечность. Здесь электромагнитное поле поглощается ионами.

Ширина полосы поглощения зависит от отношения тепловой скорости ионов к фазовой скорости волны, в отсутствие теплового движения она равна нулю. При условии $\frac{8\pi nT}{H^2} \sim 1$ фазовая скорость волны приближается к тепловой скорости ионов, поэтому ширина полосы поглощения вследствие доплер-эффекта сильно возрастает.

Определим край полосы поглощения, где $\text{Im } N^2 \ll \text{Re } N^2$. Положим $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\varepsilon_1$, $g = g_0 + ig_1$, $\eta = \eta_0 + i\eta_1$, считая мнимые

добавки ε_1 , g_1 , η_1 малыми и пренебрегая учетом теплового движения в действительных частях. Согласно (2) вблизи циклотронного резонанса:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 = g_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \beta p \cos \theta} e^{-\left(\frac{\omega_H - \omega}{\omega \beta p \cos \theta}\right)^2} \\ \eta_1 = 2 \sqrt{\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 (\beta p \cos \theta)^3} e^{-\frac{1}{\beta^2 p^2 \cos^2 \theta}} \end{aligned} \right\} (8)$$

здесь положено $k = \frac{\omega}{c} p$, $\beta^2 = \frac{2T}{M}$; в выражениях ε_1 , g_1 , η_1 опущены электронные слагаемые, несущественные при $\omega \ll \omega_{He}$. Линеаризуя выражение (6) по мнимым добавкам к ε , g , получим $N = p(1 + ix)$, где p определяется формулой (7), а выражение для x имеет вид

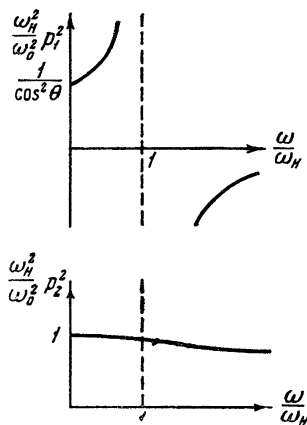


Рис. 1.

$$x = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 p^3 \cos \theta} e^{-\left(\frac{\omega_H - \omega}{\omega \beta p \cos \theta}\right)^2} \times \frac{(1 + \cos^2 \theta) \sqrt{\omega_H^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta} \pm (\omega_H \sin^4 \theta + 4\omega \cos^2 \theta)}{2 \cos^2 \theta \sqrt{\omega_H^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \cos^2 \theta}}. \quad (9)$$

Из этого выражения видно, что поглощение в районе циклотронного резонанса имеет место для всех направлений распространения волн.

Заметим, что относительная ширина полосы поглощения зависит только от одного параметра $\eta_H = \frac{4\pi nT}{H^2}$. В самом деле $\omega_0^2/\omega_H^2 = \eta_H/\beta^2$ и, следовательно, произведение $p^2\beta^2$, зависящее от $\omega_0^2\beta^2/\omega_H^2$, есть функция от ω/ω_H и η_H . Из выражения для x следует тогда, что $x = x\left(\frac{\omega}{\omega_H}, \eta_H\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, см. настоящий том, стр. 422.

Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов

КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА ПРИ УЧЕТЕ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ИОНОВ*

Рассмотрены колебания плазменного цилиндра. Изучено поглощение на циклотронном ионном резонансе.

Как известно, при увеличении температуры плазмы эффективность обычного джоулева механизма нагрева падает. Представляет интерес исследовать другие методы нагрева плазмы. Одним из таких методов является «бетатронный» метод нагрева [1] (названный в [2] «гирорелаксационным»), основанный на периодическом изменении магнитного поля с периодом, сравнимым со временем столкновения ионов.

В высокотемпературной плазме, в которой столкновения редки, представляет интерес исследование механизмов поглощения энергии, не связанных со столкновениями. Физические основы такого бесстолкновительного (циклотронного и черенковского) поглощения разобраны в [3—5]. Для конкретного расчета поглощения энергии в плазменном шнуре необходимо решить задачу о колебаниях плазменного шнура. Колебания цилиндра плазмы при частотах, значительно меньших циклотронной частоты ионов, рассматривались в работах [6, 7], циклотронный резонанс ионов рассматривался Т. Стиксом [8], учет высокочастотных колебательных ветвей был произведен К. Керпером [9] для случая колебаний, однородных вдоль оси. Все эти цитируемые работы базировались на гидродинамическом описании плазмы. Л. И. Рудаков и Р. З. Сагдеев [10] решили задачу о колебаниях плазменного шнура, исходя из кинетического уравнения в дрейфовом

* Работа выполнена в 1958 г.

приближении, которое учитывает тепловое движение ионов вдоль силовых линий поля при частотах $\omega \ll \omega_{Hi}$. Такой подход дал возможность учесть черенковское поглощение.

В настоящей работе решается задача о колебаниях цилиндра плазмы с учетом теплового движения ионов, приводящего и к черенковскому и к циклотронному поглощению.

Задача решается при следующих допущениях:

1) рассматриваются частоты, значительно меньшие циклотронной частоты электронов $\omega \ll \omega_{He}$;

2) столкновения не учитываются $\omega \gg \nu$ (ν — частота столкновений);

3) давление плазмы считается малым по сравнению с давлением магнитного поля;

4) ларморовские радиусы частиц считаются малыми по сравнению с поперечным масштабом задачи.

Сделанные предположения соответствуют случаю полного скин-эффекта для тока, поэтому в невозмущенной плазме магнитное поле будет иметь следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \{0, 0, H_{zi}\}, & 0 < r < a, \\ \mathbf{H} &= \{0, H_{\varphi}, H_{ze}\}, & a < r < b. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Мы предполагаем, что плазменный шнур помещается внутри идеально-проводящего цилиндрического коаксиального кожуха радиуса b .

В отличие от работы [10], основанной на решении дрейфового кинетического уравнения, мы воспользуемся для решения задачи тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$.

Пусть колебания имеют форму $f(r) e^{i(kz - \omega t)}$. Электромагнитное поле определяется уравнениями Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} &= \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}, \\ i \frac{\omega}{c} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где \mathbf{D} — вектор электрической индукции ($D_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}$).

При учете допущения «4», позволяющего пренебречь тепловым движением зарядов в перпендикулярной магнитному полю плоскости, тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix},$$

так что

$$\left. \begin{aligned} D_r &= \varepsilon E_r + igE_\varphi \\ D_\varphi &= -igE_r + \varepsilon E_\varphi \\ D_z &= \eta E_z \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Граничными условиями являются условия непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на границе плазмы $\mathbf{E}_t^* = \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right\}_t$ и обращения ее в нуль ($\mathbf{E}_t = 0$) при $r = b$, а также условия непрерывности тензора потока импульса. Этим условиям необходимо удовлетворить на искаженной границе плазменного шнура, которая определяется уравнением $R = a + \xi_r$, где ξ_r — радиальная компонента смещения ($i\omega\xi_r = v_r$, v_r — скорость центра масс единицы объема). На самом деле, плазма, давление которой уравновешено давлением магнитного поля, по своей природе не может обладать резкой границей. В этом смысле, вводя условную ограничивающую ее поверхность, мы должны помнить, что она является не математической поверхностью, а переходным слоем с толщиной по крайней мере порядка среднего ларморовского радиуса ионов. Тогда все получаемые результаты будут строго справедливы лишь для длин волн возмущения плазменного шнура больших, чем толщина пограничного переходного слоя, т. е. ларморовского радиуса ионов.

Естественно ожидать, что таким длинам волн будут соответствовать частоты колебаний, меньшие ω_{Hi} . На этом пути мы можем надеяться получить лишь нижний край полосы поглощения на циклотронном резонансе ионов. Смещение границы ξ_r в этом приближении определяется чрезвычайно просто. Так как $\lambda \gg r_H$ и $\omega \ll \omega_H$, то

$$v_r = cE_\varphi/H_{z0}, \quad \xi_r = -i\omega cE_\varphi/H_{z0}. \quad (4)$$

После несложных преобразований, уравнения (2) для внутренней области (в плазме) принимают вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{i}{k} \left\{ \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E_r - ig \frac{\omega^2}{c^2} E_\varphi \right\}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} \right) - \left(k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_\varphi - ig \frac{\omega^2}{c^2} E_r = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(E_r + i \frac{g}{\varepsilon} E_\varphi \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{\eta}{\varepsilon} \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E_r - ig \frac{\omega^2}{c^2} E_\varphi \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В последних двух уравнениях для E_r и E_z можно выделить комбинацию $E_{1,2} = E_r + \lambda_{1,2} E_z$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_{1,2})}{\partial r} \right) + \kappa_{1,2}^2 E_{1,2} = 0, \quad (8)$$

где

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\eta(\varepsilon - N^2) - ig(\lambda_{1,2} - ig)}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Значения $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ определяются уравнением

$$\lambda^2 - \frac{i}{g} \lambda \frac{g^2 + (N^2 - \varepsilon)(\eta - \varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{N^2 + \eta - \varepsilon}{\varepsilon} = 0. \quad (10)$$

Выбор одного из двух значений λ определяет поляризацию волны. Пусть $E_z = 0$, тогда $E_r = -\lambda_2 E_z$ и $E_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) E$. (Для волн другой поляризации в этих соотношениях нужно было бы поменять местами индексы 1 и 2).

Для выбранной нами поляризации ($E_z = 0$). Решение уравнений (5)–(7) для внутренней области имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= C J_1(x_1 r), \\ E_r &= -\lambda_2 C J_1(x_1 r), \\ E_z &= \frac{i}{k x_1} \left[\lambda_2 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) + ig \frac{\omega^2}{c^2} \right] C J_0(x_1 r), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -N C J_1(x_1 r), \\ H_z &= \frac{1}{N} (\varepsilon E_r + ig E_z) = \frac{1}{N} (ig - \lambda_2 \varepsilon) C J_1(x_1 r), \\ H_z &= -i \frac{c}{\omega} x_1 C J_0(x_1 r). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решение для внешней области

$$\left. \begin{aligned} E_r &= A_1 K_1(kr) + B_1 I_1(kr); \quad H_r = -A_2 K_1(kr) - B_2 I_1(kr); \\ E_z &= A_2 K_1(kr) + B_2 I_1(kr); \quad H_z = \frac{1}{N} [A_1 K_1(kr) - B_1 I_1(kr)]; \\ E_z &= -i [A_1 K_0(kr) - B_1 I_0(kr)]; \\ H_z &= iN [A_2 K_0(kr) - B_2 I_0(kr)]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Учтем теперь граничные условия. Согласно (4) $E_{\varphi i}^*$ внутри шнура равно нулю, следовательно, и $E_{\varphi e}^* = 0$. Отсюда $E_{\varphi i} =$

$= -i \frac{\omega}{c} \xi_r H_{zi}^0, E_{\varphi e} = -i \frac{\omega}{c} \xi_r H_{ze}^0$. Для z -компоненты имеем условие $E_{zi} = E_{ze} - i \frac{\omega}{c} \xi_r H_{\varphi e}^0$.

Исключая постоянные в выражениях (11)—(13) с помощью граничных условий, получим из условия непрерывности тензора импульса окончательное дисперсионное уравнение в виде

$$h^2 x a \frac{J_0(xa)}{J_1(xa)} = 1 - h_e^2 k a \frac{K_0(ka) I_1(kb) + I_0(ka) K_1(kb)}{K_0(ka) I_1(kb) - I_0(ka) K_1(kb)}, \quad (14)$$

где

$$h_i = H_{zi}/H_z(a); \quad h_e = H_{ze}/H_z(a).$$

Выясним физический смысл двух разных типов волн E_1 и E_2 . В области частот $\omega \ll \omega_{Hi}$ можно произвести разложение по $1/\eta$ [5]. Тогда

$$\lambda_1 = i \frac{\eta}{g\varepsilon} (N^2 - \varepsilon) + i \frac{g^2 N^2 - \varepsilon (N^2 - \varepsilon)^2}{g\varepsilon (N^2 - \varepsilon)}; \quad \lambda_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{g^2 - (N^2 - \varepsilon)^2}{N^2 - \varepsilon}; \quad (15)$$

$$\lambda_2 = -\frac{ig}{N^2 - \varepsilon}; \quad \lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\eta(\varepsilon - N^2)}{\varepsilon}.$$

Для волны E_1 , как следует из (11), (15) в этом приближении E_z обращается в нуль, тогда как для волны E_2 $E_z \neq 0$. При $E_z \neq 0$ имеет место разделение зарядов вдоль оси z , так что решение E_2 соответствует высокочастотным ленгмюровским колебаниям. Для нас представляют интерес ионные колебания, описываемые решением E_1 .

Пусть $\kappa^2 a^2 = \beta_n^2$ является одним из корней дисперсионного уравнения (14). Тогда $N^2 = \varepsilon - \beta_n^2 \pm \sqrt{g^2 + \beta_n^2}$. Полагая $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\varepsilon_1$, $g = g_0 + ig_1$, где $\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - \omega^2}$, $g_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\omega_H}$, $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \beta_N} e^{-\left(\frac{\omega_H - \omega}{\omega \beta_N}\right)^2}$, $\beta = \sqrt{\frac{2T}{M}}$, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{M}$ находим разложением по ε_1 , g_1 действительную и мнимую части волнового числа $k = \frac{\omega}{c} N = \frac{\omega}{c} p(1 + ia)$ в виде

$$p_n^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - \omega^2} - \beta_n^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\omega_H}\right)^2 + \beta_n^4}, \quad (16)$$

$$a_n = \left(1 \pm \frac{g}{\sqrt{g^2 + \beta_n^4}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \beta_n^2} e^{-\left(\frac{\omega_H - \omega}{\omega \beta_n}\right)^2}; \quad (17)$$

α_n представляет собой затухание волны за счет циклотронного поглощения ионами.

Для получения черенковского поглощения необходимо было бы в разложении по $1/\eta$ удерживать следующий член.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. И. Будкер, см. настоящее издание, т. 1, стр. 122.
 2. A. Schlüter. Zs. f. Naturforsch., 12a, 822 (1957).
 3. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).
 4. Р. З. Сагдеев, см. настоящий том, стр. 422.
 5. В. Д. Шафранов, см. настоящий том, стр. 426.
 6. Б. А. Трубников, см. настоящее издание, т. 1, стр. 289.
 7. В. Д. Шафранов, см. настоящее издание, т. 2, стр. 130.
 8. Th. Stix. Phys. Rev., 106, 1146 (1957).
 9. К. Кögler. Z. Naturforsch., 12a, 815 (1957).
 10. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, см. настоящий том, стр. 54.
-

СПИСОК РАБОТ

по физике плазмы и проблеме управляемых термоядерных реакций, выполненных сотрудниками Института атомной энергии АН СССР и опубликованных ранее в печати

- Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов. Исследование импульсных разрядов с большой силой тока. Атомная энергия, № 3, 76 (1956).
- Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, Е. И. Доброхотов, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, В. И. Сидницып, Н. В. Филиппов. Жесткое излучение импульсных разрядов. Атомная энергия, № 3, 84, 1956.
- Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов. Природа, № 1, 18 (1957).
- Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, С. А. Чуватин. Электродинамическое ускорение ступков плазмы. ЖЭТФ, 33, 3 (1957).
- А. Л. Безбатченко, И. Н. Головиц, Д. П. Иванов, В. Д. Кириллов, Н. А. Явлинский. Исследование газового разряда с большой силой тока в продольном магнитном поле. Атомная энергия, № 5, 26 (1956).
- С. Т. Беляев, Г. И. Будкер. Релятивистское кинетическое уравнение. ДАН, 107, 807 (1956).
- Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле. Укр. матем. журн., VII (1956); см. также: Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИИТЛ, стр. 353 (1955).
- Н. А. Борзунов, В. И. Коган, Д. В. Орлинский. Оценка электронной температуры и степени ионизации в начальной стадии мощного импульсного разряда. Атомная энергия, 4, 180 (1958).
- Н. А. Борзунов, Д. В. Орлинский, С. М. Осовец. Исследование мощного импульсного разряда в газах с помощью скоростной фотосъемки. Атомная энергия, 4, 149 (1958).
- Н. А. Борзунов, Д. В. Орлинский, С. М. Осовец. Исследование мощного импульсного разряда в конических камерах. ЖЭТФ, в печати.
- С. И. Брагинский. К теории движения заряженных частиц в сильном магнитном поле. Укр. матем. журн., VIII, № 2, 119 (1956).
- С. И. Брагинский. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ЖЭТФ, 33, 459 (1957).
- С. И. Брагинский. О поведении полностью ионизованной плазмы в сильном магнитном поле. ЖЭТФ, 33, 645 (1957).
- С. И. Брагинский. О типах колебаний плазмы в магнитном поле. ДАН, 115, 475 (1957).

- С. И. Брагинский. К теории развития канала искры. ЖЭТФ, 34, 1548 (1958).
- Г. И. Будкер. Стабилизированный электронный пучок. Атомная энергия, № 5, 9 (1956).
- Н. П. Генералов. К теории зондов. Атомная энергия, 4, 184 (1958).
- Б. Б. Кадомцев. О действующем поле в плазме. ЖЭТФ, 33, 151 (1957).
- В. И. Коган. Электронная температура и степень ионизации в начальной стадии мощного импульсного разряда. Атомная энергия, 4, 178 (1958).
- В. И. Коган. К теории уширения спектральных линий в плазме. ДАН, 118, 907 (1958); Изв. АН СССР, сер. физ., 22, 714 (1958).
- В. С. Комельков, Г. Н. Аретов. Получение больших импульсных токов. ДАН, 110, № 4 (1956).
- В. С. Комельков, Д. С. Парфелов. Расширение канала искры в воздухе при токах около $2 \cdot 10^6$ ампер. ДАН, 111, 1215 (1956).
- В. С. Кудрявцев. Энергетическая диффузия быстрых ионов в равновесной плазме. ЖЭТФ, 34, 1558 (1958).
- В. С. Кудрявцев. Сечение упругого столкновения атомов водорода друг с другом. ЖЭТФ, 33, 243 (1957).
- И. В. Курчатов. О возможности создания термоядерных реакций в газовом разряде. Атомная энергия, № 3, 65 (1956).
- М. А. Леоптович, С. М. Осовец. О механизме сжатия тока при быстром и мощном газовом разряде. Атомная энергия, № 3, 81 (1956).
- С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный. Жесткое рентгеновское излучение, сопровождающее разряд в газе. Атомная энергия, № 3, 97 (1956).
- С. Ю. Лукьянов, В. И. Сеницын. Спектроскопическое исследование мощного импульсного разряда в водороде. Атомная энергия, № 3, 88 (1956).
- С. Ю. Лукьянов, В. И. Сеницын. Спектроскопическое исследование мощного импульсного разряда в водороде II. ЖЭТФ, 34, 849 (1958).
- И. М. Подгорный. О рентгеновском излучении при старте газового разряда. ДАН, 108, 820 (1956).
- И. М. Подгорный, С. А. Чуватин. Рентгеновское излучение при мощном импульсном разряде в ксеноне. ДАН, 117, 795 (1957).
- Р. З. Сагдеев, А. А. Веденов. О возможном механизме илжекции в атмосферах звезд. Сб. «Вопросы космологии» (в печати).
- Б. А. Трубников. Излучение плазмы в магнитном поле. ДАН, 118, 913 (1958).
- Б. А. Трубников. Приведение кинетического уравнения в случае кулоновских столкновений к дифференциальному виду. ЖЭТФ, 34, 1341 (1958).
- Ю. А. Церковников. Устойчивость плазмы в сильном магнитном поле. ЖЭТФ, 32, 67 (1957).
- В. Д. Шафранов. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в магнитном поле. Атомная энергия, № 5, 38 (1956).
- В. Д. Шафранов. Структура ударной волны в плазме. ЖЭТФ, 32, 1454 (1957).
- В. Д. Шафранов. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях. ЖЭТФ, 33, 710 (1957).
- В. Д. Шафранов. Магнитно-вихревые кольца. ЖЭТФ, 33, 831 (1957).
- В. Д. Шафранов. Распространение электромагнитного поля в среде с пространственной дисперсией. ЖЭТФ, 34, 1475 (1958).

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
С. М. О с о в е ц. Об удержании плазмы бегущим магнитным полем	3
Б. Б. К а д о м ц е в. О гидродинамике плазмы низкого давления	16
С. И. Б р а г и н с к и й, А. П. К а з а н ц е в. Магнитогидродинамические волны в разреженной плазме	24
Л. С. С о л о в ь е в. Движение заряженных частиц в магнитной ловушке	32
А. А. В е д е н о в, Л. И. Р у д а к о в. О движении заряженной частицы в быстропеременных электромагнитных полях	42
Д. В. О р л и н с к и й. Стабилизация плазмы с помощью системы стержней	49
Л. И. Р у д а к о в, Р. З. С а г д е е в. Исследование устойчивости цилиндрического плазменного шнура методом кинетического уравнения	54
В. Д. Ш а ф р а н о в. Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током	61
Н. М. П о л и е в к т о в - Н и к о л а д з е. К расчетам квазистационарного электромагнитного поля в системе с тороидальной симметрией	70
В. Ф. Д е м и ч е в, Ю. Г. П р о х о р о в. Исследование нейтронного излучения, возникающего в газовом разряде с силой тока 160 ка	81
Б. А. Т р у б н и к о в. О возможном механизме нейтронного эффекта при мощных импульсных разрядах в дейтерии	87
Т. Ф. В о л к о в. Влияние высокочастотного электромагнитного поля на колебания плазмы	98
Т. Ф. В о л к о в. О колебаниях и устойчивости поверхности плазмы в поле бегущей электромагнитной волны	109
А. Л. Б е з б а т ч е н к о, И. Н. Г о л о в и н, П. И. К о з л о в, В. С. С т р е л к о в, Н. А. Я в л и н с к и й. Безэлектродный разряд с большой силой тока в тороидальной камере с продольным магнитным полем	116

В. И. Пистунович. Измерение температуры электронов и концентрации ионов двойным плавающим зондом в безэлектродном разряде	134
В. С. Стрелков. Исследование излучений безэлектродного разряда в дейтерии	156
Д. П. Петров, Н. В. Филиппов, Т. И. Филиппова, В. А. Храбров. Мощный импульсный газовый разряд в камерах с проводящими стенками	170
А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров. Исследование импульсного разряда в дейтерии при скоростях нарастания тока до 10^{12} а/сек и напряжениях до 120 кэ	182
С. И. Брагинский, И. М. Гельфанд, Р. П. Федоренко. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде	201
И. М. Подгорный, С. А. Чуватин, Г. А. Быков, В. Д. Письменный. Исследование процесса электродинамического ускорения сгустков плазмы. II	222
Е. Е. Юшманов. Радиальное распределение потенциала в цилиндрической магнитной ловушке при магнетронном способе инжекции ионов	235
В. И. Коган. Уширение спектральных линий в высокотемпературной плазме	258
Б. А. Трубников. Связь коэффициентов поглощения и испускания излучения для плазмы, находящейся в магнитном поле	305
Б. А. Трубников. Поведение плазмы в быстропеременном магнитном поле	309
А. И. Морозов. Черенковская генерация магнитозвуковых волн	331
Б. Б. Кадомцев. Магнитные ловушки для плазмы	353
Б. Б. Кадомцев. О неустойчивости плазмы в магнитном поле при наличии ионных пучков	364
Б. Б. Кадомцев. О динамике плазмы в сильном магнитном поле	370
Б. Б. Кадомцев. О конвективной неустойчивости плазмы	380
Р. З. Сагдеев. О нелинейных движениях разреженной плазмы в магнитном поле	384
А. И. Морозов, Л. С. Соловьев. О гашении колебаний плазменного шнура	391
В. Д. Шафранов. К выводу тензора диэлектрической проницаемости плазмы	416

Р. З. Сагдеев. О поглощении электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля в плазме . .	422
В. Д. Шафранов. Показатель преломления плазмы в магнитном поле в области ионного циклотронного резонанса	426
Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов. Колебания плазменного шнура при учете теплового движения ионов	430
Список работ по физике плазмы и проблеме управляемых термоядерных реакций, выполненных сотрудниками Института атомной энергии АН СССР и опубликованных ранее в печати	

**Физика плазмы и проблема управляемых
термоядерных реакций,
Том IV**

*Утверждено к печати Институтом атомной энергии
Академии наук СССР*

Сдано в набор 2/VII 1958 г. Подп. в печать 25/VII 1958 г. Формат бум. 60×92¹/₁₆.
Печ. л. 27,5 +4 вкл. Уч.-изд. лист. 23,1+0,4 вкл. Т-07859. Тираж 3000. Изд. № 3468.
Тип. зак. 712.

Цена 12 р. 10 к.

Издательство Академии наук СССР. Москва, Подосенский пер., д. 21

1-я типография Издательства АН СССР. Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12.

**ФИЗИКА ПЛАЗМЫ
И ПРОБЛЕМА
УПРАВЛЯЕМЫХ
ТЕРМОЯДЕРНЫХ
РЕАКЦИЙ**

ТОМ

IV