

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

---

ВЫПУСК

10

НЕЛИНЕЙНАЯ  
ДИНАМИКА.

Под общей редакцией  
акад. М. А. ЛЕОНТОВИЧА

Редактор выпуска д-р физ.-мат. наук  
А. Б. МИХАЙЛОВСКИЙ



МОСКВА · АТОМИЗДАТ · 1980

**Вопросы теории плазмы.**/Под общей ред. М. А. Леонтовича. Вып. 10.: Сб. статей. Нелинейная динамика. Магнитосферные неустойчивости /Под ред. А. Б. Михайловского. — М.: Атомиздат, 1980, — 320 с.

Изложены результаты, полученные в последние годы по нелинейной динамике плазмы и теории магнитосферных неустойчивостей. В выпуск включены четыре обзора: динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме; нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика; динамика Z-пинча; циклотронная неустойчивость радиационных поясов Земли.

Для специалистов по физике и технике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза, специалистов в области космических исследований, специалистов в смежных областях науки и техники. Может быть полезна студентам старших курсов, аспирантам и преподавателям вузов.

Рис. 91. Табл. 1. Список литературы 381 наименование.

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ И ИОНОСФЕРНАЯ АЭРОДИНАМИКА

А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский

---

## § 1. Введение

Исследования нелинейных нестационарных течений разреженной плазмы вызывает существенный интерес. Эти исследования не только важны для практических вопросов, связанных с динамикой плазмы (таких, например, как теория обтекания Земли, планет и других естественных или искусственных тел космической плазмой), но имеют и принципиальное значение. Действительно, бесстолкновительная плазма является особой средой, к описанию которой неприменимы обычные гидродинамические методы: важную роль в ней играет тепловой разброс частиц по скоростям, так что существенно необходимой становится кинетическая теория. Кроме того, здесь отсутствует сильная столкновительная диссипация, и потому на первый план выходят дисперсионные эффекты и особые тонкие механизмы бесстолкновительной диссипации. Это приводит к разнообразным новым физическим явлениям.

В кинетической теории в отсутствие соударений функции распределения электронов и ионов описываются бесстолкновительными уравнениями Больцмана. Вместе с уравнениями Максвелла для поля они составляют весьма сложную систему. Поэтому важно ее упростить. Прежде всего следует учесть, что тепловая скорость электронов в  $(M/m)^{1/2}$  раз больше тепловой скорости ионов ( $M$  — масса иона,  $m$  — масса электрона). Это означает, что, рассматривая течения плазмы со скоростями порядка ионно-звуковой, можно принимать распределение электронов стационарным, зависящим лишь от энергии\*. Часто его можно считать равновесным максвелл-больцмановским. Это обычно справедливо для электронов, совершающих инфинитное движение в поле волны. Для электронов же, захваченных волной, функция распределения по энергиям может существенно отличаться от равновесной. В частности, при полном отсутствии соударений захваченные электроны распределены по адиабатическому закону, который подробно обсуждается в разд. 2.3. Таким образом, стационарную функцию распределения электронов можно, в принципе, считать известной, и остается лишь кинетическое уравнение для ионов.

В отсутствие магнитного поля система из бесстолкновительного кинетического уравнения для ионов и уравнения Пуассона для поля

---

\* Отметим, что в ряде задач существенны и малые отклонения от такого распределения, которые определяют затухание Ландау на электронах и дрейфовый ток электронов.

содержит лишь один параметр размерности длины — дебаевский радиус  $D$ . Эта длина обычно невелика. Рассматривая такие движения, характерные размеры которых  $R$  много больше дебаевского радиуса  $R \gg D$ , можно перейти к пределу

$$D/R \rightarrow 0, \quad D = (T_e/4\pi e^2 N)^{1/2}. \quad (1)$$

В этом пределе плазма является квазинейтральной:

$$N_i = N_e \quad (2)$$

( $N_i$  — концентрация ионов;  $N_e$ ,  $T_e$  — концентрация и температура электронов;  $e$  — заряд электрона)\*.

Переход к пределу квазинейтральной плазмы имеет принципиальное значение. В задаче исчезает естественный параметр размерности длины, что соответствует переходу к случаю идеальной жидкости в гидродинамике. Это означает, что при решении квазинейтральных кинетических уравнений полностью справедливы методы подобия и размерности эйлеровой гидродинамики. Благодаря этому в ряде физически интересных задач удается уменьшить число переменных и найти их решение. Не менее существенно то принципиальное обстоятельство, что только при переходе к уравнениям, не содержащим параметры размерности длины, возможна четкая постановка вопроса о возникновении в течении сильных и слабых разрывов и других особенностей. В уравнениях, где параметры длины сохранены, все такие особенности размываются и теряют точный смысл. Между тем наличие или отсутствие разрывов является важнейшей качественной характеристикой движения.

Исследованию квазинейтральных течений разреженной плазмы посвящен первый раздел настоящего обзора. Такие течения, как отмечалось выше, аналогичны течениям, возникающим в гидродинамике идеальной жидкости. В частности, как и в гидродинамике, важный класс квазинейтральных течений в кинетике разреженной плазмы составляют автомодельные движения. При их описании кинетическое уравнение для функции распределения ионов существенно упрощается. Исследование автомодельных движений обнаруживает ряд интересных особенностей нелинейной кинетики, например, возникновение сравнительно крутых фронтов — областей быстрого изменения автомодельных параметров, — в сильно неизотермической плазме ( $T_e/T_i \gg 1$ ). Однако наиболее важную особенность кинетики составляет явление ускорения ионов при свободном расширении плазмы. Это ускорение носит коллективный характер и возникает за счет энергичной передачи импульса электронов быстрым ионам. Оно становится особенно эффективным при немаксвелловских обогашенных быстрыми частицами функциях распределения электронов. Еще сильнее ускоряются при расширении плазмы многозарядные примесные ионы.

---

\* Заметим, что формально предельный переход (1) соответствует стремлению к бесконечности заряда электрона  $e$ .

Далее, в гидродинамике развитие возмущения конечной амплитуды приводит обычно к возникновению особой точки на фронте волны. Это хорошо видно на примере простой волны Римана [1, § 94]. Фронт простой волны с течением времени становится все более крутым и, наконец, в момент  $t_R$  в некоторой точке  $x_R$  он «опрокидывается»: производные  $(\partial N/\partial x)_{x \rightarrow x_R} \rightarrow \infty$ ,  $(\partial v/\partial x)_{x \rightarrow x_R} \rightarrow \infty$ . Исходные уравнения в этой гидродинамической особой точке, а в дальнейшем и в ее окрестности становятся неприменимыми.

Аналогичные решения вида простых волн и волн гидродинамического типа существуют и в динамике бесстолкновительной квазинейтральной плазмы. Фронт волны здесь тоже опрокидывается и тоже возникает гидродинамическая особая точка  $x_R$ :  $(\partial N/\partial x)_{x \rightarrow x_R} \rightarrow \infty$ .

Волны гидродинамического типа составляют важный класс среди одномерных движений разреженной плазмы. Однако решения такого вида существуют все же лишь для специальных начальных функций распределения. В общем случае в отсутствие магнитного поля особой точки на фронте волны не возникает: плотность  $N$ , средняя скорость  $\bar{v}$  и другие средние величины для ионов остаются достаточно гладкими функциями  $x$ . Обычно возникает, однако, особое кинетическое явление «опрокидывания» или «расщепления» функции распределения. А именно до некоторого момента  $t_R$  во всех точках  $x$  функция распределения в зависимости от скорости ионов имела один максимум; после этого момента при  $t > t_R$  в окрестности некоторой точки  $x_R$  функция распределения имеет два максимума или более. Точку  $x_R$ ,  $t_R$  естественно назвать точкой «кинетического опрокидывания». В кинетике разреженной плазмы она играет роль, в известном смысле, аналогичную особой точке в гидродинамике.

Как ведет себя решение за особой точкой  $x_R$ ,  $t_R$ ? В гидродинамике при  $t > t_R$  в окрестности точки опрокидывания  $x_R$  течение стремится сделаться многоскоростным. Плотность при этом становится неоднородной функцией  $x$ . Такие решения в обычной односкоростной гидродинамике невозможны. Поэтому за особой точкой возникает сильный разрыв — здесь образуется ударная волна. Важно, что за фронтом ударной волны образуется и со временем все более расширяется область, в которой изменилась температура газа, т. е. область, в которой изменилось уравнение состояния газа. Бездиссипативные уравнения гидродинамики идеальной жидкости дополнены теперь особой областью разрыва (областью фронта ударной волны), в которой происходит диссипация. Таким образом, за особой точкой, по существу, уже не действуют исходные уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Однако все изменение уравнений свелось к введению особой поверхности разрыва и к изменению уравнения состояния за этой поверхностью. Столь простой характер изменений уравнений гидродинамики в области за особой точкой определяется активной ролью диссипативных процессов.

В кинетике бесстолкновительной плазмы в отсутствие диссипации картина гораздо сложнее. Прежде всего за особыми точками плазма

перестает быть строго квазинейтральной. На фоне квазинейтрального в среднем распределения развиваются незатухающие осцилляции плазмы.

Осцилляции, развивающиеся после точек гидродинамического опрокидывания, имеют следующую структуру. Они начинаются цепочкой солитонов, расстояние между которыми логарифмически растет со временем. Постепенно солитоны вырождаются в квазистационарную волну. Амплитуда колебаний в ней быстро убывает по мере удаления от солитонного фронта, а форма их приближается к синусоидальной. Область, занятая осцилляциями, быстро расширяется со временем.

В месте появления солитонов средние величины испытывают не сильный, а слабый разрыв с бесконечным скачком производной. Мы называем его сингулярным разрывом. Важно, что сингулярный разрыв движется со сверхзвуковой скоростью. Это — особый вид разрывов, осуществляющийся только в дисперсионной среде. В обычной диссипативной гидродинамике сверхзвуковые слабые разрывы невозможны.

Структура колебаний, возникающих после точек кинетического опрокидывания, в целом носит более сложный характер. Достаточно «резкое» опрокидывание может приводить к энергичному усилению тепловых флуктуаций в плазме. В этом случае развивается область статистических (турбулентных) пульсаций. При более плавном включении неустойчивости осцилляции носят динамический характер, подобно развивающимся после точек гидродинамического опрокидывания. Картина осцилляций существенно зависит также от соотношения между скоростью звука  $s$  и скоростью  $v_k$  в точке опрокидывания  $x_k$ ,  $t_k$  ( $v_k$  — скорость точки ветвления максимумов, т. е. точки перегиба у функции распределения). Если  $v_k > s$ , то возбуждаются только косые волны, и колебания с самого начала носят трехмерный характер.

Важно, что затухание Ландау и нелинейность способствуют подавлению осцилляций, а тепловое движение ионов и дисперсия — размыванию крутых фронтов. Особая ситуация возникает поэтому в случае сильнонеизотермической плазмы  $T_e/T_i \gg 1$ . Здесь, как уже указывалось выше, могут появиться области крутых фронтов, т. е. области сравнительно быстрого изменения параметров. Условия, определяющие свойства таких фронтов, близки к условиям, определяющим ударные волны в обычной газодинамике. Однако в отличие от обычной ударной волны появляющийся здесь фронт нестационарен — он расплывается со временем. В области фронта обычно возникают осцилляции, а впереди него появляется пучок быстрых ионов, называемый предвестником.

Исследованию явлений, возникающих после появления особенностей в квазинейтральном течении, посвящен второй раздел работы.

Классическим примером применения нелинейной динамики является теория обтекания тел разреженной плазмой. Ей посвящен третий раздел работы. Здесь рассматривается обтекание поверхностей различной формы в условиях:

$$D \ll R_0 \ll l; \quad (3)$$

$$v_{Ti} \ll V_0 \ll v_{Te}, \quad (4)$$

где  $R_0$  — характерный размер тела;  $l$  — длина свободного пробега ионов;  $D$  — дебаевский радиус;  $V_0$  — скорость тела;  $v_{Ti}$  и  $v_{Te}$  — тепловые скорости ионов и электронов. Условия (3) и (4) обычно хорошо выполнены для ракет и спутников в ионосфере Земли на высотах выше 150 км. Поэтому излагаемая в § 4 теория носит название ионосферной аэродинамики.

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением немагнитиченной плазмы. Кинетическая теория нелинейных движений плазмы в магнитном поле разработана пока менее подробно (см. [4, 32, 39]).

## § 2. Квазинейтральные течения плазмы

### 2.1. Автомодельное движение

**Одномерное движение.** В отсутствие магнитного поля кинетическое уравнение для функции распределения ионов  $f(x, v, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (5)$$

Здесь рассматриваются лишь одномерные движения;  $v$  — скорость ионов;  $\varphi$  — потенциал электрического поля. Он определен уравнением квазинейтральности (2). Принимая, что равновесное распределение электронов описывается формулой Больцмана\*

$$N_e = N_0 \exp(e\varphi/T_e) \quad (6a)$$

( $N_0$  — плотность невозмущенной плазмы), приходим вместо (2) к соотношению, прямо выражающему  $\varphi$  через функцию распределения ионов:

$$\varphi = \frac{T_e}{e} \ln \left( \frac{1}{N_0} \int f dv \right). \quad (6b)$$

Подставляя это выражение в (5), получаем окончательно нелинейное кинетическое уравнение, описывающее одномерные движения квазинейтральной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{T_e}{M} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{N_0} = 0, \quad N = \int f dv. \quad (7)$$

Причина появления электрического поля в уравнении (7) вполне понятна. Действительно, подвижные электроны стремятся обогнать ионы. Но при этом нарушается электрическая нейтральность плазмы и появляется электрическое поле, которое удерживает электроны и заставляет их в среднем двигаться вместе с ионами ( $N_e = N_i$ ). То же поле оказывает существенное влияние и на движение самих ионов, ускоряя их. Электрическое поле как бы передает ионам плазмы давление электронного газа, оно пропорционально температуре электро-

\* Выше указывалось, что в бесстолкновительной плазме могут быть существенными и другие равновесные распределения электронов [2]. Они рассматриваются в разд. 2.3 и 2.4.

нов  $T_e$ . Поэтому при  $T_e \sim T_i$  влияние электрического поля и теплового движения ионов, в общем, одного порядка.

При  $T_e \ll T_i$  роль электронов мало существенна. В этом случае последним членом в уравнении (7) можно пренебречь ( $T_e/T_i \rightarrow 0$ ) и оно совпадает с уравнением, описывающим свободное движение нейтрального газа:

$$\partial f / \partial t + v \partial f / \partial x = 0. \quad (8)$$

Мы будем называть этот случай «нейтральным приближением». Общее решение уравнения (8)

$$f(x, v, t) = f_0(x - vt, v), \quad (9)$$

где  $f_0(x, v)$  — начальная функция распределения. Исключительная простота решения уравнения нейтрального приближения делает его весьма важным для качественного анализа, а иногда и для довольно точных количественных оценок при  $T_e \sim T_i$ .

В обратном пределе  $T_e \gg T_i$  роль электрического поля, напротив, становится определяющей. В этом случае в первом приближении можно пренебречь тепловым движением ионов ( $T_i/T_e \rightarrow 0$ ), т. е. принять функцию распределения ионов по скорости  $\delta$ -функцией:

$$f(x, v, t) = N(x, t) \delta(v - \bar{v}(x, t)).$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), приходим к следующим уравнениям для  $N$  и  $\bar{v}$ :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N\bar{v}) = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \varphi = \frac{T_e}{e} \ln N. \quad (10)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями гидродинамики идеального изотермического газа [3, с. 109]. Тепловое движение ионов при  $T_i \neq 0$  можно приближенно учесть в трехмоментной гидродинамике (см. [4], Приложение II).

**Общие свойства автомодельного движения.** Уравнение (7) не содержит параметров размерности длины или времени. Поэтому в тех случаях, когда и начальные условия задачи не содержат никаких пространственных размеров, решение кинетического уравнения (7) может зависеть только от отношения  $x/t$ , т. е. является автомодельным. Ситуация здесь совершенно аналогична возникающей в гидродинамике идеальной жидкости. Как и в гидродинамике к автомодельным сводятся задачи о распаде произвольных начальных разрывов (ср. [1], § 93).

Введем безразмерную переменную

$$\tau = \frac{x}{t} \left( \frac{M}{2T_e} \right)^{1/2} \quad (11a)$$

и безразмерные величины  $g$  и  $u$ :

$$g = (2\pi T_i/M)^{1/2} N_0^{-1} f, \quad u = v (M/2T_e)^{1/2}, \quad (11b)$$



где  $N_0$  и  $T_i$  — некоторые характерные значения плотности и температуры ионов (см. ниже). После этого уравнение (7) для безразмерной автомодельной функции распределения  $g(\tau, u)$  запишется в виде [5]\*

$$(u - \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{d\psi}{d\tau} = 0, \quad \psi = \frac{e\varphi}{T_e} = \ln n, \quad n = \int g \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}. \quad (12)$$

Поделив уравнение (12) на  $(u - \tau)$  и проинтегрировав по  $du$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим интересное тождество, наложенное на решение уравнения (12):

$$n = \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{1}{u - \tau} \frac{\partial g}{\partial u} du, \quad \beta = T_e/T_i. \quad (13)$$

Это тождество играет важную роль при анализе поведения малых возмущений функции  $g(\tau, u)$ .

Граничные условия к уравнению (7), соответствующие задаче о распаде произвольного начального разрыва, имеют вид:

$$f(x, v)|_{t=0} = \begin{cases} f_1(v) & \text{при } x < 0, \\ f_2(v) & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные начальные функции распределения ионов слева и справа от разрыва. В безразмерных переменных (10) и (11) эти условия принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} g &\rightarrow g_1(u) & \text{при } \tau \rightarrow -\infty, \\ g &\rightarrow g_2(u) & \text{при } \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В частности, если  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные максвелловские функции

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= N_0 \left( \frac{M}{2\pi T_i} \right)^{1/2} \exp(-Mv^2/2T_i); \\ f_2 &= N_2 \left( \frac{M}{2\pi T_{i2}} \right)^{1/2} \exp[-M(v-v_0)^2/2T_{i2}] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(плазму в области I всегда можно считать покоящейся), то

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \exp(-\beta u^2); \\ g_2 &= \frac{N_2}{N_0} \left( \frac{T_i}{T_{i2}} \right)^{1/2} \exp[-\beta_2 (u - u_0)^2], \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $u_0 = (Mv_0^2/2T_e)^{1/2}$ ,  $\beta = T_e/T_i$ ,  $\beta_2 = T_e/T_{i2}$ .

Перейдем к общему исследованию решения уравнения (12). Это уравнение первого порядка. Как известно, определение функции  $g(\tau, u)$  сводится в этом случае к нахождению характеристик уравне-

\* Распределение электронов предполагается здесь бoльцмановским (6а). Более общий случай рассмотрен в разд. 2.3.

ния, т. е. кривых, на которых функция  $g$  имеет постоянное значение. Уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{F(\tau)}{u-\tau}, \quad F(\tau) = -\frac{1}{n} \frac{dn}{d\tau}. \quad (18)$$

Здесь  $F$  — безразмерная сила, действующая на ионы\*. Из (18) следует, что существенное значение для искомого решения имеет характер распределения плотности ионов, точнее общий ход функции  $n(\tau)$ , в частности, наличие минимумов и максимумов на этой кривой.

Чтобы сделать определенные качественные заключения о характере функции  $n(\tau)$ , рассмотрим решение нейтрального приближения (8). В этом случае, учитывая в (9) граничные условия (14), находим, что

$$f(x, v, t) = \begin{cases} f_1(v) & \text{при } x < vt, \\ f_2(v) & \text{при } x > vt, \end{cases}$$

$$n(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} g_1(u) \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}} + \int_{-\infty}^{\tau} g_2(u) \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}. \quad (19)$$

Экстремумы функции  $n(\tau)$  определены условием  $dn/d\tau = 0$ , т. е.

$$g_1(\tau) - g_2(\tau) = 0. \quad (20)$$

Естественно принять граничные функции  $g_1$  и  $g_2$  максвелловскими (17). В этом случае в зависимости от соотношения между параметрами  $N_0, N_2, T_i, T_{i2}, v_0$  возможны три случая:

а)  $T_i \neq T_{i2}$ . Пусть для определенности  $T_i > T_{i2}$  (рис. 1, а). Тогда при  $u \rightarrow \pm \infty$

$$g_1(u) \sim \exp\left(-\frac{T_e}{T_i} u^2\right) \gg g_2(u) \sim \exp\left(-\frac{T_e}{T_{i2}} u^2\right), \quad (21)$$

т. е.  $dn/d\tau > 0$  при  $u \rightarrow \pm \infty$ . Это означает, что кривая  $n(\tau)$  либо монотонна, либо имеет минимум и максимум. Легко понять, при каких условиях имеет место тот или иной случай. Если  $N_2$  и  $v_0$  достаточно малы, то  $g_2(u) < g_1(u)$  при всех  $u$  и  $n(\tau)$  монотонна (кривая 1 на рис. 1, а). Если же  $N_2$  и  $v_0$  достаточно велики, то  $g_2(u)$  дважды пересечет кривую  $g_1(u)$  и на кривой  $n(\tau)$  будет максимум и минимум (кривая 2 на рис. 1, а). На нижнем рисунке показаны соответствующие этим случаям кривые  $F(\tau)$  (18).

б)  $T_i = T_{i2} = T$  (см. рис. 1, б). Тогда при  $u \rightarrow \pm \infty$

$$g_1 \sim \exp\left(-\frac{T_e}{T} u^2\right), \quad g_2 \sim \exp\left(-\frac{T_e}{T} u^2\right) \exp\left(2u v_0 \frac{T_e}{T}\right). \quad (22)$$

Пусть для определенности  $u_0 > 0$ . Тогда при  $u \rightarrow -\infty$   $g_1 \gg g_2$ , т. е. при  $\tau \rightarrow -\infty$   $dn/d\tau > 0$ . При  $\tau \rightarrow +\infty$ , наоборот:  $g_1 \ll g_2$ ,

\* Отметим, что безразмерная сила  $F(\tau)$  пропорциональна напряженности электрического поля в плазме  $F(\tau) = E e t (2/M T_e)^{1/2}$ .

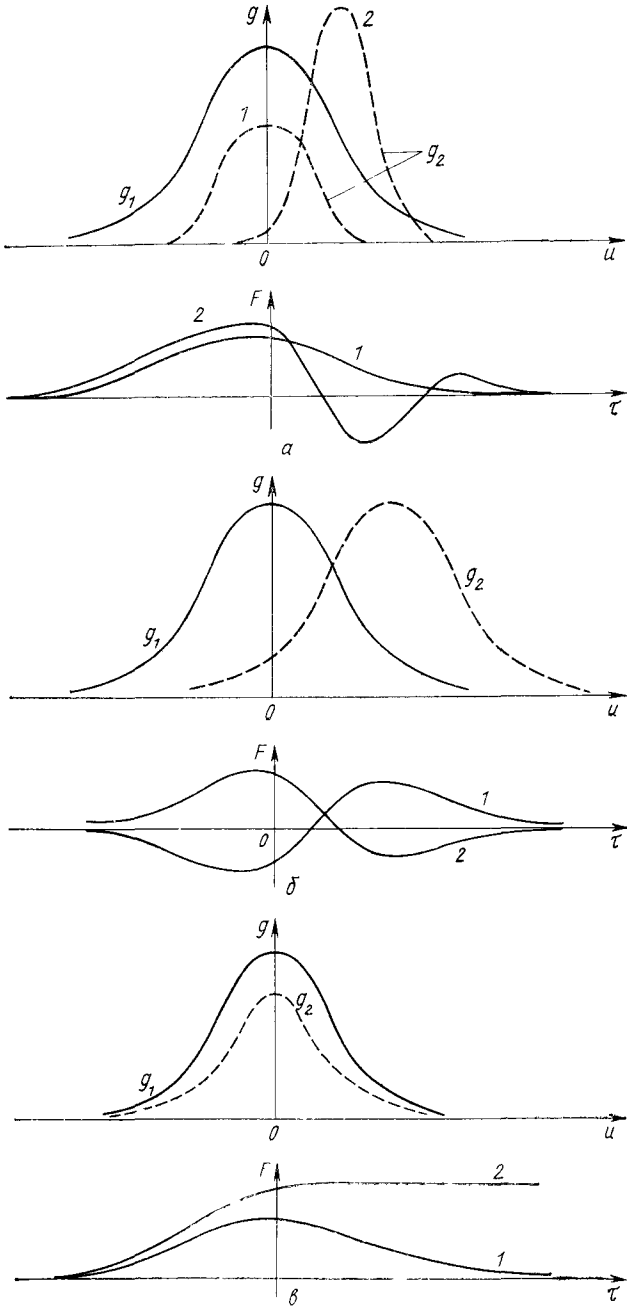


Рис 1. Классификация начальных разрывов

$dn/d\tau < 0$ . Кривая  $n(\tau)$  в этом случае обязательно имеет экстремум: максимум при  $u_0 > 0$ , минимум при  $u_0 < 0$ . Поведение функции  $F(\tau)$  при  $u_0 < 0$  показывает кривая 1, при  $u_0 > 0$  — кривая 2.

в)  $T_i = T_{i2} = T$ ,  $v_0 = 0$ ,  $N_0 > N_2$  (см. рис. 1, в). В этом случае при всех  $\tau$ :  $g_1 > g_2$ ,  $dn/d\tau > 0$ . Кривая  $n(\tau)$  монотонна. Кривая 1 на рисунке  $F(\tau)$  соответствует  $N_2 \neq 0$ ; кривая 2 —  $N_2 = 0$ .

Анализ проведен здесь для нейтрального приближения. Можно, однако, утверждать, что сделанные качественные заключения справедливы и в общем случае\*. Дело в том, что для асимптотического поведения функции  $dn/d\tau$  при  $\tau \rightarrow \pm \infty$  существенны лишь частицы с большими скоростями  $u$ . Во всех вариантах, кроме особого случая расширения плазмы в вакуум (см. рис. 1, в, кривая 2), скачок электрического потенциала  $\Phi_{\tau \rightarrow -\infty} - \Phi_{\tau \rightarrow +\infty}$  оказывается конечным, так что распределение быстрых частиц не меняется поем. Поэтому, асимптотические формулы (21), (22) остаются верными и при учете влияния электрического поля. Следовательно, верны и качественные соображения о ходе  $n(\tau)$ . Несколько особая ситуация в случае в). Здесь электрическое поле может изменить коэффициент при  $\exp(-T_e u^2/T)$  в асимптотике, а при  $N_2 = 0$  и саму асимптотику функции  $g_1$  (что учтено в кривой 2 на рис. 1, в). Однако это не меняет монотонности хода  $n(\tau)$ .

Рассмотрим теперь некоторые характерные решения уравнения (18). Пусть  $F(\tau) = \text{const} = F_0$ . Уравнение (18) имеет тогда особое решение

$$u = u_s = \tau + F_0/2. \quad (23)$$

Общее решение находится подстановкой  $u = u_s + u_1(\tau)$ ; оно имеет вид

$$u_1 - u_{10} + \frac{F_0}{2} \ln \frac{u_1}{u_{10}} = -(\tau - \tau_0). \quad (24)$$

Здесь  $u_{10}$  — начальное значение  $u_1$  (при  $\tau = \tau_0$ ).

Ход характеристик согласно (24) показан на рис. 2, а. Видно, что характеристики делятся на две группы: характеристики, которые начинаются при отрицательных  $\tau$  (при  $\tau = \tau_0^- \ll -1$ ), и при положительных  $\tau$  (при  $\tau = \tau_0^+ \gg 1$ ). Особое решение  $u_s$  (23) является сепаратрисой, так как оно разделяет эти две группы характеристик. Из (24) следует, что при  $\tau \rightarrow +\infty$  (при  $u > \tau$ )

$$u \simeq u_s + u_{10} \exp(-2\tau/F_0), \quad (25)$$

т. е. асимптотически все характеристики сходятся к сепаратрисе. В частности, если  $F_0 \rightarrow 0$ , то все характеристики сходятся к прямой  $u = \tau$ .

Наличие сепаратрисы составляет основную особенность топологии характеристик уравнения (12) в плоскости  $(u, \tau)$ . Характеристики,

\* Несколько отличная ситуация может возникнуть лишь в сильнонеизотермической плазме ( $T_e/T_i \rightarrow \infty$ ).

выходящие справа и слева, заполняют свои области на плоскости  $(u, \tau)$  и никогда не пересекаются. Эти области разделены сепаратрисой. Благодаря этому к одному уравнению первого порядка (12) возможно задание двух граничных условий: при  $\tau \rightarrow -\infty$  и при  $\tau \rightarrow +\infty$  (15). Поскольку во всех случаях при  $\tau \rightarrow \pm \infty$  сила  $F(\tau)$  стремится к нулю (см. рис. 1), то, как ясно из (23), сепаратриса при  $\tau \rightarrow \pm \infty$  всегда

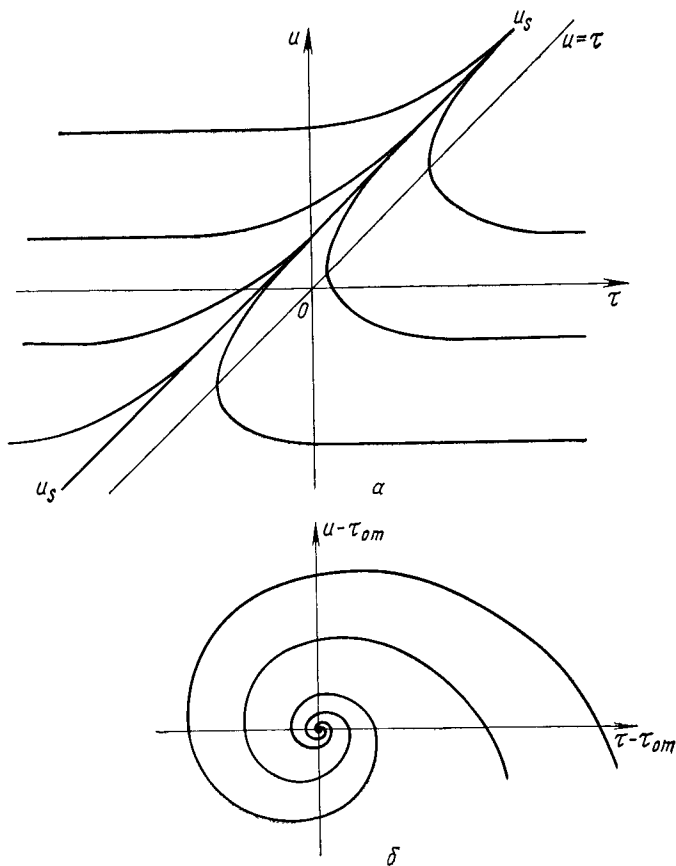


Рис 2 Поведение характеристик в плоскости  $u, \tau$

прижимается к прямой  $u = \tau$ . Сепаратриса лежит выше прямой  $u = \tau$  при  $F(\tau) > 0$  и ниже ее при  $F(\tau) < 0$ . Функция распределения на сепаратрисе обращается в нуль.

Рассмотрим другой характерный случай. В окрестности  $\tau_{0m}$  — точки минимума  $n(\tau)$ , функция  $F(\tau) = -\alpha(\tau - \tau_{0m})$ . Тогда подстановкой  $t = \ln(\tau - \tau_{0m})$ ,  $\xi = (u - \tau_{0m})/(\tau - \tau_{0m})$  уравнение (18) сводится к виду:

$$d\xi/dt = -[\xi^2 - \xi + \alpha/2]/(\xi - 1)$$

и интегрируется в квадратурах. Существенный интерес здесь представляет случай  $\alpha > 1/2$ , когда решение этого уравнения имеет вид:

$$t = \frac{1}{2} \ln \left( \xi^2 - \xi + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}} \operatorname{arctg} \frac{2\xi-1}{\sqrt{2\alpha-1}}. \quad (26)$$

Это — логарифмическая спираль на плоскости  $(u, \tau)$ , сходящаяся к точке  $u = \tau_{0m}$ ,  $\tau = \tau_{0m}$ . Ход характеристик показан на рис. 2, б. Нетрудно понять физический смысл этого решения. Минимум  $n(\tau)$  соответствует минимуму потенциала  $\psi(\tau)$ . Здесь возникает, следовательно, потенциальная яма для ионов. Яма расширяется со временем (так как  $\tau \sim x/t$ ), и ионы захватываются в расширяющуюся потенциальную яму (ср. разд. 2.3).

Ниже рассмотрены примеры численного решения некоторых автомоделных задач.

*Расширение плазмы в вакуум* [6]. Пусть в начальный момент  $t = 0$  разреженная плазма занимает полупространство  $x < 0$ , при  $t > 0$  она свободно расширяется в вакуум. Задача о расширении плазмы в этом случае автомодельна и описывается уравнением (12) с граничным условием (17) при  $g_2 = 0$ . Прежде чем переходить к общему исследованию решения, рассмотрим сначала предельные случаи  $T_e/T_i \rightarrow 0$  и  $T_e/T_i \rightarrow \infty$ .

В первом справедливо решение нейтрального приближения (9) и (19). Функция распределения при этом максвелловская, обрезанная при  $u = \tau$  (безразмерные переменные  $u$  и  $\tau$  нормированы при этом на  $T_i$ ). Распределение концентрации определено формулой (19) при  $g_2 = 0$ . Имеем

$$n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\tau)], \quad (27)$$

где  $\Phi(\tau)$  — интеграл вероятностей, в частности, при  $\tau \gg 1$

$$n(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau} \exp(-\tau^2). \quad (28)$$

В обратном предельном случае  $T_e/T_i \rightarrow \infty$  движение описывается уравнениями изотермической гидродинамики (10). В безразмерных автомоделных переменных (11) они принимают вид:

$$(\bar{u} - \tau) \frac{dn}{d\tau} + n \frac{d\bar{u}}{d\tau} = 0; \quad (\bar{u} - \tau) \frac{d\bar{u}}{d\tau} + \frac{1}{2n} \frac{dn}{d\tau} = 0. \quad (29)$$

Система (29) имеет два решения: одно тривиальное  $n = \text{const}$ ,  $\bar{u} = \text{const}$  и второе:

$$(\bar{u} - \tau)^2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{u} = \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n = C \exp(-\sqrt{2}\tau), \quad (30)$$

где  $\hat{C}$  — произвольная постоянная (см. [1, с. 443]). Непрерывное решение, удовлетворяющее граничным условиям  $n = 1, \bar{u} = 0$ , если  $\tau \rightarrow -\infty$ ;  $n = 0$ , если  $\tau \rightarrow +\infty$ , имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} = 0, n = 1 \text{ при } \tau < -1/\sqrt{2}; \\ \bar{u} = \tau + 1/\sqrt{2}, n = \exp(-\sqrt{2}\tau - 1) \text{ при } \tau > -1/\sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Безразмерная сила

$$F = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < -1/\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} & \text{при } \tau > -1/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (32)$$

Точка  $\tau = -1/\sqrt{2}$  является точкой слабого разрыва, разделяющего области покоящегося и движущегося газов. В этой точке испытывают разрыв первые производные от  $n$  и  $\bar{u}$ .

Отметим, что асимптотически при  $\tau \gg 1$  формула (31) приводит к гораздо большим значениям  $n$ , чем (28):  $n \sim \exp(-\sqrt{2}\tau)$  вместо  $n \sim \exp(-\tau^2)$ . Это, как мы увидим ниже, общий результат при конечном отношении  $T_e/T_i$ , связанный с ускорением части ионов электрическим полем.

В общем случае, как уже указывалось выше, решение уравнения (12) сводится к определению хода характеристик (18). При  $\tau \rightarrow -\infty$  плазма не возмущена и сила  $F(\tau) \rightarrow 0$ . Характеристики имеют здесь вид прямых  $u = \text{const}$ , причем на каждой прямой функция распределения  $g$  имеет значение  $\exp(-\beta u^2)$ . Чтобы определить значение  $g$  в точке  $\tau, u$ , нужно найти характеристику, которая проходит через эту точку. Значение  $g$  в точке  $\tau, u$  будет тогда равно  $\exp(-\beta u_0^2)$ , где  $u_0$  — ордината прямой  $u = u_0$ , на которую выходит эта характеристика при  $\tau \rightarrow -\infty$ .

Исследуем вначале качественно ход характеристик в плоскости  $u, \tau$ . Прежде всего очевидно, что в нашей задаче  $F > 0$  (см. рис. 1, в), так как концентрация плазмы убывает с ростом  $\tau$ . Это означает, что при  $u > \tau$  производная  $du/d\tau$  вдоль всех характеристик больше нуля, т. е. скорость  $u$  монотонно растет с ростом  $\tau$ . Это относится и к сепаратрисе — особому решению уравнения характеристик (18), удовлетворяющему граничному условию  $u = \tau$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ . Приближенно [ср. (23)]:

$$u_s \approx \tau + F/2. \quad (33)$$

Отсюда следует, что сепаратриса лежит всегда выше прямой  $u = \tau$ . Поскольку ни одна из характеристик, выходящих из области  $\tau \rightarrow -\infty$ , не может пересечь сепаратрису, то в нашей задаче функция распределения  $g$  тождественно равна нулю при всех  $u < \tau$ . Действительно, при  $\tau \rightarrow -\infty$  функция  $g$  максвелловская и частиц с  $u < \tau$  нет из-за экспоненциального убывания  $g$  при  $u \rightarrow -\infty$ . В дальнейшем же характеристики, вышедшие из области  $\tau \rightarrow -\infty$ , не могут пересечь сепаратрису  $u = u_s > \tau$ , так что такие частицы и не появят-

ся. На характеристиках же, выходящих из области  $\tau \rightarrow +\infty$ , функция  $g$  равна нулю по условию  $g_2 = 0$ . Этот факт имеет простой физический смысл. Действительно, в начальный момент  $t = 0$  все частицы находятся при  $x < 0$ . Поэтому в точке  $x$  в момент  $t$  могут появиться лишь частицы, имеющие скорость  $v > x/t$ , т. е.  $u > \tau$ . Это тем более справедливо, если учесть влияние электрического поля, которое дополнительно увеличивает скорость ионов.

Отметим, что максимальное значение функции распределения  $g_{\max}$  при любом  $\tau$  равно единице. Это следует из того, что та характеристика, на которой  $g = g_{\max} = 1$ , имеется на плоскости  $(u, \tau)$  при любых  $\tau$ . Действительно, отсутствие этой характеристики при некотором  $\tau$  означало бы, что эта характеристика повернула назад, что невозможно ввиду монотонности  $u(\tau)$ . Это свойство позволяет сделать важное заключение об асимптотическом поведении  $g(u, \tau)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Действительно, по порядку величины

$$n(\tau) \sim g_{\max} \Delta u \sim \Delta u, \quad (34)$$

где  $\Delta u$  — ширина кривой функции распределения. Но при  $\tau \rightarrow +\infty$   $n(\tau) \rightarrow 0$ , а следовательно, и  $\Delta u \rightarrow 0$ . Иными словами, с ростом  $\tau$  ионы делаются все более монохроматическими, их температура падает. Это позволяет для определения асимптотического поведения решения воспользоваться гидродинамическими формулами (30). Согласно (30) средняя скорость ионов  $u = \tau + 1/\sqrt{2}$ . Это означает, что все характеристики при  $\tau \gg 1$  должны сгущаться вблизи сепаратрисы  $u_s = \tau + 1/\sqrt{2}$ . Это сгущение, как видно из формул (23), (25) ( $F_0 = \sqrt{2}$ ) происходит с экспоненциальной быстротой.

На рис. 3 приведен ход характеристик для  $\beta = 1$  (т. е.  $T_e = T_i$ ), полученный в результате численного интегрирования уравнения (18). Видно, что все характеристики идут выше сепаратрисы и с ростом  $\tau$  прижимаются к ней.

На рис. 4 представлена зависимость безразмерной концентрации  $n(\tau)$  при различных значениях  $\beta = T_e/T_i$ . Видно, что с ростом  $\beta$  распределение  $n(\tau)$  приближается к гидродинамическому (31), показанному на рисунке пунктиром. При больших значениях  $\tau$  концентрация ионов спадает медленно — здесь сильно сказывается влияние электрического поля. Асимптотически ход  $n(\tau)$  при  $\tau \gg 1$  описывается формулой (30):

$$n(\tau) = C \exp(-\sqrt{2}\tau). \quad (35)$$

Константа  $C$  определяется при сшивании аналитического решения (35) с численным. Для  $\beta = T_e/T_i = 1$   $C = 0,70$ . При произвольном  $\beta \gtrsim 1$

$$C(\beta) = \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\sqrt{3+\beta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{3+\beta} + \sqrt{\beta}} \right]^{1/2} \exp \left( \sqrt{1 + \frac{3}{\beta}} - 2 \right) + \frac{0,04}{\beta}. \quad (36)$$



Это приближенное выражение для константы  $C(\beta)$ , полученное при решении уравнений трехмоментного приближения [4]. При  $\beta \rightarrow \infty$   $C = \exp(-1)$  [ср. (30)].

Функции распределения ионов при различных значениях  $\tau$  в случае  $\beta = 1$  представлены на рис. 5. Видно, что при больших  $\tau$  функции распределения быстро сжимаются, приобретая иглообразный характер.

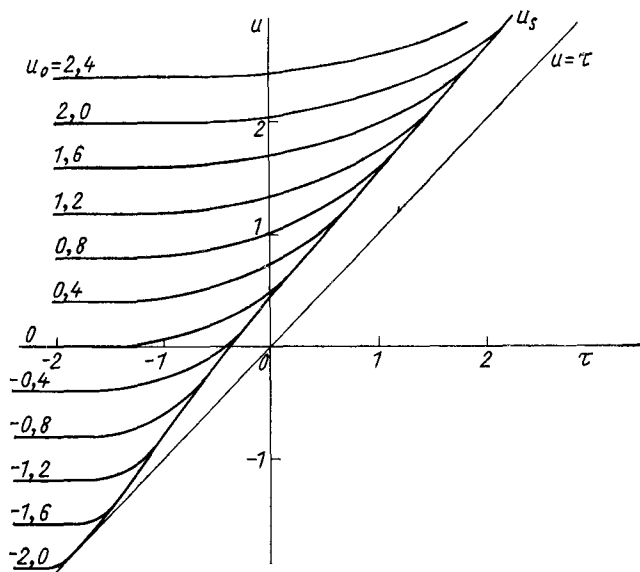


Рис. 3. Ход характеристик при расширении плазмы в вакууме

Эффективный разброс ионов по скоростям или их эффективная температура  $T_{эф i}$ , как видно из (34) и (35), экспоненциально быстро убывает с ростом  $\tau$ :

$$\theta = \frac{T_{эф i}}{T_e} = 2 \overline{(u - \bar{u})^2} = C_\theta(\beta) \exp(-2\sqrt{2}\tau); \quad C_\theta(\beta) = C^2(\beta)/\beta. \quad (37)$$

Здесь константа  $C(\beta)$  определена формулой (36), выражение для  $C_\theta(\beta)$  получено в том же приближении, что и  $C(\beta)$ .

Из рис. 4, 5 и формул (35), (36) видно, что при расширении плазмы в вакуум электрическое поле заметно ускоряет часть ионов. Еще более сильно могут ускоряться ионы при немаксвелловском распределении электронов, а также примесные ионы различной массы и заряда [7]\*. Подробно вопросы, связанные с ускорением ионов в расширяющейся плазме, рассмотрены в разд. 2.4.

\* На опыте расширение плазмы в вакуум (точнее в плазму малой плотности) исследовалось Корном, Маршаллом и Шлезингером [8]. Результаты экспериментов находятся в хорошем соответствии с теорией. Ускорение ионов при расширении плазмы наблюдалось Хенделем и Ребулом [9], А. А. Плюгто и др. [10], М. А. Тюлиной [11] и др. [12]. Ускорение многозарядных ионов наблюдалось Ю. А. Быковским и др. [13].

*Распад малого начального разрыва.* Рассмотрим теперь случай, когда функции распределения  $f_1$  и  $f_2$  справа и слева (16) отличаются мало. В этом случае отклонение функций распределения от равновесной является малым во все моменты времени и задачу можно решать в линейном приближении. При этом удобнее исходить не из автомодельного уравнения (12), а из общего уравнения (7). Автомодельность получится сама собой, в результате решения задачи.

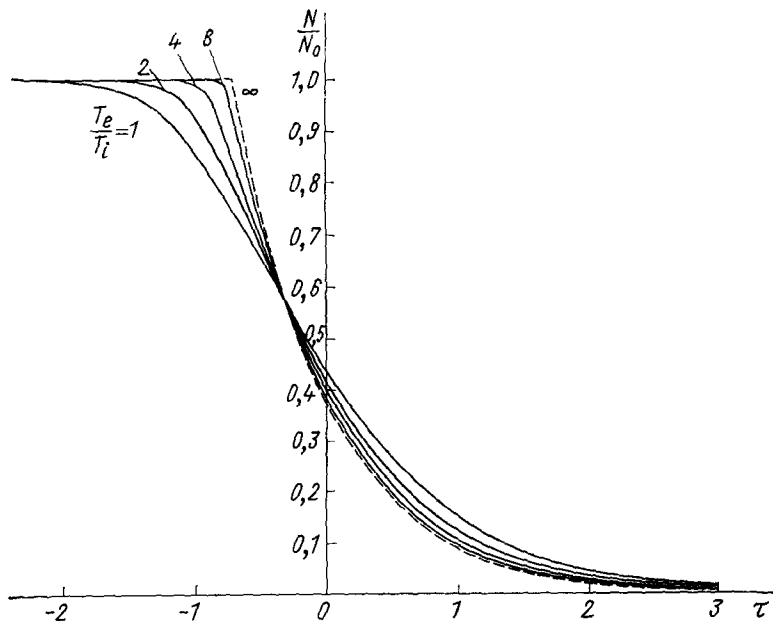


Рис. 4 Распределение концентрации плазмы

Перепишем уравнение (7) в переменных (11), введя вместо  $x$  переменную  $\xi = x (M/2T_e)^{1/2}$ :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \quad \psi = \frac{e\varphi}{T_e} = \ln n, \quad n = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int g du. \quad (38)$$

Линеаризуя это уравнение, получаем:

$$g = g_0 + g_1, \\ \frac{\partial g_1}{\partial t} + u \frac{\partial g_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \xi} \int g_1 \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}} = 0.$$

Начальное условие (16), записанное для этого уравнения, имеет вид:  $g_{10} = 0$  при  $\xi > 0$ ;  $g_{10} = \Delta g_0 = \Delta n_0 - \Delta \beta u^2 + 2\beta u \Delta u_0$  при  $\xi < 0$ ,

где  $\Delta n_0$ ,  $\Delta\beta$  и  $\Delta u_0$  связаны с возмущениями плотности, температуры и скоростью движения соотношениями

$$\Delta N = N_0 \Delta n_0, \Delta T_i = -\frac{T_e}{\beta^2} \Delta\beta, v_0 = \left(\frac{2T_e}{M}\right)^{1/2} \Delta u_0.$$

Решение линеаризованного уравнения с начальным условием находим с помощью преобразования Лапласа, полагая

$$g_{k\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{\infty} dt \exp[-i(k\xi - \omega t)] g_1(\xi, t).$$

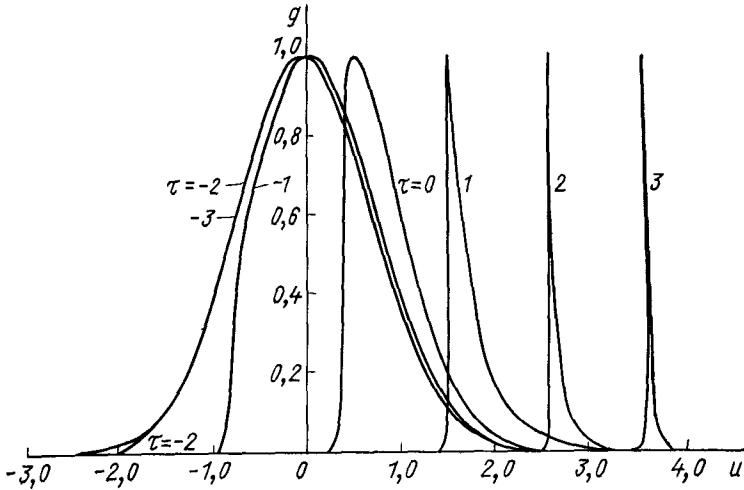


Рис. 5. Функции распределения ионов

Тогда, после простых вычислений, аналогичных произведенным Ландау [14], имеем

$$\begin{aligned} n_{k\omega} &= \int g_{k\omega} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}} = \frac{\int \bar{g}_k \frac{du}{i(ku - \omega) \sqrt{\pi/\beta}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{ikdu}{i(ku - \omega)}} = \\ &= \frac{\frac{1}{k + i\delta} \int \frac{\Delta g_0}{ku - \omega} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{kdu}{ku - \omega}}, \end{aligned}$$

$$\bar{g}_k = \int d\xi \exp(-ik\xi) g_{10}(\xi), \delta \rightarrow +0.$$

Обратное преобразование Фурье—Лапласа удобнее производить для производной  $\partial n_1/\partial \xi$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} &= \int dk d\omega \exp [i (k\xi - \omega t)] \frac{\int \frac{\Delta g_0}{i(ku - \omega)} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{kdu}{ku - \omega - i\delta}} = \\ &= \operatorname{Re} \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{+\infty} ds \exp [i k(\xi - st)] \frac{\frac{1}{i} \int \frac{\Delta g_0}{u - s - i\delta} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{u - s - i\delta}}. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл по  $dk$ , получаем

$$\frac{\partial n_1}{\partial \xi} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{i(\xi - st + i\delta)} \frac{\frac{1}{i} \int \frac{\Delta g_0}{u - s - i\delta} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{u - s - i\delta}}.$$

Здесь вторая дробь в подынтегральном выражении не имеет особенностей в верхней полуплоскости. Замыкая контур интегрирования по  $s$  сверху, сводим интегрирование к взятию вычета в точке  $s = \tau + i\delta$ ,  $\tau = \xi/t$ , так что

$$\frac{\partial n_1}{\partial \xi} = -\frac{\pi}{t} \operatorname{Im} \frac{\int \frac{\Delta g_0}{u - \tau - i\delta} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{u - \tau - i\delta}}.$$

Подставляя сюда выражения для  $\Delta g_0$  и учитывая, что  $dg_0/du = -2\beta u g_0$ , находим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_1}{d\tau} &= -\pi \operatorname{Im} \frac{-\tau\Delta\beta + 2\beta\Delta u_0 + (\Delta n_0 + 2\beta\tau\Delta u_0 - \tau^2\Delta\beta) \Phi(\tau)}{1 + \beta(1 + \tau\Phi(\tau))}, \\ \Phi(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi/\beta}} \int \exp(-\beta u^2) \frac{du}{u - \tau - i\delta}, \end{aligned} \right\} (39)$$

что, как известно, выражается через интеграл вероятности от мнимого аргумента

$$\Phi(\tau) = \sqrt{\beta} \left\{ i\sqrt{\pi} \exp(-\beta\tau^2) - 2 \exp(-\beta\tau^2) \int_0^{\tau\sqrt{\beta}} \exp(z^2) dz \right\}.$$

Ход функций  $\Delta n = n_1/\Delta n_0$  и  $d\Delta n/d\tau$  при  $\Delta\beta = 0$ ,  $\Delta u_0 = 0$  показан на рис. 6 для разных значений параметра  $\beta = T_e/T_i$ . Видно, что с ростом  $\beta$  все более выделенной оказывается область вблизи  $\tau \simeq 1/\sqrt{2}$ :

при  $\beta \rightarrow \infty$  возмущение приобретает характер разрыва, движущегося со звуковой скоростью (точка  $\tau = 1/\sqrt{2}$  соответствует  $x/t = \sqrt{T_e/M}$  — это ионно-звуковая скорость). С уменьшением  $\beta$  особенность вблизи  $\tau = 1/\sqrt{2}$  размывается и при  $\beta \sim 1$  она уже практически никак не выделена.

**Втекание плазмы в плазму [15].** В общем случае решение уравнения (12) с произвольными граничными условиями (17) может быть по-

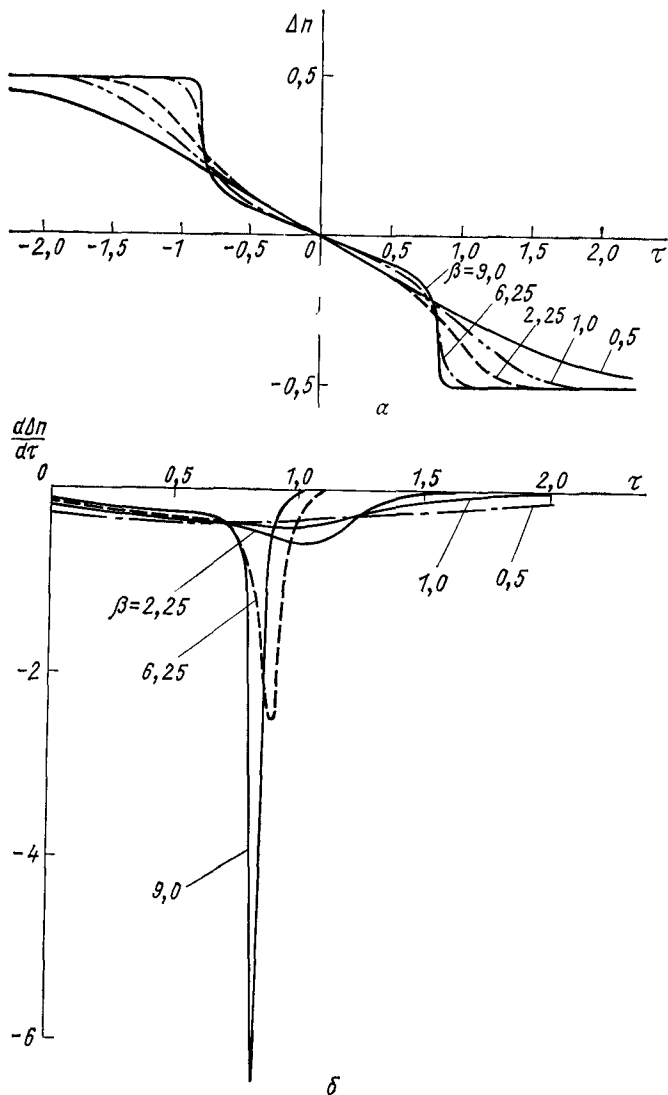


Рис. 6 Возмущение концентрации при распаде малого начального разрыва

лучено лишь в результате численного расчета. Примем, например, что температуры ионов слева и справа от разрыва равны,  $T_i = T_{i2}$ , плазма покоится  $u_0 = 0$ , но концентрации  $N_0$  и  $N_2$  не равны друг другу: пусть  $N_2 = \alpha N_0$ . Это случай в) в классификации разрывов, приведенной на стр. 12 (рис. 1, в, кривая 1). Сила  $F(\tau)$  в этом случае всегда положительна,  $F \geq 0$ . Это означает, что характеристики, идущие

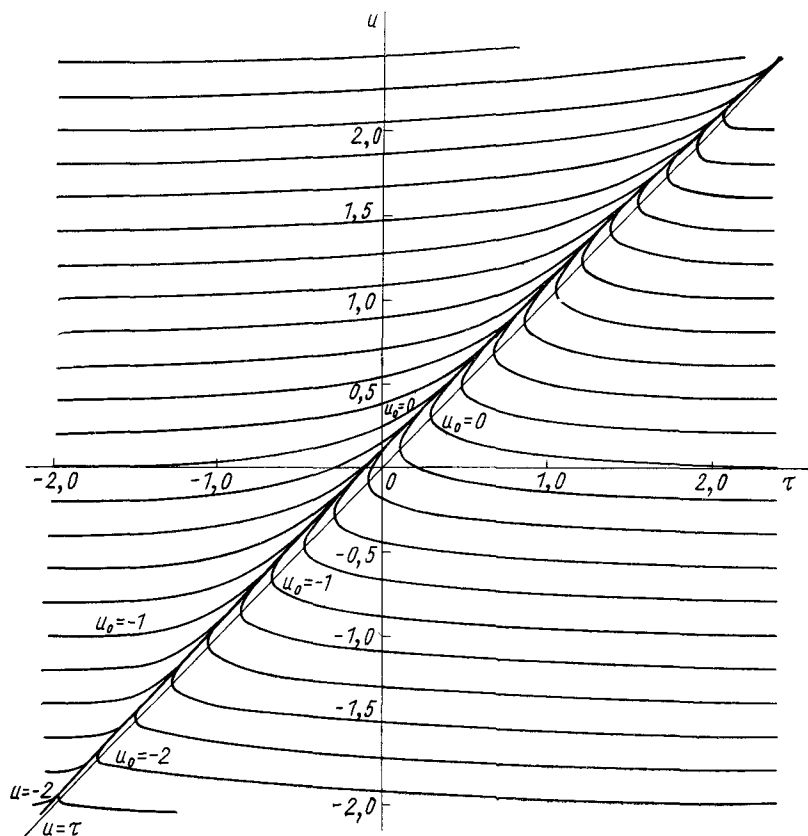


Рис. 7 Ход характеристик при втекании плазмы в плазму

щие из области  $\tau \rightarrow -\infty$ , по-прежнему не могут пересечь прямую  $u = \tau$ . Начинаясь при  $\tau \rightarrow -\infty$  в области конечных  $u$  все они при  $\tau \rightarrow +\infty$  уходят в бесконечность. Сила  $F(\tau)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  стремится к нулю (см. рис. 1, в, кривая 1). Следовательно, характеристики сгущаются при  $\tau \rightarrow +\infty$  вблизи прямой  $u = \tau$  [см. (25)]. Это видно из рис. 7, где показан ход характеристик (18) для рассматриваемой здесь задачи при  $\beta = 1$  и  $\alpha = 1/2$ , т. е.  $N_2 = N_0/2$ .

Существенно иной ход у характеристик, лежащих ниже прямой  $u = \tau$ . В этой области, как ясно из (18),  $u(\tau)$ , напротив, растет с умень-

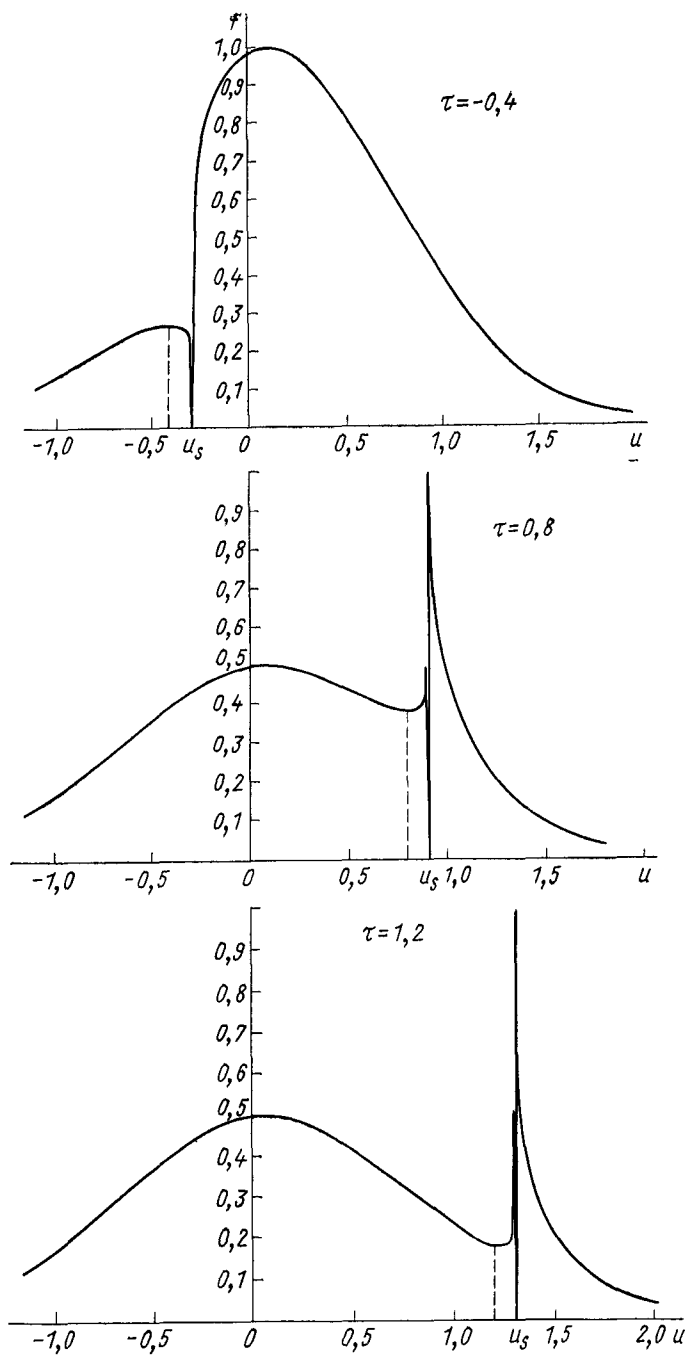


Рис 8. Функции распределения ионов

шением  $\tau$ . В точке  $\tau_0$ , где  $u$  сравнивается с  $\tau$ , производная  $du/d\tau$  обращается в бесконечность и испытывает разрыв, изменяясь от  $-\infty$  при  $u = \tau_0 - 0$  до  $+\infty$  при  $u = \tau_0 + 0$ . Это означает, что все характеристики, выходящие справа, т. е. идущие ниже прямой  $u = \tau$ , пересекают эту прямую и поворачивают обратно, сгущаясь при  $\tau \rightarrow +\infty$  вблизи прямой  $u = \tau$ , как это показано на рис. 7 (ср. рис. 2, а).

На рис. 8 представлена функция распределения ионов. На сепаратрисе  $u_s$  функция распределения равна нулю. Вблизи сепаратрисы вид ее существенно искажен действием электрического поля. Наиболее

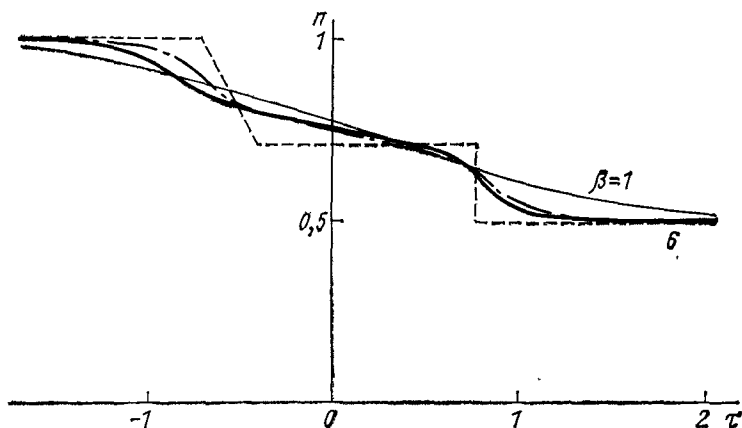


Рис 9 Распределение концентрации

сильно это проявляется при положительных значениях  $\tau$ , т. е. в той области, где первоначально находилась плазма меньшей концентрации. Здесь вблизи сепаратрисы образуются два узких пика функции распределения ионов. Поскольку поле ускоряет частицы лишь в направлении положительных  $x$ , т. е. положительных  $\tau$ , то при отрицательных  $\tau$  вблизи сепаратрисы имеется провал в функции распределения, а при положительных  $\tau$  — два пика: один выше сепаратрисы, другой ниже ее. Пик более быстрых частиц — это ускоренные полем частицы плотной плазмы  $N_0$ , пик более медленных — частицы из редкой плазмы  $N_2$ . При  $u = \tau$  (эта точка показана пунктиром) функция  $g(u)$  всегда имеет максимум или минимум: максимум при  $\tau < \tau_1 \approx 0,28$ , минимум при  $\tau > \tau_1$ .

Ход концентрации  $n(\tau)$  показан на рис. 9 (тонкая кривая). Там же представлены и результаты решения задачи для неизотермической плазмы  $\beta = T_e/T_i = 6$  (толстая кривая). Из рисунка видно, что в отличие от однотемпературной плазмы, где концентрация убывала равномерно, в разнотемпературной плазме выделяются область довольно медленного изменения автомодельного решения — плато и области довольно резкого изменения  $n(\tau)$ . Это в целом согласуется с результа-



тами линейного приближения (см. рис. 6, *a*). Кривая, построенная по формулам линейного приближения (39), изображена на рис. 9 штрих-пунктиром. Можно отметить, что в области волны сжатия ( $\tau \sim +1/\sqrt{2}$ ) крутизна фронта при точном расчете и в линейном приближении почти одинакова. Фронт же волны разрежения ( $\tau \sim -1/\sqrt{2}$ ) в нелинейном решении имеет тенденцию к расплыванию. Это становится еще более заметным при увеличении скачка  $\Delta l$  на разрыве.

Пунктиром на рисунке представлен результат решения той же задачи в изотермической гидродинамике (10). Видно, что расплывание волны разрежения согласуется с автомодельным гидродинамическим решением (31). В области волны сжатия в гидродинамике возникает сильный разрыв — ударная волна. Можно сказать, что в кинетике при  $\beta \gg 1$  образуется волна со сравнительно крутым, но расплывающимся (нестационарным) фронтом. При больших значениях  $\beta$ , к тому же, заметную роль играют осцилляции плазмы, развивающиеся в области фронта. Поэтому вопрос о структуре фронта при  $\beta \gg 1$  удобно подробнее обсудить в следующем параграфе (см. разд. 3.2; 3.3).

## 2.2. Одномерные течения. Возникновение особенностей

**Простая волна [16].** Выше были исследованы автомодельные решения бесстолкновительного кинетического уравнения для квазинейтральной плазмы. На этой же основе можно построить и более общие решения, соответствующие римановским решениям для простых волн в гидродинамике идеальной жидкости (см. [1, § 94]).

Будем разыскивать такие решения уравнения (38), в которых функция  $g$  зависит от  $\xi$  и  $t$  только через  $\Phi(\xi, t)$ :

$$g(\xi, t, u) = g[\Phi(\xi, t), u].$$

В частности, в автомодельных решениях, где  $g$  и  $\Phi$  зависят только от комбинации  $\tau = \xi/t$ , очевидно, что это так. Подставляя это выражение в (38), имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial \Phi} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} / \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial g / \partial u}{\partial g / \partial \Phi} - u.$$

Правая часть этого равенства по предположению зависит только от  $\Phi$  и  $u$ , а левая — от  $\xi$  и  $t$ . Поэтому ясно, что эти выражения могут быть только некоторой функцией  $\Phi$ , которую мы обозначим через  $-\tau(\Phi)$ , так что

$$\frac{\partial \Phi / \partial t}{\partial \Phi / \partial \xi} = -\tau(\Phi), \quad (40)$$

$$(u - \tau) \frac{\partial g}{\partial \Phi} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \quad (41)$$

Переходя в (41) к дифференцированию по  $\tau$ , получаем

$$(u - \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{d\psi}{d\tau} = 0. \quad (42)$$

Это уравнение совпадает с (12). Однако в (12)  $\tau = \xi/t$ , а в рассматриваемом здесь случае зависимость  $\tau$  от  $\xi$  и  $t$  может носить более общий характер.

Для выяснения этой зависимости обратимся к (40). Имеем:

$$\tau(\psi) = - \frac{(\partial\psi/\partial t)_{\xi}}{(\partial\psi/\partial\xi)_t} = \left( \frac{\partial\xi}{\partial t} \right)_{\psi} = \left( \frac{\partial\xi}{\partial t} \right)_{\tau},$$

откуда

$$\xi = \tau t + P(\tau). \quad (43)$$

Здесь  $P(\tau)$  — произвольная функция. Если положить  $P = 0$ , то  $\tau = \xi/t$ , и мы возвращаемся к частному случаю автомодельного движения.

Окончательно, в построенном здесь классе решений уравнения (38) функция распределения является произвольным решением автомодельного уравнения (12)  $g_a(\tau, u)$ , где параметр  $\tau$  связан с физическими переменными  $\xi, t$  формулой (43), содержащей произвольную функцию  $P(\tau)$ . Каждому  $\tau$  согласно (43) соответствует прямая в плоскости  $\xi, t$ . На этой прямой функция  $g$  имеет постоянное значение.

Для задачи с начальными условиями при  $t = 0$   $\xi = P(\tau)$ , т. е.  $\tau = q(\xi)$ , где  $q(\xi)$  — функция, обратная  $P(\tau)$ . Таким образом, наше решение соответствует следующей начальной задаче: в начальный момент  $t = 0$  задана функция распределения

$$g_0(\xi, u) = g_a(q(\xi), u).$$

Здесь  $g_a(\tau, u)$  — произвольное решение автомодельного уравнения (12),  $q(\xi)$  — произвольная функция\*.

Это решение кинетического уравнения вполне аналогично простой волне Римана в гидродинамике. Как и в гидродинамике, простая волна в кинетике может опрокидываться, т. е. решение может иметь смысл не при всех  $\xi, t$ . Действительно, пусть на кривой  $P(\tau)$  имеется точка перегиба  $\tau_0$ :  $P''(\tau_0) = 0$  [причем  $P'''(\tau_0) < 0$ ]. Тогда, начиная с момента времени  $t_0 = -P'(\tau_0)$ , зависимость  $\tau$  от  $\xi$ , определяемая формулой (43), стремится сделаться неоднозначной, а в точке  $\xi_0 = = \tau_0 t_0 + P(\tau_0)$  в момент  $t_0$  возникает особенность: производная

\* Поскольку  $g_a$  определяется двумя произвольными функциями от  $u$  [граничные условия (15)], то построенное здесь решение зависит от трех произвольных функций — двух от  $u$  и одной от  $\xi$ .

$dg/d\xi \rightarrow \infty$ . Действительно, при  $\tau \approx \tau_0$ ,  $t \approx t_0$  уравнение (43) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi^* - \tau_0 t^* &= \tau^* t^* - \alpha \tau^{*3}; \\ \tau^* &= \tau - \tau_0, \quad t^* = t - t_0, \quad \xi^* = \xi - \tau_0 t_0 - P(\tau_0), \\ \alpha &= -\frac{1}{6} P'''(\tau_0) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

При  $t^* < 0$ , т. е. при  $t < t_0$ , решение уравнения (44) однозначно, т. е. имеется один корень  $\tau^*$ ; при  $t^* > 0$  оно имеет три корня  $\tau^*$ . В момент  $t^* = 0$ :  $\tau^* = -(\xi^*/\alpha)^{1/3}$ , так что функция распределения  $g(t, \xi, u)$  при  $t = t_0$  и  $\xi$  близких к  $\xi_0 = \tau_0 t_0 + P(\tau_0)$  имеет вид:

$$g_{t=t_0} = g_a [\tau_0 - (\xi^*/\alpha)^{1/3}, u].$$

Отсюда следует, что

$$|(\partial g / \partial \xi)_{t=t_0}|_{\xi \rightarrow \xi_0} \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Таким образом, с развитием гладкого начального распределения в момент  $t_0$  появляется особая точка. Эта особая точка носит гидродинамический характер, так как одновременно она возникает и у всех макроскопических величин: концентрации  $N$ , средней скорости ионов  $\bar{u}$  и т. д. Точку  $\xi_0$ ,  $t_0$  естественно назвать точкой «гидродинамического опрокидывания». В гидродинамике в момент  $t = t_0$  в особой точке  $\xi_0$  возникает ударная волна, интенсивность которой возрастает с увеличением  $t$ . Поэтому гидродинамическое решение при  $t > t_0$  в окрестности точки  $\xi_0$  уже не имеет вида простой волны. Аналогичным образом и в кинетике при  $t > t_0$  в окрестности особой точки решение теряет вид простой волны.

**Волны гидродинамического типа.** Выше было показано, что при специальных начальных условиях в кинетике бесстолкновительной плазмы возникают решения, вполне аналогичные волнам Римана в гидродинамике. Рассмотрим теперь несколько более широкий класс начальных функций распределения: примем, что функция распределения ионов по скорости обрезана

$$g_0(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \geq u_K, \quad (46)$$

причем скорость  $u_K$  меньше скорости ионного звука  $s_i$ :

$$u_K < s_i. \quad (47)$$

Такая функция распределения показана на рис. 10. Обрезание может носить односторонний или двусторонний характер (пунктирная кри-

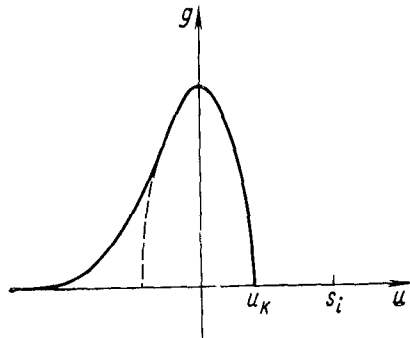


Рис 10 Обрезанная функция распределения

вая\*). Частным случаем функции распределения (46) является, естественно, функция распределения ионов в холодной плазме  $T_i = 0$ .

Покажем, что распространение волн малой амплитуды в плазме с функцией распределения (46), (47) описывается уравнениями гидродинамического типа [20, 21]. Задача состоит в том, чтобы найти решение уравнения (38) с точностью до членов второго порядка по амплитуде до волны  $\psi$ . Из (38) с этой точностью имеем

$$n_1 = n - 1 = \psi + \psi^2/2 + \dots, \quad n_1 = \int g_1 du \Big/ \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad (48)$$

где  $n_1$  — возмущение концентрации;  $g_1$  — возмущение функции распределения. Положив  $g = g_0(u) + g_1$ , перепишем уравнение (38), выделив в нем члены первого и второго порядка по амплитуде:

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + u \frac{\partial g_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = A. \quad (49)$$

Преобразуем это уравнение по Фурье:

$$i(ku - \omega) g_{\omega k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial u} ik\psi_{\omega k} = A_{\omega k}, \quad A_{\omega k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{\omega k}. \quad (50)$$

Поделим на  $i(ku - \omega)$  и проинтегрируем по  $du/\sqrt{\pi/\beta}$ . Получим\*\*

$$n_{\omega k} - \psi_{\omega k} \int \frac{ik}{2i(ku - \omega)} \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}} = \int \frac{A_{\omega k}}{i(ku - \omega)} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}}. \quad (51)$$

Учтем теперь, что мы рассматриваем волны малой амплитуды, т. е. волны, скорость которых близка к скорости ионно-звуковых волн  $s_i$ . В (51) можно считать поэтому, что  $\omega/k = s_i + s^*$ , где  $s^* \ll s_i$  ( $s^*$  — скорость волны в системе координат, движущейся со скоростью ионного звука  $s_i$ ).

Преобразуем выражение для  $A$ . В нулевом приближении

$$g_{\omega k} \approx \frac{ik}{2i(ku - \omega)} \frac{\partial g_0}{\partial u} \psi_{\omega k} \approx \frac{1}{2(u - s_i)} \frac{\partial g_0}{\partial u} \psi_{\omega k},$$

так что

$$g_1 \approx \frac{1}{2(u - s_i)} \frac{\partial g_0}{\partial u} \psi.$$

\* Заметим, что обрезанные функции распределения — явление не редкое в бесстолкновительной плазме. Они возникают при эмиссии в плазму электронов или ионов с граничной поверхности (отсутствуют частицы, летящие в сторону эмиттирующей поверхности), например, в односторонних Q-машинах, в плазменных пушках [17, 18]. В космических условиях обрезанную функцию распределения имеют, например, ионы солнечного ветра. Естественно, что соударения стремятся выравнять — максвеллизовать функцию распределения [19].

\*\* Строго говоря, в уравнении (50) имеется еще один член  $g_k$ , выражающий расплывание возмущения свободно летящих частиц, однако при интегрировании по  $du$  в (51) он выпадает (подробнее см. [20]).

Используя это выражение в формуле (49) для  $A$ , имеем:

$$A = \frac{1}{8} \frac{\partial \psi^2}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial g_0 / \partial u}{u - s_i} \right). \quad (52)$$

Подставляя теперь выражения (52) и (48) в уравнение (51), имеем

$$\begin{aligned} & \psi_{\omega k} \left[ 1 - \int \frac{ik}{2i(ku - \omega)} \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}} \right] + \\ & + \frac{\psi_{\omega k}^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \int \frac{ik}{i(ku - \omega)} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial g_0 / \partial u}{u - s_i} \right) \frac{du}{\sqrt{\pi/\beta}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь можно проинтегрировать по частям по  $du$ , учитывая, что особенность в знаменателе не возникает вследствие того, что функция  $g_0(u)$  тождественно равна нулю при  $u = s_i$  вместе со всеми своими производными [условия (46), (47)]. Учитывая, кроме того, что по определению скорости  $s_i$ :

$$\int \frac{1}{u - s_i} \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{2\sqrt{\pi/\beta}} = 1$$

(вывод этого соотношения приведен в § 3), имеем:

$$\mu \frac{\omega^*}{k} \psi_{\omega k} - \frac{\nu - 1}{2} (\psi^2)_{\omega k} = 0. \quad (54)$$

Здесь  $\omega^* = \omega - ks_i$ , а  $\omega^*/k = s^*$  (мы перешли в систему координат, движущуюся со скоростью звука);  $\mu$  и  $\nu$  — постоянные, определяющиеся видом функции  $g_0(u)$ :

$$\mu = - \frac{1}{\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{g_0 du}{(u - s_i)^2}, \quad \nu = \frac{3}{4\sqrt{\pi/\beta}} \int \frac{g_0 du}{(u - s_i)^3}. \quad (55)$$

В частности, при  $T_i \rightarrow 0$  имеем ( $g_0 \rightarrow \sqrt{\pi/\beta} \delta(u)$ ):

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu = 2\sqrt{2}, \quad \nu = 3. \quad (55a)$$

Значения параметров  $\mu$  и  $\nu$  для автомоделных функций распределения приведены в [20].

Возвращаясь от компонент Фурье к величинам

$$i\omega^* \rightarrow \partial/\partial t, \quad ik \rightarrow \partial/\partial \xi^*$$

( $\xi^*$  — координата в новой системе), имеем окончательно:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\nu - 1) \psi \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} = 0. \quad (56)$$

Это уравнение простой волны. Его общее решение:

$$\psi(\xi^*, t) = \psi_0 \left( \xi^* - \frac{\nu - 1}{\mu} \psi t \right), \quad (57)$$

где  $\psi_0(\xi^*)$  — профиль волны в начальный момент  $t = 0$ .

Если функция  $\psi_0(\xi^*)$  имеет точку перегиба, то профиль  $\psi(\xi^*, t)$ , определенный из соотношения (57), является однозначной функцией  $\xi^*$  только при  $t \leq t_0$ . При  $t > t_0$  волна опрокидывается. Таким образом, у рассматриваемых здесь решений также возникает особая точка гидродинамического типа.

**Кинетическое опрокидывание.** Выше были построены точные решения кинетического уравнения, у которых в определенный момент времени возникала особая точка. В этой точке  $\partial g / \partial \xi \rightarrow \infty$ ,  $\partial \psi / \partial \xi \rightarrow \infty$ , так что исходное уравнение (7) или (38) становилось неприменимым. Однако такие решения получены только для специальных классов начальных функций распределения. В общем случае при произвольной начальной функции распределения такой особой точки не возникает: как сама функция распределения, так и все макроскопические величины остаются достаточно гладкими функциями во все моменты времени. Это существенным образом отличает кинетику бесстолкновительной плазмы от гидродинамики идеального газа.

Однако в поведении функции распределения все же возникает определенная особенность, которая при дальнейшем своем развитии (как будет показано в § 3) приводит к явлениям, в целом подобным тем, которые возникают после гидродинамической особой точки. Речь идет о расщеплении функции распределения. Вместо обычной функции распределения по скорости  $u$ , имеющей один максимум, начиная с некоторого момента  $t_0$  в окрестности определенной точки  $\xi_0$ , появляются функции распределения с двумя или даже с тремя максимумами. Область пространства, занятая такими особыми функциями, расширяется со временем. Это явление размножения или опрокидывания максимума функции распределения подобно опрокидыванию потока в гидродинамике. Его естественно назвать поэтому кинетическим опрокидыванием.

Наиболее просто исследовать явление кинетического опрокидывания в «нейтральном приближении». Функция распределения в этом случае в любой момент времени  $t$  определена через начальную функцию распределения  $g_0(\xi, u)$  с помощью соотношения (9). Пусть, например,  $g_0(\xi, u)$  — максвелловская функция с постоянной температурой  $T_j$ :

$$g_0(\xi, u) = \exp [-(u - u_0(\xi))^2].$$

Тогда в любой момент  $t$  согласно (9)

$$g(\xi, u, t) = \exp [-(u - u_0(\xi - ut))^2]. \quad (58)$$

Скорость  $u_m$ , при которой функция  $g(u)$  достигает максимума  $g_{\max} = 1$ , определена условием:

$$u_m = u_0(\xi - u_m t). \quad (59)$$

Это соотношение совпадает с (57). Оно дает одно значение  $u_m$  только при  $t \leq t_0$ . При  $t > t_0$  в окрестности некоторой точки  $\xi_0$  возникают три корня  $u_m$ , т. е. функция распределения (58) становится трехгорбой. Возникновение новых максимумов проиллюстрировано на рис. 11 для  $u_0(\xi) = u_0/(1 + \xi^2)$ ,  $u_0 = 5$ . Слева на рисунках показано распределение концентрации плазмы. В начальный момент  $t = 0$  концентра-

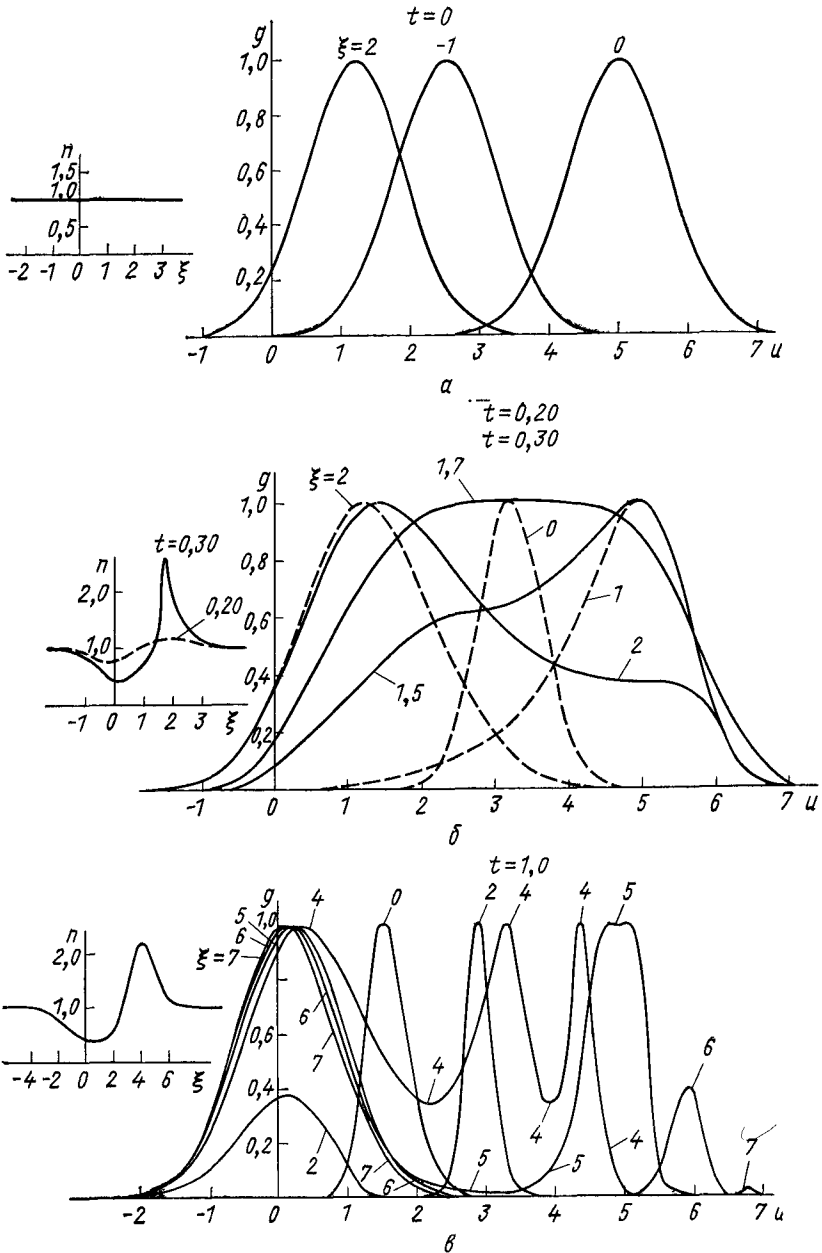


Рис. 11. Вид функции распределения при кинетическом опрокидывании. Слева — концентрация плазмы

ция не возмущена. Затем появляется волна концентрации, движущаяся направо. В правой части рисунков показана функция распределения по скорости для различных точек  $\xi$ , указанных на рисунке. Видна весьма сложная структура функции распределения после точки кинетического опрокидывания ( $t_0 \approx 0,308$ ).

В общем случае условие появления нового максимума у функции распределения  $g(u, \xi, t)$  имеет вид:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0. \quad (60)$$

Подставляя сюда функцию распределения из (9), имеем:

$$\frac{\partial g_0}{\partial u} - t \frac{\partial g_0}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^2 g_0}{\partial u^2} - t^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi^2} = 0,$$

где  $g_0(u, \xi)$  — начальная функция распределения. Исключая из этих уравнений  $t = (\partial g_0 / \partial u) / (\partial g_0 / \partial \xi)$ , переписываем их в виде:

$$\left( \frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial u^2} = \left( \frac{\partial g_0}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi^2}. \quad (61)$$

Это условие определяет в общем случае целую кривую  $\xi_0(u)$ , на которой появляется точка перегиба у функции  $g(u)$ . Найдем момент времени  $t_0$ , при котором условия перегиба выполняются впервые:

$$t_0 = \left( \frac{\partial g_0}{\partial u} / \frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)_{\text{мин}}.$$

Условия минимума

$$(\partial t / \partial \xi)_{u_0, \xi_0} = 0, \quad (\partial t / \partial u)_{u_0, \xi_0} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 g_0}{\partial u^2} = \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi \partial u}, \quad \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial g_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 g_0}{\partial u \partial \xi}. \quad (62)$$

Легко видеть, что при выполнении условий (62) условия перегиба (61) выполнены автоматически. Итак, в точке  $\xi_0, u_0$ , определенной условиями (62) в момент  $t_0 = \left( \frac{\partial g_0}{\partial u} / \frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)_{u_0, \xi_0}$ , функция распределения впервые перегибается и при  $t > t_0$  у нее появляются новые максимумы.

Учет влияния электрического поля не меняет качественно характера рассмотренной картины. По-прежнему условия (60) определяют целую кривую  $\xi_0(u)$ , на которой у функции распределения есть перегиб, и после которого появляется новый максимум. Дополнив (60) требованием, чтобы  $t = t_{\text{мин}}$ , получаем еще одно условие. Это условие совместно с (60) определяет уже одну точку  $t_0 = t_{\text{мин}}, \xi_0, u_0$ , где впервые возникает перегиб.

В определенных условиях электрическое поле даже способствует появлению нового максимума. Например, в задаче о втекании плазмы в плазму, рассмотренной в разд. 2.1, в нейтральном приближении функция распределения имеет один максимум при  $\tau < 0$  и два макси-



муна при  $\tau > 0$ . При учете влияния электрического поля, как видно из рис. 8, функция распределения имеет два максимума при  $\tau < 0,28$  и три максимума при  $\tau > 0,28$ . При этом сами максимумы при  $\tau > 0$  более ярко выражены. Это изменение характера функции распределения возникло благодаря ускорению ионов электрическим полем,

### 2.3. Адиабатический захват электронов

**Функция распределения захваченных электронов.** В постоянном электрическом поле  $\varphi(x)$  стационарная функция распределения  $f$  зависит только от энергии электронов  $\varepsilon$ :

$$f = f(\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2} - e\varphi(x). \quad (63)$$

В отсутствие соударений существенно различаются при этом электроны, совершающие инфинитное и финитное движения в поле  $\varphi(x)$ . Поведение инфинитных электронов полностью определяется функцией распределения на бесконечности, где потенциал  $\varphi \rightarrow 0$  и плазма не возмущена. Примем, как обычно, невозмущенную функцию распределения максвелловской. Из (63) тогда вытекает, что при любом значении  $\varphi$  функция распределения инфинитных электронов максвелл—больцмановская:

$$f_{\text{inf}} = C \exp(-\varepsilon/T_e) = C \exp(-mv^2/2T_e + e\varphi/T_e). \quad (64)$$

Распределение же по энергии электронов, совершающих финитное движение, в отсутствие соударений произвольно.

Важно, однако, что области финитного и инфинитного движений строго разделяются лишь в случае стационарного поля, когда сохраняется энергия частицы. В нестационарном поле энергия не сохраняется. Это может приводить к захвату части инфинитных электронов на финитные орбиты, а следовательно, ко вполне определенному распределению захваченных электронов по энергиям [2]\*.

Рассмотрим газ невзаимодействующих электронов, находящихся в нестационарном электрическом поле  $\varphi(x, t)$ . Примем, что потенциал поля мало изменяется за период колебаний захваченного\*\* электрона:

$$\frac{1}{\omega} \left| \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \ll 1, \quad \omega = \frac{\sqrt{2} \pi}{\sqrt{m}} \left[ \int \frac{dx}{(\varepsilon + e\varphi)^{1/2}} \right]^{-1}. \quad (65)$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний захваченного электрона. Интегрирование в (65) ведется по всем значениям  $x$ , для которых  $\varepsilon + e\varphi \geq 0$ . В условиях (65) функция распределения захваченных электронов в первом приближении по  $1/\omega$  зависит лишь от их энергии  $\varepsilon$  и времени  $t$ :

\* Эти результаты в дальнейшем были подтверждены численными расчетами [25].

\*\* Это условие соответствует рассматриваемым в настоящей работе относительно медленным гидродинамическим движениям плазмы: оно обычно выполняется в силу того, что  $m/M \ll 1$ .

$f = f(\epsilon, t)$ . Уравнение для функции  $f(\epsilon, t)$  получается усреднением кинетического уравнения для электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (66)$$

по поверхности постоянной энергии. Умножая уравнение (66) на  $\delta(\epsilon - \frac{mv^2}{2} + e\varphi)$  и интегрируя его по всему фазовому объему  $dvdx$ , находим, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Q(\epsilon, t) \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = 0, \quad Q(\epsilon, t) = -e \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dx}{(\epsilon + e\varphi)^{1/2}} / \int \frac{dx}{(\epsilon + e\varphi)^{1/2}}. \quad (67)$$

Здесь  $Q(\epsilon, t)$  — изменение энергии захваченной частицы в единицу времени, вызванное нестационарностью поля.

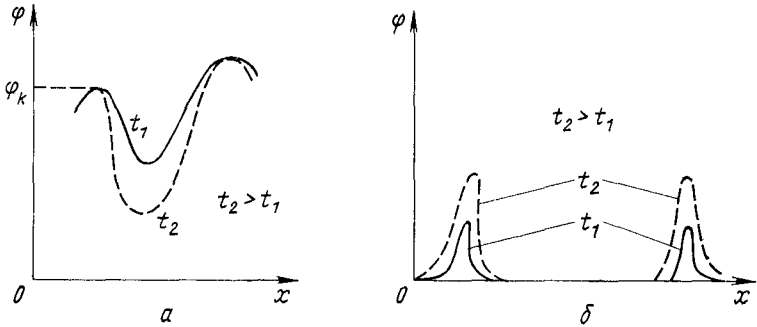


Рис 12 Нестационарные потенциальные ямы

Характеристики уравнения (67)

$$d\epsilon/dt = Q(\epsilon, t). \quad (68)$$

Адиабатический инвариант (см. [22, с. 193])

$$I(\epsilon, t) = \int p dx = \sqrt{2m} \int (\epsilon + e\varphi)^{1/2} dx \quad (69)$$

естественно является интегралом для уравнений характеристик (68). Решение кинетического уравнения (67) является поэтому функцией адиабатического инварианта  $I$ :

$$f = f[I(\epsilon, t)]. \quad (70)$$

Конкретный вид функции  $f(I)$  определяется граничными и начальными условиями.

Граничные условия к уравнению (67) задаются на границе  $\epsilon = e\varphi_h$ , разделяющей области инфинитного и финитного движений. Предположим вначале для простоты, что область финитного движения односвязна — занимает один интервал (рис 12) ( $\varphi_h$  — меньший из двух

максимумов функции  $\varphi(x, t)$ , ограничивающих рассматриваемую область), и что граница  $\varphi_h$  постоянна во времени. Тогда полный поток частиц из области инфинитного в область финитного движения через границу  $\varepsilon = e\varphi_h$  равен

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{inf}} &= - \int_a^b v f_{\text{inf}}(v) dv - \int_{-b}^{-a} v f_{\text{inf}}(v) dv = - \frac{f_+ + f_-}{m} \varepsilon_0; \\ a &= (2e\varphi_h/m)^{1/2}, \quad b = [2(e\varphi_h + \varepsilon_0)/m]^{1/2}; \\ f_+ &= f_0(\sqrt{e\varphi_h/m}), \quad f_- = f_0(-\sqrt{e\varphi_h/m}). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Здесь  $f_{\text{inf}}$  — функция распределения частиц, совершающих инфинитное движение. Как и в стационарном поле, функция  $f_{\text{inf}}$  определяется условиями на бесконечности, так что согласно (63)

$$f_{\text{inf}} = f_0(\sqrt{2\varepsilon/m}),$$

где  $f_0(v)$  — функция распределения на бесконечности. Существенно, что одному значению энергии  $\varepsilon$  соответствуют два значения функции  $f_{\text{inf}}$ :  $f_0(+\sqrt{2\varepsilon/m})$  и  $f_0(-\sqrt{2\varepsilon/m})$ . Одно из них описывает частицы, летящие слева, другое — справа. Два слагаемых в выражении для  $S_{\text{inf}}$  дают соответствующие потоки захватываемых частиц. Если высота максимумов, ограничивающих область финитного движения, неодинакова, то  $f_+ \simeq f_-$ . Далее,  $e\varphi_h$  в (71) — минимальная, а  $e\varphi_h + \varepsilon_0$  — максимальная энергия захватываемых инфинитных частиц. Энергия  $\varepsilon_0$  пропорциональна  $d\varphi/dt$ , она мала. Это позволило вынести функцию  $f_0$  из-под интеграла в последнем выражении в (71).

Для вычисления  $\varepsilon_0$  рассмотрим, как меняется энергия инфинитной частицы:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - e\varphi(x, t) \right\} = -e \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (72)$$

Энергия  $\varepsilon_0$  равна полному изменению энергии инфинитной частицы с  $\varepsilon = e\varphi_h$  за время движения ее между максимумами функции  $\varphi(x, t)$ . Учитывая (72), найдем:

$$\varepsilon_0 = -e \int \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt = -\sqrt{\frac{em}{2}} \int \frac{\partial\varphi/\partial t}{\sqrt{\varphi_h + \varphi}} dx. \quad (73)$$

Последнее выражение получено в предположении, что интеграл сходится. Сходимость интеграла обеспечивается тем, что в рассматриваемом здесь случае  $\varphi_h$  от времени не зависит и, следовательно,  $\partial\varphi/\partial t \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow \varphi_h$ , т. е. при  $x \rightarrow x_h$ .

Таким образом, полный поток захватываемых полем инфинитных частиц определяется выражениями (71), (73). Его можно также представить в виде:

$$S_{\text{inf}} = \frac{f_+ + f_-}{m} \frac{dI_h}{dt}, \quad I_h = \sqrt{2me} \int \sqrt{\varphi_h + \varphi} dx. \quad (74)$$

Здесь  $I_k$  — адиабатический инвариант (69) на границе с областью инфинитного движения. Поток частиц в области финитного движения, как следует из уравнения (67), есть

$$S_{\text{fin}} = -Qf_{\text{fin}} \int \delta\left(\varepsilon - \frac{mv^2}{2} + e\varphi\right) dx dv = \sqrt{\frac{2}{m}} e f_{\text{fin}} \int \frac{\partial\varphi/\partial t}{\sqrt{\varepsilon + e\varphi}} dx. \quad (75)$$

При  $\varepsilon \rightarrow e\varphi_k$  оба потока должны быть равны. Это приводит к граничному условию для функции  $f_{\text{fin}}$ :

$$f_{\text{fin}}|_{\varepsilon=e\varphi_k} = \frac{1}{2} (f_+ + f_-). \quad (76)$$

Если  $f_+ = f_-$ , т. е.  $f_{\text{inf}} = f_{\text{inf}}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = e\varphi_k$ , то граничное условие (76) является условием непрерывности функций распределения на границе областей инфинитного и финитного движений. Граничное условие (76) не меняется и в том случае, когда граница  $\varphi_k$  изменяется со временем  $\partial\varphi_k/\partial t \neq 0$ . Это легко понять: изменение границы не вызывает непосредственного изменения потока частиц в пространстве энергии — меняется лишь объем фазового пространства, занятого финитными частицами.

Кроме граничного условия (76), уравнение (67) требует также задания функции распределения в области финитного движения в начальный момент времени:

$$f(0, \varepsilon) = f_0(\varepsilon). \quad (77)$$

В тех случаях, когда область финитного движения вначале отсутствовала, условие (77) несущественно и распределение финитных частиц с помощью формул (70), (76) полностью определяется через функцию распределения инфинитных частиц на бесконечность.

Рассмотрим некоторые решения кинетического уравнения (67). Пусть потенциальная яма впервые появилась в момент  $t = 0$  и постепенно углубляется и расширяется с  $t$ , но граничное значение  $\varphi_k$  при этом неизменно (рис. 12, а). В этом случае функция распределения во всей области финитного движения постоянна и равна (76):

$$f_{\text{fin}}(\varepsilon) = f_{\text{fin}}|_{\varepsilon=e\varphi_k} = \frac{1}{2} (f_+ + f_-) = f_0(e\varphi_k). \quad (78)$$

Это простое решение представляет интерес для ряда плазменных задач: автомодельное движение, уединенные волны.

Рассмотрим другой случай, когда яма ограничена двумя солитонами, амплитуда которых нарастает во времени (рис. 12, б). Если пренебречь размером солитонов в сравнении с размерами ямы, то согласно (76):

$$f_{\text{fin}}(\varepsilon) = \frac{1}{2} (f_+ + f_-)_\varepsilon = f_0(\varepsilon). \quad (79)$$

Функция распределения для финитных частиц в этом случае тождественно совпадает с функцией распределения инфинитных частиц.

Рассмотрим, наконец, общий случай нарастающей волны, когда углубляется потенциальная яма и одновременно меняется потенциал поля на границе. Пусть для примера  $\varphi(x, t) = \varphi_h(t) \psi(x)$ . Тогда согласно (69)

$$I(y, t) = \sqrt{2m\varphi_h(t)} \frac{R(y)}{R(1)}, \quad R(y) = \int \sqrt{y + \psi(x)} dx, \quad y = \varepsilon/e\varphi_h(t).$$

Учитывая (70)

$$f(I) = f[\varphi_h^{1/2} R(y)]$$

и граничное условие (76), (79), имеем

$$f(\varepsilon, t) = f_0(\varepsilon_h), \quad \varepsilon_h = e\varphi_h(t) \frac{R^2(\varepsilon/e\varphi_h)}{R^2(1)}. \quad (80)$$

Отметим, что в формулах (78)—(80) всюду принято, что  $f_+ = f_- = f_0$ . С различием функций  $f_+$  и  $f_-$  связан обмен энергией между частицами и полем и изменение энтропии системы, происходящее в процессе захвата и дальнейшего «размешивания» функции распределения [2, 23, 24].

**Одновременное движение плазмы в случае немонотонного потенциала.** Используем полученные результаты для анализа одномерного движения разреженной плазмы. При выводе уравнений (7), (12) для функции распределения ионов распределение электронов предполагалось равновесным — бальцмановским. Это строго справедливо в случае монотонного хода потенциала  $\varphi(\tau)^*$ . Широкий класс начальных задач приводит, однако, к немонотонному ходу концентрации, а следовательно, и потенциала поля (см. рис. 1, а, б).

Например, при втекании потока плазмы с постоянной начальной скоростью  $u_0$  в покоящуюся плазму (рис. 1, б) в области значений  $\tau$ :  $u_0 \gtrsim \tau \gtrsim 0$  возникает уплотнение  $n(\tau) > 1$ . Если граница, разделяющая в начальный момент  $t = 0$  покоящуюся и движущуюся плазму, резкая, то задача автомодельна. В области уплотнения потенциал положителен  $\varphi(\tau) > 0$  [см. (12)]. Здесь образуется потенциальная яма для электронов. Яма медленно [в смысле критерия (65)] расширяется со временем. Граничное значение потенциала  $\varphi_h$  и соответствующее значение функции распределения инфинитных электронов с течением времени не меняются. Следовательно, функция распределения захваченных электронов определена формулой (78). Для концентрации электронов в области потенциальной ямы, учитывая (64), (78), получаем [2]:

\* Предполагается, что распределение электронов в невозмущенной плазме — максвелловское. Случай немаквелловской функции распределения электронов рассмотрен в разд. 2.4.

$$N(\psi^*) = N_{\text{inf}}(\psi^*) + N_{\text{fin}}(\psi^*),$$

$$N_{\text{inf}} = \int_{\varepsilon > e\varphi_k} f_{\text{inf}} dv = \frac{2N_k}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\psi^*}}^{\infty} \exp(\psi^* - u^2) du = N_k \exp(\psi^*) [1 - \Phi(\sqrt{\psi^*})], \quad (81)$$

$$N_{\text{fin}} = \int_{\varepsilon < e\varphi_k} f_{\text{fin}} dv = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{-e\varphi}^{e\varphi_k} \frac{f_{\text{fin}}(\varepsilon) d\varepsilon}{(\varepsilon + e\varphi)^{1/2}} = N_k 2\sqrt{\psi^*}/\sqrt{\pi}.$$

Здесь  $\psi^* = e(\varphi - \varphi_k)/T_e$ ,  $N_k = N_0 \exp(e\varphi_k/T_e)$  — значение концентрации при  $\varphi = \varphi_k$ , т. е. на границе потенциальной ямы. Например, в случае втекания потока плазмы в плазму при  $N_0 > N_2$  имеем  $N_k = N_{\tau \rightarrow -\infty} \simeq N_0$ ,  $\varphi_k = \varphi_{\tau \rightarrow -\infty} = 0$ .

Определяя из (81)  $d\varphi/d\tau$ , имеем:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{T_e}{eN_{\text{inf}}} \frac{dN}{d\tau}. \quad (82)$$

Подставляя это выражение в (12), получаем следующее уравнение, описывающее в общем случае одномерное автомодельное движение:

$$(u - \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} q \frac{d \ln n}{d\tau} = 0, \quad q = N/N_{\text{inf}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{\pi/\beta}} \int g du. \quad (83)$$

Здесь  $N$  — полная концентрация, а  $N_{\text{inf}}$  — концентрация инфинитных электронов (81). В области монотонности  $N = N_{\text{inf}}$  и уравнение (83) совпадает с (12). В области немонотонности зависимость  $N_{\text{inf}}$ , а следовательно, и  $q$  от  $N$  дана в неявном виде соотношением (81), численно она следующая:

$N/N_k$	1	1,081	1,203	1,322	1,558	1,755	1,936	2,095	2,250
$q$	1	1,49	1,88	2,52	3,64	4,72	5,76	6,76	7,68
$N_{\text{inf}}/N_k$	1	0,724	0,639	0,524	0,428	0,372	0,336	0,310	0,296
$\psi^*$	0	0,10	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00

При  $N/N_k \rightarrow 1$  имеем:

$$q \simeq 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{N}{N_k} - 1}.$$

При  $N/N_k \gg 1$ :

$$q \simeq \frac{\pi}{2} \left( \frac{N}{N_k} \right)^2.$$

Отсюда видно, что при адиабатическом захвате в области потенциальной ямы влияние электрического поля на движение ионов существенно возрастает.

Отметим еще одну важную особенность адиабатического распределения захваченных электронов. При больцмановском распределении (6) температура электронов не зависит от потенциала поля, при любом  $\varphi$  она равна  $T_e$ . При адиабатическом распределении можно го-

ворить лишь об эффективной температуре, причем эффективная температура электронов возрастает с увеличением  $\psi^*$ :

$$T_{\text{эф}} = \frac{2}{N} \left\{ \int_{\text{inf}} \frac{mv^2}{2} f_{\text{inf}} dv + \int_{\text{fin}} \frac{mv^2}{2} f_{\text{fin}} dv \right\} =$$

$$= T_e \left\{ 1 + \frac{2\psi^*}{3 + \frac{3\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\psi^*}} \exp(\psi^*) [1 - \Phi(\sqrt{\psi^*})]} \right\}. \quad (84)$$

Отсюда видно, что при больших  $\psi^*$  значение  $T_{\text{эф}}$  линейно растет с ростом потенциала:  $T_{\text{эф}} \approx \frac{2}{3} e (\varphi - \varphi_h)$ . Разумеется, речь здесь идет лишь об увеличении температуры вдоль выделенного направления  $x$ ; в направлениях ортогональных к  $x$  она не меняется.

Отметим также, что функция распределения электронов в области ямы при больших  $\psi^*$  носит не максвелловский, а столбовидный характер: она показана на рис. 13 [см. (64), (78)]. Пунктиром на рисунке отмечена область захваченных электронов; эта область расширяется с увеличением  $\psi^*$ . Поэтому увеличивается и эффективная температура.

Рост эффективной температуры приводит к быстрому росту давления. Зависимость  $p$  от  $N$  при  $N > N_h$  определяется выражением

$$p = N_h T_e + T_e \int_{N_h}^N q dN - N_h T_e \times \frac{p}{N_h T_e}$$

$$\times \left( \frac{N}{N_h} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \psi^{*3/2} (N/N_h) \right), \quad (85)$$

где  $\psi^*$  ( $N/N_h$ ) определено согласно (81) (см. таблицу). Отсюда при  $N/N_h \approx 1$  имеем:

$$p = NT_e \left[ 1 + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left( \frac{N}{N_h} - 1 \right)^{3/2} \right]$$

При  $N/N_h \gg 1$ :

$$p = N_h T_e \frac{\pi}{6} \left( \frac{N}{N_h} \right)^3.$$

Зависимость давления  $p$  от  $N$  согласно (85) показана на рис. 14.

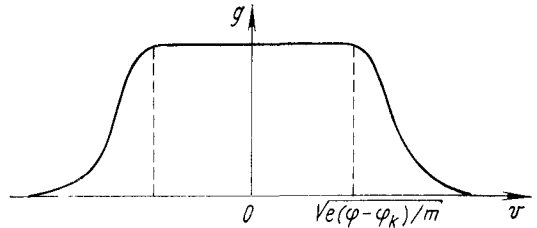


Рис. 13 Функция распределения электронов при адиабатическом захвате

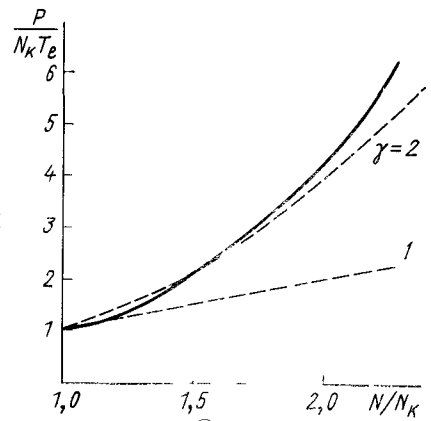


Рис. 14 Зависимость давления от плотности электронов при адиабатическом захвате

## 2.4. Ускорение ионов

**Немаквелловская функция распределения электронов.** В разд. 2.1 расширение плазмы в вакуум рассматривалось в предположении, что функция распределения электронов максвелловская. Для бесстолкновительной плазмы это не обязательно и в реальных ситуациях возможно распределение электронов, отличное от максвелловского. Часто оно обогащено быстрыми электронами (например, при разлете плазмы, образованной в лазерной искре или в мощном СВЧ-поле [26, 27])\* . Изменение вида функции распределения электронов сильно сказывается на количестве ускоренных ионов.

Пусть в невозмущенной плазме, где потенциал электрического поля  $\varphi = 0$ , функция распределения электронов по скорости  $v_x$  есть  $f_0(v_x)$ . Тогда, концентрация электронов в любой точке  $x$ , где  $\varphi(x) < 0$  (потенциал предполагается здесь монотонным, потенциальные ямы не рассматриваются, см. разд. 2.3),

$$N_e(\varphi) = \int_{+\sqrt{-2e\varphi/\pi}}^{\infty} \left(1 + \frac{2e\varphi}{mv_x^2}\right)^{-1/2} f_0 dv_x + \int_{-\infty}^{-\sqrt{-2e\varphi/m}} \left(1 + \frac{2e\varphi}{mv_x^2}\right)^{-1/2} f_0 dv_x. \quad (86)$$

Представим потенциал электрического поля в виде

$$\varphi = \frac{T_{\text{эф}}}{e} \Phi(n). \quad (87)$$

Здесь эффективная температура электронов

$$T_{\text{эф}} = \frac{m}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f_0 dv_x, \quad (88)$$

$n = N_e/N_0$ ,  $N_0$  — плотность невозмущенной плазмы, а  $\Phi(n)$  — функция, обратная  $N_e(\varphi)$  (86). В силу условия квазинейтральности (2) потенциал согласно (87) выражен через концентрацию ионов  $n = N_i/N_0$ . Кинетическое уравнение для одномерного движения ионов в квазинейтральной плазме принимает поэтому вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{T_{\text{эф}}}{M} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \Phi(n)}{\partial x} = 0. \quad (89)$$

\* Увеличение числа быстрых электронов связано с возбуждением неустойчивостей плазмы в сильном электромагнитном поле, приводящих к интенсивной генерации плазменных волн. Плазменные волны, диссипируя вследствие поглощения Ландау, приводят к ускорению электронов.



В случае максвелловского распределения электронов

$$T_{\text{эф}} = T_e, \quad \Phi(n) = -\ln n \quad (90)$$

и уравнение (89) совпадает с (7). Уравнение автомодельного движения также имеет вид (12) с заменой  $\ln n$  на  $\Phi(n)$ .

Рассмотрим ускорение ионов при расширении в вакуум плазмы с немаксвелловскими электронами. Анализ, совершенно аналогичный проведенному в разд. 2.1, показывает, что функция распределения ионов при высоких скоростях  $v \gg (T_{\text{эф}}/M)^{1/2}$  резко сужается, приобретает иглообразный характер (см. рис. 5). Разброс ионов по скоростям при этом несуществен, их движение описывается уравнениями гидродинамики (10), (29), которые в нашем случае немаксвелловского распределения электронов принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u} - \tau) \frac{dn}{d\tau} + n \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= 0; \\ (\bar{u} - \tau) \frac{d\bar{u}}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{dn}{d\tau} b(n) &= 0; \\ b(n) &= d\Phi/dn. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Здесь, как и ранее,  $\tau$  и  $\bar{u}$  — безразмерная автомодельная переменная и средняя скорости ионов (11), нормированные на эффективную температуру электронов  $T_{\text{эф}}$ .

Решение уравнений (91) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \tau + \sqrt{nb(n)/2}; \\ \sqrt{nb(n)} + \int dn \sqrt{b(n)/n} &= -\sqrt{2}\tau + C. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

В случае максвелловского распределения электронов (90) уравнения (91) и решение (92), естественно, совпадают с (29), (30).

Рассмотрим конкретные примеры функций распределения, обогащенных быстрыми электронами. Пусть, например, при высоких скоростях электронов  $v_x \gg (T_{\text{эф}}/m)^{1/2}$  функция распределения

$$f_{e0}(v_x) \sim \exp(-v_x/\sqrt{T_{\text{эф}}/m}). \quad (93)$$

Тогда, согласно (86), при  $-e\varphi/T_{\text{эф}} \gg 1$

$$N_e(\varphi) \sim \exp(-\sqrt{-e\varphi/T_{\text{эф}}})$$

и, следовательно,

$$\Phi(n) = -(\ln n)^2 + O(1).$$

Из (92) получаем

$$n = C \exp\left\{-\left(\frac{3}{2}\tau\right)^{2/3}\right\}; \quad \bar{u} = \tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}\tau\right)^{1/3}. \quad (94)$$

Формулы (94) справедливы, естественно, лишь асимптотически при достаточно больших значениях  $\tau$ . Сравнивая их с (30), видим, что кон-

центрация и средняя скорость быстрых ионов выше, чем в случае максвелловского распределения электронов. Таким образом, обогащение функции распределения электронов быстрыми частицами привело к заметному увеличению числа быстрых ионов, т. е. к усилению ускорения ионов в расширяющейся плазме.

Еще более сильное ускорение ионов в случае степенной функции распределения электронов:  $f_0(v_e) \sim v_e^{-2k-1}$ . В этом случае  $N_e \sim (-e\varphi/T_{эф})^{-k}$  и из (92) следует, что

$$n = \frac{(2k)^{2k}}{\left[ C + \frac{V\sqrt{2}\tau}{1-1/\sqrt{2}k} \right]^{2k}}, \quad \bar{u} = \tau \left[ 1 + \frac{1}{2k^{3/2}(1-1/\sqrt{2}k)} \right] + C,$$

т. е. концентрация быстрых ионов лишь степенным образом убывает с ростом  $\tau$ .

**Ускорение примесных ионов.** Рассмотрим расширение в вакуум плазмы, содержащей смесь двух сортов ионов: с зарядом  $Z_1$ , массой  $M_1$  и невозмущенной концентрацией  $N_1$  и соответственно  $Z_2, M_2, N_2^*$ . Кинетические уравнения, определяющие движение ионов, имеют в этом случае вид [ср. (12)] [7, 28]:

$$\left. \begin{aligned} (u_1 - \tau) \frac{\partial g_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= 0; \\ (u_2 - \tau) \frac{\partial g_2}{\partial \tau} - \frac{Z}{\sqrt{2}} \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= 0; \\ \psi_1 &= \ln [n_1 Z_1 + n_2 Z_2]; \\ n_1 &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\pi}} \int g_1 du_1, \quad n_2 = \sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}} \int g_2 du_2. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Здесь  $u_1 = v_1 (2T_e Z_1 / M_1)^{-1/2}$ ,  $\tau = x/t (2T_e Z_1 / M_1)^{1/2}$ ,  $u_2 = v_2 / (2T_e \times Z_1 / M_1)^{1/2}$ ,  $Z = Z_1 M_1 / \sqrt{2} Z_2 M_2$ . Выражение для безразмерного потенциала  $\psi_1 = e\varphi / T_e Z_1$  следует из условия квазинейтральности. Распределение электронов предполагается максвелловским.

Граничные условия к уравнению (95), соответствующие задаче о вытекании плазмы в вакуум, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} g_1 \rightarrow \exp(-\beta_1 u_{10}^2); \quad g_2 \rightarrow \alpha \exp\left(-\beta_2 u_{20}^2 \frac{M_2}{M_1}\right) &\text{ при } \tau \rightarrow -\infty; \\ g_1 \rightarrow 0, \quad g_2 \rightarrow 0 &\text{ при } \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Здесь  $\beta_1 = T_e / T_{i1}$ ,  $\beta_2 = T_e / T_{i2}$ ;  $\alpha$  — нормировочная постоянная, пропорциональная отношению концентраций ионов  $n_2 / n_1$ .

\* Подобная ситуация возникает, например, при разлете лазерной плазмы, в космических условиях: при вспышках на Солнце, взрывах звезд [29], в ионосфере (где на высотах от 600 до 1500 км плазма представляет собой смесь ионов кислорода, водорода и гелия).

Рассмотрим ускорение примесных ионов, т. е. примем, что газ ионов  $n_2$  представляет собой малую примесь в газе  $n_1$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ). В этом случае влиянием примесных ионов на потенциал электрического поля можно в первом приближении пренебречь. Первое из уравнений (95), описывающее движение основного газа  $n_1$ , оказывается тогда тождественным уравнению (12), рассмотренному в разд. 2.1. Задача, таким образом, сводится к исследованию движения примесных ионов  $n_2$  в заданном поле  $\psi_1(\tau) = \ln Z_1 n_1$ .

Уравнение для  $g_2$  оказывается в этом случае линейным. Его решение находится, как обычно, интегрированием уравнений для характеристик (18).

Ход характеристик в плоскости  $u, \tau$  для  $Z = 8\sqrt{2}$ , полученный в результате численного расчета [7], показан на рис. 15 пунктиром. На том же рисунке сплошными кривыми представлены характеристики первого уравнения (95). Видно, что примесные ионы ускоряются гораздо энергичнее ионов основного газа. Концентрация  $n_2$ , поток  $j_2 = n_2 \bar{u}_2$  и средняя энергия  $\varepsilon_2 = Z_1 T_e \bar{u}_2^2$  показаны для этого случая на рис. 16. Концентрация примесных ионов довольно медленно убывает с ростом  $\tau$ , изменения же потока  $j_2$  вообще малы. Это означает, что большая часть потока примесных ионов захватывается полем и ускоряется до высоких энергий. Например, при  $\varepsilon_2 \sim 500 Z_1 T_e$  поток  $j_2 \sim 0,4 j_{20}$ , где  $j_{20} = j_2|_{\tau=0} \approx 0,50$ .

При больших значениях  $\tau$  направленная скорость ионов велика. Тепловой разброс скоростей при этом мало существен, так что для анализа поведения решения удобно воспользоваться уравнениями гидродинамики (10), которые в нашем случае принимают вид:

$$(u_2 - \tau) \frac{dn_2}{d\tau} + n_2 \frac{du_2}{d\tau} = 0; \quad (u_2 - \tau) \frac{du_2}{d\tau} + \frac{Z}{\sqrt{2}} \frac{d\psi_1}{d\tau} = 0. \quad (97)$$

Следует учесть, кроме того, что в гидродинамическом приближении (32)

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < -1/\sqrt{2}; \\ -\sqrt{2} & \text{при } \tau > -1/\sqrt{2}. \end{cases} \quad (98)$$

Граничные условия к уравнениям (97) задаются при  $\tau = -1/\sqrt{2}$  (при  $\tau < -1/\sqrt{2}$  плазма не возмущена):

$$n_2 \Big|_{\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1, \quad u_2 \Big|_{\tau = -\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0. \quad (99)$$

Интегрируя уравнения (97), (98) с граничным условием (99), имеем:

$$u_2 = \tau + Z - f(\tau), \quad n_2 = f(\tau) / (\sqrt{2} Z - 1) (Z - f(\tau)), \quad (100)$$

где функция  $f(\tau)$  при  $Z > 1/\sqrt{2}$  определена соотношением:

$$f - Z \ln f = \tau - Z \left[ \ln \left( Z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 1 \right]. \quad (101)$$

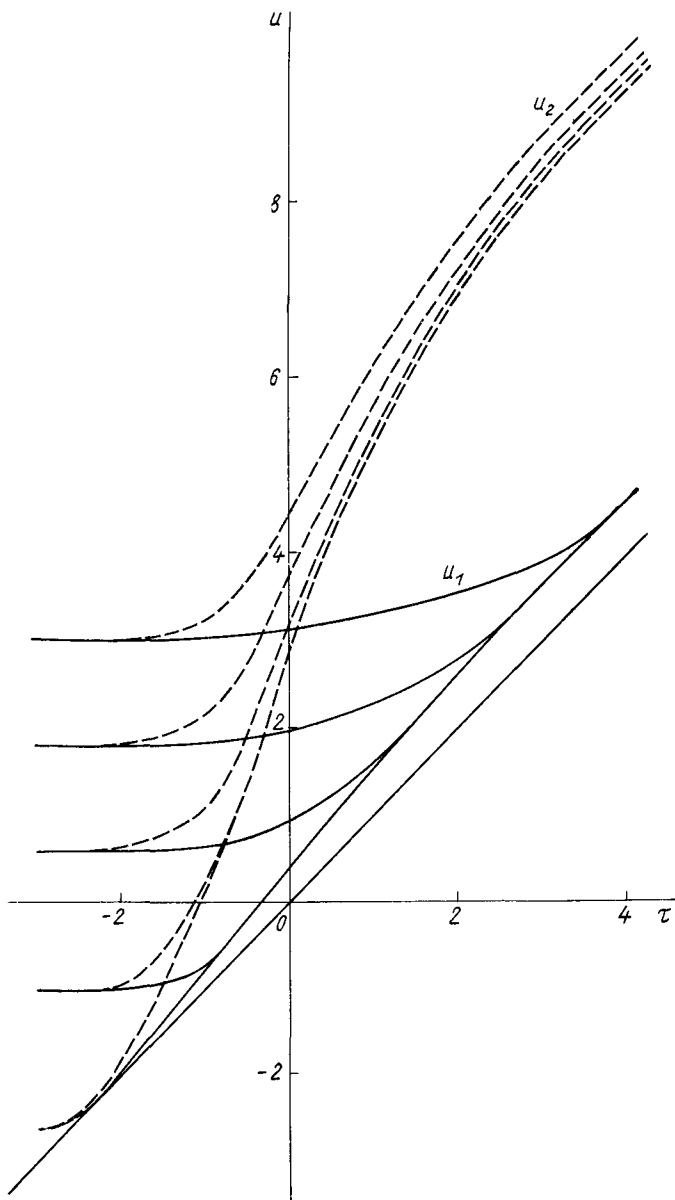


Рис 15 Ход характеристик при расширении в вакуум плазмы, содержащей примесные ионы

При  $Z < 1/\sqrt{2}$  следует в (101) заменить  $\ln\left(Z - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  на  $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - Z\right)$  и  $\ln f$  на  $\ln(-f)$ , так как в этом случае  $f < 0$ .

При больших  $\tau$  параметр  $f(\tau) \rightarrow 0$ . Из (100) и (101) тогда следует

$$n_2 = \frac{e^{-1}}{Z\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\tau}{Z}\right), \quad u_2 = \tau + Z, \quad \varepsilon_2 = T_e \frac{M_2 Z_1}{M_1} (\tau + Z)^2. \quad (102)$$

Нетрудно найти распределение по энергиям ускоренных примесных ионов. Если  $N$  — общее число примесных ионов, прошедших через единицу поверхности в точке  $x_0$ :  $N = N_{20} \int j_2 dt$ , то:

$$\frac{dN}{d\varepsilon} \approx \frac{x_0 N_{20}}{2T_e} \frac{Z_1^2 M_2^2}{Z_2^3 M_1^2} \frac{\exp(-\sqrt{\varepsilon/\rho T_e})}{(\sqrt{\varepsilon/\rho T_e} - 1)^2}, \quad \frac{\varepsilon}{\rho T_e} \gg 1. \quad (103)$$

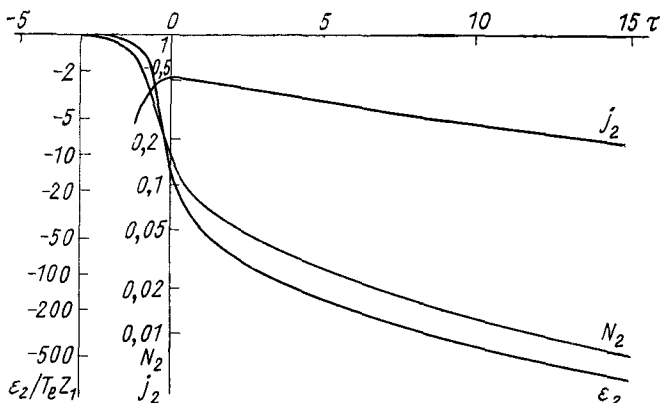


Рис 16 Концентрация  $N_2$ , поток  $j_2$  и средняя энергия  $\varepsilon_2$  примесных ионов

Видно, что распределение по энергиям не зависит от точки  $x_0$ . При  $\varepsilon/\rho T_e \gg 1$  оно подобно для ионов разной массы и заряда. Параметр подобия

$$p = M_1 Z_2^2 / 2M_2 Z_1. \quad (104)$$

Здесь  $M_2, Z_2$  — заряд и масса примесных ионов,  $M_1, Z_1$  — основных. Если  $p \gg 1$ , то примесные ионы ускоряются гораздо энергичнее основных ионов. Важно, что производная  $dN/d\varepsilon$  сравнительно медленно падает с ростом энергии частиц  $\varepsilon$ . Из (102) следует, например, что 0,1% общего числа примесных ионов  $N_{20}x_0$  приобретает энергию  $\varepsilon \gtrsim 50\rho T_e$ .

Отметим, что в случае  $p \gg 1$  концентрация примесных ионов убывает гораздо медленнее концентрации основных ионов. Поэтому при некотором значении  $\tau = \tau_h$  концентрации  $n_2$  и  $n_1$  сравниваются. В области  $\tau \gtrsim \tau_h$  движение плазмы существенно изменяется под воздействием примесных ионов [7].

**Влияние границ на расширение плазмы. Ограничение ускорения ионов.** В разд. 2.1 рассматривалось расширение плазмы в вакуум в безграничном пространстве. Потенциал электрического поля оказался при этом при больших  $\tau \gg 1$  (31):

$$\varphi = \ln \frac{N}{N_0} = -\frac{T_e}{e} (\sqrt{2} \tau + 1).$$

Отсюда видно, что с ростом  $\tau$  потенциал  $\varphi$  по модулю неограниченно возрастает. Вместе с тем большие  $\tau$  соответствуют как раз ускоренным ионам. Существенно выяснить поэтому, как изменится характер движения плазмы, если потенциал будет ограничен.

Представим себе, что область, в которую расширяется плазма, ограничена: при  $x = R_0$  имеется граница (стенка или сетка), обладающая заданным потенциалом  $\varphi_0$ . Примем для определенности, что электроны на границе  $R_0$  поглощаются. В этом случае электроны в плазме и в свободном от плазмы пространстве уже не распределены строго по закону Больцмана: граница  $R_0$  представляет собой сток для электронов. В плазме и в свободном пространстве возникает поэтому поток электронов, стекающий на плоскость  $R_0$ . Ситуация здесь вполне аналогична возникающей в эмиссионных лампах. Роль катода выполняет расширяющаяся плазма, роль анода — поглощающая плоскость  $R_0$ . Распределение потенциала электрического поля в такой системе немонотонно: в некоторой точке  $x_m$  потенциал  $\varphi$  достигает минимальное значение  $\varphi_m$  (см., например, [30]). Этим значением потенциала  $\varphi_m$  определяется ток эмиссии из плазмы

$$j_0 = eN_0 (T_e/2\pi m)^{1/2} \exp \psi_m \quad (105)$$

и концентрация электронов

$$N = N_0 \frac{\exp(\psi)}{2} \{1 \pm \Phi(\sqrt{\psi - \psi_m})\}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Здесь  $\psi = e\varphi/T_e$ ,  $\psi_m = e\varphi_m/T_e$ ; знак  $+$  до точки минимума ( $x \leq x_m$ ), знак  $-$  после точки минимума ( $R_0 \geq x \geq x_m$ );  $N_0$  — концентрация невозмущенной плазмы, т. е. при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $N \rightarrow N_0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ .

Потенциал электрического поля определен уравнением Пуассона. В области  $x > x_m$ :

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = \frac{\exp \psi}{2} \{1 - \Phi(\sqrt{\psi - \psi_m})\}, \quad \xi = \frac{x}{D_0}, \quad D_0 = \left( \frac{T_e}{4\pi e^2 N_0} \right)^{1/2}. \quad (106)$$

Здесь принято, что в области  $x > x_m$  ионов нет. (Это будет доказано ниже.) Интегрируем уравнение (106), учитывая, что при  $\psi = \psi_m$   $d\psi/d\xi = 0$ , а при  $\psi = \psi_0$   $x = R_0$ , имеем:

$$\frac{R_0}{D_0} - \xi_m = \int_{\psi_m}^{\psi_0} d\psi \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(\psi_m) \sqrt{\psi - \psi_m} + \exp(\psi) - \exp(\psi_m) - \exp(\psi) \Phi(\sqrt{\psi - \psi_m}) \right\}. \quad (107)$$

Здесь  $\zeta_m = x_m/D_0$ . Это соотношение связывает значение  $\psi_m$  и  $x_m$ .

Примем, что размер  $R_0$  достаточно велик:

$$R_0 \gg D_0, \quad R_0 \gg x_m. \quad (108)$$

Последнее условие означает, что область, до которой расширилась квазинейтральная плазма, мала по сравнению с размером  $R_0$ . При выполнении условия (108) членом  $\zeta_m$  в соотношении (107) можно пренебречь по сравнению с  $R_0/D_0$ . Из соотношения (107) тогда следует, что потенциал  $\psi_m$  — константа, зависящая от характерных параметров:  $R_0, D_0, \psi_0$ . В частности, если  $(R_0/D_0)^2 \exp(\psi_0) \gg 1$ , то  $(\psi_m - \psi_0) > 1$  и соотношение (107) принимает простой вид:

$$\frac{R_0}{D_0} = 2^{3/2} 3^{-1} \pi^{1/4} \exp(-\psi_m/2) (\psi_0 - \psi_m)^{3/4}. \quad (109)$$

Отсюда следует, что

$$\psi_m \simeq -2 \ln \frac{R_0}{D_0} + \frac{3}{2} \ln \left( \psi_0 + 2 \ln \frac{R_0}{D_0} \right) + \ln \frac{8 \sqrt{\pi}}{9}. \quad (110)$$

Если, напротив,  $(R_0/D_0)^2 \exp(\psi_0) \ll 1$  (это имеет место при больших отрицательных значениях  $\psi_0$ ), то  $\psi_0 - \psi_m \ll 1$  и из (107) получаем

$$\psi_m = \psi_0 - \frac{1}{4} \left( \frac{R_0}{D_0} \right)^2 \exp(\psi_0). \quad (111)$$

Рассмотрим теперь область  $x < x_m$ . Здесь имеются как электроны, так и ионы, так что уравнение Пуассона при  $x < x_m$  записывается в виде:

$$D_0^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{2} \exp(\psi) \{ 1 + \Phi(\sqrt{\psi - \psi_m}) \} - n(x, t). \quad (112)$$

Здесь  $n = N/N_0$  — безразмерная концентрация ионов. Примем, что членом  $D_0^2 d^2 \psi / dx^2$  можно пренебречь, т. е. заменим уравнение (112) уравнением квазинейтральности:

$$n(x, t) = \frac{\exp(\psi)}{2} \{ 1 + \Phi(\sqrt{\psi - \psi_m}) \}. \quad (113)$$

Условия, при которых возможен переход от уравнения (112) к уравнению (113), будут определены в дальнейшем.

Для описания движения ионов воспользуемся уравнениями гидродинамики. В безразмерных переменных  $u, \tau$  они имеют вид (10):

$$(u - \tau) \frac{dn}{d\tau} + n \frac{du}{d\tau} = 0, \quad (u - \tau) \frac{du}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{d\tau} = 0. \quad (114)$$

Здесь потенциал  $\psi$  определен соотношением (113). Учтено, что  $\psi_m$  — константа, не зависящая от  $x$  и  $t$ . Это справедливо при условии (108).

Из (114) следует, что

$$\left. \begin{aligned} u - \tau &= (2A)^{-1/2}; \\ A &= 1 + \pi^{-1/2} (\psi - \psi_m)^{-1/2} \exp(\psi - \psi_m) \{ 1 + \Phi(\sqrt{\psi - \psi_m}) \}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Подставляя выражение (115) в уравнения (114) и переходя с помощью (113) вместо  $n$  к  $\psi$ , получим:

$$\left(\frac{A}{2}\right)^{1/2} (1+B) \frac{d\psi}{d\tau} = -1; \quad B = \frac{A-1}{4A^2(\psi-\psi_m)} [1+2(\psi-\psi_m)A]. \quad (116)$$

Результат интегрирования уравнения (116) представлен на рис. 17. Видно, что при  $\psi - \psi_m > 1$ , т. е. при  $\tau_m - \tau > 1$  рассматриваемое здесь решение совпадает с автомодельным решением в безграничном пространстве (пунктирная линия). При  $\psi \sim \psi_m$ , т. е.  $\tau \simeq \tau_m$  они существенно различаются. Наиболее важно то, что начальные условия для растекания в вакуум полупространства, заполненного плазмой ( $n \equiv 0$  при  $x < 0$ ) могут быть удовлетворены только, если при  $\tau = \tau_m$  концентрация ионов  $n$  падает скачком: от  $n = \frac{1}{2} \exp(\psi_m)$  до  $n = 0$ . При  $\tau > \tau_m$  ионов нет.

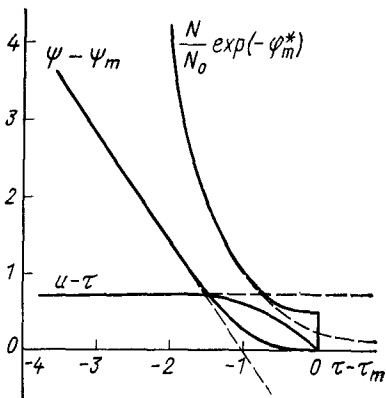


Рис 17 Концентрация и средняя скорость ионов при расширении ограниченной плазмы

Это вполне естественно: при  $\tau = \tau_m$  потенциал  $\varphi$  достигает минимального значения  $\varphi_m$ , так что при  $\tau > \tau_m$  ионы уже не ускоряются, а затормаживаются электрическим полем. Следовательно, скорость ионов не может превысить значение  $u = \tau_m$ . Заметим, что при  $\tau = \tau_m$  сила  $F \sim d\varphi/d\tau \equiv 0$ , т. е.

ионы, имеющие скорость  $u = \tau_m$ , движутся свободно — поле на них не влияет. Поэтому в точке  $\tau = \tau_m$ , как и при обычном свободно-молекулярном движении газа, возможен разрыв в распределении концентрации частиц [см. (19)].

Установим теперь условия применимости полученного решения. Выше пренебрегалось членом  $D_0^2 d^2 \psi / dx^2$  в уравнении (112). Это справедливо, если  $D_0^2 d^2 \psi / dx^2 \ll n$ , т. е. если  $D_0^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} \exp(-\psi) \ll 1$ . Подставим сюда выражение для потенциала  $\psi(\tau)$ , учитывая, что

$$\left(\frac{d^2 \psi}{dx^2}\right)_{\max} = \frac{M}{2T_e t^2} \left(\frac{d^2 \psi}{d\tau^2}\right)_{\max} \approx \frac{\tau_m^2}{x_m^2},$$

где  $x_m = (2T_e/M)^{1/2} t \tau_m$  — координата минимума потенциала. Имеем:

$$D_0^2 \frac{\tau_m^2}{x_m^2} \exp(-\psi_m) \ll 1.$$



Подставляя сюда потенциал  $\psi_m$  согласно (107), (110) и учитывая (108), находим условия применимости автомодельного решения в виде

$$1 \gg \left( \frac{x_m}{R_0} \right)^2 \gg \frac{9\psi_m^2}{16 \sqrt{\pi} (\psi_0 - \psi_m)^{3/2}}, \quad (117)$$

где потенциал  $\psi_m$  определен формулой (110). Это условие выполняется, если  $\psi_0 > (-\psi_m)^{4/3}$ , т. е. при достаточно больших положительных значениях потенциала  $\psi_0$ :

$$\psi_0 > \left( 2 \ln \frac{R_0}{D_0} \right)^{4/3}. \quad (118)$$

Кроме того, условие (117) ограничивает время соотношением

$$x_m^2 = \frac{2T_e}{M} \tau_m^2 t^2 \ll R_0^2. \quad (119)$$

При нарушении условия (119) ионы начинают затормаживаться электрическим полем стенки.

Таким образом, расширение в вакуум плазмы при наличии поглощающей границы  $R_0$ , обладающей потенциалом  $\psi_0$  [удовлетворяющим условию (118)], сопровождается возникновением разрыва в распределении концентрации ионов при  $\tau = \tau_m^*$ .

При  $\tau > \tau_m$  ионов нет. Иначе говоря, ионы ускоряются полем только до предельного значения скорости  $u = \tau_m$ , где

$$\tau_m = -\frac{\psi_m}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + C. \quad (120)$$

Здесь константа  $C \approx 1$ , а потенциал  $\psi_m$  определен формулой (110), следовательно,

$$\tau_m = \sqrt{2} \ln \frac{R_0}{D_0} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left[ \psi_0 + 2 \ln \frac{R_0}{D_0} \right]. \quad (121)$$

Значение  $\tau_m$  ограничивает ускорение ионов.

Полученное здесь решение находится в качественном согласии с результатами численного расчета [31].

Отметим, что условие

$$\tau_m \approx \sqrt{2} \ln (R_0/D_0) \quad (122)$$

носит общий характер. Например, оно ограничивает и ускорение ионов при расширении в свободном пространстве конечного сгустка плазмы.

---

\* Заметим, что разрыв полностью сохраняет смысл и при учете теплового разброса ионов по скоростям. Причина этого в том, что, как показано в разд. 2.1, функция распределения ионов по скоростям при больших значениях  $\tau$  сильно сжимается: тепловой разброс ионов  $\Delta u \sim \exp(-\sqrt{2}\tau)$ . Нетрудно убедиться в том, что такой экспоненциально-малый разброс по скоростям не может привести к достаточно эффективному размыванию фронта разрыва за время прохождения волной расстояния до границы  $R_0$ .

Действительно, на больших расстояниях от сгустка электрическое поле описывается уравнением:

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 \frac{d\psi}{d\zeta} \right) = \exp(\psi), \quad \zeta = r/D_0. \quad (123)$$

Решение этого уравнения при  $\zeta \rightarrow \infty$  имеет вид:

$$\psi = -2 \ln \zeta - 3 + C \zeta^{-(1+\sqrt{5})/2}. \quad (124)$$

Здесь  $C$  — постоянная, которая определяется при сшивании с решением в области сгустка плазмы  $r \lesssim R_0$ . Отсюда ясно, что величина потенциала  $\psi$  в области, занятой плазмой, ограничена условием:  $\psi \gtrsim -2 \ln(R_0/D_0)$ . Следовательно,  $\tau_m \approx \sqrt{2} \ln(R_0/D_0)$ .

Выше мы рассматривали основные ионы плазмы. Та же величина  $\tau_m$  (121) ограничивает и ускорение примесных ионов. Максимальная энергия примесных ионов  $M_2$ ,  $Z_2$  равна

$$\epsilon_m \approx T_e \frac{M_2}{M_1} Z_1 \left[ \tau_m + \frac{Z_2 M_1}{\sqrt{2} Z_1 M_2} \right]^2. \quad (125)$$

Здесь  $M_1$ ,  $Z_1$  — масса и заряд основных ионов плазмы. Видно, что предельная энергия зависит, главным образом, от массы, а не от заряда примесных ионов.

Важно, что предельная энергия ускорения ионов существенно зависит от вида функции распределения электронов. Она сильно возрастает для немаксвелловских функций распределения, обогащенных быстрыми электронами. Так, для функции распределения (93) предельное значение

$$\tau_m \approx \frac{2^{5/2}}{3} [\ln(R_0/D_0)]^{3/2}. \quad (126)$$

В случае же степенной функции распределения электронов  $f \sim v^{-2k-1}$  значение  $\tau_m$  особенно велико:  $\tau_m \sim (R_0/D_0)^{1/k}$ . В этом случае ионы могут ускоряться, практически, до электронных скоростей.

### § 3. Возникновение и развитие осцилляторного состояния плазмы

#### 3.1. Малые возмущения квазинейтрального движения

**Общие условия устойчивости.** Рассмотрим вначале как развиваются в плазме без магнитного поля малые возмущения квазинейтрального движения. Соответственно представим функцию распределения ионов  $g$  в окрестности произвольной точки  $\xi_0$ ,  $t_0$  в виде

$$g(u, \xi, t) = g_0(u, \xi_0, t_0) + g_1(u, \xi, t) \quad (127)$$

и, считая  $|g_1| \ll g_0$ , линеаризуем кинетическое уравнение (38) относительно  $g_1$ :

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + u \frac{\partial g_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = 0. \quad (128)$$

Здесь  $\psi_1$  — возмущение потенциала поля в окрестности точки  $\xi_0, t_0$ . Воспользуемся для  $\psi_1$  уже не уравнением квазинейтральности (2), а полным уравнением Пуассона. Линеаризуя его, имеем

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} = \psi_1 - n_1, \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi/\beta} n_0} \int g_1 du, \quad n_0 = n(\xi_0). \quad (129)$$

Параметр  $a^2 = M/8\pi e^2 n_0 N_0$ , заметим, что  $1/2a^2$  — квадрат ионной плазменной частоты в точке  $\xi_0, t_0$  (напоминаем, что  $\xi = x(M/2T_e)^{1/2}$ ).

Решение уравнений (128), (129) естественно искать в виде плоских волн. Из (128), (129) следует тогда обычное дисперсионное уравнение для ионно-звуковых колебаний:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, k) = 1 + (kD)^2 - \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta} n_0} \left[ \mathcal{P} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{s-u} + \right. \\ \left. + i\pi \frac{k}{|k|} \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)_{u=s} \right] = 0, \end{aligned} \quad (130)$$

$$s = \omega/k \sqrt{2T_e/M}, \quad D = (T_e/4\pi e^2 N_0 n_0)^{1/2},$$

определяющее зависимость частоты  $\omega$  и показателя затухания волн  $\gamma$  от волнового вектора  $k$ . В частности, если резонансная область  $u \sim s$  слабо влияет на действительную часть интеграла в (130) и  $\gamma \ll \omega$ , то

$$\left. \begin{aligned} \omega &= |k| s_i (2T_e/M)^{1/2} [1 + (kD)^2]^{-1/2}, \\ \gamma &= -\frac{\sqrt{\pi/\beta}}{4n_0} \omega \frac{k}{|k|} \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)_{u=s} [1 + (kD)^2]. \end{aligned} \right\} (131)$$

При  $k \rightarrow 0$  фазовая скорость волн стремится к ионно-звуковой скорости  $s_i$ , которая определена соотношением:

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi/\beta} n_0} \int \frac{\partial g_0}{\partial u} \frac{du}{s_i - u}. \quad (132)$$

Отметим, что дисперсия скорости ионно-звуковых волн всегда отрицательна — их фазовая скорость убывает с ростом  $k$ ; это видно, например, из (131).

Знак  $\gamma$  противоположен знаку  $(\partial g/\partial u)_{u=s}$ . Но отрицательный знак  $\gamma$  означает, что колебания нарастают. Следовательно, знак функции  $(\partial g/\partial u)_{u=s}$  имеет определяющее значение для устойчивости колебаний.

**Устойчивость квазинейтральных движений.** При автомодельных движениях плазмы или в случае простых волн соотношение (132)

удовлетворяется при любых значениях  $\tau = \tau_0$  для  $s_i = \tau_0$ . Это следует непосредственно из сопоставления (132) с тождеством (13). Иными словами, в плазме, описываемой автомоделной функцией распределения  $g_a(u, \tau_0)$ , имеется незатухающая ветвь ионно-звуковых колебаний, распространяющихся со скоростью, равной  $\tau_0$  [20]. Подчеркнем, что это, вообще говоря, именно новая ветвь колебаний. Она существует даже в тех случаях, когда функция распределения почти везде близка к максвелловской (что всегда имеет место при  $\tau_0 \ll -1$  или  $\tau_0 \gg +1$ , см. рис. 8). В этих случаях обычная ветвь ионно-звуковых колебаний, как известно, при  $T_i \sim T_e$  имеет сильное затухание.

Этот результат имеет простой физический смысл. Действительно, если мы подвергнем произвольному малому изменению граничные функции  $g_1$  и  $g_2$  в (17), то получим решение, в котором функция распределения и плотность частиц отличается от первоначальных на произвольную малую величину  $g_1(x/t, u)$  или  $n_1(x/t)$ . Любая такая функция должна являться поэтому решением системы (128)—(130) при  $a \rightarrow 0$ , т. е. при  $k \rightarrow 0$ . В то же время функция  $g_1(x/t, u)$  или  $n_1(x/t)$  удовлетворяет уравнению

$$t \frac{\partial n_1}{\partial t} = x \frac{\partial n_1}{\partial x}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} = \tau \frac{\partial n_1}{\partial \xi}. \quad (133)$$

Так что ее можно рассматривать как волну, распространяющуюся со скоростью  $\tau$ .

Заметим также, что в соотношении (13) правило обхода особенности при  $u = \tau_0$  несущественно в силу того, что всегда при  $u = \tau_0^*$ :

$$(\partial g_a / \partial u)_{u=\tau_0} = 0. \quad (134)$$

Это и означает, что длинноволновые возмущения функции  $g_a(u, \tau_0)$  не затухают:  $\gamma \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ .

Рассмотрим теперь те же возмущения при малых, но конечных значениях  $k$ . Фазовая скорость волн  $s$  в этом случае близка к  $\tau_0$ . Введя  $s^* = s - \tau_0$  и разлагая выражение под интегралом в (130) по степеням  $s^*$ , получаем

$$\varepsilon(\omega, k) = (kD)^2 - \left( \mu + i\chi \frac{k}{|k|} \right) s^*. \quad (135)$$

Здесь и по-прежнему определено формулой (55), а

$$\chi = \frac{\sqrt{\pi}}{2n_0} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \right)_{u=\tau_0}. \quad (136)$$

---

\* Действительно, уравнение характеристик при  $u \rightarrow \tau_0$  определяется формулой  $(u - \tau_0)^2 = F(\tau_0) (\tau - \tau_0)$ . Функция  $g$  на характеристиках постоянна. Следовательно,  $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial \tau_0} \frac{d\tau_0}{du} = \frac{\partial g}{\partial \tau_0} f(\tau_0) (u - \tau_0)$ , т. е.  $\partial g / \partial u \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \tau_0$ .

Приравнивая  $\varepsilon$  нулю, находим

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \left[ \tau_0 + \frac{\mu}{\mu^2 + \chi^2} (kD)^2 \right] k \sqrt{2T_e/M}; \\ \gamma &= \chi |k| \sqrt{2T_e/M} (kD)^2 / (\mu^2 + \chi^2). \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Отсюда видно, что знак  $\gamma$  совпадает со знаком  $(\partial^2 g / \partial u^2)_{u=\tau_0}$ . Но отрицательный знак  $\gamma$  означает нарастание колебаний. Поэтому автономные решения устойчивы, если функция распределения  $g_a(u, \tau_0)$  имеет при  $u = \tau_0$  минимум, и неустойчивы, если  $g_a(u, \tau_0)$  имеет максимум. В частности, в случае втекания плазмы в плазму, рассмотренном в разд. 2.2, решение устойчиво при  $\tau_0 > 0,28$  и неустойчиво при  $\tau_0 < 0,28$  (см. рис. 8).

Для функций распределения гидродинамического типа (46), (47) функция  $g_0(u) \equiv 0$  в окрестности скорости  $u = s_j$ . Длинноволновые возмущения таких функций не нарастают и не затухают: согласно (130)  $\gamma \equiv 0$  при  $k < k_0$ . В этом случае колебания могут возникнуть лишь в тех областях, где резко возрастает градиент функции  $dg/dx$  (или  $dn/dx$ ), т. е. в окрестности точек гидродинамического опрокидывания.

При кинетическом опрокидывании у функции  $g(u)$  появляются новые максимумы, а следовательно, возникают области с различными знаками  $dg/du$ . Поэтому вблизи точек кинетического опрокидывания колебания неустойчивы и здесь всегда развивается осцилляторное состояние плазмы.

### 3.2. Гидродинамическое опрокидывание.

#### Ударная волна в бездиссипативной гидродинамике

**Уравнение Кортевега—де Вриза.** Исследуем вначале возбуждение колебаний вблизи точки гидродинамического опрокидывания  $x_0, t_0$ . Производная плотности  $dn/dx$  или потенциала  $\partial\psi/\partial x$  в этой области резко возрастает; в квазинейтральном приближении  $|\partial\psi/\partial x|_{x \rightarrow x_0} \rightarrow \infty$ . Поэтому квазинейтральное приближение становится здесь неприменимым: нельзя пренебречь вторыми производными в уравнении Пуассона

$$D^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \exp(\psi) - n. \quad (138)$$

Это обстоятельство нетрудно учесть при выводе уравнения для возмущений плотности или потенциала электрического поля. Действительно, как и в разд. 2.2, разлагая в ряд  $\exp(\psi)$ , переписываем соотношение (48) с учетом  $\partial^2\psi/\partial x^2$  в виде  $n_1 = n - 1 = \psi + \psi^2/2 - D^2\partial^2\psi/\partial x^2$  или после преобразования Фурье:

$$n_{\omega k} = \psi_{\omega k} [1 - (kD)^2] + (1/2) (\psi^2)_{\omega k}.$$

Таким образом, в пространстве Фурье все изменение уравнений свелось к добавлению члена  $-(kD)^2 \psi_{\omega k}$ . Вместо (54) теперь имеем:

$$-(kD)^2 \psi_{\omega k} - \mu \frac{\omega^*}{k} \psi_{\omega k} + \frac{\nu-1}{2} (\psi^2)_{\omega k} = 0.$$

Соответственно в координатном пространстве вместо (56) имеем

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\nu-1) \psi \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} + D^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^{*3}} = 0. \quad (139)$$

При  $D \rightarrow 0$  уравнение (139) совпадает с (56). Если начальные условия достаточно гладкие  $|D^2 \partial^2 \psi / \partial \xi^{*2}|_0 \ll \psi_0$ , то последний член в уравнении (139) несуществен и его решение совпадает с (57). Однако вблизи точки гидродинамического опрокидывания этот член начинает играть определяющую роль. С ним связано появление в уравнении (139) параметра размерности длины. Это создает возможность для развития в области за особой точкой осциллирующих распределений  $\psi$ .

Заменой  $\psi = \frac{\mu}{\nu-1} \left(\frac{D^2}{\mu}\right)^{1/3} \eta$ ,  $x = \left(\frac{D^2}{\mu}\right)^{-1/3} \xi^*$  уравнение (139) сводится к уравнению Кортевега—де Вриза [33—35]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (140)$$

В работах [36—40] подробно исследованы решения уравнения (140), соответствующие задачам, в которых возмущение в начальный момент времени достаточно быстро убывает с увеличением  $x$ :  $\eta \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . В частности, в [40] определены число и амплитуды солитонов, на которые в пределе  $t \rightarrow \infty$  распадается ограниченное начальное возмущение. Нас, однако, будут интересовать здесь задачи другого рода. Мы хотим выяснить поведение решения за точкой гидродинамического опрокидывания  $t_0, x_0$ . В обычной гидродинамике за этой точкой образовалась бы ударная волна. Чтобы выяснить, что в бесстолкновительной гидродинамике соответствует ударной волне, нужно решить с помощью уравнения (140) такие задачи, в которых заведомо появляется в обычной гидродинамике ударная волна. Прежде чем решать сложную задачу об опрокидывании фронта, мы в этом разделе рассмотрим сначала более простую задачу о распаде начального разрыва. Мы увидим, что обе задачи можно решить одним и тем же методом. Поскольку в бесстолкновительной гидродинамике ударной волне соответствует область колебаний, прежде всего нам необходимо изучить свойства этих колебаний.

**Стационарные и квазистационарные волны.** Рассмотрим вначале стационарные волны — стационарные осциллирующие решения уравнения (140). Положим  $\eta = \eta(x - Vt)$ . Из (140) тогда получаем

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = V\eta - \frac{1}{2} \eta^2, \quad \xi = x - Vt. \quad (141)$$

Здесь удобна следующая механическая аналогия. Если принять  $\eta$  за координату частицы, а  $\zeta$  — за время, то уравнение (141) описывает движение частицы в поле с потенциалом  $U(\eta)$ :

$$U(\eta) = -V \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{6} \eta^3.$$

Потенциал  $U(\eta)$  для  $V > 0$  представлен на рис. 18 [напомним, что  $V > 0$  соответствует сверхзвуковой,  $V < 0$  — дозвуковой скорости (54)]. Видно, что образуется потенциальная яма, в которой может колебаться частица. Эти колебания и соответствуют стационарным осциллирующим распределениям  $\eta(\zeta)$ . Они описываются с помощью эллиптических функций Якоби  $\text{dn}_s(y)$ :

$$\eta = \frac{2a}{s^2} \text{dn}_s^2 \left[ \left( \frac{a}{6s^2} \right)^{1/2} (x - Vt) \right] + \gamma. \quad (142)$$

Здесь  $s$  — модуль функции Якоби  $0 \leq s \leq 1$ . Он определяет уровень колебаний частицы в яме  $U(\eta)$ . При  $s \rightarrow 0$  колебания происходят вблизи дна ямы и носят синусоидальный характер. С ростом  $s$  синусоида деформируется, а при  $s \rightarrow 1$  приобретает вид отдельных импульсов — солитонов:

$$\eta \simeq 2a \text{ch}^{-2} \left[ \left( \frac{a}{6} \right)^{1/2} (x - Vt) \right]. \quad (143)$$

Отметим, что решение (142) определяется тремя свободными параметрами, например  $s$ ,  $a$  и  $\gamma$ . Тогда скорость

$$V = 2a(2 - s^2)/3s^2 + \gamma. \quad (144)$$

По свойствам эллиптических функций волновой вектор  $k$  (определенный как  $2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны) равен

$$k = \frac{\pi}{K(s)} \left( \frac{a}{6s^2} \right)^{1/2}. \quad (145)$$

Среднее значение функции  $\eta$  по периоду колебаний, как легко проверить, есть

$$\bar{\eta} = \gamma + \frac{2aE(s)}{s^2 K(s)}, \quad (146)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Рассмотрим теперь слегка нестационарные волны. Они описываются по-прежнему формулой (142). Параметры  $a$ ,  $s$  и  $\gamma$  (а следовательно, и  $V$ ,  $k$  и  $\bar{\eta}$ ), однако, являются теперь медленно меняющимися функция-

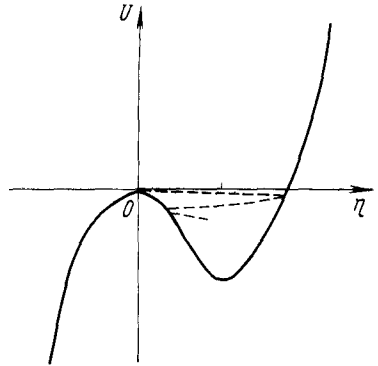


Рис 18 Эффективный потенциал  $U(\eta)$

ми  $x$  и  $t$ . Подставляя (142) в (140) и усредняя по периоду колебаний, получаем уравнения для усредненных величин. Такие уравнения были выведены Уиземом в его классической работе [41]. Их удобно записать, введя три новых функции, связанные с  $a$ ,  $s$  и  $\gamma$  согласно:

$$a = (r_2 - r_1)/2; \quad s^2 = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1); \quad \gamma = (r_2 + r_1 - r_3)/2. \quad (147)$$

При этом

$$V = \frac{1}{6} (r_1 + r_2 + r_3). \quad (148)$$

Уравнения для  $r_\alpha$  имеют вид:

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial x} = 0. \quad (149)$$

(В этой формуле и везде ниже отсутствует суммирование по  $\alpha$ !).

Три «групповые скорости»  $v_\alpha$  равны:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{6} - \frac{2}{3} a \frac{K(s)}{K(s) - E(s)}, \\ v_2 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{6} - \frac{2}{3} a \frac{(1-s^2) K(s)}{E(s) - (1-s^2) K(s)}, \\ v_3 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{6} + \frac{2}{3} a \frac{(1-s^2) K(s)}{s^2 E(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Уравнение Кортвега—де Вриза (140) инвариантно относительно преобразований

$$\eta \rightarrow C\eta, \quad x \rightarrow x/C^{1/2}, \quad t \rightarrow t/C^{3/2} \quad (151)$$

( $C$  — произвольная постоянная) и

$$x \rightarrow x + Ct, \quad \eta \rightarrow \eta + C. \quad (152)$$

Усредненные же уравнения (149) инвариантны еще относительно преобразования

$$x \rightarrow Cx, \quad t \rightarrow Ct. \quad (153)$$

Выпишем для справок приближенные формулы для функций  $K(s)$  и  $E(s)$  при  $s \rightarrow 0$  и  $s \rightarrow 1$ . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} K(s) &\simeq \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{s^2}{4} + \frac{9}{64} s^4 + \dots \right) \\ E(s) &\simeq \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{s^2}{4} - \frac{3}{64} s^4 - \dots \right) \\ &\quad \text{при } s \ll 1, \\ K(s) &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-s^2}, \\ E(s) &\simeq 1 + \frac{1-s^2}{4} \left( \ln \frac{16}{1-s^2} - 1 \right) \\ &\quad \text{при } s \rightarrow 1. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$



Если вернуться к рассмотренной выше механической аналогии, то квазистационарная волна соответствует осцилляциям частицы в медленно изменяющейся во времени потенциальной яме  $U(\eta)$  (см. рис. 18). При этом, естественно, медленно изменяются амплитуда колебаний и другие параметры. Отметим, что частица, находящаяся в потенциальном поле  $U(\eta)$ , имеет две точки покоя: точку максимума и точку минимума  $U(\eta)$ . Этим точкам соответствуют гладкие, неосциллирующие распределения  $\eta(x)$ . Ясно, что при адиабатическом изменении  $U$  осцилляции, которые начинаются из точек покоя, могут быть двух видов. Они могут начинаться из точки максимума и в этом случае колебания



Рис 19 Распад малого начального разрыва

сразу имеют большую амплитуду и форму солитонов (см. рис. 18). Вблизи же точки минимума амплитуда стремится к нулю, а форма колебаний синусоидальная.

Такая же ситуация и с осцилляциями  $\eta(x)$ . Действительно, параметр  $r_2$ , как отмечалось выше, может меняться от  $r_1$  до  $r_3$ . Поэтому область квазистационарных осцилляций ограничена с одной стороны точкой  $x^-(t)$ , в которой  $r_2 = r_1$ . В этой точке обращается в нуль амплитуда  $a$  и параметр  $s$ . С другой стороны область осцилляций ограничена точкой  $x^+(t)$ , в которой  $r_2 = r_3$ , так что  $s = 1$  и согласно (145) обращается в нуль волновой вектор  $k$ . Мы будем называть точку с  $a = 0$ ,  $s = 0$  задним, а с  $s = 1$  — передним фронтом волны. Это соответствует обычной картине, когда солитоны большей амплитуды движутся с большей скоростью.

**Распад начального разрыва.** При распаде малого начального разрыва в гидродинамике образуются две волны — волна сжатия и волна разрежения, движущиеся в противоположных направлениях со скоростями, близкими к скорости звука [см. рис. 9 (пунктир) и рис. 19]. Структура каждой из этих волн описывается уравнением Кортевега—де Вриза (140). Величина  $\eta(x)$  в начальный момент  $t = 0$  имеет конечный скачок:  $\eta^- = \eta^-$  при  $x < 0$  и  $\eta^+ = \eta^+$  при  $x > 0$ . Для волны сжатия  $\eta^- > \eta^+$ , для волны разрежения, напротив,  $\eta^- < \eta^+$ .

Рассмотрим вначале волну сжатия. В обычной вязкой гидродинамике такая волна описывается уравнением Бюргера. Она представляет собой слабую ударную волну со стационарным фронтом [43]. Таким образом, рассматриваемая здесь волна сжатия в дисперсионной гидродинамике соответствует слабой ударной волне в обычной вязкой гидродинамике.

Заметим, что с помощью преобразований (151), (152) начальные условия для волны сжатия всегда можно привести к виду: при  $t = 0$ :

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (155)$$

При небольших значениях  $t$  нелинейный член в уравнении (140) несуществен и им можно пренебречь. Решение линеаризованного уравнения Кортевега—де Вриза имеет вид:

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0(x_1) G(x - x_1, t) dx_1,$$

$$G(\xi, t) = \frac{1}{\pi^{1/2} (3t)^{1/3}} E\left(\frac{\xi}{(3t)^{1/3}}\right),$$

где  $E(z)$  — функция Эйри:

$$E(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} + kz\right) dk.$$

Подставляя сюда начальное распределение  $\eta_0(x_1)$  в виде (155), находим [44]

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(3t)^{1/3}}^{\infty} E(z) dz. \quad (156)$$

Функция  $\eta(x, t)$  слегка осциллирует вблизи разрыва, период осцилляций нарастает со временем  $\sim t^{1/3}$ . При этом роль дисперсионных эффектов ослабляется и все более существенной становится роль нелинейности. Сопоставляя дисперсионный и нелинейный члены в уравнении (140), находим условие применимости линейного решения (156) в виде:  $t \ll 1$ . Отсюда ясно, что при больших  $t \gg 1$  определяющее влияние на структуру волны всегда оказывает нелинейность.

При  $t \gg 1$  будем искать асимптотическое решение уравнения (140) в виде квазистационарной волны (142), (149). Тогда для усредненных уравнений (149) начальное условие (155) нужно наложить на  $\eta$ , а амплитуду  $a$  следует считать нулем при  $t = 0$ . Важно, что в силу инвариантности (153) решение уравнений (149) при начальных условиях (155) должно носить автомодельный характер, т. е. зависеть только от отношения

$$\tau = x/t \quad (157)$$

Таким образом, можно считать, что

$$r_\alpha = r_\alpha(\tau). \quad (158)$$

Граничные условия в переменных  $\tau$ , согласно описанной выше общей картине, должны иметь следующий вид. На «переднем фронте» области колебаний при некотором  $\tau = \tau^+$  должно быть  $s(\tau^+) = 1$ , т. е.

$$r_3(\tau^+) = r_2(\tau^+) \equiv r_3^+. \quad (159)$$

В силу же непрерывности величины  $\bar{\eta}(\tau)$  должно быть

$$\bar{\eta}(\tau^+) = 0. \quad (160)$$

Далее, при  $\tau > \tau^+$  просто  $r_\alpha = 0$ . На заднем фронте при некотором  $\tau = \tau^-$  должно быть  $a = 0$ , так что

$$r_2(\tau^-) = r_1(\tau^-) \equiv r_1^-, \quad (161)$$

$$\eta(\tau^-) = 1. \quad (162)$$

При  $\tau < \tau^-$   $a = 0$ ,  $\bar{\eta} = 1$ .

Подставляя (158) в (149), получаем

$$\frac{dr_\alpha}{d\tau}(v_\alpha - \tau) = 0. \quad (163)$$

Легко сообразить, что осмысленное решение получится, лишь если приравнять нулю одну из круглых скобок в (163), а в двух других уравнениях считать  $r_\alpha = \text{const}$ . Очевидно, что граничные условия (159) и (161) можно выполнить, только если  $r_2$  зависит от  $\tau$ . Поэтому интересующее нас решение имеет вид:

$$v_2 = \tau,$$

$$r_3 = \text{const}, r_1 = \text{const}. \quad (164)$$

Заметим прежде всего, что при  $a \rightarrow 0$ , учитывая, что  $2a/s^2 = r_3 - r_1$ , из (146) имеем

$$\bar{\eta} = r_3/2. \quad (165)$$

Тогда согласно (162)  $r_3 = 2$ . На переднем же фронте при  $s \rightarrow 1$  имеем

$$\bar{\eta} = r_1/2, \quad (166)$$

так что  $r_1 = 0$ ,  $s^2 = r_2/2$ . В результате

$$a = s^2, \quad V = (1 + s^2)/3, \quad \gamma = -(1 - s^2), \quad (167)$$

а формула (164) переписывается в виде:

$$\frac{x}{t} = \frac{1+s^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{s^2(1-s^2)K(s)}{E(s) - (1-s^2)K(s)}. \quad (168)$$

Формулы (167)—(168) вместе с (142) полностью решают поставленную задачу. Подчеркнем, что сама величина  $\eta(x, t)$  определяется формулой (142) и зависит, разумеется, не только от отношения  $x/t$ . От  $x/t$  зависят только медленные величины  $\bar{\eta}$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $V$ ,  $\gamma$ .

Исследуем специально поведение решения вблизи переднего и заднего фронтов.

На заднем фронте при  $a \rightarrow 0$ , используя формулы (154), легко находим  $\tau = -1 + \frac{3}{2} s^2$ , или

$$\tau^- = 1, \quad a = s^2 \approx \frac{2}{3} (\tau - \tau^-), \quad (169)$$

так что амплитуда обращается в нуль при  $\tau \rightarrow \tau^-$  — по линейному закону.

На переднем фронте при  $s \rightarrow 1$  вместо (168) получаем  $\tau \simeq \frac{2}{3} - \frac{1-s^2}{3} \ln \frac{16}{1-s^2}$ . Отсюда находим  $\tau^+ = \frac{2}{3}$ . Закон обращения  $1 - s^2$  в нуль имеет вид:

$$(1 - s^2) \ln \frac{16}{1-s^2} = 3 |\tau'|, \quad (170)$$

где  $\tau' = \tau - \tau^+$ ,  $\tau' < 0$ , или с логарифмической точностью  $1 - s^2 \simeq 3|\tau'| / \ln (|\tau'|^{-1})$ . Из (145) видно, что при  $|\tau'| \rightarrow 0$  волновой вектор  $k$  обращается в нуль по закону

$$k \simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{\ln (|\tau'|^{-1})}}. \quad (171)$$

Наконец, среднее значение  $\bar{\eta}$  ведет себя при  $|\tau'| \rightarrow 0$  как

$$\bar{\eta} = 4 / \ln (|\tau'|^{-1}).$$

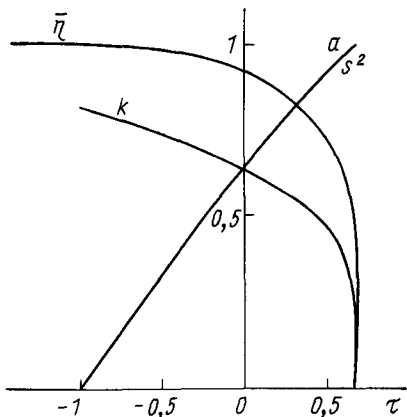


Рис 20. Изменение средних величин при распаде начального разрыва

Функция  $\bar{\eta}(\tau)$  имеет при  $\tau \rightarrow \tau^+$  бесконечную производную и испытывает в этой точке слабый разрыв — разрыв производной  $d\bar{\eta}/dx$ . Важно, что этот разрыв движется со сверхзвуковой скоростью (так как  $\tau^+ = \frac{2}{3} > 0$ , а скорости звука соответствует  $\tau = 0$ ). Он представляет собой поэтому особое явление, характерное лишь для дисперсионной гидродинамики (в обычной вязкой гидродинамике слабые разрывы движутся со скоростью звука [1]). Мы будем называть его сингулярным разрывом.

На рис. 20 построены графики величины  $\bar{\eta}$ ,  $a = s^2$  и волнового вектора  $k$  согласно (167) и (168). На рис. 21 представлены значения неусредненной величины  $\eta(x, t)$  при различных  $t$ . Видно, что область занятия осцилляциями быстро увеличивается со временем. На переднем фронте волны постепенно выделяются солитоны (143), расстояние между ними логарифмически растет со временем [(см. (171)]. Это видно

из рис. 21, б, где показан передний фронт волны для  $t = 100, 1000$  и  $10\ 000$ .

В заключение заметим, что переход от единичного скачка (155) к скачку с произвольным  $\eta^-$  согласно (151) достигается умножением в полученном решении  $\eta$  на  $\eta^-$  и одновременным делением значений  $x$  на  $(\eta^-)^{1/2}$  и значений  $t$  на  $(\eta^-)^{3/2}$ . Значения  $\tau$  при этом умножаются

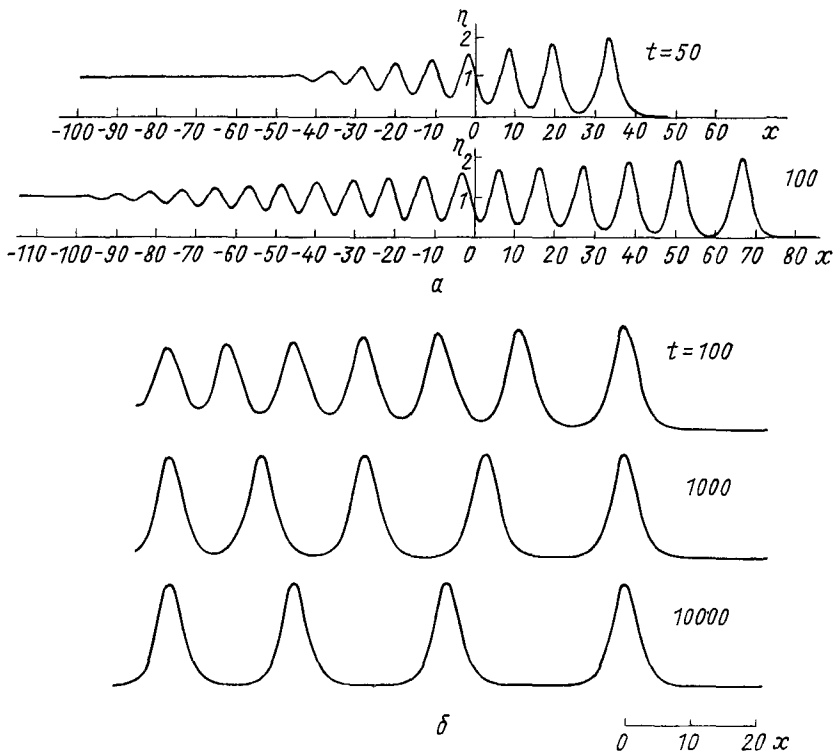


Рис 21 Структура волны

на  $\eta^-$ . Например, для скачка с  $\eta^- = 2$  графики на рис. 21, а соответствуют теперь  $t = 17,7$  и  $35,4^*$ .

Остановимся теперь кратко на эволюции волны разрежения, т. е. разрыва другого знака, с  $\eta^- < \eta^+$  (не умаляя общности, можно положить  $\eta^- = 0, \eta^+ = 1$ ). Ясно, что решением вида (168) описать такой скачок нельзя, так как  $r_3 > r_1$  и из (165), (166) сразу следует,

\* Экспериментальному исследованию распада малого разрыва в плазме при  $T_e/T_i \sim 20$  посвящены работы [45, 46]. Наблюдаемая картина качественно похожа на рассмотренное здесь решение. Количественное же сравнение невозможно, в частности, из-за недостаточности времени наблюдения, которое в условиях [45, 46] ограничивалось столкновениями [47].

что  $\eta^- > \eta^+$ . Уравнение (140) имеет, однако, тривиальное решение без осцилляций:

$$\eta = \bar{\eta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0, \\ \tau & \text{при } 0 < \tau < 1, \\ 1 & \text{при } \tau > 1. \end{cases} \quad (172)$$

Это решение имеет два слабых разрыва при  $\tau = 0$  и  $\tau = 1$  и соответствует пренебрежению дисперсией, т. е. членом с третьей производной в (140). С учетом дисперсии эти слабые разрывы размываются медленно  $\sim t^{1/3}$  и, вообще говоря, осциллируя [48].

Таким образом, в случае волны разрежения картина решения в бесстолкновительной гидродинамике, в целом, подобна решению в обычной гидродинамике. В случае же волны сжатия бездиссипативная гидродинамика приводит к существенно новым явлениям. Вместо сильного разрыва со стационарным фронтом здесь возникает автомодельно расплывающаяся область осцилляций. Иначе говоря, благодаря генерации колебаний фронт бездиссипативной ударной волны быстро расплывается\*.

Отметим, что все сказанное относится к эволюции достаточно малого скачка. Существуют весьма своеобразные двускоростные автомодельные решения, описывающие эволюцию волны сжатия большой интенсивности [50]. Эти решения, однако, неустойчивы и, по-видимому, тоже расплываются в осцилляторную область.

**Возникновение осцилляций вблизи точки гидродинамического опрокидывания.** Рассмотрев сначала возникновение бесстолкновительной ударной волны в сравнительно простом случае начального разрыва плотности, мы перейдем теперь к решению основной для нас задачи — исследованию явлений вблизи точки гидродинамического опрокидывания.

В обычной гидродинамике после опрокидывания возникает ударная волна. В бездиссипативной гидродинамике вблизи точки опрокидывания становится существенной дисперсия и после опрокидывания возникает область, заполненная колебаниями. Если рассматривать достаточно большое время, прошедшее с момента опрокидывания, так что число колебаний уже велико, то для описания процесса можно воспользоваться усредненными уравнениями (149). Эти уравнения справедливы, разумеется, внутри области, заполненной колебаниями. Возникает поэтому вопрос о граничных условиях, которым должны удовлетворять функции  $r_\alpha$  на границах этой области. Мы уже говорили, что на переднем фронте области колебаний должно выполняться равенство  $r_2 = r_3$ , а на заднем  $r_2 = r_1$ . Такие точки, однако, как мы увидим, являются особыми для решений системы (149), и для эффективного использования этих граничных условий необходимо выяснить вид решения вблизи этих точек.

\* В [41] высказывалось предположение о существовании сильных разрывов и в решениях уравнений Уизема. Мы видели, однако, что в действительности возникают не сильные, а сингулярные разрывы.

Рассмотрим сначала передний фронт. Пусть  $r_2 = r_3 \equiv r^+(t)$  в некоторой точке  $x = x^+(t)$ . Используя выражения (150), легко проверить, что при  $r_2 = r_3$  совпадают также скорости  $v_2$  и  $v_3$ :  $v_2^+ = v_3^+ \equiv v^+ = (r_1^+ + 2r^+)/3$ . Из уравнений (149) следует тогда, что  $dx^+/dt \equiv v^+$ . Положим  $r_2 - r^+ = \delta r_2$ ,  $r_3 - r^+ = \delta r_3$ ,  $x - x^+ = x''$ , где  $\delta r_2$ ,  $\delta r_3$  и  $x''$  — малые вблизи переднего фронта величины. Легко проверить простым перебором всех возможных случаев, что вблизи фронта

$$|\delta r_2 - \delta r_3| \gg |\delta r_2 + \delta r_3|, |r_1 - r_1^+|,$$

так что наиболее быстро меняющейся величиной является параметр  $s$ . Уравнение для  $\delta r_2$  имеет вид  $(\partial \delta r_2 / \partial t)_{x'' \rightarrow 0} = v_2 - v^+$  и аналогично для  $\delta r_3$ . Используя разложения эллиптических интегралов при  $s \rightarrow 1$ , находим для скоростей

$$v_{2,3} = v^+ \mp (r^+ - r_1^+) \frac{s'^2 L/2}{1 \mp s'^2 L/4}, \quad (173)$$

где  $s'^2 = 1 - s^2$  и  $L = \ln [16/(1 - s^2)]$ .

Вычитая теперь уравнение для  $r_2$  из уравнения для  $r_3$ , получаем уравнение для  $s$ :

$$\frac{\partial(1-s^2)}{\partial x''} = -\frac{3}{r^+ - r_1^+} \left( \frac{\partial r^+}{\partial t} \right)_{x''=0} \frac{2}{(1-s^2) \ln [16/(1-s^2)]}.$$

Решение этого уравнения определяет закон обращения  $s$  в единицу, и, следовательно, длины волны колебаний — в бесконечность, вблизи переднего фронта области осцилляций

$$(1-s^2)^2 \left( \ln \frac{16}{1-s^2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{12x''}{(r^+ - r_1^+)^2} \left( \frac{\partial r^+}{\partial t} \right)_{x''=0}. \quad (174)$$

Из (174) следует, что при  $x'' \rightarrow 0$  волновой вектор  $k$  обращается в нуль пропорционально  $(\ln |x''|)^{-1}$ , как и в рассмотренном выше особом случае распада начального разрыва. Легко проверить также, что среднее значение  $\bar{\eta}$  стремится при  $x'' \rightarrow 0$  к своему предельному значению также по закону  $(\ln |x''|)^{-1}$ . Поэтому на переднем фронте  $\bar{\eta}(x)$  и в общем случае имеет особенность с бесконечной производной.

Вполне аналогичные вычисления можно произвести для заднего фронта. И здесь, обозначая значения всех величин на заднем фронте при  $x = x^-$  знаком «—», имеем

$$r_1^- = r_2^- \equiv r^-, \quad v_1^- = v_2^- \equiv v^- = 2r_1^- - r_3^-; \quad dx^-/dt = v^-.$$

Параметр  $s$  снова является наиболее быстро меняющейся величиной и закон его обращения в нуль определяется формулой:

$$s^2 = \frac{2}{r_3^- - r^-} \left| \left( \frac{\partial r^-}{\partial t} \right)_{x'=0} x' \right|^{1/2}, \quad x' = x - x^-. \quad (175)$$

Из этой формулы видно, в частности, что амплитуда колебаний  $a$  обращается в общем случае в нуль по корневому закону  $a \sim |x^-|$ .

(В этом пункте имеется отличие от специального случая распада начального разрыва. Напомним, что там амплитуда обращалась в нуль линейно.) Среднее же значение  $\bar{\eta}$  стремится к предельному значению линейно.

Выражения (174) и (175) должны использоваться в качестве естественных граничных условий к уравнениям (149), в задачах, где колебания занимают ограниченную область пространства.

Мы можем вернуться теперь к исследованию осцилляционной структуры, возникающей после гидродинамического опрокидывания.

Отметим, прежде всего, что если пренебречь дисперсией, т. е. членом с третьей производной в уравнении (140), то его решение имеет вид (57), (43). Вблизи точки опрокидывания  $x_0$ ,  $t_0$  оно описывается кубическим полиномом (44). При этом с помощью преобразования (151) всегда можно выбрать  $\alpha = 1^*$ . Окончательно указанное решение вблизи точки опрокидывания описывается формулой

$$x = \eta t - \eta^3. \quad (176)$$

При  $t > 0$  оно делается неоднозначным. В действительности при учете дисперсии в области  $t > 0$  возникают колебания. Мы опять предположим, что они занимают конечную область пространства. В этой области решение описывается уравнениями (149). Вне же области колебаний по-прежнему справедливо (176), так что  $\eta$  имеет там вид

$$\eta = \sqrt{t} \kappa(z), \quad z = x/t^{3/2}, \quad (177)$$

где  $\kappa$  определяется уравнением

$$z = \kappa - \kappa^3.$$

Чтобы сшить решения (149) и (177) на границе области колебаний, нужно положить

$$r_\alpha = \sqrt{t} l_\alpha(x/t^{3/2}) = \sqrt{t} l_\alpha(z). \quad (178)$$

Таким образом, в этом случае область, занимаемая колебаниями, расширяется  $\sim t^{3/2}$ , а амплитуда колебаний возрастает при заданном  $z$  как  $t^{1/2}$ . Подставляя (178) в (149), получаем для  $l_\alpha$  систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dl_\alpha}{dz} = \frac{l_\alpha}{3z - 2u_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (179)$$

где  $u_\alpha = v_\alpha t^{-1/2}$ , так что  $u_\alpha$  выражаются через  $l_\alpha$  теми же формулами (150), которыми выражаются  $v_\alpha$  через  $r_\alpha$ . Систему уравнений (179), разумеется, нельзя решить в квадратурах. Используя полученные выше формулы (174) и (175), легко, однако, выяснить поведение решения вблизи переднего и заднего фронтов.

\* Чтобы вернуться к случаю  $\alpha \neq 1$ , достаточно в окончательном результате умножить значения  $\eta$  на  $\alpha^{-2/7}$ , значения  $x$  на  $\alpha^{-1/7}$ , значения  $t$  на  $\alpha^{3/7}$ . Значения  $z$  при этом умножаются на  $\alpha^{-1/2}$ .



Пусть, например, переднему фронту соответствует значение  $z = z^+$ . Из условия  $dx^+/dt = v^+$  следует тогда, что

$$z^+ = \frac{4}{9} l_3^+ + \frac{2}{9} l_1^+. \quad (180a)$$

При  $z = z^+$  условие непрерывности с учетом формулы (166) дает

$$z^+ = l_1^+ (1 - (l_1^+)^2). \quad (180б)$$

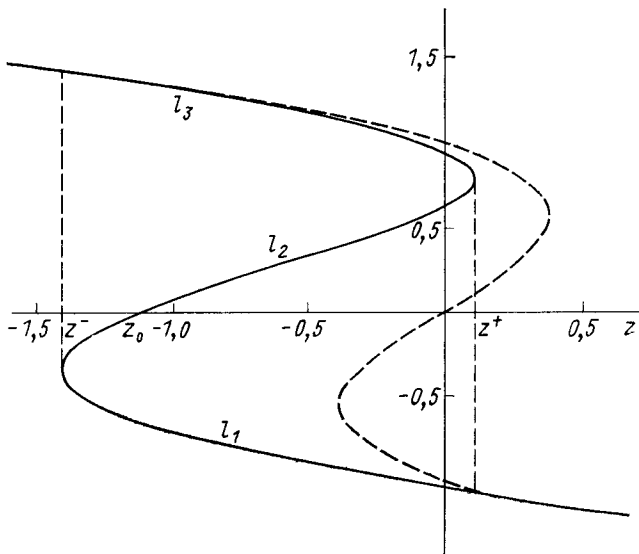


Рис. 22. Функции  $l_\alpha(z)$

При этом надлежит выбирать значения  $l_1^+ < 0$ , так как решение должно сшиваться с той ветвью функции  $\kappa(z)$ , которая уходит на  $z \rightarrow +\infty$  (рис. 22). При  $z = z^+$  имеем

$$\left(\frac{\partial r_3^+}{\partial t}\right)_{x''=0} = \left(\frac{\partial r_3}{\partial t}\right)_{z=z^+} = \frac{1}{2} \frac{r_3^+}{t},$$

так что из формулы (174) прямо следует поведение решения вблизи переднего фронта:

$$(1-s^2)^2 \left( \ln \frac{16}{1-s^2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{r_3^+ z''}{(l_3^+ - l_1^+)^2}, \quad z'' = z - z^+ < 0, \quad l_3^+ > 0.$$

Аналогично, вблизи заднего фронта имеем из условия движения фронта со скоростью  $v_1^- = v_2^-$ :

$$z^- = \frac{4}{3} l_1^- - \frac{2}{3} l_3^-. \quad (181a)$$

Из условия непрерывности решения следует, что

$$z^- = l_1^- [1 - (l_3^-)^2], l_3^- < 0. \quad (181б)$$

Наконец, вид решения вблизи заднего фронта следует сразу из (175):

$$s^2 = \frac{2l_1 |l_1^- z'|^{1/2}}{l_3^- - l_1^-}, \quad z' = z - z^- > 0.$$

Решение уравнений (179) для определения значений  $l_\alpha$  во всей области колебаний производилось численно. Результаты представлены на рис. 22. Мы видим, что при всех значениях  $z$  параметры  $l_3 > 0$ ,  $l_1 < 0$ . Параметр же  $l_2$  меняет знак в некоторой точке  $z_0$ . Эта точка является особой. Действительно, из уравнения для  $l_2$  видно, что эта величина может обращаться в нуль только там, где обращается в нуль знаменатель  $3z - 2u_2$ . Легко показать, однако, что особенность в точке  $z_0$  довольно слабая. В ней непрерывны не только величины  $l_\alpha$ , но и их первые производные. Тем не менее наличие такой особенности существенно: только благодаря ей оказывается возможным удовлетворить граничным условиям. Дело в том, что граничные условия (180), (181) накладывают четыре условия на решение. Между тем общее решение системы (179) содержит только три произвольные постоянные. Недостающая постоянная добавляется благодаря наличию особой точки  $z_0$ . Чтобы понять, как это происходит, будем строить решение с двух сторон — из неизвестных заранее точек  $z^-$  и  $z^+$ . После удовлетворения (180) и (181) в нашем распоряжении останутся две произвольные постоянные, в качестве которых можно выбрать, например, значения  $l_3^-$  и  $l_1^+$ . Распорядимся одной из них так, чтобы обращение  $l_2$  в нуль с двух сторон происходило в одной и той же точке  $z_0$ . Вторую же постоянную подберем так, чтобы при  $z = z_0$  была непрерывна величина  $l_3$ . Тогда непрерывность  $l_1$  будет обеспечена автоматически благодаря тому, что  $3z_0 = 2u_2$  при  $z = z_0$ . Решение фактически строилось именно таким способом.

Следует отметить любопытное сходство между графиком  $l_\alpha(z)$  и формальным трехзначным решением (44). [График трехзначной функции  $\kappa(z)$  показан на рис. 22 пунктиром.] Отсюда видно, что существование решений с колебаниями тесно связано с наличием области неоднозначности в решении уравнения без дисперсии.

Используя графики рис. 22 и формулы (142), (147) и (148), можно определить искомое решение  $\eta(x, t)$  при опрокидывании фронта.

Вычисления дают следующие значения для координат особых точек решения:  $z^- = -1,41$ ,  $z^+ = 0,117$ ,  $z_0 = -1,11$ . Амплитуда переднего солитона равна  $2a^+ = 2(l_2^+ - l_1^+) t^{1/2} = 3,69 t^{1/2}$ . Из соотношений автомодельности (178) видно, что среднее значение  $\bar{\eta}$ , амплитуду  $a$  и волновой вектор  $k$  можно представить в виде

$$\bar{\eta} = t^{1/2} \kappa(z), \quad a = t^{1/2} b(z), \quad k = t^{1/4} q(z).$$

Графики функций  $\kappa(z)$ ,  $s^2(z)$ ,  $b(z)$  и  $q(z)$  построены на рис. 23. Видно, что на переднем фронте волны при  $z \rightarrow z^+$  величины  $\kappa$ , а сле-

довательно, и  $\bar{\eta}$  испытывают сингулярный разрыв. На рис. 24 для  $t = 5,06; 8,35$  показана зависимость  $\eta$  от  $x$ . Видно, что с течением времени происходит быстрое расширение области, занятой колебаниями—увеличение их амплитуды и уменьшение длины волны. Пунктиром на рис. 23, 24 представлено решение уравнения без дисперсии (176)\*.

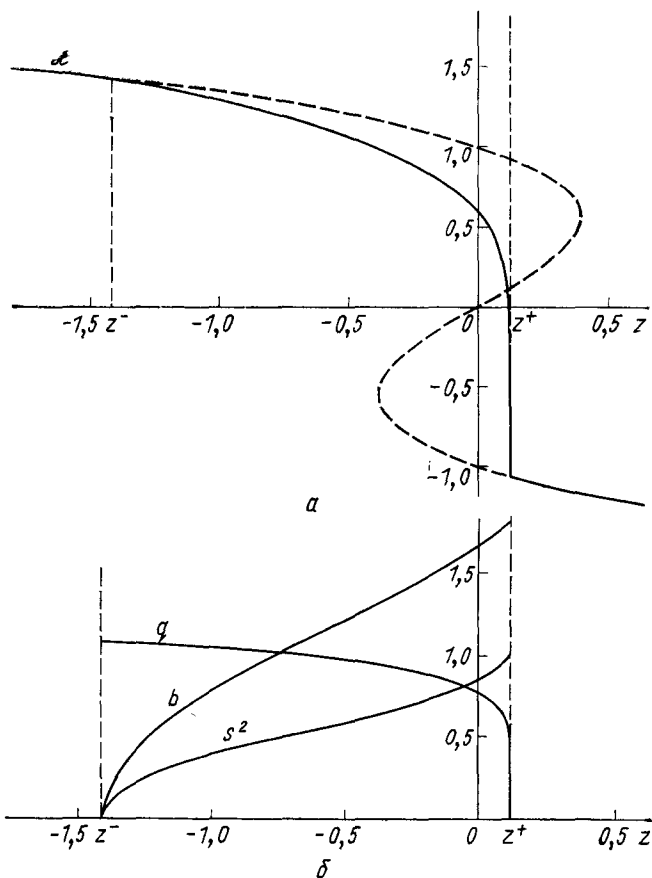


Рис. 23 Изменение средних величин в области гидродинамического опрокидывания

**Нелинейные волны при адиабатическом захвате электронов.** Уравнение Кортевега — де Вриза (140) описывает нелинейные движения плазмы с холодными ионами в предположении равновесного максвелл-большцмановского распределения электронов. В действительности, как уже указывалось выше, функция распределения захваченных

\* Экспериментально опрокидывание фронта волны исследовалось в работе [51]. И в этом случае имеется качественное согласие с теорией, а количественное сравнение невозможно.

Электронів в разреженной плазме может сильно отличаться от равновесной. Это существенно сказывается на нелинейных волнах.

Рассмотрим, например, уединенную волну (солитон). Поле солитона образует потенциальную яму для электронов. Характерное время изменения солитона  $\Delta t \sim 1/\gamma \gg 1/\Omega_0$ , где  $\Omega_0$  — ленгмюровская частота для ионов. Частота колебаний электрона в поле солитона порядка плазменной частоты для электронов. Следовательно,  $\omega/\gamma > (M/m)^{1/2} \gg 1$ , т. е. изменение амплитуды солитона — процесс мед-

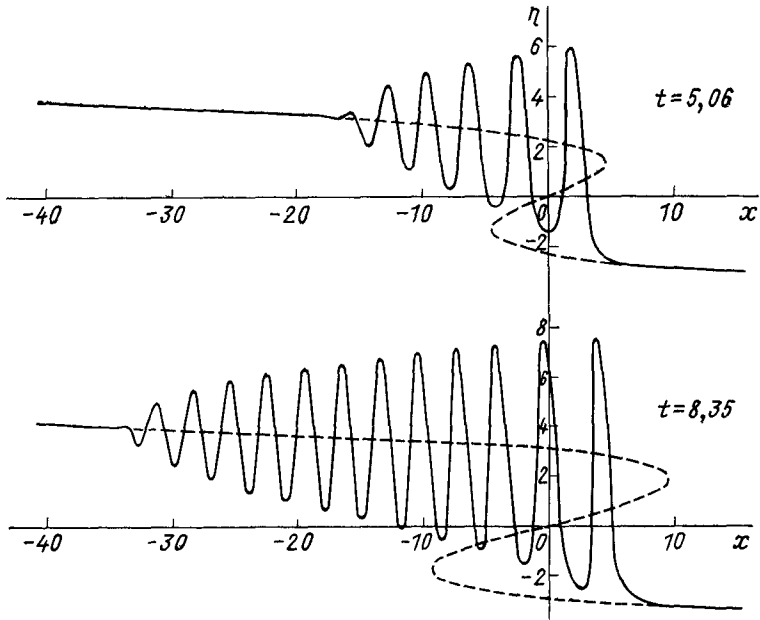


Рис 24 Структура волны

ленный по сравнению с частотой осцилляций захваченного электрона (65). Поэтому в отсутствие соударений распределение захваченных электронов в поле солитона носит адиабатический характер (78).

Определим вид солитона в этих условиях [2]. Стационарные волны определены нелинейным уравнением Пуассона:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi e [N_i(\varphi) - N_e(\varphi)]. \quad (182)$$

Концентрация ионов (при  $T_i \rightarrow 0$ ,  $\varphi > 0$ ):

$$N_i(\varphi) = N_0 u / (u^2 - 2e\varphi/M)^{1/2}. \quad (183)$$

Здесь  $u$  — скорость волны по отношению к ионам. Концентрация электронов (81):

$$N_e = N_0 \left\{ \exp \psi [1 - \Phi(\psi^{1/2})] + \frac{2\psi^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \right\}, \quad \psi = e\varphi/T_e. \quad (184)$$

Подставляем (183), (184) в уравнение (182) и интегрируем его по  $dx$ . Учитывая, что для уединенной волны  $d\varphi/dx \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow 0$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 &= -\frac{Mu^2}{T_e} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2T_e}{Mu^2} \psi \right)^{1/2} \right] + F(\psi); \\ F(x) &= \exp(x) [1 - \Phi(x^{1/2})] - 1 + \frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Здесь  $\xi$  — безразмерная переменная  $\xi = x/D$ ,  $D = (T_e/4\pi e^2 N_0)^{1/2}$ .

Скорость солитона  $u$  определяется из условия, что  $d\psi/d\xi = 0$  при  $\psi = \psi_m$ , где  $\psi_m$  — максимальная амплитуда. Из (185) имеем:

$$u^2 = \frac{T_e}{M} \frac{F^2(\psi_m)}{2[F(\psi_m) - \psi_m]}. \quad (186)$$

Зависимость скорости солитона  $u$  от его амплитуды  $\psi_m$  показана на рис. 25. Условие существования уединенной волны

$$\psi_m \leq F(\psi_m) \leq 2\psi_m.$$

При  $F(\psi_m) \rightarrow \psi_m$  амплитуда солитона обращается в нуль, а при  $F \rightarrow 2\psi_m$  он опрокидывается. Это приводит к ограничению амплитуды и скорости солитонов:

$$1 \leq u/(T_e/M)^{1/2} \leq 3,1; \quad 0 \leq \psi_m \leq 4,79.$$

Для волн малой амплитуды  $\psi_m \rightarrow 0$  из (186) получаем

$$u^2 = \frac{T_e}{M} \left[ 1 + \frac{16\psi_m^{1/2}}{15\sqrt{\pi}} + \frac{2\psi_m}{3} \left( 1 + \frac{128}{75\pi} \right) \right].$$

Профиль солитона находится интегрированием уравнения (185). В частности, для волн малой амплитуды

$$\varphi = \psi_m \operatorname{ch}^{-4} \left[ \frac{1}{\sqrt{15}} \left( \frac{\psi_m}{\pi} \right)^{1/4} \frac{x}{D} \right].$$

Эффективная ширина солитона увеличивается с уменьшением его амплитуды пропорционально  $\psi_m^{-1/4}$ .

Распределение электронов принималось выше адиабатическим. Выражения (185), (186) сохраняют свой вид и в случае максвелл-больцмановского распределения — только функция  $F(\psi_m)$  заменяется на [52]

$$F_M(\psi_m) = \exp(\psi_m) - 1. \quad (187)$$

Зависимость скорости солитона от его амплитуды показана для этого случая пунктиром на рис. 25. Солитон опрокидывается при  $\psi_m = 1,3$ ;  $u = 1,6 (T_e/M)^{1/2}$ . Для солитона малой амплитуды имеем из (187), (186), (185)

$$u^2 = \frac{T_e}{M} \left( 1 + \frac{2}{3} \psi_m \right), \quad \varphi = \psi_m \operatorname{ch}^{-2} \left( \left( \frac{\psi_m}{12} \right)^{1/2} \frac{x}{D} \right).$$

Это выражение совпадает с выражением для солитона, получаемого из уравнения Кортевега — де Вриза (143), что, естественно, и должно быть. Адиабатическому захвату соответствовало бы существенное изменение нелинейного члена в уравнении Кортевега — де Вриза (140)  $\eta^{1/2}d\eta/dx$  вместо  $\eta d\eta/dx$  (в области положительных  $\eta$ ).

Количество захваченных электронов сильно влияет, таким образом, на структуру нелинейных волн в плазме. В связи с этим следует подчеркнуть важную роль соударений электронов. Даже очень редкие соударения для волн достаточно малой амплитуды

$$\psi_m < (v_e \Delta t)^{1/2} \quad (188)$$

приводят распределение захваченных электронов к максвелл-больцмановскому виду. Здесь  $\Delta t$  — время существования волны,  $v_e$  — частота соударений между электронами. Следовательно, волны малой амплитуды (188) подчиняются максвелл-больцмановскому, а волны значительной амплитуды [условие, обратное (188)] — адиабатическому закону. Это подтверждается данными опыта [45]. Ус-

словие (188) определяет область применимости уравнения Кортевега — де Вриза к плазме с холодными ионами.

Столкновения приводят, разумеется, и к диссипации колебаний плазмы. Фронт ударной волны при учете столкновений приобретает после установления стационарный осциллирующий характер. Общая ширина осциллирующей зоны — ширина фронта — определяется длиной столкновительной диссипации [52, 53].

### 3.3. Кинетическое опрокидывание

**Классификация возможных случаев.** За точкой кинетического опрокидывания у функции распределения появляются новые максимумы. Следовательно, возникает область, где градиент  $\partial g/\partial u$  изменяет знак. Здесь могут возбуждаться колебания плазмы. Характер этих колебаний существенно различается в зависимости от ионно-звуковой скорости  $s_{i0}$  в точке опрокидывания. Она определена соотношением (132):

$$1 = \frac{1}{2 \sqrt{\pi/\beta} n_0} \int \frac{\partial g_0/\partial u}{u - s_{i0}} du. \quad (189)$$

Здесь  $n_0$  — концентрация, а  $g_0$  — функция распределения ионов в точке опрокидывания  $\xi_0, t_0$ .

Пусть  $u_0$  — скорость в точке перегиба функции  $g_0$ . Если  $u_0 < s_{i0}$ , то согласно (131) при  $t > t_0$  усиливаются колебания с волновым вектором

$$k_0 = \frac{1}{D} \left[ \left( \frac{s_{i0}}{u_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (190)$$

Это короткие волны  $k_0 \sim 1/D$ . Такие волны обладают значительной дисперсией. Они возбуждаются при  $t > t_0$  вблизи критической точки  $\xi_0$ . При динамическом возбуждении область, занятая колебаниями, ограничена каустиками [20]. Однако при достаточно плавном изменении  $n(\xi)$  в окрестности точки опрокидывания  $\xi_0$  возможно, что коротковолновые возмущения (190) реально будут лишь в спектре тепловых флуктуаций. В области неустойчивости вблизи точки  $\xi_0$  они резко усиливаются. В этом случае здесь будет возникать и развиваться зона интенсивных случайных колебаний — зона плазменной турбулентности.

Функцию распределения ионов в окрестности точки опрокидывания  $t_0$ ,  $\xi_0$ ,  $u_0$  можно представить в виде

$$g = g_{00} + g_1 [(\alpha t^* - \beta \xi^{*2}) u^* - u^{*3}],$$

$$t^* = t - t_0, \quad \xi^* = \xi - \xi_0, \quad u^* = u - u_0, \quad g_{00} = g_0(u_0),$$

$$g_1 = -\frac{k}{6|k|} \left( \frac{\partial^3 g_0}{\partial u^3} \right)_{u_0},$$

где  $g_{00}$ ,  $g_1$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные постоянные. При  $t^* < 0$  функция  $g$  монотонна  $kdg/du < 0$ . При  $t^* > 0$  в области  $|\xi^*| \leq (\alpha t^*/\beta)^{1/2}$  производная  $kdg/du$  при  $u^* \sim 0$  изменяет знак. В этой области и возбуждаются колебания (131). Размер занятой осцилляциями области растет со временем пропорционально  $\sqrt{t^*}$ .

При  $s_{i0} \rightarrow u_0$  длина возбуждающихся волн возрастает (190). Если  $s_{i0} \simeq u_0$ , то колебания становятся длинноволновыми  $kD \rightarrow 0$ . В этом случае в области опрокидывания становится существенной нелинейность и может развиваться динамическая структура, аналогичная рассмотренной в предыдущем разделе.

Если  $u_0 > s_{i0}$ , то колебания плазмы в точке кинетического опрокидывания не возбуждаются: хотя и появляется область скоростей  $u$ , где  $kdg/du > 0$ , но нет волн, фазовая скорость которых  $s_h = s_{i0}$  совпала бы с  $u$ ; возбуждение же возможно, лишь если  $kdg/du > 0$  при  $u = s_h = \omega/k \sqrt{2T_e/M}$  (см. разд. 3.1). Это утверждение справедливо, однако, лишь для рассматриваемого здесь одномерного движения плазмы. Если отказаться от требования одномерности, то, как легко видеть, при  $u_0 > s_{i0}$  возбуждаются волны, фазовая скорость которых направлена под углом  $\theta = \arccos(s_{i0}/u_0)$  к оси  $x$ . Таким образом, вблизи точки опрокидывания при  $u_0 > s_{i0}$  должна сразу развиваться сложная трехмерная картина осцилляций.

**Распад начального разрыва.** Распад начального разрыва в кинетике квазинейтральной плазмы был рассмотрен в разд. 2.1, в гидродинамике

сильно неизотермической плазмы с учетом дисперсии (т. е. с учетом отклонений от квазинейтральности) — в разд. 3.2. Исследование общего случая, когда не требуется выполнения условия квазинейтральности, т. е. когда движение плазмы описывается кинетическим уравнением (5), а электрическое поле — уравнением Пуассона (138), проводится численно [45, 54—61]. Остановимся кратко на результатах расчетов.

При не слишком большой разнице в температурах электронов и ионов  $T_e/T_i \sim 1$  картина близка к получаемой при решении квазинейтрального автомодельного кинетического уравнения (12), рассмотренном в разд. 2.1 (см. рис. 7, 8). Вклад отклонений от квазинейтральности в этом случае незначителен. С ростом отношения  $T_e/T_i$ , как и в квазинейтральном решении, постепенно выделяется область типа плато и впереди область сравнительно крутого спада — фронта волны (см. рис. 9). В области фронта при  $T_e/T_i \gtrsim 10$  развиваются осцилляции. Они носят стационарный характер\*. При очень больших значениях отношения  $T_e/T_i$  структура осцилляций, по-видимому, близка к рассмотренной в разд. 3.2 (см. рис. 21, 24)\*\*\*. Это относится, разумеется, лишь к распаду не слишком больших разрывов, пока не опрокидываются солитоны на фронте волны.

Перед фронтом волны всегда виден пучок быстрых ионов — ионов, опережающих волну или отраженных от ее фронта. Его называют «предвестником». Функция распределения ионов в области предвестника имеет один или два пика (см. рис. 8). Отметим, что предвестник всегда возникает при кинетическом опрокидывании\*\*\*. С ростом величины начального разрыва предвестник усиливается, а затем срав-

\* В работе [59] отмечается появление нестационарных пульсаций в области зади фронта при  $T_e/T_i \sim 10^5$ .

\*\* Следует отметить, что численные решения охватывают лишь ограниченную (сравнительно небольшую) область  $x$ . Они сильно ограничены и по времени  $t$ . Это затрудняет их сопоставление с аналитическими результатами, имеющими асимптотический характер. Подчеркнем, что определение асимптотики решений уравнений (5), (138) с помощью численных расчетов является весьма сложным процессом и требует большой осторожности. Существенное влияние на асимптотику могут оказать трудно выделяемые при численном счете эффекты на резонансных частицах, а также математическое затухание, появляющееся при замене кинетического уравнения системой уравнений для квазичастиц. Кроме того, в реальных задачах существенную роль может играть трехмерный характер осцилляций.

\*\*\* После кинетического опрокидывания один из максимумов функции распределения быстро уходит вперед. Он и образует предвестник. Например, предвестник виден на рис. 11,  $\sigma$  на кривых  $\xi = 6$ ,  $\xi = 7$ . Наличие в этом случае дополнительного максимума у функции распределения при больших  $x/t$  следует непосредственно из формулы (58), из которой видно, что скорость предвестника  $u_{\text{п}} \approx x/ts_0$ , число частиц в нем экспоненциально падает с ростом отношения  $x/t$ :  $N_{\text{п}} \sim \exp\left[-\left(\frac{x}{ts_0} - u_0\right)^2\right]$ . Важно, что электрическое поле не сильно влияет на движение быстрых ионов. Поэтому асимптотическое поведение решения при больших  $x/t$  может быть исследовано уже на основании формул нейтрального приближения (9). Появление второго максимума у функции распределения ионов предвестника связано с их отражением от фронта волны, т. е. с действием на ионы электрического поля.



нительно резкий передний фронт волны вообще расплывается. Распределение концентрации плазмы и электрического поля даже при  $T_e/T_i \rightarrow \infty$  ( $T_e/T_i \sim 10^3 \div 10^6$ ) становится при этом сравнительно гладким, типа представленного на рис. 9 для  $\beta = 1$ . Причина этого в сильном отражении ионов невозмущенной плазмы от набегающей волны, которое и приводит к размытию и расплыванию фронта\*.

## § 4. Ионосферная аэродинамика

### 4.1. Упрощение уравнений и закон подобия

Важной областью приложений изложенных в предыдущих разделах методов является ионосферная аэродинамика — теория обтекания движущихся тел разреженной ионосферной плазмой.

Возникающие здесь весьма сложные задачи можно существенно упростить, если использовать соотношения (3), (4) между параметрами, реально осуществляющиеся при движении в ионосфере искусственных спутников Земли. Действительно, температура ионов в ионосфере  $T_i \sim 10^3$  К, а температура электронов  $T_e \sim (1 \div 2,5) \cdot 10^3$  К. При скорости тела  $V_0 = 8 \cdot 10^5$  см/с число Маха порядка  $b = (MV_0^2/2T_e)^{1/2} \sim 5 \div 7$  и можно считать, что

$$b = (MV_0^2/2T_e)^{1/2} \gg 1, \quad (191)$$

где  $M$  — масса иона, для численной оценки принято  $M = 16$  (кислород). В то же время

$$V_0/v_{Te} = (mV_0^2/2T_e)^{1/2} \sim 5 \cdot 10^{-2} \ll 1, \quad (192)$$

где  $m$  — масса электрона, так что скорость тела существенно меньше тепловой скорости электронов.

Концентрация электронов  $N_e \sim 10^5 \div 10^6$  см<sup>-3</sup>. При этом дебаевский радиус

$$D = (T_e/4 \pi e^2 N_e)^{1/2} \sim 0,1 \div 0,5 \text{ см.}$$

Поэтому для тел с размером  $R_0 \sim 1$  м с хорошим запасом выполняется равенство

$$R_0 \gg D. \quad (193)$$

Длина свободного пробега ионов и электронов на высотах больших 150 км достаточно велика  $\sim 100$  м. Поэтому плазму можно рассматривать здесь как бесстолкновительную и использовать развитые в предыдущих разделах методы. Мы не будем касаться вопросов, связанных с влиянием на движение частиц магнитного поля. Нетрудно показать, что это влияние существенно лишь на достаточно больших расстояниях от тела  $z \gtrsim McV_0/eH$ , так что для тел не слишком большого раз-

\* Экспериментальные исследования, выполненные Тэйлором, Икежи и Бэйкером [46, 47], Алихановым, Беланом и Сагдеевым [51] и др. [45, 62—65], согласуются с результатами указанных здесь численных расчетов.

мера во всяком случае имеется область расстояний, где магнитным полем можно пренебречь.

Условие (193), как объяснено во введении, дает возможность рассматривать плазму как квазинейтральную, т. е. заменить уравнение Пуассона в полной системе уравнений условием квазинейтральности (2). Поскольку после этой замены параметры размерности длины исчезают из уравнений, можно сформулировать первое правило подобия в ионосферной аэродинамике — течения плазмы вокруг тел одной и той же формы, отличающихся лишь размерами, подобны.

Далее, условие (192) означает, что распределение электронов можно считать стационарным, как это принималось и в предыдущих разделах. Наибольший интерес при исследовании обтекания тела представляет область позади тела, где возмущения концентрации особенно велики. Поскольку эта область является областью разрежения, потенциал поля в этой области отрицателен, вопрос о «захвате» электронов не возникает, и электроны распределены по закону Больцмана, так что электрический потенциал прямо выражается через концентрацию ионов формулой (6)\*.

Основное отличие задачи об обтекании тела плазмой от задач, исследовавшихся в предыдущих разделах, состоит в том, что ранее мы интересовались одномерными нестационарными решениями кинетического уравнения, а задача об обтекании неодномерна. Ее естественно формулировать в системе отсчета, где тело покоится. В этой системе картина является стационарной, а ионы на бесконечности движутся как целое со скоростью ( $-V_0$ ). Покажем, что при условии (191) задачу об обтекании можно рассматривать как нестационарную в пространстве меньшего числа измерений.

Выпишем кинетическое уравнение для ионов, выбрав ось  $z$  по направлению набегающего потока плазмы:

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \mathbf{v}_\perp \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_\perp} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_\perp} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_\perp} = 0, \quad (194)$$

где  $\mathbf{r}_\perp$ ,  $\mathbf{v}_\perp$  — проекции векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $z$ . При условии (191) возмущенная область оказывается вытянутой вдоль оси  $z$ . Если ее поперечный размер  $\sim R_0$ , то продольный размер — порядка  $bR_0$ . Поэтому  $|\partial \varphi / \partial \mathbf{r}_\perp| \gg |\partial \varphi / \partial z|$  и членом с  $\partial \varphi / \partial z$  можно пренебречь. Кроме того, в системе отсчета, связанной с телом,  $v_z \approx \approx V_0$ , так как в силу (191) можно пренебречь тепловым разбросом ионов в направлении  $z$ . Окончательно получим:

$$V_0 \frac{\partial f}{\partial z} + \mathbf{v}_\perp \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_\perp} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_\perp} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_\perp} = 0.$$

\* Вблизи задней поверхности тела плазма настолько разрежена, что дебаевский радиус делается большим и отклонения от квазинейтральности существенны. Мы, однако, не будем заниматься здесь структурой этой «области максимального разрежения». Заметим также, что, вследствие поглощения электронов поверхностью тела, вблизи поверхности распределение электронов может отличаться от больцмановского (см. [67, 68]).

Это уравнение вообще не содержит  $v_z$ . Поэтому можно вместо  $f$  ввести в качестве неизвестной функции  $\int f dv_z$ .

Перейдем к безразмерным переменным. Положим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v}_\perp / (2T_e/M)^{1/2}, \quad \rho = \mathbf{r}_\perp / R_0, \quad t = z/R_0 b; \\ g(t, \rho, \mathbf{u}) &= \frac{2\pi T_e}{MN_0} \int f dv_z, \quad \psi = e\varphi/T_e, \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

( $R_0$  — характерный размер тела). Уравнение примет в новых переменных вид:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} = 0. \quad (196)$$

Уравнение же (6) запишется как

$$\psi = \ln \int g \frac{d^2 u}{\pi}. \quad (197)$$

Уравнения (196) и (197) представляют собой полную систему уравнений для обтекания быстро движущегося тела плазмой. Здесь сделаны все возможные упрощения. Мы видим, что, если понимать  $t$  как время, уравнение (196) можно рассматривать как уравнение нестационарной задачи в пространстве с числом измерений на единицу меньшим, чем в исходной задаче обтекания. В частности, для двумерной задачи обтекания уравнение (196) совпадает с (5).

Перейдем к формулировке граничных условий для системы (196), (197). Будем предполагать, что поверхность тела такова, что все попавшие на нее ионы рекомбинируют, т. е. отлетают в виде нейтральных атомов. Это с достаточной точностью соответствует обычным условиям на металлической поверхности [69]. При этом на поверхности тела должно выполняться условие отсутствия отраженных ионов:

$$f = 0 \text{ при } \mathbf{n}\mathbf{v} > 0 \quad (198)$$

( $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности тела). Отметим прежде всего, что отсутствие отраженных частиц и пренебрежение разбросом скоростей в направлении  $z$  в (196) приводят к тому, что возмущение впереди тела вообще отсутствует. Если поместить начало отсчета  $t = 0$  в самой передней точке тела, то это означает, что

$$\begin{aligned} g &= \exp(-Mv_\perp^2/2T_e) = \exp(-\beta u^2) \text{ при } t < 0, \\ \beta &= T_e/T_i. \end{aligned} \quad (199)$$

Граничное условие (198) переписется при этом в безразмерных переменных (195) в виде условия на контуре сечения тела  $g = 0$  при  $\mathbf{n}_1 \mathbf{u} > -n_2 b$ , где  $\mathbf{n}_1$  — нормаль к контуру сечения тела в плоскости  $t = \text{const}$ . Учитывая, что  $n_2 b = \text{ctg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности и осью  $t$  (в координатах  $\rho, t$ ), окончательно получаем

$$g = 0 \text{ при } \mathbf{n}_1 \mathbf{u} > -\text{ctg} \alpha. \quad (200)$$

Сечение, разумеется, меняется с изменением  $t$ . Например, контуры сечения сферического тела — окружности радиуса  $r(t) = \{1 - b^2[t - b^{-1}]^2\}^{1/2}$ . На больших расстояниях от тела возмущения должны убывать:

$$g \rightarrow \exp(-\beta u^2) \text{ при } |\rho|, t \rightarrow \infty. \quad (201)$$

Важное упрощение граничных условий для несильно вытянутых тел (т. е. тел, продольный размер которых порядка поперечного) связано с тем, что в координатах  $\rho, t$  тело сплюсчивается в  $b = (MV_0^2/2T_e)^{1/2}$  раз. Отношение его продольного размера к поперечному в переменных  $\rho, t$  порядка  $1/b$ . Поэтому при  $b \gg 1$  само тело можно заменить пластинкой, совпадающей с максимальным поперечным сечением тела. Совмещая, кроме того, начало отсчета  $t = 0$  с плоскостью максимального сечения  $S$ , переписываем граничные условия (200), (201) при  $t \rightarrow +0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} g &= 0, \text{ если } \rho R_0 \text{ лежит в } S, \\ g &= \exp(-\beta u^2), \text{ если } \rho R_0 \text{ лежит вне } S. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Физический смысл уравнения (196) с граничным условием (202) ясен: оно определяет, как ионы заполняют во времени  $t$  в плоскости  $\rho$  первоначально пустую область, равную максимальному сечению тела  $S$ . Так и должно быть при больших числах Маха  $b \gg 1$ : быстро пролетевшее тело поглощает все ионы в цилиндрической области с поперечным размером, равным максимальному сечению тела, затем эта область заполняется плазмой.

Разрывной характер граничного условия (202) ведет к особенности в последнем члене уравнения (196) при  $t \rightarrow 0$  в точках  $R_0\rho$ , лежащих на контуре максимального сечения тел. Требуется специальный анализ этой сингулярности. Рассматривая малые  $t$  и достаточно малую окрестность  $\rho$  вблизи контура максимального сечения, можно пренебречь его кривизной. Задача сводится тогда к обтеканию полуплоскости, расположенной ортогонально к потоку. Решение этой задачи будет получено в следующем разделе. Оно имеет принципиальное значение, так как позволяет описать распределение ионов вблизи края произвольного тела и тем самым устранить сингулярность в уравнении (196).

Используя записанные граничные условия, можно распространить сформулированный ранее закон подобия на случай тел, движущихся с различными скоростями: именно подобны картины обтекания тел, контуры которых в переменных  $\rho$  и  $t$  одинаковы. (При этом истинные длины тел должны относиться, как их скорости.) В области же применимости приближенных граничных условий (202) можно сделать и гораздо более сильное утверждение. В этом случае подобны картины обтекания тел, имеющих подобные максимальные сечения. Например, если максимальное сечение тела — круг радиуса  $R_0$ , то с учетом цилиндрической симметрии задачи концентрацию частиц в возмущенной зоне можно представить в виде

$$N(z, r_{\perp}) = N_0 F\left(\frac{r_{\perp}}{R_0}, \frac{z}{R_0 b}; \frac{T_e}{T_t}\right).$$

Отметим, что установленные законы подобия аналогичны существующим в гиперзвуковой аэродинамике обычного газа [70]. Это неудивительно, если вспомнить уже отмечавшееся сходство размерностей соответствующих уравнений.

Рассмотрим здесь некоторые примеры точных решений задач обтекания тел бесстолкновительной плазмой. Более подробные результаты можно найти в специальных монографиях и обзорах [67, 78]. Заметим, что для приближенного описания обтекания тел весьма эффективным оказывается простое нейтральное приближение [67].

#### 4.2. Обтекание полуплоскости

Рассмотрим обтекание бесконечной полуплоскости, расположенной ортогонально потоку плазмы. Направим ось  $y$  параллельно краю полуплоскости, а ось  $\rho$  — ортогонально ему (рис. 26). Очевидно, что функция распределения  $g$  не зависит от  $y$  и имеет вид

$$g(t, \rho, \mathbf{u}) = g_1(t, \rho, u_\rho) \exp(-\beta u_y^2).$$

Граничные же условия (200), (201) или (202) приводят к требованию, чтобы для  $t = 0$  было

$$g_1 = \begin{cases} \exp(-\beta u_\rho^2) & \text{при } \rho > 0, \\ g_1 = 0 & \text{при } \rho < 0. \end{cases} \quad (203)$$

Таким образом, в нашем случае уравнение (196) для  $g_1(t, \rho, u_\rho)$  принимает вид нестационарного одномерного уравнения для функции распределения ионов (5) с граничным условием (203), тождественным (17) при  $g_2 = 0$ . Но в таком виде задача совпадает с решенной в разд. 2.1 автомодельной задачей о расширении плазмы в вакуум. В частности, распределение концентрации частиц вблизи плоскости дается кривыми, приведенными на рис. 4, где

$$-\tau = \rho/t = \frac{\rho}{z} \sqrt{\frac{MV_0^2}{2T_e}}. \quad (204)$$

На рис. 26 построены в переменных  $\rho$  и  $t$  линии постоянной концентрации для различных значений  $N/N_0$ . В силу автомодельности движения эти линии являются прямыми. Сзади полуплоскости ионы сильно ускорены электрическим полем (30). Их функция распределения при  $\tau \gg 1$  близка к монохроматической по скорости (см. рис. 5)\*.

Отметим, что реально ионосферная плазма содержит смесь ионов различной массы, в основном ионов кислорода  $O^+$  и водорода  $H^+$ .

\* При больших значениях  $\tau \gg b$  уравнение (196) неприменимо. Действительно, в этом случае  $|\rho| \gg bt$ , т. е.  $r_\perp \gg z$  и нельзя пренебрегать производной  $d\phi/dz$  по сравнению с  $d\phi/dr_\perp$ , а также полагать  $v_z \approx V_0$ , как это делалось при выводе уравнения (196). Более точное решение задачи показывает, что при больших  $\tau$  под действием электрического поля существенно уменьшается скорость  $v_z$ ; она может даже изменить знак: ионы как бы увлекаются телом [68].

Обтекание полуплоскости плазмой, содержащей смесь ионов, описывается автомодельными решениями, рассмотренными в разд. 2.4. В зоне большого разрежения, т. е. при больших  $\tau \gg 1$ , главную роль играют ионы водорода, даже если концентрация их в невозмущенной плазме была невелика. При этом они значительно ускоряются электрическим полем. Заметим также, что взаимодействие потоков ионов разной массы  $O^+$  и  $H^+$  может приводить к возбуждению ионно-звуковых волн [7].

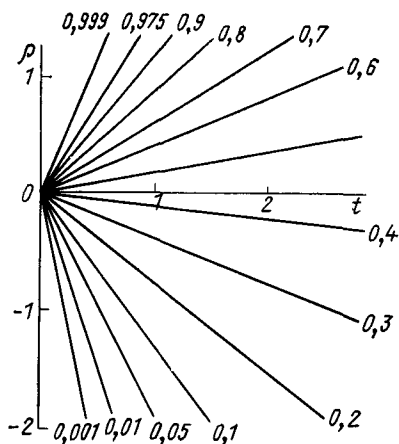


Рис. 26. Распределение плотности плазмы при обтекании полуплоскости. Возле кривых указаны значения  $N/N_0$

Полученное решение задачи об обтекании полуплоскости позволяет записать граничное условие (202) в новом виде, устранив тем самым сингулярность в уравнении (196) при  $t \rightarrow 0$ . Рассмотрим точку  $\rho_0$  контура максимального сечения тела и введем координаты  $\eta$  по касательной и  $\xi$  по нормали к контуру:  $\xi = -n_1(\rho - \rho_0)$ . При малых  $t$  и  $\xi$  кривизна контура не существенна и задача сводится к обтеканию полуплоскости. Поэтому граничное условие (202) при  $t \rightarrow +0$  можно переписать в виде:

$$g(\rho, u) = \exp(-\beta u_\eta^2) g_a(\tau, -u_\xi),$$

при  $\rho \approx \rho_0, t \rightarrow +0, (205)$

где  $\tau = n_1(\rho_0 - \rho)/t$ ,  $\rho_0$  — точка на контуре максимального сечения тела,  $n_1$  — направление внешней нормали к контуру,  $u_\xi$  и  $u_\eta$  — нормальная и тангенциальная компонента скорости,  $g_a(\tau, u)$  — автомодельная функция распределения ионов, описывающая обтекание полуплоскости. При  $t \rightarrow 0$  граничное условие (205) совпадает с (202). Однако уравнение (196) с граничным условием (205) уже не содержит сингулярностей.

### 4.3. Обтекание закругленного края тела

Как уже отмечалось, всякое не слишком вытянутое тело можно в первом по  $1/b$  приближении рассматривать вблизи края как полуплоскость и в этом смысле результаты предыдущего раздела справедливы вблизи края любого тела. Можно, однако, построить и более точное решение, справедливое вблизи края тела с учетом его закругленности. Соответствующие поправки будут тем больше, чем больше радиус кривизны поверхности тела.

Рассмотрим плоскую задачу, т. е. обтекание цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси  $y$ . Контур тела в плоскости  $\rho, t$  может быть произволен. Как и ранее, примем тело полубе-

сконечным, т. е. неограниченным, например, в направлении оси  $\rho < 0$ . Отметим, однако, что получаемые при этом результаты справедливы и для ограниченного тела вблизи его поверхности, когда несущественны частицы, обогнувшие другой край тела.

Для такой задачи решение уравнения (196) с граничным условием (200) имеет вид простой волны, т. е. совпадает с построенным в начале разд. 2.2. Иными словами, функция распределения по-прежнему является автомодельной  $g = g_a(u, \tau)$ , а концентрация ионов определяется той же формулой (12), но связь  $\tau$  с  $\rho$  и  $z$  имеет более сложный вид (43):

$$-\rho = \tau t + P(\tau). \quad (206)$$

Функцию  $P(\tau)$  следует определить из граничных условий. Эти условия согласно (200) можно записать как

$$g = 0 \text{ при } u > d\rho_0(t)/dt,$$

где  $\rho = \rho_0(t)$  — уравнение контура тела в плоскости  $\rho, t$ . Автомодельная функция  $g_a$  (см. рис. 5) обладает свойством  $g_a = 0$  при  $u < \tau$ . Поэтому граничное условие будет выполнено, если равенство  $d\rho_0/dt = \tau$  будет соблюдено на поверхности, т. е. при  $-\rho_0(t) = \tau t + P(\tau)$ . Последние два равенства выражают в параметрическом виде (параметр  $t$ ) функцию  $P(\tau)$  через уравнение границы  $\rho_0(t)$ . После этого уравнение (206) определяет в каждой точке  $\rho$  и  $t$  значение  $\tau$ , а следовательно, и  $g_a(u, \tau)$ .

Указанную процедуру очень просто произвести геометрически. Для этого достаточно в каждой точке контура  $\rho_0(t)$  провести касательную в сторону  $t > 0$  (рис. 27). На этих касательных функция распределения имеет значения  $g_a(\tau, -u)$ , где  $\tau$  — тангенс угла наклона касательной к оси  $t$ . На рис. 27 изображены линии постоянной концентрации ионов при обтекании кругового цилиндра ( $b = 8, \beta = 1$ ). В этом случае

$$P(\tau) = -(1 + \tau^2/b^2)^{1/2} + 1.$$

Отсюда видно, что при  $t \gg b^{-2/3}$  имеем  $\tau \approx -\rho/t$ . Тот же результат мы получим, заменив тело бесконечно тонкой пластинкой. Это означает, что на достаточно большом расстоянии от поверхности позади тела его точная форма несущественна, а важно лишь максимальное сечение (ср. рис. 26 и 27). Мы получили, таким образом, область применимости граничного условия (202).

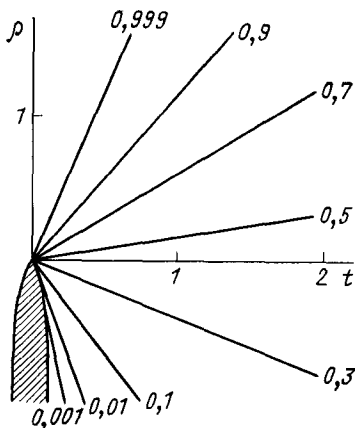


Рис 27. Распределение плотности плазмы при обтекании закругленного края тела. Возле кривых указаны значения  $N/N_0$

#### 4.4. Обтекание диска

Рассмотрим теперь задачу об обтекании круглого диска радиуса  $R_0$  потоком плазмы, движущимся перпендикулярно плоскости диска. Как ясно из результатов разд. 4.1, эта задача в действительности имеет весьма общее значение. Таким диском можно приближенно заменить любое тело вращения, если его длина  $R_z$  не слишком велика,  $R_z \sqrt{2T_e/MV_0^2} \ll R_0$ . Результаты, полученные для диска, будут справедливы и для такого тела на достаточном расстоянии от него. В частности, к задаче о диске сводится картина обтекания тела вращения с плоской задней стенкой.

Ввиду осевой симметрии задачи нам будет необходимо переписать уравнение (196) в цилиндрических координатах  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $u_\rho$  и  $u_\varphi$  ( $u_\rho$  — проекция скорости  $\mathbf{u}$  на направление  $\rho$ ,  $u_\varphi$  — проекция  $\mathbf{u}$  на перпендикулярное к  $\rho$  направление).

При этом функция распределения фактически не будет зависеть от  $\varphi$ , а вместо  $u_\varphi$  следует ввести переменную  $m = \rho u_\varphi$ , имеющую смысл безразмерной проекции момента импульса иона на ось  $z$ . При этом  $m$  является интегралом движения и будет входить в уравнение лишь в качестве параметра.

Для преобразования уравнения (196) к новым переменным заметим, что оно имеет вид  $dg/dt = 0$ , причем производные от  $u$  и  $\rho$  по  $t$  определяются уравнениями Гамильтона с гамильтоновой функцией:

$$H = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} \psi(\rho) = \frac{1}{2} \left[ u_\rho^2 + \frac{m^2}{\rho^2} + \psi(\rho) \right].$$

Соответствующие уравнения для  $d\rho/dt$  и  $du_\rho/dt$  имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_\rho} = u_\rho, \quad \frac{du_\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{m^2}{\rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (207)$$

Дифференцируя  $g$  и учитывая (207), получаем окончательно уравнение (196) в новых переменных

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u_\rho \frac{\partial g}{\partial \rho} + \left( \frac{m^2}{\rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial g}{\partial u_\rho} = 0. \quad (208)$$

Отметим, что (207) являются уравнениями характеристик для (208). Потенциал  $\psi$  определяется соотношением

$$\psi = \ln n, \quad n(\rho, t) = \frac{\beta}{\pi \rho} \int g du_\rho dm. \quad (209)$$

Граничные условия для (208) согласно (205) имеют вид

$$g = \exp(-\beta m^2) g_a \left( \frac{1-\rho}{t}, -u_\rho \right) \text{ при } t \rightarrow +0, |1-\rho| \ll 1, \quad (210)$$

где  $g_a(\tau, u)$  — решение автомодельного уравнения, полученное в разд. 2.1. При  $t, \rho \rightarrow \infty$ :  $g \rightarrow \exp[-\beta(u_\rho^2 + m^2/\rho^2)]$ .



Рассмотрим решение уравнения (208) для достаточно малых значений  $t$  [68]:

$$t = \frac{z}{R_0} \sqrt{\frac{2T_e}{Mv_j^2}} \ll 1. \quad (211)$$

Отметим, что для быстро движущегося тела область (211) оказывается достаточно большой, причем (как видно уже из результатов разд. 4.2) именно в ней оказывается особенно существенным влияние электрического поля на движение ионов. При условии (211) решение удастся провести для всех  $\rho$ . Приходится, однако, отдельно рассматривать три области: 1)  $|1 - \rho| \ll 1$ ; 2)  $1 - \rho \gg t$ ,  $\rho \gg t$ ; 3)  $\rho \ll \sqrt{t}$ . Эти три области при условии (211) перекрываются (область 1) и 2) при  $1 \gg \rho \gg 1 - \rho \gg t$ , области 2) и 3) при  $\sqrt{t} \gg \rho \gg t$ . Поэтому, получив решение в каждой области, мы полностью решим задачу.

В области 1) решение, согласно (210), выражается через решение автомодельного уравнения  $g_a$ . При достаточно больших  $\tau = (1 - \rho)/t$  функция распределения ионов по скорости  $u_\rho$  монохроматизируется согласно разд. 2.1. Поэтому при  $1 - \rho > t$ ,  $\rho \approx 1$ :

$$\left. \begin{aligned} g &= \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta m^2) n \delta(u_\rho - \bar{u}), \\ n &= C(\beta) \exp(-\sqrt{2}(1 - \rho)/t), \quad \bar{u} = -((1 - \rho)/t + 1/\sqrt{2}); \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

здесь константа  $C(\beta)$  определяется асимптотикой функции  $g_a$  [см. (36)].

В областях 2) и 3) начинает сказываться цилиндрический характер задачи. Это проявляется в наличии в кинетическом уравнении (208) «центробежной силы»  $m^2/\rho^3$  и множителя  $1/\rho$  в интеграле (209) для  $n$ . Эти члены не могут изменить  $\delta$ -образный характер функции распределения, но изменяют ее зависимость от  $\rho$  и  $t$ . В соответствии с этим будем в этих областях искать  $g$  в виде

$$g = h(t, \rho, m) \delta(u_\rho - u(t, \rho, m)) \quad (213)$$

[точнее говоря, в области 3) из-за появления ионов, отраженных от центробежного потенциала, функция распределения имеет вид суммы двух членов вида (213)].

Подставляя (213) в (208) и интегрируя по  $du_\rho$ , получаем «уравнение непрерывности» для  $h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u})}{\partial \rho} = 0. \quad (214)$$

Далее, умножим (208) на  $u_\rho$  и также проинтегрируем. В результате получим второе уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \rho} (h\bar{u}^2) - \left( \frac{m^2}{\rho^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) h = 0,$$

или, преобразуя его с учетом (214),

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^3} = 0. \quad (215)$$

Потенциал  $\psi$  связан с  $\hbar$  формулой

$$\psi = \ln n, \quad n = \frac{\beta}{\pi \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \hbar dm. \quad (216)$$

Рассмотрим теперь область 2). Легко понять, что в этой области центробежная сила  $m^2/\rho^3$  несущественна. Это связано с тем, что скорость  $\bar{u}$  по порядку величины равна  $(1 - \rho)/t$  [это будет показано далее; см. (219)]. Поэтому кинетическая энергия  $\bar{u}^2/2$  ионов при  $\rho \gg t$  много больше центробежного потенциала  $m^2/\rho^2$ . Если пренебречь в (215) центробежной энергией, уравнения перестают зависеть от  $m$ . Поэтому зависимость  $g$  от  $m$  будет такой же, как и у функции (212), в которую (213) должна переходить при условии  $\rho \rightarrow 1$ . Иными словами,

$$g = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp(-\beta m^2) \rho n \delta(u_\rho - \bar{u}) \quad (217)$$

[согласно (209)  $n$  — концентрация ионов]. Для  $n$  получается система уравнений, которая, как и должно быть, совпадает с уравнениями изотермической гидродинамики в полярных координатах:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho n \bar{u}) = 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} = -\frac{1}{2n} \frac{\partial n}{\partial \rho}. \quad (218)$$

Представляя  $\ln n$  в виде ряда по степеням  $m$ ,

$$\ln n = a_{-1}/t + a_0 + a_1 t + \dots$$

и аналогично для  $\bar{u}$ , легко убеждаемся, что с точностью до членов порядка  $t$  решение имеет вид

$$n = (C(\beta)/\rho) \exp(-\sqrt{2}(1-\rho)/t), \quad \bar{u} = -((1-\rho)/t + 1/\sqrt{2}), \quad (219)$$

отличаясь от (212) лишь множителем  $1/\rho$  в  $n$ . [Постоянные в решении выбраны так, чтобы при  $\rho \rightarrow 1$  (219) переходило в (212)].

Отметим также, что, умножив функцию (210) на  $1/\rho$ , мы получим решение, которое автоматически пригодно и в области 1), и в области 2). Это совершенно естественно, так как формула (219) учитывает просто геометрическое сжатие контура начального круга при движении частиц к оси цилиндра. Кроме того, производя оценку различных членов в уравнениях (218) с учетом конкретного вида формул (219), можно убедиться в том, что во всей области 2) электрическое поле не влияет на движение ионов. Поэтому те же формулы можно было бы получить, рассматривая свободное движение ионов и требуя, чтобы решение

переходило в автомодельное на границе. В этом смысле можно вместе рассматривать области 2) и 1).

Решение в области 3) при малых  $\rho$  и  $t$  можно найти разложением в ряды искомых функций  $\ln h$  и  $\bar{u}$ . Опуская вычисления, приведем здесь лишь результат расчета (см. [71]):

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\frac{1-\rho}{t} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{t} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 t^2}{\rho^2}} \right), \\ h_1 &= \frac{\sqrt{\pi} C(\beta)}{\sqrt{\beta}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - m^2 t^2}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{t} + \frac{1}{t} \sqrt{2(\rho^2 - m^2 t^2)} - \beta m^2 \right] \\ &\quad \text{при } m^2 t^2 < \rho^2; \\ \bar{u}_2 &= \frac{1+\rho}{t} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{t} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 t^2}{\rho^2}} \right), \\ h_2 &= \frac{\sqrt{\pi} C(\beta)}{\sqrt{\beta}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - m^2 t^2}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{\sqrt{2}}{t} - \frac{1}{t} \sqrt{2(\rho^2 - m^2 t^2)} - \beta m^2 \right] \\ &\quad \text{при } m^2 t^2 < \rho^2 \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

( $h_1 = h_2 = 0$  при  $m^2 t^2 > \rho^2$ ); здесь  $\bar{u}_1$ ,  $h_1$ , и  $\bar{u}_2$ ,  $h_2$  соответственно описывают два потока, один из которых идет к центру, а другой — от центра диска. Второй поток создается частицами, идущими от противоположного края диска; при  $\rho \gg t$ , как ясно непосредственно из формул (220), концентрация ионов во втором потоке экспоненциально мала по сравнению с концентрацией в первом потоке. Поэтому вдали от центра диска [в областях 1) и 2)] второй поток можно не учитывать. Функция распределения  $g$  предстает, таким образом, в виде суммы двух членов, определяемых формулами (213), (220). Интегрируя ее согласно (216), находим концентрацию ионов

$$n = 2 \sqrt{\pi/\beta} C(\beta) \frac{1}{t} \exp \left( -\frac{\sqrt{2}}{t} \right) I(\rho/t), \quad (221)$$

$$I(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(-\beta \zeta^2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \zeta \cos \theta) d\theta.$$

График функции  $2\sqrt{\pi\beta}I(\zeta)$  для различных значений  $\beta$  представлен на рис. 28. При больших значениях  $\zeta = \rho/t \gg 1/\sqrt{\beta}$

$$I(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta}\zeta} \exp(\sqrt{2}\zeta)$$

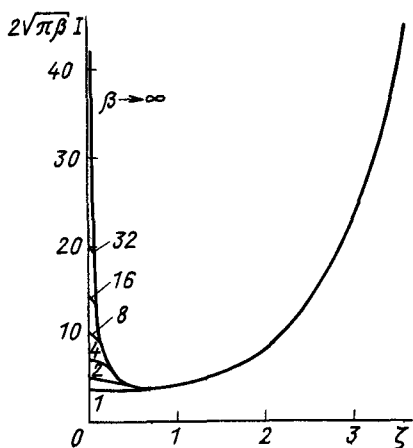


Рис. 28. Распределение плотности плазмы по радиусу при обтекании диска

Из рис. 28, 29 и формул (221), (222) видно, что при  $\beta \leq 1$  концентрация ионов  $n$  монотонно растет с ростом  $\rho$ . При  $\beta > 1$  возникает уплотнение вблизи оси  $\rho = 0$ ; величина его нарастает пропорционально  $\sqrt{\beta}$  (при  $\beta \gg 1$ ). Минимальное значение  $n(\rho)$  при  $\beta \gg 1$  определяется формулой (222) (см. рис. 28); при этом  $\rho_{\text{мин}} = t/\sqrt{2}$ . Переходя с помощью (195) к обычным переменным, видим, что линия минимума концентрации отходит от оси  $\rho = 0$  под углом  $\theta_{\text{мин}} = \sqrt{T_e/MV_0^2}$ . Иначе говоря, при  $\beta \gg 1$  на конусе с раствором  $\theta = \theta_{\text{мин}} = \sqrt{T_e/MV_0^2}$  воз-

и формула (221) для  $n$  совпадает с (219). Тепловой разброс по моментам  $m$  при  $\rho \gg t$  несуществен. При  $\zeta \ll 1/\sqrt{\beta}$  он, напротив, играет определяющую роль; здесь

$$I(\zeta) = 1 - (\beta - 1) \frac{\zeta^2}{2} + \left( \frac{3}{2} \beta^2 - \beta + \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta^4}{8} - \dots \quad (222)$$

Отсюда видно, что на оси за диском ( $\rho \rightarrow 0$ ) концентрация ионов принимает конечное значение, зависящее от  $t$  и  $\beta$  и определяемое тепловым движением ионов.

Поверхности постоянной концентрации ионов в ближней области позади диска, определенные формулами (212), (219), (221), представлены на рис. 29.

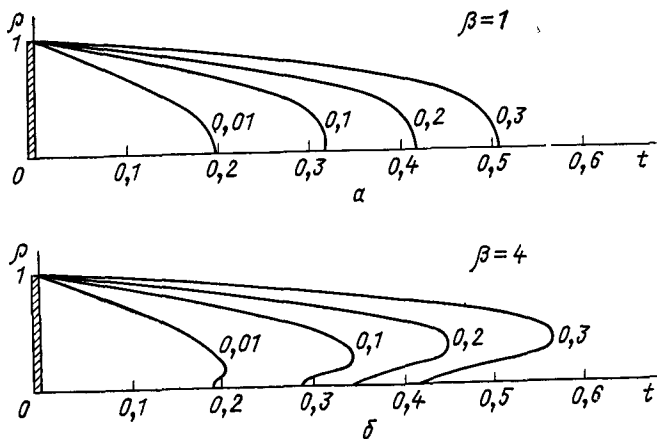


Рис. 29. Распределение плотности плазмы за диском. Возле кривых указаны значения  $N/N_0$

мушения концентрации максимальны. Этот конус аналогичен, следовательно, конусу Маха в обычной газодинамике. Эффект такого же типа, как показано в [5], имеет место и на больших расстояниях позади движущегося тела.

#### 4.5. Обтекание тела произвольной формы

Как показывает проведенный в предыдущем разделе расчет, при малых значениях  $t \ll 1$  электрическое поле  $\partial\phi/\partial\rho$  оказывает существенное влияние на движение ионов только в области 1), близкой к границе диска:  $|1 - \rho| \ll 1$ . Это вполне понятно. Действительно, конечная сила не может за малое время  $t \rightarrow 0$  заметно повлиять на скорость, а следовательно, и на концентрацию ионов. Поэтому при  $t \rightarrow 0$  электрическое поле может быть существенно лишь в области, где  $\partial\phi/\partial\rho$  велико, т. е. в области сингулярности вблизи границы тела. Но действие поля в этой области уже учтено в автомоделном решении при переходе от граничных условий (202) к условиям (205). Таким образом, при вычислении функции распределения и концентрации ионов в ближней области позади тела ( $t \ll 1$ ) можно рассматривать ионы как свободно летящие частицы, удовлетворяющие условию (205) при  $t \rightarrow +0$ . Это позволяет весьма просто найти функцию распределения ионов при  $t \ll 1$  позади тела, имеющего произвольное гладкое максимальное сечение. Действительно, для свободно летящих частиц, как известно (9)

$$f(t, \rho, \mathbf{u}) = f_0(0, \rho - \mathbf{u}t, \mathbf{u}), \quad (223)$$

где  $f_0(0, \rho_0, \mathbf{u})$  — начальная функция распределения. Она определена в нашем случае граничным условием (205). Используя его, получаем из (223) простое выражение для функции распределения ионов:

$$g(t, \rho, \mathbf{u}) = g_a\left(\frac{\mathbf{n}_1(\rho_0 - \rho)}{t}, -u_\xi\right) \exp(-\beta u_\eta^2),$$

где  $\rho_0(s)$  — точка на контуре тела,  $\mathbf{n}_1$  — нормаль к контуру в точке  $\rho_0(s)$ ;  $u_\xi$  и  $u_\eta$  — компоненты скорости в направлении нормали и касательной к контуру в точке  $\rho_0$ . Интегрируя функцию распределения по скорости  $\mathbf{u}$ , можно определить концентрацию ионов. Учитывая монохроматизацию функции  $g_a$  (212), нетрудно проинтегрировать по  $du_\xi$ . Переходя, кроме того, от интегрирования по  $du_\eta$  к интегрированию по длине контура  $ds$ , получаем в области позади тела ( $\rho_\xi/t > 1$ )

$$n(\rho, t) = \frac{C(\beta) \sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi} t} \oint ds \exp(-\sqrt{2} \rho_\xi/t - \beta \rho_\eta^2/t^2), \quad (224)$$

где  $\rho_\xi$  и  $\rho_\eta$  — компоненты вектора  $\rho_0 - \rho$  по нормали  $\mathbf{n}_1$  и касательной к контуру сечения тела в точке сечения  $\rho_0(s)$ ;  $ds$  — элемент длины контура. В частности, если сечение тела — круг радиуса 1, то  $\rho_\xi = 1 - \rho \cos \theta$ ,  $\rho_\eta = \rho \sin \theta$ ,  $ds = d\theta$  и формула (224) переходит в (221).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1964.
2. Гуревич А. В. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 953.
3. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
4. Gurevich A. V., Pitaevskii L. P. «Progr. Aerospace Sci.», 1975, v. 16, p. 227.
5. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. «Геомagnetизм и астрономия», 1964, т. 4, с. 817.
6. Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 49, с. 647.
7. Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 63, с. 516.
8. Korn P., Marshall T. C., Schlesinger S. P. «Phys. Fluids», 1970, v. 13, p. 517.
9. Hendel H. W., Reboul T. «Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 360.
10. Плютто А. А., Рыжков В. Н., Капин А. Т. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 494.
11. Тюлина М. А. «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 511.
12. «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 149. Auth.: N. K. Anderson et al.
13. «Журн. техн. физ.», 1969, т. 39, с. 1694. Авт.: Ю. А. Быковский и др.
14. Ландау Л. Д. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1946, т. 16, с. 574.
15. Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 54, с. 891.
16. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 56, с. 1778.
17. Auer P. L. «J. Appl. Phys.», 1960, v. 31, p. 2096; Rynn N. «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 165.
18. Гуревич А. Ю., Салимов Р. А., Бучельникова Н. С. «Теплофизика высоких температур», 1969, т. 7, с. 852.
19. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 1540. Авт.: Ю. Богашенко, А. В. Гуревич, Р. А. Салимов, Ю. А. Эйдельман; «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 728. Auth.: S. A. Andersen, V. O. Jensen, P. Michelsen, P. Nielsen.
20. Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 2155.
21. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 865.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958.
23. O'Neil T. «Phys. Fluids», 1965, v. 8, p. 2255.
24. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 7, М., Атомиздат, 1973, с. 3.
25. Forslund D. W., Shonk C. K. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 25, p. 1702.
26. Goldenbaum G. C., Gerber K. A. «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1289.
27. Jones R. «Phys. Lett. A», 1977, v. 62, p. 493.
28. Гефтер В. М. «Прикладная матем. и техн. физ.», 1970, № 1, с. 32.
29. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. Происхождение космических лучей. М., Изд-во АН СССР, 1963.
30. Вайнштейн Л. А. Сборник научных трудов. Т. X. М., «Советское радио», 1948.
31. Crow J. E., Auer P. L., Allen J. E. «J. Plasma Phys.», 1975, v. 14, part 1, p. 65.
32. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. В кн.: Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 268.
33. Korteweg D. J., de Vries G. «Philos Mag.», 1895, v. 39, p. 422.
34. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М., «Мир», 1977.
35. Кадошцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., «Наука», 1976.
36. Gardner C. S., Morikawa G. K. Courant Inst. of Mathem. Sci. Rep., NYO 9082, 1960.
37. Zabusky N. J. In: Proc. Conf. on Mathem. Models in Physics. Ed. S. Drobot, New-York, Prentice Hall, 1963, p. 99.
38. Zabusky N. J., Kruskal M. D. «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 240.
39. «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1095. Auth.: C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.

40. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. «Успехи физ. наук», 1971, т. 103, с. 193; «Phys. Lett. A», 1967, v. 20, p. 798.
41. Whitam G. B. «Proc. Roy. Soc. A», 1965, v. 283, p. 238.
42. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 65, с. 590.
43. Hopf E. «Comm. Pure Appl. Math.», 1950, v. 3, p. 201.
44. Washini H., Taniuti T. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 996.
45. Ikezi H. «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 1672.
46. Taylor R. J., Baker D. R., Ikezi H. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 206.
47. Ikezi H., Taylor R. J., Baker D. R. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 25, p. 11.
48. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. В кн.: Тр. 12-й международной конф. по явлениям в ионизованных газах. Т. I. Эндховен, 1975, с. 273.
49. Березин Ю. А., Карпман В. И. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 1839.
50. Мещеркин А. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 71, с. 1025.
51. Алиханов С. Г., Белан В. Г., Сагдеев Р. З. «Письма ЖЭТФ», 1968, т. 7, с. 405.
52. Сагдеев Р. З. В кн.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 20.
53. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
54. Alexeff I., Eastbrook K., Widner M. «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 2355.
55. Mason R. J. «Phys. Fluids», 1970, v.13, p. 1042; 1971, v. 14, p. 1943; 1972, v. 15, p. 845.
56. Sakanaka P. H., Chu C. K., Marshall T. C. «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 611.
57. Eastbrook K., Widner M., Alexeff I. «Phys. Fluids», 1971, v. 14, N 8.
58. Алиханов С. Г., Сагдеев Р. З., Чеботаев П. З. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 57, с. 1565.
59. Mason R. J. «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 1162.
60. Sakanaka P. H. «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 1323.
61. Alexeff I., Jones W. D., Widner M. «Phys. Fluids», 1970, v. 13, p. 1519.
62. Alexeff I., Jones W. D., Longren K. «Phys. Rev. Lett», 1968, v. 21, p. 878.
63. Doucet H. J., Gresillon D. «Phys. Fluids», 1970, v. 13, p. 773 .
64. Phys. Lett. A», 1968, v. 27, p. 79. Auth.: Y. Yamashita, H. Ikezi, N. Sato, N. Takahashi.
65. «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 185. Auth.: K. Eastbrook, I. Alexeff, W. D. Jones, K. E. Longren.
66. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Изд. 2-е. М., «Наука», 1963.
67. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. М., «Наука», 1964.
68. Гуревич А. В., Питаевский Л. П., Смирнова В. В. «Успехи физ. наук», 1969, т. 99, с. 3.
69. Каминский М. Атомные и ионные столкновения на поверхности металла. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
70. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959
71. Гуревич А. В., Димант Я. С. «Геомагнетизм и аэрономия», 1975, т. 15, с. 221.

# ЦИКЛОТРОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ ЗЕМЛИ

П. А. Беспалов, В. Ю. Трахтенгерц

---

## Введение

Коллективные явления в магнитосферной плазме играют фундаментальную роль, во многом определяя аномальные коэффициенты переноса, турбулентную вязкость и электропроводность во внешней магнитосфере, динамику энергичных частиц радиационных поясов, энергообмен между ионосферой и магнитосферой. Циклотронная неустойчивость (ЦН) служит одним из проявлений таких коллективных эффектов во внутренней магнитосфере. ЦН регулирует максимальные потоки энергичных частиц, захваченных в геомагнитную ловушку, определяет их угловые и энергетические спектры, является источником различных типов электромагнитных НЧ-излучений в магнитосфере.

Первая работа по ЦН радиационных поясов появилась в 1963 г. [1]. В ней циклотронная неустойчивость была предложена в качестве источника электромагнитных очень низкочастотных (ОНЧ) шумов в магнитосфере и механизма сброса энергичных электронов радиационных поясов (РП) в атмосферу. Эта работа опиралась на основополагающую статью Р. З. Сагдеева и В. Д. Шафранова [2] по линейной теории электромагнитной неустойчивости анизотропной плазмы. Далее в [3] были предприняты попытки построить квазилинейную теорию ЦН\*. Существенное развитие теория циклотронной неустойчивости РП получила в работах [5—17] и затем в [18—25].

Уже около 20 лет продолжают экспериментальные исследования проявлений ЦН в магнитосфере, и сейчас можно подвести определенный итог, с большой степенью достоверности очертив круг явлений, связанных с ЦН.

Теория ЦН является ярким примером плодотворного использования теории слаботурбулентной плазмы, с одной стороны, и критерием проверки этой теории — с другой. Именно в условиях РП почти идеальным образом реализуются критерии применимости классической теории слабой турбулентности [26, 27]. Это обеспечивают большие размеры и высокая степень однородности геомагнитной ловушки (отношение характерного масштаба изменения параметров среды  $a$  к длине волны  $\lambda$ , определяющей турбулентность, составляет  $a/\lambda \sim$

---

\* Первые оценки квазилинейных эффектов на циклотронных волнах содержатся в работе А. А. Веденова, Е. П. Велихова и Р. З. Сагдеева [4].



$\sim 10^3 \div 10^4$ ), слабый уровень турбулентности (параметр слабой турбулентности для циклотронных волн в магнитосфере  $\epsilon/n_p m v_{ph}^2 \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ ,  $\epsilon$  — плотность энергии волн,  $n_p$  — концентрация плазмы,  $v_{ph} = \omega/k$  — фазовая скорость циклотронных волн) и сильная частотная дисперсия колебаний.

Наряду с этим геомагнитная ловушка как реальный объект поставила перед теорией ряд новых задач, обнаружив исключительное разнообразие турбулентных явлений в реальной плазме. К числу таких задач относятся: формулировка квазилинейных уравнений с учетом неоднородности магнитного поля, взаимодействие различных резонансов в магнитной ловушке (циклотронного, баунс-резонанса, а также резонанса магнитной силовой трубки в целом), эффекты «запирания» магнитных пробок в условиях сильной диффузии по питч-углам, формирование пучков частиц и волн и различные триггерные явления в неоднородном магнитном поле и ряд других. Большинство указанных выше вопросов и будут предметом дальнейшего обсуждения. При этом мы ограничимся анализом ЦН электронных РП. Явления в протонном поясе во многом аналогичны, и в ряде случаев результаты для него можно получить простым изменением обозначений.

## § 1. Физические условия в геомагнитной ловушке

Структурные особенности магнитосферы играют важную роль в процессе возникновения и динамике циклотронной неустойчивости. Поэтому мы начнем с краткого обсуждения основных свойств геомагнитной ловушки.

**Основные параметры геомагнитной ловушки.** На рис. 1 приведена схема разреза магнитосферы плоскостью полуденного меридиана.

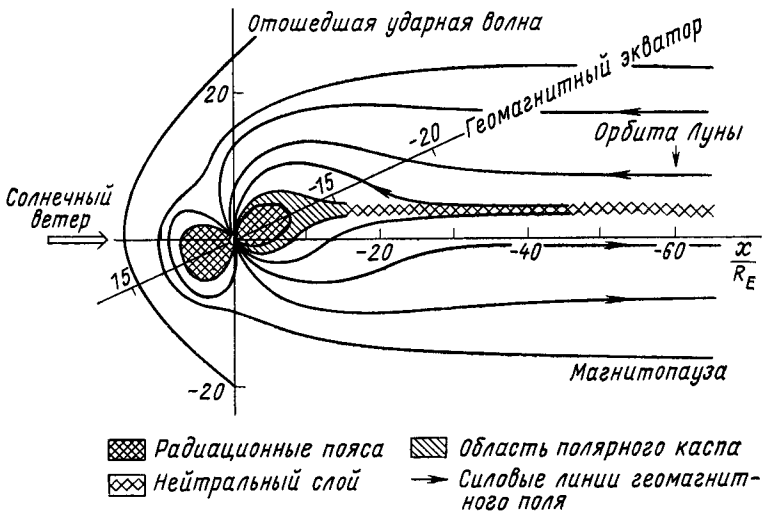


Рис. 1. Схема сечения магнитосферы Земли плоскостью полуденного меридиана

В процессе взаимодействия с солнечным ветром [28] формируется конвективная область магнитосферы, окружающая плотное внутреннее ядро — плазмосферу. На внешней границе плазмосферы, которая называется плазмопаузой, концентрация холодной плазмы меняется скачком на 1—2 порядка (рис. 2) [29]. В окрестности плазмопаузы при  $L \sim 4$  ( $L$  — параметр геомагнитной оболочки, характеризующий расстояние от центра Земли в земных радиусах) испытывает скачок и температура плазмы. Интересующая нас внутренняя область магнитосферы ( $1,2 < L \leq 7$ ) соответствует РП Земли [30]. Именно в этой области возникает большинство рассматриваемых в работе явлений.

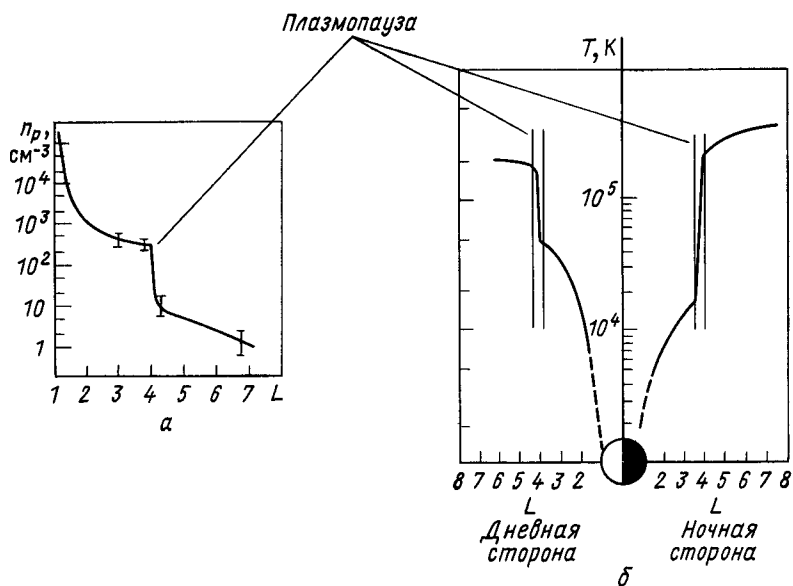


Рис. 2 Профили электронной концентрации (а) и температуры (б) в плоскости земного экватора

Во многих случаях магнитосферная плазма является двухкомпонентной. Дело в том, что между ионосферой, магнитосферой и солнечным ветром происходит постоянный обмен частицами и энергией. В результате наряду с холодной плазмой, параметры которой приведены на рис. 2, в магнитосфере присутствуют и надтепловые частицы. Свойства надтепловых частиц очень разнообразны. На малых высотах ( $L < 2$ ) и внутри плазмосферы эти частицы составляют малую долю полного числа частиц. За пределами плазмосферы относительная доля энергичных частиц быстро растет. Плазменный слой состоит практически только из горячей плазмы. С удалением от Земли существенно меняется энергия частиц. Так, если в РП энергия электронов  $\omega \gtrsim 40$  кэВ, а протонов  $\omega_i > 10^2$  кэВ, то в зоне авроральной радиации ( $6 < L < 10$ ) средняя энергия надтепловых частиц  $\omega \simeq 10$  кэВ, в плазменном слое  $\omega \simeq 0,1 \div 1$  кэВ. На рис. 3 приведены зависимости плотности потока

энергичных электронов и протонов  $S_L$  с энергией  $\omega > 40$  кэВ и  $\omega_i > 10^2$  кэВ от  $L$ . Максимумы этих распределений соответствуют внешним радиационным поясам. На рис. 4 представлена зависимость от  $L$  параметров  $\beta$  и  $\beta_i$ , определяющих отношение электронного и протонного газокINETического давления (обусловленного в основном надтепловыми частицами) к магнитному ( $\beta_\alpha = 8\pi P_\alpha/B^2$ ).

Другой важный набор параметров определяет собственные частоты магнитосферной плазмы. На рис. 5 приведены экваториальные профили электронной плазменной частоты  $\omega_{pL} = (4\pi n_{pL}e^2/m)^{1/2}$  и гиро-

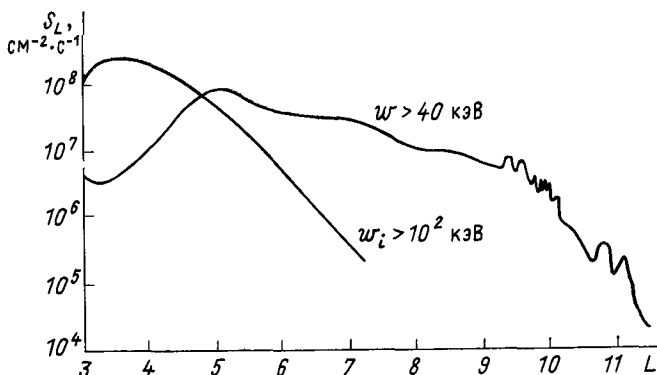


Рис 3 Плотности потоков электронов и протонов с энергией  $\omega > 40$  кэВ и  $\omega_i > 10^2$  кэВ вблизи РП

частоты  $\omega_{BL} = eB_L/mc$  (величины с индексом  $L$  относятся к экваториальной плоскости). Закон изменения геомагнитного поля в области РП близок к дипольному, для которого пробочное отношение  $\sigma = L^3 (4 - 3/L)^{1/2} \sim 10^2$ .

**Источники энергичных частиц.** В магнитосфере существуют постоянно действующие источники энергичных частиц, пополняющие РП. В магнитоспокойных условиях основным источником, по-видимому является перенос частиц поперек  $L$ -оболочек с границы во внутренние области магнитосферы. Этот перенос осуществляется в основном под действием крупномасштабных электромагнитных импульсов, возбуждаемых на границе магнитосферы (см. [30]).

Важную роль в движении и нагреве магнитосферной плазмы играет конвекция под действием крупномасштабного электрического поля, генерируемого солнечным ветром и направленного с утренней стороны магнитосферы на вечернюю. В процессе конвекции плазма переносится на более близкие  $L$ -оболочки, испытывая при этом бетатронное ускорение. В результате средняя энергия надтепловых электронов на утренней стороне магнитосферы существенно выше, чем в других областях.

В период магнитных бурь интенсивность источников резко возрастает. Одним из источников ускорения частиц при этом может служить импульс сжатия геомагнитного поля, соответствующий приходу

ударной волны от солнечной вспышки. В магнитовозмущенный период резко возрастает квазистатическое электрическое поле в магнитосфере, что приводит к приближению к Земле и нагреву внутреннего края плазменного слоя. Происходящее при этом резкое увеличение числа мягкоэнергичных частиц и уровня электромагнитной турбулентности способствует включению механизма турбулентного ускорения частиц [31].

Еще один мощный импульсный источник энергичных частиц действует на взрывной фазе суббури. Он связан с коллапсом геомаг-

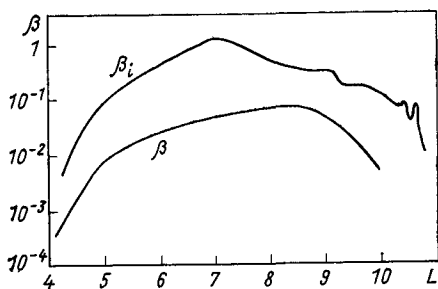


Рис. 4 Экваториальные профили зависимостей  $\beta$  и  $\beta_i$

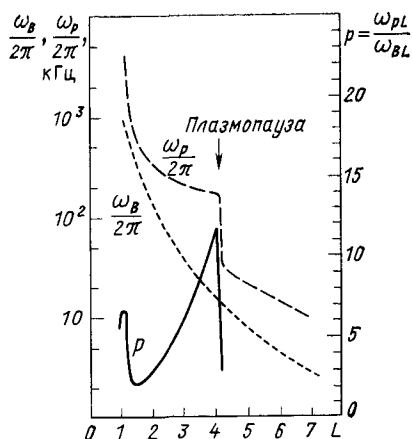


Рис. 5 Профили экваториальных распределений гирочастоты  $\omega_B$ , плазменной частоты  $\omega_p$  и параметра  $p$

нитного поля в области ночного каспа (см. рис. 1), возникающим в процессе пересоединения магнитных силовых линий в хвосте магнитосферы.

Таким образом, можно выделить стационарные источники быстрых частиц (конвекция, перенос поперек  $L$ -оболочек) и импульсные источники (внезапный импульс магнитного поля, взрывные явления суббури). Как будет видно ниже, свойства источников существенно отражаются на динамике циклотронной неустойчивости.

## § 2. Линейная теория циклотронной неустойчивости

**Циклотронная неустойчивость в неоднородной ловушке.** Ряд важных свойств циклотронного взаимодействия свистовых волн с энергичными частицами можно выявить из анализа линейной стадии ЦН. На линейной стадии обратное воздействие волн на частицы и взаимодействие волн не учитывается, а изменение плотности потока энергии волн в геометрико-оптическом приближении описывается уравнением переноса интенсивности [32]:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{n_W^2}{|\cos \chi|} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{I |\cos \chi|}{n_W^2} \right) = a + \eta I. \quad (2.1)$$

Здесь  $I$  — спектральная плотность потока энергии, отнесенная к единичному телесному углу вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , координата  $z$  отсчитывается вдоль группового пути распространения,  $\chi = (\widehat{\mathbf{k}}, \mathbf{v}_g)$ , квадрат показателя преломления ОНЧ-волн:

$$(k^2 c^2 / \omega^2) \equiv n_W^2 = \omega_p^2 / \omega (\omega_B |\cos \varphi| - \omega), \quad (2.2)$$

$\varphi = (\widehat{\mathbf{k}}, \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{v}_g = \partial \omega / \partial \mathbf{k}$  — групповая скорость,  $a$  — излучательная способность,  $\eta$  — коэффициент усиления волн. Уравнение (2.1) нужно решать совместно с граничными условиями на торцах ловушки при  $z = \pm l/2$ . Основные свойства линейной стадии неустойчивости характеризуются усилением  $\Gamma$  сигнала при однократном прохождении РП:

$$\Gamma(\omega) = \int_{-l/2}^{+l/2} \eta dz. \quad (2.3)$$

Усиление  $\Gamma$  как функция частоты качественно отражает зависимость спектра возбуждаемых ОНЧ-волн от степени анизотропии, концентрации плазмы и других параметров.

Общее выражение для коэффициента усиления ОНЧ-волн можно записать в виде [33]:

$$\eta = \frac{8\pi^3}{m v_g} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int G_{\mathbf{k}, s} \left( \frac{s \omega_B}{\omega v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) f d^3 v. \quad (2.4)$$

Здесь  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  — составляющие скорости частицы вдоль и поперек магнитного поля  $\mathbf{B}$ ,  $f$  — функция распределения электронов, нормированная на концентрацию горячей плазмы ( $\int f d^3 v = n$ ),  $k_{\parallel} = k \cos \varphi$ ,  $G_{\mathbf{k}, s}$  — мощность излучения свистов частицей на  $s$ -й гармонике гирочастоты  $\omega_B$  в интервал волновых векторов  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k})$ ,  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — номера гармоник гирочастоты. В типичных условиях магнитосферы, когда  $V = \omega_p^2 / \omega^2 \gg U \cos^2 \varphi = (\omega_B^2 / \omega^2) \cos^2 \varphi > 1$  выражение для  $G_{\mathbf{k}, s}$  имеет следующий вид [34]:

$$G_{\mathbf{k}, s} = \frac{e^2 \omega v_g |\cos \varphi|}{4\pi c^2 k} \left[ \frac{\omega_B}{k_{\perp} \cos \varphi} \left( s - \frac{n_W^2}{V \sqrt{V}} \sin^2 \varphi \right) J_{|s|} + \right. \\ \left. + v_{\perp} J'_{|s|} \right]^2 \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s \omega_B), \quad (2.5)$$

где  $J_s(\xi)$  — функция Бесселя  $s$ -го порядка действительного аргумента  $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$ ,  $J'_s = dJ_s / d\xi$ . В дипольном приближении, когда аргумент функции Бесселя

$$k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B \ll 1, \quad (2.6)$$

основной вклад в (2.5) дают лишь нулевая и первые гармоники, т. е.  $\eta = \eta_1 + \eta_{-1} + \eta_0$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} G_{k, \pm 1} &\simeq \frac{e^2 \omega v_g |\cos \varphi|}{16\pi c^2 k} (1 \pm \cos^{-1} \varphi)^2 v_{\perp}^2 \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} \mp \omega_B), \\ G_{k, 0} &= \left[ \frac{e^2 \omega v_g |\cos \varphi| \operatorname{tg}^2 \varphi}{4\pi k V (\sqrt{U} |\cos \varphi| - 1)} \right] \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}). \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Из (2.7) следует, что при достаточно малых углах  $\varphi$  ( $\varphi \ll 1$ ) вкладом от черенковского резонанса [35] ( $s = 0$ ) и резонанса на аномальном эффекте Доплера ( $s = -1$ ) можно пренебречь. Случай малых углов  $\varphi \ll 1$  важен еще и по той причине, что в магнитосфере часто возникают волноводы для ОНЧ-волн, обусловленные сильно вытянутыми вдоль магнитного поля крупномасштабными неоднородностями плотности холодной плазмы [36, 37]. В такие волноводы захватываются волны с  $\varphi \ll 1$ , которые преимущественно и усиливаются при многократном прохождении РП. Косые же волны ( $\varphi \sim 1$ ) из-за рефракции будут быстро покидать область неустойчивости.

В случае продольного распространения ( $\varphi = 0$ ) коэффициент усиления запишется следующим образом:

$$\eta = \frac{2\pi^3 e^2}{mc^2 k} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\perp}^2 \delta(\omega - kv_{\parallel} - \omega_B) \left( \frac{\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) f dv_{\perp}^2 dv_{\parallel}. \quad (2.8)$$

Вычислим  $\Gamma(\omega)$  для функции распределения вида:

$$f = C_A J_{\perp}^A \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_0^2} \right\}, \quad (2.9)$$

где  $C_A = n_L 2^A B_L^A / \pi^{3/2} \Gamma(A+1) v_0^{2A+3}$  — нормировочная константа,  $\Gamma(A+1)$  — гамма-функция,  $J_{\perp} = v_{\perp}^2 / 2B$  — первый адиабатический инвариант,  $v^2 = v_{\parallel}^2 + 2J_{\perp} B$ . Как показывают спутниковые данные по измерениям энергичных частиц, функция (2.9) при соответствующем подборе параметра анизотропии  $A$  и средней энергии довольно хорошо аппроксимирует реальное распределение частиц в РП. При этом распределение концентрации горячей плазмы вдоль ловушки определяется формулой:

$$n(z)/n_L = [B_L/B(z)]^A, \quad (2.10)$$

где  $n_L$  — плотность энергичных частиц в экваториальной плоскости ловушки.

Подстановка (2.9) в (2.8) дает следующее выражение для  $\eta$ :

$$\eta = \frac{4\pi^{3/2} e^2 n_L}{mc^2 v_0 k^2} [A\omega_B - (A+1)\omega] \exp \left\{ -\frac{(\omega_B - \omega)^2}{k^2 v_0^2} \right\}, \quad k > 0. \quad (2.11)$$

В дальнейших расчетах, где это понадобится, мы используем параболическую аппроксимацию геомагнитного поля:

$$B = B_L (1 + z^2/a^2), \quad (2.12)$$

где  $a^2 = (R_{EL})^2/4.5$ ,  $R_E$  — радиус Земли;  $L$  — параметр геомагнитной оболочки. Зависимость (2.12) хорошо описывает геомагнитное поле вблизи экваториальной плоскости, где и происходит большинство интересующих нас событий. Распределение концентрации холодной плазмы вдоль ловушки будем считать подобным распределению магнитного поля [37]:  $n_p/n_{pL} \simeq B/B_L$ .

Усиление  $\Gamma$  нетрудно вычислить по формуле (2.3) в двух предельных случаях, когда  $\beta_* \gg 1$  и  $\beta_* < 1$ :

$$\beta_* = \frac{\omega_{pL}^2 v_0^2}{\omega_{BL}^2 c^2} = \frac{1}{2} n_{pL} m v_0^2 \left( \frac{B_L^2}{8\pi} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

В первом случае  $\beta_* \gg 1$ , как это следует из (2.11), частотный максимум  $\Gamma(\omega)$  лежит в области низких частот  $\omega \ll \omega_{BL}$ . Используя это приближение и учитывая (2.12), найдем:

$$\Gamma(\omega) = \begin{cases} \frac{n_L a \omega_{BL}^{3/2}}{n_{pL} v_0 \beta_*^{1/2} \omega^{3/2}} [A(\beta_* \omega + 3\omega_{BL}) - 3(A+1)\omega], \\ \text{если } \omega > \beta_*^{-1} \omega_{BL}; \\ \frac{\pi n_L a}{\sqrt{2} n_{pL} v_{ph}} [A\omega_{BL} - (A+1)\omega] \exp\left\{-\frac{\omega_{BL}}{\beta_* \omega}\right\}, \\ \text{если } \omega < \beta_*^{-1} \omega_{BL}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $v_{ph} = c/n_w$ .

В случае  $\beta_* < 1$  показатель экспоненты в (2.11) относительно велик и быстро растет с ростом  $z$ . Поэтому при интегрировании (2.3) можно воспользоваться методом перевала. В результате будем иметь:

$$\Gamma(\omega) = \frac{\pi n_L a \omega_{pL}}{\sqrt{2} n_{pL} c} [A\omega_{BL} - (A+1)\omega] [\omega(\omega_{BL} + \omega/2)]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\omega_{BL}}{\beta_* \omega} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{BL}}\right)^3\right\}. \quad (2.15)$$

В качестве второго примера, интересного для приложений, возьмем функцию распределения в виде [24]:

$$f(J_{\perp}, J_{\parallel}) = C \delta(J_{\perp} - J_{\perp 0}) \exp\{-J_{\parallel}/J_{\parallel 0}\}. \quad (2.16)$$

Здесь  $J_{\parallel} = \oint v_{\parallel} dz = \pi a (v_{\parallel}^2 + 2 J_{\perp} B_L z^2/a^2) (2 J_{\perp} B_L)^{-1/2}$  — второй адиабатический инвариант, константа  $C = 2 N/\pi J_{\parallel 0} B_E$ ,  $N$  — полное число энергичных частиц в силовой трубке с сечением  $1 \text{ см}^2$  на уровне

атмосферы,  $B_E$  — магнитное поле на уровне атмосферы. Функция распределения (2.16) интересна в связи с двумя важными обстоятельствами. Она сохраняется при действии относительно длиннопериодных возмущений с  $T \gg T_b$  периода баунс-осцилляций частиц между магнитными пробками. Поэтому на ее примере просто проследить модуляцию ЦН гидромагнитными волнами соответствующих периодов (см. ниже). Кроме того, распределения частиц указанного вида (2.16) могут формироваться в период суббурь и быть ответственными за широкий класс ОНЧ-излучений типа «хоров».

Соответствующее (2.16) распределение концентрации вдоль силовой линии геомагнитного поля имеет вид:

$$\frac{n(z)}{n_L} = \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right) \exp\{-\pi z^2 (2J_{\perp 0} B_L)^{1/2} a^{-1} J_{\parallel 0}^{-1}\}. \quad (2.17)$$

Приближенное выражение для  $\Gamma$  в случае (2.16) при  $\beta_* < 1$  описывается формулой:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) = & \frac{\dot{N}}{n_{pL} B_E} \left(\frac{2\pi B_L p}{J_{\perp 0}}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega_{BL}}{\omega} - 1\right) [(p-1)\omega_{BL} - p\omega] \times \\ & \times \left[ \frac{\omega_{BL}}{\beta_* \omega} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{BL}}\right)^2 \left(2 + \frac{\omega}{\omega_{BL}}\right) + 1 \right]^{-1/2} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{p\omega_{BL}}{\beta_* \omega} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{BL}}\right)^3\right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $p = (\pi a / J_{\parallel 0}) (2J_{\perp 0} B_L)^{1/2}$ ,  $\beta_* = 2J_{\perp 0} B_L \omega_{pL}^2 / \omega_{BL}^2 c^2$ .

**Роль структурных особенностей магнитосферы.** Рассмотрим более подробно зависимость усиления  $\Gamma$  (2.14), (2.15) от основных параметров РП: энергии частиц ( $\beta_*$ ), степени анизотропии ( $A$ ) и концентрации холодной плазмы ( $n_{pL}$ )\*.

Из (2.15) следует, что усиление  $\Gamma$  положительно на достаточно низких частотах  $\omega < \omega_{\max}$ . При низкой энергии частиц ( $\beta_* < 1$ ) максимальная частота зависит только от анизотропии

$$\omega_{\max} = [A/(A+1)] \omega_{BL}. \quad (2.19)$$

Максимум усиления  $\Gamma$ , реализующийся при  $\beta_* < 1$  и  $\omega \ll \omega_{BL}$  на частоте

$$\omega_{\Gamma} = \beta_*^{-1} \left[ -1 - \frac{1}{2} A\beta_* + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} A\beta_*\right)^2 + 2A\beta_*} \right] \omega_{BL}, \quad (2.20)$$

равен

$$\Gamma_{\max} = \frac{\pi n_L a}{n_{pL} v_{ph} \sqrt{2}} (A\omega_{BL} - \omega_{\Gamma}) \exp\left\{-\frac{\omega_{BL}}{\beta_* \omega_{\Gamma}}\right\}. \quad (2.21)$$

\* Зависимость инкремента ЦН от этих величин изучена аналитически в работе [38], а в работе [39] результаты подтверждены расчетами на ЭВМ.



В случае  $\beta_* \gg 1$  соответственно получаем, что

$$\omega_{\Gamma} = \beta_*^{-1} \omega_{BL}, \quad (2.22)$$

а максимум усиления

$$\Gamma_{\max} = \frac{n_L a \omega_{pL} \beta_*^{1/2}}{n_{pL} c} (4,31 - 3,22 A^{-1} \beta_*^{-1}). \quad (2.23)$$

Из (2.20) и (2.22) следует, что с ростом концентрации основной плазмы максимум спектра волн смещается в сторону меньших частот. Зависимость усиления  $\Gamma$  от частоты при  $\beta_* < 1$  изображена на рис. 6.

**Модуляции интенсивности ОНЧ-излучения гидромагнитными волнами.** Для динамики ЦН характерна тесная связь ОНЧ-излучений

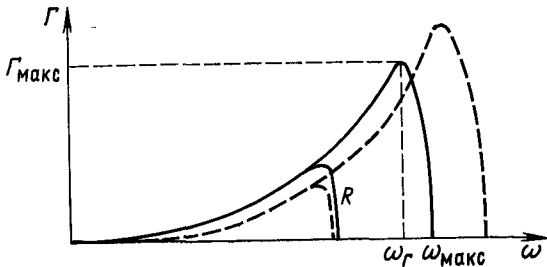


Рис 6 Зависимость усиления от частоты. Завал  $R$  может быть связан со срывом канального распространения волн (пунктиром показано влияние на усиление гидромагнитного возмущения с  $b > 0$ )

с гидромагнитными колебаниями в магнитосфере, часто наблюдаемая на эксперименте [40, 41]. Эта связь проявляется в глубокой периодической модуляции интенсивности ОНЧ-шумов и потоков выпадающих из РП электронов, тесно коррелирующих с гидромагнитными пульсациями соответствующих периодов.

Качественно эту связь легко понять, если учесть, что гидромагнитная волна модулирует степень анизотропии и число частиц, резонансных с ОНЧ-волнами. В итоге возникает модуляция коэффициента усиления ЦН, приводящая к значительному изменению уровня ОНЧ-шумов [15, 24, 25]. Вторая возможность связана с модуляцией условий распространения свистовых волн [42]. Ниже мы рассмотрим указанные эффекты в рамках линейной теории.

За основу возьмем функцию распределения (2.16), зависящую от адиабатических инвариантов. Как уже отмечалось, важное преимущество задания функции распределения в таких переменных состоит в том, что ее не меняют возмущения геомагнитной ловушки, период которых  $T \gg T_b$  — периода баунс-осцилляций энергичных электронов между зеркальными точками. В реальных условиях  $T_b \sim 1$  с, и это условие выполняется для квазипериодических ОНЧ-шумов (событий типа QR1, см. § 9).

Допустим сначала, что отражение ОНЧ-волн от ионосферы мало. Тогда стационарный спектр электромагнитных волн в линейном приближении определяется соотношениями (2.14) и (2.15). Найдем изменение интенсивности, вызываемое слабой гидромагнитной волной. Эта задача упрощается из-за того, что модуляция уровня электромагнитного сигнала, связанная с изменением условий распространения ОНЧ-волн в реальных условиях очень мала. В работе [24] показано, что этот эффект может иметь значение только на крутых участках спектра, где велика производная  $dI/d\omega$ . Таким образом, глубину модуляции интенсивности ОНЧ-сигнала можно вычислять, считая показатель преломления невозмущенным и учитывая только изменение усиления (2.3).

*Модуляция усиления.* Допустим, что гидромагнитное возмущение характеризуется продольным масштабом, большим средней амплитуды осцилляций частиц между зеркальными точками, и в вершине силовой трубки имеет пучность продольной ( $H$ -компоненты) компоненты магнитного поля  $b$ . В приближении прямых силовых линий в формулы для усиления (2.14), (2.15) входит модуль магнитного поля, и если у гидромагнитного возмущения нет продольной компоненты, то эффект модуляции будет очень слабый — квадратичный по амплитуде возмущения [15]\*. В данном случае гидромагнитное колебание меняет величины  $B_L$  и  $a$  (2.12) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_L &\rightarrow B'_L = B_L + b, \\ a^2 &\rightarrow a'^2 = a^2 \left[ 1 + \frac{b}{B_L} \left( 1 + \frac{1}{2} \kappa_{\parallel}^2 a^2 \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где  $\kappa_{\parallel}$  — продольное волновое число гидромагнитного возмущения. Под действием возмущения (2.24) с  $\kappa_{\parallel} a < 1$  в условиях  $p \gg 1$  и  $\omega_{BL}/\beta_* \omega \gg 1$  усиление (2.18) становится равным

$$\Gamma(\omega) = \frac{N\omega_{BL}\beta_*}{n_{pL}B_E} \left( \frac{\pi B_L \Delta}{J_{\perp 0}} \right)^{1/2} \left[ \left( p-1 - \frac{\omega}{\omega_{BL}} p \right) \left( 1 - \frac{b}{B_L} \Delta \right) + \frac{b}{B_L} (p-1) \right] \exp\{-\Delta\}, \quad \Delta = p\omega_B/\beta_* \omega. \quad (2.25)$$

Здесь учтено, что  $p$  и  $\beta_*$  не меняются под действием возмущения с  $b/B_L \ll 1$ ,  $\omega \ll \omega_{BL}$ . Из (2.25) следует, что на частотах

$$(p-1)p/[\beta_*(p-1)+p^2] < \omega/\omega_{BL} < (p-1)/p \quad (2.26)$$

изменения амплитуды гидромагнитной волны и усиление в фазе, а на более низких частотах

$$\omega/\omega_{BL} < [(p-1)p]/[\beta_*(p-1)+p^2] \quad (2.27)$$

\* В § 7 показано, что если учесть кривизну и продольную неоднородность магнитного поля, то модуляция  $\Gamma$  значительна и в случае альфвеновской волны, у которой  $\mathbf{b} \perp \mathbf{B}$ .

— в противофазе. Причем в первом случае модулируется в основном анизотропия функции распределения, а во втором меняется число частиц, участвующих в циклотронном взаимодействии.

Соотношение (2.25) позволяет получить представление о степени модуляции интенсивности  $|I_{\sim}/I_0| = |\exp \{\Gamma - \Gamma_0\} - 1|$ , которая в благоприятных условиях ( $\Gamma_0 \gg 1$ ) может быть близка единице, и об изменении спектра ОНЧ-излучений под действием быстрых магнито-звуковых волн.

В некоторых случаях добротность магнитосферного резонатора (коэффициент отражения  $R$ ) может резко уменьшаться с частотой. В частности, резкое ухудшение добротности (а следовательно, и условий самовозбуждения) в ряде случаев имеет место на частотах  $\omega \gtrsim (1/2)\omega_{BL}$ , что, по-видимому, связано со срывом волноводного распространения ОНЧ-волн (по этому поводу см. [36, 37]). В таком случае будет возбуждаться только низкочастотная часть спектра ОНЧ-волн, которая может оказаться в противофазе (2.27) с амплитудой магнитного возмущения. В § 7 будет показано, что при таких условиях в геомагнитной ловушке возможны автоколебания, в процессе которых модуляция интенсивности ОНЧ-шумов и потоков высыпавшихся электронов, а также амплитуда геомагнитных пульсаций нарастают.

Проведенные в этом разделе расчеты относятся к тому случаю, когда отражением волн от ионосферы можно пренебречь. Дело в том, что в противном случае линейное приближение имеет очень ограниченную область применимости, определяемую неравенством

$$R \exp \{\Gamma\} < 1, \quad (2.28)$$

где  $R$  — коэффициент отражения от ионосферы по интенсивности. Вопрос о модуляции спектров в линейном приближении, но с учетом конечного отражения от ионосферы обсуждался в работе [24]. Оказалось, что в этом случае модуляция интенсивности в квадратуре с  $H$ -компонентой магнитного возмущения на экваторе, а степень модуляции

$$\left| \frac{I_{\sim}}{I_0} \right| \approx 2 \frac{b}{B_L} (\Omega T_g)^{-1} |\ln R| \quad (2.29)$$

зависит от нее линейно. Модуляция может быть значительной только для достаточно низких частот модуляции  $\Omega$  (см. также [15]).

В целом можно сделать вывод, что во всех случаях наибольшую модуляцию шипений вызывают гидромагнитные возмущения, имеющие компоненту переменного магнитного поля, направленную вдоль геомагнитного поля. Величина модуляции интенсивности, связанная с изменением условий распространения, если исходный спектр не имел изломов или не выполняются какие-то особые условия, незначительна. Это позволяет утверждать, что наибольшее значение в реальных условиях имеет модуляция интенсивности ОНЧ-шумов, связанная с изменением полного усиления.

**Генерация циклотронных волн при нестационарной функции распределения.** Рассмотрим еще один пример ЦН, важный для приложений (см. § 9). Пусть функция распределения имеет следующий вид:

$$f = C \delta (J_{\perp} - J_{\perp 0}) \exp \left\{ -[(v_{\parallel} \cos \Omega_b t + z \Omega_b \sin \Omega_b t - \bar{v}_{\parallel})^2 + E (z \Omega_b \cos \Omega_b t - v_{\parallel} \sin \Omega_b t - \bar{z} \Omega_b)^2] v_0^{-2} \right\}, \quad (2.30)$$

где  $E = v_0^3 / z_0^3 \Omega_b^2$  — параметр нестационарности,  $C$  — нормировочная константа,  $z_0$  — характерный размер сгустка частиц,  $v_0$  — характеризует дисперсию по продольным скоростям. Функция (2.30) удовлетворяет кинетическому уравнению, описывающему свободный разлет частиц по параболической ловушке и фактически соответствует осцилляциям сгустка частиц между магнитными пробками с баунс-частотой:

$$\Omega_b = (2J_{\perp 0} B_L)^{1/2} / a. \quad (2.31)$$

Как показано в [21], распределения электронов вида (2.30) могут возникать на утренней стороне магнитосферы после взрывной фазы суббури.

Перейдем к анализу эффектов генерации ОНЧ-излучений в условиях, когда функция распределения  $f$  определяется формулой (2.30). Используя выражение для коэффициента усиления (2.8), находим, что при симметричной инжекции ( $z = 0, \bar{v}_{\parallel} = 0$ )

$$\eta = (8\pi^3 e^2 C B^2 / m c^2 k^2) \left\{ -\omega_B / B + 2J_{\perp 0} (\omega_B - \omega) v_0^{-2} + (E - 1) \frac{2J_{\perp 0} k}{v_0^2} \sin \Omega_b t [z \Omega_b \cos \Omega_b t + (\omega_B - \omega) k^{-1} \sin \Omega_b t] \right\} \exp \left\{ -\frac{(\omega_B - \omega)^2}{k^2 v_0^2} - \frac{z^2 \Omega_b^2}{v_0^2} - (E - 1) \left[ \frac{z \Omega_b}{v_0} \cos \Omega_b t + \frac{(\omega_B - \omega)}{k v_0} \sin \Omega_b t \right]^2 \right\}, \quad (2.32)$$

где  $k > 0$ . Формула (2.32) при  $E = 1$  переходит в обычное выражение для инкремента ЦН. Наиболее ярко эффекты временной модуляции частотного спектра проявляются в случае

$$E = v_0^3 / z_0^3 \Omega_b^2 \gg 1 \text{ и } 2J_{\perp 0} B_L / v_0^2 > 1. \quad (2.33)$$

Первое из неравенств (2.33) означает малый размер сгустка частиц  $z_0$  по сравнению с размером магнитной ловушки  $v_0 / \Omega_b$ , а второе — преобладание поперечной анизотропии в распределении частиц поpitch-углам. Сгусток здесь понимается в том смысле, что в определенные моменты времени частицы собираются в сравнительно плотное облачко, а затем вновь разлетаются по ловушке.

Из уравнения (2.1) следует, что если вблизи торца ловушки имеется интенсивность  $I_0(\omega)$ , то в сопряженной точке интенсивность определяется выражением

$$I(t, \omega) = I_0(\omega) \exp \left\{ \int_{-l/2}^{+l/2} \eta \left( t - \frac{l}{2v_g} + \frac{z'}{v_g}, z' \right) dz' \right\}. \quad (2.34)$$

Таким образом, в этом случае усилительные свойства РП не характеризуются уже просто усилением (2.3). Однако когда взаимодействие волн и частиц происходит в малой приэкваториальной области  $z\Omega_b/v_g < 1$ , из (2.34) следует, что

$$I(t, \omega) = I_0(\omega) \exp \left\{ \Gamma \left( t - \frac{1}{4} T_g(\omega), \omega \right) \right\}. \quad (2.35)$$

Величину входящего в это выражение усиления в области достаточно низких частот  $\omega \ll \omega_{BL}$  удастся вычислить методом перевала. Используя формулы (2.3) и (2.32), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \omega) = & \frac{8\pi^3 e^2 C v_0}{mc^2 k^2} \left( \frac{\pi}{E} \right)^{1/2} \left[ 2 \left( \frac{\omega_{BL}}{ka} \sin \Omega_b t \right)^2 + \right. \\ & \left. + (\Omega_b \cos \Omega_b t)^2 \right]^{-1/2} \left\{ -\omega_{BL} + \frac{2J_{\perp 0} B_L}{v_0^2} (\omega_{BL} - \omega) + \right. \\ & \left. + \frac{2EJ_{\perp 0} B_L \omega_{BL}}{v_0^2} \sin^2 \Omega_b t \left[ 1 + \frac{1}{2} (\Omega_b \cos \Omega_b t)^2 \left( \frac{\omega_{BL}^2}{k^2 a^2} \sin^2 \Omega_b t + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \Omega_b^2 \cos^2 \Omega_b t \right)^{-1} \right] \right\} \exp \left\{ -E \left( \frac{\omega_{BL}}{kv_0} \sin \Omega_b t \right)^2 \left[ 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\Omega_b ka}{\omega_{BL}} \operatorname{ctg} \Omega_b t \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Естественно получилось, что усиление — периодическая функция времени, причем глубина модуляции равна

$$\frac{\Gamma_{\max}}{\Gamma_{\min}} \simeq \frac{\omega_{BL}}{\Omega_b ka} \exp \left\{ \frac{E\omega_{BL}^2}{k^2 v_0^2} \right\}. \quad (2.37)$$

Наклон динамического спектра дискретных форм возникающих сигналов примерно повторяет зависимость времени группового распространения от частоты для свисовой моды, распространяющейся от экваториальной плотности (рис. 7).

Ситуация существенно меняется, когда важно отражение волн от ионосферы. Дело в том, что переотражения приводят к появлению в спектре резонансных частот, для которых

$$\left. \begin{aligned} T_g(\omega) &= 2\pi q \Omega_b^{-1}, \quad q = 1, 2, \dots \\ T_g &= 2 \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{dz}{v_g}, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где  $v_g = 2(\omega/k)(1 - \omega/\omega_B)$ ;  $T_g$  — удвоенное время группового распространения сигнала между сопряженными точками. На частотах, удов-

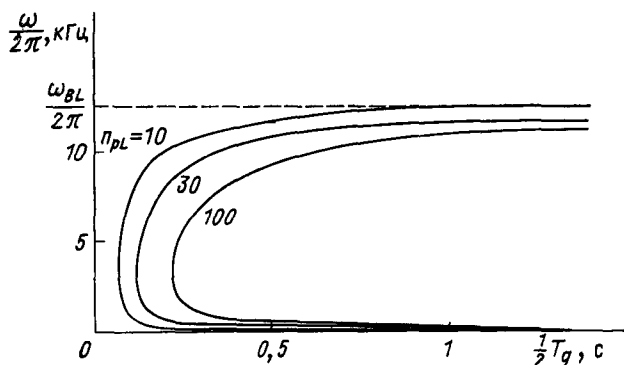


Рис. 7. Зависимость времени распространения свиста между сопряженными точками от частоты при разных концентрациях плазмы ( $L=4$ )

летворяющих (2.38), сигнал каждый раз проходит РП в фазе максимального усиления. Подробно этот вопрос изучен в работах [21, 43].

### § 3. Квазилинейное описание ЦН

Выше не учитывалось обратное воздействие ОНЧ-волн на частицы РП, которое становится существенным уже при умеренных интенсивностях. Как известно, это влияние можно учесть в рамках квазилинейной теории плазмы [3, 4, 44—47]. Следует отметить, что возможность использования обычных квазилинейных уравнений, полученных для однородной плазмы, в условиях неоднородной геомагнитной ловушки не очевидна и, вообще говоря, требует обоснования. Можно показать, что в геометрико-оптическом приближении для достаточно широких по частоте пакетов ОНЧ-волн и гладких функций распределения частиц можно взять за основу обычные квазилинейные уравнения магнитоактивной плазмы. При нарушении указанных критериев следует использовать квазилинейные уравнения в несколько ином виде (см. § 8).

Запишем систему квазилинейных уравнений в конкретном случае свистовых волн [3]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{8\pi^3}{m^3} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int (\hat{\Lambda}_s G_{\mathbf{k},s} \varepsilon_{\mathbf{k}} \hat{\Lambda}_s f) d^3 k, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = 2\gamma \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad (3.2)$$

$$\gamma = \frac{4\pi^3}{m} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int (G_{\mathbf{k},s} \hat{\Lambda}_s f) d^3 v, \quad (3.3)$$

где  $\hat{\Lambda}_s = (1/v_{\perp}) (\partial/\partial v_{\perp}) s\omega_B/\omega + (\partial/\partial v_{\parallel}) k_{\parallel}/\omega$ ,  $\hat{\Lambda}_s = (s\omega_B/\omega) v_{\perp}^{-1} \partial/\partial v_{\perp} + (k_{\parallel}/\omega) \partial/\partial v_{\parallel}$ ,  $k_{\parallel} = k \cos \varphi$ ,  $G_{\mathbf{k},s}$  определяется формулой (2.7),  $\varepsilon_{\mathbf{k}} d^3 k$  — плотность энергии ОНЧ-волн в интервале волновых чисел  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k})$ , связанная с интенсивностью соотношением  $I = k^2 \varepsilon_{\mathbf{k}} / |\cos \chi|$ . Инкремент  $\gamma$  связан с коэффициентом усиления (2.4) простым соотношением  $2\gamma = \eta v_g$ .

**Предел редких столкновений.** Усреднение по периоду осцилляций частиц между зеркальными точками. Естественно, в общем виде систему квазилинейных уравнений (3.1) — (3.3) решать практически невозможно. Однако можно добиться существенных упрощений указанной системы, если использовать следующие обстоятельства. Во-первых, во многих задачах, представляющих практический интерес, важную роль играет случай продольного ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ ) распространения ОНЧ-волн, когда в сумме по  $s$  можно оставить только один член  $s = 1$ , соответствующий циклотронному резонансу. Во-вторых, источники быстрых частиц, а следовательно, и уровень свистовой турбулентности в РП, как правило, слабые, поэтому адиабатические инварианты частицы на одном баунс-периоде из-за диффузии на ОНЧ-волнах меняются мало. Вследствие этого в задаче появляется малый параметр  $T_b/T_D \ll \ll 1$ , где  $T_D$  — характерное время диффузии на ОНЧ-волнах,  $T_b$  — период баунс-осцилляций.

С учетом вышесказанного в уравнениях (3.1) — (3.3) удобно перейти к новым переменным:  $\mu = (B_L/B) \sin^2 \theta$  и  $v$ , которые являются инвариантами движения  $\bar{v}$  в отсутствие диффузии на ОНЧ-волнах. В этих переменных система (3.1) — (3.3) запишется следующим образом ( $\varphi = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial z} = & \frac{8\pi^3}{m^2} \int \left\{ \left[ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v + \frac{2}{v^2} \sqrt{1 - \mu} \frac{B}{B_L} \times \right. \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\omega_{BL}/\omega - \mu}{\sqrt{1 - \mu B/B_L}} \right) \left. \right] G_{k,1} \varepsilon_k \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{v^2} \left( \frac{\omega_{BL}}{\omega} - \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] \right\} dk + j, \end{aligned} \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} + v_g \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial z} = 2\gamma \varepsilon_k, \quad (3.2a)$$

$$\gamma = \frac{4\pi^4 B}{mB_L} \int_0^{\infty} \int_{\mu_c}^{B_L/B} G_{k,1} \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{2}{v^2} \left( \frac{\omega_{BL}}{\omega} - \mu \right) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] \frac{v^2}{\sqrt{1-\mu B/B_L}} dv d\mu, \quad (3.3a)$$

где  $j$  — мощность источника быстрых частиц,  $G_{k,1}$  — определяется формулой (2.7),  $v_{\parallel} = \pm v (1 - \mu B/B_L)^{1/2}$ ,  $\mu_c = \sigma^{-1}$ . Отметим, что в формуле (3.1a), так же как и в (3.1), надо сначала проинтегрировать по  $k$ , а уже затем дифференцировать. В уравнении (3.2a) и ниже не учитывается слабое, особенно на низких частотах, изменение волнового числа за счет эффектов распространения.

Правая часть (3.1a) пропорциональна малому параметру  $T_b/T_D$ . Таким образом, частицы совершают быстрые периодические движения, на которые накладывается слабое воздействие со стороны ОНЧ-волн. Аналогично пакет ОНЧ-волн многократно переотражается от границы ионосферы; при этом его амплитуда медленно меняется из-за циклотронного взаимодействия. Описанный характер движения позволяет применить к решению задачи метод усреднения. Более подробно процедура усреднения уравнений (3.1a) — (3.3a) описана в приложении А. Фактически она сводится к действию на обе части уравнения (3.1a) оператора  $T_b^{-1} \oint dz/v_{\parallel}$  в предположении, что  $f$  не зависит от  $z$ . Аналогично нужно подействовать оператором  $T_g^{-1} \oint dz/v_g$  на обе части уравнения (3.2a).

Усредненная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{T_b} \int \left\{ \left[ \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{2}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\omega_{BL}}{\omega} - \mu \right) \right] \times \right. \\ \times \frac{8\omega B_L}{mkB(z^*)} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_B(z^*)} \right) Q \mathcal{E}_k \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial v} + \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{v^2} \left( \frac{\omega_{BL}}{\omega} - \mu \right) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right] \right\} dk + J, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = \frac{2}{T_g} (\Gamma + \ln R) \mathcal{E}_k, \quad (3.5)$$

$$\Gamma = \int_{\frac{\omega_{BL}-\omega}{k}}^{\infty} \left\{ \int_{\mu_c}^{1 - \left( \frac{\omega_{BL}-\omega}{kv} \right)^2} Q \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{2}{v^2} \left( \frac{\omega_{BL}}{\omega} - \mu \right) \frac{\partial F}{\partial \mu} \right] d\mu \right\} v^2 dv;$$



$$Q(k, \mu, v) = \frac{\pi^3 e^2 \omega}{mc^2 k} \mu v^2 \left[ \frac{B^2}{B_L^2} \left| \sqrt{1 - \mu \frac{B}{B_L}} \frac{\partial}{\partial z} (\omega - kv_{\parallel} - \omega_B) \right|^{-1} \right]_{z=z^*}, \quad (3.6)$$

где  $F = T_b^{-1} \oint f dz/v_{\parallel}$ ,  $J = T_b^{-1} \oint (j/v_{\parallel}) dz$ ,  $\mathcal{E}_k = T_g^{-1} \oint \varepsilon_k dz/v_g$ ,

$$T_g = 2 \int_{-1/2}^{+1/2} dz/v_g, \quad z^* \text{ — корень уравнения } \omega_B(z^*) - \omega = kv \left(1 - \mu B(z^*)/B_L\right)^{1/2}. F \text{ нормирована на полное число частиц в силовой трубке сечением } 1 \text{ см}^2 \text{ у основания: } N = \pi \sigma \int_0^1 \int_{\mu_c}^1 T_b F(\mu, v) v^3 dv d\mu.$$

При относительно слабой анизотропии  $A \ll 1$  или в достаточно плотной плазме ( $\beta_* \gg 1$ ), когда  $\omega \ll \omega_{BL}$ , преобладающей является диффузия поpitch-углам  $\mu$ , а диффузия по энергиям ослаблена в  $(\omega_{BL}/\omega)^2$  раз. В этом случае система (3.4)—(3.6) значительно упрощается и приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{T_b} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \Lambda \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + J - \delta F, \quad (3.7)$$

$$\Lambda(\mu, v) = \frac{4\pi a \omega_{BL} \omega_p^2 L}{n_p L mc^2 v^3} \int_{\omega_{BL}/v}^{\infty} k^{-2} \psi_1 \mathcal{E}_k dk, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = \frac{2}{T_g} \left\{ \frac{\pi^3 a k m}{B_L^2} \left[ \int_{\omega_{BL}/k}^{\infty} \left( \int_0^{1 - (\omega_{BL}/kv)^2} \mu \psi_2 \frac{\partial F}{\partial \mu} d\mu \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times v^4 dv \right] + \ln R \right\} \mathcal{E}_k; \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{2\omega_{BL}}{kv\mu} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \left\{ \left[ \left( \frac{\mu}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left( \frac{\omega_{BL}}{kv} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\mu}{2} - \left( \frac{\omega_{BL}}{kv} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \\ \psi_2 &= \psi_1 \left\{ \left[ \left( \mu/2 \right)^2 + \left( \frac{\omega_{BL}}{kv} \right)^2 \right]^{1/2} - \mu/2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

При выводе (3.7)—(3.10) было использовано приближение параболической ловушки (2.12),  $T_b = 2\pi a/v\mu^{1/2}$ ,  $T_g = kl/\omega$ . Последний член в уравнении (3.7) описывает потери, обусловленные попаданием частиц в конус потерь. Он равен

$$\delta = \begin{cases} T_0^{-1}, & \mu \leq \mu_c, \\ 0, & \mu > \mu_c, \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $\mu_c = (B_L/B_E) \equiv \sigma^{-1}$  — граница с конусом потерь,  $B_E$  — значение магнитного поля на уровне атмосферы,  $\sigma$  — пробочное отношение,  $T_0 = l/2v$ .

Трудность решения системы (3.7)—(3.9) во многом связана со сложным видом функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  (3.10). Значительных упрощений можно добиться в предельных случаях малых и больших значений  $\mu$ . В случае  $\mu \ll 1$  будем иметь:

$$\psi_1 = (kv/\omega_{BL}) \psi_2, \quad \psi_2 = (kv/\omega_{BL} - 1)^{-1/2}. \quad (3.12a)$$

В другом предельном случае, когда  $k^2 v^2 \mu^2 / \omega_{BL}^2 \gg 1$ , выражения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$  запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2\omega_{BL}}{kv} \mu^{-3/2} (1-\mu)^{-1/2}, \\ \psi_2 &= \frac{\omega_{BL}^2}{k^2 v^2 \mu} \psi_1. \end{aligned} \quad (3.12b)$$

При произвольном соотношении частот  $\omega \leq \omega_{BL}$ , существенных упрощений можно добиться в приближении узкого спектра ОНЧ-волн. При этом в уравнении (3.4) можно перейти к переменным одномерной диффузии с помощью следующей замены:

$$\mu = \mu, \quad W_a = v^2 - \left( \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right) \mu v^2, \quad (3.13)$$

где  $\omega_0$  — средняя частота в спектре ОНЧ-волн. Подстановка (3.13) в систему (3.4)—(3.6) с учетом малой ширины спектра приводит квазилинейные уравнения к виду, близкому к (3.7)—(3.9). (Более подробно см. § 5 и работу [6].)

**Предел частых столкновений.** Выше был рассмотрен наиболее типичный для РП случай относительно слабой диффузии поpitch-углам, когда

$$T_b \ll T_D. \quad (3.14)$$

Однако в некоторых областях магнитосферы (на границе с солнечным ветром, в области каспов и хвоста), где действуют интенсивные источники быстрых частиц, может реализоваться и противоположный случай, когда выполняется обратное неравенство:

$$T_D \ll T_b. \quad (3.15)$$

При этом частица испытывает много столкновений с волнами на одном пролете между магнитными пробками. Естественно, что в таком режиме сильной диффузии функция распределения остается почти изотропной, так как малейшие отклонения от изотропии быстро ликвидируются диффузией на турбулентных пульсациях. При слабой анизотропии частоты ОНЧ-волн  $\omega \ll \omega_{BL}$  и преобладает диффузия поpitchуглам. Все указанные выше факторы позволяют существенно продвинуться в решении квазилинейных уравнений и в предельном случае (3.15). При этом система квазилинейных уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + vx \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{v(1-x^2)}{2B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial f}{\partial x} \right) + j; \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} + \omega_p^{-2} \omega_B c^2 k (1+y^2) \frac{y \partial \epsilon_k}{|y| \partial z} = 2\gamma \epsilon_k; \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{\pi^2 \omega_p^2}{4n_p mc^2} (1-x^2) \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} (1+y)^2 (1+3y^2)^{1/2} \delta(\omega_B + \\ &+ kvxy) \epsilon_k k^2 dk^2 dy; \\ \gamma &= \frac{\pi^2 \omega_B^2 (1+y)^2 (1+3y^2)^{1/2}}{4n_p |y|} \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} v^3 (1-x^2) \delta(\omega_B + kvxy) \times \\ &\times \left( \frac{\omega}{\omega_{BL}} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{vx} \frac{\partial f}{\partial x} \right) dv dx, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

где  $x = v_{\parallel}/v = \cos\theta$ ,  $y = k_{\parallel}/k = \cos\varphi$ . Уравнения (3.16) — (3.18) нетрудно получить из общей системы (3.1) — (3.3), если перейти к переменным  $(v, x)$ , пренебречь диффузией по  $v$ , а в сумме по  $s$  оставить только член  $s = 1$ .

Критерий (3.15) соответствует переходу к режиму турбулентного разлета [48, 49], когда частица, «сталкиваясь» с ОНЧ-волнами, совершает случайные блуждания вдоль магнитного поля. Чтобы перейти от уравнения (3.16) к диффузионному уравнению в координатном пространстве, выделим из функции распределения малую анизотропную добавку в явном виде:

$$f = f_0 + \Delta f, \quad (3.19)$$

где  $f_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f dx$ ,  $\Delta f \ll f$ . Усредняя уравнение (3.16) по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + v \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \ln B}{\partial z} \right) \langle x \Delta f \rangle = j_0, \quad (3.20)$$

где  $j_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} j dx$ . Если теперь вычтем (3.20) из исходного уравнения и оставить лишь главные члены, будем иметь:

$$vx \frac{\partial f_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial \Delta f}{\partial x} \right). \quad (3.21)$$

Принтегрируем (3.21) по  $x$  и учтем граничное условие  $D (\partial \Delta f / \partial x) = 0$  при  $x = \pm 1$ . Получим:

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial x} = (x^2 - 1) \frac{v}{2D_x} \frac{\partial f_0}{\partial z}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в усредненное уравнение (3.20), после интегрирования по частям найдем:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{v^2}{8} B \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{B} \left[ \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^2}{D_x} dx \right] \frac{\partial f_0}{\partial z} \right\} + j_0. \quad (3.23)$$

Выражение для инкремента (3.18) с учетом (3.22) запишется следующим образом:

$$\gamma = \frac{\pi^2 \omega_B^2 (1+y)^2 (1+3y^2)^{1/2}}{4n_p |y|} \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} v^3 (1-x^2) \delta(\omega_B + kvxy) \times \\ \times \left[ \frac{\omega}{\omega_{BL}} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{(1-x^2)}{2D_x x} \frac{\partial f_0}{\partial z} \right] dv dx, \quad (3.24)$$

В последующих параграфах мы используем полученные выше уравнения для решения различных задач квазилинейной теории ЦН.

#### § 4. Режимы диффузии частиц по питч-углам

При развитии ЦН возможны три режима питч-угловой диффузии.

*а. Режим слабой диффузии:*

$$T_D > \sigma T_0. \quad (4.1)$$

При этом в процессе диффузии конус потерь не успевает заполняться, и его можно считать пустым.

*б. Режим умеренной диффузии:*

$$\sigma T_0 > T_D > T_0. \quad (4.2)$$

Здесь заполнение конуса потерь существенно, и происходит значительная изотропизация распределения частиц по питч-углам.

*в. Режим сильной диффузии,* определяемый неравенством (3.19):

$$T_D < T_0.$$

**Режимы слабой и умеренной диффузии.** Для простоты ограничимся анализом случая слабой анизотропии, когда преобладающую

роль играет диффузия по питч-углам, а частоты волн  $\omega$  много меньше гирочастоты электронов  $\omega_B$ . Исходная система квазилинейных уравнений, описывающих эволюцию функции распределения  $F$  частиц по питч-углам и спектральной плотности  $\mathcal{E}_k$  свистовой турбулентности, в этом случае определяется выражениями (3.7)—(3.9). Воспользуемся приближением узкого спектра ОНЧ-волн, которое довольно хорошо описывает общие свойства рассматриваемого процесса (ср. § 5). При этом  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E} \delta(k - k_0)$ , и система (3.7)—(3.9) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{T_b} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \Lambda \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) + J - \delta F, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{2}{T_g} \left\{ \frac{\pi^3 a k_0 m}{B_L^2} \left[ \int_{\omega_{BL}/k_0}^{\infty} \left( \int_0^{1 - (\omega_{BL}/k_0 v)^2} \mu \psi_2 \frac{\partial F}{\partial \mu} d\mu \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times v^4 dv \right] + \ln R \right\}, \quad (4.4)$$

где  $\Lambda = (4\pi a \omega_{BL} \omega_{pL}^2 \psi_1 / n_{pL} m c^2 v^3 k_0^3) \mathcal{E}$ ,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — безразмерные функции, в общем случае имеющие довольно сложный вид [см. (3.10)]; нам понадобится значение  $\psi_1$  (3.12а) при малых  $\mu \ll 1$ :

$$\psi_1 = \frac{k_0 v}{\omega_{BL}} \left( \frac{k_0 v}{\omega_{BL}} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.3) надо решать при следующих граничных условиях:

$$\Lambda \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0 \text{ при } \mu = \mu_m \text{ и } \mu \Lambda \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mu} = 0 \text{ при } \mu = 0 \quad (4.6)$$

и условиях «сшивки» решений:

$$F = \tilde{F}, \quad \partial F / \partial \mu = \partial \tilde{F} / \partial \mu \text{ при } \mu = \mu_c, \quad (4.7)$$

где  $\mu_m$  — максимальное значение  $\mu$  у частиц, поставляемых источником,  $\tilde{F}$  — функция распределения при  $\mu < \mu_c$ , а  $F$  — при  $\mu \geq \mu_c$ .

Рассмотрим стационарное состояние ловушки ( $\partial/\partial t = 0$ ), когда потери частиц полностью скомпенсированы поступлением новых частиц от источника. При  $\mu_c \ll 1$  в области  $\mu < \mu_c$  можно пренебречь источником. Учитывая (4.5), запишем уравнение для  $\tilde{F}$  в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mu} \right) - \Delta \tilde{F} = 0, \quad \Delta = \frac{T_b(0)}{\Lambda T_0} \equiv \frac{T_D}{T_0}. \quad (4.8)$$

В (4.8) учтено, что в случае низких точек отражения  $T_b$  ( $\mu = 0$ ) =  $= 1,06 \frac{\pi R_E L}{v} \simeq l/v$ . Ограйченнное решение (4.8) в области  $\mu < \mu_c$  имеет вид

$$\tilde{F} = C_1 I_0(2\sqrt{\Delta\mu}), \quad (4.9)$$

где  $I_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента,  $C_1$  — константа, которая определяется из граничных условий (4.7).

Запишем решение (4.3) в области  $\mu \geq \mu_c$ :

$$F = \int_{\mu_c}^{\mu} \left[ (\mu' \Lambda)^{-1} \int_{\mu'}^{\mu_m} T_b J d\mu'' \right] d\mu' + C_2 \equiv F_1 + C_2. \quad (4.10)$$

Используя теперь условия сшивки (4.7), нетрудно найти константы  $C_1$  и  $C_2$ . В итоге будем иметь:

$$F = F_1 + \tilde{F}(\mu_c),$$

$$\tilde{F} = \frac{I_0(2\sqrt{\Delta\mu})}{\Lambda \sqrt{\Delta\mu_c} I_1(2\sqrt{\Delta\mu_c})} \int_{\mu_c}^{\mu_m} T_b J d\mu. \quad (4.11)$$

В пределе слабой диффузии (пустой конус потерь), когда  $2(\Delta\mu_c)^{1/2} = 2(T_D/\sigma T_0)^{1/2} > 1$ , что соответствует неравенству (4.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_1 + \tilde{F}(\mu_c) \simeq F_1, \\ \tilde{F} &= I_0(2\sqrt{\Delta\mu}) [2\pi^{1/2}/\Lambda (\Delta\mu_c)^{1/4}] \times \\ &\times \exp\{-2\sqrt{\Delta\mu_c}\} \int_{\mu_c}^{\mu_m} T_b J d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

В пределе умеренной диффузии  $2(\Delta\mu_c)^{1/2} < 1$  функция распределения поpitch-углам почти изотропна:

$$\left. \begin{aligned} F &= F_1 + \tilde{F}(\mu_c) \simeq \tilde{F}(\mu_c), \\ \tilde{F} &= \frac{T_0}{\mu_c T_b(0)} \int_{\mu_c}^{\mu_m} T_b J d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

где  $T_b(0) = T_b(\mu = 0)$ .

Найдем время жизни частиц  $T_l$  в ловушке при указанных режимах диффузии:

$$T_l = \left| \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right|_{J=0}^{-1}, \quad (4.14)$$

где  $N$  — число энергичных частиц (3.4) в магнитной силовой трубке с единичным сечением у торца;  $dN/dt$  — скорость изменения  $N$  при выключенном источнике. Эти величины нетрудно найти, используя выражения (4.3) и (4.11)—(4.13). Интегрируя, в частности, уравнение (4.13) по фазовому пространству и объему силовой трубки при  $J = 0$ , получаем

$$\frac{dN}{dt} \Big|_{J=0} = -\pi\sigma \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\mu_c} T_0^{-1} T_b F d\mu \right) v^3 dv. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.11) в (4.15), получаем, используя пояснение к (3.4):

$$T_l = \frac{\int_0^\infty \left( \int_{\mu_c}^1 T_b F d\mu \right) v^3 dv}{\int_0^\infty \left( \int_{\mu_c}^1 T_b J d\mu \right) v^3 dv}. \quad (4.16)$$

С учетом (4.16) и (4.13) время жизни в пределе умеренной диффузии равно:

$$T_{l2} = \sigma T_0. \quad (4.17)$$

В пределе слабой диффузии из (4.12) и (4.15) с точностью до коэффициента  $\sim 1$  получим:

$$T_{l1} = \frac{\sigma |\ln R| \ln pL}{J_\Sigma T_g \omega_{BL}} \gg \sigma T_0, \quad (4.18)$$

где учтено, что согласно (4.4) и (4.11),

$$\mathcal{E} = \frac{\pi k_0 m}{16 |\ln R| \omega_{BL}} \int_{\omega_{BL}/k_0}^\infty \left[ \int_{\mu_c}^{1 - (\omega_{BL}/k_0 v)^2} \frac{1}{\mu} \left( \int_{\mu}^{\mu_m} T_b J d\mu' \right) d\mu \right] v^5 dv, \quad (4.19)$$

$J_\Sigma$  — интегральный (по трубке магнитного поля) источник быстрых частиц ( $J_\Sigma = \pi \sigma \int_0^1 \int_{\mu_c}^1 T_b J(\mu, v) v^3 dv d\mu$ ).

**Эффекты запираания частиц в ловушке при сильной диффузии.** Совместное решение уравнений (3.23), (3.2) и (3.24) в произвольном случае довольно затруднительно. Рассмотрим задачу в приближении узкого спектра, когда  $\varepsilon_k$  можно представить в виде

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 \delta(y - y_0).$$

В этом случае коэффициент диффузии  $D_x$  (3.17) равен:

$$D_x = \frac{\pi^2 \omega_p^2}{2n_p mc^2} (1 - x^2) \frac{(1 + y_0)^2}{v |x|} I_0(y_0), \quad (4.20)$$

где  $I_0 = k^2 \varepsilon_0 / |\cos \chi| = k^2 \varepsilon_0 (1 + 3y_0^2)^{1/2} / 2|y_0|$ , а выражение для инкремента (3.24) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi^2 \omega_B^2 c^2 / n_p k \omega_p^2 |y_0| \times \\ &\times \int_{\omega_B/k y_0}^\infty \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_B^2}{k^2 v^2 y_0^2} \right) \left[ \frac{2n_p m y_0}{\pi^2 k^2 \varepsilon_0 |y_0|} \frac{\partial f_0}{\partial z} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{k^2}{v} (1 + y_0)^2 (1 + 3y_0^2)^{1/2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] v^2 \right\} dv. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Согласно (4.21) максимальный инкремент растет с уменьшением  $y_0$ . Однако при этом важную роль начинает играть затухание на эффекте Черенкова и аномальном эффекте Доплера. Как показано в [1] (см. также § 2), циклотронное усиление начинает сравниться с затуханием при значениях  $y_0 \simeq 0,5$ . Подставляя это значение в (4.21), запишем уравнение (3.2) в следующем виде ( $\partial/\partial t = 0$ ):

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} = \int_{u^{1/2}}^{\infty} \left[ (v^2 - u) \left( -\frac{3u^2 m}{32\omega_B^2 \varepsilon_0} \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{9\pi^2 \omega_B y_0}{4n_p v |y_0|} \left( \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) v \right) \right] dv, \quad (4.22)$$

где  $u = \omega_B^2/k^2 y_0^2 \simeq 4\omega_B^2/k^2$ ; в (4.22) учтено, что в условиях геомагнитной ловушки при  $\omega \ll \omega_{BL}$   $\partial\omega/\partial z = 0$ .

Согласно (3.23) при  $\partial/\partial t = 0$  имеем:

$$\frac{\partial f_0}{\partial z} = -dB \int_0^z \frac{j_0}{B} dz', \quad (4.23)$$

$$d^{-1}(z, v) = \frac{n_p mc^2}{48\pi^2 \omega_p^2 \omega_B^2 v} \int_0^{v^2} u (v^2 - u) \varepsilon_0^{-1}(u) du. \quad (4.24)$$

Источником неустойчивости в (4.22) служит первый член в фигурных скобках, поэтому возбуждаются волны с волновыми векторами, направленными против пространственного градиента функции распределения, т. е. в каждой половине ловушки к ближайшему ее торцу. В связи с этим принципиальную роль играют дополнительные резонансы на аномальном эффекте Доплера и на эффекте Черенкова, приводящие к турбулентной диффузии частиц, движущихся в направлении возбуждения волн и не взаимодействующих с ними на основном циклотронном резонансе. Поскольку наиболее благоприятные условия для возбуждения волн реализуются при  $y_0 \simeq 0,5$ , когда взаимодействие на всех резонансах сравнимо по величине, то выражение для коэффициента диффузии  $D_x$  (4.20) можно использовать для всех частиц. Благодаря этому уравнение (4.23) описывает функцию распределения для частиц, движущихся как в  $+z_0$ , так и в  $-z_0$ -направлениях.

В дальнейшем мы ограничимся анализом источников с малым разбросом по энергиям:

$$j_0(z, v) = (4\pi v_0^2)^{-1} j_z(z) \delta(v - v_0). \quad (4.25)$$

При этом согласно (3.23) функция распределения также будет иметь узкий энергетический спектр:

$$f_0(z, v) = (4\pi v_0^2)^{-1} n(z) \delta(v - v_0). \quad (4.26)$$



Используя (4.25), (4.26) и интегрируя второй член в правой части (4.22) по частям, преобразуем систему (4.22), (4.23) к виду:

$$\frac{dn}{dz} = -dB \int_0^z \frac{j_{\Sigma}}{B} dz', \quad (4.27a)$$

$$\frac{d\varepsilon_0}{dz} = -\frac{3mu^2}{128\pi\omega_B^2 v_0} (v_0^2 - u) \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{9\pi\omega_B n}{8n_p v_0} \frac{y_0}{|y_0|} \varepsilon_0. \quad (4.27b)$$

Второе уравнение системы (4.27) напоминает уравнение переноса энергии [32] в поглощающей среде. В оптически толстой среде, когда  $\tau = (9\pi\omega_B/8v_0)(n/n_p)l > 1$  (источник  $j_0$  достаточно интенсивный,  $l$  — продольный размер ловушки),  $\partial\varepsilon_0/\partial z \simeq 0$ , и из (4.27b) имеем:

$$\varepsilon_0 = \frac{mn_p}{48\pi^2\omega_B^2 n} u^2 (v_0^2 - u) \left| \frac{dn}{dz} \right|, \quad \frac{u}{v_0^2} \leq 1. \quad (4.28)$$

Составляя с помощью (4.28) выражение для  $d$  в соответствии с (4.24), найдем:

$$N = B_E \int_{-1/2}^{+1/2} \left\{ \frac{\beta_*}{v_0} \int_0^z \frac{j_{\Sigma}}{B} \left[ \ln \left( \frac{v_0^2}{u_{\text{мин}}} \right) \right]^{-1} dz' \right\} dz, \quad (4.29)$$

где  $\beta_* = 4\pi n_p m v_0^2 / B^2$ ,  $N = B_E \int_{-1/2}^{+1/2} (n/B) dz$ .

Множитель  $[\ln(v_0^2/u_{\text{мин}})]^{-1}$  в (4.29) обусловлен логарифмической особенностью при малых значениях  $u$ . Появление особенности связано с нарушением критерия применимости уравнений (3.23), (3.24) в области малых углов  $\chi \rightarrow 0$  ( $u \rightarrow 0$ ), где анизотропия функции распределения уже не мала,  $u_{\text{мин}}$  — параметр обрезания. Поскольку поток высыпающихся частиц по-прежнему равен (4.16), с помощью формул (4.14) найдем

$$T_{13} \simeq \beta_* T_0. \quad (4.30)$$

Если теперь учесть, что для выполнения исходных предположений (низкие частоты  $\omega \ll \omega_B$ , взаимодействие на циклотронном резонансе  $\omega_B \simeq -k\chi u$ ) необходимо выполнение неравенства  $\beta_* \gg 1$ , то приходим к выводу о значительном увеличении времени жизни в режиме сильной диффузии, когда  $\beta_* \gg \sigma$ .

Рассмотрим случай «оптически тонкой» среды  $\tau < 1$ , соответствующий переходу от режима умеренной к сильной диффузии. При этом

$$\frac{d\varepsilon_0}{dz} = -\frac{3m}{128\pi\omega_B^2 v_0} u^2 (v_0^2 - u) \frac{dn}{dz}, \quad u/v_0^2 \leq 1. \quad (4.31)$$

Предполагая для простоты  $\omega_B \simeq \text{const}$ , будем иметь:

$$\varepsilon_0 - \tilde{\varepsilon}_0 \simeq (3m/128\pi\omega_B^2 v_0) u^2 (v_0^2 - u) (\tilde{n} - n), \quad (4.32)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_0$  и  $\tilde{n}$  — значения  $\varepsilon_0$  и  $n$  при  $z = 0$ .

Соотношение (4.32) с учетом (4.24) и (4.27) преобразуется к дифференциальному уравнению для  $n$ :

$$\left( \tilde{n} - n + \frac{128\pi\omega_B^3 v_0}{3m} e_0 \right)^{-1} \frac{dn}{dz} = -X \int_0^z j_\Sigma dz', \quad (4.33)$$

где  $X = 9\pi\omega_p^2/8n_p c^2 \omega_B \ln(v_0^3/u_{\text{мин}})$  и  $\tilde{\epsilon}_0$  взята в виде:  $\tilde{\epsilon}_0 = e_0 (v_0^3 - u)^2$ . Решая (4.33) с граничным условием  $n(z = l/2) = 0$ , получим:

$$\tilde{n} = \frac{128\pi\omega_B^3 v_0 e_0}{3m} \left[ \exp \left\{ X \int_0^{l/2} \left( \int_0^z j_\Sigma dz' \right) dz \right\} - 1 \right]. \quad (4.34)$$

Таким образом, при переходе от режима умеренной к сильной диффузии время жизни растет как

$$\left. \begin{aligned} T_l &\simeq \frac{128\pi\omega_B^3 v_0 e_0}{3mJ} (\exp \{Xl^2 J\} - 1); \\ J &= T_b^{-1} \oint \frac{1}{v_{\parallel}} dz; \quad J_\Sigma = \pi\sigma \int_0^\infty \int_0^1 T_b J v^3 dv d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Суммируя результаты, выраженные в формулах (4.17), (4.18), (4.30) и (4.35), получаем следующую зависимость времени жизни от интенсивности источника. На рис. 8

$$J_{\Sigma 1} = \frac{n_{pL} |\ln R| l}{\omega_{BL} T_g T_0}, \quad J_{\Sigma 2} = \frac{8n_{pL} \omega_{BL} c^2 \sigma}{9\pi\omega_{pL}^2 l}. \quad (4.36)$$

Выше на примере циклотронной неустойчивости было показано, что в магнитных ловушках пробочной конфигурации могут реализоваться режимы сильной диффузии, когда происходит как бы «запирание» частиц на собственной турбулентности, препятствующее их выходу в конус потерь и существенно увеличивающее время жизни частиц в ловушке.

Аналогичные режимы, по-видимому, могут возникать и при других типах турбулентности, в частности, в случае конусной неустойчивости с возбуждением электростатических колебаний на циклотронных гармониках.

Разумеется, рассмотренные режимы имеют смысл при таких плотностях горячей плазмы, когда

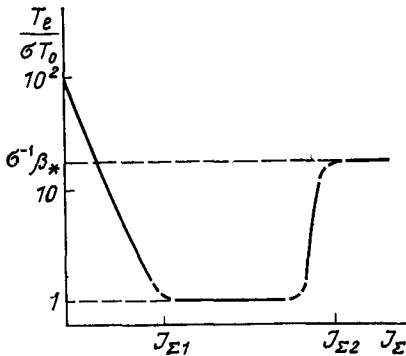


Рис. 8. Зависимость среднего времени жизни частиц в ловушке от мощности источника частиц

газокинетическое давление еще существенно меньше магнитного  $\beta \ll 1$ . В рассмотренном случае величину  $\beta = 4\pi n_L m v_0^2 / B_L^2$  нетрудно оценить с помощью соотношений (4.30) и (4.36). Критерий, соответствующий неравенству  $\beta \ll 1$ , запишется следующим образом:

$$\beta_* (T_0 \omega_{BL})^{-1} \ll 1, \quad (4.37)$$

где  $\beta_* = 4\pi n_{pL} m v_0^2 / B_L^2$ .

Например, в геомагнитной ловушке при  $\beta_* \simeq 10^2$ ,  $L \simeq 6$  и  $\omega_0 = m v_0^2 / 2 = 40$  кэВ,  $T_0 \simeq 1$  с,  $\omega_{BL} \simeq 2 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup> и  $\beta_* (T_0 \omega_{BL})^{-1} \simeq 10^{-2} \ll 1$ .

В условиях магнитосферы областями сильной диффузии могут быть граница с солнечным ветром, каспы и хвост, где возможно пересоединение силовых линий геомагнитного поля. Эффекты «запирания» могут существенно увеличить эффективность турбулентного нагрева и переноса энергичных частиц поперек  $L$ -оболочек в магнитосфере в условиях нарушения 1-го адиабатического инварианта. На взрывной фазе суббури сильная диффузия может проявляться в смене фазовых соотношений между высыпаниями и турбулентностью. В частности, в отличие от случаев слабой и умеренной диффузии эти явления могут оказаться в противофазе.

## § 5. Стационарные состояния РП Земли

Как уже отмечалось в § 1, в геомагнитной ловушке действуют источники энергичных частиц, непрерывно пополняющие РП. При медленных изменениях параметров источника может реализоваться стационарное состояние РП, когда число новых частиц, поставляемых источником, равно потерям частиц через магнитные пробки, обусловленным диффузией на ОНЧ-волнах.

Впервые задача о нахождении стационарного состояния РП была поставлена и в определенном приближении решена с помощью самосогласованной системы уравнений в работе [6]. В последующие годы эта проблема привлекла внимание многих исследователей [11, 14].

Некоторые общие свойства стационарных состояний РП были изучены в § 4. Полученные при этом результаты, к сожалению, не позволяют доказать возможность реализации стационарного состояния (которая в ряде случаев далеко не тривиальна), не определяют форму спектра волн и деталей функции распределения частиц. Ниже мы сосредоточим внимание на строгом решении задачи, чтобы получить представление об угловом и энергетическом спектре захваченных частиц, интенсивности и спектре ОНЧ-излучения.

**Решение квазилинейных уравнений в приближении однородной ловушки.** В качестве простейшей модели магнитной ловушки выберем однородный пробкотрон с резкими магнитными стенками. Предположим, что источник энергичных частиц имеет малую мощность  $j$ , и реализуется случай слабой диффузии по питч-углам.

Запишем уравнения (3.1) — (3.3) в переменных одномерной диффузии. Такая возможность связана с тем, что в практически важном случае

продольного распространения ( $k_{\perp} = 0$ ) при диффузии частиц в пространстве скоростей сохраняется величина

$$W = v_{\perp}^2 + \omega_B^2/k^2. \quad (5.1)$$

Зависимость  $k = k(v_{\parallel})$  найдем, используя условие циклотронного резонанса

$$\omega - kv_{\parallel} = \omega_B \quad (5.2)$$

и дисперсионное уравнение (2.2)

$$k^2 c^2 / \omega^2 = \omega_p^2 / \omega (\omega_B - \omega). \quad (5.3)$$

Из (5.2) и (5.3) следует, что

$$k^3 + k \left( \frac{\omega_p}{c} \right)^2 + \left( \frac{\omega_p}{c} \right)^2 \frac{\omega_B}{v_{\parallel}} = 0. \quad (5.4)$$

Используя формулу Кардано, получаем, что уравнение (5.4) имеет одно действительное решение, и соответственно

$$W = v_{\perp}^2 + q(v_{\parallel}), \quad (5.5)$$

Рис. 9. Форма линий диффузии в пространстве скоростей

где

$$q(v_{\parallel}) = v_{\parallel}^3 \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left( \frac{\omega_p v_{\parallel}}{\omega_B c} \right)^2} \left[ \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{27} \left( \frac{\omega_p v_{\parallel}}{\omega_B c} \right)^2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1 + \frac{4}{27} \left( \frac{\omega_p v_{\parallel}}{\omega_B c} \right)^2}} \right] \right\}^{-2}. \quad (5.6)$$

Переход к переменным одномерной диффузии (рис. 9) означает следующую замену переменных в уравнениях (3.1)–(3.3):

$$\left. \begin{array}{l} v_{\perp} \quad W = v_{\perp}^2 + q(v_{\parallel}) \\ \rightarrow \\ v_{\parallel} \quad v_{\parallel}. \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

При этом стационарное состояние определяется уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ \int_0^{\infty} \frac{k^2 g(\omega, W, v_{\parallel})}{m\omega} \varepsilon_{\omega} \delta(\omega - kv_{\parallel} - \omega_B) d\omega \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} \right] = -j(W, v_{\parallel}), \quad (5.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{v_{||}^2 (\sigma-1)^{-1} + q(v_{||})}^{\infty} \pi k g(\omega, W, v_{||}) \times \right. \\ \left. \times \delta(\omega - kv_{||} - \omega_B) \frac{\partial f}{\partial v_{||}} dW \right] dv_{||} = \nu, \quad (5.9)$$

где  $\varepsilon_\omega$  — распределение плотности энергии по частотам  $\varepsilon_\omega = \varepsilon_k / |v_g|$ ,  $g = (4\pi^2 e^2 (\omega_B - \omega)^2 / m\omega_p^2) [W - q(v_{||})]$ . Нижний предел в интеграле по  $W$  обеспечивает интегрирование по области, лежащей вне конуса потерь,  $\nu = 2|\ln R|/T_g$ . Допустим, что источник частиц  $j$  четный по  $v_{||}$  и у частиц, поступающих в пробкотрон, имеется минимальная продольная скорость —  $v_m$ . Ясно, что в процессе ЦН частицы со скоростями  $|v_{||}| < v_m$  возникнуть не могут и, следовательно, потоки частиц через  $v_{||} = \pm v_m$  должны быть равны нулю. С учетом этого граничного условия для  $v_{||} > v_m$  из (5.8) получаем

$$\left[ \int_0^{\infty} \varepsilon_\omega \frac{k^2 g(\omega, W, v_{||})}{m\omega} \delta(\omega - kv_{||} - \omega_B) d\omega \right] \frac{\partial f}{\partial v_{||}} = \\ = - \int_{v_m}^{v_{||}} j(W, v_{||}) dv_{||}. \quad (5.10)$$

Подставляя  $\partial f / \partial v_{||}$  из (5.10) в (5.9), для волн с  $k < 0$  имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} \int_{v_{||}^2 (\sigma-1)^{-1} + q(v_{||})}^{\infty} dW \left\{ \pi k g(\omega, W, v_{||}) \delta(\omega - kv_{||} - \omega_B) \times \right. \\ \times \left[ \int_{v_{||}}^{v_m} j(W, v_{||}) dv_{||} \right] \int_0^{\infty} (k')^2 g(\omega', W, v_{||}) \times \\ \left. \times (m\omega')^{-1} \varepsilon_{\omega'} \delta(\omega' - k'v_{||} - \omega_B) d\omega' \right\} = \nu. \quad (5.11)$$

Проинтегрировав в (5.11) по  $\omega'$  и учитывая, что из (5.2) и (5.3) следует  $1 - v_{||} / \frac{d\omega}{dk} = 1 + \omega_B / 2\omega$ , получим форму спектра

$$\varepsilon_\omega = \frac{\pi m \omega}{\nu k |k|} \left( 1 + \frac{\omega_B}{2\omega} \right) \times \\ \times \int_{(\omega - \omega_B)^2 k^{-2} (\sigma-1)^{-1}}^{\infty} \left[ \int_{(\omega - \omega_B) k^{-1}}^{v_m} j(W, v_{||}') dv_{||}' \right] dW. \quad (5.12)$$

Напомним, что здесь  $k < 0$ .

Подставляя (5.12) в (5.10), интегрируя по  $v_{\parallel}$  и используя затем свойства  $\delta$ -функций, найдем функцию распределения при  $v_{\parallel} > v_m$

$$f(W, v_{\parallel}) = \int_{v_{\parallel}^*}^{v_{\parallel}} \left\{ \frac{\nu(\omega(\tilde{v}_{\parallel})) \int_{v_m}^{\tilde{v}_{\parallel}} j(W, v'_{\parallel}) dv'_{\parallel}}{\tilde{v}_{\parallel}^2 (\sigma-1)^{-1} + q(\tilde{v}_{\parallel}) \left[ \int_{\tilde{v}_{\parallel}}^m j(\tilde{W}, v'_{\parallel}) dv'_{\parallel} \right] d\tilde{W}} \right\} d\tilde{v}_{\parallel}. \quad (5.13)$$

Здесь  $v_{\parallel}^*(W)$  соответствует границе конуса потерь для частиц с данным  $W$ :

$$W = (\sigma-1)^{-1} (v_{\parallel}^*)^2 + q(v_{\parallel}^*). \quad (5.14)$$

Зависимость  $\omega(\tilde{v}_{\parallel})$  находится из (5.2) и (5.3). Отметим, что при  $v_{\parallel} < v_m$   $f = 0$ .

Для большей конкретизации полученных выражений (5.12) и (5.13) выберем источник энергичных электронов в виде

$$j = j_{\parallel}(v_{\parallel}) \delta(W - W_0). \quad (5.15)$$

Спектр волн запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{\omega} = \begin{cases} \frac{\pi m \omega}{\nu k^2} \left(1 + \frac{\omega_B}{2\omega}\right) \int_{v_m}^{(\omega_B - \omega)^{1/k} l^{-1}} j_{\parallel}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}, \\ \text{если } \frac{1}{\sigma-1} \left(\frac{\omega - \omega_B}{k}\right)^2 + q\left(\frac{\omega - \omega_B}{k}\right) < W_0; \\ 0, \text{ если } \frac{1}{\sigma-1} \left(\frac{\omega - \omega_B}{k_i}\right)^2 + q\left(\frac{\omega - \omega_B}{k}\right) > W_0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Таким образом, частотный спектр не имеет особенностей и пропорционален мощности источника. Минимальная частота определяется границей конуса потерь, а максимальная — граничной скоростью  $v_m$ . В простейшем случае, когда  $j_{\parallel}(v_{\parallel}) = j_* \delta(v_{\parallel})$ , из (5.16) следует

$$\varepsilon_{\omega} = \begin{cases} \frac{\pi m c^2}{\nu \omega_p^2} (\omega_B - \omega) \left(1 + \frac{\omega_B}{2\omega}\right) j_*, \text{ если } \omega > \omega_{\text{мин}}; \\ 0, \text{ если } \omega < \omega_{\text{мин}}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Этот спектр приведен на рис. 10, где  $\omega_{\text{мин}}$  определяется выражением

$$\frac{1}{\sigma-1} \left(\frac{\omega_{\text{мин}} - \omega_B}{k_{\text{мин}}}\right)^2 + q\left(\frac{\omega_{\text{мин}} - \omega_B}{k_{\text{мин}}}\right) = W_0. \quad (5.18)$$

Допустим, что  $\omega_{\text{мин}} \ll \omega_B$ . Тогда из (5.7) и (5.18) следует, что  $(\sigma - 1)^{-1} \omega_B^2 k_{\text{мин}}^{-2} + \omega_B^2 k_{\text{мин}}^{-2} = W_0$ . Отсюда

$$\frac{\sigma}{\sigma - 1} \frac{\omega_B^2}{k_{\text{мин}}^2} = v^2. \quad (5.19)$$

Максимальная спектральная плотность энергии  $\epsilon_{\omega_{\text{макс}}}$  реализуется при  $\omega = \omega_{\text{мин}}$  и равна  $\epsilon_{\omega_{\text{макс}}} = \pi t c^2 \omega_B^2 j_* / 2 \nu \omega_p^2 \omega_{\text{мин}}$ . Используя (5.19), получаем, что

$$\epsilon_{\omega_{\text{макс}}} = \frac{\sigma - 1}{4\sigma^2} \frac{S_E \pi \omega^2 T_g}{l \omega_B |\ln R|}. \quad (5.20)$$

Здесь учтено, что  $J_\Sigma = \pi \sigma j_* = 2S_E$ ,  $\nu = 2|\ln R|/T_g$ .

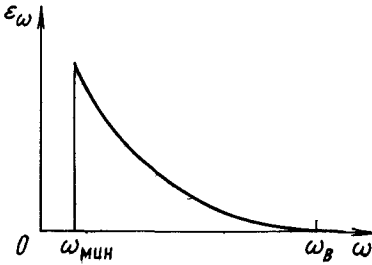


Рис. 10. Стационарный спектр электромагнитного шума

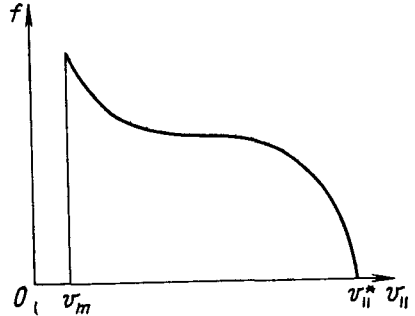


Рис. 11. Функция распределения, отвечающая источнику частиц (5.15)

Изучим теперь выражение для функции распределения (5.13), считая, что источник дается формулой (5.15). При этом получается, что

$$f(W, v_{||}) = \begin{cases} \delta(W - W_0) \int_{v_{||}}^{v_{||}^*(W_0)} \frac{v}{\pi g(\omega, W, v_{||})} dv_{||}', & \text{если } v_{||} > v_m; \\ 0, & \text{если } v_{||} < v_m. \end{cases} \quad (5.21)$$

Функция распределения зависит от источника только через граничную скорость  $v_m$ . Подставляя в (5.21) выражение для  $g$  и используя уравнение линий диффузии (5.5), вместо (5.21) получаем

$$f(W, v_{||}) = \begin{cases} \delta(W - W_0) \frac{\nu n_p}{\pi^2 \omega_B} \int_{v_{||}}^{v_{||}^*(W_0)} \frac{q(v_{||})}{v_{||}^2 [W - q(v_{||})]} dv_{||}, & \text{если } v_{||} > v_m, \\ 0, & \text{если } v_{||} < v_m. \end{cases} \quad (5.22)$$

Ясно, что  $W_0 - q(v_{||}) = v_{||}^2 > 0$  вне конуса потерь. Поэтому  $f$  монотонно падает до нуля при  $v_{||} = v_{||}^*(W_0)$ . Максимум этой функции при  $v_{||} = v_m$ . Пример функции распределения приведен на рис.11.

При  $v_m \rightarrow 0$  функция распределения в нуле имеет особенность. Действительно, при малых  $v_{||}$  (5.6)  $q = (\omega_B c / \omega_p)^{4/3} v_{||}^{2/3}$ . Поэтому

$$f = \delta(W - W_0) \frac{3\nu n_p c}{\pi^2 \omega_B W_0} \left( \frac{\omega_B}{\omega_p} \right)^{4/3} \left( \frac{c}{v_{||}} \right)^{1/3}. \quad (5.23)$$

Эта особенность функции распределения связана с тем, что линии диффузии при  $v_{||} = 0$  имеют вертикальные касательные (см. рис. 9). Особенность интегрируемая и поэтому может реализоваться в действительности. Именно эта тонкая деталь функции распределения обеспечивает то, что спектр простирается до  $\omega = \omega_B$ .

Получим выражение для концентрации захваченных энергичных частиц

$$n = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{v_{||}^2 (\sigma-1)^{-1} + q(v_{||})}^{\infty} f(W, v_{||}) dW \right] dv_{||}. \quad (5.24)$$

Подставляя сюда функцию распределения (5.22), после интегрирования по частям найдем

$$n = \frac{n_p \nu}{\pi \omega_B} \int_{v_m}^{v_{||}^*} \frac{q(v_{||}) (v_{||} - v_m)}{v_{||}^2 (W_0 - v_{||}^2)} dv_{||}. \quad (5.25)$$

В нуле интеграл сходится, а поэтому для оценок можно ограничиться случаем ( $\omega \ll \omega_B$ ), когда  $q(v_{||}) \simeq v_{||}^2$ . С учетом этого упрощения

$$\frac{n}{n_p} \simeq \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{\omega_B} \int_{v_m}^{v_{||}^*} \frac{v_{||} - v_m}{W_0 - v_{||}^2} dv_{||}. \quad (5.26)$$

Вычисляя этот интеграл и считая, что  $v_m \ll v_{||}^*(W_0)$ , будем иметь

$$\frac{n}{n_p} \simeq \frac{\nu \ln \sigma}{\omega_B 2\pi} \left( 1 - \frac{v_m}{v} \right). \quad (5.27)$$

Важной для сопоставления с наблюдениями является зависимость параметров РП от концентрации основной плазмы. Нижняя частота в спектре, вблизи которой реализуется максимум интенсивности, согласно (5.19) и (5.20) при  $\omega \ll \omega_B$  обратно пропорциональна концентрации:

$$\omega_{\min} \sim 1/n_p. \quad (5.28)$$

Верхняя частота в спектре слабо зависит от концентрации. Точнее при  $v_m^2/c^2 \rightarrow 0$

$$\omega_{\max} = \omega_B \left[ 1 - \left( \frac{4\pi n_p m v_m^2}{B^2} \right)^{1/3} \right]. \quad (5.29)$$



Из (2.38) и (5.19) следует, что  $v = 2|\ln R|/T_g \sim n_p^{-1}$ , поэтому концентрация захваченных частиц (5.27) от  $n_p$  не зависит, а максимальная спектральная плотность энергии волн (5.20)

$$\varepsilon_{\omega \text{ макс}} \sim n_p. \quad (5.30)$$

**Случай неоднородной ловушки.** Реальная геомагнитная ловушка существенно отличается по геометрии от однородного пробкотрона. Формально учет этого отличия сводится к тому, что вместо уравнений (5.8) и (5.9) в случае слабой диффузии следует использовать уравнения (3.4)—(3.6). Особенностью этих уравнений является отсутствие резонансной связи параметров, характеризующих движение частицы и частоту волны, взаимодействующей с ней. Следствием этого является отсутствие переменных одномерной диффузии. Часто, однако, основная доля энергии волн сосредоточена на низких частотах  $\omega \ll \omega_{BL}$ . В этом случае можно не учитывать диффузию по энергии и использовать уравнения (3.7)—(3.10). Мы изучим стационарное состояние РП в приближении (3.11):  $kv/\omega_{BL} \gg 1$  и  $\mu \ll 1$ , когда систему (3.7)—(3.10) можно записать следующим образом:

$$\frac{2\omega_{pL}^2}{n_{pL} mc^2} \left( \int_{\omega_{BL}/v}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_k dk}{kv \sqrt{kv/\omega_{BL}-1}} \right) \mu^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) = -J; \quad (5.31)$$

$$\frac{\pi^2 a}{2ln_{pL} \omega_{BL}} \int_{\omega_{BL}/k}^{\infty} \frac{k^2 v^4}{\sqrt{kv/\omega_{BL}-1}} \left( \int_{\mu_c}^{1-\omega_{BL}^2/k^2 v^2} \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} d\mu \right) dv = v(k). \quad (5.32)$$

Из (5.31) и (5.32) нетрудно получить интегральное уравнение для спектра электромагнитного шума:

$$\int_{\omega_{BL}/k}^{\infty} \frac{k^2 v^4}{\sqrt{kv/\omega_{BL}-1}} \left\{ \frac{\int_{\mu_c}^{1-(\omega_{BL}/kv)^2} \left[ \int_{\mu}^{\mu_m} (j/\tilde{\mu}^{1/2}) d\tilde{\mu} \right] d\mu}{\int_{\omega_{BL}/v}^{\infty} \mathcal{E}_{\tilde{k}} d\tilde{k} / \tilde{k} v \sqrt{\tilde{k}v/\omega_{BL}-1}} \right\} dv = \frac{4v\omega_{BL} \omega_{pL}^2}{\pi^2 amc^2}. \quad (5.33)$$

Зададимся источником быстрых частиц вида

$$J = J_* \delta(\mu - \mu_0) \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_0^2} \right\}, \quad (5.34)$$

где  $\mu_0 \ll 1$ . Подставляя (5.34) в (5.33) и решая последовательно два интегральных уравнения типа Абеля, найдем спектр волн:

$$\mathcal{E}_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k < \omega_{BL}/v_0, \\ 2,5 \frac{mc^2 \omega_{BL}^5 \mu_0 S_E}{i \omega_{pL}^2 \eta \sigma v_0^3} k^{-6} & \text{при } k > \omega_{BL}/v_0. \end{cases} \quad (5.35)$$

Выражение (5.35) получено в предположении, что основные потери энергии волн связаны с нагревом в области  $D$ -слоя. При этом\*  $\nu = = 2|\ln R|/T_g = \Theta k^2$ , а  $\Theta$  не зависит от  $k$  [31].

Полная плотность энергии, запасенная в волнах,

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2 \omega_{BL}^3 \mu_0 S_E}{i \omega_{pL}^2 \nu \sigma}. \quad (5.36)$$

Из уравнения (5.31), зная спектр волн (5.35), легко восстановить функцию распределения

$$F \simeq \begin{cases} \frac{0,2 \ln_{pL} \nu}{v_0^3 \omega_{BL} a \mu_0} \left( \ln \frac{\mu}{\mu_c} \right) \exp \left\{ -\frac{v^2}{v_0^2} \right\} & \text{при } \mu_0 > \mu > \mu_c, \\ 0 & \text{при } \mu > \mu_0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Полное число частиц, захваченных в ловушке с единичным сечением на уровне ионосферы, равно:

$$N = \frac{5 \ln_{pL} \nu \sigma}{\mu_0^{1/2} \omega_{BL}} \left( \ln \frac{\mu_0}{\mu_c} - 2 \right). \quad (5.38)$$

Следует заметить, что интегральные характеристики РП, описываемые формулами (5.36)—(5.38), находятся в хорошем соответствии с аналогичными выражениями, полученными в приближении узкого спектра волн.

Значительно более сложным является случай, когда  $\mu_m \simeq 1$ , где  $\mu_m$  — максимальное значение  $\mu$  у частиц, поставляемых источником. Из условия циклотронного резонанса (5.2) следует, что для обеспечения непрерывного потока этих частиц в конус потерь в спектре волн должны быть все частоты вплоть до  $\omega_{BL}$ . Соответственно основой расчета должны быть уравнения (3.4)—(3.6) без малого параметра. Интересно было бы доказать хотя бы принципиальную возможность стационарного состояния для такой ситуации. В настоящее время этот вопрос остается открытым. Некоторые закономерности взаимодействия волн и частиц в случае источника с  $\mu_m \simeq 1$  обсуждаются в § 8.

## § 6. Временная эволюция ЦН

Обратимся теперь к анализу динамики ЦН в геомагнитной ловушке [22, 23]. Следует отметить, что как по физическим процессам, так и по математическому описанию динамика ЦН во многом аналогична ди-

\* Зависимости более общего вида  $\nu \sim k^s$  соответствует спектр  $\mathcal{E}_k \sim k^{-4-s}$ .

намике оптических квантовых генераторов [50—52]. Это касается как рассматриваемых ниже релаксационных колебаний, так и модуляции ЦН слабыми периодическими воздействиями. Наряду с этим ЦН проявляет и ряд интересных специфических черт, которые отражены в § 7, 8.

Для описания динамики ЦН мы используем в качестве исходной систему уравнений (3.7)—(3.9). Коэффициент отражения  $R$ , входящий в уравнение переноса энергии ОНЧ-волн (3.9), зависит от плотности плазмы в нижней ионосфере, которая в свою очередь определяется потоком высыпавшихся в ионосферу электронов РП. Поэтому систему (3.7)—(3.9) мы дополним уравнением баланса ионизации в нижней ионосфере:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_E}{\partial t} &= q_E + \eta_E S_E - \alpha_E n_E^2, \\ S_E &= \frac{1}{2} \left( J_\Sigma - \frac{\partial N}{\partial t} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где  $q_E$  — постоянный источник, определяющий среднюю ионизацию в ионосфере,  $\eta_E$  — среднее число электрон-ионных пар в единице объема, создаваемых одним энергичным электроном,  $\alpha_E$  — коэффициент рекомбинации,  $N$  — полное число быстрых частиц в силовой трубке сечением  $1 \text{ см}^2$  на уровне ионосферы,  $n_E$  — плотность электронов в ионосфере.

С помощью уравнения (3.7) нетрудно выразить через  $F$  и  $\Lambda$  поток частиц РП, высыпавшихся в ионосферу (см. также § 3). Для этого обе части (3.7) следует проинтегрировать по фазовому объему в пространстве скоростей и по объему силовой трубки с единичным сечением  $1 \text{ см}^2$  на уровне ионосферы:

$$S_E = \frac{\pi\sigma}{2} \int_0^\infty \int_{\mu_c}^1 T_b \left( J - \frac{\partial F}{\partial t} \right) v^3 dv d\mu = \frac{\pi\sigma}{2} \int_0^\infty \left( \mu\Lambda \frac{\partial F}{\partial \mu} \right) \Big|_{\mu=\mu_c} v^3 dv. \quad (6.2)$$

Считая для простоты разброс по энергиям небольшим ( $v \sim v_0$ ) и обозначая  $\mu^{1/2} = \kappa$ , получим, используя (4.3), (4.4), (6.1) и (6.2) при условии (3.12а), полную систему уравнений, описывающую динамику ЦН в случае слабой диффузии по питч-углам и узкого спектра волн ( $k \sim k_0$ ):

$$\frac{\partial F_*}{\partial t} = \Delta_1 \mathcal{E} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( \kappa \frac{\partial F_*}{\partial \kappa} \right) + J_*(t, \kappa), \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \Delta_2 \left( \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \kappa^2 \frac{\partial F_*}{\partial \kappa} d\kappa \right) \mathcal{E} - \nu(n_E) \mathcal{E}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial n_E}{\partial t} = q_E + \Delta_3 \mathcal{E} \left( \kappa \frac{\partial F_*}{\partial \kappa} \right) \Big|_{\kappa_c} - \alpha_E n_E^2, \quad (6.5)$$

$$\text{где } \begin{Bmatrix} F_* \\ J_* \end{Bmatrix} = \pi\sigma \int_0^\infty v^3 \begin{Bmatrix} F \\ J \end{Bmatrix} dv,$$

$$\Delta_1 = 4\pi\omega_{BL}^2/B_L^2 k_0 v_0 (k_0 v_0/\omega_{BL} - 1)^{1/2},$$

$$\Delta_2 = \pi a m v_0^2 k_0 \omega_0 \Delta_1 / 2l \sigma \omega_{BL}^2,$$

$$\Delta_3 = \pi a \eta_E / v_0, \quad v = (2/T_g) |\ln R(n_E)|.$$

Исследуем решение (6.3)—(6.5). Случай произвольного источника рассмотрен в приложении Б. Здесь для максимальной наглядности мы выберем источник, при котором решение системы (6.3)—(6.5) получается наиболее просто. Таким является источник вида  $J_*(t, \kappa) = J_\Sigma(t)Z(\kappa)$ , где  $Z(\kappa)$  — положительное решение соответствующей уравнению (6.3) задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d}{d\kappa} \left( \kappa \frac{dZ}{d\kappa} \right) = -\rho^2 Z, \quad (6.6)$$

$$Z \Big|_{\kappa=\kappa_c} = 0, \quad \frac{dZ}{d\kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_m} = 0. \quad (6.6a)$$

Общее решение уравнения (6.6) имеет вид

$$Z(\kappa) = C_1 J_0(2\rho\kappa^{1/2}) + C_2 N_0(2\rho\kappa^{1/2}), \quad (6.7)$$

где  $J_0$  и  $N_0$  — соответственно функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. Используя граничные условия (6.6a) и положительность решения  $Z > 0$ , найдем соответствующее собственное значение

$$\rho = 0,15\pi (\kappa_m^{1/2} - \kappa_c^{1/2})^{-1}. \quad (6.8)$$

При этом  $Z(\kappa)$  запишется в виде

$$Z(\kappa) = \frac{v_0 \rho^2}{4a} [N_0(2\rho\kappa_c^{1/2}) J_0(2\rho\kappa^{1/2}) - J_0(2\rho\kappa_c^{1/2}) N_0(2\rho\kappa^{1/2})], \quad (6.9)$$

где использована нормировка  $(4\pi a/v_0) \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} Z(\kappa) d\kappa = 1$ . Как теперь легко видеть, решение (6.3) можно записать следующим образом:

$$F_*(t, \kappa) = N(t)Z(\kappa),$$

причем  $N(t)$  — полное число частиц в силовой трубке с единичным сечением у основания. В результате для определения  $N(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  и  $n_E(t)$  мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -\delta \mathcal{E} N + J_\Sigma; \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= h \mathcal{E} N - v(n_E) \mathcal{E}, \\ \frac{dn_E}{dt} &= q_E + \tau \mathcal{E} N - \alpha_E n_E^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

где  $\delta = \Delta_1 p^2$ ,  $h = \Delta_2 \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \kappa^2 \frac{dZ}{d\kappa} d\kappa$ ,  $\tau = (\Delta_3 v_0 p^2 / 4\pi a)$ ,  $J_\Sigma$  — полное число горячих частиц, поступающих в единицу времени в силовую трубку с сечением у основания  $1 \text{ см}^2$ .

Учитывая выражение (6.9) для  $Z$  и неравенство  $\kappa_c \ll \kappa_m < 1$ , найдем

$$h = \frac{\Delta_2 v_0}{4\pi a} (\kappa_m - \kappa_c).$$

**Эволюция ЦН с начальными условиями.** Рассмотрим сначала эволюцию циклотронной неустойчивости с начальными условиями без источника, пренебрегая изменением свойств ионосферы. При этом система (6.10) сведется к двум уравнениям вида:

$$dN/dt = -\delta \mathcal{E} N; \quad d\mathcal{E}/dt = h\mathcal{E}N - v\mathcal{E} \quad (6.11)$$

с начальными условиями:

$$t = 0, \quad N = \tilde{N} > v/h, \quad \mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}. \quad (6.12)$$

Система (6.11) имеет интеграл движения:

$$\delta (\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}) + h (N - \tilde{N}) = v \ln (N/\tilde{N}). \quad (6.13)$$

Зависимость  $N(t)$  определяется следующим соотношением:

$$t = \int_{\ln(N/\tilde{N})}^0 [\delta \tilde{\mathcal{E}} + v\xi + \tilde{\gamma} (1 - \exp(\xi))^{-1}]^{-1} d\xi, \quad (6.14)$$

где  $\tilde{\gamma} = h\tilde{N}$  — начальный инкремент неустойчивости. Плотность энергии  $\mathcal{E}$  ОНЧ-волн, как функция времени, имеет максимум, равный

$$\mathcal{E}_{\text{макс}} = \tilde{\mathcal{E}} + \delta^{-1} [\tilde{\gamma} - v - v \ln(\tilde{\gamma}/v)], \quad (6.15)$$

а характерное время процесса определяется выражением:

$$T \simeq (\tilde{\gamma} - v)^{-1} \ln(\mathcal{E}_{\text{макс}}/\tilde{\mathcal{E}}). \quad (6.16)$$

Плотность электронов в максимуме РП монотонно уменьшается, а поток высыпавшихся частиц повторяет временную зависимость полной энергии ОНЧ-волн. Существенно, что в конечном состоянии, когда  $\mathcal{E} \rightarrow 0$ , плотность захваченных частиц может быть значительно меньше пороговой плотности  $N$ , соответствующей границе неустойчивости  $hN = v$ , особенно, если в начальный момент концентрация частиц существенно превышала  $v/h$ .

**Релаксационные колебания параметров РП.** Пусть теперь в геомагнитной ловушке действует постоянный во времени источник  $J_\Sigma$ . При

этом система (6.10) имеет состояние равновесия, которое характеризуется следующими параметрами:

$$n_{E0} = \left( \frac{\delta q_E + \tau J_\Sigma}{\delta \alpha_E} \right)^{1/2}, \quad N_0 = \frac{v(n_{E0})}{h}, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{hJ_\Sigma}{\delta v(n_{E0})}. \quad (6.17)$$

Исследуем динамику ЦН вблизи состояния равновесия (6.17). Для этого линеаризуем систему (6.10) около состояния равновесия, представив все величины в виде  $a = a_0 + a_{\sim} \exp \{ \lambda t \}$ . Используя линеаризованную систему (6.10), нетрудно записать характеристическое уравнение

$$(\lambda + 2\alpha_E n_{E0})(\lambda^2 + 2\nu_J \lambda + \Omega_J^2) - \chi \lambda = 0, \quad (6.18)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Omega_J^2 = hJ_\Sigma, \quad 2\nu_J = \frac{hJ_\Sigma}{v(n_{E0})}, \quad \chi = \frac{2\tau J_\Sigma}{\delta T_g R_0} \left( \frac{\partial R}{\partial n_E} \right)_0.$$

Состояние равновесия будет неустойчивым, если

$$4\alpha_E^2 n_{E0}^2 + 4\alpha_E n_{E0} \nu_J + \Omega_J^2 < \left( \frac{\alpha_E n_{E0}}{\nu_J} + 1 \right) \chi. \quad (6.19)$$

Таким образом, возбуждение периодических режимов ЦН при постоянном источнике возможно лишь при  $\chi > 0$ , т.е.  $\partial R / \partial n_E > 0$ . В случае РП увеличение ионизации  $n_E$  в нижней ионосфере приводит обычно к росту поглощения ОНЧ-волн ( $\chi < 0$ ). Однако в некоторых случаях возможна смена знака  $\chi$ , если высыпание энергичных частиц приводит преимущественно к росту градиентов концентрации  $n_E$  и увеличению отражения циклотронных волн от ионосферы.

Остановимся несколько подробнее на устойчивых периодических режимах ЦН ( $\chi < 0$ ), более типичных в реальных условиях. В случае, когда изменение добротности резонатора из-за высыпания частиц пренебрежимо мало ( $\chi \rightarrow 0$ ), получаем следующее решение уравнения (6.18):

$$\lambda_{1,2} = -\nu_J \pm i(\Omega_J^2 - \nu_J^2)^{1/2}, \quad \lambda_3 = -2\alpha_E n_{E0}, \quad (6.20)$$

где

$$\Omega_J = (\nu_J J_\Sigma / N_0)^{1/2}, \quad \nu_J = J_\Sigma / N_0, \quad (6.21)$$

$N_0$  — число энергичных электронов в силовой трубке единичного сечения (у основания). Если представить источник в виде (4.16)  $J_\Sigma = N_0 T_l^{-1}$ , то для  $\Omega_J$  получим формулу  $\Omega_J = (v/T_l)^{1/2} = (\gamma/T_l)^{1/2}$  ( $\gamma = 2T/T_g$  — усредненный инкремент ЦН). Слабозатухающие колебания интенсивности электромагнитного излучения и потоков высыпающихся частиц будут иметь место при выполнении неравенства

$$\Omega_J T_g < 4 |\ln R|. \quad (6.22)$$

При учете модуляции  $R$  собственные частоты (6.20) меняются. В частности, при  $\chi \gg \Omega_J$  собственные значения  $\lambda$ , соответствующие квазипериодическому режиму, равны

$$\lambda_{1,2} \simeq \pm i |\chi|^{1/2} - (\nu_J + \alpha_E n_{E0}); \quad |\chi| \gg (\nu_J - \alpha_E n_{E0})^2. \quad (6.23)$$

Анализ формул (6.20)—(6.23) показывает, что собственная частота растет в зависимости от амплитуды источника, как  $J_{\Sigma}^{1/2}$ , добротность же падает, как  $J_{\Sigma}^{-1/2}$ , уменьшаясь также с уменьшением поглощения циклотронных волн на торцах ловушки.

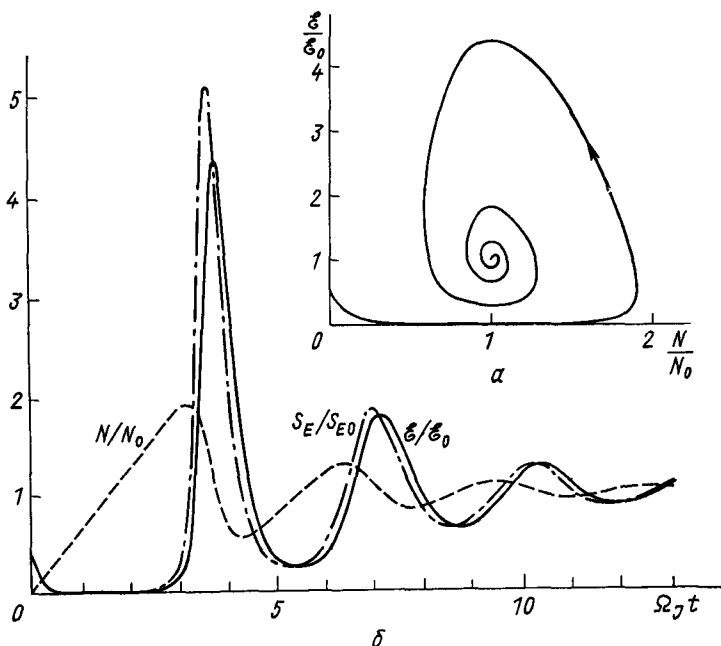


Рис. 12. Релаксационные колебания ЦН:  
 а — фазовая плоскость, соответствующая уравнению (6.24);  
 б — релаксация параметров системы к равновесию

Ряд выводов можно сделать о поведении системы (6.10) вдали от состояния равновесия. В частности, пренебрегая изменением  $R$  из-за высыпаний ( $\chi \rightarrow 0$ ), получим квазипериодические режимы ЦН в виде отдельных «пичков», которые описываются нелинейным уравнением (см. рис. 12).

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\nu_J \frac{d\xi}{dt} \exp \{\xi\} + \Omega_J^2 (\exp \{\xi\} - 1) = 0, \quad (6.24)$$

где  $\xi = \xi_0 \exp \{\xi\}$ ,  $\xi_0$  — как и прежде, плотность энергии циклотронных волн в состоянии равновесия,  $d\xi/dt = \hbar N - \nu$ .

Форма «пичка» в случае слабозатухающих колебаний определяется соотношением

$$\sqrt{2} \Omega_J (t - t_0) = \pm \int_{\zeta(t_0)}^{\zeta} (\exp \{\zeta_{\text{макс}}\} - \zeta_{\text{макс}} - \exp \{\zeta'\} + \zeta')^{-1/2} d\zeta'. \quad (6.25)$$

Выражение (6.25) нетрудно исследовать в сильнонелинейном пределе  $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 \gg 1$ . Частота следования «пичков» и их длительность при этом равны:

$$\Omega_{JN} \simeq \pi \left( \frac{\mathcal{E}_0}{2\mathcal{E}_{\text{макс}}} \right)^{1/2} \Omega_J; \quad (6.26)$$

$$\Delta t \simeq \Omega_J^{-1} \left( \frac{2\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_{\text{макс}}} \right)^{1/2} \ln \frac{4\mathcal{E}_{\text{макс}}}{\mathcal{E}_0}. \quad (6.27)$$

Интересно, что в данном случае закон затухания максимальной амплитуды  $\mathcal{E}_{\text{макс}}$  остается экспоненциальным, как и вблизи состояния равновесия, с

$$\nu_{JN} = (2/3) \nu_J. \quad (6.28)$$

Пренебрегая затуханием (т. е. для  $t \ll \nu_J^{-1}$ ), выразим  $\mathcal{E}_{\text{макс}}$  через начальные значения параметров РП  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{N}$ :

$$\mathcal{E}_{\text{макс}}/\mathcal{E}_0 \simeq \ln(\mathcal{E}_0/\mathcal{E}) + (1/2) [(v - h\tilde{N})/\Omega_J]^2. \quad (6.29)$$

После подстановки (6.29) в (6.26) имеем

$$\Omega_{JN} = \begin{cases} \pi \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \right]^{-1/2} \Omega_J \text{ при } \frac{(v - h\tilde{N})^2}{\Omega_J^2} \ll 2 \ln \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}, \\ \pi \sqrt{2} (v - h\tilde{N}) \Omega_J^2 \text{ при } \frac{(v - h\tilde{N})^2}{\Omega_J^2} \gg 2 \ln \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}, \quad v > h\tilde{N}. \end{cases}$$

Таким образом, основные закономерности, характерные для поведения ЦН вблизи состояния равновесия, такие как условие существования квазипериодических режимов, рост собственных частот в зависимости от мощности источника и т. п., сохраняются и для нелинейных режимов при значительном отклонении параметров от состояния равновесия.

**Модуляция ЦН гидромагнитными волнами.** Исследованные выше релаксационные колебания особенно важны при воздействии на РП периодических возмущений типа магнитогидродинамических и дрейфовых волн. Присутствие гидромагнитных колебаний, модулирующих плотность и степень анизотропии захваченных частиц, фактически приводит к появлению осциллирующей части в источнике  $J_{\Sigma}$ . Например, в случае быстрой магнитно-звуковой волны малой амплитуды  $b$  с  $\mathbf{k} \perp \mathbf{V}$  ее воздействие можно описать эффективным источником  $J_{\Sigma \sim} =$



$= (\frac{\partial b}{\partial t}/2B)[2(1 - \mu)\mu\partial F/\partial\mu - \mu\partial F/\partial\nu]$ , где при достаточно малом отношении  $b/B$  в правую часть можно подставить  $F$ , соответствующую состоянию равновесия (6.17).

При наличии таких возмущений в правой части уравнения (6.24) появится внешняя сила, равная  $\Delta\Omega^2 \cos \Omega t$  с  $\Delta = \max(J_{\Sigma\sim}/J_{\Sigma})$ . В случае совпадения частоты внешней силы с частотой релаксационных колебаний, т. е. при  $\Omega \simeq \Omega_J$  возникает резонанс, при котором слабое возмущение может привести к глубокой модуляции интенсивности ОНЧ-излучения и потоков быстрых частиц. Ограничиваясь для простоты линейным приближением, легко найти степень модуляции интересных нас величин относительно состояния равновесия:

$$\max \frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} \simeq \max \frac{S_{E\sim}}{S_{E0}} = Q_J \max \frac{N_{\sim}}{N_0} = Q_J \Delta, \quad (6.30)$$

где  $Q_J = \Omega_J/2\nu_J$  — добротность релаксационных колебаний,  $S_E$  — плотность потока высыпающихся частиц,  $\Delta = \max(J_{\Sigma\sim}/J_{\Sigma})$ . Из (6.30) следует, что при высокой добротности  $Q_J \gg 1$  степень модуляции интенсивности циклотронных волн и потоков высыпающихся электронов намного превышает модуляцию плотности захваченных частиц.

Разумеется, аналогичные эффекты будут наблюдаться и при модуляции коэффициента отражения  $R$ , причем эту модуляцию можно создать искусственно, например, с помощью мощного КВ-передатчика.

Полученные выше результаты касались частного вида зависимости коэффициента диффузии (3.8) от питч-угла и энергии, а также специального источника энергичных частиц. Вместе с тем в приложении Б показано, что релаксационные колебания РП существуют для широкого класса источников при произвольной функциональной зависимости коэффициента диффузии от питч-угла и энергии. Таким образом, релаксационные колебания являются общим свойством РП при наличии источника энергичных частиц.

## § 7. Автоколебательные режимы ЦН

Выше в качестве источника релаксационных колебаний предполагались геомагнитные пульсации, обусловленные внешними причинами. В то же время возможно возбуждение МГД-волн при развитии самих релаксационных колебаний. Дело в том, что в геомагнитной ловушке возмущения давления в РП связаны через диамагнетизм и эффекты вмороженности с возмущениями магнитного поля. При подходящей связи этих возмущений может возникнуть неустойчивость с переходом релаксационных колебаний в режим автоколебаний, сопровождаемых интенсивными микропульсациями геомагнитного поля. Качественно этот вопрос обсуждался в работе [53]. Ниже дана количественная теория этого эффекта.

**Модуляционная неустойчивость, связанная с магнитно-звуковыми волнами.** Рассмотрим возможность появления такого режима более

детально [22]. Начнем с эффектов возбуждения МГД-волн, обусловленных возмущением плотности частиц РП. Пусть возмущенное геомагнитное поле равно  $\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{b}(t, \rho, z)$ , где  $\mathbf{V}$  — невозмущенное поле,  $\rho$  — координата поперек силовых линий. Следует отметить, что в интересующем нас случае ( $|\mathbf{b}| \ll |\mathbf{V}|$ ) наибольшее воздействие на РП оказывают возмущения, магнитное поле которых имеет составляющую  $\mathbf{b}_{\parallel} \parallel \mathbf{V}$  (см. § 2). Такое возмущение в плазме с малым  $\beta = 8\pi P_{\perp}/B^2 \ll 1$  ( $P_{\perp}$  — поперечное давление плазмы) соответствует пакету быстрых магнитно-звуковых волн.

Предположим, теперь, что в некоторой области магнитосферы существует резонатор для МГД-волн магнитно-звукового типа. Роль резонатора может выполнять отдельная силовая трубка магнитного поля с повышенной концентрацией холодной плазмы. Такого рода образования часто возникают в магнитосфере в период повышенной геомагнитной активности [54, 55]. Как уже отмечалось ранее (см. § 2), такая трубка с увеличенным значением  $n_p$  благоприятна и для развития ЦН. Источником новых частиц в трубке может служить поток\* дрейфующих в геомагнитном поле электронов, которые вне трубки не взаимодействуют с циклотронными волнами из-за низкой концентрации  $n_p$ . В случае, когда поперечный размер трубки-резонатора  $\rho_0 \ll l$ , можно не учитывать кривизну силовых линий и аппроксимировать резонатор прямым цилиндром. Неоднородность магнитного поля вдоль  $z$  в данном случае определяет продольную структуру поля гидромагнитной волны. Мы ограничимся анализом простейшего случая однородного вдоль  $z$  резонатора [альфвеновская скорость  $v_A(z) = \text{const}$ ] с  $\beta \ll 1$ , когда быстрые магнитно-звуковые волны можно рассматривать независимо от других типов волн.

С учетом указанных приближений волновое уравнение для аксиально-симметричных колебаний запишется в виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial b}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho}{B} \frac{\partial P_{\perp}}{\partial \rho} \right), \quad (7.1)$$

где  $b \equiv b_{\parallel}$ ,  $v_A = c\omega_{Bi}/\omega_{pi}$ ,  $\omega_{pi}$  и  $\omega_{Bi}$  — плазменная и гирочастота ионов холодной плазмы,  $P_{\perp} = \frac{1}{2} m \int v_{\perp}^2 f d^3v$  — поперечное давление электронов РП.

Решение линейного уравнения (7.1) с источником можно представить в виде разложения по собственным функциям оператора левой части уравнения (7.1). При  $v_A = \text{const}$  собственными функциями этого оператора являются  $\begin{Bmatrix} \sin \kappa_m z \\ \cos \kappa_m z \end{Bmatrix}$  по координате  $z$  и функции Бесселя нулевого порядка  $\begin{Bmatrix} N_0(\kappa_n \rho) \\ J_0(\kappa_n \rho) \end{Bmatrix}$  по поперечной координате. При большом перепаде концентраций внутри и вне резонатора магнитно-звуковые колебания обладают высокой добротностью, а набор собственных чисел  $\kappa_n$  определяется корнями уравнения  $J_0(\kappa_n \rho_0) = 0$ .

\* Здесь имеется аналогия с проточными газовыми лазерами

Условие обращения в нуль возмущений на торцах геомагнитной ловушки определяет продольные собственные числа:  $\kappa_m = m\pi/l$  и соответствующие собственные функции  $\sin \kappa_m (z + l/2)$ . Собственные частоты МГД-резонатора теперь находятся из следующего соотношения:

$$\Omega_M^2 = (\kappa_n^2 + \kappa_m^2) v_A^2. \quad (7.2)$$

Учитывая сказанное, представим решение (7.1) в следующем виде:

$$b(t, \rho, z) = \sum_{n=0, m=1}^{\infty} b_{nm} J_0(\kappa_n \rho) \sin \kappa_m (z + l/2). \quad (7.3)$$

Амплитуды  $b_{nm}(t)$  в (7.3) удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 b_{nm}}{dt^2} + 2\nu_M \frac{db_{nm}}{dt} + \Omega_M^2 b_{nm} = -\beta_{nm} \Omega_M^2 \frac{B}{N_0} N, \quad (7.4)$$

где затухание  $\nu_M$  обусловлено конечной добротностью МГД-резонатора, а

$$\beta_{nm} = 2 (\Omega_M^2 \rho_0^2 n_p l m_i)^{-1} \kappa_m d J_1^{-1}(\kappa_m d) \int_{-l/2}^{+l/2} P_{\perp 0}(z) \sin \kappa_m \left( z + \frac{l}{2} \right) dz,$$

где  $m_i$  — масса протона.

Учтем теперь гидромагнитные возмущения в уравнениях (3.7)—(3.10). Для этого левую часть уравнения (3.10) следует дополнить членом  $(\frac{db}{dt} / 2B) [\mu v \frac{\partial F}{\partial v} - 2\mu (1 - \mu) \partial F / \partial v]$ , а в коэффициентах уравнений магнитное поле взять в виде  $B' = B + b$ . При этом в коэффициенте диффузии и инкременте появятся добавки, пропорциональные амплитуде гидромагнитных волн  $b/B_L$ . Модуляция  $\delta$  и  $h$  МГД-волнами при этом будет существенно зависеть от структуры  $b(\rho, z)$ , так как в (3.7)—(3.10) входит средний по  $z$  эффект. Вследствие этого наибольшую роль будут играть возмущения с низким нечетным значением  $m$ . В «двухуровневом» приближении (6.10) уравнения (3.7)—(3.10) с учетом гидромагнитных возмущений запишутся следующим образом ( $\chi \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= - \left( 1 + s_1 \frac{\bar{b}}{B_L} \right) \delta \mathcal{E} N + J_{\Sigma}; \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \left( 1 + s_2 \frac{\bar{b}}{B_L} \right) h \mathcal{E} N - \nu \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где величина и знак коэффициентов  $s_1$  и  $s_2$  зависят от таких факторов, как вид источника, плотность плазмы  $n_p$ , зависимость  $b(z)$  и т. д. В наиболее благоприятных условиях ( $m \sim 1$ ) значения коэффициентов  $|s_1, s_2| \sim 1$ . Систему (7.5) можно записать в виде одного уравнения вто-

рого порядка, которое при  $\bar{b}/B_L \ll 1$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\nu_J \frac{d\xi}{dt} \exp\{\xi\} + \Omega_J^2 (\exp\{\xi\} - 1) = \\ & = \frac{\bar{b}}{B_L} \left[ s_2 \left( \frac{d\xi}{dt} + \nu \right) \frac{d \ln \bar{b}}{dt} + s_2 \Omega_J^2 - s_1 \nu_J \left( \frac{d\xi}{dt} + \nu \right) \exp\{\xi\} \right], \quad (7.6) \end{aligned}$$

где по-прежнему  $\xi = \ln(\mathcal{E}/\mathcal{E}_0)$ .

Исследуем поведение решения системы уравнений (7.4)—(7.6) при малых отклонениях от состояния равновесия, представив все величины в виде  $a = a_0 + a_1 \exp\{\lambda t\}$ . Линеаризованной системе удовлетворяет решение

$$a(\rho, z) = a_{nm} J_0(\kappa_n \rho) \sin \kappa_m(z + l/2). \quad (7.7)$$

С учетом (7.7) нетрудно записать характеристическое уравнение системы (7.4)—(7.6):

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 2\nu_J \lambda + \Omega_J^2) (\lambda^2 + 2\nu_M \lambda + \Omega_M^2) &= \frac{\beta}{2} \left( \frac{\Omega_J \Omega_M}{\kappa_n \rho_0} \right)^2 \times \\ &\times \left[ s_2 + (s_1 - s_2) \frac{\lambda}{\nu} \right]. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (7.8) пропорциональна малому параметру  $\beta = 8\pi P_{\perp}/B_L^2$ , поэтому в случае неустойчивости максимальные инкременты следует ожидать на двойном резонансе  $\Omega \simeq \Omega_J \simeq \Omega_M$  ( $\nu_J, \nu_M \ll \Omega$ ). Полагая  $\lambda = i\Omega_J + \gamma_M$ , найдем величину инкремента этой своеобразной модуляционной неустойчивости (при  $\Omega_J = \Omega_M$ ):

$$\gamma_M = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[ (\nu_M - \nu_J)^2 - \frac{\beta}{2} \Omega_J^2 (\kappa_n d)^{-2} (s_2 + i s_1 - i s_2) \right]^{1/2} - (\nu_M + \nu_J) \right\}. \quad (7.9)$$

В случае высокой добротности релаксационных колебаний  $\nu_J/\Omega_J \ll 1$  и  $|s_1| \sim |s_2|$  неустойчивость в основном обусловлена модуляцией инкремента и возникает при  $s_2 < 0$ . Порог неустойчивости по  $\beta$  равен

$$\beta \geq \beta_{\min} = 8 (\kappa_n \rho_0)^2 \frac{\nu_J \nu_M}{|s_2| \Omega_J^2} \ll 1. \quad (7.10)$$

Инкремент неустойчивости вдали от порога

$$\gamma_M = \left( \frac{|s_2| \beta}{8 \kappa_n^2 \rho_0^2} \right)^{1/2} \Omega_J. \quad (7.11)$$

Знак  $s_2$  определяется конкуренцией возникающих при  $b \neq 0$  эффектов диамагнитного перераспределения горячей плазмы и изменения числа резонансных с электромагнитными волнами частиц, с одной стороны (при этом  $s_2 < 0$ ), и эффектов роста  $n_p$  из-за «вмороженности» и изменения анизотропии, с другой (при этом  $s_2 > 0$ ). В работе [24] показано, что, как правило, преобладает эффект роста инкремента

с ростом  $b$  ( $\partial\gamma/\partial b > 0$ ), т. е. обратная связь отрицательная, и неустойчивость отсутствует. Однако можно указать, по крайней мере, на одну возможность смены знака  $s_2$  ( $s_2 < 0$ ), связанную с зависимостью  $\nu = 2 |\ln R|/T_g$  от частоты. Дело в том, что, как показывают теоретические оценки и свидетельствует эксперимент, при  $\omega > \omega_{BL}/2$  волны перестают распространяться канальным путем, т. е.  $\nu$  резко растет. При этом, если максимум инкремента лежит в области частот  $\omega > \omega_{BL}/2$ , рост  $b$  приводит к уменьшению  $\gamma$ , т. е.  $s_2 < 0$ . Более подробно этот вопрос рассмотрен в § 2 и в работе [24].

Таким образом, при достаточно большой анизотропии электронов РП в рассматриваемой системе возможна модуляционная неустойчивость, приводящая к одновременной раскатке релаксационных колебаний РП и геомагнитных микропульсаций\*.

**Модуляционная неустойчивость, обусловленная альфвеновскими волнами.** Выше мы рассмотрели автомодуляционную неустойчивость на примере быстрых магнитно-звуковых волн. Оказалось, что неустойчивость в приближении прямых силовых линий и однородной плазмы возникает при весьма специфических условиях. Ниже исследуется автомодуляция, связанная с альфвеновскими волнами, для которых важную роль играют кривизна и продольная неоднородность магнитного поля. Методика расчета возбуждения альфвеновских волн в неоднородном магнитном поле переменной кривизны была развита А. Б. Михайловским и О. А. Похотеловым [56]. В дальнейшем мы будем опираться на полученные ими результаты.

Рассматриваемый вопрос тесно примыкает к задачам, где при анализе низкочастотных дрейфовых неустойчивостей принимается во внимание эффективная частота соударений, обусловленная присутствием высокочастотной (в частности, свистовой) турбулентности [57, 58]. Однако в отличие от указанных работ ниже проводится самосогласованный анализ задачи [25], когда учитывается обратное влияние низкочастотных МГД-колебаний на свистовую турбулентность. Такая обратная связь играет важную роль, существенно влияя на спектр и инкременты рассматриваемых дрейфовых неустойчивостей и приводя к появлению глубокой модуляции интенсивности циклотронных волн и потоков энергичных электронов, высыпающих из геомагнитной ловушки.

Для анализа ЦН в присутствии альфвеновской волны уравнения (3.7)—(3.10) следует дополнить членом, описывающим возмущение функции распределения альфвеновскими волнами. Будем иметь:

$$-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \bar{\Omega}_d \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \psi} = \frac{1}{T_b} \frac{\partial}{\partial J_{\perp}} \left[ G(J_{\perp}, \nu) \mathcal{E} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial J_{\perp}} \right] + J + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta F_A^{(2)}), \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} K(J_{\perp}, \nu) \frac{\partial F^{(2)}}{\partial J_{\perp}} dJ_{\perp} \right] d\nu \right\} \mathcal{E} - \nu \mathcal{E} \quad (7.13)$$

\* Нелинейная стадия этой неустойчивости изучена в работе [22].

с граничными условиями при  $J_{\perp c} = v^2/2B_L\sigma$  и  $J_{\perp m} = \mu_m v^2/2B_L$ :

$$F^{(2)} \Big|_{J_{\perp}=J_{\perp c}} = 0, \quad \frac{\partial F^{(2)}}{\partial J_{\perp}} \Big|_{J_{\perp}=J_{\perp m}} = 0$$

и нормировкой

$$N = 2\pi B_E \int_0^{\infty} \left( \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} T_b F^{(2)} dJ_{\perp} \right) v dv. ]$$

Здесь  $F^{(2)}(t, J_{\perp}, v)$  — функция распределения в системе координат, связанной с мгновенным положением силовых линий магнитного поля, усредненная по периоду осцилляций частиц между зеркальными точками;  $\Delta F_A$  — усредненная по периоду баунс-осцилляций  $T_b$  (2.31) добавка к функции распределения, связанная с альфвеновской волной;  $\psi$  — азимутальный угол;  $\bar{\Omega}_d$  — средняя угловая скорость азимутального дрейфа;  $N$  — как и прежде, полное число энергичных электронов в магнитной силовой трубке с единичным сечением у основания, величины  $G(J_{\perp}, v)$ ,  $K(J_{\perp}, v)$  определяются соотношениями (3.7)–(3.10) при  $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}\delta(k - k_0)$ .

Следует отметить, что  $G$  и  $K$  зависят только от модуля  $B$ . Это позволяет не учитывать их изменение под действием альфвеновской волны, так как оно квадратично по амплитуде последней.

Рассмотрим малые возмущения  $F^{(2)}$  и  $\mathcal{E}$  вблизи состояния равновесия, соответствующего стационарному режиму ЦН. Стационарному состоянию отвечают  $F_0$  (Б.3а),  $\mathcal{E}_0$  (Б.3б) и амплитуда альфвеновской волны  $b_A = 0$ . Линеаризуя уравнения (7.12) и (7.13) вблизи (5.12) и (5.13) для гармонических процессов ( $a = a_0 + a_{\sim} \exp\{-i\Omega t\}$ ), получаем:

$$-i(\Omega - s\bar{\Omega}_d) F^{(2)} = -\frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} J + \frac{1}{T_b} \frac{\partial}{\partial J_{\perp}} \left( G \mathcal{E}_0 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial J_{\perp}} \right) - i\Omega \Delta F_A^{(2)}, \quad (7.14)$$

$$-i\Omega \mathcal{E}_{\sim} = \mathcal{E}_0 \int_0^{\infty} \left( \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} K \frac{\partial F^{(2)}}{\partial J_{\perp}} dJ_{\perp} \right) dv; \quad (7.15)$$

$$F^{(2)} \Big|_{J_{\perp}=J_{\perp c}} = 0, \quad \frac{\partial F^{(2)}}{\partial J_{\perp}} \Big|_{J_{\perp}=J_{\perp m}} = 0.$$

Далее мы воспользуемся системой криволинейных координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , связанных с силовыми линиями магнитного поля,  $x^2 = \psi$  — азимутальный угол;  $x^3 = z$  характеризует расстояние вдоль силовой линии от экватора, а  $x^1 = \Phi/2\pi g^{1/2}$  — дополняет их до правой тройки,  $\Phi$  — магнитный поток, заключенный внутри выбранной поверхности. Эта система координат характеризуется метрическим тензором  $g^{ik}$ , с помощью которого квадрат элемента длины и элемент объема выражаются следующим образом:

$$d^2r = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2, \quad d^3r = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (7.16)$$

При этом  $B = (0, 0, B)$ ,  $B = (\partial\Phi/\partial x^1)/2\pi g^{1/2}$ ,  $g = g_{11}g_{22}g_{33}$ . В указанной системе координат добавку к функции распределения  $\Delta F_A$ , связанную с альфвеновской волной, для аксиально-симметричной ловушки можно представить в виде [25, 57]:

$$\Delta F_A = \Delta F_A^{(1)} + \Delta F_A^{(2)}, \quad (7.17)$$

где

$$\Delta F_A^{(1)} = -\xi \frac{\partial F_0}{\partial x^1}, \quad (7.18)$$

$$\Delta F_A^{(2)} = \frac{\Omega - s\Omega_*}{\Omega} \frac{1}{v} \frac{\partial F_0}{\partial v} \frac{1}{T_b} \oint \frac{v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B}{R} \xi \frac{dz}{v_{\parallel}}. \quad (7.19)$$

При выводе выражения (7.19) зависимость от координаты  $\psi$  была взята в виде  $\exp\{is\psi\}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Угловая скорость азимутального дрейфа в неоднородном кривом магнитном поле

$$\Omega_d = -\frac{v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B}{R} 2\pi mc \sqrt{g_{11}}/e \frac{\partial\Phi}{\partial x^1}, \quad \bar{\Omega}_d = \frac{1}{T_b} \oint \Omega_d \frac{dz}{v_{\parallel}}, \quad (7.20)$$

$\Omega_*$  — частота ларморовского дрейфа;  $\xi$  — смещение среды в направлении  $x^1$ , вызванное альфвеновской волной;  $R$  — радиус кривизны магнитного поля.

В (7.17) слагаемое  $\Delta F_A^{(1)}$  (7.18) обусловлено перемещением силовой трубки в целом и поэтому не дает вклада в (7.12). Это связано с тем, что групповой путь ОНЧ-волн определяется силовой линией магнитного поля и смещается вместе с ней (инкремент ОНЧ-волн определяется функцией распределения в системе координат, связанной с силовыми линиями).

Найдем решение уравнения (7.14), используя разложение  $F_{\sim}$  по собственным функциям оператора диффузии (более подробно см. § 6). Будем иметь

$$F_{\sim}^{(2)} = \sum_p (i\Delta\Omega - \nu p^2)^{-1} \left( \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} T_b Z_p J dJ_{\perp} + i\Omega \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} T_b Z_p \Delta F_A^{(2)} dJ_{\perp} \right) Z_p, \quad (7.21)$$

где  $\Delta F_A^{(2)}$  определяется выражением (7.19);  $\Delta\Omega = \Omega - s\bar{\Omega}_d$ ;  $Z_p(J_{\perp}, v)$  — собственные функции самосопряженного оператора

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T_b} \frac{\partial}{\partial J_{\perp}} \left[ \frac{\mathcal{G}_0}{v} G(J_{\perp}, v) \frac{\partial Z_p}{\partial J_{\perp}} \right] &= -p^2(v) Z_p, \\ Z_p \Big|_{J_{\perp} = J_{\perp c}} &= 0, \quad \frac{\partial Z_p}{\partial J_{\perp}} \Big|_{J_{\perp} = J_{\perp m}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

отвечающие собственному значению  $p$  и удовлетворяющие условию нормировки  $\int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} T_b Z_p^2 dJ_{\perp} = 1$ . Используя далее (7.15) и (7.21), выразим  $\mathcal{E}_{\sim}$  через  $\Delta F_A^{(2)}$ :

$$\frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} = -i\Omega \left\{ \int_0^{\infty} dv \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} dJ_{\perp} K \frac{\partial}{\partial J_{\perp}} \left[ \sum_p Z_p (i\Omega - \nu p^2)^{-1} \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} T_b Z_p \Delta F_A^2 dJ_{\perp} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ i\Omega + \int_0^{\infty} dv \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} dJ_{\perp} K \frac{\partial}{\partial J_{\perp}} \left[ \sum_p Z_p (i\Omega - \nu p^2)^{-1} \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} T_b Z_p J dJ_{\perp} \right] \right\}^{-1}. \quad (7.23)$$

Мы ограничимся анализом наиболее интересного случая слабозатухающих релаксационных колебаний РП, когда  $p_{\text{макс}}^2 \nu \ll |\Delta\Omega|$ . При этом вместо (7.23) приближенно можно записать:

$$\frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} \simeq i\Omega (\Omega^2 - \Omega\Delta\Omega)^{-1} \int_0^{\infty} \left( \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} K \frac{\partial \Delta F_A^{(2)}}{\partial J_{\perp}} dJ_{\perp} \right) dv, \quad (7.24)$$

где

$$\Omega_J = \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} K(J_{\perp}, v) \frac{\partial J(J_{\perp}, v)}{\partial J_{\perp}} dJ_{\perp} \right] dv \right\}^{1/2}. \quad (7.25)$$

собственная частота релаксационных колебаний.

Используя выражения (7.21) и (7.24), найдем возмущение функции распределения в неподвижной системе координат

$$F_{\sim} = -\xi \frac{\partial F_0}{\partial x^1} + \frac{\Omega}{\Delta\Omega} \Delta F_A^{(2)} + \\ + J \left( \frac{\Omega}{\Delta\Omega} \right) (\Omega^2 - \Omega\Delta\Omega)^{-1} \int_0^{\infty} \left( \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} K \frac{\partial \Delta F_A^{(2)}}{\partial J_{\perp}} dJ_{\perp} \right) dv. \quad (7.26)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений, остается выяснить эффективность возбуждения альфвеновских волн. Рассмотрим уравнения, определяющие возбуждение альфвеновской волны в магнитосферных условиях. В случае аксиально-симметричной плазмы и полоидально-геомагнитного поля уравнения для альфвеновской волны малой



амплитуды с частотой  $\Omega$  можно представить в виде следующей интегральной формы\* [56]:

$$A_1 \Omega^2 - A_2 + A_3 = 0. \quad (7.27)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int \left( g^{11} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x^1} \right|^2 + s^2 g^{22} |\xi|^2 \right) v_{\perp}^{-2} d^3 r; \\ A_2 &= \int \left( g^{11} \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^1 \partial x^3} \right|^2 + s^2 g^{22} \left| \frac{\partial \xi}{\partial x^3} \right|^2 \right) (g_{33})^{-1} d^3 r; \\ A_3 &= 32\pi^3 s^2 \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \right)^{-2} \xi^* P_{\sim} R^{-1} (g_{11})^{1/2} d^3 r, \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

где  $v_A$  — альфвеновская скорость;  $P_{\sim}$  — переменная составляющая давления, связанная с  $F_{\sim}$  следующим соотношением:

$$P_{\sim} = \frac{m}{2} B \int_0^{\infty} \left[ \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} \frac{v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B}{|v_{\parallel}|} F_{\sim} dJ_{\perp} \right] v dv. \quad (7.29)$$

При выводе уравнения (7.27) предполагалось малым отношение газокINETического давления к магнитному:  $\beta \ll 1$ .

С помощью (7.26) и (7.29) найдем возмущение давления плазмы:

$$\begin{aligned} P_{\sim} &= -\xi \frac{\partial P_0}{\partial x^1} + \frac{m}{2} B \int_0^{\infty} \left[ \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} \frac{v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B}{|v_{\parallel}|} \frac{\Omega}{\Delta \Omega} \Delta F_{\Lambda}^{(2)} dJ_{\perp} \right] v dv + \\ &+ \frac{m}{2} B \int_0^{\infty} \left\{ \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} \frac{v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B}{|v_{\parallel}|} \frac{\Omega}{\Delta \Omega (\Omega_J^2 - \Omega \Delta \Omega)} \times \right. \\ &\left. \times J \left[ \int_0^{\infty} \left( \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} K \frac{\partial \Delta F_{\Lambda}^{(2)}}{\partial J_{\perp}} dJ_{\perp} \right) dv \right] dJ_{\perp} \right\} dv. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Первый член в (7.30) связан с  $F_{\sim}^{(1)}$  и дает вклад в действительную поправку частоты, второй член описывает дрейфовую неустойчивость альфвеновской волны, обусловленную неоднородной кривизной магнитного поля [56], третий учитывает эффекты ЦН.

Рассмотрим условия возникновения модуляционной неустойчивости на двойном резонансе, когда частота релаксационных колебаний  $\Omega_J$  (7.25) близка к частоте альфвеновских волн  $\Omega_A = (A_2/A_1)$  [см. (7.27)]:

$$\Omega \sim \Omega_J \simeq \Omega_A \quad (7.31)$$

\* При этом масштаб гидромагнитного возмущения по координате  $x^1$  должен быть мал по сравнению с масштабом поперечной неоднородности системы. Параметр связи альфвеновских волн с магнитно-звуковыми имеет порядок  $(\kappa^1 R)^{-2}$ , где  $\kappa^1$  — поперечное волновое число альфвеновской волны.

и много больше частоты азимутального дрейфа  $\bar{\Omega}_d$ . В этом случае основную роль в (7.30) играет третий член, пропорциональный  $(\Omega_J^2 - \Omega_A^2)^{-1}$ . Его подстановка в (7.27) и (7.28) дает ( $\bar{\Omega}_d \rightarrow 0$ ) дисперсионное уравнение

$$(\Omega^2 - \Omega_A^2) (\Omega^2 - \Omega_J^2) = -M, \quad (7.32)$$

где

$$M = \frac{32\pi^3 s^2 m}{A_1} \int_{\Phi_{\text{МИН}}}^{\Phi_{\text{МАКС}}} d\Phi \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} \right)^{-2} \int_0^\infty v^3 dv \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} dJ_{\perp} T_b J \times \\ \times \int_0^\infty dv' \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} dJ'_{\perp} K(J'_{\perp}, v') \frac{\partial}{\partial J'_{\perp}} \left\{ (s\Omega_* - \Omega) v' \frac{\partial F_0}{\partial v'} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{T_b(J_{\perp}, v)} \oint \frac{(v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B) \xi^*}{Rv^2} \frac{dz}{v_{\parallel}} \right] \left[ \frac{1}{T_b(J'_{\perp}, v')} \oint \frac{(v_{\parallel}'^2 + J'_{\perp} B) \xi}{Rv'^2} \frac{dz'}{v_{\parallel}'} \right] \right\}. \quad (7.33)$$

Наличие у уравнения (7.32) неустойчивого решения будет означать, что стационарное состояние, определяемое уравнениями (Б.3а) и (Б.3б), неустойчиво: нарастает глубина модуляции интенсивности электромагнитных ОНЧ-шумов и потоков частиц. Одновременно растет и амплитуда альфвеновской волны. Уравнения (7.32) и (7.33) позволяют найти критерий такой модуляционной неустойчивости и оценить ее инкремент.

Покажем, сначала, что эта неустойчивость при выполнении условия двойного резонанса (7.31) является универсальной. Если величина  $M$  комплексная, то у уравнения (7.32) обязательно есть неустойчивое решение; неустойчивое решение есть и при действительном  $M > 0$ ; если  $M < 0$ , то неустойчивость тоже есть, но для моды с другим знаком  $s$ . Неустойчивости не будет только при  $M = 0$ , т. е. в однородном магнитном поле и поле с постоянной кривизной [56].

Для оценки инкремента модуляционной неустойчивости удобно упростить выражение (7.33), считая, что величина  $T_b^{-1} \oint [(v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B) \xi / Rv^2 v_{\parallel}] dz$  зависит от  $J_{\perp}$  и  $v$  более плавно по сравнению с другими подынтегральными функциями в (7.33). Учитывая это, получаем, что при  $\Omega_J = \Omega_A$  инкремент

$$\gamma_A = \frac{2s}{\Omega_J} \left\{ \frac{\pi^3 m}{A_1} \int_{\Phi_{\text{МИН}}}^{\Phi_{\text{МАКС}}} d\Phi \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} \right)^{-2} \int_0^\infty dv \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} dJ_{\perp} T_b J v^{-1} \times \right. \\ \times \left| \frac{1}{T_b} \oint \frac{(v_{\parallel}^2 + J_{\perp} B) \xi}{R} \frac{dz}{v_{\parallel}} \right|^2 \times \\ \left. \times \int_0^\infty dv' \int_{J_{\perp c}}^{J_{\perp m}} dJ'_{\perp} K v' \frac{\partial}{\partial J'_{\perp}} \left[ \left( \frac{s\Omega_*}{\Omega} - 1 \right) \frac{\partial F_0}{\partial v'} \right] \right\}^{1/2}. \quad (7.34)$$

Отсюда после ряда упрощений имеем оценку

$$\frac{\gamma_A}{\Omega} \simeq \frac{l}{R} \left\{ \frac{\beta s^2}{(1 + s^2 \rho_0^2 / L^2 R_E^2)} \left( \frac{s \Omega_*}{\Omega} - 1 \right) \right\}^{1/2}, \quad (7.35)$$

где  $\Omega \simeq (v_A/l) q$ ,  $q = 1, 2, \dots$ ;  $\beta = 8\pi P_0 / B^2$ ,  $P_0$  — стационарное давление энергичных электронов;  $\Omega_* \simeq v^2 / \omega_B \rho_0^2$ ,  $\rho_0$  — поперечный размер области, занятой плазмой.

Формула (7.35) справедлива для достаточно малых  $s$ . Основное ограничение на азимутальное число связано с тем, что для пренебрежения частотой  $\bar{\Omega}_d$  в (7.30) необходимо выполнение неравенства  $|s \bar{\Omega}_d| \ll \Omega_J$ . Кроме того, на значения  $s$  накладывает ограничения частотная дисперсия показателя преломления альфвеновских волн:  $|s| \ll \omega_{Bi} / \Omega$  ( $\omega_{Bi}$  — гирочастота протонов).

Следует подчеркнуть резонансный характер рассмотренных выше неустойчивостей по сравнению с известными дрейфовыми и диссипативными неустойчивостями, приводящий к существенно более медленной зависимости  $\gamma_{M.A}$  (7.11), (7.35) от  $\beta$  ( $\gamma_{M.A} \sim \beta^{1/2}$ ).

## § 8. Динамика спектра волн при развитии ЦН

В § 6, 7 динамика ЦН изучалась, в основном, для случая источников энергичных частиц сравнительно частного вида, близких к классу собственных функций оператора диффузии по питч-углам. При этом пренебрегалось изменением частотного спектра ОНЧ-волн. В данном параграфе мы откажемся от указанного ограничения и на двух важных примерах исследуем эволюцию спектра циклотронных волн.

Следует подчеркнуть, что устойчивые стационарные состояния РП при действии произвольного источника и ЦН, по-видимому, реализуются не всегда. Качественно это связано с тем обстоятельством, что при интегральном характере взаимодействия волн и частиц в неоднородной ловушке ЦН перестает зависеть от тонких деталей функции распределения (ср. § 5). Вследствие этого не все частицы, поставляемые источником, взаимодействуют с циклотронными волнами. В области больших питч-углов происходит накопление частиц и формируется функция распределения со ступенькой при некотором значении  $\mu$ . При этом возникает характерный дрейф частоты в спектре волн в сторону высоких частот. Когда ступенька доходит до границы  $\mu = 1$ , система оказывается ниже порога возбуждения. После этого происходит некоторое время накопления частиц в ловушке до порога ЦН, и процесс повторяется.

**Динамика спектра циклотронных волн вблизи состояния равновесия.** Рассмотрим описанный выше режим количественно в случае малых отклонений от стационарного состояния. Допустим, что спектр волн все время лежит в области  $\omega \ll \omega_{BL}$ . Тогда за основу можно взять уравнения (3.7) и (3.9). Линеаризуя их вблизи состояния равно-

весья, в случае слабой диффузии по питч-углам при малом разбросе по модулю скорости ( $v \sim v_0$ ) в переменных  $\kappa = \mu^{1/2}$ ,  $v$  будем иметь:

$$\frac{\partial F_{\sim}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left\{ \left[ \int D(k, \kappa) \mathcal{E}_{k_{\sim}} dk \right] \frac{\partial F_0}{\partial \kappa} \right\} + \frac{\partial}{\partial \kappa} \left\{ \left[ \int D(k, \kappa) \mathcal{E}_{k_0} dk \right] \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} \right\}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{k_{\sim}}}{\partial t} = \mathcal{E}_{k_0} \int K(k, \kappa) \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} d\kappa, \quad (8.2)$$

где  $\mathcal{E}_{k_0}$  и  $F_0(\kappa)$  — стационарные распределения. В двух предельных случаях, приведенных в § 3, функции  $D$  и  $K$  могут быть представлены в виде:

$$D = D_1(k) D_2(\kappa), \quad K = K_1(k) K_2(\kappa). \quad (8.3)$$

В таком случае для процесса  $\exp\{\lambda t\}$  из (8.1) и (8.2) получаем

$$\lambda F_{\sim} = -J \left( \int D_1 \mathcal{E}_{k_{\sim}} dk \right) \left( \int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk \right)^{-1} + \left( \int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk \right) \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( D_2 \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} \right); \quad (8.4)$$

$$- \lambda \mathcal{E}_{k_{\sim}} = \mathcal{E}_{k_0} K_1 \int K_2 \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} d\kappa. \quad (8.5)$$

где  $J(\kappa)$  характеризует мощность источника энергичных частиц (3.7).

Исключая из системы уравнений (8.4) и (8.5)  $\mathcal{E}_{k_{\sim}}$ , находим

$$\lambda^2 F_{\sim} - \lambda \left( \int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk \right) \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( D_2 \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} \right) + J \frac{\int D_1 K_1 \mathcal{E}_{k_0} dk}{\int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk} \int K_2 \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} d\kappa. \quad (8.6)$$

Это уравнение имеет много общего с уравнением, которое решается в приложении Б. Соответственно его можно решать тем же методом, разлагая  $F_{\sim}(\kappa)$  и  $J(\kappa)$  по собственным функциям самосопряженного оператора:

$$\frac{d}{d\kappa} \left[ D_2(\kappa) \frac{dZ_p}{d\kappa} \right] = -p^2 Z_p, \quad Z_p|_{\kappa=\kappa_c} = 0, \quad \frac{dZ_p}{d\kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_m} = 0. \quad (8.7)$$

Зная общее решение, полученное в приложении Б, можно сразу указать два наиболее интересных случая. Первый соответствует тому, что  $J$  совпадает с одной из собственных функций. В этом случае  $J = J_p Z_p$ , и уравнение (8.6) имеет решение вида  $F_{\sim} = C Z_p$ , а  $\lambda$  определяется уравнением

$$\lambda^2 - \lambda p^2 \int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk + J_p \frac{\int D_1 K_1 \mathcal{E}_{k_0} dk}{\int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk} \int K_2 \frac{\partial Z_p}{\partial \kappa} = 0. \quad (8.8)$$

Это уравнение отвечает гармоническим колебаниям с затуханием.

Пусть теперь в (8.6)  $J(\kappa)$  является функцией плавной в классе собственных функций оператора диффузии по питч-углам (8.7). При этом в приложении Б показано, что в уравнении (8.6) несущественно второе слагаемое, и соответственно

$$\lambda^2 F_{\sim} + J \frac{\int D_1 K_1 \mathcal{E}_{k_0} dk}{\int D_1 \mathcal{E}_{k_0} dk} \int K_2 \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} d\kappa = 0. \quad (8.9)$$

Дифференцируя (8.9) по  $\kappa$ , умножая на  $K_2$  и интегрируя, получаем, что частота колебаний относительно равновесия

$$\Omega_J = \left\{ \left[ \frac{\int D_1(k) K_1(k) \mathcal{E}_{k_0} dk}{\int D_1(k) \mathcal{E}_{k_0} dk} \right] \int K_2(\kappa) \frac{\partial J(\kappa)}{\partial \kappa} d\kappa \right\}^{1/2}. \quad (8.10)$$

Этот результат является обобщением формулы (Б.24). Отличие в том, что здесь есть периодический ход средней частоты

$$\langle \omega \rangle = \frac{\int (\mathcal{E}_{k_0} + \mathcal{E}_{k_{\sim}}) \omega dk}{\int (\mathcal{E}_{k_0} + \mathcal{E}_{k_{\sim}}) dk}, \quad (8.11)$$

связанный с тем, что зависимости  $\mathcal{E}_{k_0}$  и  $\mathcal{E}_{k_{\sim}}$  не совпадают.

**Частотный дрейф при больших отклонениях от состояния равновесия.** При некоторых упрощениях, в частности, в приближении узкого спектра циклотронных волн, удастся проследить динамику спектра и вдали от состояния равновесия.

Допустим, что в момент  $t = 0$  включился источник  $J(\mu, \nu)$ , поставляющий энергичные частицы при всех значениях  $\mu \leq 1$ . Тогда функция распределения будет расти по закону

$$F = Jt$$

до тех пор, пока система не достигнет порога ЦН, т. е. пока на всех частотах

$$\Gamma(\omega) < |\ln R|,$$

где  $\Gamma(\omega)$  — усиление волн при однократном прохождении РП.

Характерное время накопления частиц имеет порядок

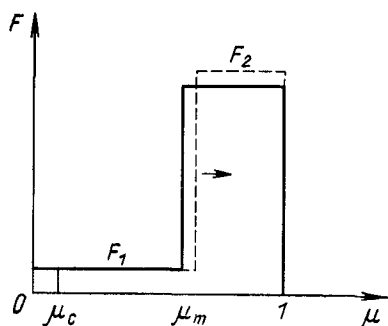
$$T_{ac} = \frac{n_{pL} |\ln R| \sigma^l}{\omega_{BL} T_g J_{\Sigma}} = T_l.$$

При достижении порога ( $\Gamma = |\ln R|$ ) начнется возбуждение циклотронных волн. Предположим, что реализуется случай умеренной диффузии по питч-углам с заполненным конусом потерь, когда в резонансной с волнами области функция распределения в переменных одномерной диффузии ( $\mu, W_a$ ) не зависит от  $\mu$ . При этом полную функцию распределения характеризуют две величины:  $F_1$  — значение в области

диффузии ( $\mu < \mu_m$ ) и  $F_2$  — высота ступеньки (рис. 13). Уравнения для  $F_1$  и  $F_2$  запишутся следующим образом:

$$\left. \frac{d}{dt} (\mu_m F_1) = F_2 \dot{\mu}_m - \delta F_1 + \mu_m J_0, \right\} \quad (8.12)$$

$$\left. \frac{d}{dt} [(1 - \mu_m) F_2] = -F_2 \dot{\mu}_m + (1 - \mu_m) J_0, \right\} \quad (8.13)$$



где  $\delta = 2v/l\sigma$  — скорость потерь,  $J_0 = \int_0^1 J d\mu$ ,  $F_1$  и  $F_2$ , вообще говоря, зависят от  $W_a$ .

Третье уравнение для  $\mu_m$ , замыкающее систему (8.12), (8.13), найдем, предполагая диффузию квазистационарной. При этом уравнение переноса энергии ОНЧ-волн можно заменить условием равновесия на пороге неустойчивости:

$$\Gamma_m = |\ln R|. \quad (8.14)$$

Рис. 13. Угловая зависимость функции распределения и ее динамика

В (8.14)  $\Gamma_m$  является функцией  $\mu_m$ ,  $F_1$  и  $F_2$ .

При произвольном соотношении частот  $\omega$  и  $\omega_{BL}$  выражение для  $\Gamma(\omega)$  имеет вид\*:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\gamma}{v_g} dz = \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\pi dz dz'}{2v_g} \int_0^\infty \frac{v^2 dv}{n_{pL} v_{||}} \int_0^1 d\mu (\omega_B - \omega)^2 \times \\ &\times \left( 1 - \mu \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{-1/2} \mu \left[ \left( 1 - \mu \frac{\omega}{\omega_{BL}} \right) \frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{v\omega}{2\omega_{BL}} \frac{\partial F}{\partial v} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -i \int_{z'}^z \left( \omega - \omega_B + kv \left( 1 - \mu \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{1/2} \right) v_{||}^{-1} d\tilde{z} \right\}. \quad (8.15) \end{aligned}$$

В геометрико-оптическом приближении основной вклад в (8.15) дает окрестность точки стационарной фазы, где  $\omega - \omega_B + kv \left( 1 - \mu \omega_B / \omega_{BL} \right)^{1/2} = 0$ ; при этом (8.15), естественно, совпадает с выражением (3.6). Бывают однако случаи с негладкой функцией распределения, когда стационарная точка является вырожденной (циклотронный резонанс для всех частиц достигается в центральном сечении ловушки); при этом (8.15) уже не сводится к (3.6). Именно такой случай нам встретится ниже.

\* Методика получения выражения (8.15) более подробно изложена в работе [52].

В приближении узкого спектра с центральной частотой  $\omega_0$  существуют переменные одномерной диффузии [см. (§ 3.1)]:

$$\mu = \mu, W_a = v^2 \left( 1 - \mu \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right). \quad (8.16)$$

В этих переменных (8.15) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) = & \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\pi dz dz'}{4v_g} \int_0^\infty \frac{dW_a}{n_{pL}} \int_0^1 d\mu (\omega_B - \omega)^2 \times \\ & \times \left( 1 - \mu \frac{\omega_0}{\omega_B} \right)^{-1} \left( 1 - \mu \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{-1} \left[ \left( 1 - \mu \frac{\omega}{\omega_{BL}} \right) \frac{\partial F}{\partial \mu} + \right. \\ & \left. + v^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{\omega_{BL}} \frac{\partial F}{\partial W_a} \right] \exp \left\{ i \int_z^z \left[ \omega_B - \omega - kv \left( 1 - \mu \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{1/2} \right] v_{\parallel}^{-1} d\tilde{z} \right\}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Учтем теперь, что функция распределения имеет форму ступеньки по  $\mu$ , причем  $\mu_m$  соответствует границе диффузии в поле волны с частотой  $\omega_0$ :

$$\mu_m = \frac{1 - v_R^2/W_a}{1 - (\omega_0/\omega_{BL})(v_R^2/W_a)}, \quad v_R = \frac{\omega_{BL} - \omega_0}{k_0}. \quad (8.18)$$

При этом

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = (F_2 - F_1) \delta(\mu - \mu_m). \quad (8.19)$$

Подставляя (8.19) в (8.17) и полагая  $\omega = \omega_0$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega_0) = & \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\pi dz dz'}{4v_g} \int_0^\infty \frac{dW_a}{n_{pL}} (\omega_B - \omega_0)^2 \times \\ & \times \left( 1 - \mu_m \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{-1} (F_2 - F_1) \times \\ & \times \exp \left\{ i \int_z^z \left[ \omega_B - \omega_0 - k_0 v \left( 1 - \mu_m \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{1/2} \right] v_{\parallel}^{-1} d\tilde{z} \right\}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Важной особенностью (8.20) является то обстоятельство, что точка стационарной фазы по  $z$  в (8.20), совпадающая с центром ловушки

$z = 0$ , вырождена. Представим подынтегральное выражение в экспоненте (8.20) в виде

$$\begin{aligned} & \omega_B - \omega_0 - k_0 W_a^{1/2} \left( 1 - \mu_m \frac{\omega_B}{\omega_{BL}} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left( 1 - \mu_m \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right)^{-1/2} \simeq \omega_{BL} - \omega_0 - \omega_{BL} \frac{z^2}{a^2} - \\ & - k_L W_a \left[ \frac{1 - \omega \omega_{BL}^{-1}}{1 - \omega \omega_B^{-1} (1 + z^2/a^2)^{-1}} \right] \left[ \frac{v_R^2}{W_a} - \frac{1 - v_R^2/W_a}{1 - \omega_0 \omega_{BL}^{-1}} \frac{z^2}{a^2} \right] \simeq \\ & \simeq \frac{k_L v_R}{2} \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right)^{-1} \left( \frac{W_a}{v_R^2} + 1 + \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right) \frac{z^2}{a^2}, \quad (8.21) \end{aligned}$$

где  $k_L = k_0(z = 0)$ . Подставляя (8.21) в (8.20), получим

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega_0) &= \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{dz dz'}{4v_g} \int_0^\infty \frac{dW_a}{n_{pL}} \frac{(\omega_B - \omega_0)^2}{(1 - \mu_m \omega_B/\omega_{BL})} \times \\ & \times (F_2 - F_1) \exp \{i S (z^3 - z'^3)\} = \\ & = \frac{\pi \Gamma^2(1/3) (\omega_B - \omega_0)^2}{9v_g n_{pL}} \int_{v_R^2}^{W_a^{\max}} (F_2 - F_1) (1 - \mu_m)^{-1} S^{2/3} dW_a, \quad (8.22) \end{aligned}$$

где  $\Gamma(1/3)$  — гамма-функция,  $S = (\omega_{BL}/6v_R a^2) (1 - \omega_0/\omega_{BL})^{-1} \times$   
 $\times (W_a/v_R^2 + 1 + \omega_0/\omega_{BL})$ ,  $W_a^{\max} = (1 - \mu_m \omega_0/\omega_{BL}) (1 - \mu_m)^{-1} v_R^2$ .  
 Полагая для простоты\*  $F_2 - F_1 = (n_2 - n_1) v_0^{-1} \delta(v^2 - v_0^2)$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega_0) &= \frac{\pi (\omega_B - \omega_0)^2 (n_2 - n_1) v_0}{4n_{pL} v_g v_R^2} \left( \frac{6v_R a^2}{\omega_{BL}} \right)^{2/3} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \left( 1 - \frac{v_R^2}{v_0^2} \right) \right] \left[ \frac{v_0^2}{v_R^2} \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right) + 1 + 2 \frac{\omega_0}{\omega_{BL}} \right]^{-2/3}. \quad (8.23) \end{aligned}$$

Уравнение (8.23) связывает  $n_2 - n_1$  с  $\mu_m(\omega_0)$  и дополняет систему (8.12), (8.13).

\* В области диффузии ( $\mu < \mu_m$ ) такое предположение делать нельзя, однако ниже показано, что вклад этой области в усиление мал.



Окончательно для описания динамики спектра циклотронных волн имеем следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\mu_m n_1) = n_2 \dot{\mu}_m - \delta n_1 + \mu_m J_0; \quad (8.24)$$

$$\frac{d}{dt}[(1 - \mu_m) n_2] = -n_2 \dot{\mu}_m + (1 - \mu_m) J_0; \quad (8.25)$$

$$n_2 - n_1 = Y \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_{BL}}\right)^{-5/6} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{BL}}\right)^{1/2}, \quad (8.26)$$

где  $Y = (4n_{pL} |\ln R| c/3\pi l \omega_{pL}) (v_0/6\omega_{BL} l)^{1/3}$  и предположено, что  $(v_0^2/v_R^2) \gg 1$ .

Связь  $\omega_0/\omega_{BL}$  с  $\mu_m$  определяется из соотношения:

$$\mu_m = 1 - v_R^2/v_0^2 = 1 - \beta_*^{-1} \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_{BL}}\right)^3 \omega_{BL}/\omega_0; \quad (8.27)$$

$$\beta_* = 4\pi n_{pL} m v_0^2/B_L^2.$$

В случае  $\omega_0 \ll \omega_{BL}$

$$\mu_m = 1 - \frac{\omega_{BL}}{\beta_* \omega_0} \text{ и } n_2 - n_1 = Y \beta_*^{-1/2} (1 - \mu_m)^{-1/2}. \quad (8.28)$$

При  $\omega_0 \sim \omega_{BL}$

$$\mu_m = 1 - \beta_*^{-1} (1 - \omega_0/\omega_{BL})^3 \text{ и } n_2 - n_1 = Y \beta_*^{-5/18} (1 - \mu_m)^{-5/18}. \quad (8.29)$$

Подставляя (8.28), (8.29) в (8.25), (8.26) и полагая  $n_2 \gg n_1$ , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}[(1 - \mu_m) n_2] &= -Y_\alpha \beta_*^{-\alpha} (1 - \mu_m)^{-\alpha} \dot{\mu}_m + (1 - \mu_m) J_0, \\ n_2 &\simeq Y_\alpha \beta_*^{-\alpha} (1 - \mu_m)^{-\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

Предположение  $n_2 \gg n_1$ , вообще говоря, неочевидно, и в дальнейшем мы его проверим. Решение (8.30) при  $\alpha = \text{const}$  легко находится:

$$1 - \mu_m = (\beta_*^\alpha Y_\alpha J_0 t + \beta_*^\alpha C)^{-1/\alpha}, \quad (8.31)$$

где константа интегрирования  $C$  определяется источником  $J$ .

Учитывая связь (8.27) и значение  $\alpha$ , получаем

$$\omega_0/\omega_{BL} = (Y_\alpha J_0 t + C)^2, \quad \omega_0 \ll \omega_{BL}, \quad (8.32)$$

и

$$1 - \omega_0/\omega_{BL} = (Y_\alpha J_0 t + C)^{-6/5}, \quad \omega_0 \sim \omega_{BL}. \quad (8.33)$$

Нетрудно теперь видеть, что критерий  $n_2 - n_1 \gg n_1$  действительно выполняется, поскольку  $n_2$  растет со временем, как  $t$ , а  $n_1$  при достаточно больших  $t$  стремится к постоянному значению  $J_0/\delta$ .

После того как  $\mu_m$  достигнет максимального значения  $\mu_m = 1$ , происходит срыв неустойчивости. Циклотронные волны, накопившиеся в ловушке, затухают за время

$$\Delta t = \nu^{-1} \ln \frac{\mathcal{E}_{\text{макс}}}{\mathcal{E}_0}. \quad (8.34)$$

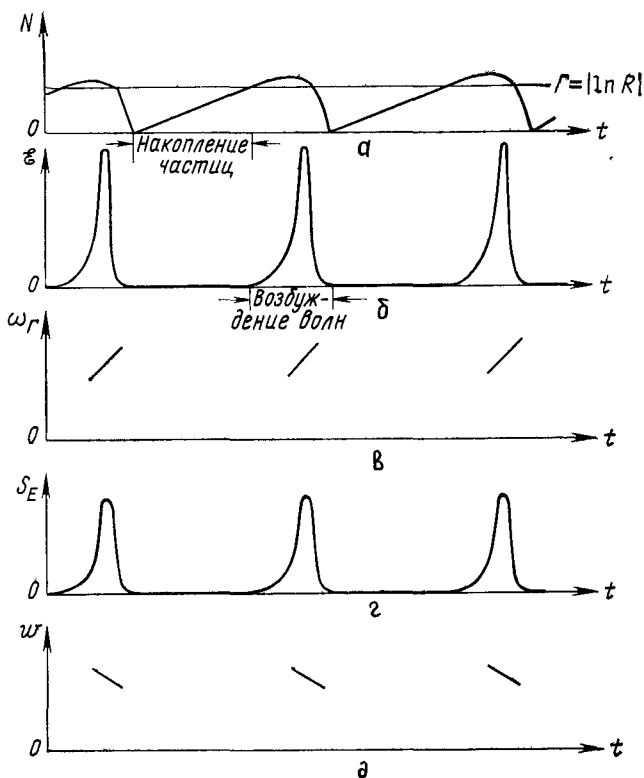


Рис. 14. Динамика ЦН вдали от состояния равновесия:

*a* — число энергичных электронов в силовой трубке сечением  $1 \text{ см}^2$  на уровне ионосферы; *b* — энергия шумов в единице объема; *в* — средняя частота в спектре воли; *г* — поток высокоэнергичных частиц, *д* — средняя энергия этих частиц

Если это время меньше времени накопления частиц в ловушке под действием источника ( $T_{ac} = T_l$ ):

$$\nu^{-1} \ll T_l, \quad (8.35)$$

то система вернется практически к первоначальному состоянию, и рассмотренный цикл повторится заново. Таким образом, в данном случае циклотронное излучение будет состоять из «пиков» длительностью  $\Delta t$  с быстрым дрейфом частоты излучения в сторону повышения и пауз длительностью  $T_l$ . Эти временные характеристики, а также необхо-

димое условие реализации такого режима (8.35) практически совпадают с соответствующими результатами § 6.

Интересно, что в процессе роста частоты излучения в пределах одного пика происходит уменьшение энергии высыпающихся частиц. Это может служить дополнительным критерием экспериментальной проверки теоретической модели. Пример динамики ЦН, соответствующей (8.32) и (8.33), приведен на рис. 14.

## **§ 9. Происхождение основных типов низкочастотных электромагнитных излучений в магнитосфере**

Экспериментальное изучение очень низкочастотных (ОНЧ) и крайне низкочастотных (КНЧ) электромагнитных излучений в интересующем нас диапазоне частот  $0,3 \leq \omega/2\pi \leq 10$  кГц продолжается уже свыше 20 лет. Такие исследования были предприняты как с помощью наземных средств, так и на многочисленных искусственных спутниках Земли в комплексе с изучением других геофизических явлений. Подробные сведения об этих исследованиях можно найти в многочисленных статьях и обзорах. Укажем, например, монографии [59, 60], обзоры [17, 18, 37, 62]. Эти исследования выявили чрезвычайно разнообразие явлений в ОНЧ- и КНЧ-диапазонах, и теория еще далека от их полного понимания. Однако можно выделить несколько основных типов КНЧ- и ОНЧ-излучений, тесно связанных с ЦН, в изучении которых достигнут существенный прогресс (см. рис. 15).

Таких основных типов электромагнитных КНЧ- и ОНЧ-излучений три:

- 1) шумовые стационарные широкополосные излучения КНЧ- и ОНЧ-диапазонов, получившие название «шипений» (hiss);
- 2) квазипериодические ОНЧ- и КНЧ-излучения, интенсивность которых промодулирована во времени с периодами  $10 \div 100$  с;
- 3) «хоры» — излучения с дискретной структурой спектра, состоящего из последовательности отдельных часто следующих друг за другом элементов.

Примеры указанных типов излучений приведены на рис. 16. Ниже мы обсудим связь этих сигналов с ЦН радиационных поясов и на ее основе постараемся объяснить основные их свойства.

**Генерация электромагнитных шумов КНЧ- и ОНЧ-диапазонов.** Согласно экспериментальным данным [59, 60, 62], условно можно выделить две группы шумовых излучений непрерывного типа: а) ОНЧ-«шипения» (частоты  $\omega/2\pi \gtrsim 2$  кГц); б) КНЧ-«шипения» (частоты  $\omega/2\pi < 2$  кГц).

Эти группы различаются не только по диапазону, но и по своим свойствам. КНЧ-шипения типичны для областей внутри плазмосферы и обладают более устойчивыми характеристиками по сравнению с ОНЧ-шипениями. ОНЧ-излучения чаще наблюдаются в окрестности плазмопаузы (как внутри плазмосферы, так и вне ее). К ОНЧ-шипениям относятся и всплески с частотным дрейфом, которые наблюдаются в периоды магнитных возмущений. Излучения указанного типа —

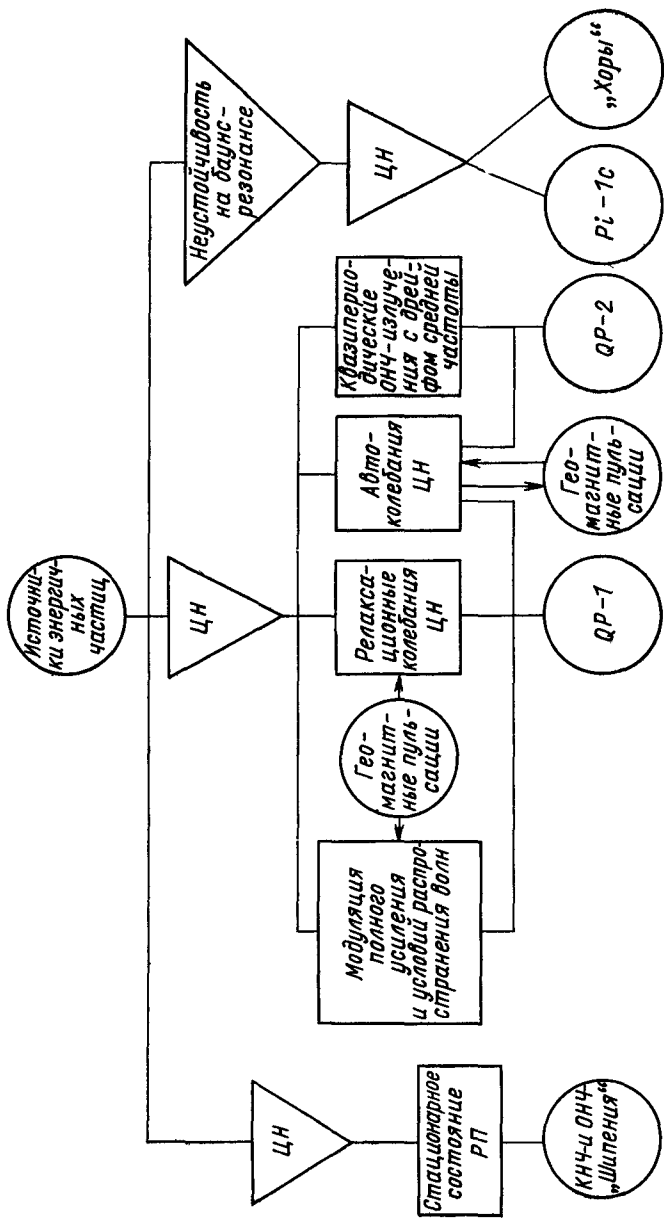


Рис. 15. Значение ЦН в формировании естественных электромагнитных сигналов

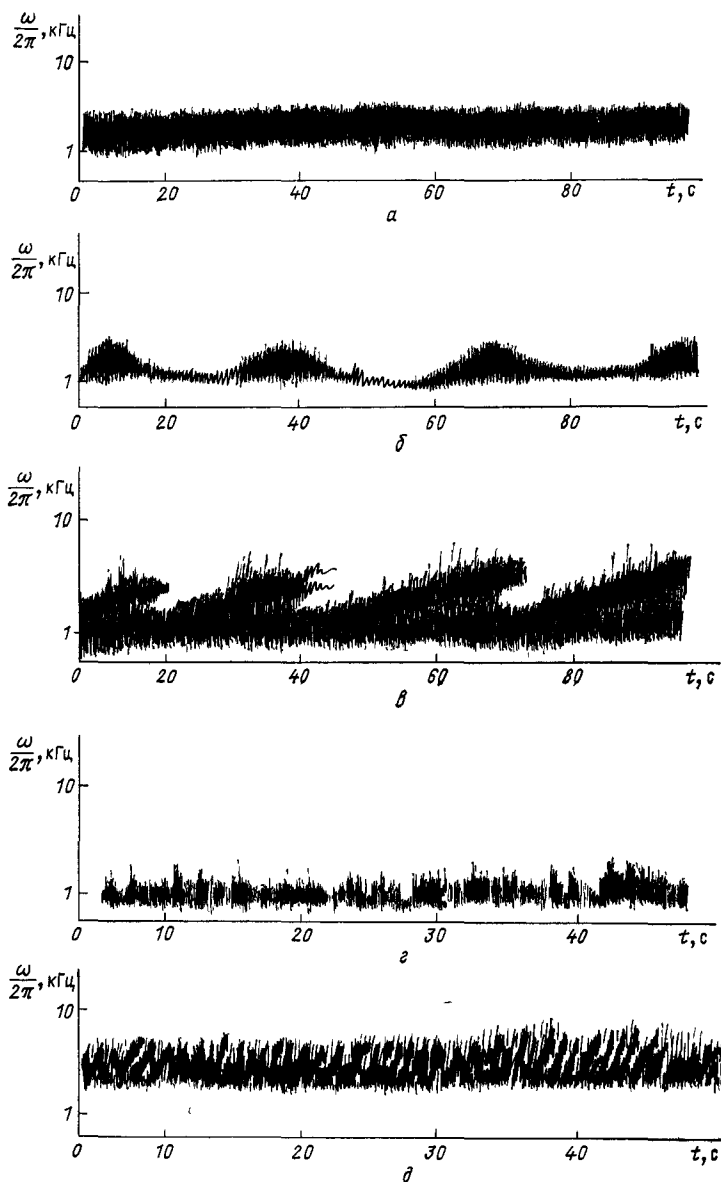


Рис 16 Основные типы естественных электромагнитных излучений диапазона 1—10 кГц:

*a* — шипения; *б* и *в* — квазипериодические излучения без дрейфа и с дрейфом средней частоты, *г* и *д* — хоры КНЧ- и ОНЧ диапазонов

ярко выраженное явление средних широт\*. Оба типа шипений хорошо сопряжены в противоположных полушариях и тесно коррелируют с энергичными частицами радиационных поясов. Некоторые средние количественные характеристики ОНЧ- и КНЧ-шипений приведены в таблице.

Перечисленные выше особенности КНЧ- и ОНЧ-шипений хорошо объясняются механизмом циклотронной неустойчивости РП. Иллюстрацией этого служит таблица, где приведены характеристики шипений, рассчитанные по формулам развитой выше теории. При составлении таблицы было учтено, что КНЧ-шипения, по всей видимости, возбуждаются в области магнитосферы, где  $\beta_* \gg 1$ , в то время как ОНЧ-шипения соответствуют областям  $\beta_* \sim 1$ . ОНЧ-шипения с частотным дрейфом могут возбуждаться на плазмопаузе, либо в локальных плазменных уплотнениях за плазмосферой [63, 64]. Дрейф частоты при этом можно объяснить процессом эрозии плазмосферы под действием магнитосферных электрических полей [64].

Эксперимент хорошо подтверждает и зависимость циклотронного возбуждения от концентрации холодной плазмы; многие события в ОНЧ- и КНЧ-диапазоне тесно привязаны к положению плазмопаузы [65]. Эта связь прослеживается и по широтному профилю плотности потока захваченных частиц (см. рис. 3).

На основе ЦН удается объяснить и ряд тонких особенностей в угловом и энергетическом спектрах частиц РП. В частности, как показывают спутниковые наблюдения [66], угловой спектр электронов РП имеет характерную форму с выступом в области больших пичуглов. Такой вид функции распределения можно объяснить характером линий диффузии и особенностью  $f$  при  $\theta \simeq \pi/2$  (см. § 5). Важную роль в формировании  $f$  в области  $\theta \simeq \pi/2$  могут играть косые волны ( $k \nparallel B$ ) [66].

**Квазипериодические КНЧ- и ОНЧ-излучения.** Наряду со стационарными ОНЧ- и КНЧ-шумами типа шипений часто наблюдаются в том же диапазоне частот так называемые квазипериодические ( $QP$ ) электромагнитные излучения, интенсивность которых промодулирована во всей полосе частот или ее части с периодами  $T_M \simeq 10 \div \div 100$  с [40, 41].  $QP$ -шумы хорошо магнитосопряжены и почти всегда сопровождаются высыпаниями энергичных электронов, промодулированными по интенсивности с теми же периодами [67, 68]. Более детальные экспериментальные исследования [40] показали, что все  $QP$ -явления можно объединить в две группы:  $QP1$ , которые тесно коррелируют с геомагнитными пульсациями соответствующих периодов, и  $QP2$ , которые не сопровождаются колебаниями геомагнитного поля (рис. 17). Если  $QP1$  имеют, как правило, правильную синусоидальную форму, то  $QP2$  возникают в виде выбросов с характерным дрейфом средней частоты в каждом элементе в сторону повышения. Ука-

---

\* ОНЧ-шипения типичны и для полярных широт. Однако частота полярных шипений заметно выше, а механизм генерации, по-видимому, связан с процессами вблизи нижнего гибридного резонанса.

### Характеристики шумовых КНЧ- и ОНЧ-излучений

Характеристика	Интенсивность $I$ , эрг·см <sup>-2</sup>	Частота максимального излучения $\omega_{\Gamma}/2\pi$ , кГц	Потоки захваченных частиц $S_L$ , см <sup>-2</sup> ·с <sup>-1</sup>	Потоки высыпавшихся электронов $S_E$ , см <sup>-2</sup> ·с <sup>-1</sup>	Длительность всплеска шипений $T$ , с	Период $Q_R$ -излучений $T_{J, c}$
Теория	КНЧ	$\frac{J_{\Sigma} \omega_0}{\sigma  \ln R  \omega_{BL}}$	$\beta_* = 8\pi n_{pL} \omega_0 / B_L^2$	$\frac{v_0  \ln R  n_{pL}}{T_g \omega_{BL}}$	$\frac{1}{2} J_{\Sigma}$	$\frac{2\pi}{\left(\frac{J_{\Sigma} \omega_{BL}}{n_{pL} I \sigma}\right)^{-1/2}}$
	ОНЧ	$A(A+1)^{-1} \frac{\omega_{BL}}{2\pi}$	$(2\pi\beta_*)^{-1} \omega_{BL}$	$2 \cdot 10^7$	$\left(\tilde{\gamma} - 2 \frac{ \ln R }{T_g}\right)^{-1} \times \frac{e m}{e} \times \ln \frac{e m}{e}$	$30 - 10^3$
Эксперимент	КНЧ	до $10^{-8}$	0,8	$10^3 - 10^6$	$\left(\tilde{\gamma} - 2 \frac{ \ln R }{T_g}\right) \sim 0,1 \tilde{\gamma}$	$> 10^2$
	ОНЧ	до $10^{-9}$	4,0	до $10^8$	$\sim 10^3$	10—300

$L \simeq 4$ ;  $n_{pL} \simeq 3 \cdot 10^{12}$  см<sup>-3</sup>;  $\omega_0 \simeq 40$  кэВ;  $A \simeq 0,5$ ;  $|\ln R| \simeq 0,5$ ;  $v_0 \simeq 10^{10}$  см·с<sup>-1</sup>

занные особенности излучений хорошо объясняются на основе рассмотренных выше релаксационных колебаний ЦН. В частности, QP1 можно связать с релаксационными колебаниями, возбуждаемыми гидромагнитными волнами. Напомним основные свойства таких режимов,

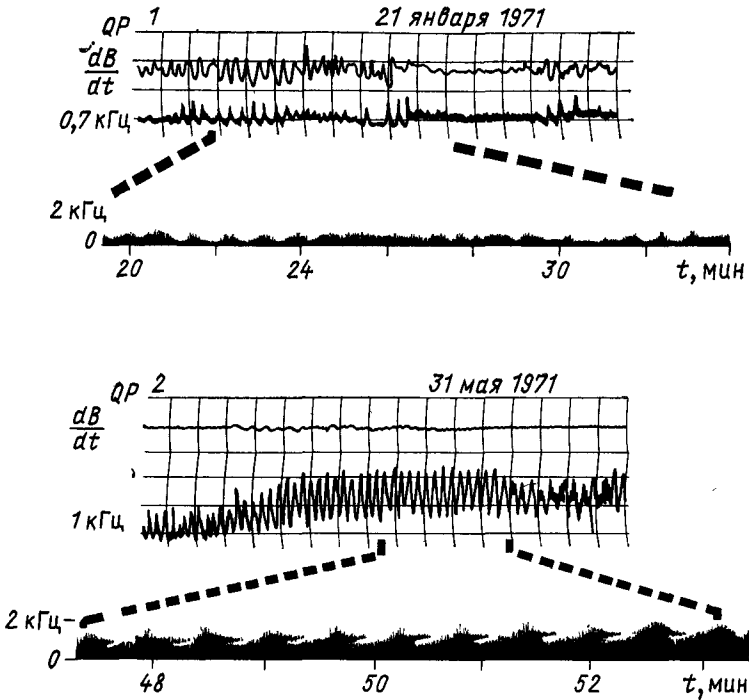


Рис. 17. Квазипериодические излучения, сопровождающиеся геомагнитными пульсациями (QP 1) и не связанные с ними (QP 2)

которые вытекают из теории (см. § 6). Частота и добротность релаксационных колебаний:

$$\Omega_J = (2J_\Sigma |\ln R|/N_0 T_g)^{1/2}, \quad (9.1)$$

$$Q_J = \Omega_J/2\nu_J = (N_0 |\ln R|/2J_\Sigma T_g)^{1/2}. \quad (9.2)$$

В формулах (9.1), (9.2)  $J_\Sigma = 2S_E$  и  $N_0$  — мощность источника и число энергичных частиц в магнитной силовой трубке сечением  $1 \text{ см}^2$  у основания,  $S_E$  — плотность потока высыпавшихся из трубки электронов. Вдали от состояния равновесия синусоидальная модуляция переходит в пиковый режим со скважностью

$$\frac{T_M}{\Delta t} = \frac{2\mathcal{E}_{\text{макс}}}{\mathcal{E}_0 \ln(4\mathcal{E}_{\text{макс}}/\mathcal{E}_0)}, \quad (9.3)$$

где  $\Delta t$  — длительность пика,  $\mathcal{E}_{\text{макс}}$  — максимальное значение интенсивности циклотронных волн.



Если частоты МГД-волн  $\Omega$  далеки от собственной частоты  $\Omega_J$  релаксационных колебаний, то эффекты модуляции под действием слабой МГД-волны с амплитудой  $b/B_L \ll 1$  незначительны. В пределе  $\Omega \gg \Omega_J$  они описываются линейной теорией (см. § 2), а при  $\Omega \ll \Omega_J$  соответствуют адиабатическому изменению стационарного состояния РП (см. § 5). Максимальная глубина модуляции в интенсивности ОНЧ-излучения и потоках высыпающихся частиц достигается в условиях резонанса:  $\Omega = \Omega_J$ . При этом

$$\max (\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_0) = \max (S_E \sim S_{E0}) \simeq Q_J^2 b/B_L. \quad (9.4)$$

Сделаем некоторые количественные оценки. Задавая типичные значения

$$\omega_{BL} \simeq 10^5 \text{ с}^{-1}, \quad T_g \simeq 1 \text{ с}, \quad J_\Sigma = 2S_E \simeq 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$n_{pL} \simeq 10^2 \text{ см}^{-3} \text{ и } |\ln R| \simeq 0,3,$$

будем иметь  $T_M = 2\pi/\Omega_J \simeq 10^2 \text{ с}$  и  $Q_J \simeq 35$ . Ограничения на  $T_M$  со стороны малых и больших периодов обусловлены следующими причинами: нижняя граница для  $T_M$ , по-видимому, связана с уменьшением добротности  $Q_J$  в случае больших  $J_\Sigma$ ; на верхнюю границу накладывают ограничения собственные частоты колебаний геомагнитной трубки. Интересно, что с данными эксперимента качественно согласуется и эффект уменьшения  $T_M$  с ростом источника [40]. В ряде случаев релаксационные колебания сами могут служить источником геомагнитных пульсаций, которые являются одним из проявлений рассмотренной в § 7 модуляционной неустойчивости. Однако для экспериментального отождествления природы МГД-волн необходимы целенаправленные наблюдения.

Обратимся теперь к сигналам типа  $QP2$ . На наш взгляд, они обусловлены режимами ЦН с дрейфом частоты, рассмотренными в § 8. На основе результатов этого параграфа удается качественно объяснить все основные характеристики  $QP2$ : длительность, дрейф частоты, рост интенсивности к концу элемента и др. Своеобразным должен быть характер высыпания частиц: энергия этих частиц должна уменьшаться в такт с ростом частоты.

Не выясненным до конца остается вопрос, какие предпосылки необходимы для реализации того или иного режима. По-видимому, это зависит от  $\beta_*$ , особенностей источника и состояния ионосферы. Здесь последнее слово принадлежит эксперименту.

**Теория генерации «хоров».** «Хоры», пожалуй, одно из самых сложных и интересных явлений в ОНЧ- и КНЧ-диапазоне. Этот тип излучений наблюдается в обширной области магнитосферы начиная от плазмплаузы и до  $L \simeq 10$ , и тесно связан с различными проявлениями суббури в магнитосфере.

До сих пор, несмотря на обширный и разнообразный экспериментальный материал по хорам, отсутствует какая-либо законченная теория, которая позволила бы объяснить совершенно уникальные свойства этих излучений. Отметим основные из них [59, 60, 69, 70].

Наиболее характерной особенностью хоров является вид динамического спектра. По наземным данным излучения представляют собой последовательность дискретных элементов с положительным наклоном  $d\omega/dt > 0$ , частота следования которых составляет  $1 \div 10$  Гц. Ширина полосы частот хоров  $\Delta\omega \lesssim \omega$ . Хоровые излучения чаще всего наблюдаются в утреннем секторе магнитосферы после того, как на ночном меридиане произошла суббуря, и обнаруживают хорошую магнитную сопряженность. С хорами тесно связаны микровсплески высыпаний электронов с энергиями  $\omega \geq 20$  кэВ.

Наиболее вероятным механизмом генерации хоров является циклотронная неустойчивость РП. ЦН позволяет объяснить ряд важных общих свойств хоров: тип и частотный диапазон волн (свистовая мода), область генерации вблизи экватора, высыпание электронов с энергиями  $\omega \geq 20$  кэВ, привязку к плазмопаузе. Главной трудностью является объяснение динамических спектров хоровых излучений.

Самая простая модель — многократное переотражение одного и того же сигнала — не годится, так как в этом случае наклон элементов должен был бы непрерывно и монотонно меняться, чего в действительности не наблюдается. Кроме того, наблюдаемый положительный наклон для КНЧ-хоров не соответствует дисперсии свистовых сигналов. Дисперсионное расплывание сигналов могло бы скомпенсироваться нелинейностью (как это имеет место в случае солитонов [71]). Однако при  $\Delta\omega \sim \omega$  нелинейность должна быть слишком большой, что заведомо не реализуется в экспериментах.

По-видимому, должен существовать регулярный механизм формирования и поддержания периодически изменяющейся со временем функции распределения излучающих частиц. Для этих целей подходит упоминавшийся в § 2 механизм рассортировки частиц по баунс-частотам в сочетании с группировкой электронов в сгустки [21]. Такая группировка может возникать при одновременном с ЦН развитии неустойчивости на баунс-резонансе [72, 73], либо вследствие эффекта захвата резонансных частиц в поле квазимонохроматических сигналов (см., например, [13]).

## Заключение

За пределами настоящего обзора остался ряд чрезвычайно интересных вопросов, имеющих прямое отношение к циклотронному взаимодействию свистовых волн с частицами. Это, в первую очередь, касается различных триггерных явлений [9, 12, 13, 74, 75] в плазме радиационных поясов. Триггерные явления включают возбуждение разнообразных дискретных ОНЧ-сигналов при прохождении через магнитосферу интенсивной квазимонохроматической волны ОНЧ-диапазона — свиста либо сигнала от СДВ радиостанций. Современная теория этих явлений базируется на нелинейном захвате частиц волной при циклотронном взаимодействии и их ускорении вместе с волной в неоднородном магнитном поле. Эти процессы играют важную роль и для возбуждения хоровых излучений.

Другой круг вопросов, не затронутый нами, обусловлен нелинейными эффектами при взаимодействии циклотронных волн с основной плазмой. К этим вопросам следует отнести эффекты самомодуляции и самофокусировки, распадного взаимодействия ОНЧ-волн, а также индуцированного рассеяния на частицах [76—80].

В случае рассмотренных выше относительно слабых широкополосных сигналов указанные эффекты играют, по-видимому, незначительную роль. Однако для интенсивных квазимонохроматических ОНЧ-волн, свистящих атмосфериков и сигналов СДВ-станций это не так. В частности, с указанными процессами можно связать образование волноводов в магнитосфере [79], нелинейную трансформацию свистов в колебания на нижнем гибридном резонансе [78], а также эффекты самомодуляции ОНЧ-импульсов. Все эти вопросы заслуживают самостоятельного внимания.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А. УСРЕДНЕНИЕ ПО ПЕРИОДУ БАУНС-ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Кинетическое уравнение (3.1а) в переменных  $t, z, \mu, v$  можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f_i}{\partial z} = \hat{S} t f, \quad (\text{A.1})$$

где столкновительный член учитывает влияние волн на движение частиц. Во многих случаях это влияние слабое и сказывается только за много осциллирующих частиц между зеркальными точками. Используем это обстоятельство для упрощения уравнения (A.1).

Общее решение однородного уравнения, отвечающего (A.1), имеет вид

$$f_i = a_0 \varphi_0(\mu, v) + \sum_{n \neq 0} a_n \varphi_n(z, \mu, v) \exp\{i n \Omega_b(\mu, v) t\}, \quad (\text{A.2})$$

где  $a_n^* = a_{-n}$ ,  $\varphi_n^* = \varphi_{-n}$ . Соотношение (A.2) очевидно, так как, если у всех частиц одинаковые  $\mu$  и  $v$ , то функция распределения меняется периодически со временем. В (A.2) функции  $\varphi_n$  ортогональны с весом  $v_{\parallel}^{-1}$ . Действительно, из (A.1) и (A.2) следует, что

$$i n \Omega_b \varphi_n + v_{\parallel} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$i m \Omega_b \varphi_m + v_{\parallel} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Взяв от (A.4) комплексно-сопряженное и умножив (A.3) на  $v_{\parallel}^{-1} \varphi_m^*$ , а (A.4) — на  $v_{\parallel}^{-1} \varphi_n$ , после сложения результатов получим

$$i(n-m) \Omega_b v_{\parallel}^{-1} \varphi_n \varphi_m^* + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_n \varphi_m^*) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Интегрируя (A.5) по  $z$  от одной точки отражения до другой, находим

$$(n-m) \frac{1}{T_b} \oint \varphi_n \varphi_m^* \frac{dz}{v_{\parallel}} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Нормируем функции  $\varphi_n$  с помощью условия

$$\frac{1}{T_b} \oint |\varphi_n|^2 \frac{dz}{v_{\parallel}} = 1, \quad n \neq 0. \quad (\text{A.7})$$

Система функций  $\varphi_n$  полна в классе функций распределения частиц с данными  $\mu$  и  $v$ , т. е. с данными точками отражения. Решение уравнения (A.1) с правой частью, характеризующей мощность источника частиц, будем искать в виде

$$f(t, z, \mu, v) = F(t, \mu, v) + \sum_{n \neq 0} a_n(t) \varphi_n(z, \mu, v) \exp(in\Omega_b t). \quad (\text{A.8})$$

Подставляя это разложение в (A.1) и используя ортонормированность системы функций  $\varphi_n$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, \mu, v)}{\partial t} &= \frac{1}{T_b} \oint (\hat{S}t f) \frac{dz}{v_{\parallel}}, \\ \frac{\partial a_n}{\partial t} &= \frac{1}{T_b} \oint (\varphi_n^* \exp\{-in\Omega_b t\} \hat{S}t f) \frac{dz}{v_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Аналогичные преобразования можно проделать в уравнении (3.2) для спектральной плотности энергии волн, представив

$$\varepsilon_k(t, z) = \mathcal{E}_k(t) + \sum_{n \neq 0} b_n(t) \psi_n(z, k) \exp(in\Omega_g(k) t), \quad (\text{A.10})$$

получаем, используя (3.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} &= \frac{1}{T_g} \oint 2\gamma \varepsilon_k \frac{dz}{v_g}, \\ \frac{\partial b_n}{\partial t} &= \frac{1}{T_g} \oint (\psi_n^* \exp\{-in\Omega_g t\} 2\gamma \varepsilon_k) \frac{dz}{v_g}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

где  $T_g/2 = \pi/\Omega_g$  — время группового распространения сигнала между сопряженными ионосферами.

Отметим, что пока никакие приближения не использованы, и уравнения (A.9) и (A.11) — точные. Из физических соображений очевидно, что коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  должны меняться медленно при слабом взаимодействии волн и частиц (слабом за один период  $T_b$  и  $T_g$ ). Строго это доказано в общей теории колебаний. Поэтому можно усреднить правые части (A.9) и (A.11) по быстрому времени. Допустим, что резонансы типа  $nT_b = mT_g$  невозможны. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{T_b} \oint (\overline{\hat{S}t f})^t \frac{dz}{v_{\parallel}}, \quad \frac{\partial a_n}{\partial t} = 0, \quad n \neq 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} &= \frac{1}{T_g} \oint (\overline{2\gamma \varepsilon_k})^t \frac{dz}{v_{\parallel}}, \quad \frac{\partial b_n}{\partial t} = 0, \quad n \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Получилось, что  $a_n$  и  $b_n$  меняются действительно медленно. Сравнивая (A.8), (A.10) и (A.12), находим окончательный вид усредненных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left( \frac{1}{T_b} \oint \frac{dz}{v_{\parallel}} \overline{\hat{S}t} \right) F; \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = \left( \frac{1}{T_g} \oint \frac{dz}{v_g} 2\overline{\gamma}^t \right) \mathcal{E}_k, \quad (\text{A.14})$$

где  $F = T_b^{-1} \oint f dz/v_{\parallel}$ ,  $\mathcal{E}_k = T_g^{-1} \oint \varepsilon_k dz/v_g$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

Исследуем периодические режимы ЦН вблизи состояния равновесия в общем случае произвольной зависимости коэффициентов в (3.7) и (3.9) от  $\mu = \kappa^2$  и  $\nu$  и без ограничений на вид источника. Исходная система уравнений запишется в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ D(\kappa, \nu) \mathcal{E} \frac{\partial F}{\partial \kappa} \right] + J(\kappa, \nu); \quad (\text{Б.1а})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \left\{ \int_0^\infty \left[ \int_{\kappa_c}^{\kappa_m(\nu)} K(\kappa, \nu) \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \right] d\nu \right\} \mathcal{E} - \nu \mathcal{E} \quad (\text{Б.1б})$$

с граничными условиями, отвечающими режиму слабой диффузии

$$F \Big|_{\kappa=\kappa_c} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_m} = 0. \quad (\text{Б.2})$$

В (Б.1) учтена интегральная (по частоте) зависимость коэффициента диффузии от интенсивности ОНЧ-волн. Для простоты мы также пренебрегаем эффектами модуляции параметров ионосферы.

Стационарное состояние РП определяется следующими выражениями:

$$F_0(\kappa, \nu) = \int_{\kappa_c}^{\kappa} \left\{ [\mathcal{E}_0 D(\kappa', \nu)]^{-1} \int_{\kappa'}^{\kappa_m} J(\kappa'', \nu) d\kappa'' \right\} d\kappa', \quad (\text{Б.3а})$$

$$\mathcal{E}_0 = \nu^{-1} \int_0^\infty \left\{ \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \left[ K(\kappa', \nu) D^{-1}(\kappa', \nu) \int_{\kappa'}^{\kappa_m} J(\kappa'', \nu) d\kappa'' \right] d\kappa' \right\} d\nu. \quad (\text{Б.3б})$$

Вблизи состояния равновесия поведение РП описывается линеаризованной системой уравнений

$$\frac{\partial F_{\sim}}{\partial t} = - \frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} J + \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( D \mathcal{E}_0 \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} \right); \quad (\text{Б.4а})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\sim}}{\partial t} = \mathcal{E}_0 \int_0^\infty \left[ \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} K(\kappa, \nu) \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} d\kappa \right] d\nu \quad (\text{Б.4б})$$

с граничными условиями

$$F_{\sim} \Big|_{\kappa=\kappa_c} = 0, \quad \frac{\partial F_{\sim}}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_m} = 0, \quad (\text{Б.5})$$

где принято  $F = F_0 + F_{\sim}$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\sim}$ ,  $F_{\sim} \ll F_0$ ,  $\mathcal{E}_{\sim} \ll \mathcal{E}_0$ . Для решения системы (Б.4), (Б.5) введем в рассмотрение задачу Штурма — Лиувилля:

$$- \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ \frac{\mathcal{E}_0}{\nu} D(\kappa, \nu) \frac{\partial Z_p}{\partial \kappa} \right] = p^2(\nu) Z_p, \quad (\text{Б.6а})$$

$$Z_p \Big|_{\kappa=\kappa_c} = 0, \quad \frac{\partial Z_p}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_m} = 0. \quad (\text{Б.6б})$$

Это задача о собственных значениях и собственных функциях самосопряженного оператора, с чем связан ряд важных следствий. Отметим часть из них, которые будут использованы в дальнейшем.

а) все собственные значения самосопряженного оператора типа (Б.6а) с  $D > 0$  и граничными условиями (Б.6б) представляют собой счетное множество действительных положительных чисел;

б) собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т. е.  $\int_{\kappa_c}^{\kappa_m} Z_p Z_q d\kappa = 0$  при  $p \neq q$ ;

в) всякая функция из области определения самосопряженного оператора может быть разложена по собственным функциям этого оператора.

Нормируем собственные функции.

$$\int_{\kappa_c}^{\kappa_m} Z_p^2 d\kappa = 1. \quad (\text{Б.7})$$

Используя далее свойство в), представим функцию распределения в виде

$$F_{\sim}(t, \kappa, v) = \sum_p a_p(t, v) Z_p(\kappa, v). \quad (\text{Б.8})$$

Подставляя это разложение в (Б.4а) для процессов  $\{\lambda t\}$ , получаем

$$\sum_p (\lambda + \nu p^2) a_p Z_p = -\frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} J. \quad (\text{Б.9})$$

Отсюда, используя условие ортогональности б), находим, что

$$a_p = -\frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} (\lambda + \nu p^2)^{-1} \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} J Z_p d\kappa; \quad (\text{Б.10})$$

$$F_{\sim} = -\frac{\mathcal{E}_{\sim}}{\mathcal{E}_0} \sum_p (\lambda + \nu p^2)^{-1} Z_p \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} J Z_p d\kappa. \quad (\text{Б.11})$$

Подставляя это выражение в (Б.4б), получим уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\lambda + \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \left[ K(\kappa, v) \frac{\partial}{\partial \kappa} \sum_p (\lambda + \nu p^2)^{-1} Z_p \left( \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} J Z_p d\kappa' \right) d\kappa \right] \right\} dv = 0. \quad (\text{Б.12})$$

Рассмотрим три типа источников энергичных частиц.

а) «Одномодовый» источник:

$$J(\kappa, v) = J_p Z_p(\kappa, v). \quad (\text{Б.13})$$

Подставляя это выражение в (Б.12), получаем

$$\lambda + J_p \int_0^{\infty} \left\{ [\lambda + \nu p^2(v)]^{-1} \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} K(\kappa, v) \frac{\partial Z_p}{\partial \kappa} d\kappa \right\} dv = 0. \quad (\text{Б.14})$$

При малом разбросе по модулю скорости у источника уравнение (Б.14) сводится к случаю, рассмотренному в § 6.

б) «Высокочастотный» (в данных собственных функциях) источник:  $p_{\text{мин}}^2 \gg |\lambda|$ . Тогда из (Б.13) следует, что

$$\lambda = - \int_0^{\infty} \left\{ \sum_p \frac{1}{vp^2} \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \left[ K(\kappa, v) \frac{\partial}{\partial \kappa} Z_p \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} J Z_p d\kappa \right] d\kappa \right\} dv. \quad (\text{Б.15})$$

Для того чтобы определить знак и величину  $\lambda$ , вычислим выражение

$$\mathcal{L}(\kappa, v) = \sum_p p^{-2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left( Z_p \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} J Z_p d\kappa \right). \quad (\text{Б.16})$$

Допустим, что источник энергичных частиц записывается следующим образом:

$$J = \sum_p b_p Z_p. \quad (\text{Б.17})$$

Тогда (Б.16) можно переписать так:

$$\mathcal{L}(\kappa, v) = \sum_p \frac{b_p}{p^2} \frac{\partial}{\partial \kappa} Z_p. \quad (\text{Б.18})$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором  $\frac{\partial}{\partial \kappa} D(\kappa, v)$  и учтем (Б.6), (Б.17). В итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} D(\kappa, v) \mathcal{L}(\kappa, v) = -J(\kappa, v) \mathcal{G}_0^{-1} v. \quad (\text{Б.19})$$

Проинтегрируем это равенство по  $\kappa$ , используя условие  $D|_{\kappa=\kappa_m} = 0$ :

$$\mathcal{L}(\kappa, v) = (\mathcal{G}_0 D)^{-1} v \int_{\kappa}^{\kappa_m} J d\kappa. \quad (\text{Б.20})$$

Теперь выражение (Б.15) можно записать следующим образом [см. (Б.36)]:

$$\lambda = - \frac{1}{\mathcal{G}_0} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \left[ \frac{K(\kappa, v)}{D(\kappa, v)} \int_{\kappa}^{\kappa_m} J(\kappa', v) d\kappa' \right] d\kappa \right\} dv = -v. \quad (\text{Б.21})$$

Отсюда следует вывод, что при высокочастотном (т. е. сильно неоднородном по  $\kappa$  и  $v$ ) источнике периодические режимы ЦН отсутствуют.

в) «Низкочастотный» (в данных собственных функциях) источник:  $p_{\text{макс}}^2 v \ll |\lambda|$ . Тогда из (Б.13) следует, что

$$\lambda^2 + \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} \left[ K(\kappa, v) \frac{\partial}{\partial \kappa} \sum_p Z_p \int_{\kappa_c}^{\kappa_m} J Z_p d\kappa \right] d\kappa \right\} dv = 0. \quad (\text{Б.22})$$

С учетом (Б.17) это выражение можно преобразовать к виду

$$\lambda^2 + \int_0^{\infty} \left[ \int_{x_c}^{x_m} K(x, v) \frac{\partial J}{\partial x} dx \right] dv = 0. \quad (\text{Б.23})$$

При  $\int_0^{\infty} \left[ \int_{x_c}^{x_m} K(x, v) \frac{\partial J}{\partial x} dx \right] dv < 0$  найденный нами стационар (Б.3), (Б.4) неустойчив. Как нетрудно видеть из исходных уравнений (Б.1), (Б.2), в этом случае вообще нет ЦН. Из (Б.23) следует, что частота перестройки параметров РП при малом отклонении системы от состояния равновесия равна

$$\Omega_J = \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \int_{x_c}^{x_m(v)} K(x, v) \frac{\partial J(x, v)}{\partial x} dx \right] dv \right\}^{1/2}. \quad (\text{Б.24})$$

Таким образом, частота колебаний параметров РП равна квадратному корню из выражения для усредненного инкремента (Б.16), в котором вместо функции распределения стоит мощность источника частиц.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трахтенгерц В. Ю. О механизме генерации ОНЧ излучения во внешнем радиационном поясе Земли.—«Геомagnetизм и аэрoномия», 1963, т. 3, с. 442.
2. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле.— «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 181.
3. Андронов А. А., Трахтенгерц В. Ю. Кинетическая неустойчивость радиационных поясов Земли.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1964, т. 4, с. 181.
4. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Квазилинейная теория слабо нелинейных процессов в плазме.— «Ядерный синтез», дополнение, 1962, т. 2, с. 423.
5. Kennel C. F., Petschek H. E. Limit on stably trapped particle fluxes. — «J. Geophys. Res.», 1966, v. 71, p. 1.
6. Трахтенгерц В. Ю. О стационарных состояниях внешней радиационной зоны Земли.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1966, т. 6, с. 827.
7. Тверской Б. А. Устойчивость радиационных поясов.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1967, т. 7, с. 226.
8. Трахтенгерц В. Ю. К нелинейной теории циклотронной неустойчивости радиационных поясов Земли.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1967, т. 7, с. 341.
9. Hellwll R. A. A theory of discrete VLF emissions from the magnetosphere.— «J. Geophys. Res.», 1967, v. 72, p. 4773.
10. Coronity F. V., Kennel C. F. Electron precipitation pulsations.— «J. Geophys. Res.», 1970, v. 75, p. 1279.
11. Roux A., Solomon J. Self-consistent solution of quasi-linear theory Application to the spectral shape and intensity of VLF waves in the magnetosphere.— «J. Atmosph. Terr. Phys.», 1971, v. 33, p. 1457
12. Sudan R. N., Ott E. Theory of triggered VLF emissions — «J. Geophys. Res.», 1971, v. 76, p. 4463.
13. Будько Н. И., Кариман В. И., Похотелов О. А. Нелинейная теория монохроматических циркулярно поляризованных НЧ и КНЧ волн в магнитосфере.— «Cosmic Electrodynamics», 1972, v. 3, p. 165.
14. A self-consistent theory of magnetospheric ELF hiss.— «J. Geophys. Res.», 1973, v. 78, p. 8150. Auth.: J. Etcheto, R. Gendrin, J. Solomon, A. Roux.



15. Трахтенгерц В. Ю. Модуляция неустойчивостей в магнитосфере гидромагнитными колебаниями.— В сб.: Ионосферные исследования. № 22. М., «Советское радио», 1975, с. 8.
16. Трахтенгерц В. Ю. Влияние плазмпавузы на кинетические неустойчивости в магнитосфере Земли. Там же, с. 12.
17. Гершман Б. Н., Трахтенгерц В. Ю. Ультранизкочастотное радиоизлучение верхней атмосферы и его связь с другими геофизическими явлениями.— «Успехи физ. наук», 1966, т. 89, с. 201.
18. Rycroft M. J. VLF emission in the magnetosphere.— «Radio Sci.», 1972, v. 7, p. 811.
19. Михайловский А. Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 6. М., Атомиздат, 1972, с. 70.
20. Nunn D. A self-consistent theory of triggered VLF emissions. — «Planet. Space Sci.», 1974, v. 22, p. 349.
21. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Нестационарные распределения частиц в магнитосфере и генерация периодических излучений в диапазоне ОНЧ и КПК.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1974, т. 14, с. 321.
22. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. О нелинейных колебательных процессах в магнитосфере Земли.— «Изв. вузов. Радиофизика», 1976, т. 19, с. 801.
23. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Динамика циклотронной неустойчивости в пробкотроне. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 396.
24. Беспалов П. А. Модуляция интенсивности ОНЧ шумов гидромагнитными колебаниями.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1977, т. 17, с. 66.
25. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Автоmodуляция циклотронной неустойчивости альфвеновскими волнами.— «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 177.
26. Кадоmцев Б. Б. Турбулентность плазмы.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
27. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
28. Акасофу С. И., Чепмен С. Солнечно-земная физика, т. 1 (т. 2). Пер. с англ. М., «Мир», 1974.
29. Matsumoto H. Theoretical studies on whistler mode wave-particle interactions in the magnetospheric plasma. Kyoto, 1972.
30. Тверской Б. А. Динамика радиационных поясов Земли. М., «Наука», 1968.
31. Трахтенгерц В. Ю. Турбулентное ускорение частиц в магнитосфере Земли.— В сб.: Исследования по магнетизму, аэрoномии и физике Солнца. Вып. 22. М., «Наука», 1972, с. 60.
32. Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме. М., «Наука», 1977, с. 166.
33. Андронов А. А., Железняков В. В., Петелин М. И. О кинетической неустойчивости однородной магнитоактивной плазмы.— «Изв. вузов. Радиофизика», 1964, т. 7, с. 251.
34. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. акад. М. А. Леонтовича. Вып. 3. М., Госатомиздат, 1963, с. 3.
35. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. О черенковском механизме генерации КНЧ- и ОНЧ-излучений в магнитосфере.— «Геомagnetизм и аэрoномия», 1975, т. 15, с. 313.
36. Smith R. L. Propagation characteristics of whistlers trapped in field-aligned columns of enhanced ionization.— «J. Geophys. Res.», 1961, v. 66, p. 3699.
37. Хелливелл Р. А. Волны низкой частоты в магнитосфере. Физика магнитосферы. Под ред. Д. Вильямса и Дж. Мида. Пер. с англ. М., «Мир», 1972, с. 345.
38. Superman S., Landau R. W. On the enhancement of the whistler mode instability in the magnetosphere by cold plasma injection.— «J. Geophys. Res.», 1974, v. 79, p. 128.
39. Superman S., Salu Y. Optimum cold plasma density for maximum whistler instability: numerical versus analytical. — «J. Geophys. Res.», 1974, v. 79, p. 135.

40. Relationships between quasi-periodic VLF emission and geomagnetic pulsation. — *J. Atmosph. Terr. Phys.*, 1974, v. 36, p. 1515. Auth: N. Sato, K. Hayashi, S. Kokubun, T. Oguti, H. Fukunishi.
41. Коротова Г. И., Распопов О. М., Клейменова Н. Г. Модуляция ОНЧ-шипений геомагнитными пульсациями. — *«Геомагнетизм и аэрномия»*, 1975, т. 12, с. 177.
42. Chen L. Theory of ULF modulation of VLF emissions. — *J. Geophys. Res. Lett.*, 1974, v. 1, p. 73.
43. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. К теории генерации ОНЧ- и КНЧ-излучений типа хоров. — *«Геомагнетизм и аэрномия»*, 1978, т. 18, с. 627.
44. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. — *«Nucl. Fusion»*, 1961, v. 1, p. 82.
45. Drummond W. E., Pines D. Non-linear stability of plasma oscillations. — Conference on plasma physics and controlled nuclear fusion research, 1962, part 3, p. 1049 (*«Nucl. Fusion»*, Suppl. 1962, v. 2, p. 423).
46. *Электродинамика плазмы*. Под ред. А. И. Ахиезера. М., «Наука», 1974.
47. Беспалов П. А. Квазилинейная релаксация системы «пучок—изотропная плазма». — *«Физика плазмы»*, 1977, т. 3, с. 1118.
48. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. О турбулентном разлете облака быстрых частиц в плазме. — *«Журн. эксперим. и теор. физ.»*, 1974, т. 67, с. 969.
49. Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. О режимах турбулентной диффузии по pitch-углам в геомагнитной ловушке. — *«Физика плазмы»*, 1979, т. 5, с. 383.
50. Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов. М., «Сов. радио», 1975.
51. Беленов Э. М., Морозов В. Н., Ораевский А. Н. Вопросы динамики квантовых генераторов. — *«Тр. физ. ин-та АН СССР»*, 1970, т. 52, с. 237.
52. Трахтенгерц В. Ю. Магнитосфера как альфвеновский мазер. — *«Земля и вселенная»*, 1979, № 4, с. 42.
53. Распопов О. М. К вопросу о периодической модуляции ОНЧ-излучения. — В сб.: Ионосферные исследования. № 22. М., «Сов. радио», 1975, с. 32.
54. Chappel C. R. Detached plasma regions in the magnetosphere. — *J. Geophys. Res.*, 1974, v. 79, p. 1861.
55. Бархатов Н. А., Беспалов П. А. Диагностика плазменных уплотнений по записям магнитного поля на геостационарном спутнике. — *«Геомагнетизм и аэрномия»*, 1978, т. 18, с. 148.
56. Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Новый механизм генерации геомагнитных пульсаций быстрыми частицами — *«Физика плазмы»*, 1975, т. 1, с. 786.
57. Михайловский А. Б., Похотелов О. А. Влияние свистов и ионно-циклотронных колебаний на раскачку альфвеновских волн в магнитосферной плазме. — *«Физика плазмы»*, 1975, т. 1, с. 1004.
58. Hagege K., Laval G., Pellat R. Interaction between high-frequency turbulence and magnetospheric micropulsations. — *J. Geophys. Res.*, 1973, v. 78, p. 3806.
59. Helliwell R. A. Whistlers and Related Ionospheric Phenomena. Stanford, Calif., Stanford University Press, 1965.
60. Распопов О. М., Клейменова Н. Г. Возмущения электромагнитного поля Земли, ч. III. ОНЧ-излучения. Л., Изд. ЛГУ, 1977.
61. Кеннел Ч. Ф. Следствия существования магнитосферной плазмы. Физика магнитосферы. Под ред. Д. Вильямса и Дж. Мида. Пер. с англ. М., «Мир», 1972, с. 462.
62. Лихтер Я. И. Волновые процессы. — В сб.: Геомагнетизм и высокие слои атмосферы. Т. 2 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). М., 1975, с. 169.
63. Chai K. W., Holzer R. E. ELF hiss associated with plasma density enhancements in the outer magnetosphere. — *J. Geophys. Res.*, 1976, v. 81, p. 2267.
64. Вершинин Е. Ф., Трахтенгерц В. Ю., Шапаев В. И. О происхождении всплесков низкочастотного излучения с частотным дрейфом. — *«Геомагнетизм и аэрномия»*, 1979, т. 19, с. 362.
65. Foster J. C., Rosenberg T. J. Electron precipitations and VLF emissions associated with cyclotron resonance interaction near the plasmapause. — *J. Geophys. Res.*, 1976, v. 81, p. 2183.
66. Lyons L. R., Thorne R. M., Kennel C. F. Pitch-angle diffusion belt electrons within the plasmosphere. — *J. Geophys. Res.*, 1972, v. 77, p. 3455.

67. **Gendrin R., Etcheto J. B. de la Porte des Vaux.** Very low frequency and particle rocket experiment at Kergulen Islands, 2, Particle measurements.— *J. Geophys. Res.*, 1970, v. 75, p. 6169.
68. **Модуляция интенсивности КНЧ-излучений и потоков электронов во время магнитных бурь по данным ИСЗ «Интеркосмос-3» и «Интеркосмос-5».**— В сб.: Низкочастотные волны и сигналы во внешней атмосфере, г. Апатиты, Изд-во АН СССР, 1974, с. 111. Авт. А. В. Захаров, В. А. Кузнецова, Я. И. Лихтер, В. И. Ларкина.
69. **Allcock G., McMountjoy K.** Dynamic spectr characteristics of chorus at a middle-latitude station.— *J. Geophys. Res.*, 1970, v. 75, p. 2503.
70. **Клейменова Н. Г.** Результаты экспериментальных исследований ОНЧ-излучений на земной поверхности.— *Phys. Solari-terr.*, 1976, N 3, p. 57.
71. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М., «Мир», 1977.
72. **Беспалов П. А., Грач С. М., Трахтенгерц В. Ю.** О взаимодействии энергичных электронов с гидромагнитными волнами на баунс-резонансе.— «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1050.
73. **Меерсон Б. И., Сасоров П. В.** О нелинейном затухании геомагнитных пульсаций на баунс-резонансах.— «Геомагнетизм и аэрономия», 1978, т. 18, с. 312.
74. **Helliwell R. A., Stiles G. S.** Frequency-time behaviour of artificial stimulated VLF emissions.— *J. Geophys. Res.*, 1975, v. 80, p. 608.
75. **Истомин Я. Н., Карпман В. И., Шкляр Д. Р.** К теории триггерного ОНЧ-излучения.— «Геомагнетизм и аэрономия», 1976, т. 16, с. 116.
76. **Литвак А. Г.** Волновые пучки конечной амплитуды в магнитоактивной плазме.— *Журн. эксперим. и теор. физ.*, 1969, т. 57, с. 629.
77. **Котик Д. С., Трахтенгерц В. Ю.** О распадном взаимодействии ОНЧ волн в магнитосфере Земли.— «Геомагнетизм и аэрономия», 1973, т. 13, с. 871.
78. **Trakhtengerts V. Yu.** Non-linear hydrodynamic VLF wave scattering in the Earth's magnetosphere.— *Planet. Space Sci.*, 1973, v. 21, p. 359.
79. **Молчанов О. А., Трахтенгерц В. Ю., Чмырев В. М.** Нелинейная канализация свистовых (ОНЧ) волн в магнитосфере.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1974, т. 17, с. 325.
80. **Chen Liu.** Parametric excitation of «kinetic» Alfvén waves by whistler waves.— *Plasma Phys.*, 1977, v. 19, p. 47

# ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

*А. Г. Литвак*

---

## Введение

Одна из важнейших особенностей исследований по нелинейной теории плазмы последнего десятилетия связана с переходом от теории слабой турбулентности к изучению динамических нелинейных процессов, для которых характерны большие амплитуды возмущений и сильные фазовые корреляции. Необходимость исследования подобных эффектов вызвана появлением в экспериментальной физике таких уникальных инструментов, как мощные лазеры и сильноточные релятивистские пучки электронов, позволяющих возбуждать в плазме интенсивные когерентные колебания, которые не удается описать в рамках теории слабой турбулентности [1—5].

Данный обзор посвящен одному из аспектов теории сильнонелинейных явлений в плазме — в нем исследуются нелинейные процессы, возникающие при взаимодействии бесстолкновительной плазмы с интенсивным когерентным излучением. Основное внимание в обзоре уделено изучению динамических эффектов самофокусировки и самомодуляции электромагнитных волн в разреженной плазме, модуляционных неустойчивостей в плотной плазме и механизмов нелинейной прозрачности такой плазмы. При написании обзора не преследовалась цель исчерпывающего анализа этих эффектов, а рассмотрены лишь наиболее характерные ключевые примеры, дающие возможность на сравнительно простых моделях проиллюстрировать основные физические идеи и выяснить важнейшие закономерности самовоздействия излучения в плазме. Именно поэтому мы ограничились, главным образом, обсуждением процессов в однородной плазме, лишь иногда останавливаясь на обобщении результатов на случай неоднородной и магнитоактивной плазмы. К сожалению, ограниченность объема обзора не позволила подробно рассмотреть вопросы теории вынужденного рассеяния волн в плазме. С этим же обстоятельством связана краткость обсуждения интересной проблемы коллапса ленгмюровских колебаний.

Обзор состоит из четырех глав. В гл. 1 кратко излагаются основы описания динамических нелинейных процессов в изотропной и магнитоактивной плазме, базирующегося на усреднении уравнений плазмы (как квазигидродинамических, так и кинетических) по периоду ВЧ-поля и связанного с введением в теорию понятия усредненной пондеромоторной силы [6—11]. Гл. 2 посвящена рассмотрению процес-

сов самовоздействия электромагнитных волн в плотной непрозрачной плазме, не связанных с параметрическим возбуждением плазменных колебаний. В ней исследованы самосогласованные стационарные распределения плазмы и поля, в частности, такие распределения (как одномерные, так и неодномерные), в которых плотная плазма в поле сильной электромагнитной волны становится прозрачной. Кроме того, рассмотрено влияние нелинейных процессов на эффективность резонансного поглощения излучения в неоднородной плазме в области плазменного резонанса. В этой же главе исследована структура сильнонелинейных волн огибающих. В гл. 3 изложены элементы теории самофокусировки квазиоптических пучков волн в изотропной и магнитоактивной плазме без диссипации. Наконец, в гл. 4 на одномерных моделях анализируется нелинейная теория параметрических неустойчивостей плазмы, возникающих в области отражения сильной электромагнитной волны, и рассмотрены некоторые макроскопические следствия этих неустойчивостей, главным образом их влияние на электродинамические характеристики плазмы. Здесь же обсуждаются некоторые вопросы теории сильной ленгмюровской турбулентности, в частности теории модуляционных процессов и коллапса ленгмюровских колебаний.

## ГЛАВА 1

### **МЕХАНИЗМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

При распространении в плазме без столкновений волн умеренной интенсивности основную роль играют нелинейные эффекты, связанные с перераспределением плотности заряженных частиц в области неоднородного электрического поля под действием электромагнитного давления. В более сильных полях становятся существенными и эффекты, обусловленные нелинейностью движения одиночного электрона в быстропеременном поле — так, в изотропной плазме эта нелинейность связана, в первую очередь, с зависимостью массы электрона от энергии осцилляций.

Весьма существенным обстоятельством, значительно упрощающим описание динамических нелинейных процессов в плазме, является сильное различие частот собственных колебаний плазмы. Например, в изотропной плазме частоты поперечных электромагнитных волн и ленгмюровских колебаний намного превышают частоту медленных ионно-звуковых движений, в которых участвуют тяжелые частицы — ионы. Это позволяет в теории перейти к усредненному по периоду ВЧ-поля уравнениям и с единых позиций рассмотреть разнообразные нелинейные процессы самовоздействия и взаимодействия волн. Такие уравнения для случая плазмы без столкновений сформулированы в данной главе.

## § 1.1. Пондеромоторные силы в плазме в быстропеременных полях

Рассмотрим сначала движение одиночной заряженной частицы в быстропеременных пространственно неоднородных электромагнитных полях  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Представим это движение в виде суперпозиции быстрых (с частотой внешнего поля) осцилляций  $\boldsymbol{\rho}(t)$  и плавного (усредненного по периоду колебаний поля) движения  $\mathbf{R}(t)$  [6]:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\rho}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) + \dot{\boldsymbol{\rho}}(t). \quad (1.1)$$

Представление (1.1) справедливо, если поле достаточно медленно меняется в пространстве. В нерелятивистском приближении критерии медленности сводятся к неравенствам

$$|\dot{\mathbf{R}}|/c \ll 1, \quad \rho/L_E \ll 1, \quad |\dot{\mathbf{R}}|T_E/L_E \ll 1, \quad (1.2)$$

где  $L_E$  и  $T_E$  — соответственно расстояние  $L_E \sim |E/\nabla E|$  и время  $T_E \sim |E/(\partial E/\partial t)|$ , в пределах которых поле претерпевает заметные изменения. При выполнении всех критериев (1.2) решение в виде (1.1) можно получить, если разложить точное решение уравнения движения одновременно по трем малым параметрам. Будем исходить из нерелятивистского уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = (e/m)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (e/mc)[d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.3)$$

Тогда, например, для частицы в монохроматическом поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$$

из (1.3) получим следующие выражения для скорости и координаты осцилляционного движения:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= -(e/m\omega^2)\mathbf{E}(\mathbf{R}) \exp(i\omega t), \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} &= (e/i\omega m)\mathbf{E}(\mathbf{R}) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

и уравнение усредненного движения, имеющее вид [6]:

$$\mathbf{R} = -\nabla\Phi_0, \quad \Phi_0(\mathbf{R}) = (e^2/4m^2\omega^2)|\mathbf{E}(\mathbf{R})|^2. \quad (1.5)$$

Здесь  $e$  и  $m$  — заряд и масса заряженной частицы. Важным обстоятельством, упрощающим анализ решения (1.5), является потенциальный характер усредненной силы, благодаря чему существует интеграл движения

$$|\dot{\mathbf{R}}|^2/2 + \Phi(\mathbf{R}) = \text{const}, \quad (1.6)$$

имеющий смысл интеграла усредненной энергии. Из (1.5) следует, что заряженные частицы, независимо от знака их заряда, выталкиваются из области сильного поля: величина силы существенно зависит от массы частицы ( $\sim 1/m$ ).

Если поле представляет собой суперпозицию нескольких монохроматических полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \exp(i\omega_n t)$ , при усреднении за время, большее периодов парциальных колебаний, но меньшее периодов колебаний на разностных частотах, получим следующее выражение для усредненной силы [12]:

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = -\nabla \left\{ \sum_i \sum_k (e^2/4m\omega_i \omega_k) (\mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^*) \exp[i(\omega_i - \omega_k)t] \right\} - \\ - \sum_i \sum_k (e^2/4m\omega_k^2 \omega_i) [(\mathbf{E}_i \nabla) \mathbf{E}_k^* - (\mathbf{E}_k \nabla) \mathbf{E}_i^*] \exp[i(\omega_i - \omega_k)t]. \quad (1.7)$$

Из (1.7) видно, что в этом случае усредненная сила непотенциальна и зависит от времени. В частном случае квазимонохроматического поля  $(\omega_i - \omega_k) \ll \omega_k$  сила снова становится потенциальной,  $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ , но теперь высокочастотный потенциал  $\Phi$  является медленной функцией времени и интеграл энергии не существует. С этой зависимостью от времени, как будет показано далее, связаны эффекты энергетического взаимодействия плазмы с полем.

В присутствии постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}$  потенциальный характер усредненных сил сохраняется. Так, в монохроматическом ВЧ-поле потенциал усредненной силы можно представить в виде [13]

$$\Phi_H = -(e^2/4m^2\omega^2) \{ |\mathbf{E}_{\parallel}|^2 + [\omega/(\omega + \omega_H)] |\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}|^2 + \\ + [\omega/(\omega - \omega_H)] |\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}|^2 \}. \quad (1.8)$$

Здесь  $\omega_H = eH_0/mc$ ,  $\mathbf{E}_{\parallel} \parallel \mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{E}_{\perp}^{(+)}$  и  $\mathbf{E}_{\perp}^{(-)}$  — поперечные компоненты поля соответственно с левой и правой круговой поляризацией.

Существенной особенностью потенциала (1.8) является изменение его знака в поперечном поле при  $\omega_{He} > \omega$ , приводящее к смене направления силы, при этом заряженная частица уже не выталкивается из области сильного поля, а, напротив, втягивается в эту область.

Из (1.8) следует еще одно интересное следствие для частиц, движущихся в поперечных ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}_0$ ) электрических полях в сильном магнитном поле  $\omega_{He} \gg \omega$ . Оказывается, что усредненная сила, действующая на электроны в поле круговой поляризации, больше аналогичной силы в линейно поляризованном поле в  $\omega_{He}/\omega$  раз. В частности, если в линейно поляризованном поле силы, действующие на электроны  $|F_e|$  и ионы  $|F_i|$ , сравниваются по величине (противоположны по знаку) при частоте  $\omega = (\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$ , то в циркулярно поляризованном поле  $|F_e|$  значительно превосходит  $|F_i|$  при всех частотах  $\omega \gg \omega_{Hi}$ . Наиболее наглядно это обстоятельство видно, если записать потенциал силы  $\mathbf{F}_{\alpha} = -m_{\alpha}\nabla\Phi_{\alpha}$ , действующей на частицы сорта  $\alpha$  в виде [14]

$$\Phi_{\alpha} = [e_{\alpha}^2/4m_{\alpha}(\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2)] \{ |E_x|^2 + |E_y|^2 + (\omega_{H\alpha}/\omega) \text{Im} [\mathbf{E}\mathbf{E}^*]_z \}. \quad (1.9)$$

Приведенные выражения легко обобщаются на случай учета соударений заряженной частицы. В частном случае движения в монохро-

матическом поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp [i\omega t - i\varphi_E(\mathbf{r})]$ , где  $E(\mathbf{r})$  — действительная амплитуда поля,  $\varphi_E(\mathbf{r})$  — его фаза, получим [15]

$$\mathbf{F}_{\text{ср}} = -m\nabla\Phi_0 + 2(\nu/\omega)\Phi_0\nabla\varphi_E, \quad (1.10)$$

где  $\nu$  — частота соударений ( $\nu \ll \omega$ ). Второй член в (1.10) непотенциален, он описывает передачу импульса частице и существует лишь в полях, обладающих «бегучестью»  $\nabla\varphi_E \neq 0$ . Аналогичное выражение справедливо для случая частицы, находящейся в квазимонохроматическом поле с конечным временем корреляции фазы  $\tau_\phi$ , необходимо только в (1.10) заменить  $\nu$  на  $\tau_\phi^{-1}$ .

Выражение для усредненной силы, действующей на единичный объем плазмы, можно получить, если просуммировать силы, действующие на все находящиеся в этом объеме частицы, и учесть, что в плазме действующее поле равно среднему микроскопическому. Так, в магнитоактивной плазме, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^r(\omega) - i\varepsilon_{ij}^{\mu}(\omega)$  ( $\varepsilon_{ij}^r(\omega)$  и  $\varepsilon_{ij}^{\mu}(\omega)$  — эрмитова и антиэрмитова части тензора  $\varepsilon_{ij}$ ), для объемной силы имеем

$$\mathbf{F}_v = -(1/16\pi) \operatorname{Re} \sum_{i,k} [(\varepsilon_{ik}^r - \delta_{ik}) \nabla(E_i E_k^*) + 2(\varepsilon_{ik}^{\mu} E_i E_k^*) \nabla\varphi_E], \quad (1.11)$$

$\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Для изотропной плазмы с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^r(\omega) - i\varepsilon^{\mu}(\omega)$  из (1.10) получаем

$$\mathbf{F}_v = [(\varepsilon_r - 1)/16\pi] \nabla|\mathbf{E}|^2 + (\varepsilon_{\mu}/8\pi) |\mathbf{E}|^2 \nabla\varphi_E. \quad (1.12)$$

Соотношения (1.11), (1.12) совпадают с аналогичными соотношениями для усредненной ponderomotorной силы, полученными в [7] с помощью феноменологического вывода общего выражения усредненного по периоду ВЧ-поля тензора натяжений электромагнитного поля\*.

## § 1.2. Квазигидродинамика плазмы в ВЧ-полях

Рассмотрим поведение полностью ионизованной изотропной плазмы без соударений в неоднородном ВЧ-поле. Будем интересоваться средними по времени возмущениями параметров плазмы. Для их определения можно воспользоваться системой усредненных по периоду ВЧ-поля кинетических уравнений для электронов и ионов, которые можно получить, если в кинетическом уравнении для функции распределения  $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  частиц сорта  $\alpha$

$$\partial f_{\alpha}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla) f_{\alpha} + (e_{\alpha}/m_{\alpha}) \{\mathbf{E} + 1/c [\mathbf{v}\mathbf{H}]\} \partial f_{\alpha}/\partial \mathbf{v} = 0 \quad (1.13)$$

\* При феноменологическом подходе не удается определить объемную силу в диспергирующей среде с диссипацией, что связано с невозможностью получения феноменологического выражения для плотности энергии электромагнитного поля в такой среде.



произвести замену переменных (1.1), эквивалентную переходу в осциллирующую систему координат. В результате имеем уравнения для функции распределения  $f_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{v}, t)$  [16]

$$\partial f_\alpha / \partial t + \mathbf{V} \partial f_\alpha / \partial \mathbf{R} + \{ (e_\alpha / m_\alpha) \mathbf{E}_\Pi - \nabla \Phi_\alpha \} \partial f_\alpha / \partial \mathbf{v} = 0, \quad (1.14)$$

в которых высокочастотный потенциал  $\Phi_\alpha$  определяется соотношениями (1.5) или (1.7), а  $\mathbf{E}_\Pi$  — самосогласованное низкочастотное электрическое поле, возникающее в плазме из-за различия сил, действующих на электроны и ионы (в изотропной плазме обычно можно пренебречь силой, действующей на ионы непосредственно со стороны ВЧ-поля, т. е. положить  $\Phi_i = 0$ ). Кинетические уравнения (1.14) необходимо дополнить уравнением Пуассона для поля  $\mathbf{E}_\Pi = -\nabla \varphi$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_\Pi = 4\pi e (\int f_i d\mathbf{v} - \int f_e d\mathbf{v}). \quad (1.15)$$

Уравнения (1.14), (1.15), дополненные уравнением для ВЧ-поля и соответствующим выражением для плотности тока,

$$\mathbf{j}_\alpha = \int \rho_\alpha f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{R}, t) d\mathbf{v}, \quad (1.16)$$

составляют наиболее общий аппарат для описания нелинейных эффектов, сопровождающих распространение в плазме электромагнитных волн. Однако в большинстве случаев при рассмотрении нелинейных процессов, не связанных с особенностями распределения частиц по скоростям, можно задачу упростить, перейдя к усредненным уравнениям двухжидкостной квазигидродинамики плазмы в ВЧ-поле [8—10]:

$$\left. \begin{aligned} m d\mathbf{v}_e / dt &= -(1/N_e) \nabla (N_e T_e) + e \nabla \varphi - m \nabla \Phi_e; \\ M d\mathbf{v}_i / dt &= -(1/N_i) \nabla (N_i T_i) - e \nabla \varphi; \\ \partial N_\alpha / \partial t + \operatorname{div} (N_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0, \Delta \varphi = 4\pi e (N_e - N_i). \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Здесь  $N_\alpha$  и  $\mathbf{v}_\alpha$  — концентрация и скорость частиц сорта  $\alpha$ ,  $T_\alpha$  — температура в энергетических единицах.

В стационарном  $[\exp(i\omega t)]$  поле устанавливаются стационарные бoльцмановские функции распределения электронов и ионов\*.

$$N_e = N_0 \exp [(-m\Phi + e\varphi) / T_e], \quad N_i = N_0 \exp (-e\varphi / T_i). \quad (1.18)$$

Здесь  $N_0$  — постоянная интегрирования, имеющая смысл невозмущенной концентрации, если поле локализовано в ограниченной области плазмы, или определяемая из условия сохранения числа частиц.

Потенциал  $\varphi$ , входящий в (1.18), является решением уравнения Пуассона, которое легко проанализировать для сравнительно сла-

\* Распределения типа (1.18) устанавливаются, вообще говоря, лишь при наличии слабых соударений, если ВЧ-поле локализовано в конечной области пространства и формирует усредненный потенциальный барьер, размер которого мал по сравнению с длиной свободного пробега, так что в области, где поле отсутствует, происходит максвеллизация функций распределения частиц. В случае усредненной потенциальной ямы важную роль играют захваченные частицы (см., например, [16]).

бого поля  $m\Phi_e/T_e \ll 1$ , когда функции (1.18) можно разложить в ряд, ограничившись членами первой степени. Если, однако, размер неоднородности поля велик по сравнению с дебаевским радиусом  $L_E \gg r_d \simeq v_{Te}/\omega_{pe}$ , т. е. выполнено условие квазинейтральности плазменных возмущений, то в уравнении Пуассона можно пренебречь дифференциальным членом, положив  $N_e \simeq N_i$ . В результате имеем  $\varphi = (m/e) \Phi_e [T_i/(T_e + T_i)]$ , а распределения концентраций электронов и ионов можно представить в виде

$$N_e = N_i = N_0 \exp [-m\Phi_e/(T_e + T_i)] = N_0 \exp (-|E|^2/E_p^2), \quad (1.19)$$

где  $E_p = \sqrt{4m\omega^2(T_e + T_i)/e}$  — характерное плазменное поле для нелинейных стрикционных эффектов.

Таким образом, плазма выталкивается из области сильного поля, причем учет разделения зарядов является принципиальным: при  $L_E \gg r_d$  он приводит к уменьшению эффективного потенциального рельефа в  $(1 + T_i/T_e)$  раз.

В предельном случае разреженной плазмы  $L_E \ll r_d$  кулоновский потенциал мал по сравнению с высокочастотным  $\varphi \ll (m/e) \Phi_e$ . Ионы при этом можно считать невозмущенными, а распределение электронов описывать барометрической формулой (1.18).

При рассмотрении перераспределения плотности в нестационарных полях  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ , а также процессов установления стационарных состояний следует учесть, что обычно тепловая скорость электронов заметно превышает тепловую скорость ионов:  $v_{Te} \gg v_{Ti}$ . Поэтому, если характерное время изменения поля  $T_E$  больше времени пролета электроном масштаба неоднородного поля,  $T_E \gg L_E/v_{Te}$ , электроны успевают устанавливать больцмановское распределение типа (1.18). Поведение ионов при этом можно описывать гидродинамическими уравнениями. Если ограничиться случаем  $L_E \gg r_d$ , то электрическое поле можно исключить из уравнения движения ионов. В результате для малых возмущений плотности  $N = N_0(1 + n)$ ,  $n \ll 1$  в сильнонеизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ) имеем уравнение

$$\partial^2 n / \partial t^2 - v_s^2 \Delta n = (m/M) \Delta \Phi_e, \quad (1.20)$$

$v_s = [(T_e + T_i)/M]^{1/2}$  — скорость ионно-звуковых колебаний. Следовательно, в слабом поле установление стационарных распределений происходит за время пролета парой электрон—ион области неоднородного поля с ионно-звуковой скоростью.

В ряде случаев, в частности, при исследовании нелинейных волн, групповая скорость которых близка к ионно-звуковой скорости  $v_s$ , необходимо учитывать нелинейности и дисперсии ионно-звуковых движений, возникающих под действием ponderomotorной силы. Соответствующее уравнение для  $n$  тогда имеет вид уравнения Буссинеска с правой частью [17, 18].

В сильном поле  $E \gg E_p$  кинетическое давление мало по сравнению с высокочастотным, так что установление стационарного состояния происходит со скоростью движения пары электрон—ион в потенциальном силовом поле  $dv/dt = -(m/M) \nabla \Phi_e$ , но для описания нестацио-

нарных процессов в таких полях необходимо пользоваться кинетическим уравнением из-за возникновения эффектов многопоточности движения. Некоторые примеры решения самосогласованных задач о растекании плазмы в ВЧ-поле приведены в работе [10].

В замагниченной плазме действие электромагнитного давления приводит к появлению квазистационарных возмущений постоянного магнитного поля. Если стационарные возмущения плотности по-прежнему описываются больцмановским распределением (1.12) с соответствующим выражением (1.11) для высокочастотного потенциала, а стационарные возмущения магнитного поля равны нулю, то получение общих соотношений для нестационарных возмущений требует проведения громоздких выкладок.

Исходная система для малых возмущений может быть получена с помощью линеаризации уравнений двухжидкостной гидродинамики, дополненных членами, учитывающими поперечную силу [13] и возникновение намагниченности в ВЧ-поле в результате обратного эффекта Фарадея [7]. Будем для простоты считать, что пространственные изменения параметров происходят по одной координате  $x$  ( $\Phi_e = \Phi_e(x)$ ), направленной под углом  $\theta$  к  $\mathbf{H}_0$ . Рассмотрим медленные возмущения с характерным временем  $T_E \gg 1/\omega_{Hi}$  и масштабом  $L_E \ll c/\omega_{pe}$ , для которых основную роль в релаксационных процессах играют магнитно-звуковые движения.

В итоге для  $z$  — компоненты возмущения магнитного поля  $h_z = H_z/H_0$  получим уравнения\*

$$(\partial^2/\partial x^2 - v_A^{-2} \partial^2/\partial t^2) h_z = -(\beta/v_A^2) \partial^2/\partial x^2 (v_s^2 n - \Phi_e) \quad (1.21)$$

( $v_A = (H_0^2/4\pi NM)^{1/2}$  — альфвеновская скорость:  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = \sin \theta$ ), которое необходимо дополнить уравнением для возмущения плотности. Последнее при произвольном угле распространения  $\theta$  имеет чрезвычайно громоздкий вид, поэтому мы приведем его лишь в некоторых наиболее важных случаях.

При квазипоперечном распространении  $\cos \theta \ll m/M$  получаем [19, 20]

$$\partial^2 n/\partial t^2 - v_s^2 \partial^2 n/\partial x^2 = \omega_{He} \omega_{Hi} (h_z - n) + \partial^2 \Phi/\partial x^2, \quad (1.22)$$

а в области углов  $\Omega^2/\omega_{Hi}^2 \gg \cos^2 \theta \gg \Omega^2/\omega_{He} \omega_{Hi}$ ,  $\Omega$  — характерная частота медленных движений:

$$\partial^2 n/\partial t^2 - v_s^2 \partial^2 n/\partial x^2 = \omega_{Hi}^2 (h_z^2 - \beta^2 n) + \partial^2 \Phi/\partial x^2. \quad (1.23)$$

В пределе продольного распространения ( $\theta = 0$ ) уравнение (1.23) совпадает с уравнением (1.20) для изотропной плазмы, а предельный переход к стационарному случаю ( $\partial/\partial t = 0$ ) в системе уравнений (1.21), (1.22) дает неправильный результат; для получения правильных соотношений в исходных уравнениях необходимо сначала положить  $\partial/\partial t = 0$ , а затем устремить к нулю угол  $\theta$ .

\* Мы ограничились рассмотрением случая плазмы низкого давления  $8\pi NT_e/H_0^2 \ll 1$ , в котором вкладом обратного эффекта Фарадея можно пренебречь по сравнению со стрикционной нелинейностью.

### § 1.3. Уравнения электромагнитного поля

Полученные выше соотношения, определяющие возмущения плотности плазмы, производимые неоднородным ВЧ-полем, необходимо дополнить уравнениями для электрического поля. Учитывая в волновом уравнении

$$c^2 \text{rot rot } \mathbf{E} + \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = 4\pi d\mathbf{j} / dt \quad (1.24)$$

нелинейную связь плотности тока  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$ , полученную в квазигидродинамическом приближении,  $\mathbf{j} = eN_e \mathbf{v}_e$  и пренебрегая второй производной по времени амплитуды квазимонохроматического поля  $\mathbf{E} = E(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t)$ , нетрудно получить для случая изотропной плазмы уравнение вида [8, 21]

$$-2i\omega \partial \mathbf{E} / \partial t - c^2 \text{rot rot } \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mathbf{E} + i\partial \epsilon / \partial t \mathbf{E} - \\ - (3 T_e / m N_e) \nabla (N_e \text{div } \mathbf{E}) = 0. \quad (1.25)$$

Это уравнение аналогично обычному уравнению для электрического поля в плазме с медленно меняющимся параметром и дополнено членом, учитывающим слабую пространственную дисперсию.

В (1.25) выражение для диэлектрической проницаемости плазмы не отличается от соответствующего выражения линейной теории  $\epsilon = 1 - 4\pi e^2 N_e / m \omega^2$ , но входящая в него концентрация является функцией амплитуды. В случае малых возмущений плотности членом  $\sim \partial \epsilon / \partial t$  в уравнении (1.25) можно пренебречь.

В стационарном  $[\sim \exp(i\omega t)]$  поле диэлектрическая проницаемость плазмы, связанная со стрикционной нелинейностью, оказывается локальной функцией амплитуды поля

$$\epsilon(|\mathbf{E}|^2) = 1 - (\omega_p^2 / \omega^2) \exp(-|\mathbf{E}|^2 / E_p^2), \quad (1.26)$$

а в умеренно сильных полях  $|\mathbf{E}| \ll E_p$  ее можно представить в стандартном для слабонелинейной кубической среды виде

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' |\mathbf{E}|^2, \quad \epsilon_0 = 1 - \omega_{p0}^2 / \omega^2, \\ \epsilon' = \omega_{p0}^2 / (\omega^2 E_p^2). \quad (1.27)$$

Важной характеристикой зависимости  $\epsilon(|\mathbf{E}|^2)$  является знак производной  $\partial \epsilon / \partial |\mathbf{E}|^2$  (коэффициента  $\epsilon'$ ). Стрикция приводит к увеличению диэлектрической проницаемости в области поля  $\partial \epsilon / \partial |\mathbf{E}|^2 > 0$ , такой же знак имеют и тепловые нелинейности, которые мы не рассматриваем здесь подробно (см., например, [22, 23]).

Еще один механизм, приводящий в бесстолкновительной плазме к зависимости  $\epsilon(|\mathbf{E}|)$ , связан с нелинейностью осцилляторного движения заряженной частицы в электромагнитном поле. В волновом поле характерным параметром этой нелинейности является отношение осцилляторной скорости электрона к фазовой скорости волны  $\dot{r} / v_\phi$  и релятивистский параметр  $\dot{r} / c$ . Для поперечных волн в изотропной плазме  $v_\phi > c$  и можно показать, что определяющим является вклад

релятивистской зависимости массы электрона от его энергии. Поскольку масса с ростом энергии увеличивается, то и для этой нелинейности  $\partial \epsilon / \partial |E|^2 > 0$ , а при слабом релятивизме зависимость  $\epsilon$  ( $|E|^2$ ) можно представить в виде (1.27), где коэффициент нелинейности положителен и в случае линейно поляризованного поля равен [8, 24, 25]

$$\epsilon'_{\text{рел}} = \omega_{p0}^2 / (\omega^2 E_{\text{рел}}^2), \quad E_{\text{рел}}^2 = 4m^2 c^2 \omega^2 / 3e^2. \quad (1.28)$$

Хотя коэффициент  $\epsilon'_{\text{рел}}$  мал по сравнению с коэффициентом нелинейности стрикции  $\epsilon'_c$ , из-за своей безынерционности релятивистская электронная нелинейность может дать заметный вклад в нестационарные процессы (подробности см. в гл. 2).

Уравнение (1.25) справедливо для описания самовоздействия не только электромагнитных волн, но и продольных плазменных колебаний. Однако при исследовании динамики ленгмюровских колебаний зачастую оказывается более удобным пренебречь возбуждением малых вихревых составляющих поля (пропорциональных  $v_{\perp}^2/c^2$ ) и воспользоваться квазистатическим уравнением  $\text{div } \epsilon \mathbf{E} = 0$  в предположении потенциального характера поля  $\mathbf{E} = -\nabla \Psi$ . Соответствующее уравнение для потенциала  $\Psi$ , учитывающее стрикционную нелинейность, в этом случае имеет вид [11]

$$\Delta [-2 (i/\omega_p) \partial \Psi / \partial t + 3r_d^2 \Delta \Psi] = -\text{div} (n \nabla \Psi). \quad (1.29)$$

Расчет электронной нелинейности для ленгмюровских колебаний ( $v_{\text{ф}} \ll c$ ) показывает, что эта нелинейность нелокальна\* и отлична от нуля только для неоднородных распределений поля, для нее производная  $\partial \epsilon / \partial |E|^2 < 0$  (подробности см. в [26, 27]).

Поскольку основные уравнения в магнитоактивной плазме имеют более сложный вид из-за наличия в общем случае возмущений плотности и постоянного магнитного поля, мы не приводим здесь общих соотношений и лишь укажем, что необходимые частные уравнения будут приведены в соответствующих разделах.

## ГЛАВА 2

### САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Исследование эффектов самовоздействия квазимонохроматических электромагнитных волн, т. е. эффектов обратного влияния производимых полем возмущений на структуру электромагнитных полей в плазме, естественно начать с рассмотрения процессов, не связанных с параметрическим возбуждением волн других типов и частот. В данной главе рассмотрены некоторые простейшие модельные задачи о стационарном самовоздействии электромагнитных волн в плотной изотропной плазме — исследовано отражение плоских электромагнит-

\* Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  ( $|E|$ ) — нелокальная функция амплитуды поля.

ных волн большой амплитуды плоскостойкой плазмой, определена структура самоподдерживающихся волноводных каналов, возникающих в плазме под действием интенсивного излучения, проанализированы стационарные нелинейные волны огибающих электромагнитных и плазменных волн. Общим для всех этих задач является то, что все они сводятся к решению одномерных нелинейных уравнений в обыкновенных производных.

## § 2.1. Отражение и проникновение плоской электромагнитной волны

**Общие свойства ТЕМ-волн.** Рассмотрим сначала некоторые общие свойства ТЕМ-волн в однородной непоглощающей плазме с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon(|E|)$ , определяемой выражением (1.26).

Вводя безразмерную (отнесенную к плазменному полю  $E_p$ ) комплексную амплитуду  $\mathcal{E}(x) = E_p \tilde{E}(x) \exp[-i\varphi(x)]$  из уравнения Гельмгольца

$$d^2\mathcal{E}/dx^2 + \varepsilon(|\mathcal{E}|^2) \mathcal{E} = 0, \quad (2.1)$$

получаем систему уравнений для действительных амплитуды и фазы

$$d^2E/dx^2 + [1 - q \exp(-E^2) - (d\varphi/dx)^2] E = 0; \quad (2.2)$$

$$E^2 d\varphi/dx = \text{const} = \bar{M}. \quad (2.3)$$

Здесь  $x$  — безразмерная координата  $k_0 x$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $q = \omega_p^2/\omega^2$ . Постоянство  $\bar{M}$ , характеризующей сохранение полного потока энергии волны в направлении  $x$ , является следствием консервативности системы (отсутствия диссипации).

Исследуем беспотоковые распределения поля типа стоячей волны  $\bar{M} = 0$  [28]. В этом случае уравнение (2.2) имеет первый интеграл вида

$$(dE/dx)^2 + E^2 + q \exp(-E^2) = C, \quad (2.4)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Этот интеграл имеет смысл постоянства полного давления системы плазма — поле в каждой точке. Из (2.4) можно получить зависимость амплитуды поля от координаты в квадратурах

$$x - x_0 = \pm \int_E^{E_m} (C - v^2 - q \exp(-v^2))^{-1/2} dv, \quad (2.5)$$

где  $E_m$  — максимальное (при данном  $C$ ) значение поля, достигаемое в точке  $x = x_0$ .

Характер решения проще всего проанализировать на фазовой плоскости  $E, dE/dx$  (рис. 1). Эта фазовая плоскость тождественна фазовой плоскости движения частицы в потенциальной яме  $V(E) = E^2 + q \exp(-E^2)$ . Каждой траектории соответствует определенное значение постоянной интегрирования (полной энергии осциллятора).

Наиболее интересным является случай  $q > 1$ , при котором существуют три состояния равновесия на фазовой плоскости. Точка  $(0, 0)$  на этой плоскости является особой точкой типа «седло». Сепаратриса  $C = q$ , идущая из седла в седло и охватывающая особую точку типа «центр», отвечает локализованному решению — поле исчезает при  $x \rightarrow \pm\infty$ . В самом деле, время движения (координата  $x$ ) изображающей точки по фазовой траектории  $C = q$  в состоянии равновесия  $(0, 0)$  бесконечно велико. Следовательно, эта точка соответствует в пространстве  $x = \pm\infty$ .

Фазовые траектории, получающиеся при других значениях  $C$ , отвечают пространственно периодическим волнам. Траектории  $C > q$  соответствуют знакопеременным распределениям поля, в которых и диэлектрическая проницаемость меняет знак:  $\varepsilon < 0$  в области  $E = 0$  и  $\varepsilon > 0$  в области  $E \simeq E_{\text{макс}}$ . Кривые  $C < q$ , заключенные внутри сепаратрисы, соответствуют таким распределениям поля, при которых диэлектрическая проницаемость всюду положительна, а амплитуда поля нигде не обращается в нуль, изменяясь от  $E_{\text{мин}}$  до  $E_{\text{макс}}$ .

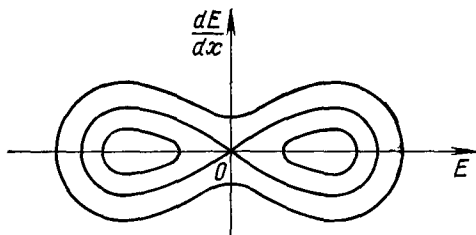


Рис 1. Фазовая плоскость стоячей волны

При  $q < 1$  диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon > 0$  даже при  $E = 0$ , так что распределение поля представляет собой нелинейное обобщение обычных стоячих волн линейного приближения.

Остановимся несколько подробнее на локализованном распределении поля в плазме, электронная концентрация которой на бесконечности ( $x = \pm\infty$ ) превышает критическую  $\omega < \omega_{p\infty}$ . Максимальную амплитуду поля можно определить из (2.5), положив  $C = q = \omega_{p\infty}^2/\omega^2$ ,  $dE/dx = 0$ ,  $E = E_m$ . В результате получим

$$E_m^2 = q [1 - \exp(-E_m^2)]. \quad (2.6)$$

В частном случае малой закритичности  $|1 - q| \ll 1$  и нелинейности  $E_m^2 \ll 1$  распределение поля можно записать в явном виде

$$E = E_m \text{ch}^{-1}(qx), \quad x^2 = qE_m^2/2, \quad E_m^2 = 2(q - 1)/q. \quad (2.7)$$

Периодическими решениями уравнения (2.2) в этом случае являются эллиптические функции Якоби.

Аналогично можно рассмотреть распределение с потоком энергии, отличным от нуля  $\bar{M} \neq 0$ . Уравнение для действительной амплитуды поля

$$d^2E/dx^2 + [1 - q \exp(-E^2) - \bar{M}^2/E^4] E = 0 \quad (2.8)$$

и в этом случае имеет первый интеграл

$$(dE/dx)^2 + E^2 + q \exp(-E^2) + \bar{M}^2/E^2 = C_1. \quad (2.9)$$

Фазовая плоскость уравнения (2.9) приведена на рис. 2. Состояние равновесия  $E = E^*$ ,  $dE/dx = 0$  является особой точкой типа «центр», прямая  $E = 0$  является особой. Все решения (2.8) — периодические функции координаты как в прозрачной, так и в закритической плазме, причем амплитуда  $E(x)$  ни в одной точке не обращается в 0.

**Отражение ТЕМ-волны от полуограниченной плазмы.** Рассмотрим с помощью полученных соотношений задачу о нормальном падении волн из вакуума на плазму, занимающую полупространство [29, 30]. Представим поле в вакууме в виде суммы падающей и отраженной волн:

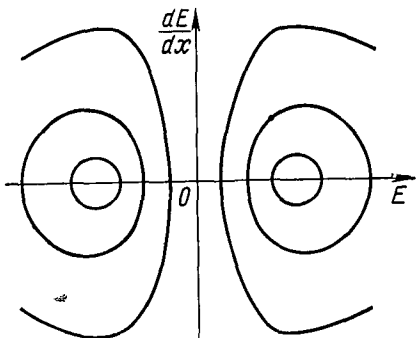


Рис 2. Фазовая плоскость уравнения (2.9)

$$E = E_{\text{пад}} \{ \exp(-ix) + R \exp[i(x - \Psi)] \}, \quad (2.10)$$

где  $R$  и  $\Psi$  — амплитуда и фаза коэффициента отражения. Из условия непрерывности электрического и магнитного полей на границе получаем [10, 29]

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= 1 - M/E_{\text{пад}}^2, \quad E(0) = E_{\text{пад}} \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos \Psi}, \\ \text{tg } \varphi(0) &= -R \sin \Psi / (1 + R \cos \Psi), \quad \text{tg } \Psi = E(0) \dot{E}(0) / [\bar{M} - \\ &- E^2(0) - 2E_{\text{пад}}^2]. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Рассмотрим случай, когда поле не проникает в плазму, т. е. для  $E$ ,  $E \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . При этом, разумеется, поток энергии  $\bar{M} = 0$  и из граничных условий (2.10) получаем:

$$R = 1, \quad E(0) = 2E_{\text{пад}} \sin(\Psi/2), \quad \dot{E}(0) = 2E_{\text{пад}} \cos(\Psi/2). \quad (2.12)$$

Используя интеграл (2.4) для локализованного решения ( $C = q$ ), можно определить фазу отраженной волны:

$$\sin^2(\Psi/2) = - (4\dot{E}_{\text{пад}}^2)^{-1} \ln [1 - (4\omega^2/\omega_{p\infty}^2) E_{\text{пад}}^2]. \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует довольно очевидный результат, что стационарное локализованное (беспотокное) распределение поля в плазме существует ( $\sin^2(\Psi/2) > 0$ ), если давление падающей волны меньше, чем тепловое давление невозмущенной плазмы. В этом случае плазма сохраняет свое экранирующее действие, но глубина проникновения поля в плазму может существенно превысить толщину «линейного» скин-слоя. Из (2.13), кроме того, можно определить критическую частоту, ниже которой поле в плазме при  $x \rightarrow \infty$  убывает [10].

**Отражение от слоя плазмы (нормальное падение).** Рассмотрим далее отражение электромагнитной волны от однородного слоя плазмы,



ограниченного плоскостями  $x = 0$  и  $x = d$  [31]. Эту задачу удобнее решать, исходя из граничных условий, заданных не на передней, а на задней границе слоя, восстанавливая амплитуду падающей волны и коэффициент отражения по амплитуде, прошедшей через слой волны. Поле прошедшей через слой волны (в области  $x > d$ ) представим в виде  $E = E_{\text{пр}} \exp(-ix)$ . Из условий непрерывности электрических и магнитных полей имеем следующие граничные условия при  $x = d$ :

$$E(d) = E_{\text{пр}}, \quad \dot{E}(d) = 0, \quad \dot{\phi}(d) = 1, \quad M = E_{\text{пр}}^2. \quad (2.14)$$

Характер решения проще всего качественно проанализировать, используя фазовую плоскость (см. рис. 2), на которой искомое решение изображает фазовая кривая, проходящая через точку  $E = E_{\text{пр}}, \dot{E} = 0$ . Поскольку все решения — периодические функции  $x$ , ясно, что коэффициенты отражения и передачи слоя являются периодическими функциями его толщины, а слой, толщина которого кратна периоду функции  $E(x)$ , оказывается прозрачным (неотражающим).

Конкретные численные результаты можно получить, если определить с помощью уравнения (2.8) амплитуду поля на передней границе слоя ( $x = 0$ ) и ее производную:

$$x - d = \int_{\dot{E}}^{E_{\text{пр}}} \{q[\exp(-E_{\text{пр}}^2) - \exp(-u^2)] + 2E_{\text{пр}}^2 - u^2 - E_{\text{пр}}^4/u^2\}^{-1/2} du \quad (2.15)$$

и затем, используя граничные условия (2.11), вычислить соответствующие коэффициенты отражения и амплитуду падающей волны.

Просветление слоя «закритической» ( $\omega < \omega_{p\infty}$ ) плазмы под действием падающей волны связано с перераспределением концентрации плазмы в слое, приводящим к тому, что диэлектрическая проницаемость становится знакопеременной функцией координаты. Существование неотражающих неоднородных слоев известно и в линейной теории. В рассматриваемом случае любопытно, что при сколь угодно малой амплитуде прошедшей (и падающей волны) можно подобрать такую толщину слоя, при которой даже сильно «закритическая» плазма ( $\omega_{p\infty} \gg \omega$ ) прозрачна. Разумеется, в таких решениях амплитуда поля внутри слоя намного превышает амплитуду падающей волны  $E_{\text{пад}}$ , диэлектрическая проницаемость является знакопеременной функцией  $\varepsilon(x)$ , так что плазменный слой представляет собой нелинейный аналог высокочастотного резонатора типа Фабри—Перо, для возбуждения которого необходимо бесконечно большое время.

Заметим, что если зависимость амплитуды падающей волны  $E_{\text{пад}}$  от амплитуды прошедшей  $E_{\text{пр}}$  является однозначной, то при большой толщине слоя интересующая нас обратная зависимость  $E_{\text{пр}} = f(E_{\text{пад}})$  неоднозначна (гистерезис)\*. Вопрос о том, какое из возможных ре-

\* Детальные численные и аналитические исследования эффекта гистерезиса отражения сильной волны от слоя плазмы с резкими границами проведены в работе [32].

шений (с сильным отражением или резонансным прохождением) реализуется, зависит от предыстории процесса — очевидно, что для создания режимов резонансной прозрачности необходимы существенно большие амплитуды падающей волны, чем для их поддержания.

Стационарный коэффициент отражения сильной волны от плавно неоднородного слоя плазмы, имеющего в невозмущенном состоянии широкую область непрозрачности, также является неоднозначной функцией амплитуды падающей волны [33]. Как и в случае плазмы с резкой границей [31] эффект резонансной прозрачности является весьма критичным по отношению к наличию в плазме потерь. Уже при достаточно малой частоте соударений этот эффект пропадает и глубина проникновения поля в плазму оказывается конечной.

Границу области прозрачности для сильной волны в плавно неоднородном слое с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(x, |E|^2) = 1 - x/l + |E|^2/E_p^2$  можно определить, если воспользоваться ВКБ-приближением. В этом приближении уравнение для медленной амплитуды волны можно представить в виде [34]

$$E = E_0 / [\epsilon(x, |E|^2)]^{1/4}, \quad (2.16)$$

$E_0$  — амплитуда падающей волны. Это алгебраическое уравнение определяет неоднозначную зависимость  $E(z)$ ,  $\epsilon(x)$ , в которой переход с одной ветки на другую осуществляется скачком. Оказывается, что диэлектрическая проницаемость плазмы в области прозрачности в этом случае увеличивается в среднем (из-за наличия отражения в среде возникает модуляция) до уровня  $\bar{\epsilon} = (E_0/E_p)^{4/3}$ , а переход через точку  $\epsilon = 0$  (от значения  $\epsilon = \bar{\epsilon}$  до значения  $\epsilon = -\bar{\epsilon}$ ), сдвигается в область  $x = l (E_0/E_p)^{4/3}$ . Характерный масштаб этого перехода, очевидно, порядка длины волны в среде с  $\epsilon = \bar{\epsilon}$ :  $\Lambda_e \simeq c/\omega_p \sqrt{\bar{\epsilon}}$ . Приведенные оценки хорошо согласуются с решением задачи, полученным в [35] с помощью усреднения по периоду нелинейных стоячих волн.

**Деформация области плазменного резонанса в поле  $TM$ -волны.** Выше речь шла о нормальном падении электромагнитной волны на неоднородную плазму. Обобщение этих результатов на случай наклонного падения  $TE$  ( $s$ -поляризованной)-волны с вектором электрического поля, перпендикулярным плоскости падения, является тривиальным. Еще один важный эффект самовоздействия возникает в случае падения  $TM$  ( $p$ -поляризованной)-волны, имеющей составляющую электрического поля, параллельную градиенту диэлектрической проницаемости  $\epsilon(x)$ , — он связан с генерацией продольных волн в области плазменного резонанса.

Известно, что в линейном приближении в слое холодной бесстолкновительной плазмы с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , зависящей в окрестности резонансной точки  $\epsilon = 0$  от координаты  $x$  по закону  $\epsilon = -x/l$ , компонента электрического поля  $E_x$  имеет квазистатическую особенность типа  $E_x \sim D/\epsilon$  ( $D$  — константа, определяемая структурой внешнего поля и слоя плазмы) [36, 37]. Особенность сни-

мается при введении мнимой части  $\varepsilon$ , определяемой соударением, или слабой пространственной дисперсией, приводящих к появлению в резонансной области конечных потерь (либо потерь на соударения, либо перекачки энергии в плазменную волну, бегущую от области резонанса в направлении возрастания  $\varepsilon$ ). Мощность этих потерь не зависит от механизма диссипации и определяется крутизной перехода через резонансную точку  $l$  и величиной константы  $D$  [38]:

$$Q_0 = 1/8 \omega l D^2. \quad (2.17)$$

В случае толстого ( $k_0 l \gg 1$ ) линейного слоя плазмы амплитуду электрической индукции  $D$  в резонансной области можно связать с амплитудой падающей волны: для оптимального угла падения  $\theta \sim (k_0 l)^{-1/3}$  максимальное значение  $D \simeq E_{\text{пад}} / \sqrt{2\pi k_0 l}$ . Отсюда следует, что в таком линейном слое может поглощаться до 50% мощности падающей волны [39, 40]. Недавно в работах [41, 42] показано, что в случае специально подобранных профилей плазмы возможно полное согласование плазмы с падающим излучением.

Влиянию нелинейности на эффективность трансформации электромагнитной волны в плазменные колебания в резонансной области посвящено достаточно большое число работ (см., например, [43—45]). В данном разделе мы, базируясь на работах [34, 46, 47], рассмотрим влияние на характеристики резонансного поглощения эффектов деформаций профиля плотности, возникающих под действием ponderomotorной силы. Заметные деформации профиля плотности  $n(x)$  возникают, в первую очередь, в областях усиления поля: вблизи точки плазменного резонанса ( $\varepsilon \simeq 0$ ) и вблизи точки поворота ( $\varepsilon \simeq \sin^2\theta$ ).

Поскольку длина волны возбуждаемых плазменных колебаний обычно мала по сравнению с характерным масштабом электромагнитной волны (длиной волны или толщиной скин-слоя), для определения эффективности трансформации можно воспользоваться решением квазистатической задачи о возбуждении плазменных колебаний в конденсаторе, заполненном неоднородной плазмой, при заданной величине электрической индукции.

В одномерном приближении при учете эффектов пространственной дисперсии уравнение для стационарного квазистатического поля в плазме, возбуждаемого падающей волной, можно представить в виде [46, 48]

$$3r_d^2 d^2 E / dx^2 + \varepsilon(x, |E|^2) E - i\delta E = D. \quad (2.18)$$

Здесь  $\varepsilon(x, |E|^2) = \varepsilon_0(x) + |E|^2 / E_p^2$ ,  $\varepsilon_0 = -x/l$ ,  $\delta = v/\omega$ ,  $v$  — эффективная частота соударений электронов;  $D = H_y \sin \theta$  определяется из решения задачи для крупномасштабного поля электромагнитной волны.

В «холодной» плазме ( $r_d = 0$ ) решение трансцендентного уравнения ( $\varepsilon E = D$ ) на конечном интервале  $x$  неоднозначно [46], если  $D$  превышает некоторое критическое значение:  $D^2 / E_p^2 > (b/3\sqrt{3}) \delta^3$ . Это

решение определяет три состояния равновесия (рис. 3), одно из которых (изображено пунктиром) неустойчиво. Очевидно, что в какой-то точке интервала  $(x_1, x_2)$  должен иметь место скачок функции  $\varepsilon(x)$  и, следовательно, электрического поля  $E_\lambda(x)$ . Естественно, что при учете пространственной дисперсии резкий перепад должен иметь конечные размеры.

Характер деформации при учете пространственной дисперсии исследовался в [47] с помощью численного решения уравнения (2.18) в случае  $\delta = 0$ . В качестве крайних условий для  $E$  принимались усло-

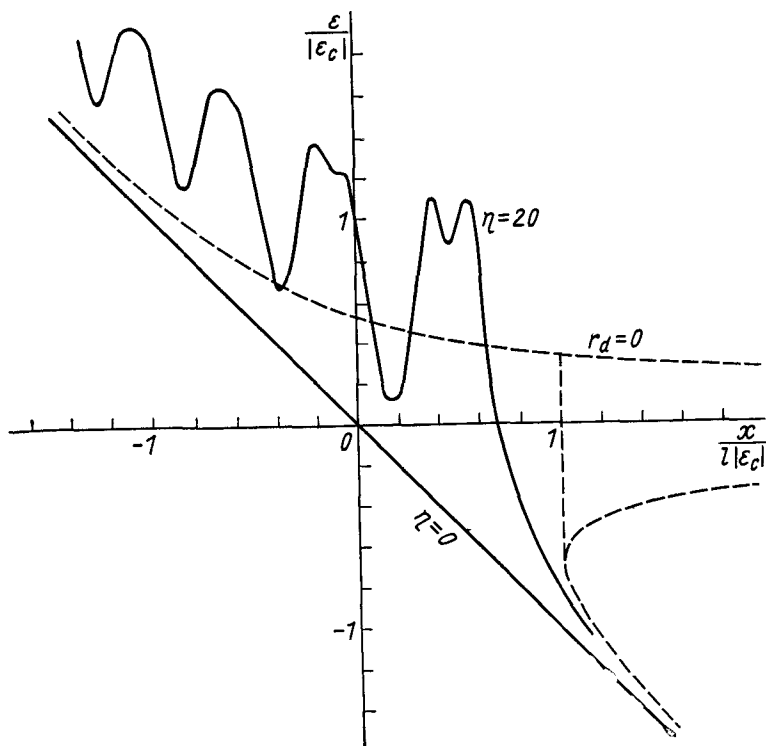


Рис. 3. Зависимость диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(x)$  в резонансной области

излучения при  $(x = -\infty)$  и ограниченности при  $x \rightarrow +\infty$  для асимптотики поля плазменной волны  $E_l = E - D/\varepsilon_0$ . В безразмерных переменных  $\mathcal{E} = (E/D) (\sqrt{3}r_d/l)$ ,  $z = x (3r_d^2/l)^{-1/3}$  уравнение (2.18) в случае  $\delta = 0$  принимает вид

$$d^2\mathcal{E}/dz^2 + (-z + \eta|\mathcal{E}|^2)\mathcal{E} = 1, \quad (2.19)$$

из которого следует, что характер решения определяется одним параметром  $\eta = D^2 l^2 / 3r_d^2 E_p^2$ . Рассматриваемая краевая задача имеет дискретный набор решений. Решение, которое при  $\eta \rightarrow 0$  равномерно

непрерывно переходит в линейное, приведено на рис. 3, где изображены самосогласованные распределения  $\varepsilon(x)$  — сплошные кривые при  $\eta = 0$  и  $\eta = 20$ , пунктир при  $r_d = 0$ . Заметные деформации профиля  $\varepsilon$  возникают при  $\eta \geq 1$ , причем с ростом  $\eta$  переход становится все более крутым, а его координата приближается к точке  $x = x_c = 3l(D^2/4E_p^2)$ , в которой в отсутствие пространственной дисперсии функция  $\varepsilon(x)$  становится неоднозначной.

Деформация профиля  $\varepsilon$  приводит к изменению потока энергии, трансформируемого в продольную волну, убегающую от области плазменного резонанса. При  $\eta \ll 1$  величина этого потока такая же, как и в линейном случае (2.17),  $S_l = Q_0$ . При условии  $\eta \gg 1$ , эквивалентном неравенству  $(E_{\text{пад}}^2/E_p^2) k_0 l \gg v_{Te}^2/c^2$ , характер зависимости  $S_l(\eta)$  можно получить, если рассмотреть возбуждение продольной волны на резком скачке холодного распределения  $\varepsilon(x)$  в точке  $x = x_c$ :  $S_l \sim Q_0/\sqrt{\eta}$ , т. е. эффективность трансформации перестает зависеть от градиента невозмущенной концентрации. Результаты численного расчета [47] подтверждают этот вывод и дают следующее выражение для эффективности трансформации в убегающую плазменную волну:

$$\alpha = S_l/S_0 \simeq 2\sqrt{3} (v_{Te}/c) (DE/E_{\text{пад}}^2), \quad (2.20)$$

$S_0$  — плотность потока энергии в падающей волне.

Рассмотрим с помощью (2.20) сначала случай сравнительно малых амплитуд падающей волны, удовлетворяющих условию  $v_{Te}^2/c^2 \ll \ll (E_{\text{пад}}^2/E_p^2) k_0 l \ll 1$ . При этом деформация профиля плотности сосредоточена в узкой резонансной области  $\varepsilon \simeq 0$ , а плазма вблизи точки поворота остается практически невозмущенной, так что область отражения и область трансформации разделены непрозрачным барьером. Связь  $D$  с  $E_{\text{пад}}$  при этом такая же, как и в линейном приближении  $D = E_{\text{пад}}(2\pi k_0 l)^{-1/2}$ , и, следовательно, согласно (2.20) эффективность трансформации в убегающую продольную волну падает с ростом  $E_{\text{пад}}$ :  $\alpha \sim E_{\text{пад}}^{-1}$  [47]\*.

При условии\*\*  $(E_{\text{пад}}^2/E_p^2) k_0 l > 1$  деформации профиля захватывают уже весьма широкую область, так что точка поворота фактически совмещается с точкой плазменного резонанса. Параметры крупномасштабной деформации плазмы нетрудно определить в предположении  $(E_{\text{пад}}^2/E_p^2)^{2/3} \gg \sin \theta$ , позволяющем при расчете пренебречь продольной компонентой поля  $E_x$  и, тем самым, воспользоваться при-

\* Рассмотренный механизм поглощения, связанный с выносом энергии из резонансной области, не является единственным. При увеличении  $E_{\text{пад}}$  заметную роль играет поглощение излучения, связанное с ускорением электронов непосредственно в области деформации, где происходит модуляционное возбуждение квазистоячих ленгмюровских солитонов и спектр электрического поля обогащен медленными гармониками. Оценки показывают (см. подробности в [49, 50]), что благодаря этому добавочному механизму потеря доля поглощаемой энергии при  $(E_{\text{пад}}^2/E_p^2) k_0 l \simeq 1$  столь же высока, как и в линейном случае.

\*\* Это условие заведомо выполняется в современных экспериментах по взаимодействию излучения неодимовых лазеров с плазмой.

веденным решением для  $TE$ -волны. Оказывается [34], что на фоне электромагнитного перехода плотности с характерным масштабом  $\Lambda_e \sim c/\omega \sqrt{\bar{\epsilon}}$ ,  $\bar{\epsilon} = (E_{\text{пад}}/E_p)^{4/3}$  формируется гораздо более крутой плазменный «скачок» с характерным масштабом порядка плазменной длины волны  $\Lambda_p \sim v_{Te}/\omega \sqrt{\bar{\epsilon}_c}$ , на котором диэлектрическая проницаемость меняется от  $\epsilon = \epsilon_c \simeq (\bar{\epsilon} \sin \theta)^{1/3}$  до  $\epsilon \simeq -\epsilon_c$ . Эффективность генерации продольной волны можно оценить с помощью соотношения (2.20), но с индукцией  $D = \sqrt[4]{\bar{\epsilon}} E_{\text{пад}} \sin \theta$ . В результате имеем\*

$$\alpha = S_l/S_0 \simeq 2 \sqrt[3]{\bar{\epsilon}} (v_{Te}/c) (\sin \theta / \sqrt{\bar{\epsilon}}). \quad (2.21)$$

Поскольку при больших углах падения  $\sin^2 \theta \gg \bar{\epsilon}$  поле в области резонанса экспоненциально мало, оптимальное значение угла падения, соответствующее максимуму поглощения, очевидно, лежит в области

$$\sin \theta_{\text{опт}} \simeq \sqrt[3]{\bar{\epsilon}} = (E_{\text{пад}}/E_p)^{2/3}, \quad (2.22)$$

шириной  $\Delta \theta \sim \theta_{\text{опт}}$ .

Если же поглощение на одном скачке недостаточно велико, электромагнитная волна близка к стоячей и в плазме образуется квазипериодическая структура с несколькими переходами через область резонанса, так что полная поглощаемая мощность оказывается порядка падающей. Соотношение (2.21) определяет величину дополнительного поглощения сильной  $TM$ -волны по сравнению с  $TE$ -волной на одном переходе [34]

$$\alpha_{\text{макс}} \simeq S_{\text{макс}}/S_0 \simeq 2 \sqrt[3]{\bar{\epsilon}} (v_{Te}/c). \quad (2.23)$$

Чрезвычайно важно, что  $\alpha_{\text{макс}}$  не уменьшается с ростом  $E_{\text{пад}}$ , тогда как эффективность бесстолкновительного поглощения  $TE$ -волны, связанного с параметрическими неустойчивостями, падает с ростом мощности из-за возникновения сильных градиентов плотности [51]. В заключение этого раздела отметим, что приведенные соотношения могут быть использованы для интерпретации результатов лазерных экспериментов [52, 53].

## § 2.2. Самоподдерживающиеся волноводные каналы

В § 2.1 рассмотрены одномерные задачи о взаимодействии плоских электромагнитных волн с плазмой. Изложенные математические результаты легко могут быть обобщены на случай двумерных  $TE$ -волн с электрическим полем вида  $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E(x) \exp(-ihk_0 z)$ ,  $\mathbf{y}_0$  — единичный вектор. Рассмотрение задачи о структуре поля этих волн в без-

\* В типичных условиях лазерных экспериментов объемными потерями можно пренебречь, так как наличие сильной неоднородности плазмы препятствует модуляционному возбуждению ленгмюровских колебаний.

граничной плазме приводит к новому физическому выводу о существовании в нелинейной среде стационарных самоподдерживающихся волноводов, канализирующих излучение. Такие каналы могут существовать как в прозрачной плазме с невозмущенной концентрацией, меньшей критической (явление самофокусировки волн [54—56]), так и в «закритической» плазме (самоканализация волн [55, 57]). В первом случае возникающая в нелинейной среде рефракция волн компенсирует дифракционное расплывание пространственно ограниченного пучка волн, во втором нелинейность является непосредственно причиной распространения волн в первоначально непрозрачной среде. Поэтому исследование волноводного распространения в «закритической» плазме оказывается более сложной математической задачей. В этом параграфе приведены результаты исследования однородных волновых каналов в изотропной плазме. Особенности самофокусировки волн в прозрачной плазме будут рассмотрены в следующей главе.

**TE-волноводы.** Структура поля двухмерной TE-волны описывается уравнением

$$d^2E/dx^2 + k_0^2[\epsilon(E^2) - h^2] E = 0, \quad (2.24)$$

аналогичным уравнению (2.3). Это уравнение имеет локализованное решение типа уединенной волны, в котором  $E, dE/dx \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Постоянная распространения и ширина такого пучка зависят от максимальной амплитуды.

Характеристическое уравнение для постоянной распространения  $h$  можно получить из первого интеграла уравнения (2.24), если положить при  $x = 0$   $E = E_m, E = 0$  [55]:

$$h^2 = 1 - q [1 - \exp(-E_m^2)]/E_m^2. \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что  $h^2 > \epsilon_0 = 1 - q$ , т. е. локализованная волна оказывается медленной по сравнению с плоской однородной волной в невозмущенной плазме. Максимальное замедление волны из-за нелинейности, достижимое при  $E_m \rightarrow 0$ , равно  $1/\epsilon_0$ , а минимальная фазовая скорость равна скорости света в вакууме. В закритической плазме двумерный волновод может существовать, если амплитуда поля в вакууме превысит критическое значение, определяемое из условия  $h^2 = 0$ .

В случае слабой нелинейности  $E_m^2 \ll 1$  распределение поля в волноводном канале можно представить в виде (2.7) и определить постоянную распространения и величину погонной (на единицу длины) мощности, переносимой в канале [58]:

$$h^2 = \epsilon_0 + qE_m^2/2E_p^2, \\ P_{\text{одн}} = (c^2\omega_{p\infty}^2 E_m^2/8\pi\omega^2) (\epsilon_0 + \omega_{p0}^2 E_m^2/2\omega^2 E_p^2). \quad (2.26)$$

Здесь мы перешли от безразмерных переменных к размерным. Соотношения (2.25) и (2.26) справедливы как для разреженной, так и для плотной закритической плазмы.

В разреженной плазме существование локализованного пучка можно объяснить тем, что, поскольку диэлектрическая проницаемость в центре пучка больше, чем на его периферии, лучи, отклоняющиеся от оси пучка из-за дифракции, на границе испытывают полное внутреннее отражение и оказываются захваченными. В результате становится возможным самосогласованное волноводное распространение [54—56].

Аналогично можно определить характеристики цилиндрического волноводного канала, образуемого в плазме  $TE$ -волной с азимутальным электрическим полем  $E = \Phi_0 E_\Phi(r) \exp(-ikh_0 z)$ . Рассмотрим случай слабой нелинейности  $E_\Phi^2/E_p^2 \ll 1$  и введем безразмерные переменные  $y = (h^2 - \epsilon_0)^{1/2} z$ ,  $u = (E_\Phi/E_p) \omega_p / [\omega (h^2 - \epsilon_0)^{1/2}]$ . Тогда для  $u$  имеем уравнение [58, 60]

$$d^2u/dy^2 + y^{-1}du/dy + u^3 - u = 0, \quad (2.27)$$

обладающее бесконечным набором уединенных решений ( $u = 0$  при  $y = 0$ ;  $u, \dot{u} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ ), отличающихся числом нулей функции  $u(y)$ . Для определения этих решений необходимо прибегнуть к численному интегрированию. Максимальное значение амплитуды первой моды, приведенной на

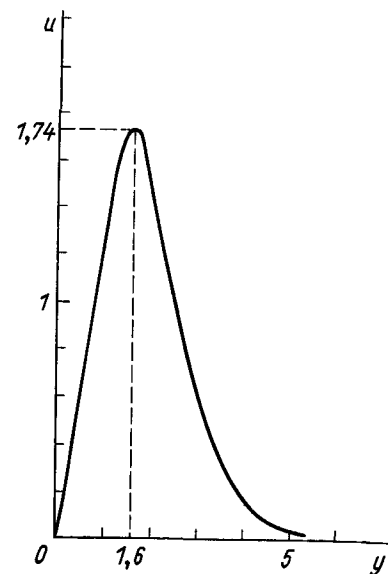


Рис. 4. Структура поля в аксиально-симметричном волноводе

рис. 4,  $u_m = 1,73$  достигается при  $y = y^* = 1,57$ . Характеристическое уравнение этой моды и выражение для мощности однородного пучка имеют вид [58]

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= q (E_m^2/E_p^2 u_m^2) + \epsilon_0, \\ P_{\text{одн}} &= (c^3 E_p^2 P^*/8\omega_{p\infty}^2) (\epsilon_0 + \omega_{p\infty}^2 E_m^2/\omega^2 E_p^2 u_m^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Здесь  $P^* = \int_0^\infty u^2 y dy = 7,69$ . Из (2.28), в частности, следует, что для образования в закритической плазме волноводного канала необходимо выполнение условия

$$E_m^2 > 3,04 E_p^2 (\omega_{p\infty}^2 - \omega^2)/\omega_{p\infty}^2. \quad (2.29)$$

В разреженной плазме  $\omega_{p\infty} \ll \omega$  величина  $(\omega_p^2 E_m^2/\omega^2 E_p^2 u_m^2) \ll \epsilon_0 \simeq 1$ , так что канализируемая мощность постоянна и не зависит от амплитуды волны  $P_{\text{одн}} = \text{const}$ . В этом случае зависимость  $P_{\text{одн}}(E_m)$  возникает лишь в очень сильных полях  $E_m \simeq E_p$ , в которых необходим учет насыщения нелинейности [60].



**ТМ-волноводы.** Исследование распространения волн с двух- и трехкомпонентным электрическим полем, у которых вектор электрического поля имеет составляющую вдоль направления изменения  $\epsilon$ , т. е.  $(E_y \epsilon) \neq 0$ , является более сложной задачей. Поясним характер возникающих трудностей на примере двумерной ТМ-волны [57, 58], имеющей составляющие электрического поля  $E_x = E_x(x) \exp(-ihk_0z)$ ,  $E_z = iE_z(x) \exp(-ihk_0z)$ ,  $E_x$  и  $E_z$  — действительные амплитуды компонент поля, сдвиг фаз между компонентами выбран равным  $\pi/2$ , так как только при таком сдвиге фаз существует локализованное решение уравнений поля типа уединенного пучка с потоком энергии вдоль  $x$ , тождественно равным нулю.

Система уравнений для безразмерных амплитуд поля имеет вид [57]

$$[\epsilon(E^2) - h^2] E_x - h dE_z/dx = 0; \quad (2.30)$$

$$d^2 E_z/dx^2 + \epsilon(E^2) E_z + h dE_x/dx = 0, \quad (2.31)$$

где  $E^2 = E_x^2 + E_z^2$ . Эта система обладает первым интегралом

$$I = \epsilon^2(E) E_x^2 - 2h^2 \epsilon E_x^2 + h^2 E^2 + h^2 q \exp(-E^2), \quad (2.32)$$

позволяющим довольно просто проанализировать характер решений на фазовой плоскости  $E_x, E_z$ . Для определения зависимости  $E_x(x)$  и  $E_z(x)$  удобно, кроме того, воспользоваться уравнением (2.30) и уравнением

$$h dE_x/dx = [2q(\epsilon - h^2) E_x^2 - h^2 \epsilon] / [\epsilon + 2q \exp(-E^2)] E_x^2. \quad (2.33)$$

При анализе приходится различать два случая: когда диэлектрическая проницаемость положительна во всем пространстве  $\epsilon(x) > 0$  и когда  $\epsilon(x)$  — знакопеременная функция. В случае  $\epsilon(x) > 0$ , который реализуется, если  $q < 1$ , соответствующая структура фазовой плоскости  $E_x, dE_x/dx$  по виду аналогична плоскости, приведенной на рис. 1 для ТЕ-волн. В частности, сепаратриса (интегральная кривая, для которой  $I = q$ ) отвечает уединенному пучку. Структура уединенного пучка такова, что на оси образующегося канала продольная составляющая  $E_z = 0$ , а поперечная достигает максимального значения  $E_x = E_m$ .

Зависимость постоянной распространения от максимальной амплитуды  $E_m$  можно получить из (2.32), если там положить  $E_x = E_m$ ,  $E_z = 0$  и  $I = q$  при  $x = 0$ :

$$h^2 = [1 - q \exp(-E_m^2)] / [1 - 2q \exp(-E_m^2) + q(1 - \exp(-E_m^2)) E_m^{-2}]. \quad (2.34)$$

Отсюда следует, что при любой амплитуде волна является замедленной по сравнению с однородной плоской волной в невозмущенной плазме. В случае слабой нелинейности  $E_m^2 \ll 1$  дисперсионное уравнение переходит в уравнение (2.26) для ТЕ-волны, а структура поля  $E_x(x)$  приближенно совпадает со структурой поля ТЕ-волны [выражение (2.7)]; продольная составляющая поля при слабой нелинейности всюду мала по сравнению с поперечной:  $E_z \ll E_x$ .

Если в прозрачной плазме самоканализация  $TM$ -волн (так же как и  $TE$ -волн) возможна при любой амплитуде  $E_m$ , в непрозрачной ( $q > 1$ ) условием распространения волны является требование положительности диэлектрической проницаемости на оси канала:  $\epsilon(x=0) > 0$ . Следовательно,  $\epsilon(x)$  — знакопеременная функция и в некоторой точке  $x = x^*$  обращается в нуль. Как уже говорилось выше (§ 2.1), поперечная составляющая поля  $E_x$ , направленная вдоль градиента  $\epsilon$ , в этой точке должна иметь особенность типа  $E_x \sim 1/\epsilon$ , существование которой противоречит заданной зависимости  $\epsilon(E)$ . Математически это проявляется в том, что решение в области  $\epsilon \simeq 0$  становится неоднозначным. Интегральная кривая, соответствующая локализованному решению, в этом случае (рис. 5) состоит из двух замкнутых ветвей; на одной из них существуют особые точки возврата, в которых направление движения меняется на обратное. Координату этих точек можно определить из условия обращения в нуль знаменателя выражения (2.33):  $\epsilon(E^2) + 2(\partial\epsilon/\partial E^2)E_x^2 = 0$ , которое совпадает с аналогичным

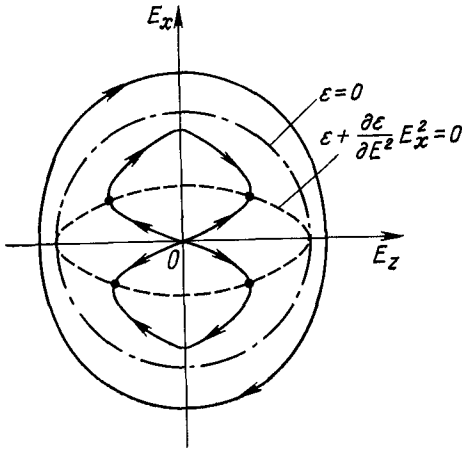


Рис. 5. Фазовая плоскость  $TM$ -волны

условием для координаты скачка в квазистатической задаче. В этом случае необходимо конструировать разрывное решение уравнений, в котором переход через точку  $\epsilon = 0$  осуществляется скачком, а поля слева и справа от скачка удовлетворяют стандартным граничным условиям непрерывности  $E_z$  и  $D_x$ . Следует подчеркнуть, что при переходе через скачок меняется интеграл  $I$  (в области  $\epsilon < 0$   $I = q$ ), т. е. происходит переход на интегральную кривую, не соответствующую сепаратрисе.

Детальное исследование характеристик разрывных решений проведено в [59]. Не останавливаясь на подробностях, приведем в качестве иллюстрации типичное распределение полей в  $TM$ -волноводе, взятое из этой работы (рис. 6). При максимальных амплитудах поля  $E_m$ , существенно превышающих пороговое значение, наличие скачка слабо влияет на структуру и характеристики волноводных полей. В этом случае канализируемая мощность (на единицу длины) и эффективная ширина канала определяются соотношениями

$$P_{\text{одн}}^{TM} = (0,42/\pi) (c^2 E_m^2 / \omega_p); \quad (2.35)$$

$$a_2 \simeq 3,12 (c/\omega_p) E_p/E_m.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и структуру аксиально-симметричных  $TM$ -волноводов,

Самоканализация  $TM$ -волн сопровождается диссипацией их энергии. Поглощение принципиально отлично от нуля даже в плазме без столкновений, в которой оно определяется линейными и нелинейными эффектами трансформации электромагнитной волны в плазменную в области плазменного резонанса. Величина поглощения зависит от параметров скачка диэлектрической проницаемости и амплитуды нормальной компоненты электрической индукции на скачке и может быть определена так же, как в квазистатическом случае. Очевидно, что при сильной надпороговости волновода ( $E_m \gg E_{пор}$ ) эти потери оказываются слабыми и не должны существенно влиять на структуру полей в канале.

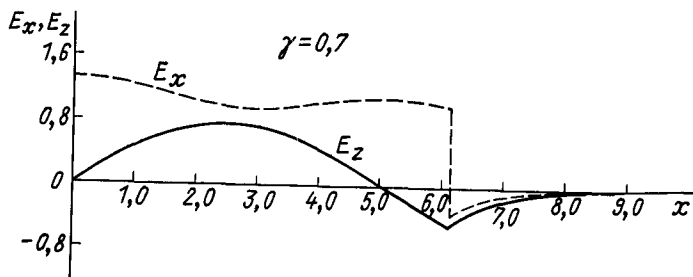


Рис. 6 Структура поля в плоском  $TM$ -волноводе в непрозрачной плазме

Вопрос об устойчивости однородных волноводов относительно малых возмущений их поперечной пространственной структуры обсуждался в работах [59, 61, 62]. В частности, в [59] показано, что двумерные волноводные каналы  $TE$ -типа в непрозрачной плазме устойчивы относительно плавных поперечных возмущений. Наличие устойчивости можно интерпретировать как следствие обратно пропорциональной зависимости мощности, канализируемой волноводом, от его ширины. В непрозрачной плазме подобная зависимость существует и для аксиально-симметричных волн. Поэтому вывод об устойчивости может быть распространен и на случай трехмерных цилиндрических волноводов; по-видимому, он справедлив также и для  $TM$ -волноводов.

### § 2.3. Солитоны огибающих

Явление самоканализации (самозахвата) электромагнитных волн может проявляться не только в поперечном, но и в продольном (по отношению к направлению распространения волны) направлении. По аналогии с самофокусировкой такие эффекты самовоздействия волн обычно называют эффектами самосжатия или самомодуляции волновых пакетов. Оказывается, что изменение диэлектрической проницаемости среды в поле сильной волны может приводить к компенсации дисперсионного расплывания волнового пакета и, тем самым, к образованию нерасплывающихся стационарных волновых пакетов. Существуют ста-

ционарные захваченные волновые пакеты и в непрозрачной закритической плазме.

Нелинейные волны огибающих в прозрачной плазме можно исследовать с помощью приближения параболического уравнения (см. гл. 3), которое нарушается, например, в случае больших амплитуд волн. В данном параграфе мы, не ограничиваясь приближением слабой нелинейности, рассмотрим некоторые особенности стационарных нелинейных волн огибающих в изотропной плазме.

**Приближение слабой нелинейности.** Рассмотрим сначала стационарные огибающие поперечных электромагнитных волн в изотропной неизотермической плазме в приближении слабой нелинейности. Исследуем наиболее простой случай циркулярно поляризованных электромагнитных волн  $\mathbf{E}(z, t) = (\mathbf{x}_0 \pm i\mathbf{y}_0) E(z, t) \exp(i\omega t)$ , в поле которых энергия заряженной частицы не зависит от времени  $(\mathbf{v})^2 = |\mathbf{v}|^2$  и, следовательно, не возникает эффектов генерации гармоник.

Воспользуемся результатами гл. 1 и представим исходную систему уравнений для амплитуды поля и возмущения плотности в виде

$$-2i\omega\partial E/\partial t + c^2\partial^2 E/\partial z^2 + \omega^2(\epsilon_0 - n + \delta m/m_0) E = 0; \quad (2.36)$$

$$\partial^2 n/\partial t^2 - v_s^2\partial^2 n/\partial z^2 = v_s^2\partial^2/\partial z^2(|E|^2/E_p^2). \quad (2.37)$$

В (2.36) входит релятивистская поправка к массе электрона, определяемая выражением

$$\delta m/m_0 = 1/2 \left[ (e/m_0 c) \int_0^t E(t') dt' \right]^2. \quad (2.38)$$

Рассмотрим частные решения уравнений (2.36)—(2.38) типа стационарных нелинейных волн огибающих  $E = E_p E(z - at) \exp(-ikz)$ , где  $E(z - at)$  — медленная действительная амплитуда,  $a$  — скорость стационарной волны. В результате, разделяя действительную и мнимую части (2.36) и интегрируя (2.38), получаем

$$d^2 E/d\tau^2 + (\eta + \delta E^2) E = 0, \quad (2.39)$$

$\tau = (\omega/c\sqrt{1 - a^2/c^2})(z - at)$ , скорость волны связана с фазовой скоростью заполнения соотношением  $a = c^2 k/\omega$ . Здесь  $\eta = \epsilon_0 - a^2/c^2$ ,  $\epsilon_0 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ,  $\delta = [v_s^2/(v_s^2 - a^2) + 2v_e^2/c^2] \omega_p^2/\omega^2$ .

Характер стационарных решений, очевидно, зависит от знаков коэффициентов  $\eta$  и  $\delta$  и, следовательно, от соотношения между стрикционной и релятивистской нелинейностью. Наиболее интересным является случай  $\eta < 0$ ,  $\delta > 0$ , в котором существует решение типа уединенной волны — солитон

$$E = E_m \operatorname{ch}^{-1}(\kappa\tau), \quad E_m^2 = 2\kappa^2/\delta. \quad (2.40)$$

Такое решение может существовать в двух предельных областях значений параметров. В достаточно плотной плазме  $\epsilon_0 < a^2/c^2$ , в том числе в закритической плазме с  $\epsilon_0 < 0$ , существуют солитоны огибающих [63, 64], движущиеся со скоростью, меньшей ионно-звуковой  $a < v_s$ ,

причем поле заперто в ограниченной области либо из-за того, что в прозрачной плазме фазовая скорость заполнения мала по сравнению со скоростью в невозмущенной плазме  $v_\phi = \omega/k < c/\sqrt{\epsilon_0}$ , либо из-за того, что в случае непрозрачной плазмы внутри солитона  $\epsilon_0 > 0$ , а снаружи  $\epsilon_0 < 0$ . Подобный солитон в закритической плазме движется со скоростью меньшей ионно-звуковой. Например, при  $|\epsilon_0| \gg a^2/c^2$

$$a \simeq v_s [1 - E_m^2 / (32 \pi N T_e |\epsilon_0|)]^{1/2} \quad (2.41)$$

и, следовательно, существует максимальное значение амплитуды, при котором скорость солитона обращается в нуль. При этом значении распределение поля в плазме совпадает с рассмотренным нами ранее нелинейным распределением поля в скин-слое при нормальном падении волны на границу плазмы.

Решение (2.40) справедливо при любом соотношении между  $\kappa$  и  $k_0$ , в частности, в случае  $\kappa \gg k_0$  солитон является пакетом плоских волн, ширина которого в  $k$ -пространстве определяется нелинейностью.

В разреженной плазме групповая скорость  $a$  превышает скорость звука  $a > v_s$ , поэтому стрикционная нелинейность меняет знак — максимуму поля соответствует и максимум плотности плазмы. В частности, при  $a^2 > (m/2M) c^2$  вклад этой нелинейности мал по сравнению с вкладом релятивизма. В этом случае также  $\delta > 0$  и существует решение типа (2.40), в котором  $\delta = (\omega_p^2/2\omega) (e/m\omega c)^2$  [8, 65], а возмущениями плотности можно пренебречь.

В промежуточной области скоростей  $v_s < a < c (m/2M)^{1/2}$  коэффициенты  $\eta > 0$ ,  $\delta < 0$  и стационарные решения типа солитонов отсутствуют. Решение, отвечающее сепаратрисе фазовой плоскости уравнения (2.39), в этом случае имеет вид уединенного перепада, а возмущение плотности имеет солитонную форму

$$E = E_\infty \operatorname{th}(\sqrt{|\eta/2|\delta}|\tau), \quad n = [E_\infty^2 / (1 - a^2/v_s^2)] \operatorname{th}^2(\sqrt{|\eta/2|\delta}|\tau), \quad E_{c0} = \sqrt{|\eta|\delta}. \quad (2.42)$$

Поскольку в одномерном случае уравнения для ленгмюровских колебаний отличаются от уравнений для электромагнитных волн лишь коэффициентами, то вывод о существовании солитонов огибающих справедлив и для случая ленгмюровских колебаний [66—68]. Распределение продольного поля  $E_z$  в ленгмюровском солитоне описывается соотношениями

$$E_z = E_m \operatorname{ch}^{-1}[\chi(z - at)], \quad \chi = (\sqrt{3} r_d)^{-1} E_m / (E_p \sqrt{1 - a^2/c_s^2}). \quad (2.43)$$

Скорость солитона при  $\chi \gg k_0$  определяется выражением (2.41), а сдвиг частоты заполнения от плазменной  $\delta\omega = \omega - \omega_p$  равен  $\delta\omega = 3/2 r_d^2 (k^2 - \chi^2) \omega_p^2$ . Нетрудно видеть, что такой солитон существует и при  $k \rightarrow 0$ , причем его частота меньше плазменной.

При скоростях солитонов, близких к скорости звука,  $a \simeq v_s$ , полученные соотношения неверны, так как нарушаются условия приме-

нимости линейного уравнения для возмущений плотности. Учет нелинейности и дисперсии ионно-звуковых движений приводит к уравнению для  $n$ , имеющему вид уравнения Кортевега—де Вриза с правой частью ( $\xi = \omega/c (z - v_s t)$ ,  $\mu = \omega^2 v_{Te}^2 / \omega_p^2 c^2$ ) [17, 18]:

$$v_s^{-1} \partial n / \partial t + n \partial n / \partial \xi + \mu \partial^3 n / \partial \xi^3 = -\partial / \partial \xi (|E|^2 / E_p^2). \quad (2.44)$$

Поскольку все члены в этом уравнении одного порядка, оказывается, что  $n \sim E/E_p$  в отличие от нерезонансного случая, в котором  $n \sim (E/E_p)^2$ .

Частное стационарное решение уравнений (2.36), (2.44) (при естественном пренебрежении релятивистской нелинейностью) получено в [69] и имеет вид

$$\left. \begin{aligned} E &= E_m \operatorname{ch}^{-1} \theta \operatorname{th} \theta, \quad n = -(E_m/E_p) \operatorname{ch}^{-2} \theta; \\ \theta &= (E_m/\sqrt{6} E_p) \xi, \quad a = v_s (1 - E_m/2E_p); \\ k^2 &= (\omega^2/c^2) (\varepsilon_0 + E_m/6 E_p). \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Как и в нерезонансном случае, возмущение плотности является солитоном разрежения, а распределение поля, захваченное в ямку плотности, отличается от классического солитона — имеет два горба.

Периодические решения системы уравнений (2.36), (2.44) выражаются через эллиптические функции Якоби и приведены в [69], где сконструированы нелинейные ударные волны огибающих, образующиеся при учете диссипативных процессов, связанных с отражением электронов и ионов от движущегося солитона.

**Релятивистски сильные электромагнитные волны.** Рассмотрим, следуя в основном результатам работы [70], нелинейные волны огибающих в случае больших амплитуд, при которых энергия осциллирующий электронов в ВЧ-поле порядка энергии покоя и больше. Ограничимся для простоты исследованием волн в холодной плазме, для которой исходная система уравнений, состоящая из уравнений Максвелла, релятивистских уравнений движения электронов и ионов и уравнений непрерывности для плотностей частиц, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + c^{-2} \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 &= (4\pi/c^2) \partial \mathbf{j} / \partial t; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e (N_i - N_e); \\ d\mathbf{p}_\alpha / dt &= e_\alpha \mathbf{E} + (e_\alpha/c) [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}]; \\ \partial N_\alpha / \partial t + \operatorname{div} (N_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0; \\ \mathbf{j} &= e N_e \mathbf{v}_e, \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha / (m_\alpha \sqrt{1 + p_\alpha^2/m_\alpha^2 c^2}). \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Высокочастотное поле представим в виде суперпозиции двух циркулярно поляризованных поперечных волн, сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ , и введем вектор-потенциал  $\mathbf{A}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -(1/c) \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \\ \mathbf{A} &= A_+ \mathbf{a}_+ + A_- \mathbf{a}_-; \\ \mathbf{a}_\pm &= \operatorname{Re} \{ (\mathbf{x}_0 \pm i\mathbf{y}_0) \exp(i\omega t - ikz) \}. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Предположим, кроме того, что функции  $A_+$  и  $A_-$  зависят от  $z$  и  $t$  в комбинации  $\xi = \omega/c (z - at)$  и введем безразмерные переменные

$$A_{\parallel} = eA/mc^2, \quad N_{\alpha}^{\text{н}} = N_{\alpha}/N_0, \quad E_{\parallel}^{\text{н}} = eE_{\parallel}/m\omega, \\ \rho_{\alpha} = \rho_{\alpha}/m_{\alpha}c, \quad \beta = a/c, \quad h^{\text{н}} = hc/\omega,$$

где  $E_{\parallel}$  — продольное кулоновское поле, возникающее из-за разделения зарядов, индекс «н» в дальнейшем будем опускать.

В результате получим обычную связь поперечного импульса частиц с вектор-потенциалом  $\mathbf{p}_{\perp} = -e\mathbf{A}/c$  и систему уравнений в обыкновенных производных по координате  $\xi$ , которую приведем в простейшем случае  $h = \beta$ , когда уравнения для  $\rho_+$  и  $\rho_-$  расцепляются и можно положить  $\rho_- = 0$ . Эта система имеет вид

$$\ddot{\rho}_+ + \rho_+ [1 - (\omega_p^2/\omega^2) N_e / (1 - \beta^2) \sqrt{1 + \rho_e^2}] = 0; \quad (2.48)$$

$$\beta \dot{\rho}_{ze} = -E_{\parallel} + d/d\xi \sqrt{1 + \rho_e^2}, \quad \beta \dot{\rho}_{zi} = m/ME_{\parallel} + d/d\xi \sqrt{1 + \rho_i^2}; \quad (2.49)$$

$$\dot{E}_{\parallel} = (\omega_p^2/\omega^2) (N_i - N_e); \quad (2.50)$$

$$N_{\alpha} = \beta [\beta - \rho_{z\alpha} / \sqrt{1 + \rho_{\alpha}^2}]^{-1}. \quad (2.51)$$

Здесь энергия электронов  $\rho_e^2 = \rho_+^2 + \rho_{ze}^2$ , а осцилляторной энергией ионов мы пренебрегли:  $\rho_i^2 = \rho_{zi}^2$ . Величины  $\Phi_{\alpha} = \sqrt{1 + \rho_{\alpha}^2}$ , входящие в уравнения (2.49), представляют собой обобщение на релятивистский случай потенциала силы Миллера.

Распределение ВЧ-поля  $\rho_+(\xi)$  определяется уравнением (2.48), в котором нелинейность связана с локальной зависимостью массы от энергии осцилляций и нелокальной (в общем случае) зависимостью распределения плотности  $N_e$  от  $\rho_+$ . Проанализируем решения этих уравнений в некоторых простейших случаях.

Рассмотрим сначала случай разреженного  $\omega_p \ll \omega$  электронного газа, для которого можно пренебречь продольным кулоновским полем  $E_{\parallel}$ . Тогда, интегрируя уравнение продольного движения электронов (2.49), получаем

$$\beta \rho_{ze} = C_e + \sqrt{1 + \rho_+^2 + \rho_{ze}^2}, \quad (2.52)$$

где  $C_e$  — постоянная интегрирования. Подставляя (2.52) в уравнение для плотности (2.51) и выражая  $\rho_{ze}$  через  $\rho_+$ , окончательно имеем вместо (2.48) уравнение

$$\ddot{\rho}_+ + \rho_+ \{1 - (\omega_p^2/\omega^2) \beta (1 - \beta^2)^{-1} [C_e^2 - (1 - \beta^2) (1 + \rho_+^2)]^{-1/2}\} = 0. \quad (2.53)$$

Анализ решений уравнения (2.53) показывает, что оно обладает лишь периодическими решениями и не имеет уединенных решений, соответствующих солитонам, ни при каких значениях  $C_e$  и  $\beta < 1$ . Это связано с тем, что в пренебрежении продольным кулоновским полем изменение

плотности заряженных частиц под действием электромагнитного давления, приводящее к уменьшению диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в области сильного поля, дает более сильный вклад в нелинейность, чем релятивизм.

Другой предельный случай может реализоваться в плазме полупроводников с непараболическими энергетическими зонами — в них зависимость эффективной массы от энергии по виду совпадает с релятивистской, но энергетическая ширина запрещенной зоны  $E_g$ , эквивалентная релятивистской энергии покоя, на несколько порядков меньше, чем  $mc^2$ . В такой плазме можно пренебречь эффектами возмущения плотности и, как показано в [71], получающееся при этом уравнение типа Клейна—Гордона [уравнение (2.48) при  $n = \text{const}$ ] имеет стационарные солитонные решения, причем в случае сильной нелинейности период заполнения может быть сравним и даже превышать период заполнения  $2\pi/\omega$ .

В обычной плазме существование солитонов возможно лишь в случае конечной плотности, в котором принципиальным является учет кулоновских полей, возникающих из-за разделения зарядов — в результате действия кулоновского поля ВЧ-сила оказывается приложенной к паре электрон—ион, что приводит к значительному ослаблению эффектов перераспределения плотности электронов.

При учете кулоновского поля  $E_{\parallel} = -d\varphi/d\xi$  уравнения продольного движения (2.49) легко интегрируются:

$$\beta\rho_{ze} = C_e + \sqrt{1 + \rho_e^2} - \varphi, \quad \beta\rho_{zi} = C_i + (m/M)\varphi + \sqrt{1 + \rho_i^2}. \quad (2.54)$$

Будем интересоваться солитонными решениями, поэтому константы  $C_e$  и  $C_i$  определим из условий убывания возмущений на бесконечности  $\rho_{ze}, \rho_{zi} \rightarrow 0$  при  $\rho_{\pm} \rightarrow 0$ :  $C_e = C_i = 1$ .

Анализ уравнений (2.48), (2.50), (2.53) показывает, что стандартное приближение квазинейтральности возмущений плотностей электронов и ионов, позволяющее определить связь кулоновского потенциала  $\varphi$  с высокочастотным  $\Phi_e$  без решения уравнения Пуассона (2.50), справедливо лишь в случае малых амплитуд волн, рассмотренном выше. В случае релятивистски сильных волн предположением о квазинейтральности пользоваться нельзя, — в таких полях ширина спектра огибающей становится сравнимой с частотой заполнения, так что характерное время продольных движений меньше  $\omega_{pi}^{-1}$  и ионы не успевают следить за возмущениями электронной плотности.

Результирующая система уравнений состоит из волнового уравнения (2.48) и уравнения Пуассона и может быть записана в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho}_+ + \rho_+ \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\beta}{(1-\beta^2) \sqrt{(1+\varphi)^2 - (1-\beta^2)(1+\rho_+^2)}} \right\} &= 0; \\ \ddot{\varphi} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\beta}{(1-\beta^2)} \left[ \frac{1+\varphi}{(1+\varphi)^2 - (1-\beta^2)(1+\rho_+^2)} - \frac{1-\gamma\varphi}{\sqrt{(1-\gamma\varphi)^2 + (1-\beta^2)}} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$



Здесь мы пренебрегли непосредственным действием ВЧ-поля на ионы,  $\gamma = m/M$ .

Численное исследование системы (2.55) подтвердило существование в плазме с  $\omega_p^2/\omega^2 \leq 1$  солитонов малой амплитуды  $\rho_+^2 \ll 1$ , обладающих сплошным спектром значений амплитуды  $\rho_{+ \text{ макс}}$  и скорости  $\beta$  [70]. При увеличении плотности или скорости, когда условие малости амплитуды нарушается, уравнения (2.55) имеют солитонные решения лишь при дискретных значениях  $\beta$ . При фиксированном значении  $\omega_p^2/\omega^2$  солитоны, соответствующие различным  $\beta$ , отличаются своей формой — они имеют разное число максимумов потенциала продольного поля и амплитуды поперечного поля. В качестве примера на рис. 7, взятом из [70], приведены распределения амплитуды электромагнитной волны и плотности электронов и ионов в солитоне, существующем в плазме  $\omega_p^2/\omega^2 = 2,5$ . Видно, что возмущения ионной плотности в таком солитоне значительны, причем они существенно не совпадают с возмущениями электронной плотности.

Из результатов численных расчетов следует, что в случае, если плотность плазмы превышает некоторое значение  $\omega_p^2/\omega^2 \gtrsim 5$ , уравнения (2.55) не имеют солитонных решений при любой сколь угодно большой амплитуде волны. Возможно, это указывает на существование предельной плотности плазмы, которую можно «просветлить» полем сильной волны. Для окончательного выяснения этого вопроса необходимо предпринять исследование более сложной нестационарной задачи.

Характер нестационарных решений одномерного волнового уравнения типа Клейна—Гордона с релятивистской нелинейностью (без учета возмущений плотности) исследовался численно в работе [72]. Из результатов машинного эксперимента следует, что в случае сильной нелинейности солитоны огибающих играют столь же фундаментальную роль, как и при малых амплитудах.

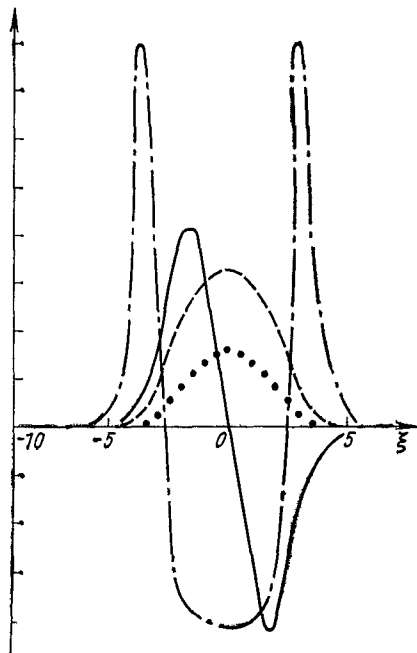


Рис. 7. Пример релятивистски сильного солитона с заметными возмущениями плотности электронов и ионов при  $\omega_{pe}^2/\omega^2 = 2,5$ ;  $\beta = 0,174$ ;  $N_{e \text{ макс}} \approx 3,1$ ;  $N_{i \text{ макс}} \approx 0,35$ :

- — — — — профиль потенциала поперечного поля,
- - - - - профиль потенциала продольного поля,
- - - — — — — — профиль электронной плотности;
- ... — — — — — профиль ионной плотности

**КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Задача о распространении широких (в масштабе длины волны) пучков электромагнитных волн умеренной интенсивности в разреженной плазме принадлежит к числу наиболее хорошо изученных. В этом случае можно воспользоваться методом параболического уравнения, применяющимся в нелинейной оптике для описания самовоздействия волновых пучков в среде со слабой нелинейностью  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'f(|\mathbf{E}|^2)$ ,  $\varepsilon'f(|\mathbf{E}|^2) \ll \varepsilon_0$ , причем ряд основных результатов оптической теории [73—77] справедлив и для электромагнитных волн в прозрачной плазме. Специфика плазмы проявляется в конкретных зависимостях компонент тензора диэлектрической проницаемости от амплитуд электрических полей и богатстве законов дисперсии электромагнитных волн. Еще одна специфическая особенность плазмы связана с необходимостью учета насыщения нелинейности, так как в плазме легко достижимы поля насыщения.

В данной главе рассмотрены особенности квазиоптических эффектов самовоздействия электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной и магнитоактивной плазме.

**§ 3.1. Стационарная самофокусировка волновых пучков в изотропной плазме**

Рассмотрим задачу о стационарном самовоздействии пучков электромагнитных волн в плазме с локальной нелинейностью  $\varepsilon_n = \varepsilon_0(1 + \varepsilon_2 f(|\mathbf{E}|^2))$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon'/\varepsilon_0$ . Амплитуда поля в этом случае описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{E} + (\omega^2/c^2) \varepsilon_n(|\mathbf{E}|^2) \mathbf{E} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= -1/\varepsilon(\nabla \varepsilon \mathbf{E}). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Если характерные масштабы комплексной амплитуды поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, \mathbf{r}_\perp) \exp(i\omega t - ikz) + \text{к. с.}$  в поперечном и продольном сечениях пучка и  $\Lambda_\parallel$  велики по сравнению с длиной волны, а нелинейность слабая, т. е.

$$k \Lambda_\perp \gg 1, \quad k \Lambda_\parallel \gg 1, \quad \varepsilon_2 f(|\mathbf{E}|^2) \ll 1, \quad (3.2)$$

$k = \omega/c\sqrt{\varepsilon_0}$ , то продольная составляющая поля мала по сравнению с поперечными  $E_\parallel \ll E_\perp$ , и независимо от типа волны для медленно меняющейся амплитуды  $\mathbf{E}_\perp(z, \mathbf{r}_\perp)$  одной из поперечных компонент поля, пренебрегая соответствующими малыми членами, получим диффузионное уравнение, отличающееся от уравнения линейной теории волновых пучков, наличием нелинейной добавки

$$-2ik\partial \mathbf{E}_\perp / \partial z + (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\perp)_\perp + k^2 \varepsilon_2 f(|\mathbf{E}_\perp|^2) \mathbf{E}_\perp = 0. \quad (3.3)$$

Частным случаем этого уравнения является хорошо известное скалярное параболическое уравнение нелинейной оптики [73—77], справедливое, например, для линейно поляризованных полей:

$$-2ik\partial E/\partial z + \Delta_{\perp}E + k^2\varepsilon_2 f(|E|^2)E = 0. \quad (3.4)$$

Представим решение уравнения (3.4) в виде  $E(z, \mathbf{r}_{\perp}) = e(\mathbf{r}_{\perp}, z) \exp[-i\varphi(z, \mathbf{r}_{\perp})]$ , где  $e$  и  $\varphi$  — действительные амплитуда и фаза пучка\*, и перейдем к безразмерным координатам  $\mathbf{r}' = k\mathbf{r}$ , опуская в дальнейшем штрихи. В результате получим

$$2\partial\varphi/\partial z + (\nabla_{\perp}\varphi)^2 = \varepsilon_2 f(e^2) + (\Delta_{\perp}e)/e, \quad (3.5a)$$

$$\partial e^2/\partial z + \operatorname{div}_{\perp}(e^2\nabla_{\perp}\varphi) = 0. \quad (3.5b)$$

Соотношение (3.5a) аналогично уравнению Гамильтона—Якоби для частицы, движение которой является гамильтоновым с гамильтонианом  $H = 1/2 p^2 + V$ ,  $p = \nabla s$ ,  $2\partial s/\partial t + (\nabla s)^2 + 2V = 0$ . Отсюда получаем уравнение для параксиальных лучей (траектории движения частицы в потенциальном поле)

$$d^2\mathbf{r}_{\perp}/dz^2 = -1/2\nabla_{\perp}\varepsilon_{\partial\varphi}, \quad \varepsilon_{\partial\varphi} = \varepsilon(e^2) + (\Delta_{\perp}e)/e, \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{r}_{\perp}$  — поперечная координата луча. Первое слагаемое в (3.6) определяет рефракцию лучей, второе — их дифракционное расплывание. Оба механизма компенсируют друг друга в случае однородных пучков  $\varphi(\mathbf{r}_{\perp}, z) = hz$ ,  $h = \text{const}$ , структура которых описывается уравнением [55, 56]

$$\Delta_{\perp}e + (\varepsilon_2 f(e^2) - 2h)e = 0. \quad (3.7)$$

При исследовании структуры неоднородных пучков необходимо совместно решить уравнения (3.5). В общем виде эта задача не решается; однако в случае среды с кубической нелинейностью  $f(e^2) = e^2$  можно получить точную информацию о некоторых свойствах волнового пучка, используя интегралы этой системы уравнений [78], имеющие вид

$$I_0 = \int e^2 ds_{\perp} = \text{const}; \quad (3.8)$$

$$I_1 = \int e^2 \nabla_{\perp}\varphi ds_{\perp} = \text{const}; \quad (3.9)$$

$$I_2 = \int [e^2 (\nabla_{\perp}\varphi)^2 + (\nabla_{\perp}e)^2 - \varepsilon_2 e^4] ds_{\perp} = \text{const}. \quad (3.10)$$

Из (3.9), в частности, получаем, что в слабонелинейной среде центр интенсивности пучка распространяется по прямой, причем той же самой, что и в линейной среде [78].

Из интеграла (3.10) следует, что любой коллимированный пучок самофокусируется в кубичной среде, начиная с некоторой мощности  $P_{\text{кр}}$ . Критическая мощность определяется соотношением

$$P_{\text{кр}} = [c^3 \sqrt{\varepsilon_0} E_p^2 / 4\pi\omega_p^2] \frac{\int (\operatorname{rot}_{\perp} \mathbf{e})^2 ds_{\perp} \int e^2 ds_{\perp}}{\int e^4 ds_{\perp}}. \quad (3.11)$$

\* Тем самым мы исключаем из рассмотрения пучки эллиптически поляризованных волн.

Для аксиально-симметричных пучков  $P_{кр}$  зависит от параметров среды и профиля поперечного распределения  $e(\mathbf{r})$ , но не зависит от его амплитуды и ширины. Так, в случае скалярного волнового пучка в плазме с гауссовой зависимостью электрического поля от координаты

$$P_{кр}^r = c^3 \sqrt{\varepsilon_0} E_p^2 / 2\omega_p^2, \quad (3.12)$$

а минимальной критической мощностью  $P_{одн} = 0,92 P_{кр}^r$  обладает однородный аксиально-симметричный пучок, структура поля которого описывается уравнением (3.7)\*.

Используя соотношения (3.9) и (3.10), можно получить явную зависимость от координаты  $z$  эффективной ширины пучка [78]

$$a_{эф}^2 = \int r^2 e^2(r) ds_{\perp} / \int e^2(r) ds_{\perp}. \quad (3.13)$$

В частности, для сфокусированного линзой пучка ( $\varphi = -r^2/2F$ ) имеем

$$a_{эф}^2(z) = B (1 - P/P_{кр}) z^2 + (1 - z/F)^2 a_{эф}^2(0), \quad (3.14)$$

где  $B = \int_s (\nabla_{\perp} e)^2 ds_{\perp} / \int_s e^2 ds_{\perp}$  — коэффициент, характеризующий дифракционную расходимость первоначального пучка в линейной среде.

Из (3.14) можно определить координату точки самофокусировки пучка. Так, для пучка гауссовой формы  $e = e_0 \exp(-r^2/2a^2)$  с плоским начальным фазовым фронтом длина самофокусировки равна

$$z_{сф} = a_0^2 / \sqrt{P/P_{кр} - 1}. \quad (3.15)$$

Как показывают численные расчеты, выражением (3.15) для длины самофокусировки можно пользоваться лишь при мощностях пучка  $P$ , близких к  $P_{кр}$ . При мощностях  $P \gg P_{кр}$  длина самофокусировки, определяемая из численных расчетов как расстояние до фокальной точки, равна [78]

$$z_{сф} \simeq a_0^2 / 2 \sqrt{2P/P_{кр}}. \quad (3.16)$$

Такое расхождение связано с тем, что при  $P \gg P_{кр}$  пучок самофокусируется не целиком, а в первый фокус уходит лишь приосевая часть пучка с мощностью порядка  $P_{кр}$ , причем пучок разбивается на набор кольцевых областей с  $P \simeq P_{кр}$ , каждой из которых соответствует своя точка фокусировки. Возникает так называемая «многофокусная структура» [76].

На рис. 8, 9 для иллюстрации приведены типичные результаты численного исследования самофокусировки аксиально-симметричного пучка с начальным гауссовым распределением интенсивности  $e^2 = e_0^2 \exp(-r^2/b_0^2)$  и плоским фазовым фронтом. Изменение распределения амплитуды с ростом координаты  $z$  дано на рис. 8, а зависимость длины самофокусировки пучка от его мощности приведена на рис. 9

\* Уравнение (3.7) обладает бесконечным набором локализованных аксиально-симметричных решений. Структуры и мощности пучков низших типов определены численно в [79, 80].

для начальной ширины  $b_0 = 1$ . Соответствующие кривые для других значений можно получить, если воспользоваться преобразованием подобия

$$b \rightarrow \lambda b, \quad e \rightarrow e/\lambda^2, \quad z \rightarrow \lambda^2 z,$$

оставляющим уравнение (3.7) инвариантным. В результате имеем

$$z_\phi \simeq b^2 f(P/P_{кр}). \quad (3.17)$$

Аналогично можно рассмотреть и самофокусировку «векторного» аксиально-симметричного пучка с электрическим полем  $\mathbf{e} = \Phi_0 e(r, z)$ , амплитуда которого  $e(z) \equiv 0$  при  $r = 0$ . В этом случае [81] при самофокусировке наряду с ростом максимальной амплитуды происходит «сползание» максимума поля в центр, соответственно увеличивается и крутизна нарастания поля в приосевой об-

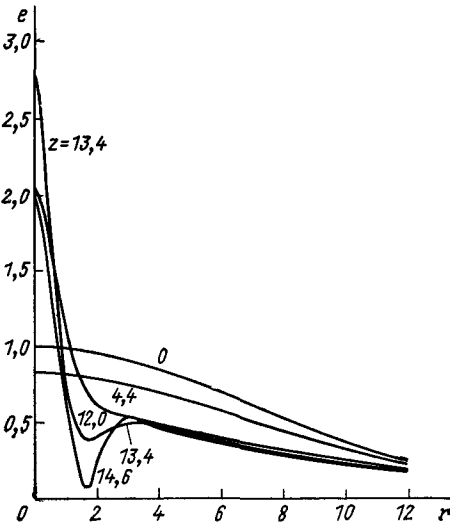


Рис 8 Деформация поперечного распределения поля  $e(r)$  в процессе самофокусировки пучка

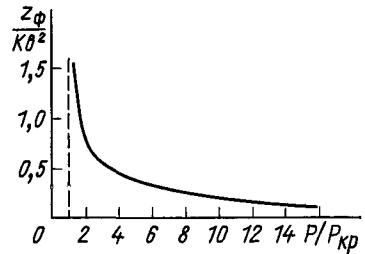


Рис 9. Зависимость длины самофокусировки гауссова пучка от мощности

ласти, поскольку значение поля на оси фиксировано  $e=0$ . Мощность, попадающая в фокус, как и в скалярном случае, порядка критической.

Таким образом, в прозрачной среде с кубичной нелинейностью процесс самофокусировки приводит к «схлопыванию» пучка, т. е. к появлению сингулярности в решении уравнения (3.3). Для устранения этой сингулярности необходим либо учет процессов нелинейного поглощения и насыщения нелинейности, либо отказ от приближения параболического уравнения и решение точного волнового уравнения. Например, при самофокусировке волн в прозрачной плазме эффектами нелинейного (многофотонного) поглощения, существенными в оптическом диапазоне [76], можно пренебречь. В этом случае главную роль играет насыщение нелинейности, так как напряженность поля в фокусе для пучка с мощностью порядка критической при размере фокального пятна  $\sim (\lambda/2\pi)^2$  существенно превышает значение поля насыщения:

$$E_{\text{макс}}^2 = (8\pi/c \sqrt{\epsilon_0}) P_{кр} k^2 \simeq (8\pi\omega^2/\omega_p^2) E_p^2 \gg E_p^2. \quad (3.18)$$

Как показывают численные расчеты [74, 77, 80], а также качественный анализ характера решений с помощью так называемого безабберационного приближения [74, 77], учет насыщения нелинейности приводит к ограничению величины поля в фокусе. Более того, в работе [80] с помощью интегралов параболического уравнения показано, что при самофокусировке коллимированных пучков с  $I_2 < 0$  в среде с насыщением нелинейности происходит захват части мощности пучка ( $\sim P_{\text{нр}}$ ) в волноводный режим — минимальное значение максимума амплитуды в пучке оказывается ограниченным сверху

$$\min \max e^2 > 2 |I_2|/I_0.$$

Для иллюстрации роли эффектов насыщения нелинейности на рис. 10 приведены результаты численного интегрирования скалярного параболического уравнения (3.5) с модельной зависимостью  $f(e^2) = e^2/(1 + e^2 e_p^2)$  для значений параметра насыщения  $e_p^2 = 30$ ; 300 и начальных параметрах пучка  $e = e_0 \exp(-r^2/2b_0^2)$ ,  $e_0 = 5$ ,  $b_0 = 1$ . Видно, что

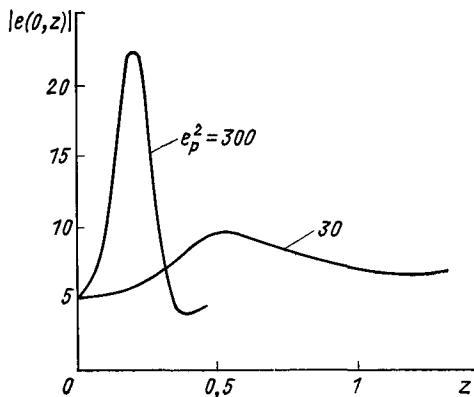


Рис. 10. Влияние насыщения нелинейности на зависимость  $e(0, z)$  в гауссовом пучке

с уменьшением  $e_p$  (увеличением насыщения) возрастает длина самофокусировки и уменьшается интенсивность в фокусе.

Грубые количественные оценки этих характеристик самофокусировки можно получить с помощью безабберационного приближения, в котором предполагается, что при распространении в нелинейной среде все поперечные масштабы изменяются подобно, т. е. форма волнового пучка не изменяется, а меняется лишь его ширина — амплитудное распределение представляется в виде

$$e^2 = b^{-2}(z) F(r_{\perp}^2/b^2). \quad (3.19)$$

Подстановка (3.19) в уравнение непрерывности (3.5б) и последующее интегрирование этого уравнения дает

$$\nabla_{\perp} \varphi = (b/b) r_{\perp}, \quad (3.20)$$

т. е. автомодельным пучкам соответствуют параболические фазовые фронты  $\varphi = \varphi_0(z) + C(z) r_{\perp}^2$ .

Точные автомодельные решения вида (3.19) существуют только в среде с кубической нелинейностью [82], однако безабберационное приближение широко используется для описания поведения параксиальных пучков произвольной колоколообразной (квазигауссовой) формы [74, 77]. Обоснованием этого приближения является то обстоя-

тельство, что в нелинейной среде вблизи оси пучка зависимость показателя преломления можно аппроксимировать параболой  $n = n_0 - n_2 r^2/2$ , у которой коэффициент  $n_2$  зависит от параметров пучка; для гауссова пучка  $e = e_0 \exp(-r^2/2b^2)$ ,  $n_2 = n_0 \epsilon_2 (df/de^2)_{r=0} e_0^2 b^{-2}$ .

Известно, что гауссовы пучки в такой линзоподобной среде сохраняют свою форму, а изменение ширины описывается уравнением (см. например, [74])

$$d^2 b/dz^2 = -(n_2/n_0) b + 1/b^3. \quad (3.21)$$

Выражая амплитуду пучка  $e_0$  через его мощность, для среды с простейшим законом насыщения нелинейности\*  $f(e^2) = e^2(1 + e^2/e_p^2)^{-1}$ , получаем уравнение [77]

$$d^2 b/dz^2 = b^{-3}[1 - (P/P_{кр}^*) (1 + b_p^2/b^2)^{-2}], \quad (3.22)$$

где  $b_p = (bP/cE_p^2 n_0)^{1/2}$  — ширина пучка, при которой амплитуда поля равна полю насыщения  $E_p$ ,  $P_{кр}^*$  с точностью до коэффициента порядка единицы совпадает с мощностью однородного пучка ширины  $b$ . Например, мощность плоского двухмерного пучка  $P^*(b) \sim b^{-1}$ . Поэтому даже в отсутствие насыщения ( $b_p = 0$ ) схлопывания двухмерного пучка не происходит, а ширина пучка периодически изменяется около значения, соответствующего однородному пучку данной мощности (см. также результаты численных расчетов [74]\*\*).

При учете насыщения нелинейности также не происходит и схлопывания трехмерного пучка; из (3.22) можно, в частности, определить минимальный размер фокального пятна и длину самофокусировки (см., например, [77]). В качестве примера приведем выражение для фокального размера пучка, имеющего на входе в нелинейную среду плоский фазовый фронт  $b_0 = 0$  и ширину  $b_0$ :

$$b_{\min}^2 = b_p^2 (u_0^2 + 1) \{ (P/P_{кр}^* - 1) u_0^2 - 1 \}, \quad (3.23)$$

$u_0^2 = b_0^2/b_p^2$ . При  $P \gg P_{кр}^*$  и  $b_0 \gg b_p$  из (3.23) получаем  $b_{\min}^2 \simeq \simeq 8\omega^2/k^2\omega_p^2 \gg 1$ , что подтверждает сделанный на основе оценки (3.19) вывод о преобладающей роли в плазме эффектов насыщения нелинейности.

### § 3.2. Самовоздействие волновых пучков в плазме в постоянном магнитном поле

Систематическое исследование нелинейных процессов в магнитоактивной плазме является более сложной задачей, чем в случае изотропной плазмы в связи с анизотропией и гиротропией среды, а также

\* Такой закон насыщения в плазме соответствует тепловой нелинейности [22].

\*\* Детальное исследование самофокусировки двухмерных пучков в приближении геометрической оптики проведено в [22, 83].

из-за наличия чрезвычайно большого количества типов собственных колебаний. Остановимся на рассмотрении некоторых особенностей самовоздействия в простейших предельных случаях.

**Параболическое уравнение.** Рассмотрим распространение стационарного параосиального пучка электромагнитных волн  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$  в холодной плазме, помещенной в постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}_0 = z_0 H_0$ . Плазму будем характеризовать обычным тензором диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \epsilon &= 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_H^2), \\ g &= i\omega_H \omega_p^2 / \omega (\omega^2 - \omega_H^2), \\ \eta &= 1 - \omega_p^2 / \omega^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для получения параболического уравнения воспользуемся исходной системой уравнений Максвелла в системе координат, повернутой на угол  $\varphi$  относительно направления магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  в плоскости  $(\mathbf{H}_0 \mathbf{k}_0)$ ,  $\mathbf{k}_0$  — волновой вектор центрального луча в пучке. Тензор  $\hat{\epsilon}$  в новой системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 \epsilon + \beta^2 \eta & ig\alpha & \alpha\beta(\epsilon - \eta) \\ -ig\alpha & \epsilon & -ig\beta \\ \alpha\beta(\epsilon - \eta) & ig\beta & \alpha^2 \eta + \beta^2 \epsilon \end{pmatrix} & \equiv \\ & \equiv \frac{c^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} A & iB & C \\ -iB & D & -iF \\ C & iF & G \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $\alpha = \cos \varphi$ ,  $\beta = -\sin \varphi$ .

Перейдем далее в полученной системе уравнений к медленно меняющимся амплитудам, т. е. произведем замену  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}_0 + \nabla$  и будем считать  $k_0 \Lambda \gg 1$  ( $\Lambda$  — характерный масштаб изменения комплексных амплитуд). Из условия нетривиальности решения в нулевом приближении получим линейное дисперсионное уравнение для волн, а в следующем приближении — уравнение для медленной амплитуды поля. Распорядимся свободным параметром — углом поворота  $\varphi$  — так, чтобы в уравнении для амплитуды осталась только первая производная по координате  $\xi$ . Очевидно, что при этом условии ось  $\xi$  совпадает с направлением групповой скорости пучка. Предположим далее, что выполнены обычные квазиоптические неравенства

$$k_0 \Lambda_\xi \sim k_0^2 \Lambda_y^2 \sim k_0^3 \Lambda_\xi^2 \gg 1 \quad (3.26)$$

( $\Lambda_\xi$ ,  $\Lambda_y$ ,  $\Lambda_\xi$  — характерные масштабы изменения комплексной амплитуды пучка по направлениям  $\xi^0$ ,  $y^0$ ,  $\xi^0$ ). Тогда, воспользовавшись обычной процедурой квазиоптики, в первом приближении по малому



параметру  $(k_0 \Lambda_z)^{-1}$  получим уравнение для амплитуды пучка, которое в координатах  $(\zeta^0, y^0, \xi^0)$  имеет канонический вид [19]:

$$2i \{k_{0x} [AG + AD - C^2 - B^2 + k_0 \hat{\epsilon} k_0] + k_{0z} (CD - BF) + \\ + k_0^2 (x_0 \hat{\epsilon} k_0)\} \partial E / \partial \zeta + \{-DG - AD + F^2 + B^2 - k_0^2 \hat{\epsilon} k_0 - k_0^2 D\} \partial^2 E / \partial y^2 + \\ + \{-DG - AG + F^2 + C^2 - k_0 \hat{\epsilon} k_0 + 4k_{0z} (z_0 \hat{\epsilon} k_0)\} \partial^2 E / \partial \xi^2 = J^{NL} E. \quad (3.27)$$

Заметим, что условия (3.26) являются необходимыми, но не достаточными для справедливости уравнения (3.27), так как при некоторых значениях параметров, соответствующих обращению одного из коэффициентов при  $\partial^2 E / \partial y^2$  или  $\partial^2 E / \partial \xi^2$  в нуль, нужно учитывать более высокие производные. Иными словами, уравнение (3.27) не описывает распространение пучков в так называемых особых направлениях [84]. Как следует из процедуры получения (3.27), это уравнение учитывает не только изменение дисперсионных свойств среды в обычном для квазиоптики малоугловом приближении, но и малые [в соответствии с неравенствами (3.26)] изменения поляризации нормальных волн в зависимости от угла относительно центрального луча. В линейном случае (без учета  $J^{NL}$ ) уравнение (3.27) справедливо для любой компоненты электрического поля квазиоптического пучка нормальных волн. При учете слабой нелинейности дополнительных трудностей с учетом поляризации не возникает, за исключением случая, когда показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн сравниваются между собой. Тогда нелинейный ток, обусловленный одной из волн, может возбудить другую с отличающейся поляризацией, что при выводе (3.27) не учитывалось.

Нелинейный ток в (3.27) в общем случае определяется возмущениями плотности  $n$  и квазистационарного магнитного поля  $h_z$ , возникающими под действием пондеромоторной силы (см. гл. 1):

$$J^{NL} = \{(k^2 + \epsilon \eta - \epsilon - \eta) (k^2 - \epsilon) - g^2(\epsilon - 1) (k_x^2 - \eta) / (k^2 - \epsilon) - \\ - 2\eta + 1 + k_x^2\} n + \{-(k^2 - \epsilon) (k_x^2 - \eta) + g^2 (k_x^2 - \eta) / (k^2 - \\ - \epsilon)\} \omega_H \partial \epsilon / \partial \omega_H + 2g (k_x^2 - \eta) \omega_H \partial g / \partial \omega_H h_z. \quad (3.28)$$

Уравнения (3.27), (3.28) в интересующем нас стационарном случае можно привести к стандартному виду неоднородного параболического уравнения с локальной нелинейностью [85]:

$$-2ik_0 \partial E / \partial \zeta + \alpha_y \partial^2 E / \partial y^2 + \alpha_\xi \partial^2 E / \partial \xi^2 + \beta |E|^2 E = 0. \quad (3.29)$$

Коэффициенты  $\alpha_y$ ,  $\alpha_\xi$ ,  $\beta$  имеют чрезвычайно громоздкий вид и упрощаются лишь в некоторых предельных случаях, к анализу которых мы переходим.

**Продольное распространение.** В случае пучка электромагнитных волн, распространяющихся в направлении постоянного магнитного поля  $H_0$ , с электрическим полем вида  $E = (x_0 \pm iy_0) E_\perp / \sqrt{2}$ ,

$\bar{x}_0, \bar{y}_0$  — орты, уравнение (3.29) можно переписать в виде [86, 87]

$$\left. \begin{aligned} & -2ik\partial E_{\perp}/\partial z + \alpha\Delta_{\perp} E_{\perp} + k^2 \beta' |E_{\perp}|^2 E_{\perp} = 0; \\ & \beta' = \omega_{pe}^2 e^2/[4(T_e + T_i) m\omega^2 (\omega \pm \omega_H)^2], \alpha = (1 + n^2/\eta)/2; \\ & n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega(\omega \pm \omega_H), \quad \eta = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

верхний знак соответствует обыкновенной волне, нижний — необыкновенной.

Уравнение (3.30) в предельном случае  $\omega_H \rightarrow 0$  переходит в обычное параболическое уравнение для изотропной среды ( $\alpha \rightarrow 0$ ). При  $\omega_H \neq 0$  в общем случае  $\alpha \neq 1$ , и поперечная диффузия лучей может происходить как быстрее, так и медленнее, чем в изотропной среде, в зависимости от соотношения параметров  $\omega_p/\omega$  и  $\omega_H/\omega$ . Более того, в некоторой области частот диффузионный коэффициент  $\alpha$  отрицателен. Так, для обыкновенной волны  $\alpha_0 < 0$  в диапазоне частот  $\bar{\omega}_0 < \omega < \bar{\omega}_{pe}$ , где  $\bar{\omega}_0$  — один из корней кубического уравнения:  $\bar{\omega}_0^3 + \bar{\omega}_0^2 \omega_H - \omega_0 \omega_{pe}^2 - 1/2 \omega_{pe}^2 \omega_H = 0$ . Для необыкновенной волны в плазме с  $\bar{\omega}_{pe} \gg \omega_H$  коэффициент  $\alpha_e < 0$  для частоты\*  $\omega_H/2 < \omega < \omega_H$ ; если же  $\omega_H > \bar{\omega}_{pe}$ , диффузионный коэффициент отрицателен при  $\bar{\omega}_e < \omega < \bar{\omega}_{pe}$ ,  $\bar{\omega}_e^3 - \bar{\omega}_e^2 \omega_H - \bar{\omega}_e \omega_{pe}^2 + 1/2 \omega_{pe}^2 \omega_H = 0$ . В сильном магнитном поле ( $\omega_H \rightarrow \infty$ )  $\alpha_e = (2\omega^2 - \omega_{pe}^2)/2(\omega^2 - \omega_{pe}^2)$ .

Выясним, каким физическим следствиям отвечает отрицательный коэффициент поперечной диффузии  $\alpha < 0$ . Для этого в уравнении (3.30) произведем замену переменных  $E_{\perp} = E_0(r_{\perp}, z) \exp[-i\varphi(r_{\perp}, z)]$ ,  $\mathbf{r}' = k\mathbf{r}$  и запишем, опуская в дальнейшем штрихи, систему уравнений для действительной амплитуды  $E_0$  и фазы  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} & 2\partial\varphi/\partial z + \alpha(\nabla_{\perp} \varphi)^2 = \beta E_0^2 + \alpha\Delta_{\perp} E_0/E_0, \\ & \partial E_0^2/\partial z + \alpha \operatorname{div}_{\perp} (E_0^2 \nabla_{\perp} \varphi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Если в первом уравнении (3.30) опустить два последних члена, получим уравнения геометрической оптики для случая квазипродольного распространения в линейной магнитоактивной плазме. Этим уравнениям, в частности, удовлетворяют сферические волны, фаза и амплитуда которых в параксиальном приближении могут быть представлены в виде

$$\varphi = r_{\perp}^2/2\alpha(z + R_0), \quad E_0^2 = A_0^2(z/R_0 + 1)^{-2} F[r_{\perp}/\alpha(zR_0^{-1} + 1)]. \quad (3.32)$$

Здесь  $R_{\phi 0} = \alpha R_0$  — радиус кривизны начального ( $z = 0$ ) фазового фронта, в изотропной среде;  $R_{\phi 0} = R_0$ ;  $F$  — произвольная функция, определяемая начальным распределением амплитуды поперек лучей.

Из соотношений (3.32) следует, что при  $z \rightarrow -R_0$ ,  $E_0^2 \rightarrow \infty$ , т. е. лучи пересекаются в точке  $z = -R_0 = -R_{\phi 0}/\alpha$ , причем при  $\alpha > 0$ ,

\* При  $\omega = \omega_H/2$  коэффициент  $\alpha_e = 0$  и в разложении дисперсионного уравнения по поперечным составляющим вектора необходимо учитывать члены более высокого порядка. При этом квазиоптическое уравнение будет содержать уже производные четвертого порядка по поперечной координате.

как и в изотропной среде, фокусирующимся лучам соответствуют фазовые фронты с отрицательным радиусом кривизны  $R_\phi < 0$ , а при  $\alpha < 0$  фазовые фронты с  $R_\phi > 0$ . Качественно это явление можно пояснить следующим образом. В анизотропной среде, как правило, направления фазовой и групповой скоростей не совпадают, причем в магнитоактивной плазме при некоторых значениях параметров возможны случаи\*, когда угол между волновым вектором и направлением постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  противоположен по знаку угла между лучевым вектором и  $\mathbf{H}_0$ . Именно в этих случаях сходящимся лучам соответствуют «расходящиеся» фазовые фронты, и наоборот.

Из приведенного рассмотрения следует, что самофокусировка волнового пучка возможна лишь в случае, если нелинейность приводит к такому искажению фазового фронта, которому соответствуют сходящиеся лучи. Поэтому необходимым условием самофокусировки является неравенство  $\beta/\alpha > 0$ . Это требование определяет области частот, в которых тот или иной механизм нелинейности может привести к самофокусировке. Так, стрикционная нелинейность приводит к самофокусировке необыкновенной волны вблизи гирорезонанса в разреженной плазме с  $\omega_{pe} \ll \omega_{He}$  и на частотах  $\omega \ll \omega_{He}$  в плазме с  $\omega_{pe} \gg \omega_{He}$ . Кроме того, пучки обыкновенных и необыкновенных волн могут самофокусироваться на частотах  $\omega \gg \omega_{He}$ . При других соотношениях частот  $\omega$ ,  $\omega_{pe}$  и  $\omega_{He}$  стрикционная нелинейность приводит к дефокусировке волновых пучков.

**Вистлеры.** Рассмотрим теперь самовоздействие низкочастотных ( $\omega \ll \omega_H \cos \theta$ ) электромагнитных волн — вистлеров  $\mathbb{V}$  в холодной плазме с  $\omega_{pe} \gg \omega_H$ . Коэффициенты параболического уравнения для стационарной самофокусировки в этом случае имеют вид [19]

$$\left. \begin{aligned} \alpha_y &= (4 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{-1/2}, \quad \alpha_\xi = 2(2 - \operatorname{tg}^2 \theta)/(4 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{3/2}; \\ \beta &= [\omega_p^2 e^2/c^2 \omega_H^2 (T_e + T) m] [(4 + \operatorname{tg}^2 \theta)(1 + \cos^2 \theta)]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

а угол  $\varphi$  поворота системы координат связан с углом  $\theta$  соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \theta / (2 + \operatorname{tg}^2 \theta), \quad n_0^2 = \omega_p^2 / (\omega_H \omega \cos \theta). \quad (3.34)$$

При малых  $\theta$  коэффициенты  $\alpha_y$ ,  $\alpha_\xi$  и  $\beta$  все положительны, и при описании самофокусировки можно воспользоваться результатами теории для изотропного случая. При достаточно больших углах  $\theta > \theta^*$  ( $\operatorname{tg} \theta^* = \sqrt{2}$ ) коэффициент  $\alpha_\xi$  меняет знак  $\alpha_\xi < 0^{**}$ . Уравнение (3.29) в этом случае отличается от традиционного одномерного нелинейного уравнения Шредингера и в безразмерных переменных может быть представлено в виде\*\*\*

$$-2i\partial \mathcal{E} / \partial \xi + \partial^2 \mathcal{E} / \partial y^2 - \partial^2 \mathcal{E} / \partial \xi^2 + |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.35)$$

\* Такие случаи легко обнаружить, исследуя поверхности показателей преломления.

\*\* Отрицательный знак  $\alpha_\xi$  соответствует поверхности показателей преломления с отрицательной гауссовой кривизной  $\partial^2 \omega / \partial k_\xi^2 < 0$ .

\*\*\* Уравнение типа (3.35) описывает также самовоздействие пучков квазипотенциальных волн на частотах нижнего гибридного резонанса [88].

С этим отличием связано существенное изменение характера самовоздействия волнового пучка.

Уравнение (3.35) обладает интегралами

$$I_0 = \int |\mathcal{E}_y|^2 dy d\xi, \quad I_2 = \int (|\mathcal{E}_y|^2 - |\mathcal{E}_\xi|^2 - (1/2)|\mathcal{E}|^4) dy d\xi. \quad (3.36)$$

С помощью этих интегралов можно записать соотношения для вторых моментов распределения поля [88]

$$\left. \begin{aligned} d^2/d\xi^2 (a^2 + b^2) &= 8 \int (|\mathcal{E}_y|^2 + |\mathcal{E}_\xi|^2) dy d\xi > 0; \\ d^2/d\xi^2 (a^2 - b^2) &= 8I_2 = \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$a^2 = \int y^2 |\mathcal{E}_y|^2 d\xi dy, \quad b^2 = \int \xi^2 |\mathcal{E}|^2 d\xi dy. \quad (3.38)$$

Очевидно, что в случае коллимированных пучков, не обладающих на границе плазмы  $\zeta = 0$  начальной сходимостью,  $b^2$  — всегда растущая функция  $\zeta$ . Если  $I_2 > 0$ , то для начального распределения, вытянутого вдоль  $\xi$  ( $a_0 \ll b_0$ ), сечение пучка при больших  $\zeta$  будет иметь форму, вытянутую вдоль  $y$ : ( $a > b$ ). Для  $I_2 < 0$ , независимо от начального соотношения между  $a_0$  и  $b_0$ , начиная с некоторого  $\zeta$  распределение поля в пучке вытягивается вдоль  $\xi$ .

Детальное исследование особенностей самофокусировки пучков эллиптической формы можно провести в безаберрационном приближении. Такой анализ [88] показывает, что при  $\zeta \rightarrow \infty$  пучки оказываются расфокусирующимися независимо от их начальных параметров. При конечных  $\zeta$  характер самовоздействия существенно зависит от соотношения между начальными ширинами  $a_0$  и  $b_0$ . При  $a_0 \ll b_0$  и амплитуде поля в пучке, больше пороговой  $A_0^2 > 4a_0/b_0$ , происходит процесс квазидномерной самофокусировки пучка по направлению  $y$  — ширина пучка испытывает несколько осциллирующий около некоторого среднего значения, монотонно возрастающего с  $\zeta$ , а затем пучок переходит в режим асимптотической расфокусировки. При  $a_0 \leq b_0$  коллимированный пучок монотонно расфокусируется независимо от его начальной амплитуды.

### § 3.3. Пространственно-временная неустойчивость плоской волны

Изложенные выше результаты применимы для описания самофокусировки волновых пучков, мощность которых не слишком сильно превышает критическую. Если интенсивный пучок достаточно широк, он неустойчив относительно малых возмущений его пространственной структуры. Эта неустойчивость является частным случаем общей неустойчивости плоской электромагнитной волны конечной амплитуды в плазме, однако нам представляется целесообразным рассмотреть ее отдельно в этой главе, так как развитие подобных «самофокусировочных» неустойчивостей приводит к эффекту развала исходного широкого пучка волн на набор более узких пучков — «нитей», с мощностью

порядка критической. Аналогичный характер имеют и модуляционные неустойчивости, в результате которых в нелинейной среде происходит образование решеток солитонов, в том числе неодномерных. Рассмотрим задачу об устойчивости плоской волны в среде с локальной нелинейностью относительно малых возмущений.

Будем исходить из квазиоптического уравнения для комплексной амплитуды поля в нелинейной среде. Это уравнение легко может быть обобщено на случай квазимонохроматического пакета волн  $E = \bar{E}(r, t) \exp(i\omega t - ikr)$  в нелинейной среде со слабой дисперсией. Так, в изотропной нелинейной среде для такого пакета с  $k\Lambda_\tau \gg 1$  справедливо скалярное уравнение [85, 89]:

$$-2ik\partial E/\partial z + \Delta_\perp E + kv'_\omega \partial^2 E/\partial \tau^2 + k^2 \epsilon_2 f(|E|^2) E = 0. \quad (3.39)$$

Здесь  $\tau = z - vt$ ,  $v = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость пакета,  $v'_\omega = \partial v/\partial\omega$ ,  $\Lambda_\tau$  — масштаб неоднородности огибающей по координате  $\tau^*$ .

Если в (3.39) положить  $\Delta_\perp = 0$ , получим уравнение, описывающее распространение одномерных волновых пакетов в произвольной изотропной среде, характеризуемой законом дисперсии  $\omega = \omega(k)$  и нелинейностью. Это уравнение совпадает с нелинейным уравнением Шредингера для двумерных пучков, поэтому ряд результатов теории самовоздействия таких пучков справедлив и для распространения импульсов в нелинейных диспергирующих средах [85].

Рассмотрим сначала устойчивость плоской волны в случае кубической нелинейности  $\epsilon_2 f(|\mathcal{E}|^2) = \beta|\mathcal{E}|^2$ . При этом уравнение (3.39) можно записать в виде

$$-2i\mathcal{E}'_z + \Delta_\perp \mathcal{E} + \alpha_\tau \mathcal{E}''_{\tau\tau} + \tilde{\beta}|\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0, \quad (3.40)$$

где  $\alpha_\tau = \text{sign } v'_\omega$ ,  $\tilde{\beta} = \text{sign } \epsilon_2$  и очевидным образом введены безразмерные переменные  $\tau$ ,  $r$  и  $\mathcal{E}$ . Это уравнение математически тождественно уравнению (3.29) для амплитуды стационарного квазиоптического пучка в магнитоактивной плазме.

Уравнение (3.40) имеет решение в виде однородной плоской монохроматической волны

$$\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} \exp(-i\gamma z), \quad \gamma = \beta \bar{\mathcal{E}}^2/2, \quad \bar{\mathcal{E}} = \text{const}. \quad (3.41)$$

Исследуем устойчивость решения (3.41). Для этого представим  $\mathcal{E}$  в виде

$$\mathcal{E} = [\bar{\mathcal{E}} + e(r, \tau)] \exp(-i\gamma z), \quad |e| \ll \bar{\mathcal{E}} \quad (3.42)$$

и линеаризуем уравнение (3.41). Полагая  $e = (e_1^0 + ie_2^0) \exp(-i\mathbf{x}_\perp \mathbf{r}_\perp - i\mathbf{x}_\tau \tau - i\mathbf{h}_\kappa z)$ , для постоянной  $h_\kappa$  получаем дисперсионное уравнение [85]

$$h_\kappa^2 - 1/4 (\kappa_\perp^2 + \alpha_\tau \kappa_\tau^2) (\kappa_\perp^2 + \alpha_\tau \kappa_\tau^2 - 2\bar{\kappa}^2), \quad (3.43)$$

\* Мы для простоты ограничились случаем изотропной среды. Обобщение на магнитоактивную плазму можно провести с помощью результатов § 3.2.

где  $\kappa^2 = \tilde{\beta} \bar{\varepsilon}^2$ . Область неустойчивости волны по отношению к возмущению определяется условием  $h_{\kappa}^2 < 0$ . Рассмотрим это условие в различных предельных случаях.

а. Немодулированная волна ( $\kappa_{\tau} = 0$ ) [90]

$$h_{\kappa} = \pm 1/2 \sqrt{\kappa_{\perp}^2 (\kappa_{\perp}^2 - 2\bar{\kappa}^2)}. \quad (3.44)$$

Плоская волна неустойчива лишь в среде с  $\tilde{\beta} \sim \varepsilon_2 > 0$  по отношению к пространственным возмущениям поля с  $\kappa_{\perp}^2 < \kappa_{\text{гр}}^2 = 2\bar{\kappa}^2$ . Инкремент ( $\Gamma^2 = -h_{\kappa}^2$ ) достигает наибольшего значения, равного  $\Gamma_{\text{макс}} = \bar{\kappa}^2/2$  для возмущений с пространственным периодом  $\Lambda_{\perp} \simeq \pi/\kappa$ .

Если в спектральном разложении исходного возмущения представлены составляющие со всеми  $\kappa_{\perp}$ , развитие неустойчивости приводит к образованию вместо исходной плоской волны набора узких пучков (нитей) с характерным размером  $\Lambda_{\perp}$ , зависящим от интенсивности плоской волны:  $\bar{\kappa}^2 = \bar{\varepsilon}^2 = 8\pi\varepsilon_2 P_0 / c\sqrt{\varepsilon_0}$ , где  $P_0$  — плотность потока энергии волны. Характерный масштаб развития неустойчивости можно приблизительно считать равным величине, обратной максимальному инкременту:  $L_z \sim \Gamma_{\text{макс}}^{-1}$ .

Интересно, что мощность образующихся нитей  $W_n \simeq \pi\Lambda_{\perp}^2 P_0/4k^2 = c\lambda^2(128\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2})^{-1}$  с точностью до коэффициента порядка единицы совпадает с мощностью трехмерного уединенного пучка  $P_{\text{кр}} \simeq c\lambda^2(86\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_2})^{-1}$  и не зависит от мощности исходной плоской волны. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что с увеличением интенсивности плоской волны растет число нитей, а не их мощность.

б. Модулированная плоская волна ( $\kappa_{\perp} = 0$ ) [85, 91]

$$h_{\kappa} = \pm \sqrt{\kappa_{\tau}^2 (\kappa_{\tau}^2 - 2\bar{\kappa}_{\tau}^2)}, \quad (3.45)$$

где  $\bar{\kappa}_{\tau}^2 = \alpha_{\tau}\bar{\varepsilon}^2$ . Область неустойчивости существует лишь при  $\beta_2/\alpha_{\tau} \sim \varepsilon_2/v_{\omega} > 0$  (критерий Лайтхилла [92]). Неустойчивость приводит к временной самомодуляции волны. Скорость нарастания самомодуляции максимальна при  $\kappa_{\tau}^2 = \bar{\kappa}_{\tau}^2$ , максимальный инкремент равен  $\Gamma_{\text{макс}} = \bar{\kappa}_{\tau}^2/2 = \bar{\kappa}^2/2$ . Границы частот модуляции, попадающих в область неустойчивости, определяются условием  $0 < \kappa_{\tau}^2 < \kappa_{\text{гр}}^2 = 16\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 P_0\omega_0(v'_{\omega})^{-1}$ . Следовательно, по прохождении группового пути  $L_z \sim \Gamma_{\text{макс}}^{-1}$  плоская волна распадается на последовательность импульсов с характерным размером  $\Lambda_{\tau} \simeq \pi/\kappa_{\tau}$ . Мощность одного импульса пропорциональна  $P_0$ . С увеличением  $P_0$  растет как число импульсов, так и их интенсивность.

в. Волна с пространственно-временной модуляцией [85]. Область неустойчивости на плоскости  $\kappa_{\perp}^2, \kappa_{\tau}^2$  лежит между прямыми  $\kappa_{\perp}^2 = -\alpha_{\tau}\kappa_{\tau}^2$ ,  $\kappa_{\perp}^2 = -\alpha\kappa_{\tau}^2 + 2\bar{\kappa}^2$ . Максимальный инкремент  $\Gamma_{\text{макс}} = \bar{\kappa}^2/2$  достигается на прямой  $\kappa_{\perp}^2 = -\alpha_{\tau}\kappa_{\tau}^2 + \bar{\kappa}^2$ . Ориентация области неустойчивости на плоскости  $\kappa_{\perp}^2, \kappa_{\tau}^2$  зависит от знаков  $\alpha_{\tau}$  и  $\tilde{\beta}$ : при  $v'_{\omega} >$

$> 0$  волны с пространственно-временной синусоидальной ( $\kappa_{\perp}^2 > 0$ ,  $\kappa_z^2 > 0$ ) модуляцией неустойчивы лишь при  $\varepsilon_2 > 0$ ; неустойчивы возмущения, лежащие в конечной области вблизи точки  $\kappa_{\perp}^2 = 0$ ,  $\kappa_z^2 = 0$ ; при  $v_{\omega}' < 0$  неустойчивость возможна даже при  $\varepsilon_2 < 0$  — область неустойчивости занимает полубесконечную полосу между параллельными прямыми в первом квадранте.

Неустойчивость плоской волны можно трактовать на языке четырехволнового взаимодействия как вынужденное рассеяние электромагнитной волны под малыми углами (рассеяние вперед). Так, условие максимума инкремента  $\Gamma$  совпадает с условием синхронизма для волны накачки и усиливаемых волн в среде с кубической нелинейностью:

$$k_z(\omega + \Omega, \kappa_{\perp}) + k_z(\omega - \Omega, \kappa_{\perp}) = 2k_n(\omega) \quad (3.46)$$

в случае малых  $\Omega$ ,  $\kappa_{\perp}$  и  $\varepsilon_2 \bar{\omega}^2$ . При учете процессов временной дисперсии (релаксации) нелинейности, приводящих, как правило, к расширению области неустойчивости и уменьшению инкрементов, эта неустойчивость является частным случаем задачи о вынужденном рассеянии электромагнитной волны (рассеяние вперед) [74, 93].

Если бегущая плоская волна неустойчива относительно малых возмущений пространственной структуры лишь при «фокусирующей» нелинейности  $\varepsilon_2 > 0$ , то при наличии встречной сильной волны, возникающей, например, из-за отражения, развал на нити происходит и в среде с  $\varepsilon_2 < 0$  [94]. Физический механизм этой неустойчивости также связан с четырехволновым синхронным взаимодействием типа (3.46), которое в случае встречных волн может реализоваться и в среде с дефокусирующей нелинейностью. Кроме того, при наличии встречной волны в системе появляется обратная связь и возможно осуществление абсолютной самофокусирующей неустойчивости [23].

Из проведенного выше анализа неустойчивости следует, что в скалярном приближении при слабой нелинейности среды неустойчивыми являются крупномасштабные возмущения. Новый тип неустойчивости возникает при рассмотрении векторной задачи о неустойчивости плоской волны относительно возмущений *ТМ*-типа. В этом случае в среде с  $\varepsilon_2 < 0$  возможен рост мелкомасштабных возмущений с характерным размером, меньшим длины волны исходного излучения. Такая неустойчивость [95] приводит к расслоению поля и среды на слои, перпендикулярные вектору  $\mathbf{E}$  сильной волны. Частным случаем этой неустойчивости является модуляционная неустойчивость плазменных колебаний [96], которая подробно анализируется в следующей главе.

Исследование нелинейной стадии самофокусирующей неустойчивости проводилось с помощью численного интегрирования (3.40), главным образом, для случаев либо чисто пространственных поперечных возмущений [90], либо одномерного случая модуляционной неустойчивости [85, 97]. Результаты этих работ убедительно показывают, что на нелинейной стадии неустойчивости происходит развал первоначального широкого пакета (пучка) на узкие пучки с размером, отвечающим оптимальному масштабу неустойчивости. Дальнейшая

эволюция, естественно, зависит от размерности задачи. Так, в одномерном случае, описываемом уравнением

$$-2i\partial\mathcal{E}/\partial z + \partial^2\mathcal{E}/\partial\tau^2 + |\mathcal{E}|^2\mathcal{E} = 0, \quad (3.47)$$

важные характеристики нелинейности стадии могут быть определены [98, 99] с помощью интегралов движения

$$I_0 = \int_{-l}^l |\mathcal{E}(\tau)|^2 d\tau, \quad I_2 = \int_{-l}^l (|\partial\mathcal{E}/\partial\tau|^2 - 1/2|\mathcal{E}|^4) d\tau, \quad (3.48)$$

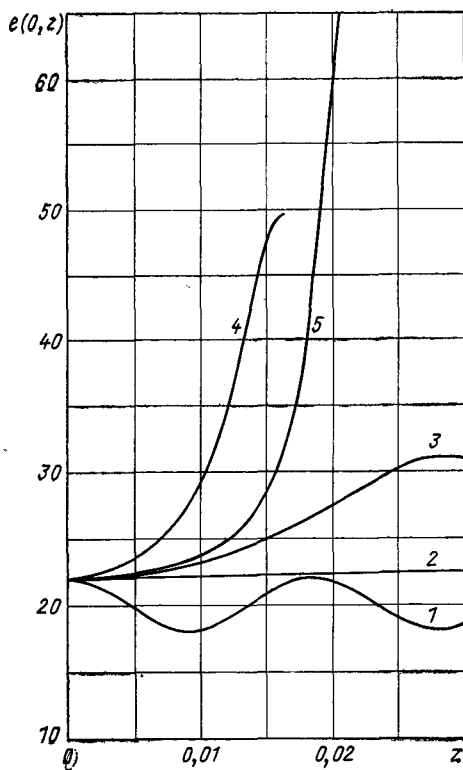


Рис. 11. Зависимость амплитуды возмущения  $e(0, z)$  при самофокусировочной неустойчивости

где  $2l = 2\pi/\kappa$  — пространственный период возмущения. Представляя решение в виде  $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} + e$ , где  $\bar{\mathcal{E}}$  — невозмущенное поле, можно получить оценку сверху для полной энергии возмущения и максимальной амплитуды возмущения

$$(1/2l) \int_{-l}^l |e|^2 d\tau < 4\bar{\mathcal{E}}^2,$$

$$|e_{\text{макс}}|^2 \leq 2\bar{\mathcal{E}}^4 l^2 [1 + O(1/\bar{\mathcal{E}}^2 l^2)]. \quad (3.49)$$

Таким образом, в отличие от случая самофокусировки трехмерных пучков, при самомодуляции (и двумерной самофокусировке) амплитуда поля не может превышать некоторого максимального значения, определяемого начальными условиями, причем  $e_{\text{макс}}$  возрастает с увеличением первоначального масштаба возмущения. Последний вывод подтверждается результатами численных расчетов. На рис. 11 для иллюстрации приведены взятые из [85] результаты численного исследования эволюции начального распределения вида  $\mathcal{E}(0, \tau) = 20 + 2 \cos \kappa\tau$  — дана зависимость максимальной амплитуды возмущения  $e(\tau = 0)$  с ростом  $z$  при следующих значениях  $\kappa$ :

$$1) \kappa^2 = 3\bar{\kappa}^2; \quad 2) \kappa^2 = 2\bar{\kappa}^2; \quad 3) \kappa^2 = \bar{\kappa}^2(1 + \sqrt{3}/2);$$

$$4) \kappa^2 = \bar{\kappa}^2; \quad 5) \kappa^2 = \bar{\kappa}^2(1 - \sqrt{3}/2).$$



Первое значение  $\kappa$  лежит в области устойчивости, второе — на ее границе, третье и пятое отвечают одинаковым инкрементам неустойчивости, четвертое соответствует максимальному инкременту. Нетрудно видеть, что зависимость скорости нарастания возмущения хорошо согласуется с результатами линеаризованного рассмотрения, а зависимость величины  $e_{\max}$  от  $\kappa$  подтверждает оценку (3.49).

В процессах самомодуляции одномерных пакетов фундаментальную роль играют распределения типа солитонов огибающих. Исследование асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера типа (3.40), выполненное В. Е. Захаровым и А. Б. Шаботом [100] методом обратной задачи рассеяния, показывает, что произвольный ограниченный пакет волн в нелинейной среде с кубической нелинейностью распадается при  $z \rightarrow \infty$  на набор солитонов, параметры которых могут быть определены по начальному распределению.

В заключение подчеркнем, что уравнение (3.40) для  $\alpha_T > 0$ ,  $\tilde{\beta} > 0$  может иметь решения типа трехмерных солитонов огибающих. На существование подобных решений обращалось внимание еще в [85], в последние годы теория неодномерных солитонов активно разрабатывалась в работах В. И. Петвиашвили [101].

## ГЛАВА 4

### ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

При распространении в плазме мощного электромагнитного излучения существенную роль играют параметрические неустойчивости плазменных колебаний [102—105]. С этими неустойчивостями связаны как возможные механизмы аномального поглощения энергии электромагнитных волн в плазме, так и эффекты вынужденного рассеяния излучения, препятствующие в неоднородной плазме поступлению энергии к области поглощения (области плазменного резонанса). Процессы вынужденного рассеяния обладают существенно более высокими пороговыми характеристиками, чем аналогичные процессы в плотной плазме с  $\omega_{pe} \simeq \omega_0$ , приводящие к возбуждению плазменных колебаний. Поэтому в данной главе мы ограничимся лишь рассмотрением параметрических неустойчивостей ленгмюровских колебаний, возникающих в однородной плазме в поле монохроматической электромагнитной волны.

При исследовании нелинейной стадии параметрической неустойчивости в большинстве практически интересных случаев (например, при лазерном нагреве) невозможно использование приближения слабой турбулентности, так как нелинейность приводит к существенному искажению дисперсионных характеристик плазменных колебаний уже при сравнительно низких плотностях энергии ( $W/NT_e \sim k^2 r_d^2$ ). Ленгмюровскую турбулентность, удовлетворяющую такому условию, обычно называют сильной. В последнее время теории сильной ленгмюровской

турбулентности уделяется в литературе чрезвычайно большое внимание (см., например, [106—113]). Строгие аналитические решения в этой теории практически отсутствуют, поэтому в большинстве работ используется подход, связанный с исследованием некоторых сравнительно простых физических моделей. Физические представления, выработанные при решении модельных задач, весьма полезны и при анализе результатов машинного моделирования плазмы, которое часто по своей сложности не намного отличается от «чистого» лабораторного эксперимента. Они же позволяют получить оценки таких важных интегральных характеристик турбулентности, как уровень ленгмюровских и звуковых колебаний и скорость диссипации энергии.

В данной главе приведены некоторые результаты теории ленгмюровской турбулентности, полученные с помощью подобного модельного подхода. Основное внимание уделяется рассмотрению динамических режимов. Такие режимы могут реализоваться при взаимодействии плазмы с когерентным излучением из-за того, что на начальной стадии параметрической неустойчивости происходит рост пространственно периодических колебаний с масштабом, соответствующим максимальному инкременту, а этот рост может привести к подавлению неустойчивости других масштабов.

В первых параграфах рассмотрены некоторые особенности слабо-турбулентных процессов в поле когерентного излучения, затем детально исследуется одномерная модель нелинейной стадии модуляционной неустойчивости и связанные с ней макроскопические эффекты самовоздействия электромагнитных волн.

#### § 4.1. Основные уравнения. Гидродинамические неустойчивости плазменных колебаний в ВЧ-полях

При описании взаимодействия в окрестности области плазменного резонанса  $|\omega - \omega_p| \ll \omega_p$  мы будем предполагать нелинейность слабой, т. е. будем пренебрегать нелинейностью низкочастотных движений, и исходить из усредненной по периоду высокочастотных колебаний системы уравнений, полученной в квазигидродинамическом приближении. Эта упрощенная система состоит из уравнения для медленной комплексной амплитуды ВЧ-поля:

$$-(2i/\omega) \partial E / \partial t - (c^2/\omega^2) \operatorname{rot} \operatorname{rot} E + (3T_e/m\omega^2) \nabla \operatorname{div} E + \varepsilon_0 E - nE = 0 \quad (4.1)$$

и уравнения для возмущения плотности плазмы

$$v_s^{-2} \partial^2 n / \partial t^2 - \Delta n = \Delta (|E|^2/E_p^2), \quad (4.2)$$

$\varepsilon_0$  — линейная диэлектрическая проницаемость.

Поскольку характерный пространственный масштаб плазменных колебаний  $\lambda_{\perp}$  мал по сравнению с длиной электромагнитной волны  $\lambda_{\text{эм}} \simeq k_D^{-1}$ , при рассмотрении динамики свободных ленгмюровских колебаний можно пренебречь возбуждением вихревой составляющей

электрического поля  $E_{\nu} \sim (v_{T_e}^2/c^2) E_{\pi} \ll E_{\pi}$ , а при исследовании нелинейной стадии модуляционной неустойчивости в поле электромагнитной волны можно воспользоваться методом усреднения и разбить решение задачи на два последовательных этапа. Сначала рассмотрим возбуждение плазменных колебаний заданным плавно изменяющимся источником  $\mathbf{D}(t) = (c/\omega)^2 \text{rot rot } \mathbf{E}$  (фактически  $\mathbf{D}(t)$  — вектор электрической индукции в электромагнитной волне):

$$-(2i/\omega) \partial \mathbf{E} / \partial t + 3r_d^2 \nabla \text{div } \mathbf{E} + (\varepsilon_0 - n) \mathbf{E} = \mathbf{D}(t), \quad (4.3)$$

полагая в (4.3)  $\mathbf{D}(t)$  не зависящим от координат, а затем найденное решение  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t, \mathbf{D})$ ,  $n(\mathbf{r}, t, \mathbf{D})$  подставим в (4.3) и проведем усреднение по мелкомасштабным осцилляциям. В результате получим уравнение для среднего поля [114]

$$-(2i/\omega) \partial \mathbf{E} / \partial t + \varepsilon_0 \mathbf{E} - n \mathbf{E} = (c/\omega)^2 \text{rot rot } \mathbf{E} = -(c/\omega)^2 \Delta \mathbf{E}, \quad (4.4)$$

описывающее самовоздействие волны накачки.

Система уравнений (4.2)—(4.4) является исходной для исследования не только нелинейной стадии параметрических неустойчивостей, но и для процессов линейной трансформации интенсивных электромагнитных волн в неоднородной плазме  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathbf{r})$ .

Во многих случаях в уравнениях (4.2), (4.3) удобно перейти к новым безразмерным переменным [11]:

$$A = E (16 \pi N T_e / 3g)^{-1/2}; \quad r_n = r / (3r_{de} \sqrt{g});$$

$$n_n = 3gn, \quad \varepsilon_{n0} = 3g\varepsilon_0, \quad F_0 = D_0 (3g)^{3/2} (16\pi N T_e)^{-1/2},$$

$$g = [M T_e / (T_e + T_i) m] u^2,$$

$u$  — параметр подобия (безразмерная скорость звука), индекс « $n$ » в дальнейшем всюду будет опущен. В результате имеем

$$-2i\partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \text{div } \mathbf{A} + (\varepsilon_0 - n) \mathbf{A} = \mathbf{F}_0(t). \quad (4.5)$$

$$u^{-2} \partial^2 n / \partial t^2 - \Delta n = \Delta |\mathbf{A}|^2. \quad (4.6)$$

В отсутствие накачки  $D = 0$ ,  $F_0 = 0$  и диссипации  $\text{Im } \varepsilon_0 = 0$  и при  $\varepsilon_0(\mathbf{r}) = \text{const}$  система уравнений (4.5), (4.6), описывающая динамику свободных ленгмюровских колебаний, обладает интегралами движения, являющимися следствием ее гамильтоновости и однородности коэффициентов по  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Так, сохраняется число ленгмюровских квантов (плазмонов), пропорциональное величине

$$I_0 = \int |\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}, \quad (4.7)$$

полный импульс системы плазма—поле

$$I_1 = \int \{(\mathbf{A} \text{div } \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \text{div } \mathbf{A}) + n\mathbf{v} + |\mathbf{A}|^2 \mathbf{v}\} d\mathbf{r} \quad (4.8)$$

и гамильтониан системы

$$I_2 = \int \{|\text{div } \mathbf{A}|^2 + \varepsilon_0 |\mathbf{A}|^2 - n(\mathbf{A})^2 + n^2/2 + (\mathbf{v})^2/2\} d\mathbf{r}, \quad (4.9)$$

который нужно добавить к  $I_0$ , чтобы получить полную энергию ленгмюровских колебаний

$$W = I_0 + I_2 = \text{const.}$$

В интегралы (4.8) и (4.9) входит скорость низкочастотных движений  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , определяемая из условия

$$\partial n / \partial t + \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (4.10)$$

Отметим сразу, что в дальнейшем будем различать два предельных (по скорости изменения величин) случая — «дозвуковой» и «сверхзвуковой». При медленных, дозвуковых скоростях, реализующихся либо в слабых полях  $|\mathbf{A}| \ll u$ , либо вблизи стационарных состояний, можно пользоваться приближением локальной нелинейности

$$n = -|\mathbf{A}|^2, \mathbf{v} = 0. \quad (4.11)$$

В обратном предельном случае  $|\mathbf{v}| \gg u$  можно в уравнении (4.6) пренебречь членом, ответственным за звуковой перенос плотности.

При наличии поля накачки  $F_0(t) \neq 0$  сохраняющимися величинами являются импульс системы (4.11) и интеграл  $I_2$ , выражение для которого получим, если дополним (4.9) членом  $(\mathbf{F}_0 \dot{\mathbf{A}}^* + \mathbf{F}_0^* \dot{\mathbf{A}})$ , а вместо закона сохранения числа ленгмюровских квантов можно написать некоторое интегральное соотношение эволюционного типа для  $I_0$

$$\partial I_0 / \partial t = i \mathbf{F}_0 [\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}^*(\mathbf{r})] \text{div } \mathbf{v} - \nu I_0. \quad (4.12)$$

Здесь мы учли также мнимую часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon_m = -i\nu$ , ответственную за диссипацию энергии. Разумеется, соотношение (4.12) может быть полезно лишь при наличии информации о характере решения, а с помощью интегралов (4.7)—(4.9) можно оценить по начальным условиям некоторые характеристики свободной ленгмюровской турбулентности, не прибегая к численному решению системы уравнений.

Прежде чем переходить к исследованию нелинейной стадии параметрических неустойчивостей гидродинамического типа, воспроизведем кратко известные результаты анализа дисперсионных характеристик малых возмущений в присутствии сильного ВЧ-поля\*. Дисперсионное уравнение легко получить из системы уравнений (4.1), (4.2), если положить

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(-ik_0 r) + E_1 \exp(i\Omega t - ik_1 r), \quad (4.13)$$

$$n = n_0 \exp(i\Omega t - ik_1 r),$$

где  $E_1 \ll E_0$ ,  $\Omega = \omega_0 - \omega_1(k_1)$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1$ ,  $\omega_1(k_1) = \omega_{pe}(1 + 3/2 k_1^2 r_d^2)$ . В результате имеем

$$\Omega^2 = [\omega_0 - \omega_1(k_1)] [\omega_0 - \omega_1(k_1) + \omega_p (kE_0/E_p)^2 (k^2 - \Omega^2/v_s^2)^{-1}]. \quad (4.14)$$

\* Подробный анализ «линейных» характеристик параметрической неустойчивости содержится в монографии [104] и обзоре [105].

Это уравнение справедливо в случаях, когда накачкой является либо электромагнитная волна с квазиоднородным электрическим полем ( $|\mathbf{k}_0| \ll |\mathbf{k}_1|$ ), либо плазменная волна ( $\omega_0 = \omega_{pe} [1 + 3/2k_0^2 r_d^2]$ ).

Рассмотрим решения (4.14) в наиболее характерных предельных случаях. В неизотермической плазме  $T_e \gg T_i$  и при достаточно малых амплитудах накачки  $E_0^2/8\pi NT_e \ll kr_d \sqrt{m/M}$  реализуется обычная распадная неустойчивость [115]. Ее инкремент равен

$$\gamma = 1/2 \omega_p (m/M)^{1/4} (E_0^2/8\pi NT_e)^{1/2} (kr_d)^{1/2} \cos \theta, \quad (4.15)$$

$\theta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0)$ , и достигает максимального значения при  $\theta = 0$  и  $k = [(2/3)(\omega_0 - \omega_p)/\omega_p]^{1/2} r_d^{-1}$  в случае однородного поля и  $k = 2k_0$  (обратное рассеяние) в случае ленгмюровской волны с  $k_0 r_d > \sqrt{m/M}$ .

Если  $(E_0^2/8\pi NT_e) > \sqrt{m/M} kr_{de}$ , имеет место модифицированная распадная неустойчивость [115—118], максимальный инкремент которой равен

$$\gamma = (\sqrt{3}/2) \omega_{pe} (k^2 E_0^2 \cos^2 \theta / 4\pi NM \omega_{pe}^2)^{1/3}. \quad (4.16)$$

Наконец, в случае однородного электрического поля накачки с частотой  $\omega_0 \leq \omega_{pe}$  реализуется так называемая модуляционная (аперiodическая) неустойчивость [96, 103, 104], аналогичная рассматривавшейся ранее самофокусирующей неустойчивости электромагнитной волны. Область существования этой неустойчивости определяется условием  $3k_*^2 r_d^2 < E_0^2/4\pi NT_e$ , а максимальный инкремент и оптимальная пространственная частота  $k_*$  определяются следующими соотношениями:

$$E_0^2/8\pi NT_e \ll m/M; \quad 3k_*^2 r_d^2 = E_0^2/8\pi NT_e; \\ \gamma_{\max} = \omega_p E_0^2/16\pi NT_e; \quad (4.17)$$

$$E_0^2/8\pi NT_e \gg m/M; \\ 3k_*^2 r_d^2 = 4(E_0^2 m/24\pi NT_e M)^{2/3}; \\ \gamma_{\max} = 2\omega_p (mE_0^2/24\pi NT_e M)^{1/2}. \quad (4.18)$$

Приведенные выше соотношения справедливы и при наличии диссипации, если амплитуда поля накачки значительно превышает некоторое пороговое значение. В неизотермической плазме наименьшим порогом обладает распадная неустойчивость, для которой пороговое поле определяется соотношением [103, 104]

$$E_{\text{пор}}^2 = 128\pi NT_e \gamma_i \gamma_s / \omega_p \omega_s, \quad (4.19)$$

$\gamma_i$  и  $\gamma_s$  — декременты затухания ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний. Для модуляционной неустойчивости пороговое поле значительно выше

$$E_{\text{пор}}^2 = 16\pi N (T_e + T_i) \gamma_i / \omega_p. \quad (4.20)$$

## § 4.2. Многоволновые распадные процессы

Исследование процессов насыщения параметрической неустойчивости начнем с умеренных амплитуд накачки  $E_0^2/8\pi NT_e < kr_d \sqrt{m/M}$ , при которых в неизоотермической плазме реализуется распадная неустойчивость, связанная с возбуждением собственных ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний. Рассмотрим возможность стабилизации неустойчивости в результате спектральной перекачки плазменных колебаний в область столкновительной диссипации. Стабилизация такого типа исследовалась в ряде работ [119—122] в предположении, что основным процессом спектральной перекачки плазмонов является индуцированное рассеяние на ионах. Это предположение, позволяющее пользоваться кинетическими уравнениями для волн, оправдано в изотермической плазме, в которой индуцированное рассеяние является, по существу, единственным нелинейным процессом (в рамках приближения слабой турбулентности). В неизоотермической плазме более низким порогом обладают распадные процессы, которые в случае когерентной накачки могут иметь динамический характер, т. е. при их исследовании необходим учет фазовых соотношений взаимодействующих волн. Ниже приведены результаты решения модельной задачи о стабилизации параметрической неустойчивости когерентных плазменных колебаний в результате динамической распадной перекачки их энергии в область диссипации [123].

Рассмотрим тонкий слой плазмы, помещенный в однородное ВЧ-поле  $E = E_0 \exp(i\omega t)$  с вектором электрического поля, параллельным границе слоя, и частотой, близкой к плазменной  $\omega_0 \simeq \omega_{pe}$ . При  $E_0 > E_{\text{пор}}$ , где  $E_{\text{пор}}$  определяется формулой (4.20), в плазме в результате распадной неустойчивости возбуждаются высокочастотная плазменная ( $\omega_0, \mathbf{k}_0$ ) и низкочастотная ионно-звуковая ( $\Omega_1, \kappa_1$ ) волны, распространяющиеся в направлении  $E_0$ , причем выполнены условия синхронизма:

$$\omega = \omega_0 + \Omega_1, \quad \mathbf{k}_0 = -\kappa_1. \quad (4.21)$$

Нарастающая высокочастотная волна в свою очередь может распадаться на встречную и новую низкочастотную волну ( $\Omega_2, \kappa_2$ ):

$$\omega_0 = \omega_1 + \Omega_2, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \kappa_2. \quad (4.22)$$

Затем в результате последующих распадов и слияния высокочастотных и низкочастотных волн могут появиться волны с частотами  $\omega_{\pm n} = \omega_0 \pm n\Omega$  ( $n$  — целое число) и соответствующими волновыми векторами  $\mathbf{k}_{\pm n} = \mathbf{k}_0 + n\kappa_2$ . Эти высокочастотные волны также являются собственными колебаниями плазмы\*, если выполнено условие  $k_0 r_d \gg \gg (2n/3)\sqrt{m/M}$ , т. е. при этом условии «распадная» перекачка плазмонов по спектру может осуществляться при посредстве одной низкочастотной волны.

\* Мы не учитываем вынужденных плазменных колебаний, возникающих на комбинационных частотах при взаимодействии с низкочастотной волной ( $\Omega_1, \kappa_1$ ).

Исходную систему уравнений для комплексных амплитуд взаимодействующих волн представим в виде

$$da_0/d\tau = -a_0 + \bar{F}b_1^* + a_1b_2^* - a_{-1}b_2; \quad (4.23)$$

$$da_n/d\tau = -a_n + a_{n+1}b_2^* - a_{n-1}b_2; \quad (4.24)$$

$$db_1/d\tau = -\delta_1 b_1 + \bar{F}a_0^*; \quad (4.25)$$

$$db_2/d\tau = -\delta_2 b_2 + \sum_n a_{n+1} a_n^*. \quad (4.26)$$

Здесь  $a_n = u_n \beta / \gamma_0$ ,  $b_n = v_n \beta / \gamma_0$ ,  $\bar{F} = u_n \beta / \gamma_0$ ,  $u_n$ ,  $v_n$ ,  $u_n$  — соответственно амплитуды высокочастотных и низкочастотных волн и волны накачки;  $\tau = \gamma_0 t$  — безразмерное время;  $\delta_n = \Gamma_n / \gamma_0$ ,  $\gamma_n = \gamma_0$  и  $\Gamma$  — декременты затухания высокочастотных и низкочастотных волн;  $\beta$  — коэффициент распадного взаимодействия, который считаем не зависящим от номера  $n$ .

Система уравнений (4.3)—(4.6) отличается от консервативной системы, рассмотренной в [124], наличием отрицательного поглощения в нулевой гармонике и диссипации во всех остальных волнах. Эту систему можно использовать как модельную и в других задачах о стабилизации неустойчивости когерентных колебаний путем «распадной» перекачки по спектру.

Анализ решений (4.23)—(4.26) показывает, что эта упрощенная система не имеет стационарных решений, т. е. суммарная энергия высокочастотных волн неограниченно растет во времени  $\sum_n |a_n|^2 \rightarrow \infty$ .

Поэтому для выяснения возможности стабилизации параметрической неустойчивости необходимо учесть дополнительные факторы, такие как зависимость коэффициентов взаимодействия  $\beta_n$  от номера гармоники, нарушения синхронизма взаимодействующих волн, зависимость декрементов затухания волн от амплитуды и т. д. Какой из этих факторов является определяющим, зависит от конкретной физической системы, которой сопоставлены модельные уравнения. В рассматриваемом нами случае распадной неустойчивости ленгмюровских колебаний наиболее существен учет взаимодействия низкочастотных волн, так как в силу кинематических условий (4.21) и (4.22) ионно-звуковая волна  $b_2$  является второй гармоникой волны  $b_1$ :  $k_2 = 2k_1$ ,  $\Omega_2 = 2\Omega_1$ . Учитывая это взаимодействие и вводя производящую функцию  $\Phi = \sum_n a_n \exp(in\psi)$ , получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi/d\tau &= -\Phi + \bar{F} b_1^* + b_2^* \Phi \exp(-i\psi) - b_2 \Phi^* \exp(i\psi); \\ db_1/d\tau &= -\delta_1 b_1 + \bar{F} \langle \Phi^* \rangle - \mu_1 b_1^* b_2, \\ db_2/d\tau &= -\delta_2 b_2 + \langle \Phi \Phi^* \exp(-i\psi) \rangle + \mu_2 b_1^2. \end{aligned} \right\} (4.27)$$

Здесь скобки  $\langle \quad \rangle$  обозначают усреднение по  $\psi$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — коэффициенты нелинейного взаимодействия.

Аналитические выражения для стационарных состояний системы (4.27) можно получить лишь в некоторых предельных случаях.

а. При условии  $\mu_1 \overline{F^2} / 2\delta_1^2 \ll 1$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} |b_1|^2 &= \sqrt{F^4 - \delta_1^2} \delta_2 / 2\mu_2 \delta_1; \\ |b_2|^2 &= (F^4 - \delta_1^2) / 4\delta_1^2; \\ |a_n|^2 &= (\delta_1 \delta_2 / 8\mu_2) (\sqrt{F^4 - \delta_1^2} / F^2) [(F^2 - \delta_1) / (F^2 + \delta_1)]^{|n|}, \end{aligned} \right\} (4.28)$$

т. е. спектр симметричен относительно нулевой гармоники  $n = 0$  и быстро спадает при увеличении  $|n|$ . Учитывая конкретные выражения для коэффициентов нелинейного взаимодействия

$$\left. \begin{aligned} \beta_l &= e\omega_{pe} / 8k_0 T_e, \quad \beta_s = ev_s k_0^2 / 4m\omega_p^2, \\ \mu_1 &= \kappa_1 r_d \sqrt{m/M}, \quad \mu_2 = \mu_1 / 16, \end{aligned} \right\} (4.29)$$

можно в случае амплитуд накачки, близких к пороговой ( $F^2 - \delta_1^2 \ll \delta_1$ ), из (4.28) получить следующее выражение для полной энергии высокочастотных волн:

$$W_{\Sigma} / NT_e = (\pi m / M) (E_{\text{нак}} / E_{\text{пор}} - 1)^{1/2}. \quad (4.30)$$

б. При сильном превышении над порогом ( $F^2 \gg \delta_1$ ) и дополнительных условиях  $\sqrt{\mu_1} \overline{F} / \delta_1 \gg 1$ ,  $\overline{F^2} \gg \mu_1$ , получаем

$$|a_n|^2 = (\delta_2 \sqrt{\mu_1} \overline{F} / 8\sqrt{2}\mu_2) (1 - 2\sqrt{\mu_1} / F)^{|n|}, \quad (4.31)$$

$$W_{\Sigma} / NT_e = 4\sqrt{2\pi} (\omega_p / \gamma_0) \sqrt{m/M} E_{\text{нак}}^2 / 16\pi NT_e. \quad (4.32)$$

Численное решение задачи Коши для системы уравнений (4.27) показало, что с течением времени решения приближаются к найденным выше стационарным состояниям. Временной ход амплитуд существенно зависит от соотношения начальных фаз низкочастотных волн и нулевой гармоники, однако в процессе взаимодействия фазы волн упорядочиваются, и в области выхода на стационар устанавливается определенное соотношение фаз.

Выражения для стационарных значений амплитуд плазменных и ионно-звуковых волн определены выше в предположении, что амплитуда волны накачки является заданной. Самовоздействие волны накачки можно учесть, если предположить, что электромагнитная волна с групповой скоростью распространяется в плазме, характеризуемой эффективной частотой столкновений, которую можно определить, приравняв потери энергии электромагнитной волны диссипации энергии, соответствующей стационарному состоянию плазменной турбулентности. В рассматриваемом случае при  $E_{\text{нак}} \gg E_{\text{пор}}$  величина  $\nu_{\text{эф}}$  испытывает насыщение и определяется соотношением

$$\nu_{\text{эф}} = \gamma_0 W_{\Sigma} / W_{\text{нак}} \rightarrow 2\sqrt{2\pi} \omega_{pi}. \quad (4.33)$$

Выражение (4.33) позволяет оценить аномальное поглощение электромагнитной волны умеренной интенсивности при распространении в слабонеоднородной неизотермической плазме вблизи области плазменного резонанса.



### § 4.3. Индуцированное рассеяние на ионах

В изотермической плазме, как известно, реализация распада электромагнитной волны на ленгмюровские и ионно-звуковые колебания невозможна из-за сильного бесстолкновительного затухания ионного звука. В такой плазме с  $T_e \simeq T_i$  наиболее низкороговой является параметрическая неустойчивость, связанная с индуцированным рассеянием на ионах. Пороговая амплитуда поля для этого типа неустойчивости определяется выражением [104]

$$E_{\text{пор}}^2 = 16\pi N (T_e + T_i) v_e \chi / \omega, \quad (4.34)$$

где  $\chi$  — численный коэффициент порядка 1, а максимальный инкремент роста ленгмюровских колебаний с волновым числом  $k_{\parallel} r_{de} = \sqrt{2/3} (\omega/\omega_p - 1)^{1/2}$  в квазиоднородном электрическом поле накачки с частотой  $\omega$  равен

$$\gamma_{\text{макс}} = \omega_p (T_i/T_e) [(k_{\parallel} E_0 / |k_{\parallel}|)^2 - E_{\text{пор}}^2] / 16 \pi N T_e. \quad (4.35)$$

Рассмотрим, как и в предыдущем параграфе, задачу о стабилизации неустойчивости за счет выноса колебаний в  $k$ -пространстве из области генерации в область поглощения. Основным механизмом спектральной перекачки ленгмюровских колебаний в изотермической плазме является тот же процесс индуцированного рассеяния на ионах.

Кинетическое уравнение, описывающее эволюцию плотности ленгмюровских колебаний в  $k$ -пространстве в заданном поле накачки, можно представить в виде

$$dW_k/dt = 2W_k (\gamma_k + \int G_{ll}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) W_{\mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1) + q_k, \quad (4.36)$$

где  $G_{ll}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$  — матричный элемент индуцированного рассеяния, общее выражение для которого мы здесь не приводим (см., например, [125]),  $\gamma_k = \gamma_m - \nu/2$ ,  $\gamma_m$  — инкремент неустойчивости,  $\nu$  — декремент столкновительного линейного затухания волн.

Рассмотрение характера решений уравнений (4.36), выполненное в [125, 126], показало, что из-за анизотропии инкремента неустойчивости (4.35) (инкремент максимален, если  $\mathbf{k}_{\parallel} \parallel \mathbf{E}_0$ ) устанавливаемоеся распределение оказывается существенно анизотропным и имеет вид тонких квазиодномерных струй в  $k$ -пространстве. Поэтому исследование конкретных характеристик спектров проводилось в [119—122] на основе одномерных уравнений.

Из результатов численного расчета уравнения (4.36) в одномерном случае следует, что спектр плазменных волн, возникающих в результате нелинейного взаимодействия, имеет узкие спектральные максимумы интенсивности, отстоящие друг от друга на расстоянии порядка диффузионного  $k_{\text{диф}} \simeq \omega_p/v_{Ti} \simeq r_d^{-1} \sqrt{m/M}$ . Это позволяет представить спектр плазменных волн в виде эквидистантной цепочки отдельных монохроматических линий (сателлитов), интенсивность которых убывает с ростом номера сателлита. Каждый из сателлитов взаимодействует лишь со своими непосредственными соседями. Перекачка имеет

сателлитный характер, лишь когда волновое число колебаний заметно превышает диффузионный размер  $k_l \gg k_{\text{диф}}$ , при этом взаимодействующие ленгмюровские колебания распространяются во встречных направлениях.

Система уравнений для интенсивностей сателлитов  $u_k = W_k/W_{t0}$ , нормированных на амплитуду накачки, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} du_0/dt &= (\gamma_m - \nu) u_0 - \gamma_m u_0 u_1; \\ du_n/dt &= -\nu u_n + \gamma_m u_n (u_{n-1} - u_{n+1}). \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Система уравнений (4.37) имеет простое стационарное решение:

$$u_n = 1 - (\nu/\gamma_0) n, \quad (4.38)$$

в котором полная плотность энергии просто связана с амплитудой волны накачки. В размерных переменных эта связь имеет вид

$$W_\Sigma = \sum_n W_n = W_{t0} E_{\text{нак}}^2/E_{\text{пор}}^2, \quad (4.39)$$

т. е. количество спектральных сателлитов и полная энергия возбуждаемых ленгмюровских колебаний пропорциональны превышению амплитуды накачки над порогом.

Численное решение нестационарной задачи, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений (4.37), показывает [119—122], что при умеренных превышениях амплитудой накачки порогового значения образуется рассмотренное выше стационарное состояние, а при больших превышениях над порогом вместо стационарного состояния возникает картина релаксационных колебаний интенсивности спектральных пиков, связанная с распространением в  $k$ -пространстве квазисолитонных распределений, рождающихся в области неустойчивости и бегущих в область поглощения (малых волновых чисел  $k$ ). Существование точных решений солитонного типа в системе уравнений (4.37) можно показать в случае отсутствия поглощения и накачки [126]. Оказывается, что дифференциально-разностное уравнение

$$du_n/dt = \gamma (u_{n-1} - u_{n+1}) u_n \quad (4.40)$$

имеет решение вида

$$u = u_0 + u_c \{1 - b + b \operatorname{ch} [\delta (\gamma t + n/s - \tau_0)]\}. \quad (4.41)$$

В случае больших превышений амплитудой солитона  $u_c$  фонового (шумового) уровня  $u_0$ :  $a = u_c/u_0 \gg 1$  — параметры  $b$ ,  $\delta$  и  $s$  определяются следующими соотношениями:

$$\delta = 2 u_c, \quad b^2 = (2a)^{-1}, \quad s = \delta/2 \ln a. \quad (4.42)$$

Численное исследование нестационарной ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой при распространении электромагнитной волны в неоднородном слое плазмы, было проведено в [127] с учетом изменения амплитуды накачки. Результаты расчетов показывают, что возбуждение ленгмюровских колебаний в разных сечениях слоя по-прежнему сопровождается релаксационными колебаниями спектральных пиков,

однако со временем эти осцилляции затухают и выходят на стационарное значение. Это связано с пространственным усреднением осцилляций, происходящим в результате «запутывания» фаз спектральных пиков колебаний, обладающих в разных областях неоднородной плазмы разными периодами осцилляций.

Возникающее квазистационарное поглощение электромагнитной волны накачки можно характеризовать с помощью эффективной частоты соударений, которую, как и в § 4.2, можно ввести, приравнявая потери энергии накачки диссипации энергии возбужденных ленгмюровских колебаний. В результате имеем

$$\gamma_{\text{эф}} \approx \gamma_0 = \nu E_{\text{нак}} / E_{\text{пор}}^2. \quad (4.43)$$

В заключение этого параграфа заметим, что приведенные результаты справедливы лишь в случае сравнительно малых амплитуд накачки. Необходимо, чтобы инкремент  $\gamma_m$  был мал по сравнению с частотой ионно-звуковых движений

$$\gamma \ll k_0 v_s. \quad (4.44)$$

Кроме того, спектральный интервал, в котором возбуждаются колебания, должен быть мал по сравнению с волновым числом:

$$\gamma_m / \nu \ll 2 k_0 r_d \sqrt{M/m}. \quad (4.45)$$

В противном случае энергия плазменных колебаний не успевает отводиться в тепло за счет соударений и начинает накапливаться в области малых масштабов. Диссипация колебаний при этом может происходить только в результате модуляционных и модифицированных распадных процессов.

#### § 4.4. Модифицированная распадная неустойчивость

Чтобы получить уравнения для амплитуд высокочастотных квазимонохроматических волн, описывающие нелинейную стадию модифицированных распадных неустойчивостей, можно воспользоваться усредненными кинетическими уравнениями (1.14) для электронов и ионов. Представим высокочастотное электрическое поле в виде суперпозиции квазимонохроматических волн с медленно меняющимися амплитудами:

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_n t - i\mathbf{k}_n \mathbf{r}). \quad (4.46)$$

Проводя в волновом уравнении усреднение по временным и пространственным периодам взаимодействующих волн, получим укороченные уравнения для амплитуд

$$\begin{aligned} & \partial \mathbf{E}_l / \partial t - (v_l \nabla) \mathbf{E}_l = \frac{\mathbf{R}}{\hline} \\ & = \sum_{n \neq l} (e^2 \mathbf{E}_n / 2im\omega_l) \int_{-\infty}^{\infty} dv f_e(\mathbf{V}, \mathbf{R}) \exp[i(\omega_l - \omega_n)t - i(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_n) \mathbf{r}]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь черта обозначает усреднение по всем пространственным периодам взаимодействующих волн  $2\pi/\kappa_{in}$ ,  $\kappa_{in} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_n$ .

В кинетическое уравнение (1.14) для усредненной по быстрому времени функции распределения электронов  $f_e$  входит низкочастотное кулоновское поле, возникающее в плазме из-за разделения зарядов и определяемое уравнением Пуассона. Мы рассмотрим лишь предельный случай плотной плазмы  $\kappa^2 r_D^2 \ll 1$ , в котором кулоновское поле приводит к компенсации ВЧ-силы, действующей на электроны. В этом случае можно воспользоваться условием квазинейтральности (подробности см. в [128])  $\int f_e dV = \int f_i dV$  и выразить интеграл в правой части (4.47) через функцию распределения ионов, движение которых описывается простым уравнением:

$$M dV/dt = -\nabla\Phi_e, \quad (4.48)$$

потенциал усредненной силы  $\Phi_e$  определяется первым слагаемым соотношения (1.7).

Особенности модифицированной распадной неустойчивости проще всего выяснять на примере взаимодействия двух квазисинусоидальных волн, одна из которых является волной накачки, а другая соответствует пробной волне с максимальным инкрементом.

Итоговую систему уравнений, описывающих такое взаимодействие, можно записать в удобном для анализа виде, если ввести действительные амплитуды и фазы волн  $\tilde{\mathcal{E}}_{1,2} = \tilde{\mathcal{E}}_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$  и перейти к следующим безразмерным переменным:

$$\Phi = \tilde{\mathcal{E}}_1 \tilde{\mathcal{E}}_2 / N_{10} \sqrt{\omega_1 \omega_2},$$

$$\theta = (M_1 - M_2)/M_{10}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tau = \gamma_N t, \quad (4.49)$$

где число квантов определено соотношением  $M_{1,2} = \tilde{\mathcal{E}}_{1,2}^2 \times [2\omega_{1,2} \partial(\omega^2 \epsilon)/\partial\omega^2]^{-1}$ ,  $M_{10}$  — начальное число квантов накачки,  $\gamma_N \alpha = \omega_1 (\kappa^2 e^2 \tilde{\mathcal{E}}_{10}^2 / 2m_e^2 \omega_1 \omega_2)^{1/3} (m_e/m_\alpha)^{1/3}$  — инкремент модифицированной распадной неустойчивости,  $\kappa = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|$ .

В результате для амплитуды ВЧ-потенциала на частоте биений и разностей чисел квантов и фаз взаимодействующих волн имеем уравнения [128]

$$\dot{\Phi} = \delta_\alpha \theta I_s,$$

$$\dot{\theta} = -4\delta_\alpha \Phi I_s, \quad \Phi \dot{\varphi} = \delta_\alpha \theta I_c. \quad (4.50)$$

В (4.50) входят интегралы по траекториям движения частиц  $\psi = \psi(\psi_0, V_0)$ ,  $\psi_0, V$  — начальные координаты и скорость частицы:

$$\left. \begin{aligned} I_c &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_0 \int_{-\infty}^{\infty} dV_0 f_\alpha(V_0) \cos(\psi + \varphi); \\ I_s &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_0 \int_{-\infty}^{\infty} dV_0 f_\alpha(V_0) \sin(\psi + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Эти траектории описываются обычным уравнением движения в поле усредненной ВЧ-силы:

$$\psi = -\delta_\alpha^{-1} \Phi \sin(\psi + \varphi). \quad (4.52)$$

Система уравнений (4.50) — (4.52) имеет универсальный вид и описывает нелинейную стадию индуцированного рассеяния на электронах ( $\alpha = e$ ) или ионах ( $\alpha = i$ ) — как кинетическую неустойчивость, так и модифицированные процессы. Для последних она зависит только от одного параметра  $\delta_\alpha = \omega_p^2 / 4\gamma_{N\alpha} \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ , величина которого и определяет характер насыщения неустойчивости. В случае  $\delta_\alpha \ll 1$ , который обычно реализуется в разреженной плазме  $\omega_p \ll \omega_1$ , основную роль играют эффекты захвата частиц (электронов или ионов соответственно) в нарастающую потенциальную яму электрического поля на частоте бнений; неустойчивость стабилизируется, когда частота колебаний захваченных частиц сравнивается с инкрементом неустойчивости (см. [128]).

В данном параграфе мы рассмотрим нелинейную стадию модифицированной распадной неустойчивости ВЧ-волны (электромагнитной или плазменной) на плазменную и ионно-звуковую, которой соответствует  $\delta_i \gg 1$ .

На рис. 12 приведены результаты численного решения уравнений (4.50) — (4.52) для значения  $\delta_i = 50$ . Видно, что сначала происходит почти полная перекачка энергии исходной волны накачки в пробную волну, а затем наступает обратная перекачка. Процесс носит почти периодический характер с начальным периодом, пропорциональным обратному инкременту  $T_0 \simeq 10 \gamma_N^{-1}$ . Со временем период уменьшается, что соответствует росту возмущений плотности  $\Delta n$  плазмы. Без учета теплового движения этот рост происходит неограниченно. Учет теплового движения приводит к ограничению роста  $\Delta n$  — амплитуда  $\Delta n$  достигает максимального значения и затем меняется периодически с периодом  $T_{\Delta n} \gg T_0$ .

Можно рассмотреть зависимость от времени амплитуд пространственных гармоник возмущений плотности

$$N_i = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_0 \int_{-\infty}^{\infty} dV_0 f_\alpha(V_0) \exp[ii\psi(\psi_0, V_0)]. \quad (4.53)$$

Характер этой зависимости определяется амплитудой накачки, точнее параметром  $\Gamma^2 = \omega_s^2 / \gamma_N^2$ ,  $\omega_s = \kappa v_s$ .

На рис. 13 приведен временной ход амплитуд первых трех гармоник возмущения плотности для двух значений  $\Gamma^2$ . Видно, что, как указывалось выше, зависимость от времени является немонотонной. В случае сильной накачки ( $\Gamma^2 = 0,01$ ) достаточно заметно проявляются высокие пространственные гармоники.

При умеренных амплитудах, когда генерацией пространственных гармоник можно пренебречь  $N_2 \ll N_1$ , систему уравнений (4.50) — (4.52) можно свести к квазигидродинамической, следующей из урав-

нений (4.5), (4.6) и рассматривавшейся в [129, 130]. В наших обозначениях эти уравнения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= -4\Phi\delta_{\alpha} N_s \sin \chi; & \dot{\Phi} &= \delta_{\alpha} \theta N_s \sin \chi; \\ \Phi\dot{\varphi} &= \theta\delta_{\alpha} N_s \cos \chi, & \chi &= \alpha_s + \varphi + (\omega_1 - \omega_2) t; \\ d^2 N_1/d\tau^2 + \Gamma^2 N_1 &= -1/2 \delta_{\alpha}^{-1} \Phi \exp[-i(\chi - \alpha_s)]; \\ N_1 &= N_s \exp(i\alpha_s). \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Анализ уравнений (4.54) с использованием представлений о характере процесса, следующих из приведенных выше численных расчетов,

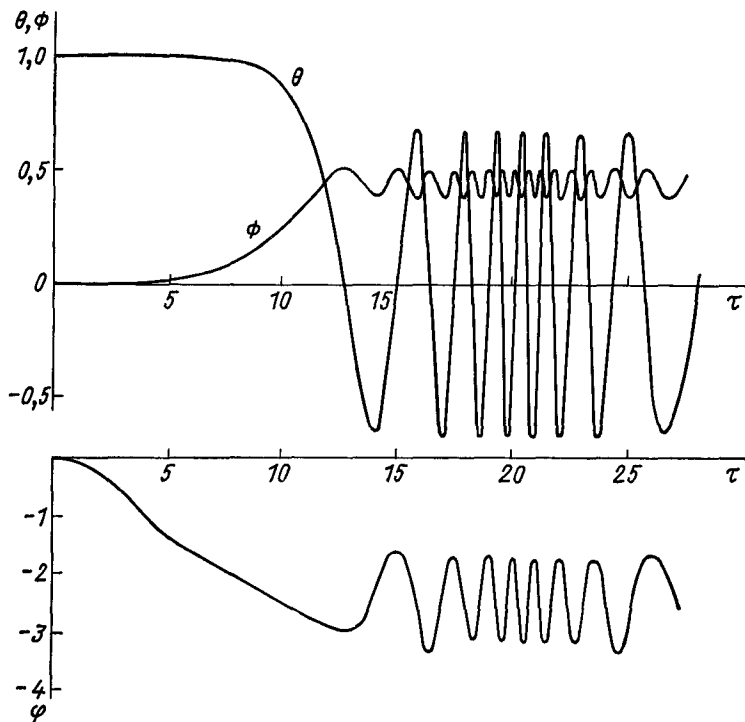


Рис. 12. Зависимости  $\theta(\tau)$ ,  $\Phi(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  при модифицированной распадной неустойчивости ( $\delta_s = 50$ )

показывает, что при взаимодействии разность числа квантов оказывается квазигармонической функцией  $\tau$ , амплитуда ВЧ-потенциала слабо осциллирует около некоторого среднего значения  $\bar{\Phi} = 1/2$ , а возмущение плотности также является периодической функцией времени, но по сравнению с осцилляциями  $\theta$  и  $\Phi$  существенно более медленной. Это позволяет получить приближенные аналитические решения (4.54). Не останавливаясь на подробностях, приведем оценку максималь-

ного возмущения плотности] [130]  $N_s = \Phi (\delta_\alpha \Gamma)^{-1}$ , имеющую в размерных переменных вид

$$\delta n = N_0 (E_0^2 / 8\pi N T_e). \quad (4.55)$$

Таким образом, модифицированная распадная неустойчивость приводит к росту возмущений плотности лишь до уровня, определяемого условием баланса давлений в стационарном состоянии.

Очевидно, что область применимости линейаризованных квазигидродинамических уравнений намного уже области применимости исходных кинетических уравнений (4.50) — (4.52). Однако в более силь-

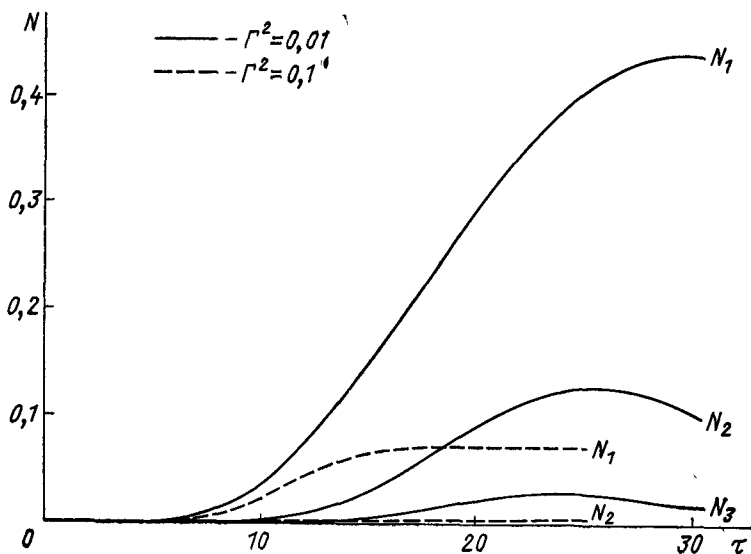


Рис. 13 Генерация пространственных гармоник возмущения плотности

ных полях необходим также выход за рамки двухмодового приближения и учет не только эффектов генерации пространственных гармоник возмущений плотности, но и эффектов генерации пространственных гармоник поля, приводящих к образованию распределений поля типа нелинейной волны. Подобные взаимодействия рассматриваются в следующем параграфе на примере нелинейной стадии модуляционной неустойчивости.

#### § 4.5. Динамика модуляционной неустойчивости

Известно, что в рамках теории слабой турбулентности ( $W/NT_e \ll \ll k^2 r_d^2$ ) нелинейное взаимодействие ленгмюровских колебаний, связанное с индуцированным рассеянием на ионах и распадами, приводит к уменьшению средней частоты излучения (даже в случае волн с регулярными фазами), т. е. к перекачке энергии колебаний в спектральную

область больших пространственных масштабов. В то же время численные эксперименты по исследованию ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой релятивистскими пучками электронов [131] или электромагнитными волнами [132—134] показали, что при  $W/NT_c \gg \gg k^2 r_d^2$  направление перекачки энергии изменяется — спектральная плотность энергии ленгмюровских колебаний от области неустойчивости  $k_0$  вплоть до области сильного бесстолкновительного поглощения  $k_{\text{макс}} \sim r_{de}^{-1}$  падает по степенному закону ( $\sim k^{-2}$ ). Такая перекачка в область малых масштабов может быть связана только с «кубической» нелинейностью, играющей основную роль при модуляционной и модифицированной распадной неустойчивости. Эта нелинейность приводит к генерации сфазированных пространственных гармоник исходных неустойчивых колебаний, а следовательно, к обужению (самофокусировке) пространственно периодических ленгмюровских колебаний и образованию динамических распределений типа нелинейных волн.

Характер динамики модуляционной неустойчивости и, в особенности, количественные характеристики образующихся на нелинейной стадии сгустков колебаний существенно зависят от размерности задачи. В данном параграфе мы подробно остановимся на результатах решения одномерной задачи, которая к настоящему времени исследована наиболее детально. К тому же, как показывают машинные эксперименты по моделированию плазмы в сильных ВЧ-полях (см., например, [135]) эффекты неоднородности, возникающие на нелинейной стадии неустойчивости, не искажают существенно квазиодномерности пространственной структуры возбужденных колебаний — обычно ширина сгустков колебаний в направлении электрического поля накачки мала по сравнению с масштабами в ортогональных направлениях.

Уравнения (4.5), (4.6), составляющие исходную систему уравнений для исследования нелинейной стадии гидродинамических параметрических неустойчивостей, в одномерном случае можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} -2i \partial A / \partial t + \partial^2 A / \partial x^2 + (\epsilon_0 - n) A &= F_0; \\ u^{-2} \partial^2 n / \partial t^2 - \partial^2 n / \partial x^2 &= \partial^2 / \partial x^2 |A|^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Уравнения (4.56), как и уравнения для электромагнитных волн, имеют точное решение, соответствующее ленгмюровскому солитону. В ряде работ [106, 107] в основу исследования процессов сильной ленгмюровской турбулентности была положена гипотеза о том, что на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости плазменные возмущения представляют собой газ слабовзаимодействующих ленгмюровских солитонов. Детальный обзор соответствующей теории приведен в [111].

Другая альтернативная возможность связана с наличием корреляции фаз нарастающих колебаний, приводящей к реализации динамических режимов модуляционной неустойчивости [98]. В этом случае определяющую роль играет взаимодействие сфазированных пространственных гармоник колебаний, возбуждению которых при парамет-



рической неустойчивости в области плазменного резонанса способствует, в частности, то обстоятельство, что в случае  $|k_t| \ll |k_l|$  одинаково эффективно возбуждаются две встречные плазменные волны  $|k_l^+| = |k_l^-|$ , образующие стоячую волну. Высокочастотная усредненная сила, создаваемая этой стоячей волной, служит источником генерации второй пространственной гармоники, та, в свою очередь, порождает третью гармонику и т. д. В результате образуются существенно нелинейные квазипериодические распределения ленгмюровских колебаний (цуги стоячих ленгмюровских солитонов) с периодом, соответствующим максимуму инкремента параметрической неустойчивости.

Для исследования нелинейной стадии модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний в отсутствие поля накачки ( $F_0 = 0$ ) система уравнений (4.56) решалась с начальным условием вида

$$\left. \begin{aligned} A(x, 0) &= A_0 + \sum_q A_q \cos(\pi q x), \quad |A_q| \ll A_0, \\ n(x, 0) &= n'_l(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

и периодическими краевыми условиями. При этом для удобства сопоставления результатов решения консервативной задачи ( $F_0 = 0$ ) со случаем  $F_0 \neq 0$  мы переписали первое уравнение (4.56), введя величину  $A_1(x, t) = A(x, t) - A_0$ , представляющую собой амплитуду поля плазменных колебаний за вычетом однородного поля  $A_0$ , и решали уравнение

$$-2i \partial A_1 / \partial t + \partial^2 A_1 / \partial x^2 - n A_1 = n A_0. \quad (4.58)$$

Типичные результаты вычислений для  $A_0 = 5$ ,  $A_{10} = 0,5$ , взятые из [98], приведены на рис. 14 и 15 (см. также работы [136, 137, 158]). Сначала происходит экспоненциальный рост пространственных гармоник поля, соответствующий формированию сильнонелинейных волн, который затем сменяется квазипериодическим режимом относительно некоторого стационарного уровня (см. рис. 14). Характерно, что, хотя первоначальное синусоидальное возмущение обладало двумя экстремальными точками на интервале интегрирования  $(-1, 1)$ , на нелинейной стадии формируется распределение поля, обладающее одним максимумом величины  $|A_1(x)|^2$ . По-видимому, это связано с тем, что вытеснение плотности из области, где возмущение  $A_1$  синфазно с однородным полем, приводит к накоплению плотности в области противофазного возмущения и тем самым к подавлению роста последнего.

Основные характеристики решений в консервативном случае можно оценить и аналитически, используя интегралы движения уравнений

(4.56) и предполагая на стадии насыщения нелинейность локальной. Так, в случае модуляционной неустойчивости имеем

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \int_{-l}^l |A_1 + A_0|^2 dx, \\ I_2 &= \int_{-l}^l (|\partial A_1 / \partial x|^2 - 1/2 |A_0 + A_1|^4) dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

Первый интеграл позволяет оценить сверху среднюю плотность энергии возмущения

$$\bar{W} = (2l)^{-1} \int_{-l}^l |A_1(x)|^2 dx \leq 4A_0^2, \quad (4.60)$$

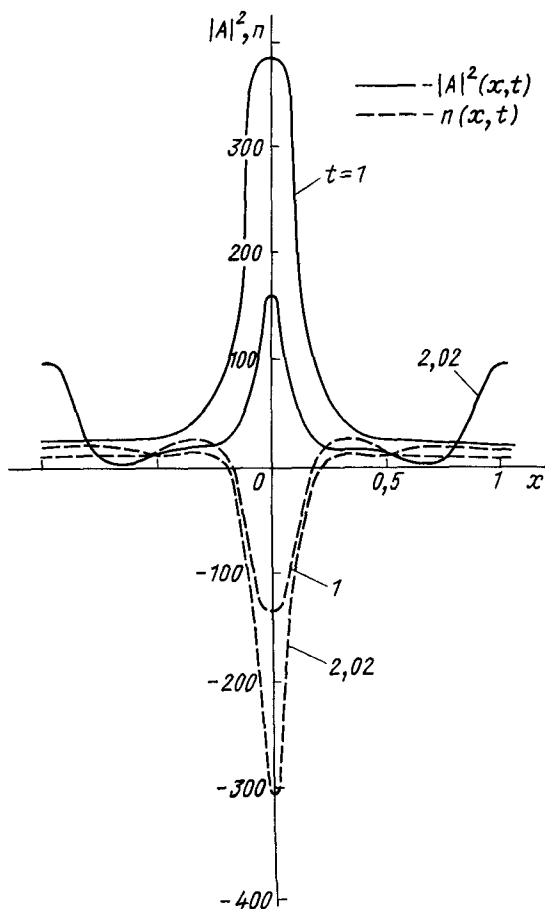


Рис. 14 Зависимость  $|A(x, t)|^2, n(x, t)$  при модуляционной неустойчивости в консервативной системе

а из второго, используя известное неравенство

$$|A_{\text{макс}}|^2 \leq 2 \left[ \int |A|^2 dx \int (d|A|/dx)^2 dx \right]^{1/2}, \quad (4.61)$$

можно получить строгую оценку для максимальной амплитуды поля колебаний

$$|A_{1\text{макс}}|^2 \leq 2A_0^4 l^2 [1 + O(A_0^{-2} l^{-2})]. \quad (4.62)$$

Из (4.61), (4.62) имеем также оценку для максимального волнового числа в спектре ленгмюровских колебаний при модуляционной неустойчивости:

$$k_{\text{макс}} / k_* \simeq l/l_{\text{мин}} \approx A_0^2 l^2 \simeq (E_0^2 / 8\pi N T_e) (k_* r_d)^{-2}, \quad (4.63)$$

находящуюся в неплохом согласии с результатами численного расчета.

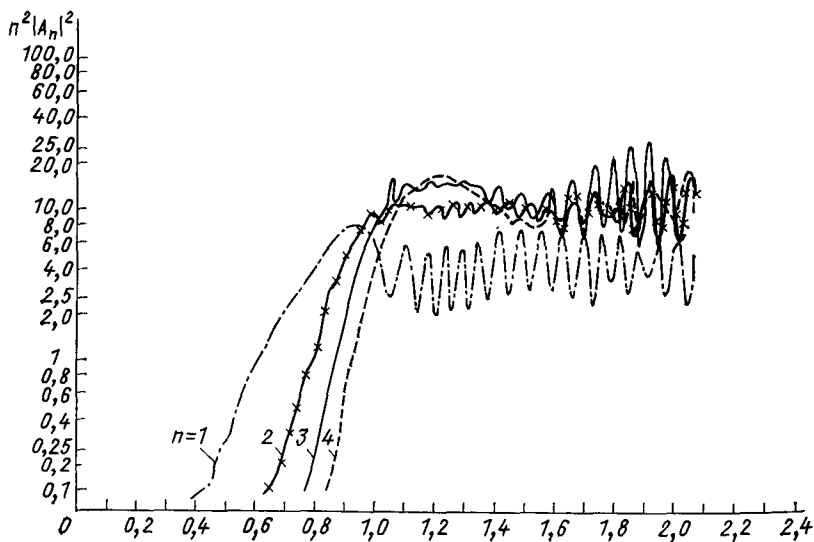


Рис 15 Зависимость от времени пространственных гармоник поля в консервативной системе

Таким образом, на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости происходит обогащение спектра плазменных колебаний высокими пространственными гармониками и формируются нелинейные «квазистоячие» распределения плазменных колебаний\*. Учитывая связь оптимального масштаба модуляционной неустойчивости  $k_*$  с амплитудой  $E_0$ , определяемую формулами (4.17), (4.18), можно, в частности, получить условие достижения колебаниями области сильного затухания Ландау  $k_{\text{макс}} r_d \simeq 1$ :  $E_0^2 / 8\pi N T_e > (m/M)^{1/2}$ .

\* О формировании стоячих распределений плазменных колебаний на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости свидетельствуют и результаты численного моделирования плазмы методом «макрочастиц» [132—134].

В неконсервативном случае ( $F_0 \neq 0$ ) возможно рассмотрение двух различных физических ситуаций — можно исследовать нелинейную стадию модуляционной неустойчивости либо в предположении заданного поля накачки  $E_0 = \text{const}$ , либо в предположении заданной электрической индукции  $F_0 = \text{const}$ . Задача в первой постановке, более адекватной для случая возбуждения ленгмюровских колебаний потоками электронов, рассматривалась в работах [110, 137—140]. Мы остановимся более подробно на исследовании нелинейной стадии в предположении  $F_0 = \text{const}$ , так как этот случай соответствует задаче о возбуждении плазменных колебаний полем сильной электромагнитной волны.

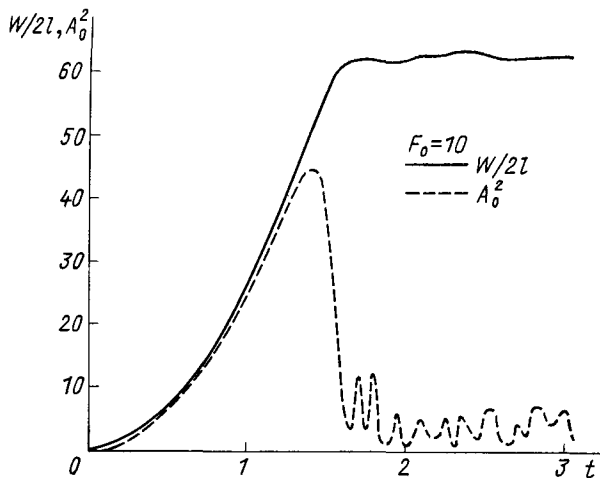


Рис 16 Зависимость полной энергии электрического поля  $W/2l$  и амплитуды однородного поля  $A_0^2$  в системе с заданной накачкой

Численное решение системы уравнений (4.56) с начальными условиями (4.58) при  $F_0 = \text{const}$  показывает [141], что в этом случае картина нелинейной стадии модуляционной неустойчивости аналогична наблюдающейся в консервативном случае. Сначала происходит премущественный рост однородной компоненты электрического поля до величины, определяемой стационарным решением уравнений (4.56):  $A_0 = F_0^{1/3}$ . При этом система выходит из резонанса с накачкой из-за возникновения нелинейной расстройки частоты  $\sim A_0^3$ , на последующей стадии происходит увеличение «модуляционной» (мелкомасштабной) составляющей поля и формирование солитонной структуры без изменения полной энергии электрического поля. Для оценок параметров образующихся солитонов можно, следовательно, воспользоваться консервативными оценками (4.62), (4.63), в которых под  $A_0$  следует понимать амплитуду квазиоднородного поля электромагнитной волны накачки  $F_0^{1/3}$ .

На рис. 16, 17 приведены зависимости полной энергии и амплитуды однородного поля от времени при  $F_0 = 10$ , а также пространственные распределения электрического поля и возмущений плотности в моменты  $t_1 = 2,0$  и  $t_2 = 2,8$ . Видно, что распределение электрического поля представляет собой вид последовательности равно отстоящих солитонов с заметно различающимися амплитудами, причем расстояние между солитонами соответствует оптимальному масштабу модуляционной неустойчивости.

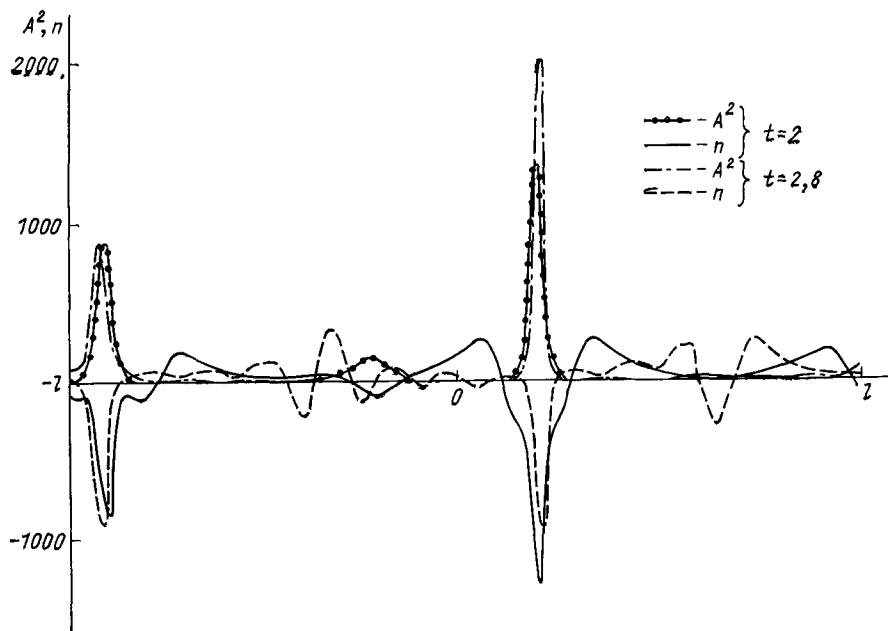


Рис. 17. Пространственные распределения  $|A(x)|^2$  и  $n(x)$  в системе с заданной накачкой

Введение слабого затухания в уравнение (4.56) при умеренных амплитудах накачки, соответствующих условию  $E_0^2/8\pi NT_e \ll 1$ , не приводит к существенному изменению картины. Это обстоятельство может служить дополнительным обоснованием используемого подхода, при котором предполагается, что спектры ленгмюровских колебаний формируются в результате гидродинамического взаимодействия, а ускорение частиц можно рассчитывать, полагая характеристики плазменных колебаний известными.

Ускорение частиц солитонной ленгмюровской турбулентностью рассматривалось в довольно большом числе работ (подробности см. в обзоре [111]). Укажем лишь специфическую особенность функции распределения ускоренных электронов, которая может возникнуть в динамическом режиме модуляционной неустойчивости. Очевидно,

что в одномерном пространственно периодическом поле  $E = E(x) \cos \omega_p t$ , соответствующем периодическому набору солитонов, должна происходить группировка быстрых частиц по скоростям в окрестности фазовых скоростей бегущих кратных пространственных гармоник  $v_{\Phi} = \omega_p / qk_*$ ,  $q$  — номер гармоники. Подобные группы ускоренных электронов наблюдались в экспериментах по параметрической неустойчивости [142, 143], моделировавших одномерную ситуацию — электрическое поле накачки в этих экспериментах было параллельно слабому ( $\omega_{He} \ll \omega_{pe}$ ) постоянному магнитному полю. Оценки, приведенные в [143], показывают, что эти группы могут рассматриваться как косвенное свидетельство реализации динамического режима взаимодействия.

#### § 4.6. О просветлении плазмы при модуляционной неустойчивости

Образование динамических распределений стоячих плазменных колебаний сопровождается расслоением первоначально непрозрачной плазмы ( $\epsilon_0 < 0$ ), приводящим к созданию знакопеременной структуры диэлектрической проницаемости (в пучностях поля плазменных колебаний  $\epsilon_0 > 0$ ). Такая слоистая структура с масштабами, много меньшими длины электромагнитной волны, может быть прозрачной для исходной волны накачки, так как слои перпендикулярны электрическому полю волны.

Принципиальную возможность такого механизма можно проиллюстрировать с помощью решения линейной задачи о распространении волн в стратифицированной (перпендикулярно оси  $x$ ) среде, состоящей из периодического набора плазменных слоев двух типов: диэлектрическая проницаемость слоя, толщиной  $a$ , положительна  $\epsilon_a > 0$ , а диэлектрическая проницаемость слоя, толщиной  $L$ , отрицательна  $\epsilon_L < 0$ . Для неоднородных монохроматических плоских волн, распространяющихся в такой системе в направлении  $z$ , с составляющими электрического поля вида  $E_x(x) \exp(-i h z)$ ,  $E_z(x) \exp(-i h z)$ , решая задачу стандартным путем, получаем дисперсионное уравнение для постоянной распространения, из которого в пределе квазистатически тонких слоев имеем условие существования распространяющихся волн  $h^2 > 0$ :

$$\epsilon_a > |\epsilon_L| a/L. \quad (4.64)$$

Следовательно, в плотной плазме при наличии не очень значительной модуляции  $\epsilon$  (даже при  $a \ll L$  и  $\epsilon_a \ll |\epsilon_L|$ ) возможно распространение электромагнитной волны  $TM$ -типа. Электрическое поле такой волны обладает небольшой продольной составляющей  $E_z \ll E_x$ , а групповая скорость может существенно отличаться от скорости света в вакууме ( $h \gg k_0$ ).

Рассмотрим подробнее нелинейную задачу [114] о нормальном падении плоской электромагнитной волны на слабо неоднородный слой плазмы с невозмущенной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0(z)$  и

концентрацией электронов в максимуме слоя, превышающей критическую  $\epsilon_0(z = z_0) = \epsilon_m < 0$ . Предположим, что в начальный момент в плазме устанавливается обычное «линейное» распределение поля электромагнитной волны с максимальным значением амплитуды поля  $E = E_m$  вблизи точки отражения  $\epsilon_0 = 0$ , а затем развивается модуляционная неустойчивость, приводящая к расслоению плазмы. Будем полагать, что характерный масштаб (период) расслоения всюду в области неустойчивости совпадает с масштабом (4.18) наиболее быстро растущего возмущения  $L_* = 2\pi/k_* = 2\pi r_d [mE_m^2/3ME_p^2]^{-1/3}$ . За время развития неустойчивости  $\tau \simeq 10 \gamma^{-1} \simeq 5 \omega_p^{-1} (mE_m^2/3ME_p^2)^{-1/2}$  волна проходит в глубь плазмы на расстояние порядка толщины скин-слоя. Процесс расслоения происходит и в последующих скин-слоях и приводит либо к просветлению плазмы, либо к сдвигу области отражения в столь плотную плазму, для которой перестает выполняться условие модуляционной неустойчивости плазменных колебаний с длиной волны  $L_*$ .

Для количественного описания процесса просветления воспользуемся изложенной выше процедурой и рассмотрим решение уравнения (4.1), введя понятие эффективной диэлектрической проницаемости (средней по быстрым пространственным осцилляциям)

$$\epsilon_{\text{эф}} = [\bar{E}(D_x)/D_x]^{-1}. \quad (4.65)$$

Тогда задача определения среднего поля (поля электромагнитной волны) сведется к решению одномерного уравнения

$$- (2i\omega/c^2) \partial \bar{E}/\partial t + k_0^2 \epsilon_{\text{эф}} \bar{E} + \partial^2 \bar{E}/\partial z^2 = 0. \quad (4.66)$$

Заметим, что правая часть (4.65) также зависит через уравнение (4.66) от  $\epsilon_{\text{эф}}$ , поэтому соотношение (4.65) является функциональным соотношением для определения  $\epsilon_{\text{эф}}$ . Очевидно, электромагнитная волна распространяется в области  $\epsilon_{\text{эф}} > 0$ .

Для получения оценки характерных параметров просветления рассмотрим стационарное решение уравнений, которое позволяет оценить снизу уровень ленгмюровских колебаний (см. § 4.1). Квазистатическое уравнение для плазменных колебаний в этом простейшем случае можно представить в виде

$$d^2 v/d\xi^2 - v + v^3 = 0, \quad (4.67)$$

где введены безразмерные переменные  $v = |\epsilon|^{-1/2} E$ ,  $\xi = \sqrt{|\epsilon_0|} x/\sqrt{3} r_{de}$ ,  $v_0 = |\epsilon|^{-3/2} k_0^{-2} \partial^2 E/\partial z^2$ ,  $\epsilon = \epsilon_0 + v^2$ .

Структура фазовой плоскости уравнения (4.67) определяется лишь параметром  $v_0$ . Интересующее нас решение существует при  $v_0 > v_{\text{кр}} = 2/3\sqrt{3}$  и может быть представлено через эллиптические функции, однако записать в удобном аналитическом виде выражение для  $\epsilon_{\text{эф}}$  во всей области  $v_0 > v_{\text{кр}}$  не удастся. Поэтому рассмотрим решение (4.67) вблизи границы модуляционной неустойчивости ( $v_0 \gtrsim v_{\text{кр}}$ ), где

оно имеет вид периодической последовательности узких пиков (типа лоренцевой кривой), по форме близких к уединенному решению (сепаратрисе при  $v_0 = v_{кр}$ ):

$$v = -1/\sqrt{3} + 4/[\sqrt{3}(1 + 2/3 \xi^2)] \quad (4.68)$$

с периодом, равным оптимальному масштабу модуляционной неустойчивости  $\bar{L} = \sqrt{|\varepsilon|/3} L_*/r_{de}$ . Усредняя это распределение по периоду, получаем

$$\bar{v} = -1/\sqrt{3} + 4/(\sqrt{3}\bar{L}) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + 2\xi^2/3) = -1/\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\pi/\bar{L}. \quad (4.69)$$

Переходя к размерным переменным и отыскивая в соответствии с (4.65) выражение для  $\varepsilon_{эф}$ , получаем, что вблизи порога модуляционной неустойчивости [114]

$$\varepsilon_{эф} = |\varepsilon_0(z)|^{3/2} [4(mE_m^2/3ME_p^2)^{1/3} - |\varepsilon_0|^{1/2}]^{-1}. \quad (4.70)$$

Следовательно, условие просветления ограниченного плазменного слоя можно представить в виде

$$E_m^2/16\pi N(T_e + T_i) > (2M/m)^{1/2} |\varepsilon_m|^{3/2}/64, \quad (4.71)$$

где  $\varepsilon_m$  — значение  $\varepsilon$  в максимуме слоя. Величину  $E_m$  можно связать с амплитудой падающей из вакуума волны  $E_0$ . Например, если точка  $\varepsilon = 0$  далека от максимума слоя, можно воспользоваться решением для линейного слоя  $\varepsilon_0 = 1 - z/l$ :  $E_m = 3,6(k_0l)^{1/3} E_0$ ,  $l$  — характерный размер неоднородности невозмущенной плазмы в окрестности  $\varepsilon_0 = 0$ .

Предлагаемый механизм нелинейного просветления бесстолкновительной плазмы позволяет удовлетворительно объяснить наблюдавшиеся в экспериментах [144—146] особенности взаимодействия — в первую очередь, малость времени установления прозрачности и ее поляризационную анизотропию, а также наличие групп быстрых частиц и существование спектральных сателлитов.

Необходимо подчеркнуть, что описанная выше картина реализуется лишь на начальной стадии взаимодействия ограниченных волновых пучков с плазмой, на которой не играют роли эффекты макроскопического перераспределения плотности плазмы во всей области, занятой полем. При больших временах будет реализоваться волноводный режим просветления плазмы, близкий к описанному в гл. 2, но несколько видоизмененный из-за возбуждения параметрических неустойчивостей. Этот режим, по-видимому, должен иметь принципиально нестационарный характер, так как перераспределение плазмы, связанное с ее аномальным бесстолкновительным нагревом, должно оказывать стабилизирующее влияние на источник нагрева — параметрические неустойчивости.



## § 4.7. О самосжатии неодномерных распределений ленгмюровских колебаний

При обсуждении динамики модуляционных процессов мы ограничивались рассмотрением одномерной модели, которая адекватно описывает процессы в плазме в сильном постоянном магнитном поле. В изотропной плазме при наличии выделенного направления поля накачки на начальной стадии взаимодействие также должно иметь квазиодномерный характер. Из численных экспериментов [135, 138] следует, что неодномерные эффекты, связанные с модуляционной неустойчивостью одномерных солитонов [61, 147], проявляются за большие времена и не искажают существенно квазиодномерности пространственной структуры колебаний.

Уже исследование одномерной модели модуляционной неустойчивости показывает, что при сравнительно умеренных начальных амплитудах однородного поля  $W/NT_e > \sqrt{m/M}$  самосжатие образующихся сгустков колебаний приводит к достижению столь малых масштабов, при которых «включается» затухание Ландау. Динамика трехмерных (и двумерных) распределений принципиально отличается от одномерного случая, в котором существуют устойчивые стационарные солитоны, так как трехмерные стационарные распределения в общем случае неустойчивы относительно возмущений, приводящих к их самосжатию. В. Е. Захаров выдвинул гипотезу [11], что в трехмерном случае самосжатие ленгмюровских колебаний происходит вплоть до образования за конечное время области с особенностью электрического поля, содержащей конечную величину энергии колебаний. Процесс образования такой особенности был назван коллапсом ленгмюровских колебаний. Коллапсирующие сгустки колебаний могут играть фундаментальную роль в теории сильной ленгмюровской турбулентности.

Исследование самовоздействия неодномерных распределений колебаний является важной физической проблемой, представляющей и более общий интерес. В частности, это исследование должно дать дополнительную информацию о динамике рассмотренного выше механизма «просветления» плотной плазмы. В данном параграфе кратко обсуждаются некоторые вопросы динамики свободных неодномерных ленгмюровских колебаний в плазме.

**Стационарные состояния.** Будем по-прежнему исходить из упрощенной динамической системы уравнений (4.1), которую запишем в безразмерных переменных [11]:

$$\Delta (-i \partial \psi / \partial t + \Delta \psi) = \text{div} (n \nabla \psi); \quad (4.72)$$

$$\partial^2 n / \partial t^2 - \Delta n = \Delta |\nabla \psi|^2, \quad (4.73)$$

$\psi$  — амплитуда потенциала электростатического поля  $E = -\nabla \psi$ . Система уравнений (4.72), (4.73) обладает интегралами (4.7) — (4.9). Рассмотрим стационарные решения этой системы уравнений вида

$$\psi = \varphi(\mathbf{r}) \exp(-i\lambda^2 t), \quad n = n(\mathbf{r}). \quad (4.74)$$

Тогда  $v = 0$ ,  $n = -|\nabla\varphi|^2$ , а для функции  $\varphi(r)$  имеем

$$\Delta(-\lambda^2\varphi + \Delta\varphi) + \operatorname{div}(|\nabla\varphi|^2 \nabla\varphi) = 0. \quad (4.75)$$

Из этого уравнения для локализованных решений  $\varphi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  нетрудно получить соотношение [108]

$$I_2 = [(m-2)/(4-m)] \lambda^2 I_0, \quad (4.76)$$

$m$  — показатель размерности задачи. Отсюда получаем, что при  $m = 1$   $I_2 = -\lambda^2 I_0/3$ , при  $m = 2$   $I_2 = 0$  и при  $m = 3$   $I_2 = \lambda^2 I_0 > 0$ .

Рассмотрим начальное распределение ленгмюровских колебаний, для которого выполнено условие  $I_2 < 0$ . Действуя так же, как в гл. 3, получаем оценку [108]

$$\min \max n > |I_2| / I_0, \quad (4.77)$$

которая показывает, что локализованное распределение ленгмюровских колебаний с  $I_2 < 0$  оказывается захваченным — минимальное значение максимума возмущения плотности плазмы ограничено снизу. В одномерном случае процесс самовоздействия такого распределения может закончиться образованием стационарного солитона, для которого  $I_2 < 0$ . В двумерном и трехмерном случае для стационарных состояний  $I_2 \geq 0$  и, следовательно, переход к ним от начального состояния с  $I_2 < 0$  невозможен. В работах [11, 108] было высказано предположение, что результатом эволюции является образование особенности электрического поля, содержащей конечную энергию.

**Автомодельные решения.** Анализ системы (4.72), (4.73) показывает, что следует различать две стадии эволюции колебаний с  $I_2 < 0$ . При малых амплитудах  $|\nabla\psi|_{\max}^2 \ll 1$  распределение поля меняется медленно и возмущения плотности успевают выноситься со скоростью звука из области поля, так что нелинейность среды является локальной  $n = -|\nabla\psi|^2$ . Процесс самофокусировки в случае колебаний такой малой интенсивности  $W/NT_e \ll m/M$  аналогичен процессу в нелинейной оптике и описывается уравнением вида

$$\Delta(-i \partial\psi/\partial t + \Delta\psi) + \operatorname{div}(|\nabla\psi|^2 \nabla\psi) = 0. \quad (4.78)$$

Уравнение (4.78) допускает автомодельную подстановку [11]

$$\psi = \varphi(\xi) \exp[-i \lambda^2 \ln(t_0 - t)], \quad \xi = r/(t_0 - t). \quad (4.79)$$

Полная энергия, содержащаяся в таком решении

$$I_0 = \int |\nabla\psi|^2 d\mathbf{r} \sim (t_0 - t)^{m-2} |\nabla_\xi\varphi|^2 d^m \xi, \quad (4.80)$$

должна сохраняться при любом виде  $\varphi(\xi)$ . Следовательно, в наиболее интересном трехмерном случае интеграл  $\int |\nabla_\xi\varphi|^2 d^3\xi$  бесконечен и соответствующее уравнение (4.78) не имеет локализованных решений. Такие автомодельные решения, по-видимому, означают, что при саможати локализованных распределений колебаний энергия не сохраняется, т. е. возможно лишь возникновение сингулярностей, содержащих нулевую энергию.

Процесс самофокусировки колебаний на «дозвуковой» стадии может привести лишь к достижению плотности энергии  $W/NT_e \simeq m/M$ . Дальнейшее самосжатие может происходить либо со скоростью порядка звуковой, либо со сверхзвуковой. Некоторые случаи звукового коллапса рассматривались в работах [113, 148—150], в которых показано, что такой режим самосжатия реализуется лишь при некоторых специальных конфигурациях электрического поля: двумерные аксиально-симметричные распределения [148] или сферически-симметричные квазисолитоны [113, 149, 150]. Поэтому мы далее подробно остановимся на рассмотрении характера эволюции колебаний на «сверхзвуковой» стадии, на которой поле меняется быстрее, чем происходит вынос колебаний со звуковой скоростью. В этом случае можно пренебречь в (4.73) членом, описывающим перенос возмущений:

$$\partial^2 n' / \partial t^2 = \Delta |\nabla \psi|^2. \quad (4.81)$$

Система уравнений (4.72), (4.81) также допускает автомодельную подстановку

$$\begin{aligned} \psi &= (t_0 - t)^{2/m-1} \varphi(\xi) \exp[-i \lambda_0^2 / (t_0 - t)^{4/m}], \\ n &= N(\xi) (t_0 - t)^{-4/m}, \quad \xi = r (t_0 - t)^{-2/m} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Однако, как и в случае локальной нелинейности, факт наличия подходящих автомодельных переменных не свидетельствует о существовании у соответствующих уравнений для  $N$  и  $\varphi$  локализованных решений. Так, в [108] показано, что эти уравнения не имеют решений со сферической симметрией потенциала  $\varphi$ , у которых  $\varphi$  равномерно стремится к нулю со всеми производными при  $\xi \rightarrow \infty$ . В [108] было предложено искать решения автомодельных уравнений, отвечающие дипольной конфигурации электрического поля. Однако анализ получающихся при этом уравнений в частных производных для  $N$  и  $\varphi$  является чрезвычайно сложной задачей и до настоящего времени не проведен.

**Численные эксперименты.** Ввиду отсутствия точных решений упрощенной динамической системы уравнений (4.72), (4.73) основным источником информации о характере самосжатия неоднородных распределений ленгмюровских колебаний являются численные расчеты. В случае двух и трех пространственных переменных решаемая задача требует использования предельных возможностей современных быстродействующих ЭВМ. Это является основной причиной того, что почти все известные численные эксперименты носят демонстрационный характер. В них убедительно показан факт существования процесса самосжатия начальных распределений с  $I_2 < 0$ , но не выяснены такие принципиальные вопросы, как существование сингулярности, содержащей конечную энергию, зависимость характера процесса от симметрии начального распределения и т. д.

Динамика сферически-симметричных распределений исследовалась в [151]. Оказывается, на сверхзвуковой стадии одновременно со сжатием сферического слоя колебаний происходит накопление в центре частиц, выносимых из области максимума поля. Диэлектрическая

проницаемость в центре становится отрицательной  $\varepsilon(r=0) < 0$ , что препятствует самосжатию и приводит к обратному процессу расширения слоя. В целом картина довольно сложная — наряду с фокусировкой происходит дробление области поля, связанное с генерацией звука, захватывающего часть плазменных колебаний и уносящего их на бесконечность.

Результаты [151], свидетельствующие об отсутствии сферически-симметричного коллапса, стимулировали поиски более сложных конфигураций поля, в которых возможен коллапс. Так, в работе [108] было показано, что в случае дипольных конфигураций, не обладающих минимумом  $|E(r)|^2$  в центре, процесс самосжатия идет более

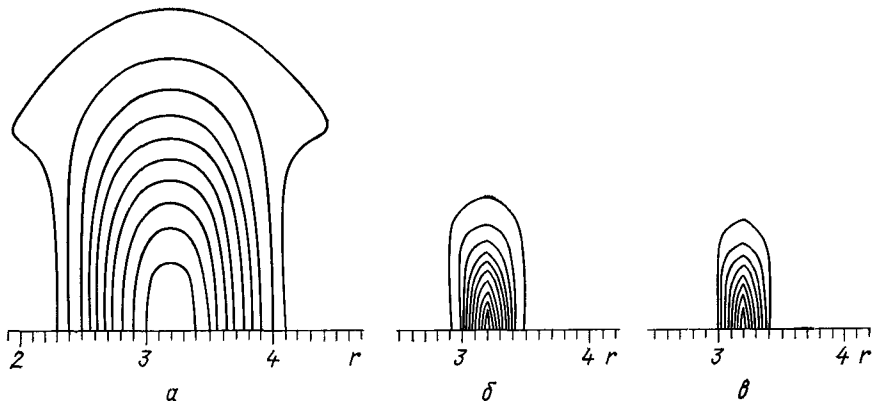


Рис 18. Линии уровней  $|E(r, z)|^2$  в различные моменты времени для аксиально-симметричной задачи  $(r, z)$  с дипольным начальным полем:

$$a - t = 0,0, |E|_{\text{макс}}^2 = 22,1; \quad b - t = 0,40, |E|_{\text{макс}}^2 = 176,0; \\ v - t = 0,50, |E|_{\text{макс}}^2 = 515,0$$

эффективно, чем в сферически-симметричном случае. На рис. 18 приведены взятые из [108] результаты численного расчета эволюции трехмерного аксиально-симметричного распределения  $|E(r, z)|^2$  с интегралом  $I_2 < 0$ , иллюстрирующие тенденцию к самосжатию. При больших значениях амплитуды в [108] оказывалось, что монотонный темп роста максимальной амплитуды нарушался, однако авторы предполагают, что это связано с нарушением точности разностной схемы, аппроксимирующей уравнения.

Результаты численных экспериментов по влиянию затухания Ландау на характер трехмерного коллапса [108] показывают, что введение в уравнение (4.1) модельного члена, учитывающего затухание высоких пространственных гармоник, приводит к существенному изменению картины сверхзвукового коллапса. В отличие от случая без затухания, в котором рост амплитуды поля существенно опережал рост возмущений плотности, при наличии затухания темп роста поля существенно замедляется, в то время как полная энергия уменьшалась еще мало (всего на 5%). На наш взгляд, это свидетельствует об отсутствии устойчивости процесса сверхзвукового сжатия в трехмерной геометрии.

Вопрос о существовании математической особенности в уравнениях (4.1), (4.2), содержащей конечную энергию, и степени ее грубости имеет важное физическое значение. Он принципиален при определении количественных критериев бесстолкновительного затухания ленгмюровских колебаний. Очевидно, что при схлопывании достаточно интенсивных распределений с сильно «надкритическими» параметрами область поглощения достигается даже в одномерном случае. Однако во многих случаях отдаленный ступок колебаний («каверна») из-за быстрого отключения от накачки может обладать параметрами, близкими к критическим ( $I_2$  отрицателен, но мал).

Выше мы попытались проиллюстрировать сложность проблемы динамики неодномерных распределений ленгмюровских колебаний, в исследовании которой сделаны лишь первые шаги. При этом мы ограничились рассмотрением результатов исследования простейшей идеализированной системы уравнений (4.72), (4.73), не учитывающей ряда важных факторов. Так, в работах [26, 27] показано, что дефокусирующая электронная нелинейность приводит к стабилизации симметричного схлопывания при размерах  $\sim r_d \sqrt{M/m}$ , однако величина этой нелинейности существенно зависит от размерности и симметрии задачи — для вытянутых дипольных распределений вклад этой нелинейности уменьшается. К стабилизации коллапса может приводить и перекачка плазموнов в область поглощения за счет их конверсии на накапливающихся в неизотермической плазме звуковых колебаниях [110].

Ускорение частиц неодномерными ленгмюровскими колебаниями рассматривалось в работах [110, 152], однако их конкретные результаты существенно зависят от принимаемой модели ленгмюровского коллапса, которая, на наш взгляд, нуждается в дальнейшем исследовании. Более детальное обсуждение современного состояния теории сильной ленгмюровской турбулентности содержится в недавно опубликованном обзоре [153].

**О коллапсе нижегибридных колебаний.** Модуляционные процессы в замагниченной плазме обладают рядом специфических особенностей, в частности, в ней возрастают пороги модуляционных неустойчивостей [154, 155], оказывается возможным одномерный коллапс колебаний [156] и т. д. Рассмотрим в качестве примера динамику неодномерных колебаний на частотах нижнего гибридного резонанса:  $\omega = \omega_L = \omega_{He} \omega_{pi} / \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2}$ . Динамическое уравнение для амплитуды потенциала электростатического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\psi \exp(i\omega_L t)$  можно в соответствующих безразмерных переменных представить в виде [14]

$$\Delta (-i \partial \psi / \partial t + \Delta \psi) = 2 \operatorname{div} (\nabla \psi \times \nabla \psi^*)_z [z_0 \nabla \psi] = 0. \quad (4.83)$$

Здесь мы предположили, что распределение поля однородно в направлении постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = z_0 H_0$ , и рассматриваем случай малых амплитуд  $W/NT_e \ll (1 + \omega_{pe}^2/\omega_{He}^2) m/M$ , при которых можно пользоваться приближением локальной нелинейности, возникающей под действием пондеромоторной силы.

Как и в случае ленгмюровских колебаний, уравнение (4.83) обладает интегралом

$$I_2 = \int (|\Delta\psi|^2 + [\nabla\psi \times \nabla\psi^*]_z^2) d\tau, \quad (4.84)$$

так что необходимым условием самофокусировки является требование  $I_2 < 0$ . Однако в отличие от случая изотропной плазмы схлопывающиеся распределения должны быть несимметричными, так как для симметричных распределений нелинейность в (4.83) обращается в нуль. В [14] численно рассмотрено самовоздействие распределений  $\psi = \psi(r, t) \exp(i m \varphi)$  и показано существование эффекта самосжатия соответствующих распределений поля.

Очевидно, что эффекты самосжатия могут играть существенную роль в динамике нижнегибридных колебаний (см., например, [157]). Поэтому дальнейшее их изучение представляет несомненный интерес.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вedenov A. A. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 3. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1963, с. 203.
2. Кадомцев Б. Б. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1964, с. 188.
3. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
4. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1973, с. 3.
5. Пустовалов В. В., Силин В. П. «Тр. физ. ин-та АН СССР», 1972, т. 61.
6. Гапонов А. В., Миллер М. А. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 34, с. 242.
7. Питаевский Л. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 1450.
8. Литвак А. Г. Некоторые вопросы теории нелинейных электромагнитных явлений в плазме. Автореферат диссертации, НИРФИ, Горький, 1967; Три лекции по теории нелинейных волновых явлений в плазме, Л., Изд. ЛГУ, 1972.
9. Litvak A. G. Electromagnetic wave theory, URSI Symposium 1971, Preprints, Tbilisi, 1971, p. 185.
10. Горбунов Л. М. Препринт ФИАН № 174. М., 1969, «Успехи физ. наук», 1973, т. 109, с. 631.
11. Захаров В. Е. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 62, с. 1745.
12. Литвак А. Г. «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1964, т. 7, с. 562.
13. Миллер М. А. «Изв. вузов Сер. Радиофизика», 1958, т. 1, с. 110.
14. Мушер С. Л., Стурман Б. И. «Письма ЖЭТФ», 1975, т. 22, с. 537.
15. Johnston T. W. «RCA Review», 1960, December, v 21, p. 4.
16. Литвак А. Г., Петелин М. И., Якубович Е. И. «Журн. техн. физ.», 1965, т. 35, с. 110.
17. Machankov V. G. «Phys. Lett. A», 1974, v. 50, p. 42.
18. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 149. Auth.: K. Nishikawa, H. Hojo, K. Mima, H. Ikezi
19. Литвак А. Г., Шахова Н. А. «Физика плазмы», 1979, т. 1, с. 614.
20. Rogkolab M., Goldman M. V. «Phys. Fluids», 1976, v. 19, p. 872
21. Кузнецов Е. А. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 66, с. 2037
22. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М., Физматгиз, 1973.
23. «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 60. Авт.: А. Г. Литвак, В. А. Миронов, Г. М. Фрайман, А. Д. Юнаковский.
24. Lünov W. «Plasma Physics», 1968, v. 10, p. 879, 973.
25. Kaw P., Dawson J. «Phys. Fluids», 1970, v. 13, p. 472.

26. **Цытович В. Н., Хакимов Ф. Х.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 70, с. 1785.
27. **Кузнецов Е. А.** «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 327.
28. **Волков Т. Ф.** Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 336.
29. **Силин В. П.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 53, с. 1662.
30. **Басс Ф. Г., Вербицкий И. Л., Гуревич Ю. Г.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1968, т. 11, с. 1480.
31. **Мионов В. А.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1971, т. 14, с. 1480.
32. **Зауэр К., Горбунов Л. М.** «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 1302.
33. **Гильденбург В. Б.** Препринт НИРФИ № 57, Горький, 1974.
34. **Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Фрайман Г. М.** «Письма ЖЭТФ», 1978, т. 28, с. 433.
35. **Фрайман Г. М.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1973, т. 16, с. 1146.
36. **Денисов Н. Г.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1956, т. 31, с. 609.
37. **Гинзбург В. Л.** Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
38. **Гильденбург В. Б.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 45, с. 1978.
39. **Пилия А. Д.** «Журн. техн. физ.», 1966, т. 36, с. 818.
40. **Омельченко И. Д., Панченко В. И., Степанов К. Н.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1971, т. 14, с. 1484.
41. **Жаров А. А., Кондратьев И. Г., Миллер М. А.** «Письма ЖЭТФ», 1977, т. 25, с. 355.
42. **Письма ЖЭТФ», 1977, т. 25, с. 351. Авт.: Ю. М. Алиев, С. Вукович, О. М. Градов, А. Ю. Кирий, В. Чадеж.**
43. **Albritton J., Koch P.** «Phys. Fluids», 1974, v. 18, p. 1136.
44. **Буланов С. В., Коврижных Л. М., Сахаров А. С.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 72, с. 1809.
45. «Phys. Rev. A», 1975, v. 11, p. 679. Auth.: D. W. Forslund, J. M. Kindel, K. Lee, E. L. Lindman, R. L. Morse.
46. **Гильденбург В. Б.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 46, с. 2156.
47. **Гильденбург В. Б., Фрайман Г. М.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 62, с. 1288.
48. **Гуревич А. В., Питаевский Л. П.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1963, г. 45, с. 1243.
49. **Гильденбург В. Б., Литвак А. Г., Фрайман Г. М.** Всесоюзный семинар по параметрической турбулентности плазмы. Аннотации докладов, ФИАН, М., 1977, с. 28.
50. **Litvak A. G.** Phenomena in Ionized Gases, 1977, Invited Lectures, Proc. XIII Int. Conf., Berlin, 1977, p. 189.
51. **Perkins F. W., Flick J.** «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 2012.
52. «Phys. Rev. Lett.», 1977, v. 39, p. 281. Auth.: K. R. Manes, V. C. Rupert, J. M. Auerbach, P. Lee, J. E. Swain.
53. **Godwin R. P., Sachsenmaier R., Sigel R.** «Phys. Rev. Lett.», 1977, v. 39, p. 1198.
54. **Аскарьян Г. А.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1962, т. 42, с. 1567.
55. **Таланов В. И.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1964, т. 7, с. 564.
56. **Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 479.
57. **Литвак А. Г.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1966, т. 9, с. 675.
58. **Абакаров Д. Н., Акопян А. П., Пекар С. И.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1967, т. 52, с. 463.
59. **Литвак А. Г., Фрайман Г. М.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1975, т. 69, с. 160.
60. **Мах С. Е.** «Phys. Fluids», 1976, v. 19, p. 74.
61. **Сахаров В. Е., Рубенчик А. М.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 65, с. 997.
62. **Вахитов Н. Г., Колоколов А. А.** «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1973, т. 16, с. 1020.
63. **Гурович В. Ц., Карпман В. И.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 56, с. 1952.

64. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. «Успехи физ. наук», 1971, т. 103, с. 193.
65. Цинцадзе Н. Л., Цхакая Д. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 72, с. 480.
66. Рудаков Л. И. «Докл. АН СССР», 1972, т. 207, с. 821.
67. Kingsep A. S., Rudakov L. I., Sudan R. N. «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 1402.
68. «Письма ЖЭТФ», 1958, т. 25, с. 3. Авт.: С. В. Антипов, М. В. Незлин, Е. Н. Снежкин, А. С. Трубников.
69. Nishikawa K., Mima K., Ikezi H. «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 35, p. 726.
70. Козлов В. А., Литвак А. Г., Суворов Е. В. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1979, т. 76, с. 148.
71. Горшков К. А., Козлов В. А., Островский Л. А. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 65, с. 189.
72. Zabusky N. Доклад на Европейской школе по физике плазмы. Тбилиси, 1970.
73. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. «Успехи физ. наук», 1967, т. 93, с. 19.
74. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И. В кн.: Нелинейная оптика. Труды симпозиума, Новосибирск, «Наука», 1968, с. 428.
75. Аскарьян Г. А. «Успехи физ. наук», 1973, т. 111, с. 249.
76. Луговой В. Н., Прохоров А. М. «Успехи физ. наук», 1973, т. 111, с. 203.
77. Margburger J. H. Progress in Quantum Electronics, 1975, v. 4, part 1, p. 35.
78. Власов С. Н., Петрищев В. И., Таланов В. И. «Изв. вузов. Сер. радиофизика», 1971, т. 14, с. 1533.
79. Янкаускас З. К. «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1966, т. 9, с. 402.
80. Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 137.
81. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. Доклады VI Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. Т. 2. Ереван, «Наука», 1973, с. 301.
82. Таланов В. И. «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1966, т. 9, с. 410.
83. Шварцбург А. Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн. М., «Наука», 1976.
84. Felsen L. V. «IEEE Trans.», 1964, v. AP — 12, p. 624.
85. Литвак А. Г., Таланов В. И. «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1967, т. 10, с. 537.
86. Литвак А. Г. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 57, с. 629.
87. Washimu H. «J. Phys. Soc. Jарап», 1973, v. 34, p. 1373.
88. Литвак А. Г., Сергеев А. М., Шахова Н. А. «Письма ЖЭТФ», 1978, т. 4, с. 1284.
89. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
90. Беспалов В. И., Таланов В. И. «Письма ЖЭТФ», 1966, т. 3, с. 471.
91. Островский Л. А. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1966, т. 51, с. 1189.
92. Lighthill M. J. «J. Inst. Math. Appl.», 1975, v. 1, p. 269; «Proc. Roy. Soc.», 1967, v. A229, p. 28.
93. «Phys. Fluids», 1974, v. 17, p. 778. Auth.: J. Drake, P. K. Kaw, Y. C. Lee, G. Schmidt, C. S. Lin, M. N. Rosenbluth.
94. Литвак А. Г., Фрайман Г. М. «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1972, т. 15, с. 1341.
95. Гильденбург В. Б., Литвак А. Г. Доклады VII Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. Т. I. Ростов-на-Дону, «Наука», 1977, с. 278.
96. Веденов А. А., Рудаков Л. И. «Докл. АН СССР», 1964, т. 159, с. 767.
97. Карпман В. И., Крушкаль Е. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 530.
98. «Письма ЖЭТФ», 1974, т. 20, с. 544. Авт.: А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, Т. Н. Федосеева, Г. М. Фрайман.
99. Фрайман Г. М. К теории нелинейного взаимодействия интенсивных электромагнитных волн с бесстолкновительной плазмой. Автореферат диссертации, ФИАН, М., 1976.



100. Захаров В. Е., Шабат А. Б. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 61, с. 118.
101. Петвиашвили В. И. «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 28; 1976, т. 2, с. 450.
102. Силин В. П. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1965, т. 48, с. 1679.
103. Nishikawa K. «J. Phys. Soc. Jарап», 1968, v. 24, p. 916.
104. Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973.
105. Galeev A. A., Sagdeev R. Z. «Nucl. Fusion», 1973, v. 13, p. 603.
106. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. М., Физматгиз, 1976.
107. Дегтярев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 67, с. 573.
108. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 438.
109. «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 10. Авт.: А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Ю. С. Сигов, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко.
110. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1977, т. 73, с. 1352. Авт.: А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко.
111. В. В. Горев, А. С. Кингсеп, Л. И. Рудаков. «Изв. вузов. Сер. Радиофизика», 1976, т. 19, с. 691.
112. Хакимов Ф. Х., Цытович В. Н. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 126; 1974, т. 43, с. 2481.
113. Литвак А. Г. Теория плазмы. Труды II Киевской конференции по теории плазмы. Киев, «Наукова думка», 1976, с. 134.
114. Литвак А. Г., Миронов В. А., Фрайман Г. М. «Письма ЖЭТФ», 1975, т. 22, с. 368.
115. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Журн. техн. физ.», 1962, т. 32, с. 1291.
116. Горбунов Л. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 2298.
117. Литвак А. Г., Трахтенгерц В. Ю. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 60, с. 1702.
118. Захаров В. Е., Рубенчик А. М. «Журн. прикл. мех. и техн. физ.», 1972, т. 5, с. 82.
119. Valeo E. J., Krueger W. L. «Phys. Fluids», 1973, v. 16, p. 675.
120. Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. «Геомagnetизм и аэрономия», 1974, т. 14, с. 126.
121. Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М. «Письма ЖЭТФ», 1974, т. 19, с. 249.
122. «Письма ЖЭТФ», 1973, т. 18, с. 624. Авт.: Н. Е. Андреев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук.
123. Кольчугина И. А., Литвак А. Г., Хазанов И. В. «Письма ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 321.
124. Бакай А. С. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 266.
125. Брейзман Б. Н., Захаров В. Е., Мушер С. Л. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 1297.
126. Препринт ИЯФ СОАН СССР № 29, Новосибирск, 1976. Авт.: В. Е. Захаров, С. Л. Мушер, А. М. Рубенчик, Б. И. Стурман.
127. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 66, с. 574. Авт.: Я. И. Альбер, З. В. Кротова, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц.
128. Литвак А. Г., Петрухина В. И., Трахтенгерц В. Ю. «Письма ЖЭТФ», 1973, т. 18, с. 190.
129. «Письма ЖЭТФ», 1973, т. 13, с. 46. Авт.: Б. А. Альтеркоп, А. С. Волокитин, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко.
130. Альтеркоп Б. А., Волокитин А. С., Тараканов В. П. «Журн. техн. физ.», 1975, т. 45, с. 144.
131. Sudan R. N. Proc. VI European Conf. on Plasma Physics. V. 2. Moscow, 1973, p. 184.
132. Krueger W. L., Dawson J. «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 446.
133. Thomson J. J., Faehl R. J., Krueger W. L. «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 918.
134. Иванов А. А., Сигов Ю. С., Ходырев Ю. В. «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, с. 1291.

135. Полюдов А. Н., Сигов Ю. С. Препринт ИПМ № 123. М., 1976.
136. Pereira N. K., Denavit J., Sudan R. N. «Phys. Fluids», 1977, v. 20, p. 271.
137. Альтеркоп Б. А., Волокитин А. С., Тараканов В. П. «Письма ЖЭТФ», 1975, т. 1, с. 534; Препринт ИВТ АН СССР № 6—013, М., 1977.
138. Препринт ИПМ № 128. М., 1975, Авт. Т. А. Горбушина, Л. М. Дегтярев, В. Е. Захаров, В. Н. Равинская.
139. Препринт ИПМ № 17. М., 1978. Авт.: Т. А. Горбушина, Л. М. Дегтярев, Р. З. Сагдеев, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко.
140. Morales G. J., Lee Y. C., White R. B. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 457.
141. Тезисы докладов II Всесоюзного семинара по параметрической турбулентности плазмы. М., 1978, с. 32. Авт.: И. А. Кольчугина, А. Г. Литвак, Т. Н. Федосеева, Г. М. Фрайман.
142. Батанов Г. М., Саркисян К. А. «Тр. физ. ин-та АН СССР», 1973, т. 73, с. 104.
143. «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 414. Авт.: Б. Г. Еремин, А. В. Костров, А. Д. Степанушкин, Г. М. Фрайман.
144. «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 13, с. 136. Авт.: Ю. Я. Бродский, Б. Г. Еремин, А. Г. Литвак, Ю. А. Сахончик.
145. Батанов Г. М., Силин В. А. «Письма ЖЭТФ», 1971, т. 14, с. 445; «Тр. физ. ин-та АН СССР», 1977, т. 92, с. 3.
146. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1978, т. 74, с. 1636. Авт.: Ю. Я. Бродский, В. Л. Гольцман, В. А. Миронов, С. И. Нечуев.
147. Denavit J., Pereira N. R., Sudan R. N. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 1435.
148. Гольцман В. Л., Фрайман Г. М. Аннотации докладов I Всесоюзного семинара по параметрической турбулентности. М., 1977, с. 29.
149. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. Препринт НИРФИ», № 60, Горький, 1974.
150. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Рудаков Л. И. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1974, т. 67, с. 573.
151. Литвак А. Г., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. «Письма ЖЭТФ», 1974, т. 19, с. 23.
152. Горев В. В., Кингсеп А. С., Яньков В. В. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1976, т. 70, с. 921.
153. Rudakov L. I., Tsytovich V. N. «Physics Reports», 1978, v 40C, N 1.
154. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д. «Письма ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 421.
155. Nishikawa K., Ryutov D. D. «J. Phys. Soc. Japan», 1976, v 41, p. 1756.
156. Литвак А. Г., Сергеев А. М. «Письма ЖЭТФ», 1978, т. 27, с. 549.
157. Сотников В. И., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 450.
158. Кузнецов Е. А. «Докл. АН СССР», 1977, т. 236, с. 575.

# ДИНАМИКА Z-ПИНЧА

В. В. Вихрев, С. И. Брагинский

---

## Введение

Z-пинч представляет собой электрический разряд в газе, который сжимается под давлением магнитного поля, создаваемого разрядным током. Явление самосжатия разряда в газе изучается давно, однако интенсивное исследование этого явления было начато лишь в связи с идеей об осуществлении управляемой термоядерной реакции. В работах, направленных на получение управляемого термоядерного синтеза, именно в Z-пинчах были получены первые нейтроны из плазмы.

Схема получения Z-пинча, являющегося источником нейтронного излучения, в принципе довольно проста. Через разрядную камеру, заполненную дейтерием с давлением порядка 0,1–1 мм рт. ст., пропускается короткий импульс тока с амплитудой более  $10^5$  А, и в некоторый момент времени наблюдается вспышка нейтронного излучения.

Первоначальная идея создания термоядерной плазмы в таких установках основывалась на следующих элементарных предположениях [1]. Во время прохождения тока должно происходить сжатие плазмы под действием электродинамических сил (притяжение параллельных токов). Если под действием электродинамического сжатия образуется плазменный шнур, оторванный от стенки камеры, то температура плазмы в шнуре может быть оценена из условия радиального равновесия сил магнитного давления  $B^2/8\pi$  и давления плазмы  $P$ . Если электроны и ионы имеют одинаковую температуру  $T$ , то для водородной плазмы суммарное давление  $P = 2nT$ , где  $n = n_e = n_i$  — плотность плазмы. Магнитное поле на границе шнура  $B = 2I/ca$  определяется током  $I$  и радиусом шнура  $a$  ( $c$  — скорость света). Отсюда видно, что при наличии радиального равновесия  $P = B^2/8\pi$  температура плазмы в Z-пинче определяется выражением

$$T = I^2/4 c^2 N, \quad (\text{B.1})$$

где  $N = \pi a^2 n$  — число ионов на единицу длины пинча («погонное число» ионов). В работе [2] было показано, что соотношение (B.1) справедливо при любой зависимости плотности тока от радиуса внутри плазменного шнура.

Теоретическое изучение Z-пинча в связи с проблемой осуществления управляемых термоядерных реакций проводилось вначале без

учета инерции. При этом пинч рассматривался как система, где осуществляется магнитная изоляция плазмы, а температура плазмы определяется в соответствии с соотношением (В.1). Казалось, что достаточно правильно выбрать  $N$  при имеющемся токе  $I$ , и термоядерные температуры в плазменном шнуре будут достигнуты, а магнитная изоляция предохранит от потерь тепла и обеспечит необходимое время существования плазмы. Действительно, в первых же экспериментах по линейному  $Z$ -пинчу при заполнении камеры дейтерием наблюдалось нейтронное излучение из разряда. Однако дальнейшее, более тщательное изучение разрядов в  $Z$ -пинче показало, что процесс получения нейтронного излучения в  $Z$ -пинче не описывается такой простой схемой.

Прежде всего оказалось, что установление равновесия давления плазмы и сжимающего ее магнитного давления согласно (В.1) происходит не сразу, а после ряда довольно сложных процессов. В начале развития пинча проводимость увеличивается очень быстро и устанавливается линейный рост тока, ограничиваемый лишь индуктивностью системы  $I = It$ , где  $\dot{I} = dI/dt \simeq \text{const}$ . При этом магнитное давление  $B^2/8\pi$  растет гораздо быстрее, чем давление плазмы. В результате вначале магнитная сила балансируется силой инерции, а не давлением. Определяющая роль инерции в пинче была впервые показана в работе М. А. Леонтовича и С. М. Осовца [3], где была использована простая одномерная модель сжатия шнура радиуса  $a(t)$  с массой  $Nm_i = m_i n_0 \pi R^2$  под действием сжимающей силы  $(It)/ac^2$ . Здесь  $m_i$  — масса иона,  $n_0$  — начальная плотность газа,  $R$  — радиус разрядной трубки. Увеличение давления плазмы с ростом ее плотности оценивалось в предположении, что давление изменяется по адиабате с показателем  $5/3$ . Интегрирование получившегося в такой модели уравнения показало, что в некоторый момент времени  $t_{oc}$ , названный моментом «особенности», радиус шнура имеет минимум. Эта особенность отмечалась на осциллограммах тока и напряжения по максимальному подъему напряжения и минимуму тока [4, 5]. Характерная зависимость тока особенности  $I_{oc} = \dot{I}t_{oc} \sim (m_i n_0)^{1/4}$  от массы газа в камере была подтверждена экспериментально [4], что показало правильность представления об инерционном характере процесса сжатия пинча.

Если электрический ток поддерживается в течение времени, во много раз превосходящего  $t_{oc}$ , то сжавшийся плазменный шнур после нескольких колебаний разрушается из-за его магнитогидродинамической неустойчивости. Вследствие этого получить стационарный  $Z$ -пинч, в котором выполнялось бы условие (В.1), не удастся. Характерные времена развития магнитогидродинамической неустойчивости очень малы — они определяются малой инерцией плазмы пинча и большими магнитными силами. Поэтому время жизни  $Z$ -пинча до его разрушения тоже мало — порядка «пролетного времени» ионов по радиусу  $a(T/m_i)^{-1/2}$ . Для того чтобы за это короткое время нагреть плазму до достаточно высокой температуры и провести все необходимые процессы (в том числе термоядерные реакции), стараются возможно быстрее наращивать ток. В современных экспериментах используются, на-

пример, значения  $I \sim 10^{11} \div 10^{13}$  А/с и токи  $I \sim 10^5 \div 10^6$  А. Именно такие кратковременные мощные импульсные электрические разряды в газе, или короче — быстрые Z-пинчи, рассматриваются в настоящем обзоре.

Быстрый Z-пинч экспериментально и теоретически исследовался во многих работах, позволивших выяснить роль различных физических процессов в нем. Здесь мы ограничимся изложением лишь теоретических исследований.

В настоящее время общую картину возникновения и развития Z-пинча можно представить следующим образом. В начальный момент времени после приложения внешнего напряжения к электродам Z-пинча происходит лавинообразное нарастание плотности электронов в межэлектродном промежутке. Уже на этой стадии развиваются сильные неоднородности в степени ионизации газа. При очень большой напряженности электрического поля пробой газа сильно затруднен [6], так как появляющиеся электроны успевают ускориться электрическим полем и выйти из разрядного промежутка прежде, чем они дадут начало лавине.

Если пробой газа произошел, то начинает быстро повышаться проводимость газа, и электрический ток скинируется около изолирующей поверхности разрядной камеры. В результате около стенки формируется токовая оболочка Z-пинча. Образование токовой оболочки определяется диффузией электрического поля в глубь плазмы при быстром росте ионизации газа. В ходе создания токовой оболочки неоднородности электронной плотности, получившиеся при пробое, с одной стороны, усиливаются в результате ступенчатой ионизации газа, а с другой — выравниваются из-за диффузии электронов и диффузии электрического поля. В результате всех этих процессов образуется токовая оболочка, состоящая из отдельных токовых каналов — волокон, протянувшихся около изолятора между электродами камеры.

При дальнейшем возрастании тока вступают в действие силы давления магнитного поля. Этим силам в первую очередь противостоит инерция газа. Электроны и ионы под действием электромагнитных сил приобретают скорость в направлении от изолятора внутрь. Нейтральные частицы — атомы и молекулы — увлекаются ионами посредством столкновений и перезарядки, и токовая оболочка начинает двигаться к оси системы. При своем движении она «сгребает» газ в камере, увлекая его за собой, и тем самым создается плотная плазменная оболочка, которая ограничена сзади (снаружи) скинированным токовым слоем, толкающим оболочку, а спереди — ударной волной, распространяющейся по невозмущенному газу. В процессе движения оболочки выраженность волокнистой структуры постепенно ослабевает, но в то же время в ней появляется радиальная структура тока. Это проявляется в том, что часть тока успевает продиффундировать в область невозмущенного газа и там образуется второй слой тока, движущийся перед фронтом ударной волны.

На стадии движения оболочки существенную роль в динамике разряда играет кривизна оболочки в плоскости, проходящей через ось

системы. Плазменная оболочка с такой кривизной может быть создана (и специально создается) в том случае, когда форма разрядной камеры отличается от цилиндрической [7, 8]. Отсюда и происходит название «нецилиндрический Z-пинч». Иногда определяющую роль в создании кривизны оболочки играют также приэлектродные процессы, в первую очередь эффект Холла, вызывающий скольжение тока вдоль анода. В нецилиндрическом Z-пинче кривизна оболочки приводит к сбросу массы во время ее движения. Это согласно условию (B.1), обеспечивает в момент схождения оболочки на оси высокую температуру плазмы.

После выхода оболочки к оси образуется плазменный столб и происходят радиальные колебания этого сжатого магнитным полем плазменного столба около положения равновесия. Цилиндрический Z-пинч после нескольких колебаний разрушается из-за быстрого развития МГД-неустойчивости и последующего сильного взаимодействия плазмы со стенками. В нецилиндрическом Z-пинче выход оболочки к оси происходит на небольшом участке, где образуется область сильно сжатой плазмы, впервые исследованная в работе [8] и названная там плазменным фокусом.

Плазма в фокусе за короткое время успевает сильно нагреться, так что в ней могут происходить термоядерные реакции. После выхода оболочки к оси количество частиц в сечении плазменного столба уменьшается из-за вытекания плазмы из зоны сжатия. В результате повышается токовая скорость электронов и, кроме магнитогидродинамической неустойчивости, в плазме происходит развитие микронеустойчивостей, что приводит к возникновению больших локальных электрических полей. Вследствие этого некоторое количество заряженных частиц в Z-пинче приобретает энергию, значительно превосходящую тепловую, что вызывает появление жесткого рентгеновского излучения в разряде [9, 10].

Такова в самых общих чертах картина развития разряда в Z-пинче. Из вышесказанного видно, что разряд в Z-пинче проходит в своем развитии несколько стадий. Каждая из стадий характеризуется определенными доминирующими процессами. Будем в динамике Z-пинча различать три основные стадии: начальную, среднюю и конечную.

**Под начальной стадией** подразумевается пробой газа и формирование токовой оболочки. Основными процессами, определяющими начальную стадию, являются: ионизация газа в электрическом поле, диффузия электронов и скинирование тока.

**Средняя стадия** Z-пинча характеризуется дальнейшим развитием оболочки Z-пинча и ее движением под действием давления собственного магнитного поля. Теоретическое исследование физических процессов в плазме в средней стадии Z-пинча было впервые проделано в работах [11, 12]. Для подробного описания плазмы на этой стадии удобно использовать уравнения магнитной гидродинамики. Средняя стадия начинается отрывом плазменной оболочки от изолятора. На этой стадии происходит ударный нагрев плазмы до нескольких сот электронвольт, а также повышение плотности газа в 10—50 раз. Оканчивается она

схождением оболочки на оси и образованием сплошного плазменного столба.

**В конечной стадии** разряда происходит дальнейшее повышение температуры и плотности в плазменном столбе. Эта стадия протекает различным образом в цилиндрическом и нецилиндрическом  $Z$ -пинчах. В цилиндрическом пинче плазменный столб испытывает на этой стадии небольшое число (2—3) колебаний и разрушается вследствие магнитогидродинамической неустойчивости. Сильное развитие неустойчивости приводит к турбулизации плазменного шнура и его расширению практически до радиуса разрядной камеры. В результате взаимодействия плазмы со стенками камеры происходит выделение газа со стенок и охлаждение плазменного шнура. Именно эта неустойчивость и явилась препятствием для осуществления простой идеи термоядерного синтеза в  $Z$ -пинче. В процессе разрушения пинча в нем возникают потоки ускоренных частиц, рентгеновское и нейтронное излучения.

В нецилиндрическом  $Z$ -пинче оболочка сходится на оси не по всей длине пинча, а на ограниченном участке. На этом участке около оси образуется миниатюрный плазменный столб, который и называют плазменным фокусом. Количество частиц в сечении плазменного фокуса уменьшается вследствие вытекания плазмы через торцы плазменного столба и из-за ухода плазмы в радиальном направлении, возникающего из-за развития МГД-неустойчивостей. Уменьшение количества частиц в сечении столба приводит к его сжатию и к повышению плотности и температуры плазмы. Температура в фокусе благодаря вытеканию частиц становится выше 10 кэВ, а плотность плазмы в нем достигает значения, в сотни раз превосходящего начальную плотность газа. В конечной стадии нецилиндрического  $Z$ -пинча (в стадии плазменного фокуса) с удовлетворительной точностью соблюдается условие равновесия плазменного столба (В.1) и происходит нагрев плазмы при уменьшении ее объема (адиабатическое сжатие) за счет работы магнитного сжатия. Температура плазмы в фокусе становится достаточно высокой для интенсивного протекания в ней термоядерных реакций, и фокус является мощным источником нейтронного излучения. Таким образом,  $Z$ -пинч с плазменным фокусом все-таки является высокотемпературной плазменной системой, основанной на равновесии плазмы с магнитным полем согласно соотношению (В.1), хотя процессы, происходящие в пинче, намного сложнее, чем вначале предполагалось.

Разрушение плазменного фокуса, которое приводит к прекращению нейтронного излучения из него при токе менее  $10^6$  А, происходит в основном из-за турбулентного нагрева плазмы. В момент, когда количество частиц в сечении плазменного фокуса становится очень малым — меньше  $5 \cdot 10^{16}$  см<sup>-1</sup>, токовая скорость электронов превосходит тепловые скорости ионов дейтерия и в плазме развиваются мелкомасштабные неустойчивости поперечного тока (текущего перпендикулярно к магнитному полю). Нелинейное развитие этих неустойчивостей приводит к значительному повышению сопротивления плазменного шнура. В результате аномально большого тепловыделения давление плазмы не

уравновешивается давлением магнитного поля и происходит расширение плазменного столба, при этом из-за уменьшения плотности плазмы прекращается нейтронное излучение. При увеличении амплитуды тока такого разрушения плазменного столба можно избежать, так как большему току при фиксированной температуре соответствует большее количество частиц в сечении пинча, при этом уменьшается токовая скорость электронов.

Для описания динамики  $Z$ -пинча используются различные модели в зависимости от явлений, которые требуется изучить. Конечно, можно представить себе математическую модель  $Z$ -пинча, в котором были бы учтены все известные в настоящее время явления. Однако решение такой задачи даже на ЭВМ оказалось бы сложным и долгим делом. При этом, даже если численное решение такой задачи было бы получено, то разобраться в нем, а тем более выявить существенные и несущественные стороны было бы нелегко. Математические модели, которые используются для описания и численного моделирования начальной, средней и конечной стадий  $Z$ -пинча, представлены на рис. 1. Стрелками показана зависимость между моделями. Около названий моделей указаны используемые в них координаты:  $r$  — радиус,  $t$  — время,  $z$  — осевая, а  $\varphi$  — угловая координаты,  $\lambda$  — координата вдоль сечения оболочки плоскостью  $yz$ . Для моделей рис. 1 даны избранные ссылки на литературу, где эти модели впервые указаны, предложены или подробно разработаны, а также соответствующий параграф данной работы. Более полные ссылки на литературу приведены в тексте.

В верхней строке рис. 1 указаны физические явления, играющие основную роль в динамике  $Z$ -пинча. К ним относятся: ионизация газа, скин-эффект, инерция газа, радиальное квазиравновесие плазменного столба и вытекание вещества из плазменного столба.

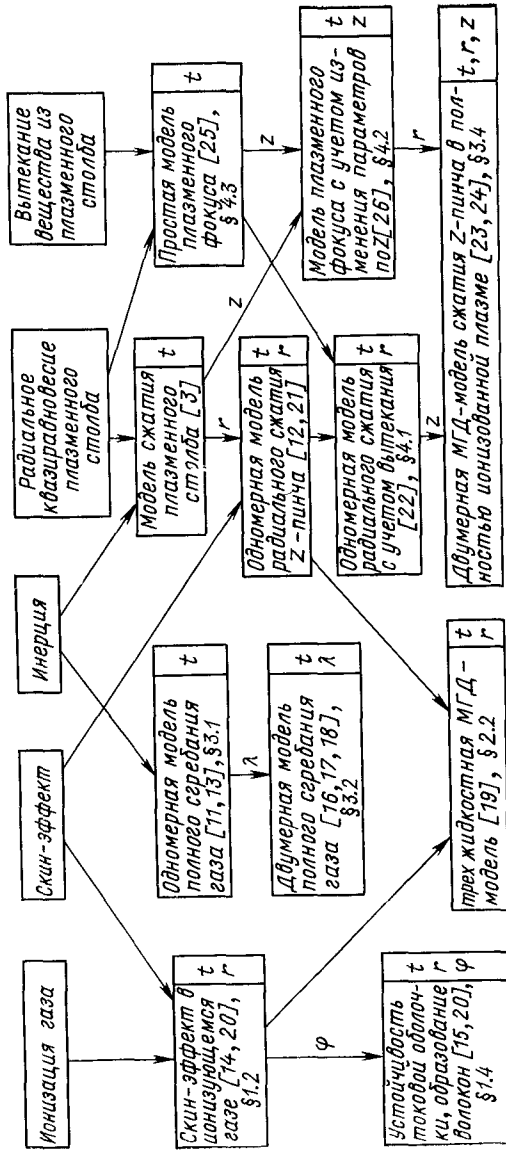
В гл. 1 настоящего обзора рассмотрена модель скин-эффекта в ионизирующемся газе (§ 1.1, 1.2), которая описывает формирование токовой оболочки в  $Z$ -пинче (§ 1.3). Эта модель обобщена на случай двумерной области (§ 1.4), что позволило продемонстрировать образование волокнистой структуры оболочки.

В гл. 2 излагаются вопросы развития токовой оболочки. Здесь рассматриваются физические процессы при развитии оболочки (§ 2.1) и дана ее трехжидкостная магнитогидродинамическая (МГД) модель, учитывающая электроны, ионы и нейтральный газ (§ 2.2). Результаты численного моделирования развития токовой оболочки в рамках трехжидкостного приближения приведены в § 2.3, а в § 2.4 они поясняются на примере автомодельной задачи.

Глава 3 посвящена движению токовой оболочки как в цилиндрическом (§ 3.1), так и в нецилиндрическом (§ 3.2)  $Z$ -пинче. Условия согласования движения оболочки с разрядным контуром, обеспечивающие максимум тока в сжатом пинче, рассмотрены в § 3.3. В § 3.4 анализируется влияние эффекта Холла на движение оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче на основе двумерной МГД-модели.

Образование плазменного фокуса на оси нецилиндрического  $Z$ -пинча и развитие его описываются в гл. 4. Процесс образования плаз-





Начальная стадия: формирование токовой оболочки в мощном импульсном разряде

Средняя стадия: движение и развитие плазменной оболочки

Конечная стадия: динамика сжатой области плазмы (плазменный фокус)

Рис 1. Математические модели, используемые для описания динамики Z-пинча

менного фокуса рассмотрен в двух моделях полностью ионизованного газа. В одной из них рассматривается, главным образом, зависимость всех параметров плазмы от радиуса пинча (§ 4.1), а в другой исследуется изменение параметров вдоль оси (§ 4.2). В § 4.3 динамика плазменного фокуса описана с помощью простой модели, в которой учитывается изменение параметров фокуса только во времени. На основе этой модели получается простая аналитическая формула для нейтронного выхода из плазменного фокуса. Эта формула хорошо согласуется с экспериментальными данными. В заключении обзора приведены вопросы динамики  $Z$ -пинча, требующие еще изучения.

В настоящее время количество работ по динамике  $Z$ -пинча очень велико. Мы не стремились подробно охватить в данном обзоре все эти работы. Обзор экспериментальных работ вообще не дается и лишь упоминаются некоторые, преимущественно более ранние из работ по мощному импульсному разряду в газе. Мы не старались также дать исчерпывающий обзор теоретических исследований  $Z$ -пинча. Подробно описаны лишь те стороны динамики  $Z$ -пинча, которые авторам показались наиболее существенными. Основной упор делается на изучение динамики нецилиндрического  $Z$ -пинча, поскольку именно в нем получается плазма с высокими параметрами. Динамика  $Z$ -пинча прослеживается от начала и до конца по всем стадиям, причем описание физических процессов максимально упрощается с тем, чтобы сохранить все основные черты явления, не вдаваясь в детали громоздких математических расчетов. Много внимания уделено вопросу образования токовой оболочки в  $Z$ -пинче и ее устойчивости, так как от симметрии и качества оболочки зависят все последующие стадии разряда и нейтронное излучение из него. На средней стадии основные явления развиваются в плазменной оболочке, ее структуре и движению уделено также много внимания. Анализируются причины образования высокотемпературной плазмы в  $Z$ -пинче. Подробно рассматривается конечная стадия  $Z$ -пинча — плазменный фокус и происходящие в нем физические явления.

В вып. 5 и 8 сборника «Вопросы теории плазмы» [21, 23] были опубликованы обзоры В. Ф. Дьяченко и В. С. Имшенника по двум моделям  $Z$ -пинча: одномерная МГД-модель радиального сжатия  $Z$ -пинча и двумерная МГД-модель нецилиндрического  $Z$ -пинча. Поскольку эти модели и полученные результаты подробно изложены в указанных обзорах, то здесь приведено только краткое описание этих моделей в той степени, которая необходима для изложения всей динамики  $Z$ -пинча.

Важные и интересные процессы образования в  $Z$ -пинче ускоренных заряженных частиц с энергией, сильно превышающей тепловую, не рассматриваются в настоящем обзоре, где используется лишь гидродинамическое приближение. Эти вопросы в настоящее время не вполне понятны. Их обсуждение и соответствующие литературные ссылки можно найти, например, в монографиях Л. А. Арцимовича [27] и С. Ю. Лукьянова [28].

## ФОРМИРОВАНИЕ ТОКОВОЙ ОБОЛОЧКИ В МОЩНОМ ИМПУЛЬСНОМ РАЗРЯДЕ

Обычный скин-эффект наблюдается в проводнике при пропускании через него переменного электрического тока. Изменение во времени электрического поля в таких проводниках вызывает перераспределение поля и тока по сечению проводника, в результате чего и поле и ток сосредоточиваются только в тонком поверхностном слое (скин-слое). При постоянной проводимости в неподвижном проводнике плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля. В отличие от скин-эффекта в обычных проводниках в быстро ионизирующемся газе поле и ток могут скинироваться совершенно различным образом. Даже незначительное скинирование электрического поля в ионизирующемся газе вызывает сильную неоднородность степени ионизации. При этом образуется тонкий слой проводящей плазмы, что и является причиной скинирования тока в мощных импульсных разрядах.

Как было подчеркнуто в [29], процессы, происходящие на начальной стадии мощного импульсного разряда, могут оказывать значительное воздействие на более поздние стадии, например, из-за возникновения и развития неоднородностей в разряде, которые могут далее искажать форму пинча. Поэтому исследование начальной стадии важно, хотя нас интересует практически лишь высокотемпературный пинч. Изложение в этой главе основывается на работах [14, 15, 20].

### § 1.1. Скин-эффект в ионизирующемся газе

Для описания скин-эффекта в ионизирующемся газе, кроме уравнений, определяющих скинирование электрического поля, необходимо учитывать ионизационные процессы в плазме и зависимость скорости ионизации от электрического поля. В сильных электрических полях при малой степени ионизации газа распределение электронов в плазме по скоростям не является максвелловским, особенно в области больших скоростей. Поэтому следует с осторожностью пользоваться понятием температуры, которое часто употребляется при описании ионизационных процессов в плазме. Наиболее удачным и простым подходом к описанию ионизационных процессов на начальной стадии является энергетическое описание ионизации в плазме. Такой подход был применен к мощным импульсным разрядам в работах [11, 29]. Считая, что для ионизации одного атома требуется в среднем затратить некоторое определенное количество энергии  $\varepsilon$  (цена электрона), можно определить скорость ионизации газа, подсчитывая энергию, выделяющуюся в плазме в результате джоулева нагрева:

$$\partial n_e / \partial t = \sigma E^2 / \varepsilon, \quad (1.1)$$

где  $\sigma$  — проводимость плазмы;  $E$  — напряженность электрического поля, а  $\sigma E^2$  — джоулево тепловыделение в плазме. В цену электрона,

крóме энергии ионизации атома, входит также энергия излучения, уходящая из плазмы. В этом параграфе цену электрона примем постоянной величиной  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Для водорода  $\varepsilon_0 \sim 100$  эВ [11]. Более точное выражение для цены электрона введено в § 2.2.

Для определения величины электрического поля в плазме воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

которое получается из уравнений Максвелла без учета тока смещения. Рассмотрим скин-слой в плоском случае. Обозначим  $x$  координату, перпендикулярную плоскости оболочки, и пусть ионизирующий газ находится в области  $x > 0$ . Пусть плотность тока  $\mathbf{j}$  и электрическое поле  $E$  направлены вдоль оси  $x$ . Тогда уравнение (1.2) примет вид:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (1.3)$$

Оно описывает скинирование электрического поля в области  $x > 0$ .

Краевое условие для электрического поля при  $x=0$  получается при интегрировании уравнения (1.3) по  $x$  от 0 до  $\infty$  с учетом, что  $\partial E/\partial x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{4\pi}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial j}{\partial t} dx = -\frac{4\pi}{c^2} j, \quad (1.4)$$

где  $\dot{J} = dJ/dt = (1/l) dI/dt$  — производная тока на единицу длины оболочки  $l$ .

Из уравнения (1.4) видно, что градиент напряженности электрического поля на границе плазмы определяется производной по времени от тока на единицу длины оболочки ( $1 \text{ А} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$  соответствует градиенту электрического поля  $4\pi \cdot 10^{-9} \text{ В/см}^2$ ).

Скин-слой в ионизирующемся газе будем рассматривать в этом параграфе начиная с такой стадии, когда сопротивление плазмы уже гораздо меньше индуктивного сопротивления внешнего контура. В этом случае напряжение источника приходится в основном на контур и ток через плазму определяется индуктивностью внешнего контура

$$dI/dt = c^2 U/L, \quad (1.5)$$

где  $U$  — напряжение источника;  $L$  — индуктивность контура.

Введем обозначение

$$\chi = 4\pi U/LL, \quad (1.6)$$

тогда

$$-\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=0} = \chi. \quad (1.7)$$

$\chi$  является важным параметром для описания начальной стадии. Развитие разряда в начальной стадии, включая начало движения газа и отрыв оболочки от стенки, зависит от состава газа, его начального давления  $p$  и параметра  $\chi$ . Параметр  $\chi$  определяет градиент электрического

поля на границе плазмы, и его удобно выражать в В/см<sup>2</sup>. Для разрядной камеры с радиусом изолятора  $R$

$$\chi = 2U/RL. \quad (1.8)$$

Здесь индуктивность  $L$  удобно выражать в см.

Проводимость газа  $\sigma$  при малой степени ионизации ( $\xi < 0,01$ ) определяется столкновениями электронов с атомами  $\sigma = e^2 n_e \tau_{ea} / m_e$ . Время свободного пробега электронов в водороде равно  $\tau_{ea} = 2,1 \times 10^{-10} / p$ , где  $p$  — давление водорода в мм рт. ст., поэтому проводимость плазмы можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_1 \xi, \quad (1.9)$$

где  $\xi = n_e / n_a$ , а константа  $\sigma_1 = 3,7 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

Используя выражение для проводимости (1.9) и учитывая, что  $j = \sigma E$ , представим уравнения (1.1) и (1.3) в переменных  $\xi$  и  $E$ :

$$\partial \xi / \partial t = \sigma_1 \xi E^2 / \epsilon n_a; \quad (1.10)$$

$$\partial \xi E / \partial t = D_1 \partial^2 E / \partial x^2, \quad (1.11)$$

где  $D_1 = c^2 / (4\pi \sigma_1) = 1,9 \cdot 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$ . Приведем эти уравнения и граничное условие (1.7) к безразмерному виду. Для этого примем следующие единичные значения переменных:

$$\left. \begin{aligned} t_{\text{ед}} &= (\epsilon n_a 4\pi / c^2)^{1/2} \chi^{-1} = 1,2 \cdot 10^{-4} p^{1/2} \chi^{-1}; \\ x_{\text{ед}} &= (t_{\text{ед}} D_1)^{1/2} = 1,5 p^{1/4} \chi^{-1/2}; \\ E_{\text{ед}} &= x_{\text{ед}} \chi = 1,5 p^{1/4} \chi^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) при этом примут вид

$$\partial \xi E / \partial t = \partial^2 E / \partial x^2, \quad \partial \xi / \partial t = \xi E^2, \quad (1.13)$$

а граничные условия для  $E$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (1.14)$$

Полученные уравнения имеют автомодельное решение в виде

$$E = e(t)r t^{-1/2}, \quad \xi = \eta(r) t^2, \quad (1.15)$$

где переменная

$$r = x t^{-1/2}. \quad (1.16)$$

При подстановке (1.15) и (1.16) в (1.13) и (1.14) переменные  $r$  и  $t$  разделяются, в результате имеем уравнения, зависящие только от  $r$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 e}{dr^2} &= \eta \left[ \frac{de}{dr} \frac{r}{2} + e \left( e^2 - \frac{1}{2} \right) \right]; \\ \frac{d\eta}{dr} &= 2 \frac{\eta}{r} (e^2 - 2); \\ \left. \frac{de}{dr} \right|_{r=0} &= -1, \quad \left. \frac{de}{dr} \right|_{r=\infty} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Из (1.15) и (1.16) следует, что электрическое поле на краю  $E|_{x=0}$  и толщина скин-слоя  $\delta \sim x/r$  уменьшаются в процессе скинирования как  $t^{-1/2}$ , а степень ионизации газа на краю растет как  $t^2$ . Пространственные изменения  $E$  и  $\xi$  и их временные изменения в других точках ( $x \neq 0$ ) можно получить из численного решения уравнения (1.17).

Решение уравнений (1.17) имеет свободный параметр, связанный с некоторым произвольным выбором начального распределения степени ионизации в разрядной камере,

т. е. имеется однопараметрическое семейство автомодельных решений. Для двух типичных представителей этого семейства на рис. 2 приведены зависимости  $e$  и  $\eta$  от  $r$ . Рис. 2, а соответствует равномерной по пространству очень малой начальной степени ионизации газа, а рис. 2, б — линейно возрастающей с расстоянием от изолятора. На рис. 2 видно, что главный вклад в эффект скинирования тока ( $j = \sigma E$ ) дает различие проводимости  $\sigma$  в токовой оболочке и в остальной части пространства, занимаемого плазмой. Изменение же напряженности электрического поля в пространстве сравнительно невелико. Анализ показывает [20], что поле вдали от оболочки по сравнению с полем в ней падает только на 30%, а степень ионизации на этих же расстояниях изменяется на несколько порядков.

Несмотря на то что разница в напряженности электрического поля невелика ( $\sim 30\%$ ) и вносит непосредственно (в произведение  $\sigma E$ )

незначительный вклад в скинирование тока, эта разница является очень важной, так как именно она приводит к различию на несколько порядков в степени ионизации для различных частей камеры. Это получается из-за того, что увеличение степени ионизации экспоненциально зависит от  $E$ . Обычно начальная степень ионизации очень мала ( $< 10^{-8}$ ), и за время нарастания ионизации в оболочке на шесть — восемь порядков разница в степени ионизации для различных частей камеры достигает трех-четырёх порядков. Действительно, пусть первоначально газ равномерно ионизован по всему объему и  $E_0(t)$  — напряженность электрического поля в оболочке. В центральной части камеры (вдали от оболочки) поле на 30% меньше, т. е.  $\sim 0,7 E_0(t)$ . Согласно уравнению  $\partial \xi / \partial t = \xi E^2$  получается, что если степень ио-

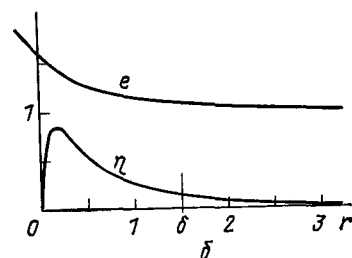
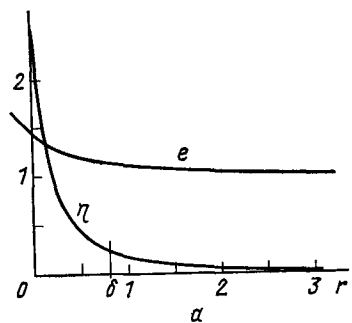


Рис. 2 Автомодельное решение задачи о скин-слое в ионизирующемся газе.

$$a - e(0) = 2^{1/2} = 1,44, \quad b - e(0) = 2,5^{1/2} = 1,53$$

низации в оболочке  $\xi_1$  увеличится в  $N$  раз по сравнению с начальной  $\xi_0$ :

$$\xi_1 = \xi_0 N = \xi_0 \exp\left(\int_0^t E_0^2(t') dt'\right), \quad (1.18)$$

то степень ионизации вдали от оболочки за это же время увеличится приблизительно в  $N^{1/2}$  раз, так как

$$\xi_2 = \xi_0 \exp\left(\int_0^t (0,7E_0(t'))^2 dt'\right) = \xi_0 N^{0,49}, \quad (1.19)$$

например если  $\xi_1 = 10^8 \xi_0$ , то  $\xi_2 = 10^4 \xi_0$ , или отношение  $\xi_1/\xi_2 = 10^4$ .

Из автомодельного решения следует, как показано в работе [20], что эффективная толщина скин-слоя и электрическое поле в нем связаны соотношением

$$\delta = (0,5 \div 1) E/\chi, \quad (1.20)$$

где  $\chi$  определяется формулой (1.6). Это соотношение можно использовать для оценки параметров в ионизационном скин-слое и справедливо, пока степень ионизации меньше 1%. Формулу (1.20) можно получить также, если в оценочное выражение для толщины скин-слоя  $\delta^2 = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{J}{\dot{J}}$  подставить  $J = \sigma E\delta$  и  $\dot{J} = c^2\gamma/4\pi$ .

## § 1.2. Физические процессы при образовании токовой оболочки

За время образования токового слоя степень ионизации изменяется на много порядков — от  $10^{-8}$  до 1. Основное изменение параметров при этом соответствует автомодельному решению. Однако в начале разряда, когда значительная часть напряжения источника приложена к разрядной камере, решение задачи о скинировании тока отличается от автомодельного. Кроме того, на стадии, когда степень ионизации приближается к единице, вступает в действие много новых эффектов, что тоже нарушает автомодельность решения.

К физическим процессам, существенно влияющим на начало скинирования тока, относятся зависимость цены электрона от величины  $E/p$  и влияние проводимости плазмы на ток в контуре. Для малой степени ионизации водорода цена электрона в разрядах зависит от  $E/p$  как

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 0,2 \frac{E}{p} \exp(130p/E), \quad (1.21)$$

где  $\varepsilon$  в эВ, а  $E/p$  в В/(см·мм рт. ст.). Эта зависимость показана на рис. 3. Пунктиром отмечено постоянное значение  $\varepsilon = \hat{\varepsilon} = 100$  эВ, использованное в автомодельной задаче § 1.1. Резкий рост цены электрона при малых  $E/p$  происходит из-за того, что энергия, которую приоб-

ретае электрон на длине свободного пробега, недостаточна для ионизации. Медленный подъем цены электрона в области больших  $E/p$  связан с уменьшением эффективного сечения ионизации при энергиях много больше потенциала ионизации. При больших напряженностях электрического поля ( $E/p \gtrsim 10^3$  В/(см·мм рт. ст.))

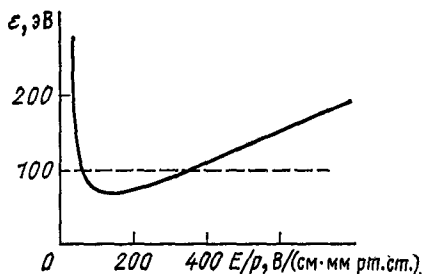
$$\varepsilon = 0,2 E/p. \quad (1.22)$$

Для учета влияния сопротивления плазмы на ток в контуре рассмотрим контур, состоящий из разрядной камеры, индуктивности  $L$  и источника с напряжением  $U$ . Уравнение контура в этом случае имеет вид

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} = h(E^0 - E_0), \quad (1.23)$$

где  $h$  — высота изолятора;  $E^0 = U/h$  — начальная напряженность электрического поля в камере;  $E_0$  — напряженность на границе плазмы, т. е. при  $x = 0$ .

Рис. 3. Зависимость цены электрона  $\varepsilon$  от  $E/p$



Можно показать, что заметный спад электрического поля от первоначального значения  $E^0$  начи-

нается при достижении в камере некоторой степени ионизации  $\xi^*$ , которая практически не зависит от конкретного значения очень малой начальной ионизации  $\xi^0$ . Для этого в уравнении контура (1.23) производную тока представим в виде

$$\frac{dI}{dt} = S \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (1.24)$$

где  $S$  — эффективная площадь сечения, по которому течет ток.

Толщину токового слоя в момент начала падения напряжения на камере можно получить, если в формулу (1.20) подставить начальную напряженность электрического поля  $E^0$ . Тогда отношение начальной толщины токового слоя  $\delta_0$  к радиусу камеры равно

$$\frac{\delta_0}{R} = \frac{E^0}{R\chi} = \frac{L}{2h}. \quad (1.25)$$

При  $2h > L$  значение  $\delta_0$  меньше радиуса камеры, поэтому электрическое поле вначале скинируется, т. е. становится неоднородным по радиусу, а затем падает. При  $L > 2h$  вначале происходит падение электрического поля, а затем его скинирование. В этом случае в формуле (1.24)  $S = \pi R^2$ , где  $R$  — радиус камеры.

Изменение плотности тока  $j = \sigma E$  связано, главным образом, с изменением проводимости, которая быстро растет вследствие ионизации. Поэтому

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial \sigma}{\partial t} \approx E \sigma_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \sigma_1 \xi \frac{E^2}{\varepsilon}. \quad (1.26)$$



При подстановке (1.24), (1.26) и (1.22) в (1.23) получим связь между напряженностью электрического поля и степенью ионизации:

$$\frac{1 - E/E^0}{(E/E^0)^2} = \frac{\xi}{\xi^*}, \quad (1.27)$$

где  $\xi^*$  — степень ионизации, при которой начинается падение электрического поля. Для цилиндрической камеры с радиусом изолятора  $R$

$$\xi^* = 4 \cdot 10^{-2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{1}{LU} = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\chi}{R (E^0)^2} \quad (1.28)$$

( $L$  выражено в см,  $U$  в В,  $\chi$  — в В/см<sup>2</sup>,  $E^0$  — в В/см).

На рис. 4 показана зависимость  $E/E^0$  от  $\xi/\xi^*$ . Момент достижения степени ионизации  $\xi = \xi^*$  соответствует падению электрического поля примерно на 40%. При начальной степени ионизации  $\xi_0 < \xi^*$  точное значение  $\xi_0$  проявляется только в величине «задержки» начала скинирования.

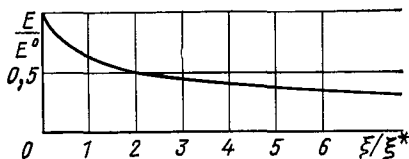


Рис. 4. Относительное падение электрического поля в зависимости от степени ионизации

Процесс начального падения электрического поля в действительности еще более сложный. Это связано, во-первых, с тем, что при больших  $E/p$  происходит еще более резкое падение эффективности ионизации, чем это следует из формулы (1.22). Экспериментальная зависимость скорости ионизации в водороде для  $E/p$  до  $10^4$  В/(см·мм рт. ст.) имеется в работе [30]. Во-вторых, из-за малого числа электронов в начале процесса ионизации распределение электронной плотности сильно неоднородно вдоль направления пробоя и между электродами возникает волна ионизации [31]. В-третьих, если рассматривать процесс пробоя в реальных установках, то полное напряжение батареи может оказаться и не приложенным к камере, так как в начальной фазе время разгорания разряда в камере сравнимо с временем срабатывания разрядника, через который подается напряжение. Поэтому в самой начальной стадии напряжение на камере и ток определяются процессами, происходящими в разряднике.

Диффузия электронов оказывает некоторое влияние на толщину скин-слоя, особенно при малых давлениях газа (менее 1 мм рт. ст.). Поскольку на основной стадии разряда плотности электронов достаточна для выполнения условия квазинейтральности, то диффузия заряженных частиц поперек токового слоя является амбиполярной. Уравнение ионизации газа с учетом электронов имеет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\sigma E^2}{e} + \frac{\partial}{\partial x} D_a \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad (1.29)$$

где  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии, для водорода  $D_a = 10^4 T_e/p$ .

Кулоновские столкновения влияют на электропроводность плазмы, когда степень ионизации превышает несколько процентов. С учетом кулоновских столкновений электропроводность выражается в виде

$$\sigma = \left( \frac{1}{\sigma_a} + \frac{1}{\sigma_R} \right)^{-1}, \quad (1.30)$$

где для водорода  $\sigma_a = \sigma_1 \xi = 3,7 \cdot 10^{15} \xi$ ,  $\xi = 1,3 \cdot 10^{13} T^{3/2}$ .

Ступенчатая ионизация газа начинает играть роль при достижении в токовой оболочке значительной концентрации электронов ( $10^{13} \text{ см}^{-3}$  для водорода). Ступенчатая ионизация заключается в том, что часть возбужденных атомов не успевает «высветиться», прежде чем будет ионизована электронным ударом. Такая «доионизация» может проводиться даже сравнительно медленными электронами с энергией около 3 эВ. При плотности электронов больше  $10^{15} \text{ см}^{-3}$  основная часть атомов водорода ионизируется через возбуждение, т. е. путем ступенчатой ионизации. Для учета ступенчатой ионизации воспользуемся двухуровневой моделью, т. е. рассмотрим атом, имеющий один основной уровень для электрона и один возбужденный. Коэффициент ионизации атомов в этом случае можно представить в виде

$$S = S_0 + S_1 \varphi, \quad (1.31)$$

где  $S_0$  — коэффициент ионизации из основного состояния;  $S_1$  — коэффициент возбуждения основного состояния;  $\varphi$  — вероятность ионизации возбужденного атома. Численная зависимость коэффициента  $S$  от концентрации свободных электронов  $n_e$  и температуры  $T_e$  для водорода рассчитана в работе [32]. Расчеты выполнены с учетом многих уровней возбуждения в рамках столкновительно-излучательной модели в предположении, что время релаксации для возбужденных уровней много меньше времени изменения  $n_e$  и  $n_a$ . В этом случае заселенность любого уровня определяется концентрацией свободных электронов  $n_e$ , температурой  $T_e$  и количеством атомов в основном состоянии.

Энергия, излучаемая в линиях на один атом и один электрон, по двухуровневой модели равна

$$R_1 = S_1 (1 - \varphi) h\nu_{cp}, \quad (1.32)$$

где  $h\nu_{cp}$  — средняя энергия, приходящаяся на каждый акт перехода из возбужденного состояния атома в основное; для оптически прозрачной водородной плазмы  $h\nu_{cp} \simeq 10,5$  эВ.

Цена электрона  $\varepsilon$  складывается из потерь энергии на ионизацию  $I_i$  и на излучение  $R_1/S$ :

$$\varepsilon = I_i + R_1/S. \quad (1.33)$$

При  $n_e \ll 10^{13} \text{ см}^{-3}$  ступенчатая ионизация незначительна и выражение определяется формулой (1.21). В другом предельном случае, когда  $n_e \gg 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , возбужденные атомы водорода ионизируются электронными ударами, не успевая потерять свою энергию на излучение. Относительная роль переходов с излучением в этом случае резко падает,

поэтому энергия расходуется только на ионизацию и нагрев электронов. При этом

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = I_i. \quad (1.34)$$

Аппроксимационной формулой, связывающей два предельных случая и удовлетворительно описывающей переходную область, является [14,20]

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)/(1 + f), \quad (1.35)$$

где

$$f = 2,5 \cdot 10^{-7} n_e^{1/2} [1 - (\ln n_e - 13,5)^2] \quad (1.36)$$

( $n_e$  выражено в  $\text{см}^{-3}$ ).

Физические явления, рассмотренные в этом параграфе, используем для описания процесса формирования токовой оболочки в мощном импульсном разряде.

### § 1.3. Формирование токовой оболочки

Будем считать, что толщина токовой оболочки достаточно мала по сравнению с радиусом ее кривизны. В этом случае можно воспользоваться приближением тонкого слоя и рассматривать изменение основных величин в зависимости от времени и от координаты  $x$ , перпендикулярной плоскости оболочки.

При приложении электрического поля к слабоионизованному газу из-за джоулева тепловыделения газ ионизуется, а проводимость его повышается. Одновременно происходит падение и скинирование электрического поля в плазме. Эти процессы описываются уравнениями

$$\frac{\partial \sigma E}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}; \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\sigma E^2}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_a \frac{\partial n_e}{\partial x} \right). \quad (1.38)$$

Выражения для  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $D_a$  приведены в § 2.2.

Граничное условие для электрического поля при  $x = 0$  получается, если в уравнение контура (1.23) подставить соотношение (1.4). Это условие имеет вид:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=0} = -\chi \left( 1 - \frac{E|_{x=0}}{E^0} \right), \quad (1.39)$$

где  $\chi$  определяется формулой (1.6).

При достаточно большом расстоянии от границы плазмы ( $x = \infty$ ) нет поступления или потери энергии, т. е. дивергенция вектора Пойтинга равна нулю. Этому соответствует условие на бесконечности

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (1.40)$$

Граничные условия для плотности электронов имеют вид:

$$n_e|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial n_e}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (1.41)$$

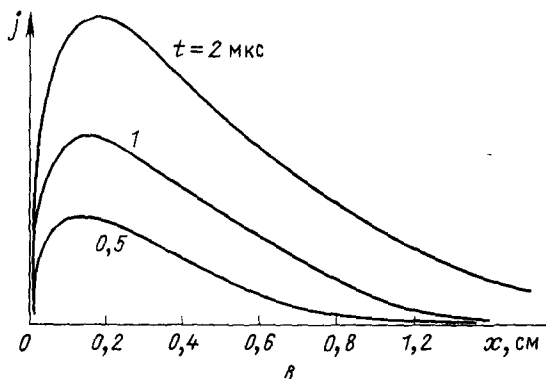
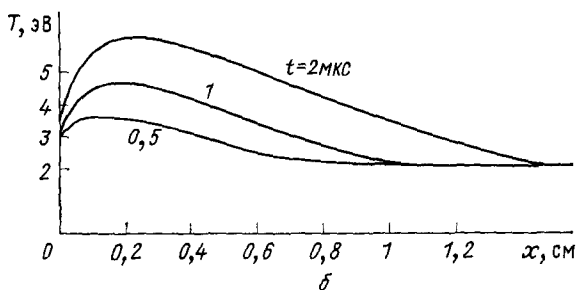
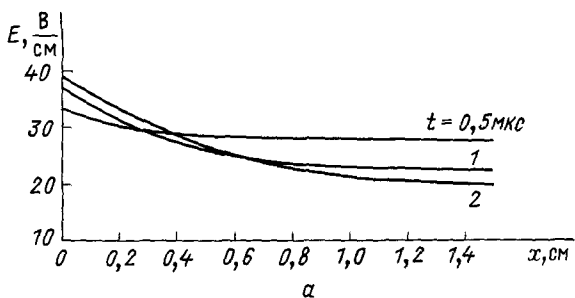
В начальный момент газ ионизован слабо, поэтому

$$\xi|_{t=0} = \xi^0 \ll 1. \quad (1.42)$$

Поскольку все напряжение в этот момент времени из-за большого сопротивления плазмы приложено к разрядной камере, то

$$E|_{t=0} = E^0 = U/h. \quad (1.43)$$

Полученная система уравнений описывает развитие токовой оболочки в водороде (дейтерии) и имеет два основных параметра: давление газа  $p$  и параметр  $\chi$ , характеризующий скорость нарастания тока на единицу периметра изолятора. От начальных условий решение задачи зависит слабо. В приведенных численных расчетах, моделирующих про-



цесс образования токовой оболочки, начальная степень ионизации  $\xi^0$  бралась равной  $10^{-8}$ , а начальное электрическое поле  $2000 \text{ В/см}$ .

На рис. 5 представлены результаты расчета для разряда в условиях, характерных для нецилиндрического Z-пинча ( $p = 1 \text{ мм рт. ст.}$ ,  $\chi = 30 \text{ В/см}^2$ ). На рис. 5, а видно, что электрическое поле в плазме быстро устанавливается на уровне, мало отличающемся от  $30 \text{ В/см}$ . Такое поведение электрического поля в ионизованном газе впервые было отмечено в работе [29]. Оно объясняется тем, что при  $E/p \gg 30 \text{ В/(см} \times \text{мм рт. ст.)}$  идет слишком быстрая ионизация газа, а резкое повышение проводимости в результате ионизации приводит к падению электрического поля. При  $E/p \ll 30 \text{ В/(см} \cdot \text{мм рт. ст.)}$  ионизация газа практически прекращается из-за очень большой цены электрона (см. рис. 3), а при постоянной проводимости и растущем токе в плазме электрическое поле увеличивается.

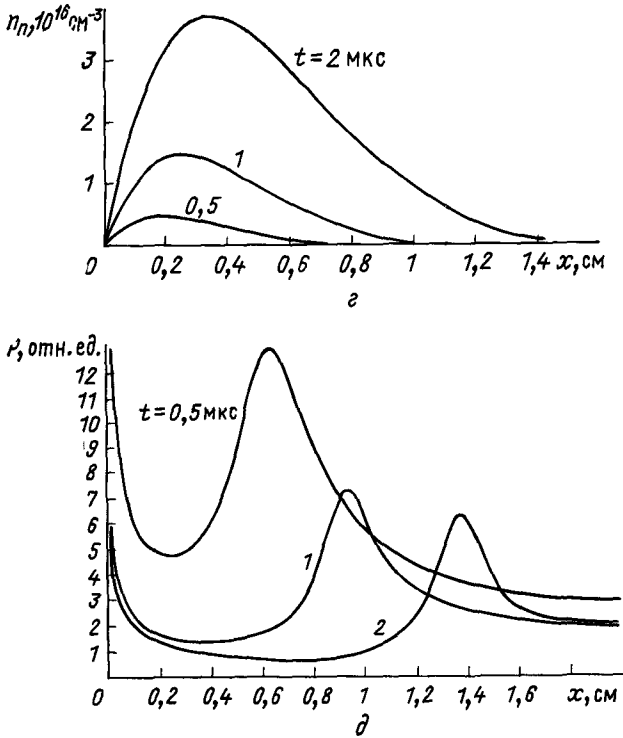


Рис 5. Зависимость напряженности электрического поля (а), температуры плазмы (б), плотности тока (в), плотности электронов (г) и интенсивности свечения плазмы (д) от расстояния до изолятора для различных моментов времени при  $p=1 \text{ мм рт ст}$  и  $\chi=30 \text{ В/см}^2$

Плотность тока  $j$  (рис. 5, в) и концентрация электронов  $n_e$  (рис. 5, з) наиболее резко меняются во времени, однако характерная толщина токового слоя и плазмы остается почти постоянной и равной  $\sim 1$  см.

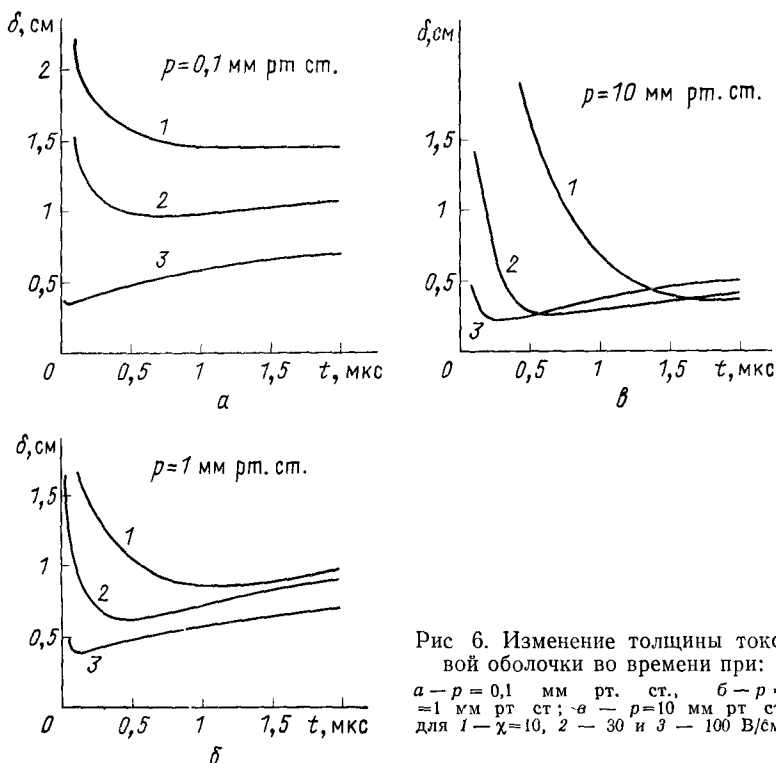


Рис 6. Изменение толщины токовой оболочки во времени при:

а —  $r = 0,1$  мм рт. ст., б —  $r = 1$  мм рт. ст.; в —  $r = 10$  мм рт. ст. для 1 —  $\chi = 10$ , 2 — 30 и 3 — 100 В/см<sup>2</sup>

Наиболее сложный характер имеет пространственно-временная зависимость интенсивности излучения из плазмы (рис. 5, д), вычисленная по формуле

$$P_1 = S n_e n_a (\epsilon - 13,6). \quad (1.44)$$

Четко различаются две области пространственного свечения — неподвижная область около изолятора и движущаяся светящаяся область. Оказывается, что наиболее ярко светящаяся область соответствует концентрации электронов  $\sim 4 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Это объясняется тем, что при меньшей концентрации электронов интенсивность излучения мала из-за малого количества возбуждений атомов электронами. При большей, чем  $4 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>, концентрации электронов существенную роль играет ступенчатая ионизация, так что вероятность доионизации возбужденного атома гораздо больше, чем вероятность его перехода «вниз» с излучением. В результате область с наибольшей электронной концентрацией не светится. Наиболее ярко светящаяся область (с концентрацией

около  $4 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>) перемещается в пространстве, создавая эффект движения светящейся волны. Подобная отходящая от изолятора волна свечения наблюдалась экспериментально в начальной стадии разряда в Z-пинче [33], сравнение этого явления с расчетом имеется в работе [20].

На рис. 6 показано изменение толщины токовой оболочки во времени для различных параметров  $\rho$  и  $\chi$ . При широком варьировании этих параметров толщина токовой оболочки к 2 мкс составляет 0,5—1,5 см, т. е. зависит от параметров слабо. Это связано с тем, что к 2 мкс при всех значениях параметров газ становится почти полностью ионизованным и проводимость определяется кулоновскими столкновениями:

$$\sigma_h = 1,3 \cdot 10^{13} T_e^{3/2}. \quad (1.45)$$

В ионизационном скин-слое температура электронов не может сильно изменяться и составляет 1—5 эВ. Поэтому толщина токовой оболочки, оцененная по формуле  $\delta = (2D_R t)^{1/2}$ , где  $D_R = c^2/4 \pi \sigma_h$ , равна 1 см для характерного времени  $\sim 1$  мкс. Исключение составляет очень низкое давление газа ( $< 0,1$  мм рт. ст.), когда на толщину скин-слоя сильно влияет диффузия электронов.

#### § 1.4. Устойчивость токовой оболочки в процессе ее формирования

В экспериментальных работах [5, 34—40] по мощным импульсным разрядам в газе отмечено, что токовая оболочка разбивается на отдельные светящиеся каналы, которые называются волокнами. Волокнистая структура оболочки очень наглядна и сохраняется в течение длительного времени. Во время движения оболочки пинча отдельные светящиеся каналы могут сливаться между собой. После этого момента волокнистая структура исчезает и далее происходит движение сплошной токовой оболочки. В нецилиндрическом Z-пинче из-за исчезновения волокнистой структуры оболочки в процессе ее сжатия эта структура почти не влияет на конечную стадию пинча, однако само явление разбиения токового слоя на отдельные волокна довольно интересно, причем зарождение волокон происходит одновременно с возникновением токовой оболочки.

Для анализа устойчивости токовой оболочки по отношению к разбиению на волокна используем решение двумерной нестационарной задачи [15]. К использовавшимся в предыдущем параграфе координатам  $t$  и  $x$  добавим координату  $y$  вдоль периметра токовой оболочки. Уравнения § 1.3, обобщенные на двумерный случай, имеют вид:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right); \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \frac{\sigma E^2}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_a \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_a \frac{\partial n_e}{\partial y} \right). \quad (1.47)$$

В уравнении (1.47) для проводимости плазмы  $\sigma$ , цены электрона  $\varepsilon$  и коэффициента амбиполярной диффузии  $D_a$  воспользуемся выражениями § 1.2.

Пусть внешние условия создания разряда таковы, что они сами по себе не вносят неоднородности по  $y$ , так что на расстоянии  $s$  от границы плазмы электрическое поле однородно по  $y$ :

$$\left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{x=-s} = 0. \quad (1.48)$$

Здесь, как и в одномерном случае, имеем

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=-s} = -\chi \left( 1 - \frac{E|_{x=0}}{E^0} \right). \quad (1.49)$$

Задание граничных условий для электрического поля при  $x = -s$  соответствует тому, что обратный токопровод в  $Z$ -пинчах находится

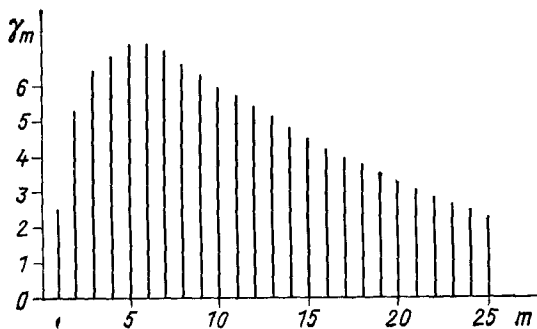


Рис. 7. Характерное распределение относительных амплитуд гармоник электронной плотности  $\gamma_m = [n_m(t)/n_0(t)]/[n_m(0)/n_0(t)]$  в зависимости от номера  $m$

не у самой границы плазмы, а на некотором расстоянии от нее. В непроводящей области  $-s \leq x \leq 0$  изменение электрического поля задается уравнением Лапласа:

$$\partial^2 E / \partial x^2 + \partial^2 E / \partial y^2 = 0, \quad (1.50)$$

При решении уравнений с помощью разностной схемы заметное влияние на решение оказывает шаг сетки. Это особенно существенно, если решение имеет колебательный характер. Поскольку ожидаемое решение в данной задаче имеет именно такой характер по координате  $y$ , то все величины в интервале  $Y$  вдоль оболочки раскладывались в ряд Фурье по координате  $y$ . Для коэффициентов этого ряда, зависящих от  $x$  и  $t$ , получаются дифференциальные уравнения, которые решались численно на ЭВМ. Описание численного метода имеется в работе [20].

Для возможности сравнения численного решения с конкретным процессом образования волокнистой структуры токовой оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче [40] параметры и начальные условия задачи выбраны следующими: начальная степень ионизации  $10^{-8}$ , начальное  $E/p = 2000$  В/(см·мм рт. ст.),  $\chi = 30$  В/см<sup>2</sup>,  $s = 2$  см. Известно [40], что в таких разрядах волокнистая структура появляется с шагом при-



мерно 1 см, поэтому длина рассматриваемого участка вдоль оболочки выбрана больше этого размера ( $Y = 8$  см).

Рассмотрим случай, когда начальные амплитуды всех гармоник возмущения ионизации газа имеют одинаковую величину, небольшую по сравнению с невозмущенным фоном. На рис. 7 показано распределение амплитуд гармоник через 1 мкс после начала разряда. Расчеты по-

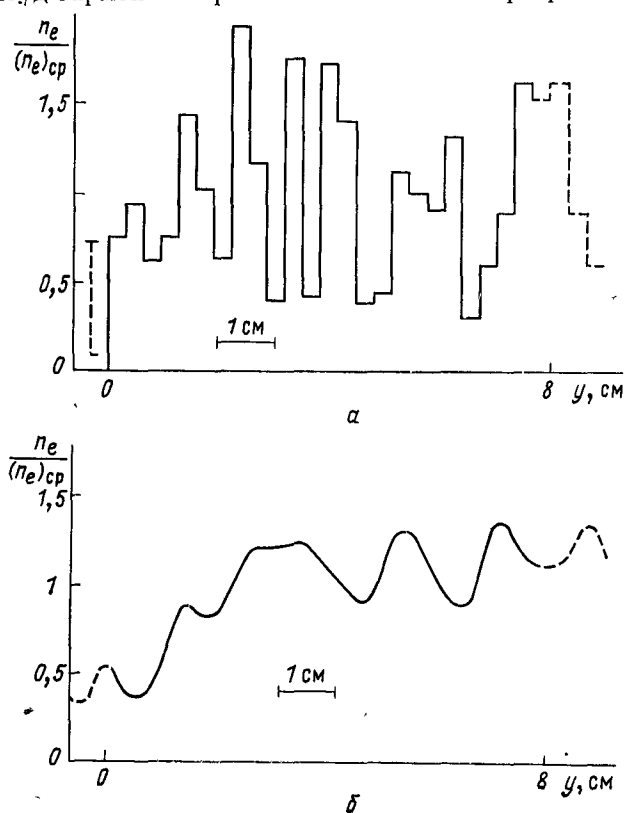


Рис. 8. Относительная плотность электронов вдоль оболочки при начальном хаотическом распределении  $t=0$  (а) и в моменты времени  $t=1$  мкс (б)

казывают, что относительная амплитуда гармоник растет со временем. Наибольшую амплитуду имеют гармоники с номером  $m_{\text{макс}} = 5 \div 8$ , так что возмущения с длиной волны  $\lambda = Y/m_{\text{макс}} = 1 \div 1,3$  см развиваются наиболее быстро. Эта длина волны и является характерным шагом периодической структуры вдоль оси  $y$ .

Кроме решения с одинаковыми начальными гармониками, была рассмотрена также задача, в которой задавалось некоторое хаотическое начальное распределение плотности электронов. Для этого случая на рис. 8 показано отношение плотности электронов вдоль оболочки к среднему значению ее в этом сечении на расстоянии 2 см от изолятора для двух моментов ( $t = 0$  и  $t = 1$  мкс). Видно, что к первой микросе-

кунде появляется некоторая квазипериодическая структура с шагом  $\sim 1,3$  см, что соответствует гармонике с максимальной амплитудой (см. рис. 7). Поскольку наиболее быстро растущая гармоника не очень сильно превосходит по амплитуде остальные гармоники, то «периодическая» структура токовой оболочки получается не очень регулярной. Полученные неоднородности в распределении плотности электронов качественно согласуются с результатами, где наблюдалась периодическая структура в таких рядах [20, 40].

### § 1.5. Образование волокнистой структуры токовой оболочки

Возникновение волокон связано с двумя эффектами. Во-первых, из всего спектра начальных возмущений выделяются некоторые гармоники, возрастающие быстрее других и определяющие шаг волокнистой структуры. Во-вторых, сильная неустойчивость процесса ступенчатой ионизации газа способствует усилению неоднородностей концентрации плазмы. Оба эти эффекта проявляются при численном моделировании (см. § 1.4) и могут быть качественно интерпретированы.

**Выделение гармоники.** Численное решение показывает, что затухание гармоник происходит в области как очень коротких, так и больших длин волн. Уменьшение амплитуды коротковолновых возмущений вызывается наличием диффузионных процессов выравнивания. К ним относятся диффузия заряженных частиц и теплопроводность. В рассматриваемой задаче была учтена только амбиполярная диффузия. Этого оказалось достаточно, чтобы существенно уменьшить амплитуды коротковолновых гармоник.

Причиной уменьшения амплитуд длинноволновых гармоник является сглаживающее влияние скин-эффекта во время процесса ионизации газа. Рассмотрим поведение малых неоднородностей с длиной волны  $\lambda$  в ионизационном скин-слое. Пусть  $E_0(x, t)$ ,  $\sigma_0(x, t)$  и  $j_0(x, t) = \sigma_0 E_0$  — основное решение, а  $E_1(t)$ ,  $\sigma_1(t)$  и  $j_1(t)$  — неоднородности с характерной длиной волны  $\lambda$ . При этом

$$j_1/j_0 = \sigma_1/\sigma_0 + E_1/E_0. \quad (1.51)$$

Для возмущений  $E_1$  и  $j_1$  уравнение (1.46) имеет вид

$$\partial j_1/\partial t = -D_E E_1 \sigma_0/\lambda^2, \quad (1.52)$$

где

$$D_E = c^2/4 \pi \sigma_0. \quad (1.53)$$

Следует обратить внимание, что с процессом ионизации связано некоторое характерное время  $\tau_I = \sigma E^2/\epsilon n_e$ , за которое степень ионизации существенно возрастает. Время  $\tau_I$ , очевидно, в несколько раз короче, чем полное время ионизации, за которое  $n_e$  увеличивается на несколько порядков. Если длина волны  $\lambda$  возмущения такова, что  $\lambda \gg \lambda_I$ , где

$$\lambda_I = (D_E \tau_I)^{1/2}, \quad (1.54)$$

то из (1.52) следует, что

$$|\partial j_1/\partial t| \ll |E_1 \sigma_0/\tau_I|. \quad (1.55)$$

Следовательно, если в плазме имеется флуктуация  $\sigma_1$ , с длиной волны  $\lambda \gg \lambda_I$ , то за время  $\lesssim \tau_I$ , возникающие в результате этого флуктуации  $E_1$  и  $j_1$  таковы, что  $|j_1| \ll |E_1 \sigma_0|$  или согласно (1.51)

$$E_1/E_0 \simeq -\sigma_1/\sigma_0. \quad (1.56)$$

Уравнение (1.47) с учетом (1.56) при пренебрежении диффузией электронов дает уменьшение относительной флуктуации  $\sigma_1/\sigma_0$  за время  $\tau_I/2$ :

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{2\sigma_1/\sigma_0}{\tau_I}. \quad (1.57)$$

Таким образом, при увеличении плотности  $n_1$  и соответственно  $\sigma_1$  возникает «обратное» возмущение (ослабление) электрического поля. Это приводит к соответствующему замедлению ионизации и к уменьшению амплитуды возмущений плотности электронов за время  $\sim \tau_I$ .

**Пределы стабилизации.** Диффузия электрического поля и диффузия заряженных частиц влияют на устойчивость процесса ионизации газа в противоположных направлениях. Характерная длина, до которой со стороны коротких волн происходит выравнивание степени ионизации диффузией частиц, равна  $\delta_D = (2D_a t)^{1/2}$ . Характерная длина, до которой со стороны длинных волн происходит выравнивание степени ионизации из-за скин-эффекта, равна  $(2D_E \tau_I)^{1/2}$ .

Это значение уменьшается со временем вследствие увеличения проводимости и в момент вступления кулоновских столкновений достигает своего наименьшего значения, равного  $\delta_K = (2D_K t)^{1/2}$ , где  $D_K$  определяется кулоновской проводимостью  $D_K = c^2/4\pi\sigma_K$ , а  $t$  — характерное время всего процесса.

Если  $\delta_D > \delta_I$ , т. е.  $D_a > D_K$ , то возмущения электронной плотности сглаживаются для всех длин волн. При  $D_a < D_K$  имеется некоторая область длин волн, для которой возмущения не будут сглаживаться. Отношение  $D_a/D_K$  характеризует область стабилизации. Диффузия частиц обратно пропорциональна давлению, поэтому стабилизирующее действие выравнивающих механизмов усиливается с уменьшением давления газа.

**Рост возмущений ионизации.** Причиной роста возмущений ионизации являются ступенчатые процессы. До вступления ступенчатой ионизации не происходит усиления начальных неоднородностей. Покажем это. Уравнение ионизации газа (1.47) без учета диффузии имеет вид

$$\partial n/\partial t = \sigma_1 E^2(t) n/\varepsilon. \quad (1.58)$$

При отсутствии ступенчатой ионизации цена электрона

$$\varepsilon = \varepsilon(E(t)/\rho) \quad (1.59)$$

не зависит от  $n$ . Тогда

$$n = n_0 \exp(\alpha), \quad (1.60)$$

где

$$\alpha = \sigma_1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{E^2(t')}{\varepsilon} dt'. \quad (1.61)$$

Сравним результаты ионизации в двух мысленно выделенных областях — «нормальной»  $n$  и «возмущенной»  $n^*$ . Пусть в этих областях электрическое поле изменяется одинаково во времени. В этом случае показатели  $\alpha$  тоже одинаковы, поэтому

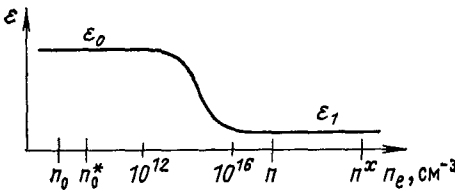
$$n^*/n = n_0^*/n_0. \quad (1.62)$$

Таким образом, при наличии только прямой ионизации относительная неоднородность не меняется со временем.

С вступлением процессов ступенчатой ионизации цена  $\varepsilon$  становится зависящей от  $n$  и происходит резкое увеличение амплитуды возмущений. Этот рост сильно зависит от начальной амплитуды. Действительно, с учетом ступенчатой ионизации уравнение (1.58) можно записать в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{Q(t)}{\varepsilon(n)} n, \quad (1.63)$$

Рис. 9. Схематическая зависимость цены электрона от плотности электронов



где  $Q = \sigma_1 E^2$ . Пусть, например, в некоторый начальный момент  $t_0$  невозмущенная плотность  $n_0 = n(t_0)$  меньше, чем возмущенная  $n_0^* = n^*(t_0)$ , и обе они малы ( $< 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ). Тогда цена электрона в момент  $t_0$  определяется прямой ионизацией и равна  $\varepsilon \approx 100 \text{ эВ}$ .

Рассмотрим положение к моменту времени  $t_1$ , когда  $n(t_1) \geq 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . При этой плотности электронов цена электрона определяется только энергией ионизации и нагревом электронов до окружающей температуры, т. е.  $\varepsilon_1 \approx 16 \text{ эВ}$  (рис. 9).

Проинтегрируем уравнение (1.63) по  $t$  от  $t_0$  до  $t_1$  для  $n$  и  $n^*$ :

$$\int_{n_0}^n \frac{\varepsilon(n')}{n'} dn' = \int_{t_0}^{t_1} Q(t') dt', \quad (1.64)$$

$$\int_{n_0^*}^{n^*} \frac{\varepsilon(n')}{n'} dn' = \int_{t_0}^{t_1} Q(t') dt'. \quad (1.65)$$

Вычитая эти уравнения и вынося из-за знаков интеграла  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  на участках, где  $\varepsilon$  постоянно (см. рис. 9), получим

$$\varepsilon_0 \int_{n_0}^{n_0^*} \frac{dn'}{n'} = \varepsilon_1 \int_n^{n^*} \frac{dn'}{n} \quad (1.66)$$

или

$$n^*/n = (n_0^*/n_0)^{\varepsilon_0/\varepsilon_1}. \quad (1.67)$$

Так как  $\varepsilon_0 \simeq 100$  эВ,  $\varepsilon_1 \simeq 16$  эВ, то  $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \simeq 6$ .

Зависимость (1.67) довольно сильная. Например, при  $n_0^*/n_0 = 1,4$  получается  $n^*/n = 8$ . Следовательно, при достаточном начальном значении возмущений могут развиваться неоднородности ионизации большой амплитуды.

Проведенные выше рассуждения позволяют представить общую картину процессов, приводящих к появлению волокнистой структуры оболочки.

**Образование токовых волокон.** В мощных импульсных разрядах характерное время образования оболочки очень мало ( $\sim 10^{-6}$  с). За это время не успевают развиваться те ионизационные неустойчивости, которые наблюдаются в стационарных газовых разрядах. Однако уже самое начало процесса — пробой газа — сопровождается возникновением заметных неоднородностей ионизации, которые являются следствием первоначальных «лавин» и «стримеров». С повышением концентрации электронов, которая сопровождается падением электрического поля, неустойчивости, связанные с начальным пробоем газа, прекращаются.

В дальнейшем до вступления ступенчатой ионизации относительная неоднородность не возрастает (1.62). Электронная плотность за это время возрастает на несколько порядков, от  $n_e \sim 10^8$  см<sup>-3</sup>, при которой произошел пробой газа и начинается падение электрического поля, до  $n_e \sim 10^{13}$  см<sup>-3</sup>, когда становится существенной ионизация газа. При этом, кроме пропорционального роста электронной плотности, происходит некоторое выравнивание ее, т. е. уменьшается относительная амплитуда гармоник возмущения. Длинноволновые возмущения уменьшаются за счет скин-эффекта, а коротковолновые — из-за диффузионных процессов выравнивания. Гармоники промежуточной области длин волн имеют после этого максимальную амплитуду. Получившееся распределение электронной плотности играет роль начального возмущения к моменту вступления ступенчатой ионизации. В результате нелинейного процесса усиления возмущений за время вступления ступенчатой ионизации может развиваться волокнистая структура токовой оболочки.

Из формулы (1.67) видно, что при малых начальных возмущениях относительная амплитуда  $(n^* - n)/n$  может возрасти в шесть раз. Отсюда следует, что для появления сильной неустойчивости с образованием токовых волокон необходимо, чтобы начальное возмущение

было значительным, а не бесконечно малым по сравнению с «фоном». При равномерной начальной ионизации газа указанная неустойчивость развиться не может.

Заметим, что с ростом плотности электронов, когда достигается  $n_e/n_a \gtrsim 2\%$ , справедливость уравнения (1.58) нарушается, так как начинают преобладать кулоновские столкновения, и проводимость перестает быть пропорциональной плотности электронов. В этом случае следовало бы в формуле (1.58) вместо  $\varepsilon_1 = 16$  эВ подставить другую цену электрона  $\varepsilon_{1k}$ , большую, чем 16 эВ, и отвечающую моменту, когда кулоновские столкновения становятся преобладающими. Цена электрона перестает падать из-за ступенчатых процессов при  $n_e \sim \sim 10^{15}$  см<sup>-3</sup> (для водорода), что соответствует степени ионизации 2% при давлении 1 мм рт. ст. Таким образом, при давлении водорода меньше 1 мм рт. ст. рост гармоник возмущения уменьшается из-за более раннего влияния кулоновских столкновений.

Развитие указанной неустойчивости прекращается, когда степень ионизации достигает нескольких процентов, однако возможны различные процессы, которые могут далее поддержать существование токовых неоднородностей — волокон. В первую очередь, это относится к перегретой неустойчивости, которая возникает из-за зависимости проводимости от температуры газа. Не исключены также механизмы, связанные с перемещением газа внутри оболочки, например пинчевание отдельных волокон.

## ГЛАВА 2

### РАЗВИТИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ОБОЛОЧКИ в Z-ПИНЧЕ

Теоретическое изучение динамики Z-пинча проводилось вначале на основе модели адиабатического сжатия плазменного столба с учетом инерции [3], а затем путем МГД-моделирования для полностью ионизованной плазмы [12, 21]. Здесь мы опишем развитие плазменной оболочки в Z-пинче в рамках трехжидкостной МГД-модели, т. е. с учетом того, что плазма состоит из ионов, атомов и электронов. Прежде чем дать полное описание трехжидкостной МГД-модели, рассмотрим отдельные физические явления, определяющие динамику Z-пинча.

#### § 2.1. Физические процессы при движении оболочки

В гл. 1 были проанализированы два наиболее важных процесса в Z-пинче, которые определяют его начальную стадию, — это скин-эффект и ионизация газа. На стадии движения оболочки в Z-пинче становятся существенными давление магнитного поля, движение ионов в радиальном направлении и увлечение ионами нейтрального газа, образование ударной волны и появление сложной структуры тока в оболочке. Рассмотрение этих явлений проведем согласно работам [11, 19].

**Ионизация.** При повышении степени ионизации в разряде функция распределения электронов по скоростям становится более максвелловской и для описания процесса ионизации газа на стадии движения оболочки в  $Z$ -пинче лучше воспользоваться переменной  $T_e$ , а не  $E/p$ , как это было сделано для начальной стадии разряда в гл. 1.

Рассмотрим ионизацию в модели атомов с одним возбужденным состоянием. В рамках одноуровневой модели возбуждения скорость образования электронов  $n_e$  и возбужденных атомов  $n_a^*$  определяется уравнениями:

$$\partial n_e / \partial t = S_0 n_e n_a + S_2 n_e n_a^*; \quad (2.1)$$

$$\partial n_a^* / \partial t = S_1 n_e n_a - \nu^* n_a^* - S_2 n_e n_a^*. \quad (2.2)$$

Здесь  $n_a^*$  — плотность возбужденных атомов;  $S_0$  и  $S_2$  — коэффициенты ионизации атомов из основного и возбужденного состояний;  $S_1$  — коэффициент возбуждения электронным ударом;  $\nu^*$  — частота перехода возбужденного атома в основное состояние. Первый член в правой части (2.1) дает прямую ионизацию, второй — ступенчатую.

Число возбужденных атомов  $n_a^*$  медленно меняется во времени по сравнению со скоростями их рождения и уничтожения, так что в (2.2) можно пренебречь  $\partial n_a^* / \partial t$ , в результате имеем

$$\partial n_e / \partial t = S n_e n_a, \quad (2.3)$$

где коэффициент ионизации газа  $S = S_0 + S_1 \varphi$  (1.31),  $\varphi = (1 + \nu^* / n_e S_2)^{-1}$  — вероятность ионизации возбужденного атома электронным ударом. Используя результаты работы [32], где коэффициент ионизации  $S$  для водорода вычислен с учетом многих уровней возбуждения, можно аппроксимировать  $S_0(T_e)$ ,  $S_1(T_e)$  и  $\varphi(T_e, n_e)$  следующими формулами:

$$S_0 = 8,1 \cdot 10^{-9} T_e^{1/2} \exp(-13,6/T_e); \quad (2.4)$$

$$S_1 = 2 \cdot 10^{-8} T_e^{1/2} \exp(-10,5/T_e); \quad (2.5)$$

$$\varphi = \left( 1 + \frac{6,3 \cdot 10^{10}}{T_e^{1/2} \exp(-3,5/T_e) n_e^{0,62}} \right)^{-1}, \quad (2.6)$$

где  $n_e$  в  $\text{см}^{-3}$ , а  $T$  в эВ.

**Температура электронов на стадии ионизации газа.** Электроны получают энергию на стадии ионизации в основном за счет джоулева нагрева, а потеря энергии происходит в результате ионизации газа и излучения. Изменение во времени температуры электронов на этой стадии мало, поэтому баланс энергии в электронной компоненте можно представить в виде

$$\sigma E^2 = S_0 n_e n_a (13,6 + 3T_e/2) + S_1 n_e n_a [10,5 + \varphi (3,1 + 3T_e/2)]. \quad (2.7)$$

Для не слишком высоких температур ( $T_e < 5$  эВ) имеем  $S_0 \ll S_1$  и  $\varphi(3,1 + 1,5T_e) < 10,5$ , поэтому баланс энергии приближенно приводится к виду:

$$\frac{\sigma}{N_0^2} \left( \frac{E}{p} \right)^2 = S_1 \xi (1 - \xi) 10,5, \quad (2.8)$$

где  $p$  — начальное давление газа в мм рт. ст., а константа  $N_0 = 6,8 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup>/мм рт. ст. для двухатомного молекулярного газа.

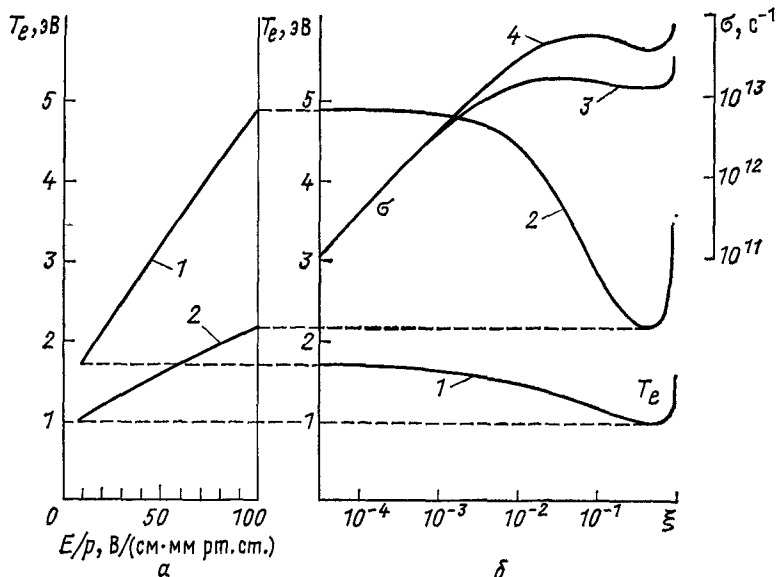


Рис 10 Зависимость температуры электронов на стадии ионизации водорода от  $E/p$  при  $\xi < 10^{-3}$  (кривая 1) и при  $\xi = 0,5$  (кривая 2) (а) и зависимость температуры электронов  $T_e$  и проводимости плазмы  $\sigma$  на стадии ионизации водорода от степени ионизации  $\xi$  (б) при  $E/p = 10$  В/(см·мм рт. ст.) (кривые 1 и 3) и при  $E/p = 100$  В/(см·мм рт. ст.) (кривые 2 и 4)

При  $\xi < 10^{-3}$  проводимость слабоионизованного газа  $\sigma \sim \xi$  и из соотношения (2.8) имеем, что температура электронов при малой степени ионизации определяется только величиной  $E/p$ . Эта зависимость показана на рис. 10, а (кривая 1). С ростом степени ионизации выше  $10^{-3}$  все большее количество электронов участвует в процессе ионизации газа, поэтому при том же энерговыкладе ( $\sim \sigma E^2$ ) повышение концентрации электронов вызовет уменьшение температуры электронов, что показано на рис. 10, б (кривые 1 и 2). Минимальная температура при фиксированном значении  $E/p$  получается при 50%-ной ионизации. При дальнейшем росте степени ионизации сказывается уменьшение количества атомов, которые излучаются и ионизируются, в результате температура электронов при  $\xi > 0,5$  возрастает. Значение  $\xi = 1$  соответствует полностью ионизованной плазме и температура ее уже больше



не определяется процессами ионизации и может быть сколь угодно большой. Минимальное значение температуры (т. е. при  $\xi = 0,5$ ) при заданной величине  $E/p$  показано на рис. 10, а (кривая 2). В диапазоне изменений  $E/r$  от 10 до 100 В/ (см·мм рт. ст.), что типично для стадии ионизации в быстрых разрядах [29] и при  $\xi < 70\%$  температура электронов находится в пределах от 1 до 5 эВ.

**Движение ионов.** Плазма, образующаяся в результате ионизации, стягивается к оси шнура под действием силы  $jB/c$ . Эта сила действует непосредственно на электроны, которые переносят ток. Радиальным электрическим полем, возникающим от небольшого сдвига электронов относительно ионов, она передается ионам, а затем посредством столкновений — нейтральному газу. Ионы двигаются к оси, причем их скорость вначале лимитируется трением о нейтральный газ. Свободный пробег ионов  $\lambda_i$  определяется, главным образом, резонансной перезарядкой. Сечение этого процесса  $\sigma_{in} \approx 3 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>. Скорость ионов относительно нейтрального газа определяется энергией, набираемой ими на одном свободном пробеге:

$$\frac{B^2}{8\pi} \lambda_i = \frac{\delta n_i m_i v_i^2}{2}, \quad (2.9)$$

где  $\delta$  — толщина оболочки;  $m_i$  — масса ионов, а  $\delta n_i$  определяет количество ионов на единицу площади оболочки.

На стадии разряда, когда цена электрона  $\sim 100$  эВ, а проводимость плазмы определяется столкновениями с атомами, получаем из [11]

$$\delta n_i = 4,5 \cdot 10^{23} p^{1/2} \chi t^{3/2}, \quad (2.10)$$

где давление газа в камере  $p$ , мм рт. ст.;  $\chi$ , В/см<sup>2</sup>, а  $t$ , с. В этом случае радиальная скорость ионов  $v_i$  представляется в виде:

$$v_i = 5 \cdot 10^6 \chi^{1/2} t^{1/4} / p^{3/4}. \quad (2.11)$$

**Увлечение нейтрального газа.** По мере того как число ионов растет, они начинают увлекать при своем движении нейтральные частицы. Условие непрозрачности ионного слоя для нейтрального газа имеет вид:

$$\delta n_i > \frac{1}{\sigma_{ia}} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}. \quad (2.12)$$

Толщина токового слоя  $\sim 1$  см (см. рис. 6), поэтому нейтральный газ полностью вовлекается в движение при плотности электронов  $3 \cdot 10^{14}$ . Это означает, что для начального давления водорода в камере  $\sim 1$  мм рт. ст. оболочка становится непрозрачной очень рано, когда степень ионизации составляет  $\sim 10^{-2}$ . Чтобы токовая оболочка стала непрозрачной для нейтрального газа, необходимо выделение в плазме  $5 \cdot 10^{-3}$  Дж тепловой энергии на единицу площади изолятора, т. е.  $\delta n_i \varepsilon = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2} \cdot 100 \text{ эВ} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/см}^2$ .

Из (2.10) и (2.12) получим момент начала непрозрачности ионного слоя:

$$t_{\text{непр}} = \frac{7,5 \cdot 10^{-7}}{\rho^{1/3} \chi^{2/3}}. \quad (2.13)$$

Расстояние, на которое смещаются ионы за это время относительно нейтрального газа, равно

$$\delta_i \sim v_i t_{\text{непр}} = 0,1 \rho^{-7/6} \chi^{-1/3}. \quad (2.14)$$

Отсюда видно, что если давление газа в разрядной камере не слишком мало ( $> 0,1$  мм рт. ст.), то расстояние, на которое успевают сместиться ионы относительно атомов, невелико ( $< 1$  см), т. е. меньше толщины токового слоя.

**Ударная волна.** После того как ионный слой стал непрозрачным, он сжимает нейтральный газ подобно поршню. При движении этого поршня со сверхзвуковой скоростью в газе возникает ударная волна. После того как сформировался «поршень», способный передавать газу магнитное давление  $B^2/8\pi$ , идет процесс ударного сжатия плазмы, который описывается в рамках магнитной гидродинамики. При этом достаточно подробное описание достигается в рамках трехжидкостной модели, в которой плазма рассматривается как смесь ионного, электронного и нейтрального газов.

## § 2.2. Трехжидкостная МГД-модель плазменной оболочки Z-пинча

Уравнения трехжидкостной МГД-модели рассматривались во многих работах, например, в [41—43]. В данном случае эти уравнения используются для описания газа, состоящего из атомов дейтерия, ионов дейтерия и электронов. Поскольку в таком газе происходит интенсивный обмен энергией между атомами и ионами в процессе перезарядки, то их температуры будем считать равными

$$T_i = T_a = T. \quad (2.15)$$

При условии квазинейтральности дейтериевой плазмы ( $z = 1$ ) электроны и ионы имеют равные плотности:

$$n_e = n_i = n \quad (2.16)$$

и равные гидродинамические скорости:

$$v_{er} = v_i. \quad (2.17)$$

С учетом этого запишем уравнения трехжидкостной магнитной гидродинамики в цилиндрически симметричной системе координат для одной пространственной переменной  $r$  согласно [44].

Уравнения непрерывности для заряженной и нейтральной компонент имеют вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_i n) = Snn_a; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_a n_a) = -Snn_a. \quad (2.19)$$

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (nv_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rnv_i^2) = & -\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial r} [n(T_e + T_a)] + \\ + v_{ia} n (v_a - v_i) + Snn_a v_a - & \frac{1}{cm_i} jB + \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{4}{3} \frac{\eta_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_i) - \right. \\ & \left. - 2 \frac{v_i}{r} \frac{\partial \eta_i}{\partial r} \right]; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_a v_a) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_a v_a^2) = & -\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial r} (n_a T_a) + \\ + v_{ia} n (v_i - v_a) - Snn_a v_a + & \\ + \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{4}{3} \frac{\eta_a}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_a) - 2 \frac{v_a}{r} \frac{\partial \eta_a}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнения сохранения энергии для электронов и для тяжелой компоненты (ионы плюс атомы) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} (nT_e) + \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rnT_e v_i) + \frac{nT_e}{r} \frac{\partial (rv_i)}{\partial r} = \\ = \frac{j^2}{\sigma} - \varepsilon Snn_a + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) - \frac{3m_e n}{m_i} (T_e - T_a) (v_{ea} + v_{ei}); \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} [T_a (n + n_a)] + \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rT_a (n_a v_a + nv_i)] = \\ = -\frac{T_a}{r} \left[ n_a \frac{\partial (rv_a)}{\partial r} + n \frac{\partial (rv_i)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\kappa_a \frac{\partial T_a}{\partial r} \right) + \\ + \frac{3m_e n}{m_i} (T_e - T_a) (v_{ea} + v_{ei}) + m_i (v_i - v_a)^2 \left( v_{ia} + \frac{Sn_a}{2} \right) n + \\ + \frac{\eta_i}{3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_i) \right]^2 + \eta_i \left[ r \frac{\partial (v_i/r)}{\partial r} \right]^2 + \\ + \frac{\eta_a}{3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_a) \right]^2 + \eta_a \left[ r \frac{\partial (v_a/r)}{\partial r} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Уравнения электромагнитного поля

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial (v_i B)}{\partial r} + c \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{j}{\sigma} \right). \quad (2.24)$$

Плотность тока

$$j = \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (rB). \quad (2.25)$$

Проводимость плазмы

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e(\nu_{ea} + \nu_{ei})}. \quad (2.26)$$

Здесь  $B$  — напряженность магнитного поля;  $m_e$  — масса электрона;  $m_i$  — масса дейтона,  $\nu_{ia}$  — частота перезарядки ионов на атомах;  $\nu_{ea}$ ,  $\nu_{ei}$  — частоты упругих столкновений электронов с атомами и ионами;  $\eta_i$  и  $\eta_a$  — вязкость ионной и нейтральной компонент плазмы;  $\kappa_e$  и  $\kappa_a$  — коэффициенты теплопроводности электронов и нейтрального газа;  $S$  — коэффициент ионизации;  $\epsilon$  — цена электрона, включающая в себя потери на излучение и ионизацию газа.

В уравнениях (2.20) и (2.21) члены  $Snn_a v_a$  и  $\nu_{ia}n(v_a - v_i)$  описывают обмен импульсом между заряженной и нейтральной компонентами плазмы в процессе ионизации и перезарядки. В уравнениях (2.22) слагаемое  $\epsilon Snn_a$  описывает потери энергии на излучение и ионизацию, член  $\frac{3m_e n}{m_i} (T_e - T_a)(\nu_{ea} + \nu_{ei})$  определяет обмен энергией атомов и ионов с электронами в процессе упругих столкновений, а слагаемое  $m_i(v_i - v_a)^2(\nu_{ia} + S n_a/2)n$  описывает превращение кинетической энергии тяжелых частиц в тепловую в процессах ионизации и перезарядки (диссипация из-за «трения»). В уравнениях движения также учитывается влияние вязкости плазмы, а в уравнении (2.23) — вязкостное тепловыделение при движении ионов и атомов.

В начальный момент весь объем разрядной камеры равномерно заполнен нейтральным газом с плотностью  $n^0$  и степенью ионизации  $\sim 10^{-7}$ . Начальная температура считается низкой (0,03 эВ), а начальные скорости компонент плазмы и значение магнитного поля во всем пространстве равны нулю.

Граничные условия на изолирующей стенке камеры следующие: скорости компонент равны нулю, температура — 0,03 эВ, напряженность магнитного поля принимается в виде некоторой заданной функции времени. В приведенном ниже варианте считается, что магнитное поле линейно растет со временем, так что на границе с изолятором

$$B = 10^8 \chi t, \quad (2.27)$$

где  $B$  в Гс, если  $\chi$  в В/см<sup>2</sup>, а  $t$  в с. Как уже указывалось в гл. 1, параметр  $\chi$  определяет градиент электрического поля на границе плазмы с изолятором. Его можно представить в виде

$$\chi = 2U/(LR), \quad (2.28)$$

где  $U$  — напряжение источника в В;  $L$  — индуктивность цепи в см;  $R$  — радиус разрядной камеры в см.

### § 2.3. Результаты численного моделирования движения оболочки

Численное решение уравнений трехжидкостной магнитной гидродинамики приведем для условий нецилиндрического Z-пинча. Для того чтобы не привязываться к конкретным размерам камеры, рассмотрим движение оболочки на той стадии, когда цилиндричностью системы можно пренебречь, т. е. в плоском случае. Уравнения, описывающие движение оболочки в плоском случае, получаются из уравнений (2.18)—(2.24), если заменить  $\partial/\partial r \rightarrow \partial/\partial x$  и  $r \rightarrow 1$  или если рассматривать динамику оболочки на участке длиной  $b$  при радиусе камеры  $R \gg b$ . Уравнения трехжидкостной магнитной гидродинамики для плоского случая имеются в работе [19]. Приведем вначале результаты расчетов динамики оболочки при разряде в камере с начальным давлением газа 1 мм рт. ст. и  $\chi = 30$  В/см<sup>2</sup>, согласно работе [19].

На рис. 11, 12 показаны изменения параметров плазмы в зависимости от расстояния до изолятора в некоторые моменты времени. Динамика оболочки на этих рисунках представлена в области от 0 до 10 см от изолятора и от 0 до 4 мкс во времени.

На рис. 11, а для четырех моментов времени показаны профили плотности вещества в оболочке. При  $t = 1$  мкс количество электронов еще довольно мало — максимальная плотность  $3,7 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>. Часть атомов увлекается ионами посредством перезарядки и отходит от изолятора, поэтому в распределении плотности атомов при  $t = 1$  мкс появляется провал на расстоянии 0,5 см от поверхности изолятора. При  $t = 2$  мкс образуется движущаяся оболочка, при этом часть вещества на расстоянии  $\sim 1$  см от изолятора остается незахваченной. На 3 и 4 мкс видна сформировавшаяся плазменная оболочка с резкими изменениями плотности на фронте ударной волны и на «токовом поршне».

Сложный профиль в оболочке имеет плотность тока  $j$  (см. рис. 11, б). Во-первых, ток распределен по всей оболочке, а не ограничен в тонком поверхностном слое, играющем роль магнитного поршня. Во-вторых, профиль плотности тока имеет два максимума. Один пик соответствует «поршню», а второй пик движется перед фронтом ударной волны в плазме.

Кроме двух движущихся пиков плотности тока имеется еще небольшой «пристеночный» ток (на рисунке не указан), обусловленный тем, что при движении часть нейтрального газа не захватывается оболочкой. Этот газ ионизуется, а в узком пристеночном слое происходит ускорение образующихся заряженных частиц до дрейфовой скорости  $cE/B$ , где  $E$  и  $B$  — напряженность электрического и магнитного поля в пристеночной области.

В гл. 1 было показано, что без учета движения плазмы ионизованный газ локализуется в узком слое и это вызывает сильное скинирование тока. Электрическое поле в плазме при этом меняется в пространстве слабо. Однако при движении плазмы вследствие сильной диссипации энергии движущегося газа на фронте ударной волны создается заметная ионизация газа в оболочке ( $> 1\%$ ). В результате появления

хорошей проводимости и из-за слабого изменения эффективного электрического поля в оболочке (см. рис. 11, в) ток распределен по всей оболочке. На фронте ударной волны, кроме скачка скоростей  $v_i$  и  $v_a$ , имеется еще скачок эффективного электрического поля в плазме  $E^* = E + \frac{1}{c} v_i B$  и плотности тока  $j$ . Это связано с тем, что  $\sigma$ ,  $E$  и  $B$  непрерывны на фронте ударной волны, а плотность тока определяется как  $j = \sigma E^* = \sigma \left[ E + \frac{1}{c} v_i B \right]$ , так что скачок в скорости  $v_i$  приводит к скачку в плотности тока на величину  $\sigma_\phi B_\phi v_i / c$ , где  $\sigma_\phi$  и  $B_\phi$  — проводимость плазмы и напряженность магнитного поля на фронте ударной волны. Этим эффектом и объясняется повышенная плотность тока непосредственно перед фронтом волны по сравнению с плотностью тока в самой оболочке.

Двойную структуру плотности тока можно правильно описать только в модели, учитывающей ионизацию газа. Это связано с тем, что в модели частично ионизованной плазмы температура в оболочке не пре-

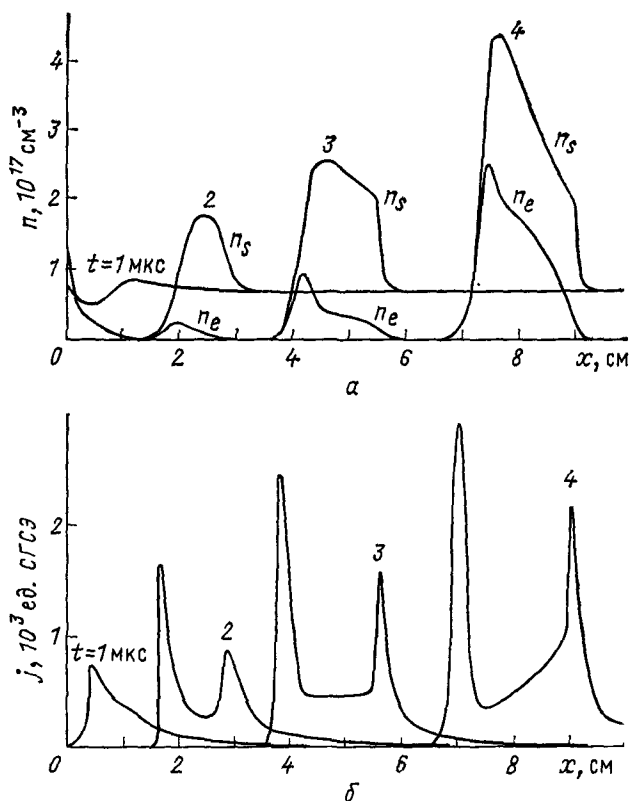
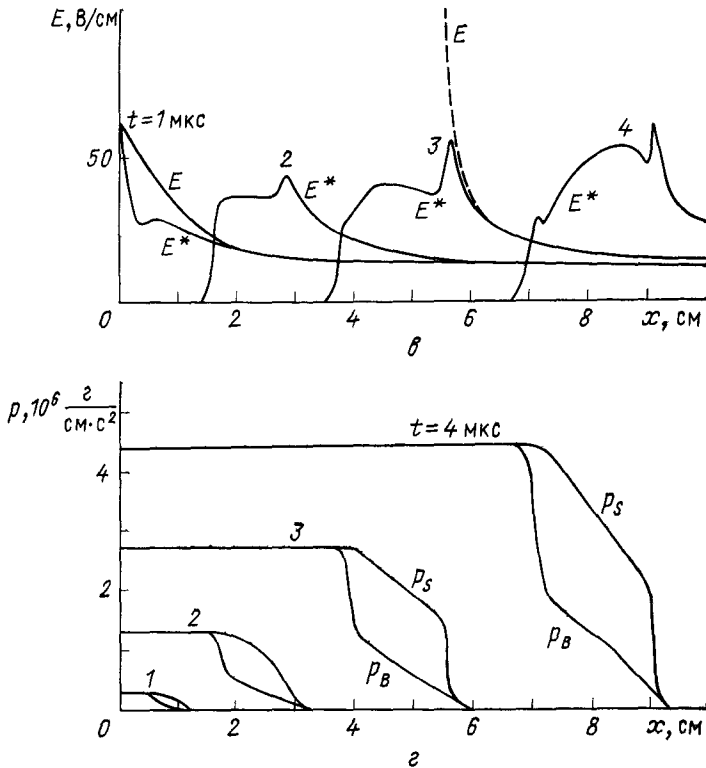


Рис. 11 Распределение параметров  $a$  — концентрация электронов  $n_e$  и суммарная концентрация атомов и ионов  $n_s$ ;  $b$  — плотность тока  $j$  в системе координат, движущейся вместе с электрон-ионной компонентой  $E^*$ ;  $z$  — дав-

вышает 2—3 эВ. Из-за низкой проводимости плазмы в оболочке магнитное поле успевает продиффундировать через оболочку в область перед фронтом ударной волны, образуя там второй пик плотности тока.

При прохождении токовой оболочки в плазме можно выделить три характерные области: газ до фронта ударной волны, плазма в оболочке и вакуумная область, т. е. область за токовой оболочкой. Имеются также две переходные области: фронт ударной волны и токовый поршень. Перед фронтом ударной волны степень ионизации газа очень мала ( $< 1\%$ ), а напряженность электрического поля  $\sim 15 \div 20 \text{ В}\cdot\text{см}^{-1}$ . В этой области идет процесс ионизации газа, поэтому температура стабилизируется там на уровне 3—5 эВ. Поскольку  $E$  и  $E^*$  отличаются на  $Vv_i/c$ , то перед фронтом ударной волны  $E$  и  $E^*$  практически совпадают (см. рис. 11, в).

В оболочке концентрации атомов, ионов и электронов велики, и обмен импульсом и энергией между ними происходит очень быстро. Поэтому их температура и скорости в оболочке выравниваются (рис. 12). Плазма в оболочке не полностью ионизована, и в ней актив-



плазмы в моменты времени:

тока;  $v$  — напряженность электрического поля в лабораторной системе координат  $E$  и в силене магнитного поля  $p_B$  и суммарное давление магнитного поля и плазмы  $p_s$

но идет процесс ионизации газа, причем при плотностях  $n_e \sim 10^{16} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$  ионизация является ступенчатой. Из-за наличия ступенчатой ионизации тепловая энергия в оболочке быстрее уходит на ионизацию, чем перед оболочкой, и температура стабилизируется на уровне  $\sim 2-3 \text{ эВ}$  (см. рис. 12, а). Эффективное электрическое поле  $E^*$  имеет в ионизирующемся газе такую напряженность, что  $E^*/\rho$  составляет  $20-50 \text{ В}/(\text{см}\cdot\text{мм рт. ст.})$ .

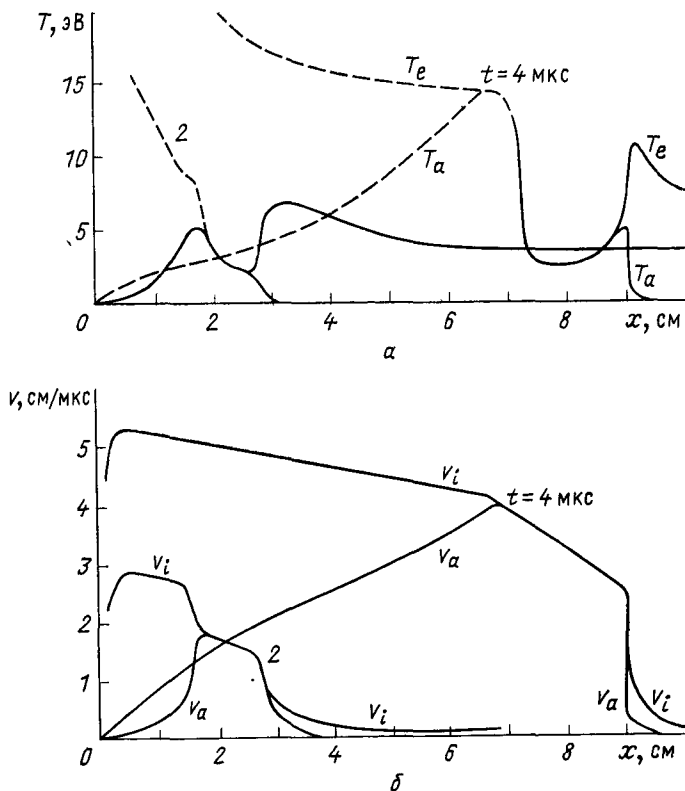


Рис 12. Распределение температуры электронов  $T_e$  и температуры атомов  $T_a$  (а), скорости атомов  $v_a$  и скорости ионов  $v_i$  (б) при  $p=1 \text{ мм рт. ст.}$  и  $\chi=30 \text{ В}/\text{см}^2$  для различных моментов времени

В вакуумной области имеется газ с плотностями  $n_a \sim 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и  $n_e \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , т. е. намного меньшими, чем в самой оболочке, где  $n_a \sim n_e \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . В вакуумной области электроны и ионы движутся в направлении движения оболочки практически с дрейфовой скоростью, так что эффективное электрическое поле в плазме очень мало ( $E^* \sim 0,2 \text{ В}/\text{см}$ ), хотя в той же самой области  $E \sim 100 \div 500 \text{ В}/\text{см}$ . В результате ток в вакуумной области очень мал (за исключением пристеночного слоя) и почти не происходит ускорения плазмы и тепловыделения в ней. Температура в этой области (пунктир-



ная линия на рис. 12, а) не имеет особого смысла, так как плотность вещества довольно мала.

Давление плазмы в оболочке практически постоянно (см. рис. 11, з) и составляет около половины давления магнитного поля в вакуумной области. Вне оболочки давление плазмы ничтожно мало. Давление маг-

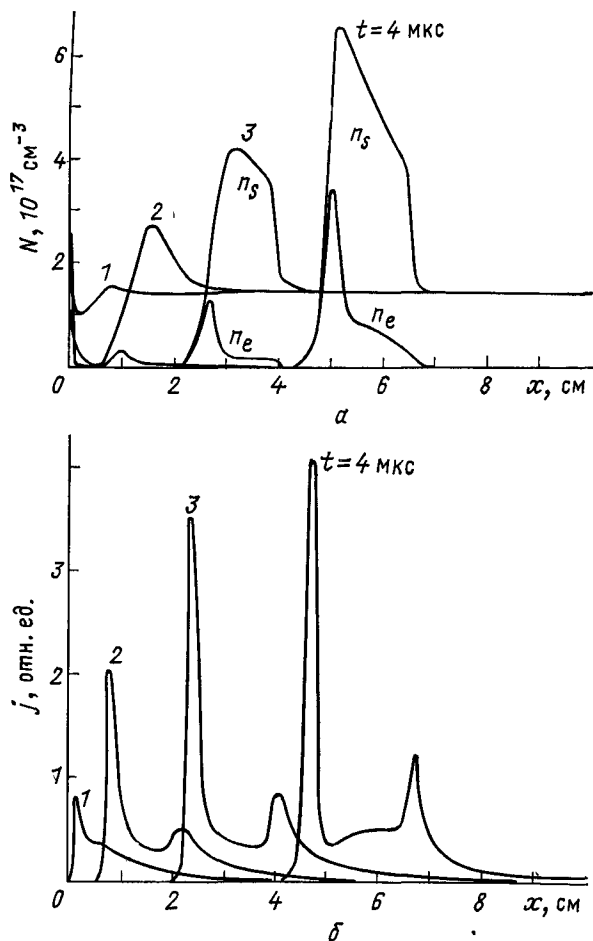


Рис. 13. Распределение плотности компонент плазмы (а) и плотности тока (б) при  $p=2$  мм рт. ст. и  $\chi=30$  В/см<sup>2</sup> для различных моментов времени

нитного поля спадает вдвое в области токового поршня и линейно уменьшается к фронту ударной волны. В результате суммарное давление в оболочке (давление плазмы и давление магнитного поля) линейно спадает к фронту ударной волны. Это означает, что вся плазма в оболочке ускоряется. Из-за ускоренного движения оболочки скорость

и плотность плазмы растут от фронта ударной волны к токовому поршню.

При другом давлении газа в камере и параметре  $\chi$  характер движения оболочки несколько меняется. С увеличением исходного давления

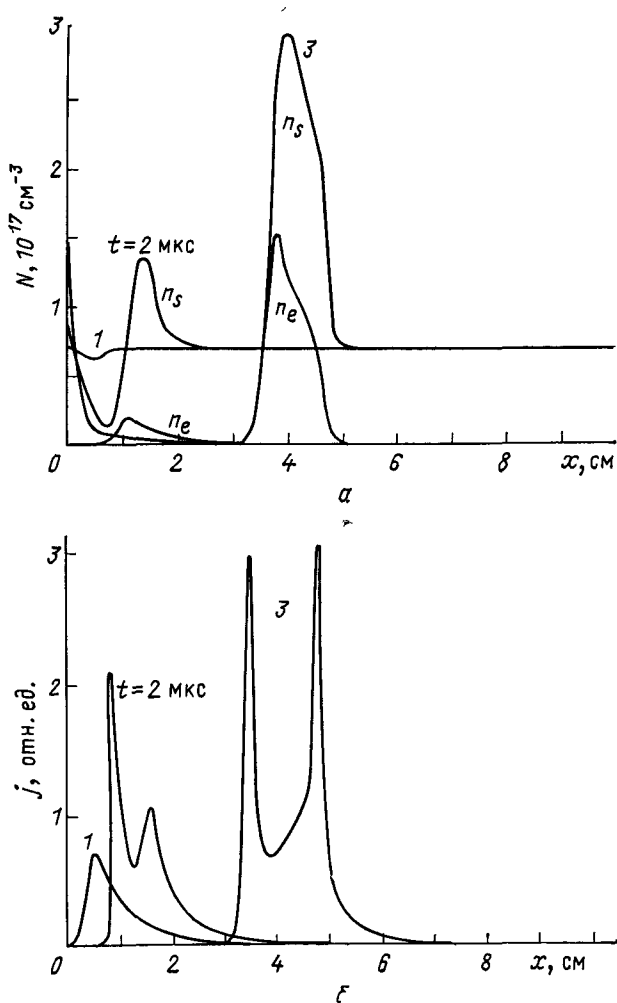


Рис. 14. Распределение плотности компонент плазмы (а) и плотности тока (б) при  $p=1 \text{ мм рт. ст.}$  и  $\chi=60 \text{ В/см}^2$  в различные моменты времени

газа  $p$  скорость оболочки падает, а ее толщина увеличивается (рис. 13). Уменьшение скорости оболочки приводит к менее выраженному токовому слою перед фронтом ударной волны.

При уменьшении давления газа или увеличении параметра  $\chi$  (рис. 14) амплитуда переднего токового слоя (перед фронтом ударной

волны) возрастает и может стать в некоторый момент больше основного, «толкающего» токового слоя.

Измерение плотности заряженных частиц в движущейся оболочке нецилиндрического Z-пинча [45] качественно согласуется с представленными расчетами. Более подробное сравнение с экспериментом результатов численного моделирования в рамках трехжидкостной МГД-модели дано в работе [44]. В этой работе представлены результаты измерений токовой структуры оболочки, полученные с помощью магнитных зондов, расположенных на различных расстояниях от изолятора внутри разрядной камеры. Измерения с помощью магнитных зондов довольно хорошо совпадают с результатами численного расчета, проведенного для этих условий эксперимента. Сравнение показывает, что представленная трехжидкостная МГД-модель практически полностью описывает довольно сложную структуру токовой оболочки Z-пинча в случае, когда количество примеси других газов в разряде мало.

Некоторые пояснения к причинам появления двойной структуры тока в плазменной оболочке может дать автомодельное решение упрощенной задачи.

#### § 2.4. Автомодельное решение задачи о структуре токовой оболочки

Рассмотрим движение оболочки в плоской геометрии. Профиль магнитного поля и скорости плазмы в оболочке будем считать установившимся и движущимся вместе с фронтом ударной волны с постоянной скоростью  $v_0$ , так что  $v = v(y)$  и  $B = B(y)$ , где  $y = x - v_0 t$ , а  $x$  — пространственная координата. Пусть  $y = 0$  соответствует фронту ударной волны. В области  $y > 0$  находится покоящийся газ. На фронте ударной волны скорость вещества скачком возрастает и становится в полностью ионизованной плазме равной  $3v_0/4$ , как должно быть для скачка на фронте ударной волны в одноатомном газе. Для частично ионизованной плазмы эта скорость может быть немного больше  $3v_0/4$ , но меньше  $v_0$ . В области плазменной оболочки зададим скорость линейно возрастающей при удалении от фронта ударной волны, как это имеет место в численном решении задачи (см. рис. 12, б):

$$v(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y > 0; \\ (3/4 - y/y_0)v_0 & \text{при } y \leq 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

где  $y_0$  — расстояние, на котором скорость изменяется на  $v_0$ . Примем проводимость плазмы  $\sigma$  постоянной во всем пространстве, тогда уравнение для магнитного поля в плоском случае имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial v B}{\partial x} + D \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}, \quad (2.30)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии магнитного поля,  $D = c^2/4\pi\sigma$ . Решение этого уравнения при заданной скорости (2.29) дает выражение для плотности тока

$$j(y) = \left. \begin{aligned} & \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{c}{4\pi} \frac{v_0 B_0}{D} \exp\left(-\frac{v_0 y}{D}\right) \text{ при } y > 0; \\ & \frac{c}{4\pi} \frac{v_0 B_0}{D} \left(\frac{y}{y_0} + \frac{1}{4}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v_0 y^2}{D y_0} - \frac{1}{4} \frac{v_0 y}{D}\right) \text{ при } y \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

где  $B_0$  — напряженность магнитного поля на фронте ударной волны.

На рис. 15 показаны результаты автомодельного решения при  $y_0 = 50D/v_0$  и  $y_0 = 10D/v_0$ . Перед фронтом ударной волны напряженность магнитного поля и плотность тока экспоненциально спадают, а на фронте производная магнитного поля терпит разрыв. Скачок плотности тока на фронте ударной волны определяется скачком скорости плазмы и равен

$$\Delta j = \frac{3}{4} \frac{v_0 \sigma B}{c}. \quad (2.32)$$

Толщина токового слоя перед фронтом ударной волны  $\delta_0$  определяется проводимостью плазмы в этой области и скоростью распространения фронта ударной волны:

$$\delta_0 = \frac{D}{v_0} = \frac{c^2}{4\pi\sigma v_0}. \quad (2.33)$$

Плотность тока за фронтом ударной волны обращается в нуль при

$$y = -y_0/4. \quad (2.34)$$

Рис. 15 Изменение скорости, напряженности магнитного поля и плотности тока в автомодельном решении при  $y_0 = 50D/v_0$  (а) и  $y_0 = 10D/v_0$  (б)

Первый пик плотности тока в автомодельном решении хорошо описывает токовый слой перед фронтом ударной волны, получающийся в численном моделировании (см. рис. 11, б). Наличие же максимума плотности тока за фронтом ударной волны при  $y_0 = 50D/v_0$  нельзя отождествлять с токовым поршнем оболочки, так как его образование связано, главным образом, со скинированием тока. Появление поршневого пика плотности тока можно описать, только вводя изменение  $\sigma$  в пространстве.

## ДВИЖЕНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ ОБОЛОЧКИ

В предыдущих главах было рассмотрено формирование и развитие плазменной оболочки при быстром нарастании тока в  $Z$ -пинче. Сформировавшаяся плазменная оболочка отрывается от стенок разрядной камеры и движется к оси, вовлекая в движение имеющийся в камере холодный нейтральный газ. Простейшее описание этого процесса для цилиндрического  $Z$ -пинча было впервые дано в работах [11,13], где предполагалось, что оболочка полностью «сгребает» и увлекает за собой встречающийся на ее пути газ. В модели сгребания, в отличие от модели М. А. Леонтовича и С. М. Осовца [3], масса движущегося вещества  $M(t)$  непрерывно растет за счет присоединения новых порций первоначально покоившегося газа. В гл. 2 этот процесс подробно рассмотрен на основе трехжидкостной МГД-модели, при этом найдено изменение всех параметров во времени и в пространстве. Однако, если нас интересует лишь перемещение оболочки и в связи с этим изменение ее инерции, то можно ограничиться более простым подходом. Как показывают результаты гл. 2, толщина оболочки всегда довольно мала по сравнению с ее радиусом, так как собранное в ней вещество сравнительно сильно сжато. Скорость газа внутри оболочки изменяется не очень сильно, и можно с достаточным для практики приближением приписать всему собранному веществу общую координату  $a(t)$  и общую скорость  $da/dt$ . Инерционный член запишется в виде  $d(Ma)/dt$ , где  $M = m_i n_0 (R^2 - a^2)$  — полная масса собранного газа.

Эта модель, вначале использованная для описания цилиндрического  $Z$ -пинча, потом в работах [16, 17] была обобщена для нецилиндрического  $Z$ -пинча. Движение токовой оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче имеет весьма сложный вид и играет решающую роль в процессе нагрева плазмы и ее сильного сжатия. По сути дела здесь происходит развитие и преимущественное сжатие одной «перетяжки» на пинче, но не случайно в произвольном месте, как при неустойчивости  $Z$ -пинча, а в специально организованных условиях. В нецилиндрическом  $Z$ -пинче форма электродов и расположение изолятора вызывают при движении оболочки искривление ее в плоскости, проходящей через ось системы. Благодаря этому характер движения оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче становится существенно иным, чем в цилиндрическом. Из-за искривления оболочки происходит сброс массы из области наибольшего пережатия в другие области оболочки. В результате такого движения оболочки количество частиц в сечении пинча в месте максимального сжатия уменьшается. Это обеспечивает в сжатом пинче согласно (В.1) повышенную температуру плазмы по сравнению с цилиндрическим пинчем. Кроме того, поскольку в нецилиндрическом  $Z$ -пинче плазменная оболочка сходится к оси на коротком участке, индуктивность самого пинча получается меньшей. Это приводит при одной и той же энергии к увеличению тока в момент особенности. Оба указанных фактора способствуют увеличению температуры в пинче и тем самым увеличению нейтронного излучения из него.

### § 3.1. Одномерная модель полного сгребания газа

Рассмотрим сжатие оболочки  $Z$ -пинча в цилиндрической камере с радиусом  $R$ , не учитывая при этом изменения параметров вдоль оси системы. Если пренебречь давлением плазмы, то уравнение движения оболочки в радиальном направлении записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left( M \frac{da}{dt} \right) = -\frac{B^2}{8\pi} 2\pi a, \quad (3.1)$$

где  $M$  — масса движущейся плазмы на единицу высоты пинча;  $da/dt$  — радиальная скорость оболочки;  $B$  — напряженность магнитного поля на поверхности плазменного столба;  $a$  — текущий радиус оболочки. Во время движения оболочки масса, приведенная в движение, непрерывно увеличивается. Сходящаяся цилиндрическая оболочка при своем движении к оси захватывает находящийся перед ней газ и вовлекает его в процесс сжатия. Поскольку считается, что вся масса приведенного в движение газа сосредоточена на радиусе  $a(t)$ , то

$$M = \pi (R^2 - a^2)\rho_0, \quad (3.2)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность газа в камере. Так как напряженность магнитного поля определяется током, протекающим через пинч ( $B = 2I/ca$ ), то

$$\frac{d}{dt} \left[ \pi \rho_0 (R^2 - a^2) \frac{da}{dt} \right] = -\frac{I^2}{c^2 a}. \quad (3.3)$$

Это уравнение вместе с начальными условиями

$$a|_{t=0} = R \text{ и } \left. \frac{da}{dt} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.4)$$

описывает процесс сжатия оболочки в цилиндрическом  $Z$ -пинче. Для линейной зависимости тока  $I$  от времени

$$I(t) = It \quad (3.5)$$

характерный масштаб времени сжатия определяется величиной

$$t_1 = \left[ \frac{RC}{I} \right]^{1/2} M_0^{1/4}, \quad (3.6)$$

где  $M_0$  — масса газа, приходящаяся на единицу высоты пинча,  $M_0 = \pi R^2 \rho_0$ . Численное решение уравнения (3.3) с начальными условиями (3.4) показано на рис. 16 (кривая 2). В качестве масштаба времени

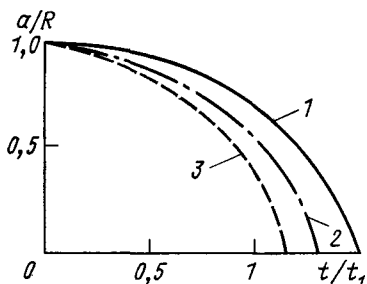


Рис. 16. Изменение радиуса оболочки во времени (кривая 1) в модели Леонтовича и Осовца [3]; в модели полного сгребания газа [11] (кривая 2) и при нецилиндрическом сжатии  $Z$ -пинча [46] (кривая 3)

взято  $t_1$ . Время, в течение которого радиус плазменного шнура становится равным нулю, согласно [11] с хорошим приближением равно

$$t_{oc} = \sqrt[4]{3} t_1 \approx 1,3t_1. \quad (3.7)$$

На этом же рисунке показано изменение радиуса пинча в модели Леонтовича и Осовца [3] при нулевой температуре начального газа.

Рассмотрим теперь сжатие оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче. Поскольку нецилиндрический  $Z$ -пинч характерен тем, что оболочка сжимается в очень узкой зоне, то набегающий на оболочку газ сразу же почти полностью сбрасывается в соседние области. В этом случае основной силой, противостоящей давлению магнитного поля, является сила давления потока набегающего на оболочку газа. Если скорость сжатия в области перетяжки равна  $v = -da/dt$ , то давление потока набегающего газа равно  $\rho_0 v^2$ . Приравняв это давление к давлению магнитного поля  $B^2/8\pi$ , получим, что скорость сжатия перетяжки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче равна

$$v = B/\sqrt{8\pi\rho_0}, \quad (3.8)$$

что составляет  $1/\sqrt{2}$  от альфвеновской скорости в плазме.

Соотношение (3.8) можно также получить из уравнения движения (3.1), если учесть сброс массы оболочкой

$$\frac{d}{dt} \left( M \frac{da}{dt} \right) = -\frac{B^2}{8\pi} 2\pi a - \frac{M}{\tau^*} \frac{da}{dt}, \quad (3.9)$$

где  $\tau^*$  — характерное время ухода вещества из плазменной оболочки за счет ее кривизны. Уравнение для изменения массы оболочки  $M$  имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = -2\pi a \rho_0 \frac{da}{dt} - \frac{M}{\tau^*}, \quad (3.10)$$

где первый член в правой части уравнения описывает увеличение массы оболочки за счет сгребания газа ( $da/dt < 0$ ), а второй — уменьшение ее из-за растяжения оболочки в результате ее кривизны. Из (3.9) и (3.10) имеем

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} = 2\pi a \rho_0 \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{B^2}{8\pi} 2\pi a. \quad (3.11)$$

Если происходит значительный сброс массы оболочкой, то член  $M \frac{d^2 a}{dt^2}$  мал в уравнении (3.11) по сравнению с остальными. В результате получается выражение (3.8) для скорости  $v = -da/dt$ .

При задании зависимости тока от времени в виде  $I = \dot{I}t$  и начальном условии  $a|_{t=0} = R$  решением уравнения

$$da/dt = -v = -2\dot{I}t/a\sqrt{8\pi\rho_0} \quad (3.12)$$

является

$$a = R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t_1^2} \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Это решение на рис. 16 показано пунктирной линией. Радиус пинча становится равным нулю в момент времени

$$t_{oc} = \sqrt[4]{2} t_1 \approx 1,2t_1. \quad (3.14)$$

Это время мало отличается от времени сжатия оболочки без потери массы в цилиндрическом  $Z$ -пинче (3.7). Таким образом, время особенности (время прихода оболочки на ось) мало зависит от потери массы, поэтому по экспериментальным данным о времени особенности очень трудно судить о полноте сгребания газа, а также о том, сжимается ли оболочка вся целиком или на некотором небольшом участке. Благодаря этой нечувствительности вычисленное время особенности всегда хорошо согласуется с экспериментом.

Время особенности зависит в основном от развития начального медленного движения оболочки, когда линейная зависимость тока от времени (3.5) обычно справедлива. Поэтому для большинства случаев (если характерное время контура не слишком мало) годится оценка времени сжатия по формулам (3.7) и (3.14). Эту оценку с достаточной точностью можно представить в виде:

$$t_{oc} = 0,1Rp^{1/4} (dI/dt)_0^{-1/2}, \quad (3.15)$$

где производная тока  $(dI/dt)_0$  выражена в А/с, начальное давление дейтерия в камере  $p$  в мм рт. ст., а начальный радиус оболочки  $R$  (для цилиндрического  $Z$ -пинча это радиус камеры) в см.

Оценку значения температуры в  $Z$ -пинче при схождении оболочки на оси после образования там квазиравновесного плазменного столба можно получить из условия (В.1). Для цилиндрического  $Z$ -пинча количество частиц в сечении постоянно и равно

$$N_0 = \pi R^2 n_0, \quad (3.16)$$

где  $R$  — радиус камеры,  $n_0$  — начальная плотность газа в камере. Температура плазмы в этом случае равна

$$T = I^2/4c^2 N_0, \quad (3.17)$$

где  $I$  — ток, протекающий через пинч.

В нецилиндрическом  $Z$ -пинче важнейшую роль играет перетекание массы вдоль оси пинча. В настоящее время отсутствует теория, позволяющая надежно определить количество частиц в сечении нецилиндрического  $Z$ -пинча, остающееся к моменту выхода оболочки на ось. Для оценки этой величины воспользуемся следующим приближением [46]. Из эксперимента известно, что оболочка в нецилиндрическом  $Z$ -пинче сходится в радиальном направлении с кривизной  $R_{кр} \sim \sim 1$  см в области максимального сжатия. Если скорость оболочки направлена по нормали к плоскости ее, то характерное время растяжения оболочки из-за наличия кривизны оболочки в плоскости  $r, z$  равно  $R_{кр}/v$ , где  $v = -da/dt$ . В результате растяжения оболочки количество частиц, приходящихся на единицу высоты оболочки, уменьша-



ется с этим характерным временем. В этом случае в уравнениях (3.9) и (3.10)

$$\tau^* = R_{кр}/v = -\frac{R_{кр}}{da/dt}. \quad (3.18)$$

Из (3.10) и (3.18) имеем

$$dN/da = -2\pi n_0 + N/R_{кр}. \quad (3.19)$$

Решением уравнения (3.19) при постоянном радиусе кривизны является:

$$N = 2\pi n_0 R_{кр} (a + R_{кр}) + C \exp(a/R_{кр}). \quad (3.20)$$

Константа интегрирования  $C$  находится из условия, что на радиусе  $R$  количество частиц в оболочке равно нулю. При достижении оболочкой оси ( $a = 0$ ) количество частиц в сечении пинча становится равным

$$N_1 = 2\pi n_0 R_{кр}^2 \left(1 - \frac{R/R_{кр} + 1}{\exp(R/R_{кр})}\right). \quad (3.21)$$

При  $R \gg R_{кр}$  имеем

$$N_1 = 2\pi n_0 R_{кр}^2, \quad (3.22)$$

т. е. при достаточно большом начальном радиусе по сравнению с радиусом кривизны количество частиц в сечении пинча в момент его сжатия на оси определяется только начальной плотностью газа в камере и кривизной оболочки.

Отношение температуры в цилиндрическом  $Z$ -пинче к температуре в нецилиндрическом  $Z$ -пинче при одном и том же токе и начальной плотности газа в камере определяется выражением

$$T_{цил}/T_{нецил} = 2R_{кр}^2/R^2. \quad (3.23)$$

Если радиус разрядной камеры  $\sim 10$  см, а радиус кривизны оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче  $\sim 1$  см, то при одних и тех же условиях в нецилиндрическом  $Z$ -пинче температура плазмы достигается выше, чем в цилиндрическом, примерно в 50 раз.

### § 3.2. Двумерная модель движения оболочки в нецилиндрическом $Z$ -пинче

Токовую оболочку в нецилиндрическом  $Z$ -пинче можно считать осесимметричной относительно оси  $z$ . Поэтому достаточно рассмотреть временное развитие кривой пересечения ее с меридианальной плоскостью в координатах  $r, z$  (рис. 17). Пусть точка  $A$  токовой оболочки в начале находилась в точке  $A_0$ , лежащей на поверхности изолятора. Положение точки  $A_0$  определим с помощью пространственной координаты  $\lambda$  вдоль поверхности изолятора. В этом случае можно ввести век-

тор  $\mathbf{OA} = \mathbf{R}(\lambda, t)$ , который является функцией  $\lambda$  и времени  $t$ . Этот вектор при  $t = \text{const}$  определяет конфигурацию оболочки, а при  $\lambda = \text{const}$  — траекторию движения какой-либо ее точки. Скорость элемента оболочки равна  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{R} / \partial t$ , вектор  $\partial \mathbf{R} / \partial \lambda$  направлен вдоль поверхности оболочки. Масса  $\Delta M$  элемента токовой оболочки, соответствующая участку  $\Delta \lambda$ , определяется из уравнения [16, 47]

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial t} = \rho_0 2\pi r \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right| \Delta \lambda, \quad (3.24)$$

где  $\rho_0$  — плотность невозмущенного газа. Длина элемента  $\Delta \lambda$  равна  $\frac{d\mathbf{R}}{d\lambda} \Delta \lambda$ , поэтому силу давления магнитного поля на элемент оболочки

$\Delta \mathbf{f}$  можно записать в виде:

$$\Delta \mathbf{f} = 2\pi r \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \right| \Delta \lambda \frac{B^2}{8\pi} \mathbf{n}. \quad (3.25)$$

В этом уравнении  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к поверхности оболочки и направленный в сторону плазмы;  $B$  — напряженность магнитного поля на поверхности оболочки;  $B = 2I/cr$ , где  $I$  — полный ток.

Уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \left( \Delta M \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right) = \Delta \mathbf{f} \quad (3.26)$$

Рис. 17. Система координат двумерной модели полного сгребания газа

после подстановки в него выражений (3.24) и (3.25) имеет вид

$$2\pi c^2 \rho_0 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \int_0^t r \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right| dt \right] = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \right| \frac{I^2}{r} \mathbf{n}. \quad (3.27)$$

Это уравнение описывает движение оболочки в нецилиндрическом  $Z$ -пинче при задании начальных и граничных условий тока во времени. Для определения тока можно воспользоваться уравнением электрической цепи

$$U - \frac{1}{C} \int_0^t I dt = RI + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d(LI)}{dt}, \quad (3.28)$$

где  $U$  и  $C$  — напряжение и емкость конденсатора, а  $R$  и  $L$  — сопротивление и индуктивность всей цепи;  $L = L_0 + L_1$ , где  $L_0$  — индуктивность внешней цепи  $Z$ -пинча, а  $L_1$  — индуктивность токовой оболочки  $Z$ -пинча, которая зависит от геометрии оболочки и возрастает по мере ее движения,

### § 3.3. Согласование движения оболочки с разрядным контуром

Двумерная модель сгребания газа с успехом применяется для определения осциллограмм тока и напряжения в нецилиндрическом Z-пинче до момента выхода оболочки на ось. В работе [18] эта модель была использована для определения условий согласования разрядного контура с движением токовой оболочки.

Условия согласования в работах [18, 48] были получены численным моделированием, а здесь мы изложим соображения, из которых эти условия получаются аналитически. Под согласованием обычно понимают такой подбор параметров разрядного контура, размеров камеры и давления газа в ней, при которых обеспечивается максимальный нейтронный выход. Этот критерий обычно близко совпадает с условием обеспечения максимального тока в момент сжатия оболочки на оси (тока в момент особенности). Далее в гл. 4 будет показано на основе простой модели плазменного фокуса, что действительно термоядерный нейтронный выход из Z-пинча тесно связан с током, протекающим через сжатый пинч. Существуют два независимых условия согласования: одно по индуктивности системы, а другое по размерам камеры и давлению газа в ней. Для получения максимума тока в момент наибольшего сжатия необходимо выполнить оба эти условия.

Условие по индуктивности получается, если учесть, что первоначально запасенная источником энергии  $W$  с эффективностью  $\gamma$  вначале переходит в энергию магнитного поля  $L_0 I_1^2/2$  внешней индуктивности  $L_0$  с током  $I_1$ , т. е.  $W\gamma = L_0 I_1^2/2$ . Когда оболочка начинает двигаться, эта энергия частично расходуется на сжатие пинча, и в момент максимального сжатия магнитная энергия становится равной  $(L_0 + L)I^2/2$ , где  $L$  — индуктивность разряда с уже образовавшимся фокусом, а  $I$  — ток в момент сжатия. Поскольку магнитный поток в системе сохраняется, т. е.

$$L_0 I_1 = (L_0 + L)I, \quad (3.29)$$

то

$$I = \frac{L_0 I_1}{L_0 + L} = \frac{(2\gamma W)^{1/2} L_0^{1/2}}{L_0 + L}. \quad (3.30)$$

При фиксированном значении  $W\gamma$  и при фиксированной индуктивности разряда  $L$  ток  $I$  максимален, если

$$L_0 = L. \quad (3.31)$$

При  $L_0 > L$  слишком большая энергия остается во внешнем контуре. При меньшем значении  $L_0$  слишком большое количество энергии расходуется на ускорение оболочки в начальной стадии ее движения, в результате этого удерживающий плазму ток в конечной стадии пинча становится меньше.

Кроме условия (3.31) для согласования разряда с источником энергии необходимо, чтобы характерное время движения оболочки до

выхода ее на ось (время особенности) совпадало с характерным временем передачи всей энергии от источника. Если ток линейно растет со временем ( $I = It$ ), а напряжение источника постоянно, то энергия  $W$  передается от источника за время

$$t = \sqrt{2W/U I}. \quad (3.32)$$

Сравнивая это время с характерным временем движения оболочки до оси, получим, что для согласования их необходимо, чтобы

$$R = 10\sqrt{2W/U\rho^{1/2}}, \quad (3.33)$$

где энергия  $W$  в Дж; напряжение источника  $U$  в В; давление дейтерия в камере  $\rho$  в мм рт. ст.; начальный радиус оболочки  $R$  в см.

### § 3.4. Влияние эффекта Холла на движение оболочки

В § 3.1 было показано, что сброс массы вещества во время движения оболочки приводит к увеличению температуры в момент схождения оболочки на оси, а основной причиной потери вещества оболочкой является ее кривизна. Увеличение кривизны оболочки может быть вызвано не только специальной геометрией электродов, но и скольжением тока вдоль поверхности анода. Скольжение разряда возникает из-за разрушения холловского электрического поля вдоль хорошо проводящей поверхности электрода [49, 50].

Учет эффекта Холла в плазме становится необходимым, если холловское электрическое поле сравнимо с омическим полем плазмы, т. е. если электроны плазмы замагничены ( $\omega_e B \tau_{ei} > 1$ ) и если параметр обмена  $\eta$  [10], выражающий отношение токовой скорости электронов к гидродинамической скорости плазмы, больше или сравним с единицей. Оценки и расчеты [51] показывают, что значение параметра  $\eta$  в  $Z$ -пинче обычно гораздо меньше единицы вплоть до схождения оболочки на оси разряда. Тем не менее учет эффекта Холла при моделировании  $Z$ -пинча важен, поскольку он приводит к существенным изменениям динамики разряда по сравнению с результатами [23] без учета этого эффекта.

Рассмотрим движение оболочки в  $Z$ -пинче на основе двумерного расчета в модели полностью ионизованной плазмы. В постановке расчета [51] учтены диффузия и «вмороженность» магнитного поля, изменение концентрации плазмы согласно уравнению непрерывности, движение под действием магнитной силы и собственного давления плазмы, обмен теплом между ионами и электронами, ионная  $\kappa_i$  и электронная  $\kappa_e$  теплопроводности, тензор вязкости ионов  $\pi$ , а также вязкостное тепловыделение  $Q$ . Для напряженности магнитного поля  $B$ , концентрации плазмы  $n$ , скорости  $v$ , температур  $T_i$  и  $T_e$  использовались следующие уравнения [51]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \left( \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\sigma} \right) + \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]; \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}(n\mathbf{v}). \quad (3.35)$$

$$Mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{grad}(nT_i + nT_e) + \operatorname{Div}(\overleftrightarrow{\pi}) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}[\mathbf{B} \times \mathbf{B}]; \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t}(nT_i) &= \operatorname{div}(\kappa_i \operatorname{grad} T_i) - nT_i \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \operatorname{div}\left(\frac{3}{2} nT_i \mathbf{v}\right) + \\ &+ \frac{3nm_e T_e - T_i}{m_i \tau_{ei}} + \operatorname{div}(\overleftrightarrow{\pi} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \operatorname{Div}(\overleftrightarrow{\pi}); \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t}(nT_e) &= \operatorname{div}(\kappa_e \operatorname{grad} T_e) - nT_e \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \\ &- \operatorname{div}\left(\frac{3}{2} nT_e \mathbf{v}\right) + \frac{3nm_e T_i - T_e}{m_i \tau_{ei}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Поскольку в рассматриваемой плазме влияние эффекта Холла мало [51], учет его важен лишь на границе плазмы с электродом. В данной задаче поверхность электрода (анода) соответствует  $z = 0$ . В силу хорошей проводимости электрода и непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля на границе двух сред радиальное электрическое поле вблизи электрода равно нулю. Это условие вместе с  $\sigma E_r = j_r - \omega_{eH} \tau_{ei} j_z$  приводит к

$$\left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\omega_{eH} \tau_{ei}}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB). \quad (3.39)$$

Выражение (3.39) используется в качестве граничного условия для (3.34) вместо обычно используемого  $\left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$  [23]. Именно это учитывает влияние эффекта Холла и дает качественно иной результат решения МГД-уравнений при моделировании движения оболочки в Z-пинче.

Геометрия и параметры разряда взяты характерными для нецилиндрического Z-пинча [48], начальное давление газа 1 мм рт. ст., ток 1,5 МА. В начальных условиях полагалось, что оболочка удалена от оси на расстояние  $r \approx 10$  см и движется со скоростью  $v_r \approx 10^7$  см/с. Коэффициент сжатия плазмы в оболочке в начальных условиях брался 4, а температура  $T_e = T_i = 30$  эВ. Температура невозмущенного газа считалась равной 1 эВ.

На рис. 18 изображены компьютерные графики концентрации плазмы и абсолютной плотности тока в ней для трех моментов времени:  $t = 0; 0,23; 0,34$  мкс. Оболочка движется к оси, сгребая при этом встречающийся ей газ.

Расчет показал, что при движении оболочки параметр замагниченности электронов в ней становится больше единицы. Отсутствие в приэлектродной зоне параллельного электроду электрического поля приводит к уменьшению проводимости плазмы в  $(1 + \omega_{eH}^2 \tau_{ei}^2)$  раз в направлении, перпендикулярном электроду. В этой замагниченной

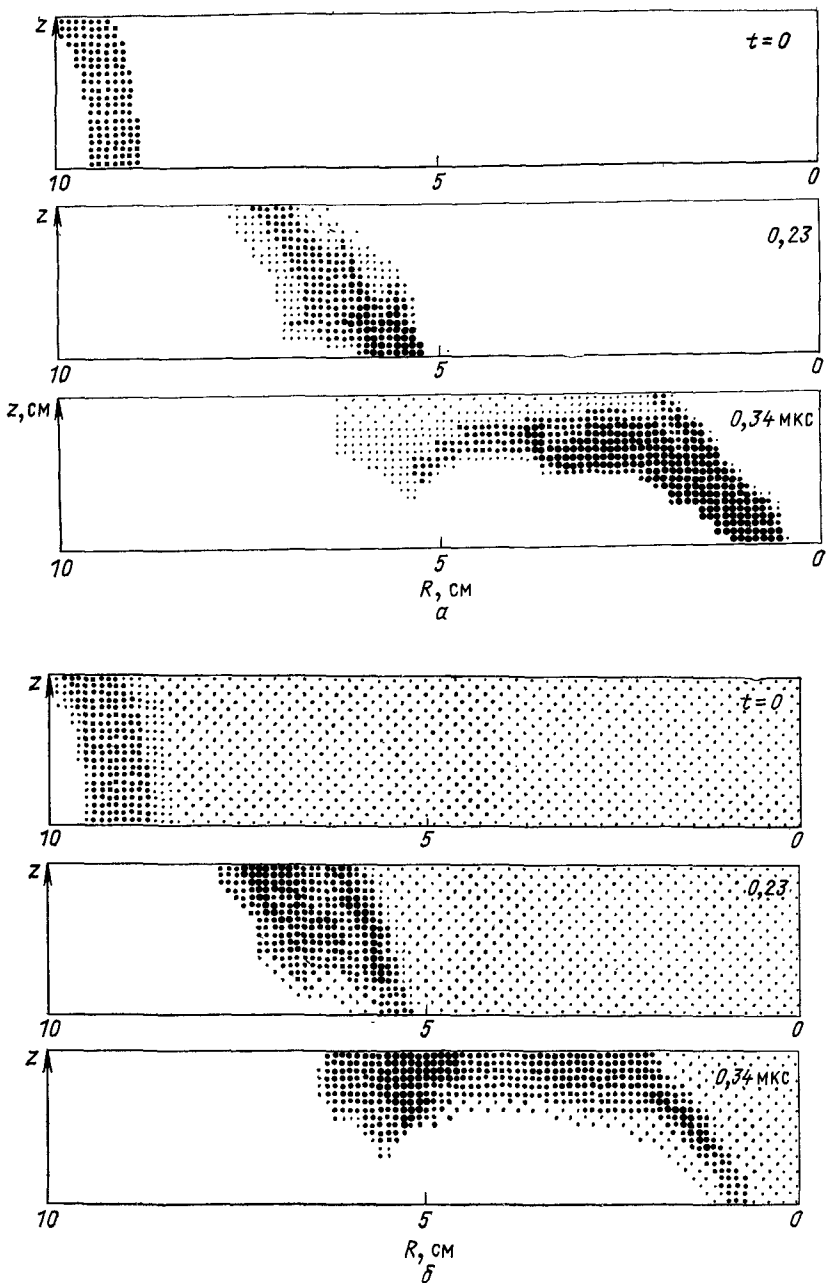


Рис. 18. Компьютерные графики плотности тока (а) и концентрации плазмы (б) в три последовательных момента времени при движении оболочки в  $Z$ -пинче. Нижняя граница расчетной области соответствует аноду

приэлектродной области ток вынужден идти вдоль анода, а нормальная к аноду компонента тока становится значительной лишь вблизи переднего фронта оболочки, где небольшая электронная температура обеспечивает низкий параметр замагниченности  $\omega_e n \tau_{ei}$ . Радиальная составляющая тока приводит к образованию «магнитного поршня», толкающего плазму от анода. Уход от анода плазмы приводит к уменьшению массы оболочки в прианодном слое и увеличению здесь радиальной скорости. Форма оболочки становится все более выпуклой (см. рис. 18), что способствует сбросу газа этой частью оболочки и тем самым приводит к еще большему ускорению оболочки.

В процессе развития разряда влияние эффекта Холла в приэлектродной области растет. Это связано с повышением температуры плазмы в оболочке, что увеличивает параметр замагниченности электронов, а также из-за роста напряженности магнитного поля по мере движения оболочки к оси системы.

При окончательном сжатии оболочки на оси разряда концентрация плазмы получила незначительно превышающую начальную. Малое количество частиц в сечении плазменного фокуса приводит к повышению там токовой скорости электронов и на большом радиусе от оси начинает появляться в оболочке anomальное сопротивление плазмы. Увеличение сопротивления плазмы в оболочке приводит к повышенной диффузии магнитного поля в плазму, что также увеличивает скорость схождения токового слоя оболочки на оси [52].

Описанное численное моделирование показывает, что кривизна оболочки в Z-пинче, приводящая к фокусировке энергии на ограниченной высоте пинча, т. е. к образованию плазменного фокуса, может создаваться не только геометрией электродов, а и приэлектродным скольжением тока вдоль анода. По характеру движения разряда вблизи анода нецилиндрического Z-пинча различаются режимы работы установки. Если скольжения разряда вдоль электрода нет (рис. 19, а), то такой режим называют обычным, или с плотным плазменным фокусом. Если происходит скольжение разряда вдоль электрода [53] (см. рис. 19, б), то такой режим называют электродным [54, 55], рентгеновским [56],

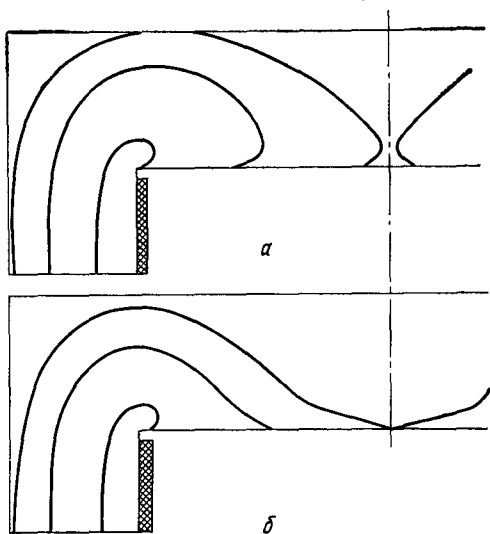


Рис. 19. Форма токовой оболочки в нецилиндрическом Z-пинче при обычном движении оболочки (а) и при скольжении ее вдоль анода (б)

режимом срыва [57], режимом «убегания» токовой оболочки [58] или режимом низкого давления [59].

В режиме с плотным плазменным фокусом развитие разряда хорошо описывается МГД-уравнениями, плотность частиц достигает  $10^{20}$  см<sup>-3</sup>, а диаметр пинча становится меньше 0,1 см. Развитию плазменного фокуса в этом режиме посвящена гл. 4 данного обзора.

В режиме со скольжением разряда вдоль электрода плотной плазмы на оси не образуется; ток концентрируется в центре камеры без существенного повышения плотности вещества. Из-за малого количества частиц в сечении такого пинча токовая скорость электронов очень высока, и в плазме пинча развиваются токовые неустойчивости, которые приводят к аномальному сопротивлению в пинче. Пинч в таком режиме является мощным источником ускоренных частиц [58] и жесткого рентгеновского излучения [9].

Существенное влияние на режим работы установки оказывает примесь тяжелого газа. Так, например, примесь ксенона (~1%) значительно способствует созданию режима со скольжением разряда вдоль электрода [53]. Дело в том, что примесь ксенона полностью вовлекается в движение плазменной оболочкой за счет столкновений с дейтерием. Высокая частота столкновений ксенона с дейтерием обусловлена ионизацией ксенона до  $Z \sim 10$  [60]. Однако вблизи анода ионизация ксенона оказывается слабой из-за охлаждения плазмы, и при низком давлении дейтерия в камере оболочка становится «прозрачной» для ксенона. Это приводит к повышенной скорости движения оболочки к оси около электрода, что способствует образованию «срыва оболочки». В этом случае момент особенности на осциллограммах зависит только от времени схождения оболочки до оси в приэлектродной области. Движение оболочки вблизи электрода без захвата ксенона определяется инерцией только дейтерия. Поэтому, хотя в основной части разрядной камеры ксенон увлекается оболочкой, время особенности получается таким же, как и в чистом дейтериевом газе (3.15).

## ГЛАВА 4

### ПЛАЗМЕННЫЙ ФОКУС

Плазменный фокус представляет собой нестационарный плотный высокотемпературный плазменный шнур, образующийся в импульсном сильноточном газовом разряде вследствие сжатия токовой оболочки Z-пинча и вытекания плазмы вдоль оси системы.

Теоретическое описание плазменного фокуса в рамках двумерной МГД-модели с классическими коэффициентами переноса не позволяет получить его время жизни, поскольку такая модель приводит к безостановочному сжатию плазменного шнура [23]. При кинетическом описании ионов [61] безостановочного сжатия не происходит, однако в [61] токовые скорости электронов, описываемых МГД-уравнениями, достигают релятивистских значений и существенно превышают поро-



ги многих кинетических неустойчивостей. Как известно, в таких условиях плазма переходит в турбулентное состояние и становится необходимым учет аномальных коэффициентов переноса, в первую очередь аномальной проводимости плазмы.

Образование и развал плотного плазменного фокуса в нецилиндрическом  $Z$ -пинче хорошо описываются в рамках одномерной МГД-модели полностью ионизованной плазмы, в которой учтены вытекание вещества из фокуса вдоль его оси и аномальное сопротивление плазмы в нем. Рассмотрим эту модель [22].

#### § 4.1. МГД-моделирование плазменного фокуса с учетом аномального сопротивления плазмы

Для моделирования динамики плазменного фокуса в одномерном приближении сложную двумерную форму оболочки  $Z$ -пинча представим в таком виде, как показано на рис. 20. Будем считать, что в области II магнитное поле отсутствует:  $T_e = T_i = T^0$ ,  $n = n^0$ , где  $T^0$  и  $n^0$  — начальные значения температуры и концентрации плазмы. В начальный момент давление плазмы в области I равно давлению в об-

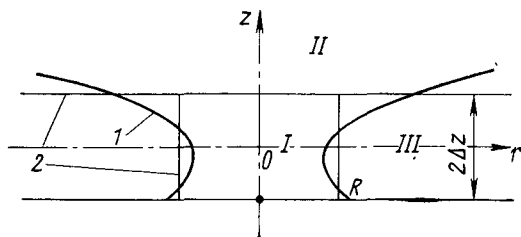


Рис 20 Форма токовой оболочки в плазменном фокусе (1) и принятая в модели (2)  
I — область плазменного фокуса, II — внешняя область, III — область магнитного поля

ласти II. После начала движения плазмы плотность и давление газа во внутренней области I возрастают. Это приводит к возникновению градиента давления вдоль оси  $z$ . Разность давлений между внутренней и внешней областью обуславливает вытекание плазмы из сжатой области I во внешнюю невозмущенную область II.

Изменение параметров плазмы будем рассматривать только в области I в приближении одномерной модели двухтемпературной полностью ионизованной плазмы. Согласно этой модели плотность плазмы  $n$ , электронная и ионная температуры  $T_e$  и  $T_i$ , азимутальное магнитное поле  $B$  и скорости  $v_r$  и  $v_z$  зависят от радиальной координаты  $r$  и времени  $t$ . Осевая скорость при этом изменяется линейно вдоль оси  $z$  от нуля при  $z = 0$  до значения  $\pm v_z$  при  $z = \pm \Delta z$ . Таким образом, задача является симметричной относительно плоскости  $z = 0$ , а характерное время вытекания плазмы вдоль оси равно  $\tau = \Delta z/v_z$ .

Система МГД-уравнений для моделирования плазменного фокуса при записи в лагранжевых координатах имеет вид:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma r} \frac{\partial}{\partial r} (rB) \right) - B \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_z B}{\Delta z}; \quad (4.1)$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} - \frac{v_z n}{\Delta z}; \quad (4.2)$$

$$nm_i \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r} (nT_i + nT_e) - \frac{B}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (rB) + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{4}{3} \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) - 2 \frac{v_r}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right]; \quad (4.3)$$

$$nm_i \frac{dv_z}{dt} = \frac{n(T_i + T_e) - 2n^0 T^0}{\Delta z} - \frac{v_z^2}{\Delta z} nm_i; \quad (4.4)$$

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dt} = -nT_e \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{v_z}{\Delta z} \right] - \frac{3m_e}{m_i} \frac{n}{\tau_{ei}} (T_e - T_i) + \\ + Q_e + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r}) - Q_{изл}; \quad (4.5)$$

$$\frac{3}{2} n \frac{dT_i}{dt} = -nT_i \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{v_z}{\Delta z} \right] + \frac{3m_e}{m_i} \frac{n}{\tau_{ei}} (T_e - T_i) + \\ + Q_i + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r}) + \frac{\eta}{3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right]^2 + \eta \left[ r \frac{\partial (v_r/r)}{\partial r} \right]^2. \quad (4.6)$$

В уравнениях использованы следующие обозначения:  $\tau_e$  — время электрон-ионных столкновений;  $\kappa_e$  — коэффициент электронной и  $\kappa_i$  — ионной теплопроводности;  $Q_{изл}$  — охлаждение электронной компоненты за счет тормозного излучения;  $\eta$  — коэффициент ионной вязкости;  $\sigma$  — проводимость плазмы;  $Q_e$  и  $Q_i$  — тепловыделение в электронной и ионной компонентах за счет джоулева нагрева. Во всех уравнениях  $d/dt = \partial/\partial t + v_r \partial/\partial r$ .

Сопротивление плазмы в фокусе может значительно превышать кулоновское из-за развития в ней токовых неустойчивостей. Наименьшим порогом возбуждения обладают ниже-гибридная дрейфовая и электронно-звуковая неустойчивости [62]. Для проводимости плазмы  $\sigma$  использовалось выражение

$$\sigma = e^2 n m_e^{-1} / (v_K + v_{эф}) = \sigma_K / (1 + v_{эф} \tau_{ei}), \quad (4.7)$$

где  $\sigma_K$  — кулоновская проводимость плазмы,  $\tau_{ei} = 1/v_K$ . Эффективная частота столкновений  $v_{эф}$  для этих неустойчивостей равна [62]:

$$v_{эф} = (u/v_{Ti})^2 \sqrt{\omega_{Be} \omega_{Bi}}, \quad (4.8)$$

где  $u$  — токовая скорость электронов;  $v_{Ti}$  — тепловая скорость ионов. Аналогичные формулы для определения проводимости плазмы использовались в работе [63] при моделировании  $\theta$ -пинча. В соответствии

с работами [62], энергия, диссипируемая на турбулентных пульсациях электронно-звуковой неустойчивости, распределяется между электронами и ионами в отношении 0,15:1. Поэтому  $Q_e$  и  $Q_i$  взято в виде

$$\left. \begin{aligned} Q_e &= j^2 (0,13/\sigma + 0,87/\sigma_R); \\ Q_i &= j^2 (0,87/\sigma - 0,87/\sigma_R), \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где плотность тока  $j = \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial(rB)}{\partial r}$ . Выражение (4.9) удовлетворяет условию, что при отсутствии аномального сопротивления ( $\sigma = \sigma_R$ ) тепловыделение происходит только в электронной компоненте, а при  $\sigma \ll \sigma_R$  имеем  $Q_i/Q_e = 0,15$ .

При моделировании конечной стадии развития плазменного фокуса параметры плазмы становятся такими, что время ион-ионных столкновений превышает характерное время процесса. Использование для коэффициента вязкости обычного выражения  $0,96nT_i\tau_i$  [41] приводит для этой стадии к нефизическому завышению роли вязкости. Это связано с тем, что характерное время ион-ионных столкновений  $\tau_i$ , посредством которых осуществляется вязкая диссипация, становится с ростом ионной температуры больше, чем характерное время процесса. При дальнейшем увеличении  $\tau_i$ , т. е. уменьшении числа столкновений, вязкая диссипация уменьшается. Например, скорость обмена энергией между продольной степенью свободы (вдоль  $B$ ) и поперечными пропорциональна  $1/\tau_i$ , а не  $\tau_i$ . Поэтому коэффициент вязкости должен стремиться к нулю при превышении времени ион-ионных столкновений  $\tau_i$  над характерным временем изменения параметров плазмы  $\tau^*$ . Было принято в качестве грубой аппроксимации выражение

$$\eta = \eta^* [1 + (\tau_i/\tau^*)^2]^{-1}, \quad (4.10)$$

где  $\eta^*$  — коэффициент вязкости плазмы из работы [41], а  $\tau^*$  — характерное время изменения параметров плазмы, которое в рассматриваемом случае приближенно равно характерному времени вытекания плазмы  $\tau$ .

Граничные условия задачи на оси брались, исходя из аксиальной симметрии, т. е.

$$\left. \frac{\partial T_e}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad B|_{r=0} = 0, \quad v_r|_{r=0} = 0. \quad (4.11)$$

На границе плазменного столба, т. е. при  $r = a$ , отсутствуют потоки тепла и обращается в нуль плотность потока импульса

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0; \\ \left[ n(T_e + T_i) - \frac{4}{3} \eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{v_r}{r} \right) \right]_{r=a} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Магнитное поле при  $r = a$  ( $t$ ) задается током в системе

$$B|_{r=a} = 2I/ca. \quad (4.13)$$

Величина тока определяется из уравнения цепи, состоящей из постоянной индуктивности  $L_0$ , индуктивности плазменного столба высотой  $2\Delta z$  и его сопротивления

$$\frac{L_0 + L_p}{c^2} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{c^2} \frac{dL_p}{dt} = -2\Delta z \frac{j}{\sigma} \Big|_{r=a}, \quad (4.14)$$

где индуктивность плазменного столба

$$L_p = 4\Delta z \ln \frac{a(0)}{a(t)}. \quad (4.15)$$

На рис. 21—23 приведены результаты решения уравнений (4.1)—(4.15) при  $\Delta z = 1$  см с начальным током  $I_0 = 800$  кА, индуктивностью  $L_0 = 60$  нГн, начальной плотностью  $n_0 = 3,5 \cdot 10^{17}$  см $^{-3}$ , начальным

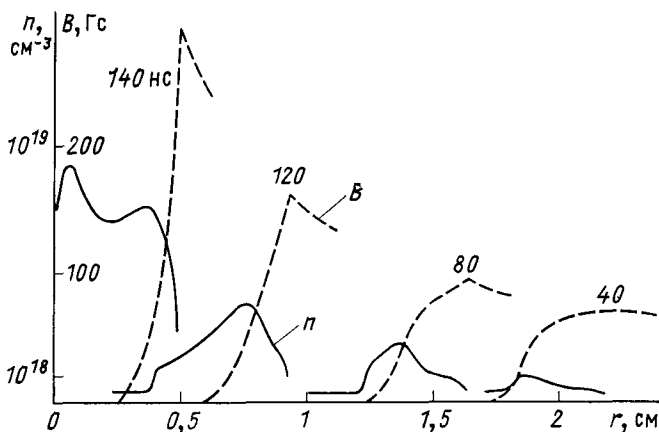


Рис 21 Концентрация плазмы и напряженность магнитного поля для четырех последовательных моментов времени при сжатии оболочки Z-пинча

радиусом оболочки  $r_0 = 2,5$  см и с начальной температурой  $T_0 = 5$  эВ. На рис. 21 показана зависимость изменения плотности и напряженности магнитного поля от радиуса в некоторые моменты времени. Видно, что плотность плазмы скачком возрастает в четыре раза на фронте ударной волны и затем повышается к токовому слою. Толщина токового слоя в приведенных расчетах изменяется от 0,5 в начальный момент времени ( $t = 0$ ) до 0,15 см в момент времени  $t = 140$  нс. В токовом слое плотность плазмы уменьшается от своего максимального значения на переднем фронте токового слоя до нуля на границе плазменного столба. Степень сжатия плазмы на 120 нс достигает 10, а на 140 нс — 30. На 140 нс ударная волна выходит на ось системы, и в дальнейшем происходит дожатие плазмы, при котором плотность повышается в 300 раз по сравнению с первоначальной.

Распределение ионной и электронной температур по радиусу в моменты времени 40, 80 и 120 нс показано на рис. 22. При  $t \leq 40$  нс тем-

пература плазмы относительно мала ( $< 25$  эВ), происходит интенсивный обмен энергией между электронной и ионной компонентами, в результате различие между их температурами мало. Наиболее наглядно температурный профиль сходящейся плазменной оболочки в Z-пинче виден на рис. 22 при  $t=80$  нс. Впереди фронта ударной волны электронная температура выше ионной из-за выноса тепла электронной теплопроводностью из оболочки в область невозмущенного газа. На фронте ударной волны температура ионов скачком возрастает из-за перехода кинетической энергии ионов в тепловую, и в основной час-

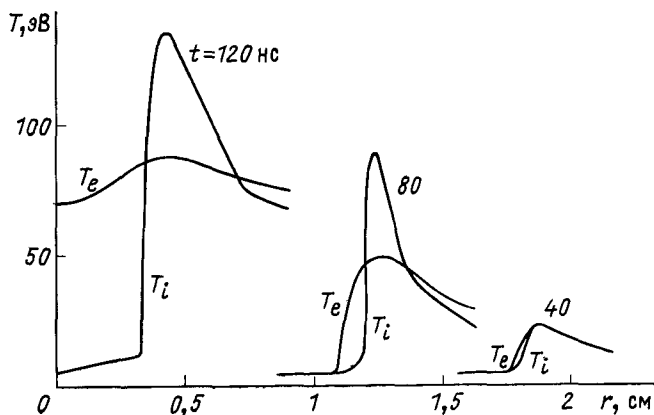


Рис. 22. Поведение ионной и электронной температуры в некоторые моменты времени при сжатии оболочки Z-пинча

ти оболочки  $T_i$  значительно выше, чем  $T_e$ . В результате обмена энергией между компонентами, их температуры выравниваются у границы токового слоя, а в самом токовом слое из-за джоулева тепловыделения электронная температура превышает ионную. В момент времени  $t = 120$  нс фронт ударной волны еще не вышел на ось, однако тепловая волна уже достигла оси, и в этот момент времени  $T_e = 70$  эВ. В последующие моменты времени, т. е. после выхода ударной волны на ось, плотность, температура и напряженность магнитного поля значительно увеличиваются. Температура и плотность при этом становятся однородными по радиусу, и имеет смысл показать изменение этих величин только во времени.

Временная зависимость основных величин, характеризующих динамику плазменного фокуса, показана на рис. 23. Видно, что токовая оболочка испытывает два последовательных сжатия. Минимальный радиус при первом сжатии достигается в момент времени  $t = 160$  нс и равен 0,35 см. В течение последующих 30 нс происходит расширение плазменного столба до  $r = 0,55$  см, затем сжатие возобновляется. Минимальный радиус в момент второго сжатия, которое достигается через 120 нс после первого сжатия, равен 0,02 см. Скорость границы плаз-

менного столба во время первого сжатия до  $2,5 \cdot 10^7$  см·с<sup>-1</sup>, а во время второго сжатия — до  $1,5 \cdot 10^7$  см·с<sup>-1</sup>.

Увеличение плотности и температуры ионов на оси вследствие кулюляции оболочки начинается в момент времени  $t = 125$  нс, который можно принять за начало образования плазменного фокуса. В первом сжатии основные параметры плазмы на оси достигают следующих значений:  $T_e = 300$  эВ,  $T_i = 600$  эВ,  $n = 1,5 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>. Толщина скин-слоя не превышает 0,1 см, что составляет  $\frac{1}{4}$  радиуса плазменного

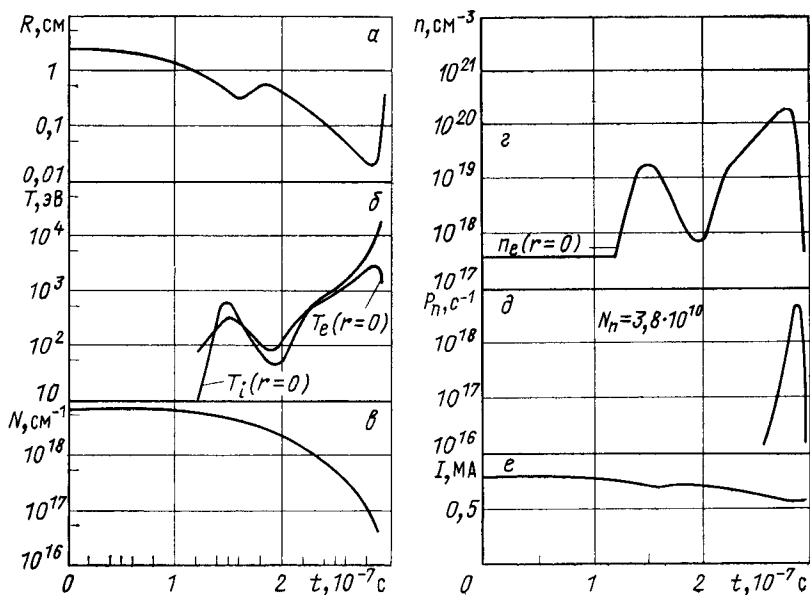


Рис. 23 Изменение во времени радиуса плазменного шнура (а), температуры электронов и ионов на оси (б), линейной плотности (в), плотности ионов на оси (г), интенсивности термоядерных реакций (д) и тока в цепи (е)

столба. Скорость вытекания плазмы вдоль оси равна  $2 \cdot 10^7$  см·с<sup>-1</sup>. За время первого сжатия нейтронный выход из плазменного фокуса составляет  $6 \cdot 10^5$  нейтронов.

Во втором сжатии плотность достигает  $10^{20}$  см<sup>-3</sup>, температура электронов — 3 кэВ, а температура ионов превосходит 10 кэВ. При таких параметрах плазмы интенсивность термоядерных реакций резко возрастает. В момент времени  $t = 285$  нс количество частиц в сечении плазменного столба становится меньше, чем  $N^* = 4Mc^2/e^2$  ( $N^* = 5,2 \cdot 10^{16}$  см<sup>-1</sup> для дейтерия), и токовые скорости электронов превышают тепловую скорость ионов, а сопротивление плазмы становится значительно больше определяемого кулоновскими столкновениями. Это приводит к аномально большому тепловыделению в плазме. Вследствие быстрого увеличения газокINETического давления ра-

диальное сжатие прекращается, и с момента времени  $t = 285$  нс происходит расширение плазменного столба. Скорость расширения приблизительно равна тепловой скорости ионов в этот момент и превышает  $10^8$  см  $\cdot$  с $^{-1}$ . Из-за резкого спада плотности термоядерные реакции прекращаются, хотя температура ионов продолжает расти. Интегральный нейтронный выход в данном варианте составляет  $4 \cdot 10^{10}$  нейтронов, длительность нейтронного импульса — 20 нс. Температура ионов в момент максимума интенсивности термоядерных реакций равна 10 кэВ. Электрические поля в плазме достигают значения  $10^5 \div 10^6$  В  $\cdot$  см $^{-1}$ . Проводимость плазмы в момент второго сжатия меньше кулоновской в  $10^3$ — $10^4$  раз, а ток течет по всему сечению столба.

Таким образом, данная модель позволяет описать как стадию формирования плазменного фокуса, так и стадию его развала. Динамика сжатия токовой оболочки и образования плазменного фокуса близка к той, которая получается в двумерной МГД-модели [23]. Однако вследствие учета аномального сопротивления безостановочного сжатия в настоящей модели не происходит. Аномальное джоулево тепловыделение является причиной быстрого повышения газокинетического давления и последующего радиального разлета плазмы.

Результаты расчетов показывают, что в плазменном фокусе после схождения оболочки на оси камеры приближенно выполняется условие радиального равновесия плазменного столба

$$I^2 = 2c^2 N (T_i + T_e). \quad (4.16)$$

Плазменный столб совершает одно или два колебания около этого положения равновесия, при этом из-за вязкости плазмы и осевого вытекания эти колебания быстро затухают.

Вследствие выполнения условия (4.16), тепловая энергия плазмы на единицу длины плазменного фокуса целиком определяется полным электрическим током

$$\omega \text{ (Дж/см)} = 700 I^2 \text{ (МА)}. \quad (4.17)$$

Поэтому при токе особенности 0,6 МА (см. рис. 23) тепловая энергия в плазменном столбе  $\omega \cdot 2\Delta z$  составляет примерно 500 Дж. В то же время уменьшение энергии в электрическом контуре составляет  $6 \cdot 10^8$  Дж, т. е. 30% первоначальной энергии  $L_0 I_0^2 / 2$  передается плазме. Однако почти вся эта энергия уносится плазмой, вытекающей вдоль оси  $z$ , и только 2,5% сосредоточено в тепловой энергии плазменного фокуса.

Нейтронный выход в данной модели целиком объясняется на основе термоядерного механизма. Максимум интенсивности нейтронного излучения приходится на фазу второго сжатия. Быстрое повышение температуры плазмы за счет турбулентного нагрева приводит к нарушению радиального удержания плазмы, резкому снижению плотности частиц и интенсивности термоядерных реакций. Таким образом, в отличие от работы [66], где большой нейтронный выход объясняется турбулентным нагревом плазмы, здесь показано, что турбулентный нагрев вызывает прекращение нейтронного излучения. Динамика плазменного фокуса такова, что в силу условия (4.16) средняя темпе-

ратура в фокусе определяется только током и количеством частиц в сечении плазменного шнура, а дополнительное тепловыделение в фокусе не вызывает существенного повышения этой температуры.

Представленная модель плазменного фокуса не объясняет происхождение интенсивных потоков электронов и ионов, имеющих энергию несколько сот килоэлектронвольт. Однако приведенные выше расчеты показывают, что электрические поля в плазменном фокусе при появлении аномального сопротивления достигают значений  $10^6$ — $10^8 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ . Вопрос о возможности ускорения ионов и электронов этими полями остается открытым.

Анализ динамики плазменного фокуса показывает, что разрушение его происходит также за счет развития МГД-неустойчивости границы плазменного шнура. Эта неустойчивость становится особенно существенной, когда радиус плазменного фокуса становится много меньше его высоты.

## § 4.2. МГД-неустойчивость плазменного фокуса

Характерным свойством  $Z$ -пинча является его МГД-неустойчивость. Это свойство проявляется и на стадии движения как неустойчивость плазменной оболочки [66], и в конечной стадии как неустойчивость плазменного фокуса.

Неустойчивость оболочки  $Z$ -пинча связана с тем, что если в какой-то области оболочка начинает двигаться быстрее, то радиус пинча в этом месте становится меньше, чем в соседних местах, а магнитное поле  $B = 2I/ca$  соответственно больше. Увеличенное магнитное давление  $B^2/8\pi$  быстрее сжимает здесь оболочку; причем из этой области плазма перетекает в соседние области. Перетекание плазмы вызвано тем, что давление плазмы в области перетяжки также оказывается повышенным по сравнению с другими областями оболочки пинча. Сброс массы впереди движущейся части оболочки приводит к еще более сильному различию в скорости различных частей оболочки. Большое влияние на сброс массы оболочкой в области перетяжки оказывает появление кривизны оболочки, так как в результате этого процесса магнитное давление вызывает движение плазмы не только в радиальном, но и в осевом направлениях, причем скорость вдоль оси направлена так, что плазма вытекает из области перетяжки.

Неустойчивость  $Z$ -пинча была впервые изучена в работах Б. А. Трубникова [67] и В. Д. Шаfranова [68], выполненных под руководством М. А. Леонтовича. В работе [67] рассмотрена неустойчивость цилиндрического шнура с однородным током по отношению к аксиально-симметричным возмущениям (перетяжки на шнуре). Плазма предполагалась идеально проводящей, вязкость не учитывалась. Показано, что при этих предположениях всегда имеется неустойчивость для возмущений любых длин волн в продольном направлении  $z$ , причем возмущения нарастают аperiодически с инкрементом

$$\gamma = v_{Ti}/\sqrt{a\lambda},$$



где  $a$  — невозмущенный радиус цилиндра;  $\lambda$  — длина волны возмущения;  $v_{Ti}$  — тепловая скорость ионов.

В работе [68] рассмотрен идеально проводящий, невязкий плазменный цилиндр с полностью скинированным током (с тонкой токовой оболочкой). Исследовалась устойчивость плазменного шнура относительно произвольных возмущений при наличии продольного магнитного поля, получены критерии устойчивости. Шнур без продольного магнитного поля всегда неустойчив по отношению к возмущениям типа перетяжек, а также по отношению к «змейкам» — возмущениям, при которых шнур изгибается или принимает спиральную форму. Характерным временем развития неустойчивости типа перетяжки является инерционное время  $1/\gamma$ . МГД-неустойчивость препятствует созданию стационарного Z-пинча, однако за время инерционного сжатия малые возмущения не успевают нарасти и пинч сжимается до малого радиуса, сохраняя (приближенно) аксиально-симметричную форму.

После выхода оболочки на ось и образования плазменного фокуса, представляющего собой по существу миниатюрный сжатый Z-пинч, в нем также развиваются МГД-неустойчивости, и самой существенной из них является неустойчивость типа перетяжки. Однако развитие МГД-неустойчивости в плазменном фокусе еще недостаточно для прекращения дальнейшего сжатия и повышения параметров плазмы, оно приводит лишь к дополнительным потерям плазмы из фокуса. В настоящее время подробно развита линейная теория МГД-неустойчивости, а теория нелинейной ее стадии сложна и должна учитывать особенности конкретного процесса. Представляется правдоподобной следующая качественная картина нелинейного развития перетяжек. После первоначального линейного этапа роста перетяжек (рис. 24, а) через некоторое время образуются сжатые и расширенные области плазменного столба, которые можно для качественного рассмотрения представлять себе в виде цилиндров, и в каждой такой области устанавливается приближенное радиальное равновесие (рис. 24, б). В цилиндрическом участке плазменного столба, имеющем больший радиус  $a_2 > a_1$ , устанавливается меньшее давление,  $P_2 < P_1$ , так как давление плазмы в столбе  $P \sim I^2/a^2$ , а ток  $I$  один и тот же для всех участков плазменного столба. В такой системе квазиравновесие сильно нарушено только в переходных частях между цилиндрическими участками. Поэтому граница в переходных областях движется под действием повышенного давления поля в направлении стрелок на рис. 24, б. Это движение границы приводит к увеличению длины области плазменного столба с меньшим радиусом. Через некоторое время пинч становится таким, как показано на рис. 24, в. Линии электрического тока (в точках  $M$  на рис. 24, в) закорачиваются и образуются плазменный столб с радиусом меньше первоначального. Часть массы при таком развитии плазменного фокуса выбрасывается из плазменного столба в виде кольца в область окружающего магнитного поля. В дальнейшем плазменный столб снова подвергается неустойчивости типа перетяжки и снова происходит сброс массы в радиальном направлении и т. д.

Такое развитие неустойчивости — вытягивание сжатой области и сброс массы — происходит в действительности непрерывно, так что нет четкого разделения отдельных промежуточных стадий образования цилиндрических участков, причем процесс развития перетяжек происходит одновременно в разных областях вдоль длины плазменного фокуса в различных фазах их развития. Подобное развитие плазменного фокуса происходит с уменьшением его радиуса, но с сохранением длины. Плазма в фокусе при этом имеет форму шнура с сильно изрезанной границей. Уменьшение среднего радиуса шнура происходит до тех пор, пока появившееся в плазменном шнуре anomальное сопро-

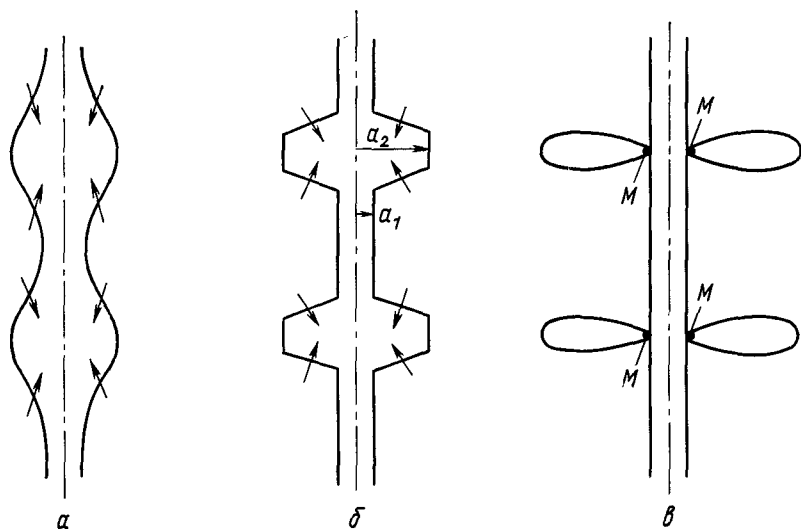


Рис. 24. Качественное представление о развитии перетяжек в плазменном столбе

тивление плазмы не приведет к расширению фокуса из-за большого джоулева тепловыделения в нем, как описано в предыдущем параграфе. Если число частиц в сечении фокуса невелико, то процессы разрушения плазменного фокуса МГД-неустойчивостями из-за anomального сопротивления плазмы в нем (т. е. кинетическими неустойчивостями) происходит одновременно.

Кроме неустойчивости типа перетяжки существуют еще МГД-неустойчивости, приводящие к смещению плазменного шнура (например, винтовая неустойчивость). Однако поскольку время существования плазмы в шнуре всего лишь в несколько раз больше пролетного времени ионов по радиусу, то за это время шнур успевает сместиться не более чем на расстояние порядка нескольких размеров своего радиуса. При таком смещении высокотемпературная плазма не касается стенки камеры, поэтому винтовая неустойчивость здесь несущественна и приводит только к незначительному увеличению длины плазменного шнура.

Для моделирования развития МГД-неустойчивости в плазменном столбе, сжатом магнитным полем, необходимы двумерные нестационарные расчеты. Однако такие расчеты дают малую точность из-за невозможности использовать слишком мелкие расчетные сетки. Если двумерный расчет ведется в эйлеровой системе координат [24], то сетка оказывается слишком крупной для описания МГД-неустойчивости фокуса, а если расчет ведется в лагранжевой системе координат, т. е. в системе, связанной с веществом, то расчетные точки «вытекают» из области фокуса, так что точность таких расчетов становится небольшой.

Существенно упрощает задачу расчета МГД-неустойчивости в плазменном фокусе введение профилирования всех величин по радиусу [26]. В этом случае задача для расчета становится одномерной с учетом изменения всех величин вдоль оси системы. Радиальное профилирование оправдано, если характерный размер по радиусу значительно меньше характерного размера вдоль оси. Именно такой случай и имеет место в плазменном фокусе, еще не очень сильно разрушенном МГД-неустойчивостью. Температура в фокусе обычно успевает выравняться по радиусу из-за большой теплопроводности. При сильном скинировании тока и значительных свободных пробегах ионов давление плазмы устанавливается почти постоянным по радиусу. Поэтому можно принять, что плотность  $n$ , температура  $T$  и осевая скорость  $v_z$  вообще не зависят от радиуса в пределах плазменного столба, а радиальная скорость  $v_r$  изменяется линейно с радиусом. Внутри исчезающе тонкого скин-слоя при переходе к внешней области плотность  $n$  падает до нуля, а магнитное поле  $B$  возрастает от нуля до своего граничного значения  $2I/c\alpha$ , где  $I$  — ток, а  $\alpha = \alpha(z, t)$  — радиус плазменного столба. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} v_r = Vr/a, \quad v_z = U(z, t), \quad n = \begin{cases} 0 & \text{при } r \geq a; \\ n(t, z) & \text{при } r < a, \end{cases} \\ T = T(t, z), \quad B = \begin{cases} 0 & \text{при } r < a; \\ 2I/cr & \text{при } r \geq a. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Кроме этого, примем, что через радиальную границу пинча не переносится поток тепла и импульса, т. е. коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \begin{cases} \kappa(t, z) & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r \geq a \end{cases} \quad (4.19)$$

и коэффициент вязкости

$$\eta = \begin{cases} \eta(t, z) & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r \geq a. \end{cases} \quad (4.20)$$

Подставив (4.18)—(4.20) в систему МГД-уравнений, записанную для аксиально-симметричного случая, и проинтегрировав все уравнения по  $r$  от 0 до  $\infty$ , имеем следующие уравнения:

$$da/dt = V; \quad (4.21)$$

$$dN/dt = -N\partial U/\partial z; \quad (4.22)$$

$$m_i N \frac{dV}{dt} = \frac{6NT}{a} - \frac{3}{2a} \left(\frac{I}{c}\right)^2 - 2\pi\eta \left(V - a \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \pi\eta a^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{a}\right) \right]; \quad (4.23)$$

$$m_i N \frac{dU}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ 2NT + \frac{4}{3} \pi a^2 \eta \left(\frac{V}{a} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \left(\frac{I}{c}\right)^2 \ln a \right]; \quad (4.24)$$

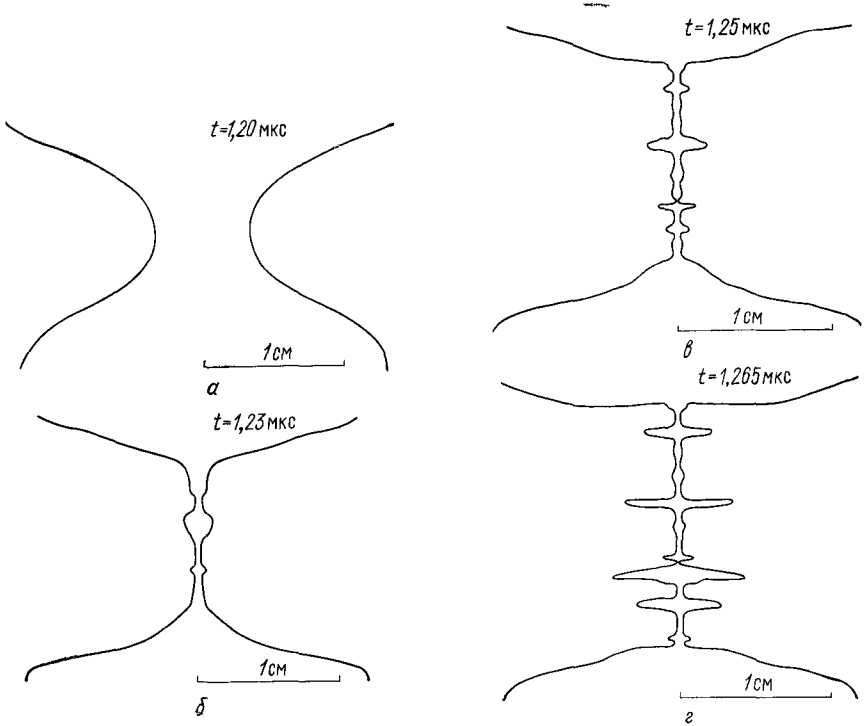


Рис 25. Граница плазменного фокуса для четырех последовательных моментов времени

$$m_i N \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ 2NT \cdot U + \frac{4}{3} \eta \pi a^2 \left(\frac{V}{a} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) U - \frac{\pi\eta a^3}{2} V \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{a}\right) - \kappa \pi a^2 \frac{\partial T}{\partial z} - \left(\frac{I}{c}\right)^2 \left(\frac{V}{a} - \ln a \frac{\partial U}{\partial z}\right) \right]. \quad (4.25)$$

Здесь  $N$  — количество частиц в сечении шнура,  $N = N(t, z) = \pi n a^2$ ;  $\varepsilon$  — энергия плазмы, приходящаяся на единицу длины плазменного шнура,  $\varepsilon = 2NT + \frac{Nm_i}{2} (U^2 + V^2/2)$ . В этих уравнениях  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z}$ .

Для моделирования развития неустойчивости типа перетяжки в плазменном фокусе рассматривался участок по оси  $z$  такой длины, чтобы он выходил за пределы рассматриваемого плазменного фокуса. В этом случае граничные условия на концах этого участка несущественны.

На рис. 25 представлены результаты численного интегрирования уравнений (4.21)—(4.25) для разряда в дейтерии со следующими начальными данными: ток — 800 кА,  $a_0 = 2,5$  см,  $T_0 = 10$  эВ,  $n_0 = 3,5 \cdot 10^{17}$ ,  $V_0 = U_0 = 0$ . Для радиуса  $a_0$  задано начальное возмущение с амплитудой  $0,1 a_0$  и длиной волны 1 см. Счет был прекращен в момент времени  $t = 1,265$  нс (рис. 25,  $z$ ), когда выброс вещества в радиальном направлении достиг большого значения. В этот момент времени конфигурация плазменного фокуса, полученная расчетом, очень напоминает те, которые получены в эксперименте. Температура плазмы в момент времени  $t = 1,265$  нс составляет в среднем 5 кэВ, а нейтронный выход достигает к этому времени значения  $2 \cdot 10^9$  нейтронов.

### § 4.3. Простая модель плазменного фокуса

Простая модель плазменного фокуса основана на балансе частиц и энергии в фокусе. Простая модель плазменного фокуса возможна потому, что в конечной стадии инерция радиального движения в нем перестает играть роль, и с хорошей точностью выполняется условие радиального равновесия (В.1), которое запишем в виде

$$T = I^2/4c^2 N. \quad (4.26)$$

Температура плазмы в фокусе определяется только количеством частиц в сечении и током, протекающим через него. При вытекании плазмы из зоны фокуса температура в нем растёт

$$T \sim N^{-1}.$$

Уход частиц из плазменного фокуса можно описать уравнением

$$dN/dt = -N/\tau, \quad (4.27)$$

где  $\tau$  — характерное время ухода плазмы из зоны фокуса.

Уравнение баланса энергии в плазменном фокусе можно представить в виде:

$$2 \frac{3}{2} \frac{dT}{dt} = -\frac{5}{2} \frac{2NT}{\tau} - 2\pi a \frac{B^2}{8\pi} \frac{da}{dt} + Q_{дж} - Q_{изл} + Q_{т.я}. \quad (4.28)$$

Второй член в правой части этого уравнения описывает работу, совершаемую магнитным полем при сжатии плазменного столба;  $Q_{дж}$  — джоулево тепловыделение;  $Q_{изл}$  — энергия излучения с единицы длины плазменного столба;  $Q_{т.я}$  — термоядерное тепловыделение в плазме. Если  $Q_{дж}$ ,  $Q_{изл}$  и  $Q_{т.я}$  малы по сравнению с уходом энергии за счет вытекания плазмы, то из уравнений (4.26) и (4.28) при постоянном то-

ке  $l$  следует, что средний радиус плазменного фокуса уменьшается в процессе вытекания плазмы в соответствии с уравнением

$$\frac{da}{dt} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{a}{\tau} \quad (4.29)$$

Сравнение этого уравнения с (4.27) дает

$$a \sim N^{5/4}.$$

Плотность плазмы в фокусе возрастает

$$n \sim N^{-3/2} \sim T^{3/2}.$$

Таким образом, вещество в плазменном фокусе сжимается одновременно с повышением температуры плазмы в нем. Нагрев осуществляется за счет адиабатического сжатия плазмы магнитным полем. Сжатие вещества в плазменном фокусе происходит из-за уменьшения количества частиц в его сечении, т. е. из-за вытекания плазмы.

Потеря массы в плазменном фокусе происходит за счет вытекания вещества через торцы плазменного столба, а также за счет ухода частиц по радиусу. Поэтому можно положить

$$1/\tau = 1/\tau_l + 1/\tau_r, \quad (4.30)$$

где  $\tau_l$  — характерное время ухода плазмы вдоль пинча;  $\tau_r$  — в радиальном направлении. Численное моделирование развития плазменного фокуса с учетом вытекания плазмы вдоль оси показывает, что  $\tau_l$  приближенно можно определить как

$$\tau_l = l/2V_T, \quad (4.31)$$

где  $l$  — длина плазменного фокуса;  $V_T$  — характерная скорость, равная тепловой скорости ионов  $(2T/m_i)^{1/2}$ .

Радialный выброс массы в плазменном фокусе может происходить в том случае, если длина фокуса по крайней мере в несколько раз превышает его поперечный размер. В этом случае, как показывают экспериментальные результаты и моделирование плазменного фокуса, развивается МГД-неустойчивость типа перетяжки. Результат развития этой неустойчивости еще полностью не исследован, однако можно утверждать, что она не вызывает общего ухода тока от оси системы. Эта неустойчивость, по-видимому, приводит к выбросу отдельных слоев и сгустков плазмы в область, заполненную магнитным полем вокруг плазменного фокуса.

Картину нелинейного развития перетяжек в плазменном фокусе можно представить еще следующим образом. Окончательному пережатию плазменного столба препятствует противодействие сжимающейся плазмы, в то время как в местах расширения столба плазма почти беспрепятственно вытекает, так как в местах увеличения радиуса плазменного фокуса давление магнитного поля резко падает. В результате создается плазменный столб, в котором в некоторых сечениях его плазма почти свободно вытекает в окружающее пространство (рис. 26). Естественно предположить, что чем меньше радиус пинча,

тем меньше расстояние между сечениями, в которых такое вытекание происходит. Пусть  $l^*$  — характерная длина участка плазменного столба между двумя последовательными уширениями его, в которых происходит уход плазмы, а  $d$  — диаметр этого участка столба ( $d = 2a$ ). Пусть  $\alpha = l^*/d$ . В этом случае уход плазмы из-за развитой стадии МГД-неустойчивости можно представить как вытекание через торцы каждого отдельно взятого такого участка столба, т. е.

$$\tau_r = \frac{l^*}{2v_T} = \frac{\alpha a}{v_T}. \quad (4.32)$$

Коэффициент  $\alpha$  показывает в (4.32), во сколько раз радиальное время удержания плазмы в плазменном фокусе превышает пролетное время ионов по радиусу. Если бы вообще не было магнитного удержания плазмы по радиусу, то  $\alpha = 1$ . Поскольку в пинче плазма сжимается в радиальном направлении магнитным полем и вещество из фокуса может уходить только благодаря развитию МГД-неустойчивостей пинча, то  $\alpha > 1$ . Коэффициент  $\alpha$  в принципе можно определить из экспериментальных интерферограмм плазменного фокуса измерением  $l^*$  и  $d$ . Такие оценки дают значение  $\alpha \sim 10$ . Численное моделирование Z-пинча и его разрушения из-за МГД-неустойчивости дает несколько завышенное значение  $\alpha \sim 100$  [70]. Для определенности в дальнейших оценках будем принимать  $\alpha = 10$ . При этом значении  $\alpha$  количество нейтронов, которое следует из простой модели плазменного фокуса, наиболее хорошо согласуется с экспериментально получаемым нейтронным выходом.

Уравнения (4.27) и (4.28) совместно с выражениями (4.26), (4.30)—(4.32) и уравнением для тока  $I$  описывают в наиболее простом виде динамику плазменного фокуса. Характерное время ухода частиц из фокуса  $\tau$  при  $l/a < 2\alpha$  определяется временем вытекания плазмы через торцы  $\tau_t$ , а при значительном сжатии ( $l/a > 2\alpha$ ) — временем радиального разрушения  $\tau_r$ . Если температура в первом сжатии мала ( $< 1$  кэВ), то основное нейтронное излучение идет при очень малом радиусе. В этом случае  $\tau = \tau_r \sim a/\sqrt{T}$ . Из (4.26), (4.27), (4.29) и (4.32) следует:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau_0 (1 - t/t_1); \\ N &= N_0 (1 - t/t_1)^{4/7}; \\ T &= T_0 (1 - t/t_1)^{-4/7}; \\ a &= a_0 (1 - t/t_1)^{5/7}; \\ n &= n_0 (1 - t/t_1)^{-6/7}, \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

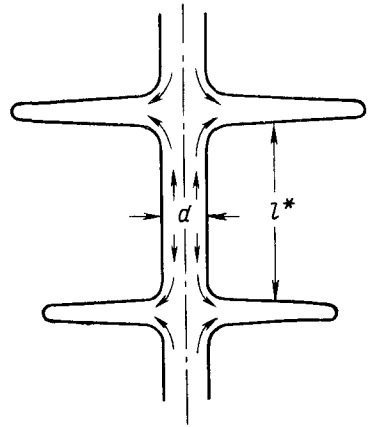


Рис. 26. Картина вытекания плазмы из плазменного фокуса в радиальном направлении

где  $t_1$  — время существования плазменного фокуса;  $t_1 = 4\tau_0/7$  ( $\tau_0 = \alpha\alpha_0/10^6\sqrt{T_0}$  для дейтерия).

Из решения (4.33), определяющего изменение всех параметров во времени, можно получить интенсивность нейтронного излучения и суммарный нейтронный выход из плазменного фокуса  $N_{dd}$  на  $d-d$ -реакции:

$$N_{dd} = \int_0^{t_1} P dt = 3,62 l \alpha n_0^{1/2} T_0^{-3/4} I^3 \quad (4.34)$$

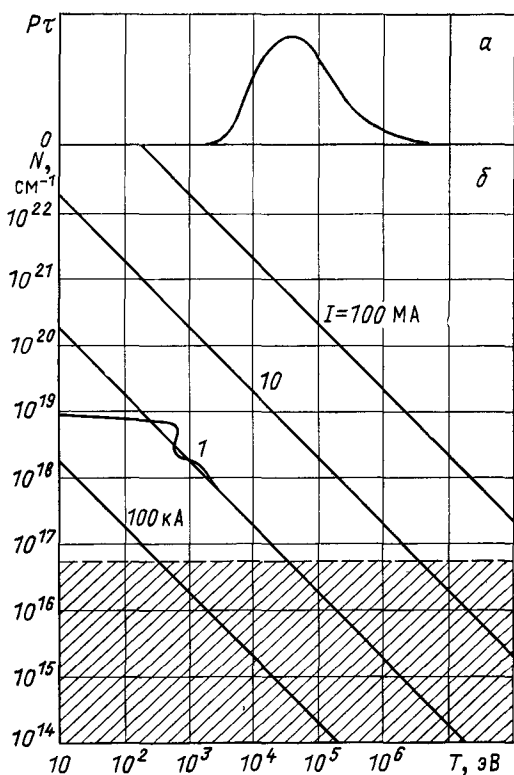


Рис 27 Вклад в нейтронное излучение плазмы с различной температурой (а) и количество частиц в сечении плазменного столба в случае радиального равновесия его при различном токе (б)

(ток  $I$  выражен в МА, плотность плазмы  $n_0$  в  $\text{см}^{-3}$ , температура  $T_0$  в кэВ, длина фокуса  $l$  в см).

На рис. 27, а показан вклад плазмы с определенной температурой в нейтронное излучение. Поскольку  $P\tau = \frac{dN_{dd}}{dt} \tau = \frac{dN_{dd}}{d \ln T}$ , то площадь под кривой на рис. 27, а определяет суммарный нейтронный выход  $N_{dd}$ . Наибольший вклад в нейтронное излучение дает плазма с температурой 20—40 кэВ. Уменьшение вклада в нейтронное излучение плазмы с более высокой температурой ( $> 40$  кэВ) объясняется уменьшением количества частиц, находящихся при такой температуре, и сокращением времени существования плазмы с такой температурой.

Джоулевым тепловыделением в фокусе можно пренебречь, пока количество частиц в сечении плазменного столба на единицу его длины больше

$$N^* = 4Mc^2/c^2,$$

где  $N^* = 5,2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-1}$  для дейтерия. Когда количество электронов в сечении становится меньше, чем  $N^*$ , их средняя токовая скорость начинает превышать тепловую скорость ионов. Это приводит к появлению большого аномального сопротивления в плазме. В этот момент



тепловыделение на аномальном сопротивлении превышает уход энергии из-за вытекания плазмы из фокуса, поэтому происходит расширение плазменного столба. Общее влияние аномального джоулевого нагрева сводится к тому, что он уменьшает нейтронное излучение из плазменного фокуса, поскольку вызывает расширение столба и падение плотности плазмы.

На рис. 27, б графически показана связь количества частиц в сечении плазменного столба и температуры плазмы при значениях тока: 100 кА, 1 МА, 10 МА, 100 МА. В момент схождения плазменной оболочки на оси камеры температура плазмы довольно низка (1 кэВ). В процессе вытекания плазмы из зоны фокуса количество частиц в сечении уменьшается и температура растет. Когда количество частиц в сечении становится меньше, чем  $N^*$ , то происходит «турбулентное» разрушение плотной плазмы фокуса из-за аномального тепловыделения в нем. Область, где  $N < N^*$ , показана на рис. 27, б кривой штриховкой. На рис. 27, б видно, что при токе 1 МА турбулентность начинает разрушать плотную плазму в фокусе в момент наибольшего нейтронного излучения. Из этого факта ранее делался неправильный вывод о том, что турбулентность и вызывает нейтронное излучение в фокусе. В действительности анализ показывает, что если бы аномального тепловыделения не было, то нейтронный выход из плазменного фокуса был бы больше.

При токе 100 кА вся область нейтронного излучения лежит в турбулентной зоне (рис. 27, б), и поэтому разряды с током менее 1 МА сложны для исследования из-за всякого рода аномальных эффектов в плазме. При токах больше 1 МА аномальное сопротивление плазмы не влияет на нейтронное излучение, так как плазма переходит в турбулентное состояние, когда нейтронное излучение уже практически прекратилось. Благодаря этому, рассматриваемая простая модель позволяет предсказывать развитие плазменного фокуса в больших системах, несмотря на то, что аномальные эффекты в плазменном фокусе еще не изучены в достаточной мере.

Из данной модели развития плазменного фокуса можно оценить  $\pi\tau$ , которое достигается в существующих установках плазменного фокуса. Значение  $\pi\tau$  плазмы в данной модели непрерывно меняется в процессе сжатия плазменного столба, однако существенно только то  $\pi\tau$ , которое получается при достижении температуры 10 кэВ. Из (В.1) и (4.32) имеем, что при  $T = 10$  кэВ

$$\pi\tau = 2,2\alpha I\sqrt{n} \quad (4.35)$$

( $I$  в МА,  $n$  в  $\text{см}^{-3}$ ). При  $\alpha = 10$ ,  $n = 5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  и токе 1 МА имеем  $\pi\tau = 2 \cdot 10^{11} \text{ с} \cdot \text{см}^{-3}$ ). Таким образом, в плазменном фокусе при приведенных здесь параметрах достигается термоядерная температура  $\sim 10$  кэВ и при этой температуре  $\pi\tau > 10^{11} \text{ с} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Характерное время нейтронного излучения получается из (4.32) и для  $\alpha = 10$  и  $n = 5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  равно

$$\tau = 2,2 \frac{\alpha I}{\sqrt{n}} = 3,2 \cdot 10^{-9} I. \quad (4.36)$$

При токе 1 МА это время составляет 3 нс, в то время как экспериментально излучение нейтронов продолжается  $\sim 30$  нс. Это можно объяснить тем, что описываемый процесс развития плазменного фокуса происходит не одновременно во всех сечениях плазменного столба. Сжатое состояние (фокус) существует в каждом сечении  $\sim 3$  нс и смещается в течение  $t \sim 30$  нс вдоль оси системы.

Плотная плазма с температурой  $\sim 10$  кэВ в имеющихся установках плазменного фокуса трудно наблюдаема экспериментально, так как в момент ее получения количество частиц в сечении мало ( $\sim 10^{17}$  см $^{-2}$ ), радиус плазменного столба мал ( $< 0,1$  см) и мало время существования такой плазмы ( $\sim 2 \cdot 10^{-9}$  с). Обычно регистрируют более холодную плазму, с большим количеством частиц в сечении, менее плотную и с более значительным временем существования. В результате этого делался вывод о нетепловой природе нейтронов в плазменном фокусе. Многочисленные попытки трактовать нейтронный выход из фокуса как результат ускорительных процессов не выглядят убедительными, и количественного объяснения всего нейтронного излучения нетермоядерными механизмами в настоящее время нет. По-видимому, в таком объяснении нет необходимости, так как наблюдаемое нейтронное излучение при токе  $\geq 1$  МА может быть объяснено описанной выше картиной образования плотной высокотемпературной плазмы в фокусе.

В принципе высокую температуру плазмы можно зарегистрировать экспериментально при обработке спектра нейтронного излучения из плазменного фокуса. Такое определение температуры было сделано в работе [71]. Оказалось, что по ширине нейтронного спектра температура равна  $\sim 20$  кэВ, что хорошо соответствует результатам на рис. 27, а.

В соответствии с формулой (4.35) значение  $n\tau$  в плазменном фокусе можно увеличить повышением тока в системе, стабилизацией плазменного фокуса (увеличение коэффициента  $\alpha$ ) и увеличением плотности плазмы в фокусе. Один из способов увеличения плотности заключается в повышении давления газа в разрядной камере. Существенное повышение плотности вещества в фокусе может происходить из-за радиационных потерь. Влияние излучения плазмы на увеличение ее плотности сказывается, когда поток энергии излучения из пинча сравнивается с потерями энергии из-за вытекания плазмы, т. е. при [25, 72]

$$Q_{\text{изл}} > \frac{5NT}{\tau}. \quad (4.37)$$

В этом случае радиационные потери приводят не к уменьшению, а к увеличению нейтронного излучения из плазменного фокуса [72]. Это является следствием того, что при радиальном равновесии плазменного шнура температура определяется током, протекающим через пинч, и количеством частиц в его сечении. Отвод тепла способствует увеличению сжатия плазмы и тем самым увеличению интенсивности нейтронного излучения. Энергия, необходимая для поддержания высокой температуры и выполнения условия равновесия (В.1), поступает в плазму в результате сжатия ее магнитным полем.

## Заключение

Рассмотренная здесь динамика  $Z$ -пинча лишь в малой степени отражает всю сложность процессов, протекающих в нем. Уже в настоящее время видно, что требуются детальные разработки многих явлений в  $Z$ -пинче. К ним относятся исследования аномальных явлений в плазменном фокусе, выяснение причин образования перенапряжений и интенсивных потоков ускоренных частиц, а также рентгеновского излучения из пинча, исследование и моделирование приэлектродных процессов с учетом испарения и разлета материалов электрода. Важным вопросом является изучение МГД-разрушения плазменного фокуса, а для этого требуется двумерное моделирование его с большой точностью. Еще одной важной частью дальнейших исследований является изучение  $Z$ -пинча в условиях, когда потери на излучение существенно влияют на его динамику, поскольку при этом создаются условия для получения сверхплотного пинча.

В целом изучение явлений в  $Z$ -пинче заставляет пересмотреть взгляды на получение термоядерной энергии из плазмы. Обычно термоядерную плазму в лабораторных условиях представляют в виде односвязной области, не допуская ее разрушения МГД-неустойчивостями, так как они уменьшают ее время жизни. Однако оказалось, что плазменный шнур в  $Z$ -пинче, сильно разрушенный перетяжками и состоящий из множества отдельных областей с высокими параметрами плазмы, может превосходить по нейтронному излучению системы, где все создано для того, чтобы перетяжек не было. МГД-неустойчивость плазменного шнура (которая обычно считается отрицательным явлением в термоядерных установках, и с ней всячески борются) в  $Z$ -пинче приводит к выбросу массы из шнура и тем самым к увеличению температуры плазмы в нем. Излучение плазмы, которое в стационарных термоядерных системах является еще одной помехой для термоядерного синтеза, в  $Z$ -пинче может приводить к созданию сверхвысоких параметров плазмы в результате радиационного сжатия его.

Следует отметить, что создание, удержание и нагрев плазмы в  $Z$ -пинче осуществляется за счет одного лишь разрядного тока пинча. В этой простейшей термоядерной системе достаточно пропустить большой ток через плазму — и все необходимое для получения термоядерной реакции в нем осуществляется как бы само собой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курчатов И. В. О возможности создания термоядерных реакций в газовом разряде. — «Атомная энергия», 1956, т. 3, с. 65.
2. Брагинский С. И. Поведение полностью ионизированной плазмы в сильном магнитном поле. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1957, т. 33, с. 645.
3. Леонтович М. А., Осовец С. М. О механизме сжатия тока при быстром и мощном газовом разряде. — «Атомная энергия», 1956, т. 3, с. 81.
4. Исследование импульсных разрядов с большой силой тока. — «Атомная энергия», 1956, т. 3, с. 76. Авт.: Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов.
5. Комельков В. С. Самосжимающиеся разряды в дейтерии при больших скоростях нарастания тока. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1958, т. 35, № 1, с. 16.

6. Bazilevskaya O. A., Andrianov A. M., Demichev V. F., Vasiljev V. I. Investigation of an impulsive discharge in a hollow cylindrical gas sheath. — In Proc. 5th Intern. Conf. on Ionisation Phenomena in Gases. Munich, 1961, v. 2, p. 2213.
7. Мощный импульсный газовый разряд в камерах с проводящими стенками. — В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 170. Авт.: Д. П. Петров, Н. В. Филиппов, Т. И. Филиппова, В. А. Храбров.
8. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И., Виноградов В. П. Плотная высокотемпературная плазма в области нецилиндрической кумуляции Z-пинча. — «Nuclear Fusion», 1962, Suppl, Part 2, p. 577.
9. Жесткое излучение импульсных разрядов. — «Атомная энергия», 1956, т. 3, с. 84 Авт.: Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, Е. И. Доброхотов, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, В. И. Синицын, Н. В. Филиппов.
10. Bodin H. A. B., Newton A. A., Peacock N. J. Rapid compression heating of a plasma in the linear Z-pinch. — «Nuclear Fusion», 1960, v. 1, p. 54.
11. Брагинский С. И., Мигдал А. Б. Процессы в плазменном столбе при быстром нарастании тока. — В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 20.
12. Брагинский С. И., Гельфанд И. М., Федоренко Р. П. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде. — В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 201.
13. Розенблут М. Динамика сжимающегося газа. — В сб.: Магнитная гидродинамика. М., Атомиздат, 1958, с. 63.
14. Брагинский С. И., Вихрев В. В. Формирование токовой оболочки в мощном импульсном разряде. — «Журн. техн. физ.», 1973, т. 63, № 12, с. 2509.
15. Брагинский С. И., Вихрев В. В. Образование волокнистой структуры токовой оболочки в мощном импульсном разряде. — «Теплофизика высоких температур», 1976, т. 14, с. 254.
16. Basque G., Jolas A., Watteau I. P. Comparison of a two-dimensional snow-plough model with experiment. — «Phys. Fluids», 1968, v. 11, p. 1384.
17. Robuoch V. V., Di Cola G. A one-dimensional model of a two-dimensional snow-plough Mirapi focus discharge. Laboratory Gas Ionizzati, Frascati, LGI 70/5/E, 1970.
18. Вихрев В. В. Согласование разрядного контура с движением оболочки в нецилиндрическом Z-пинче. — «Журн. прикл. матем. и техн. физ.», 1973, № 2, с. 160.
19. Базденков С. В., Вихрев В. В. Трехжидкостная МГД-модель токовой оболочки в Z-пинче. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, № 3, с. 451.
20. Брагинский С. И., Вихрев В. В. Формирование токовой оболочки в мощном импульсном разряде. Препринт ИАЭ № 2442. М., 1974.
21. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. К магнитогиродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плазме. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 5. М., Атомиздат, 1967, с. 394.
22. Коржавин В. М., Вихрев В. В. Влияние аномальной проводимости на динамику плазменного фокуса. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 7.
23. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Двумерная магнитогиродинамическая модель плазменного фокуса Z-пинча. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 8. М., Атомиздат, 1974, с. 164.
24. Potter D. E. Numerical studies of the plasma focus. — «Phys. Fluids», 1971, v. 14, p. 1911.
25. Вихрев В. В. Простая модель развития плазменного фокуса. — «Физика плазмы», 1977, т. 3, с. 981.
26. Имшенник В. С., Осовец С. М., Отрошенко И. В. Динамика перетяжек плазменного шнура и электромагнитное ускорение ионов. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 2057.
27. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.
28. Лукьянов С. Ю. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. М., «Наука», 1975.

29. Брагинский С. И., Будкер Г. И. Физические явления в процессе разгорания разряда при неполной ионизации. — В сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 186.
30. Buffa A., Malesant G., Nalesso F. Theory of the non-stationary arc column. — «Phys. Rev. A», 1971, v. 3, p. 955.
31. Базденков С. В., Вихрев В. В. Распространение волны ионизации в газе при больших значениях E/P. Препринт ИАЭ, № 2759, М., 1976.
32. Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P. Recombination between electrons and atomic ions. I. Optically thin plasmas. — «Proc. Roy. Soc.», 1962, p. 267.
33. Колесников Ю. А., Филиппов Н. В., Филиппова Т. И. Динамика плазменной оболочки нецилиндрического Z-пинча на стадии, предшествующей кумуляции — In: Conf. on Ioniz Phenomena in Gases Yugoslavia, Beograd, 1966, v. 2, p. 833.
34. Пространственно-периодические структуры плазмы, возникающие в быстрых сильнотоковых разрядах. — «Nucl. Fusion», 1965, т. 5, с. 181. Авт.: И. Ф. Кварцхава, К. П. Кервалидзе, Ю. С. Гваладзе, Г. Г. Зукакишвили.
35. Bostik W. H. Plasma shreds in a magnetic field. — In Proc. 5th Intern. Conf. on Ionization Phenomena in Gases Munich, 1961, v. 2, p. 1564.
36. Anderson O. A., Kukul W. B. Tubular pinch and tearing instability. «Phys. Fluids», 1969, v. 12, p. 2099.
37. Experimentelle Untersuchung der Entstehung und Beschleunigung der stromführenden Schicht in einer Z-Pinch-Entladung. — «Z. Naturforsch.», 1969, Bd 24a, S. 226. Auth.: G. Kliest, W. Bötticher, H. Dammann, U. Kogelschatz.
38. Mather J. W., Williams A. H. Image convector observation of the development of the dense plasma focus discharge. — «Phys. Fluids», 1966, v. 9, p. 2080.
39. Вихрев В. В., Голубчиков Л. Г., Свирский Э. Б. О структуре плазменной оболочки в начальной фазе импульсного разряда в газе — In. IX Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. V 1 Budapesht, 1969, p. 207.
40. Колесников Ю. А. Динамика оболочки в нецилиндрическом Z-пинче. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 833.
41. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, с. 183.
42. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
43. Робертс К., Поттер Д. Магнитогазодинамические методы. — В сб. Вычислительные методы в физике плазмы. М., «Мир», 1974, с. 335.
44. Ананин С. И., Вихрев В. В., Филиппов Н. В. О структуре токовой оболочки в Z-пинче. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 315.
45. Голубчиков Л. Г. Измерение плотности заряженных частиц в движущейся плазменной оболочке. — «Журн. техн. физ.», 1968, т. 38, с. 1477.
46. Гуреев К. Г. Об оптимальных параметрах нецилиндрического пинча. — «Физика плазмы», 1978, т. 4, с. 304.
47. Patou C., Simonnet A., Watteau J. P. Dynamique et émission neutronique d'une décharge électrique non cylindrique focalisante. — «J., Physiq.», 1968, v. 29, p. 973
48. Экспериментальное и теоретическое исследование пинчевого разряда типа «плазменный фокус». Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, IAEA, 1971, v. 1, p. 573. Авт.: Н. В. Филиппов, В. И. Агафонов, И. Ф. Беляева и др.
49. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. — В сб. Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 8. М., Атомиздат, 1974, с. 3.
50. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 8. М., Атомиздат, 1974, с. 88.
51. Vkhrev V. V., Gureev K. G. Influence of Hall effect on the dynamics of a non-cylindrical Z-pinch. «Nucl. Fusion», 1977, v. 17, p. 291.

52. Вихрев В. В., Коржавин В. М. О срыве токовой оболочки в нецилиндрическом Z-пинче. — «Письма ЖЭТФ», 1974, т. 18, с. 528.
53. О возможном механизме срыва токовой оболочки в нецилиндрическом Z-пинче. — «Письма ЖЭТФ», 1973, т. 18, с. 199. Авт.: С. В. Базденков, К. Г. Гуреев, Н. В. Филиппов, Т. И. Филиппова.
54. Гуреев К. Г., Филиппов Н. В., Филиппова Т. И. Численное моделирование процесса «убегания» токовой оболочки на установке типа «плазменный фокус». — «Физика плазмы», 1975, т. 1, с. 120.
55. Базденков С. В., Гуреев К. Г., Филиппов Н. В. Электродный режим нецилиндрического Z-пинча. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, с. 730.
56. Расчеты тыльного оттока медного анода под воздействием электронного пучка в рентгеновском режиме нецилиндрического Z-пинча. Препринт ИМП АН СССР № 50. М., 1975. Авт.: К. Г. Гуреев, В. С. Имшенник, Я. М. Каждан и др.
57. Взаимодействие электронного пучка с поверхностью анода. — «Физика плазмы», 1975, т. 1, № 2, с. 192. Авт.: К. Г. Гуреев, В. С. Имшенник, Т. И. Филиппова, Н. В. Филиппов.
58. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И. Исследование дейтонных пучков, генерируемых в плазменном фокусе. — «Письма ЖЭТФ», 1977, т. 25, с. 262.
59. Rapp H., Trunk M. Characteristics curves and scaling laws for a Mather type plasma focus. — In: IV Europ. Conf. on Contr. Nucl. Fusion and Plasma Phys. Moscow, 1973, v. 1, p. 371.
60. Вихрев В. В., Гуреев К. Г. Структура ударной волны в смеси дейтерия и ксенона. — «Физика плазмы», 1976, т. 2, № 5, с. 723.
61. Модель негидродинамической стадии плазменного фокуса (перетяжки Z-пинча). Препринт ИМП АН СССР, М., 1975, № 73. Авт.: Н. М. Зуева, В. С. Имшенник и др.
62. Гудблуд И. П., Пятак А. И., Сизоненко В. Л. Электронно-звуковая и дрейфовая неустойчивость в плазме конечного давления с поперечным током. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, с. 2084.
63. Kinetic and numerical studies of microstability properties and anomalous, transport in theta pinches. Plasma Physics and Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna IAEA, 1977, v. 3, p. 113. Auth.: R. C. Davidson, N. T. Glad, J. Huba e. a.
64. Анализ геометрии, динамики и магнитной структуры плазменного фокуса методом лазерной интерферометрии. Plasma Physics and Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, IAEA, 1975, v. 3, p. 123. Авт.: Н. В. Филиппов, В. Д. Иванов, М. П. Моисеева и др.
65. Мэзонье Ч. Плазменный фокус и термоядерный синтез. — «Журн. прикл. матем. и техн. физ.», 1975, № 4, с. 23.
66. Осовец С. М., Павлов Е. И., Синицын В. И. Развитие неустойчивости в Z-пинче. — «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1973, т. 64, № 4, с. 1228.
67. Трубников Б. А. Об устойчивости цилиндра плазмы. В сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 289.
68. Шафранов В. Д. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в магнитном поле. — «Атомная энергия», 1956, № 5, с. 38.
69. Dynamics of 120 and 20 kV plasma focus devices with respect to density and current distribution, and neutron and X-ray emission. Plasma Physics and Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, IAEA, 1977, v. 3, p. 441. Auth.: G. Decker, B. Nahrath, T. Oppenlander e. a.
70. High-density fusion and the Z-pinch. Plasma Physics and Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, IAEA, 1975, v. 2, p. 653. Auth.: C. W. Hartman, D. Y. Cheng, G. E. Cooper e. a.
71. Velocity distribution of the ions producing neutrons in plasma focus. — «Phys. Fluids», 1972, v. 15, p. 209. Auth.: E. Conrads, P. Cloth, M. Demmeler, R. Hecker.
72. Вихрев В. В. Сжатие Z-пинча из-за потерь на излучение. — «Письма ЖЭТФ», 1978, т. 27, с. 104.

<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ И ИОНОСФЕРНАЯ АЭРОДИНАМИКА. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский . . . . .</b>	<b>3</b>
§ 1. Введение . . . . .	3
§ 2. Квазинейтральные течения плазмы . . . . .	7
§ 3. Возникновение и развитие осцилляторного состояния плазмы . . . . .	50
§ 4. Ионосферная аэродинамика . . . . .	73
Список литературы . . . . .	86
<b>ЦИКЛОТРОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ ЗЕМЛИ. П. А. Беспалов, В. Ю. Трахтенгерц . . . . .</b>	<b>88</b>
Введение . . . . .	88
§ 1. Физические условия в геомагнитной ловушке . . . . .	89
§ 2. Линейная теория циклотронной неустойчивости . . . . .	92
§ 3. Квазилинейное описание ЦН . . . . .	102
§ 4. Режимы диффузии частиц по питч-углам . . . . .	108
§ 5. Стационарные состояния РП Земли . . . . .	115
§ 6. Временная эволюция ЦН . . . . .	122
§ 7. Автоколебательные режимы ЦН . . . . .	129
§ 8. Динамика спектра волн при развитии ЦН . . . . .	139
§ 9. Происхождение основных типов низкочастотных электромагнитных излучений в магнитосфере . . . . .	147
Заключение . . . . .	154
Приложение А. Усреднение по периоду баунс-осцилляций . . . . .	155
Приложение Б. Релаксационные колебания в случае произвольного источника . . . . .	157
Список литературы . . . . .	160
<b>ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕ. А. Г. Литвак . . . . .</b>	<b>164</b>
Введение . . . . .	164
<b>Г л а в а 1. Механизмы нелинейных процессов. Основные уравнения</b>	<b>165</b>
§ 1.1. Пондеромоторные силы в плазме в быстропеременных полях	166
§ 1.2. Квазигидродинамика плазмы в ВЧ-полях . . . . .	168
§ 1.3. Уравнения электромагнитного поля . . . . .	172
<b>Г л а в а 2. Самовоздействие плоских электромагнитных волн</b>	<b>173</b>
§ 2.1. Отражение и проникновение плоской электромагнитной волны	174
§ 2.2. Самоподдерживающиеся волноводные каналы . . . . .	182
§ 2.3. Солитоны огибающих . . . . .	187
<b>Г л а в а 3. Квазиоптические эффекты самовоздействия электромагнитных волн . . . . .</b>	<b>194</b>
§ 3.1. Стационарная самофокусировка волновых пучков в изотропной плазме . . . . .	194

§ 3.2. Самовоздействие волновых пучков в плазме в постоянном магнитном поле . . . . .	199
§ 3.3. Пространственно-временная неустойчивость плоской волны . . . . .	204
<b>Глава 4. Динамические режимы параметрических неустойчивостей плазменных колебаний . . . . .</b>	<b>209</b>
§ 4.1. Основные уравнения. Гидродинамические неустойчивости плазменных колебаний в ВЧ-полях . . . . .	210
§ 4.2. Многоволновые распадные процессы . . . . .	214
§ 4.3. Индуцированное рассеяние на ионах . . . . .	217
§ 4.4. Модифицированная распадная неустойчивость . . . . .	219
§ 4.5. Динамика модуляционной неустойчивости . . . . .	223
§ 4.6. О просветлении плазмы при модуляционной неустойчивости . . . . .	230
§ 4.7. О самосжатии неоднородных распределений ленгмюровских колебаний . . . . .	233
Список литературы . . . . .	238
<b>ДИНАМИКА Z-ПИНЧА. В. В. Вихрев, С. И. Брагинский . . . . .</b>	<b>243</b>
Введение . . . . .	243
<b>Глава 1. Формирование токовой оболочки в мощном импульсном разряде . . . . .</b>	<b>251</b>
§ 1.1. Скин-эффект в ионизирующемся газе . . . . .	251
§ 1.2. Физические процессы при образовании токовой оболочки . . . . .	255
§ 1.3. Формирование токовой оболочки . . . . .	259
§ 1.4. Устойчивость токовой оболочки в процессе ее формирования . . . . .	263
§ 1.5. Образование волокнистой структуры токовой оболочки . . . . .	266
<b>Глава 2. Развитие плазменной оболочки в Z-пинче . . . . .</b>	<b>270</b>
§ 2.1. Физические процессы при движении оболочки . . . . .	270
§ 2.2. Трехжидкостная МГД-модель плазменной оболочки Z-пинча . . . . .	274
§ 2.3. Результаты численного моделирования движения оболочки . . . . .	277
§ 2.4. Автомодельное решение задачи о структуре токовой оболочки . . . . .	283
<b>Глава 3. Движение плазменной оболочки . . . . .</b>	<b>285</b>
§ 3.1. Одномерная модель полного сгребания газа . . . . .	286
§ 3.2. Двумерная модель движения оболочки в нецилиндрическом Z-пинче . . . . .	289
§ 3.3. Согласование движения оболочки с разрядным контуром . . . . .	291
§ 3.4. Влияние эффекта Холла на движение оболочки . . . . .	292
<b>Глава 4. Плазменный фокус . . . . .</b>	<b>296</b>
§ 4.1. МГД-моделирование плазменного фокуса с учетом аномально-го сопротивления плазмы . . . . .	297
§ 4.2. МГД-неустойчивость плазменного фокуса . . . . .	304
§ 4.3. Простая модель плазменного фокуса . . . . .	309
Заключение . . . . .	315
Список литературы . . . . .	315

ИБ № 799

## ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Вып 10

### Нелинейная динамика. Магнитосферные неустойчивости

Редактор В. Н. Безрукова Художественный редактор А. Т. Кирьянов  
 Переплет художника Н. Я. Вовк Технический редактор Н. А. Власова  
 Корректоры М. В. Косарева, Н. А. Смирнова

Сдано в набор 05.04 79 Подписано к печати 21 12 79 Т-22828  
 Формат 60×90/16 Бумага тип. № 2 Гарнитура литературная Печать высокая.  
 Усл печ л. 20,0 Уч.-изд. л 21,58 Тираж 1300 экз. Зак изд. 76487. Зак тип. 1015  
 Цена 3 р. 50 к.

Атомиздат, 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5  
 Московская типография № 4 Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР  
 по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
 129041, Москва, Б. Переяславская, 46



ВОПРОСЫ  
ТЕОРИИ  
ПЛАЗМЫ

АТОМИЗДАТ