

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

*Под редакцией М. А. ЛЕОНТОВИЧА*

ВЫПУСК I



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ  
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА  
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР

Москва 1963

**УДК 533. 9.**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящей книгой начинается издание ряда сборников, посвященных различным вопросам теории плазмы. Разумеется, читатель предпочел бы иметь одну книгу, содержащую полное изложение названной теории с единой точки зрения. Учитывая это, авторы года два тому назад предприняли попытку написать связную монографию по теории плазмы. Однако в процессе работы выяснилось, что такая задача пока не выполнима, поскольку цельной и законченной теории поведения реальной плазмы по существу еще нет.

Между тем, совсем недавно, всего каких-нибудь десять лет назад, всем казалось совершенно очевидным, что с точки зрения динамического поведения плазма мало отличается от обычного газа, и поэтому, например, теория явлений переноса в плазме (т. е. электропроводности, теплопроводности, диффузии и т. д.) может быть развита в полной аналогии с соответствующей теорией Чепмена — Энскога для газов. Такая теория действительно была создана усилиями многих авторов, и ее в настоящее время принято называть «классической», хотя 10—20-летний срок исследований вряд ли соответствует такому названию.

К сожалению, как показали последующие, прежде всего экспериментальные, исследования, поведение реальной плазмы далеко не всегда соответствует «классической» теории. Связано это с тем, что из-за обилия различных видов неустойчивости в плазме нередко развивается широкий спектр шумов и колебаний, которые в свою очередь оказывают существенное влияние на усредненные параметры плазмы. Ввиду этого полная теория плазмы обязательно должна включать в себя теорию нелинейного, зачастую турбулентного движения плазмы, которая в настоящее время только лишь начинает развиваться.

Тем не менее уже сейчас можно представить себе контуры будущей полной теории плазмы, значительную часть которой можно считать в основном завершенной.

Если ограничиться только одной газовой (разреженной) полностью ионизованной плазмой и сосредоточить внимание на ее динамике, отвлекаясь от таких вопросов, как элементарные процессы, излучение (световое) и т. д., то теория при применении (в явном или неявном виде) в сущности искусственного приема, касающегося учета взаимодействий частиц, может быть целиком построена на классической основе — на уравнениях Максвелла для полей и уравнениях Ньютона для заряженных частиц \*. Разумеется, мы должны при этом использовать статистическое описание.

Интегрируя уравнение Лиувилля по всем частицам, кроме одной, по всем частицам, кроме двух, и т. д., мы получим цепочку уравнений Боголюбова, которая решается разложением по степеням малого параметра, равного обратному числу частиц в дебаевской сфере. Эта процедура, естественно, приводит к кинетическому уравнению с самосогласованными полями и столкновительным членом в форме Ландау.

Здесь мы впервые сталкиваемся с проблемой коллективных процессов в плазме. Дело в том, что даже в слабо неравновесной плазме столкновительный член в форме Ландау обладает лишь логарифмической точностью. Как показал впервые Б. И. Давыдов, тепловые ленгмюровские колебания равновесной плазмы вносят в столкновительный член вклад, меньший лишь в кулоновский логарифм раз, чем парные соударения. Это значит, что в умеренно неравновесной плазме необходимо учитывать «тепловые» флуктуации электрического поля, которые могут давать заметный вклад в процессы переноса.

Что же касается сильно неравновесной плазмы, то в этом случае ситуация может оказаться гораздо сложнее, а именно: амплитуда шумов в такой плазме может достигать настолько больших значений, что начинает проявляться взаимодействие между различными гармониками, т. е. происходит переход к турбулентной плазме. В сильно неравновесной плазме парные взаимодействия

---

\* Это утверждение не вполне точно. И в высокотемпературной плазме для последовательного получения даже чисто термодинамических величин необходимо квантовое рассмотрение (классический интеграл состояний расходуется).

отступают на второй план, так что изменение усредненных величин во времени целиком определяется коллективным эффектом развитых шумов. Ясно, что в этом случае не может быть и речи о перенесении на плазму тех представлений, которые были развиты для обычных газов.

Другими словами, в отличие от обычного газа, обладающего только одним внутренним характерным временем (временем между последовательными соударениями), плазме присущ гораздо больший набор характерных времен. В термодинамически равновесной плазме эти времена выступают в виде периодов различного рода колебаний, а в сильно неравновесной плазме они могут проявляться как характерные времена развития колебаний вследствие неустойчивости и обмена энергией между колебаниями.

Если не рассматривать такой микротурбулентности плазмы и принять за основу кинетическое уравнение с обычным столкновительным членом, то дальше теория развивается в двух направлениях. В случае медленных движений плазмы для решения кинетического уравнения пользуются методом Чепмена—Энскога. Этот метод, естественно, приводит к двухжидкостной гидродинамике, сводящейся во многих практически интересных случаях к одножидкостной, т. е. к магнитной гидродинамике. В другом предельном случае, когда характерное время задачи значительно меньше времени между соударениями, столкновительным членом можно пренебречь, и мы приходим к бесстолкновительной плазме, описываемой уравнением Власова. В случае сильного магнитного поля можно, кроме того, использовать разложение по малому отношению среднего ларморова радиуса к характерной длине. Соответствующее уравнение принято называть дрейфовым кинетическим уравнением. В настоящее время как уравнения магнитной (а также двухжидкостной) гидродинамики, так и уравнение Власова широко используются для решения большого числа различных задач, в частности, для исследования линейных и некоторых нелинейных колебаний, устойчивости плазмы, а также некоторых турбулентных движений плазмы.

В предлагаемых вниманию читателей сборниках мы надеемся осветить некоторые из упомянутых выше вопросов теории плазмы. Мы ни в коей мере не претендуем на широкий охват всех явлений в плазме, делая (в соответствии с кругом интересов большинства авторов) определенный уклон в сторону приложения развиваемых представлений к проблеме управляемых термоядерных реак-

ций. Это проявляется, например, в том, что при исследовании структуры силовых линий магнитного поля и движения частиц в электромагнитных полях большое внимание уделяется вопросу удержания частиц внешними полями. Точно так же при изложении основных результатов «классической» теории явлений переноса в плазме много места отводится изучению поведения плазмы в магнитном поле. По той же причине в первом и последующих выпусках предполагается сравнительно подробно осветить вопросы равновесия и гидромагнитной устойчивости плазмы, малых колебаний и кинетической неустойчивости плазмы в магнитном поле, излучения высокотемпературной плазмы, вопросы нелинейных колебаний и турбулентности плазмы. Что же касается проблем, связанных с классическим газовым разрядом, то в подготовляемых сборниках они практически не рассматриваются.

В 1963 году намечено выпустить в свет три сборника. Первый из них посвящен некоторым общим вопросам описания плазмы; второй — вопросам, связанным с проблемой удержания высокотемпературной плазмы электромагнитным полем; третий — теории колебаний плазмы. В последующих сборниках предполагается осветить вопросы излучения и флуктуаций в плазме, а также некоторые вопросы турбулентности плазмы и магнитной гидродинамики.

*М. ЛЕОНТОВИЧ*

# ДРЕЙФОВАЯ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

*Д. В. Сивухин*

## § 1. Движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле

1. Движение частицы во внешнем электромагнитном поле описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженности электрического и магнитного полей;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы;  $e$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$  — ее заряд, скорость и импульс. Мы пользуемся абсолютной гауссовой системой единиц.

При релятивистских скоростях масса  $m$  должна рассматриваться как величина переменная, определяемая формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.3)$$

из которой следует

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + p^2. \quad (1.4)$$

Если нет электрического поля, а следовательно, магнитное поле не зависит от времени, то уравнение (1.2) принимает вид

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (1.5)$$

Умножая обе части уравнения скалярно на  $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ , получим

$$\dot{\mathbf{p}}\mathbf{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (p^2) = 0,$$

откуда заключаем, что длина вектора  $\mathbf{p}$  не меняется во времени. Масса частицы  $m$ , как это следует из уравнения (1.4), также

не меняется во времени. Поэтому остаются постоянными длина вектора  $\mathbf{v}$  и полная энергия частицы

$$\mathcal{E} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.} \quad (1.6)$$

Сохранение энергии, впрочем, следует из того, что сила, действующая на частицу в магнитном поле, перпендикулярна к скорости  $\mathbf{v}$  и, следовательно, не производит работы.

2. Из различных частных случаев, в которых система уравнений (1.1) и (1.2) интегрируется в замкнутой форме, особый интерес представляет случай движения частицы в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Для нас этот случай важен потому, что его можно рассматривать как нулевое приближение при изучении движения частицы в сильных магнитных полях со слабой пространственной неоднородностью и при наличии слабых электрических полей. Отправляясь от нулевого, можно найти первое приближение и получить таким образом приближенную теорию движения частицы в электромагнитных полях указанного типа. Эта теория дает приближенное описание движения частицы. Она отвлекается от малых и быстрых дрожаний частицы вокруг траектории плавного движения и называется *дрейфовой*. Ее изложение является основной задачей настоящей статьи. Поэтому мы кратко напомним результаты, относящиеся к движению частицы в постоянном однородном магнитном поле, хотя эти результаты и общеизвестны.

Разложим полную скорость  $\mathbf{v}$  на скорость  $\mathbf{v}_{\parallel}$  вдоль вектора  $\mathbf{B}$  и на скорость  $\mathbf{v}_{\perp}$ , перпендикулярную к  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}. \quad (1.7)$$

Так как масса  $m$  при движении остается постоянной, то для  $\mathbf{v}_{\parallel}$  и  $\mathbf{v}_{\perp}$  уравнение (1.5) дает

$$\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = 0, \quad (1.8)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}]. \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.8) заключаем, что  $\mathbf{v}_{\parallel} = \text{const}$ , т. е. в направлении магнитного поля частица движется равномерно. Уравнение (1.9) показывает, что скорость изменения вектора  $\mathbf{v}_{\perp}$  перпендикулярна к самому вектору  $\mathbf{v}_{\perp}$ . Поэтому изменение вектора  $\mathbf{v}_{\perp}$  во времени может быть представлено как вращение с некоторой угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Вектор  $\boldsymbol{\omega}$  можно найти из уравнения

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_{\perp}] = \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}], \quad (1.10)$$



которое дает

$$\omega = -\frac{eB^*}{mc}. \quad (1.11)$$

Отсюда видно, что угловая скорость  $\omega$  постоянна по длине и направлению. Это значит, что вектор  $\mathbf{v}_\perp$ , не изменяя своей длины, равномерно вращается вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью

$$\omega = -\frac{eB}{mc}, \quad (1.12)$$

называемой *циклотронной частотой* \*\*. Соответствующий ей период вращения  $T = \left| \frac{2\pi}{\omega} \right|$  называется *циклотронным периодом*.

Движение частицы, перпендикулярное к магнитному полю, есть также равномерное вращение по окружности с той же угловой скоростью  $\omega$ . Радиус этой окружности

$$\left| a_\perp \right| = \left| \frac{v_\perp}{\omega} \right| = \left| \frac{mc v_\perp}{eB} \right| \quad (1.13)$$

и сама окружность называются *ларморовыми*. Для положительно заряженной частицы вектор угловой скорости  $\omega$  направлен против  $\mathbf{B}$ , а для отрицательно заряженной — по  $\mathbf{B}$ . Этому правилу можно придать более выразительную форму, если ввести магнитный момент  $\mu$ , возникающий вследствие вращения частицы по ларморовой окружности

$$\mu = \frac{I}{c} S = \frac{IS}{c} \cdot \frac{\omega}{|\omega|}, \quad (1.14)$$

где  $I = \frac{e}{2\pi} \left| \omega \right|$  — средняя сила тока, создаваемого вращающейся частицей;  $S = \pi a_\perp^2$  — площадь ларморова кружка. Подставляя сюда значения  $\omega$  и  $a_\perp$  из равенств (1.12) и (1.13), получим

$$\mu = -\frac{mv_\perp^2}{2B^2} \mathbf{B}. \quad (1.15)$$

Отсюда видно, что независимо от знака заряда частицы магнитный момент  $\mu$ , связанный с вращением по ларморовой окружности, всегда направлен против магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Здесь проявляется действие общего электродинамического принципа Ленца. Если

\* Уравнение (1.10) определяет вектор  $\omega$  с точностью до произвольного слагаемого, параллельного  $\mathbf{v}_\perp$ . Однако добавление такого слагаемого к выражению (1.11) физически ничего не меняет, поскольку оно соответствует вращению вектора  $\mathbf{v}_\perp$  вокруг собственной оси, а при таком вращении вектор  $\mathbf{v}_\perp$  не изменяется.

\*\* Иногда  $\omega$  называют *ларморовой частотой*. Однако мы этим термином пользоваться не будем, так как в литературе под ларморовой частотой понимают (и это целесообразно) частоту, вдвое меньшую, чем  $\omega$ .

магнитное поле меняется от нуля до некоторого постоянного значения  $\mathbf{B}$ , то во время этого изменения появляется электрическое поле, ускоряющее частицу, а магнитное поле заставляет вращаться частицу вокруг направления этого поля. По принципу Ленца направление возникшего вращения частицы должно быть таким, чтобы возбуждаемое им магнитное поле ослабляло скорость нарастания внешнего поля. Поскольку магнитное поле вращающейся по ларморовой окружности частицы может быть представлено как поле магнитного диполя с моментом  $\mu$ , то из принципа Ленца следует, что направления векторов  $\mu$  и  $\mathbf{B}$  должны быть противоположными.

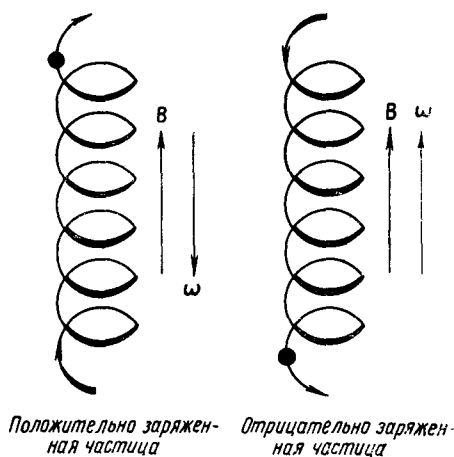


Рис. 1.

Если учесть равномерное движение вдоль магнитного поля, то мы приходим к следующему результату. В постоянном и однородном магнитном поле заряженная частица равномерно вращается по ларморовой окружности, центр которой перемещается параллельно или антипараллельно вектору  $\mathbf{B}$  с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$ . В результате получается движение по спирали (винтовой линии) с постоянной по величине скоростью  $v$ . Ось спирали параллельна вектору  $\mathbf{B}$ . На рис. 1 движение по спирали изображено для положительно и отрицательно заряженных частиц.

Центр ларморовой окружности движется равномерно и прямолинейно вдоль оси спирали. Подчеркнем, что он, вообще говоря, не совпадает с центром кривизны спирали, по которой движется частица. Эти точки совпадают друг с другом только в том частном случае, когда спираль вырождается в окружность.

3. Найдем радиус-вектор  $\mathbf{R}$  центра ларморовой окружности. Если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы, то очевидно

$$\mathbf{v}_{\perp} = [\omega (\mathbf{r} - \mathbf{R})].$$

Умножая это уравнение векторно на  $\omega$  и пользуясь соотношением (1.11), получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{mc}{eB^2} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}] \quad (1.16)$$

или

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{mc}{eB^2} [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (1.17)$$

Введем правую тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов

$$\mathbf{h} = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2]; \quad \mathbf{n}_1 = [\mathbf{n}_2 \mathbf{h}]; \quad \mathbf{n}_2 = [\mathbf{h} \mathbf{n}_1], \quad (1.18)$$

из которых первый ( $\mathbf{h}$ ) направлен вдоль магнитного поля, а второй ( $\mathbf{n}_1$ ) — вдоль поперечной скорости частицы:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{v}_\perp}{v_\perp}. \quad (1.19)$$

В этих обозначениях

$$\mathbf{v} = v_\parallel \mathbf{h} + v_\perp \mathbf{n}_1. \quad (1.20)$$

Кроме того, введем два параметра:

$$a_\perp = \frac{mc v_\perp}{eB} = \frac{c p_\perp}{eB}, \quad (1.21)$$

$$a_\parallel = \frac{mc v_\parallel}{eB} = \frac{e p_\parallel}{eB}, \quad (1.22)$$

из которых первый по абсолютной величине равен длине радиуса ларморовой окружности. Вторым параметром  $a_\parallel$  имел бы такой же смысл, если бы поперечная скорость частицы была равна  $v_\parallel$ . Поэтому параметры  $a_\perp$  и  $a_\parallel$ , рассматриваемые совместно, мы условимся называть *ларморовыми длинами*. Из выражений (1.16) и (1.21) получаем

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - a_\perp \mathbf{n}_2. \quad (1.23)$$

Отсюда видно, что единичный вектор  $\mathbf{n}_2$  направлен по радиусу ларморовой окружности: для положительно заряженной частицы от центра этой окружности к частице, а для отрицательно заряженной — от частицы к центру.

## § 2. Движение ведущего центра

1. В случае неоднородных и переменных магнитных полей, а также при наличии электрического поля интегрирование уравнений движения (1.1) и (1.2) представляет собой очень трудную математическую задачу и, вообще говоря, не может быть выполнено в замкнутой форме. Для получения всех деталей движения в конкретных частных случаях приходится прибегать к трудоемким и утомительным численным методам интегрирования этих уравнений. К работам такого рода относятся многолетние исследования Штёрмера по движению заряженных частиц в магнитном поле Земли. Важность и необходимость подобных исследований не подлежит сомнению. Однако на этом пути трудно получить общие результаты и нарисовать обозримую картину движения.

2. В одном частном и наиболее важном случае обозримая картина движения, если отвлечься от несущественных ее деталей,

может быть получена в общем виде, не прибегая к численному интегрированию уравнений движения. Это случай, когда *магнитное поле сильное и медленно меняется в пространстве и во времени, а электрическое поле слабое*. В этом случае влияние электрического поля, а также пространственных и временных неоднородностей магнитного поля может быть учтено по *методу возмущений*, и картина движения приближенно может быть представлена в следующем виде.

В каждый момент времени частица быстро вращается по ларморовой окружности малого радиуса вокруг направления магнитного поля. Центр ларморовой окружности, называемый также *ведущим центром* частицы, движется не только вдоль магнитной силовой линии, но и медленно перемещается в перпендикулярном направлении. Это перемещение вызвано действием слабого электрического поля, а также влиянием неоднородностей магнитного. По той же причине движение частицы сопровождается медленными изменениями численных значений продольной и поперечной скоростей частицы.

Нетрудно заранее указать условия применимости этой картины движения. Необходимо, во-первых, чтобы магнитное и электрическое поля как по величине, так и по направлению мало изменялись на протяжении ларморовых длин  $a_{\perp}$  и  $a_{\parallel}$ , определяемых выражениями (1. 21) и (1. 22). Точнее, каково бы ни было направление оси  $x$ , должно быть

$$\left| a_{\parallel} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right| \ll B; \quad \left| a_{\perp} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right| \ll B; \quad (2. 1)$$

$$\left| a_{\parallel} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right| \ll E; \quad \left| a_{\perp} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right| \ll E. \quad (2. 2)$$

Во-вторых, электрическое поле  $\mathbf{E}$  должно быть достаточно слабым. Оно должно мало менять скорость частицы за время порядка времени ее обращения по ларморовой окружности

$$T = \left| \frac{2\pi}{\omega} \right| = \left| \frac{2\pi mc}{eB} \right|.$$

За это время скорость частицы меняется на величину порядка

$$\frac{eE}{m} T \approx c \frac{E}{B}.$$

Это изменение должно быть мало по сравнению с  $v$ :

$$c \frac{E}{B} \ll v. \quad (2. 3)$$

В-третьих, поперечная скорость частицы  $v_{\perp}$  должна быть достаточно велика, чтобы проекция движения частицы на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{B}$ , за время порядка  $T$  мало отличалась от кругового движения по ларморовой окружности. Иными

словами, скорость вращения частицы по ларморовой окружности должна быть велика по сравнению со скоростью движения самой окружности поперек магнитного поля. Только при этом условии траектория будет иметь спиралеобразную форму.

Однако применимость уравнений дрейфовой теории, которые будут выведены в дальнейшем, не связана с этим ограничением. Если скорость вращения частицы по ларморовой окружности мала по сравнению со скоростью движения самой окружности поперек магнитного поля или сравнима с ней, то спиралеобразной траектории не получится. Тем не менее траектория частицы будет представлять собой извилистую линию, выходящую около некоторой плавной кривой. Форма этой кривой, а также движение вдоль нее правильно описываются уравнениями дрейфовой теории.

Поэтому третье условие не обязательно должно выполняться для применимости уравнений дрейфовой теории. Мы, однако, временно сохраним его, так как при выводе уравнений дрейфовой теории будем исходить из картины движения частицы по спиралеобразной траектории, выходящей вокруг магнитной силовой линии и медленно перемещающейся в боковом направлении. Получив систему дрейфовых уравнений, мы покажем затем, что от третьего условия, использованного при выводе, можно освободиться.

3. Быстрые вращения частицы по ларморовой окружности представляют малый интерес, и их целесообразно исключить из уравнений движения. Это можно сделать, перейдя от движения частицы к движению ее ведущего центра. Движение ведущего центра, как будет видно из дальнейшего, состоит из *плавного* или *систематического движения*, на которое накладываются быстрые *малые колебания* или *дрожания* около траектории плавного движения. Амплитуды этих колебаний малы по сравнению с радиусом ларморовой окружности, поскольку они являются результатом возмущающего влияния электрического и неоднородностей магнитного полей, т. е. исчезают при движении частицы в однородном магнитном поле. Такие быстрые и малые колебания ведущего центра не представляют большого интереса, и их следует отделить от плавного движения. В выражение для скорости плавного движения ведущего центра войдут, однако, в качестве параметров *продольная* и *поперечная скорости* частицы, точнее, их плавно меняющиеся слагаемые. Необходимо поэтому получить уравнения, описывающие плавное изменение продольной и поперечной скоростей частицы. В результате мы приходим к следующей постановке задачи.

*Требуется найти выражение для скорости плавного движения ведущего центра, а также получить уравнения, описывающие систематические изменения продольной и поперечной скоростей частицы.* Теория, рассматривающая движение заряженной частицы в электромагнитных полях в такой постановке, получила

название *дрейфовой теории* или *дрейфового приближения*. Указанная постановка вопроса является заслугой Альфвена. В простейших случаях Альфвен [1] получил и уравнения движения дрейфовой теории, исходя из наглядных, хотя и нестрогих соображений. Позднее Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев [2, 3] впервые получили дрейфовые уравнения в общем виде для движений с *нерелятивистскими скоростями*. Они воспользовались *асимптотическим методом интегрирования дифференциальных уравнений*, развитым ранее в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [13]. Благодаря этому вычисления Боголюбова и Зубарева проводятся систематически по определенной схеме и в принципе могут быть продолжены до любого приближения. Однако эти вычисления даже при получении первого приближения весьма громоздки и ненаглядны. Ниже приводится иной вывод уравнений движения дрейфовой теории. Он отличается большей наглядностью и в вычислительном отношении менее громоздок, если ограничиться той же степенью точности, с которой были выведены уравнения Боголюбовым и Зубаревым. Вычисления становятся очень громоздкими лишь при получении следующего и более высоких приближений. Метод годится для движения как с *нерелятивистскими*, так и с *релятивистскими скоростями*. Релятивистские уравнения дрейфовой теории впервые получил Хеллвиг [4] методом, отличным от излагаемого здесь, а также от метода Боголюбова и Зубарева.

Хотя мы и получим дрейфовые уравнения, пригодные для релятивистских скоростей, однако форма этих уравнений будет *релятивистски нековариантной*. Причина этого заключается в том, что при выводе дрейфовых уравнений приходится пользоваться такими релятивистски нековариантными условиями, как, например, малость электрического поля по сравнению с магнитным.

Во всех работах дрейфовые уравнения получаются в *первом приближении*. Мы ограничимся тем же приближением.

4. Прежде всего точно установим, что мы понимаем под *нулевым, первым, вторым* и *высшими приближениями*. Мы рассматриваем электрическое, а также пространственные и временные неоднородности магнитного поля как возмущения. В силу уравнения Максвелла  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$ , временные неоднородности маг-

нитного поля можно исключить, заменив их соответствующими пространственными неоднородностями поля  $\mathbf{E}$ . Обозначим через  $G$  малые области пространства, линейные размеры которых порядка большей из ларморовых длин  $|a_{\perp}|$  и  $|a_{\parallel}|$ , определяемых выражениями (1. 21) и (1. 22). Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в пределах каждой из таких малых областей могут быть разложены в степенные ряды по координатам. Наша классификация приближений определяется тем, на каких членах обрываются эти разложения. *Нулевым приближением* мы называем такое приближение, когда магнитное поле

в областях  $G$  рассматривается как *однородное*, а влиянием электрического поля пренебрегаем. В *первом приближении* магнитное поле в областях  $G$  рассматривается как *линейная функция* координат, а электрическое поле — как *однородное*. Таким образом, в первом приближении в дрейфовые уравнения могут входить помимо вектора  $\mathbf{V}$  только вектор  $\mathbf{E}$  и первые пространственные производные  $\mathbf{V}$  и притом в первых степенях. Во *втором приближении* магнитное поле в областях  $G$  рассматривается как *квадратичная*, а электрическое — как *линейная функция* координат. В этом приближении могут входить вторые производные  $\mathbf{V}$  по координатам в первых степенях. Комбинации первых производных вектора  $\mathbf{V}$  между собой, а также с вектором  $\mathbf{E}$  могут входить во вторых степенях. Наконец, первые производные вектора  $\mathbf{E}$  по координатам могут входить только в первых степенях.

Для быстрой оценки порядков малости тех или иных величин можно пользоваться следующей схемой, понимая ее в несколько условном смысле, который будет разъяснен ниже:

величина нулевого порядка — поле  $\mathbf{V}$ ;

величины первого порядка — поле  $\mathbf{E}$  и первые производные  $\mathbf{V}$  по координатам;

величины второго порядка — первые производные  $\mathbf{E}$  и вторые производные  $\mathbf{V}$  по координатам и т. д.

Порядок малости произведения двух или нескольких величин, как всегда, равен сумме порядков малости перемножаемых величин.

Разумеется, *сравниваемые величины должны иметь одинаковую размерность*. Поэтому предполагается, что в приведенной схеме все координаты, по которым производится дифференцирование, являются *безразмерными переменными*. Точнее, предполагается, что в качестве единиц длины берутся ларморовы длины  $a_{\perp}$  и  $a_{\parallel}$ . Например, под производными вектора  $\mathbf{V}$  понимаются величины

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \left( \frac{x}{a_{\perp}} \right)} = a_{\perp} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \left( \frac{x}{a_{\parallel}} \right)} = a_{\parallel} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x},$$

причем ось  $x$  может быть направлена как угодно. Обе эти величины имеют смысл изменений вектора  $\mathbf{V}$  на расстояниях порядка  $a_{\perp}$  и  $a_{\parallel}$ .

5. Напряженности магнитного поля в точках нахождения частицы  $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}(\mathbf{r})$  и ведущего центра  $\mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V}(\mathbf{R})$  с точностью

до членов второго или высшего порядка малости связаны соотношением

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \nabla \cdot \mathbf{V}$$

или в силу соотношения (1. 23)

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + a_{\perp} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{V}_0. \quad (2. 4)$$

Вектор  $\mathbf{V}_0$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{V}_0 = \bar{\mathbf{V}}_0 + \delta \mathbf{V}_0, \quad (2. 5)$$

где  $\bar{\mathbf{V}}_0$  — плавно меняющийся вектор, а  $\delta \mathbf{V}_0$  — малая добавка к нему, обусловленная колебаниями ведущего центра около траектории его плавного движения. В однородных магнитных полях эти колебания исчезают. В неоднородных полях их амплитуды пропорциональны производным  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$ . Поэтому изменения  $\delta \mathbf{V}_0$  поля  $\mathbf{V}_0$  на протяжении таких амплитуд пропорциональны квадратам или произведениям таких производных, а потому  $\delta \mathbf{V}_0$  будет величиной второго или высшего порядка малости. Так как сверх того вектор  $\delta \mathbf{V}_0$  быстро колеблется около нулевого значения, то в принятом нами приближении им всюду следует пренебречь. Таким образом, с точностью до быстро колеблющегося вектора второго порядка малости можно написать

$$\mathbf{V}_0 = \bar{\mathbf{V}}_0, \quad (2. 6)$$

т. е. напряженность магнитного поля  $\mathbf{V}_0$  в точке нахождения ведущего центра с указанной степенью точности может рассматриваться как плавно меняющийся вектор. То же самое относится к единичному вектору  $\mathbf{h}_0$  вдоль направления магнитного поля в той же точке пространства. Он связан с единичным вектором  $\mathbf{h}$  соотношением

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + a_{\perp} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}_0^*. \quad (2. 7)$$

Таким образом,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{h}$  могут быть представлены в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta \mathbf{V}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \delta \mathbf{h}, \quad (2. 8)$$

где  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{h}_0$  — плавно меняющиеся векторы, а  $\delta \mathbf{V} = a_{\perp} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{V}_0$

\* Если  $\mathbf{h}_0$  — единичный вектор, то из соотношения (2. 7) в силу тождества  $\mathbf{h}_0 (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}_0 = 0$  следует, что  $\mathbf{h}$  будет также единичным вектором. В самом деле,  $h^2$  отличается от  $h_0^2$  на величину второго порядка малости, которой следует пренебречь. Использованное тождество является частным случаем тождества

$$\mathbf{A} (\mathbf{C} \nabla) \mathbf{A} = 0, \quad (2. 8a)$$

где  $\mathbf{A}$  — вектор постоянной длины ( $\mathbf{A}^2 = \text{const}$ ), а  $\mathbf{C}$  — произвольный вектор. Справедливость тождества (2. 8a) легко усмотреть из следующих соображений.  $(\mathbf{C} \nabla) \mathbf{A}$  есть умноженная на  $\mathbf{C}$  производная вектора  $\mathbf{A}$  в направлении вектора  $\mathbf{C}$ . Поскольку длина вектора  $\mathbf{A}$  постоянна, эта производная есть вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{A}$ , откуда и следует тождество (2. 8a).



и  $\delta \mathbf{h} = a_{\perp} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}_0$  — быстро колеблющиеся векторы первого порядка малости.

Аналогично напряженность электрического поля  $\mathbf{E}_0$  в точке нахождения ведущего центра представится в виде

$$\mathbf{E}_0 = \bar{\mathbf{E}}_0 + \delta \mathbf{E}_0,$$

где  $\bar{\mathbf{E}}_0$  — плавно меняющийся вектор, а  $\delta \mathbf{E}_0$  — быстро колеблющаяся добавка к нему третьего порядка малости. Таким образом, с точностью до быстро колеблющихся членов третьего порядка малости вектор  $\mathbf{E}_0$  меняется плавно. С той же точностью для напряженности электрического поля  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r})$  в точке нахождения частицы можно написать

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + a_{\perp} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{E}_0. \quad (2.9)$$

6. Перейдем теперь к вычислению скорости ведущего центра и выделению из нее плавно меняющихся слагаемых. По определению радиус-вектор  $\mathbf{R}$  ведущего центра дается выражением (1.17). Дифференцируя это выражение по времени, находим скорость ведущего центра

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v} + \frac{c}{eB^2} \left[ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \mathbf{B} \right] - \frac{2mc}{eB^3} \cdot \frac{dB}{dt} [\mathbf{v} \mathbf{B}] + \frac{mc}{eB^3} \left[ \mathbf{v} \frac{dB}{dt} \right].$$

Подставим сюда вместо  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  выражение (1.2), положим  $\mathbf{B} = B \mathbf{h}$ , а также воспользуемся соотношениями (1.18), (1.20), (1.21) и (1.22). Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \mathbf{B}] + a_{\perp} \left( \frac{1}{B} \cdot \frac{dB}{dt} \mathbf{n}_2 + \left[ \mathbf{n}_1 \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right] \right) + \\ + a_{\parallel} \left[ \mathbf{h} \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) B = \frac{\partial B}{\partial t} + v_{\parallel} (\mathbf{h} \nabla) B + v_{\perp} (\mathbf{n}_1 \nabla) B, \\ \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + v_{\parallel} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + v_{\perp} (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

приведем выражение (2.10) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \mathbf{B}] + a_{\parallel} v_{\parallel} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}] + \\ + a_{\perp} v_{\perp} \left\{ \left( \mathbf{n}_1 \frac{\nabla B}{B} \right) \mathbf{n}_2 + [\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}] \right\} + \\ + a_{\perp} v_{\parallel} \left\{ \left( \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right) \mathbf{n}_2 + [\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}] + [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}] \right\} + \\ + a_{\perp} \left\{ \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{n}_2 + \left[ \mathbf{n}_1 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right] \right\} + a_{\parallel} \left[ \mathbf{h} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Это математически точное выражение для скорости движения ведущего центра. Как и следовало ожидать, оно содержит член нулевого порядка  $v_{\parallel} \mathbf{h}$ , к которому добавляются члены первого и высшего порядка малости, обусловленные наличием электрического и неоднородностей магнитного полей.

Существенно, и этого следовало ожидать из общих соображений, что в выражении (2. 12) не входят быстро колеблющиеся члены нулевого порядка малости. Напротив, скорость  $v$  самой частицы содержит быстро колеблющийся член нулевого порядка, возникающий из-за вращения частицы вокруг магнитной силовой линии. Таким образом, *переход от движения самой частицы к движению ее ведущего центра повышает на единицу порядок малости быстро колеблющихся членов*. Благодаря этому упрощается задача отделения плавного движения от быстрых колебаний. В этом смысл введения понятия ведущего центра.

В соответствии с намеченной выше программой, мы должны отбросить в выражении (2. 12), во-первых, все члены второго и высшего порядка малости, во-вторых, все члены первого порядка, описывающие «дрожание» ведущего центра\*.

Прежде всего можно отбросить все члены, стоящие в последней строке выражения (2. 12): они второго порядка малости, поскольку  $\frac{\partial V}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$  выражаются через пространственные производные вектора  $\mathbf{E}$ .

Члены первого порядка во второй и третьей строках выражения (2. 12) содержат быстро вращающиеся векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , стоящие в качестве множителей при медленно меняющихся коэффициентах. Для выделения из них плавно меняющихся слагаемых первого порядка малости достаточно усреднить эти члены по *невозможному движению* единичных векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , считая коэффициенты при  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  постоянными. Невозможное движение векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  есть равномерное вращение вокруг направления вектора  $\mathbf{h}$ . При усреднении по такому вращению третья строка выражения (2. 12) даст нуль, так как все члены этой строки содержат  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  в первой степени. Остается усреднить выражения  $(\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{n}_2$  и  $[\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}]$ . Имея однако в виду дальнейшие приложения, мы произведем усреднение более общих выражений:  $(\mathbf{n}_1 \mathbf{A}) \mathbf{n}_2$ ,  $[\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}]$  и некоторых других, где  $\mathbf{A}$  — произвольный постоянный или медленно меняющийся вектор.

Начнем с усреднения выражений  $(\mathbf{n}_1 \mathbf{A}) \mathbf{n}_2$  и  $(\mathbf{n}_2 \mathbf{A}) \mathbf{n}_1$ . Оба вектора  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  равномерно вращаются вокруг направления вектора  $\mathbf{h}$ . Так как они взаимно перпендикулярны, то фазы этих вращений сдвинуты одна относительно другой на четверть периода. Но это обстоятельство, по крайней мере в первом приближении, не может сказаться на значении средних. Поэтому,

\* Как будет показано в § 4, влияние быстро колеблющихся членов первого порядка малости может сказаться на скорости плавного движения ведущего центра лишь во втором или высшем приближении.

обозначая чертой операцию усреднения, можно написать, с одной стороны,

$$\overline{(\mathbf{n}_1 \mathbf{A})} \mathbf{n}_1 = \overline{(\mathbf{n}_2 \mathbf{A})} \mathbf{n}_2.$$

С другой стороны, разлагая вектор  $\mathbf{A}$  по ортам  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , можно написать

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \mathbf{h}) \mathbf{h} + (\mathbf{A} \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 + (\mathbf{A} \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_2.$$

Усредняя это равенство и сравнивая с предыдущим, найдем

$$\overline{(\mathbf{n}_1 \mathbf{A})} \mathbf{n}_1 = \overline{(\mathbf{n}_2 \mathbf{A})} \mathbf{n}_2 = \frac{1}{2} \{ \mathbf{A} - (\mathbf{h} \mathbf{A}) \mathbf{h} \}. \quad (2.13)$$

Заменяя здесь  $\mathbf{A}$  на  $[\mathbf{h} \mathbf{A}]$  и замечая, что

$$\mathbf{n}_1 [\mathbf{h} \mathbf{A}] = [\mathbf{n}_1 \mathbf{h}] \mathbf{A} = -(\mathbf{n}_2 \mathbf{A}),$$

$$\mathbf{n}_2 [\mathbf{h} \mathbf{A}] = [\mathbf{n}_2 \mathbf{h}] \mathbf{A} = (\mathbf{n}_1 \mathbf{A}),$$

получим

$$\overline{(\mathbf{n}_1 \mathbf{A})} \mathbf{n}_2 = -\overline{(\mathbf{n}_2 \mathbf{A})} \mathbf{n}_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{h} \mathbf{A}]. \quad (2.14)$$

Средние от выражений  $[\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}]$  и  $[\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}]$ , по крайней мере в первом приближении, очевидно, также равны между собой. Чтобы найти их, проще всего воспользоваться тождеством

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}] + [\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}] + [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A}], * \quad (2.15)$$

которое дает

$$\overline{[\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}]} = \overline{[\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}]} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{A} - \frac{1}{2} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A}]. \quad (2.17)$$

Аналогично из тождества (2.16) получаем

$$\overline{[\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}]} = \overline{[\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}]} = \frac{1}{2} \text{div } \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A}. \quad (2.18)$$

\* Справедливость этого тождества, а также тождества

$$\text{div } \mathbf{A} = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \quad (2.16)$$

станет очевидной, если их правые части записать в координатах, направив ось  $x$  вдоль  $\mathbf{n}_1$ , ось  $y$  — вдоль  $\mathbf{n}_2$ , ось  $z$  — вдоль  $\mathbf{h}$ . Сделав это, получим для правых частей тождеств (2.15) и (2.16):

$$\left[ \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{A} \right] + \left[ \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{A} \right] + \left[ \mathbf{h} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{A} \right] = [\nabla \mathbf{A}] = \text{rot } \mathbf{A};$$

$$\left( \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{A} \right) + \left( \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{A} \right) + \left( \mathbf{h} \frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{A} \right) = (\nabla \mathbf{A}) = \text{div } \mathbf{A}.$$

Наконец, скалярным умножением на  $\mathbf{h}$  из формулы (2. 17) получаем

$$\overline{\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}} = -\overline{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A}). \quad (2. 19)$$

Полагая в формуле (2. 14)  $\mathbf{A} = \nabla B$ , а в формуле (2. 17)  $\mathbf{A} = \mathbf{h}$ , найдем значения интересующих нас выражений

$$\overline{(\mathbf{n}_1 \nabla B) \mathbf{n}_2} \text{ и } \overline{[\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}]}$$

Два последних слагаемых в первой строке выражения (2. 12) не содержат быстро колеблющихся членов первого порядка, а потому они могут быть оставлены без изменения. Остается рассмотреть член нулевого приближения  $v_{\parallel} \mathbf{h}$ . Медленно меняющуюся скорость  $v_{\parallel}$  можно представить в виде  $v_{\parallel} = \bar{v}_{\parallel} + \delta v_{\parallel}$ , где  $\bar{v}_{\parallel}$  — плавно меняющаяся величина, а  $\delta v_{\parallel}$  — быстро колеблющаяся величина первого порядка малости. Воспользовавшись соотношениями (2. 8) и отбрасывая члены второго порядка малости, можем написать

$$v_{\parallel} \mathbf{h} = \bar{v}_{\parallel} \mathbf{h}_0 + (\bar{v}_{\parallel} \delta \mathbf{h} + \mathbf{h}_0 \delta v_{\parallel}).$$

Члены, заключенные в круглые скобки, первого порядка малости и описывают дрожание. В принятом нами приближении они должны быть отброшены.

Обозначим через  $\bar{v}_{\perp}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{a}_{\perp}$ , ... плавно меняющиеся члены в величинах  $v_{\perp}$ ,  $m$ ,  $a_{\perp}$ , ... (аналогично тому, как мы поступили с  $v_{\parallel}$ ) и воспользуемся тождеством

$$(\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + [\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}] = 0, \quad (2. 20)$$

которое легко получить, взяв градиент от обеих частей равенства  $\mathbf{h}^2 = 1$ . Тогда для скорости регулярного движения ведущего центра в первом приближении найдем

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} = & \left[ \bar{v}_{\parallel} + \frac{1}{2} \bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp} (\mathbf{h}_0 \operatorname{rot} \mathbf{h}_0) \right] \mathbf{h}_0 + \frac{c}{B_0^2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0] + \\ & + \frac{1}{2} \bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp} \left[ \mathbf{h}_0 \cdot \frac{\nabla B_0}{B_0} \right] + \bar{v}_{\parallel} \bar{a}_{\parallel} [\mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0]. \end{aligned} \quad (2. 21)$$

Строго говоря, под  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{E}_0$  здесь следовало бы понимать не напряженности полей в точке нахождения ведущего центра, а их плавно меняющиеся слагаемые. Однако последние отличаются от самих полей на быстро колеблющиеся члены второго порядка малости, которыми мы пренебрегаем. Поэтому, не рискуя впасть в ошибку, мы можем под  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{E}_0$  понимать напряженности полей в точке нахождения ведущего центра.

Как ясно из вывода, масса  $\bar{m}$  в принятом приближении может определяться по формуле

$$\bar{m} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}_{\parallel}^2 + \bar{v}_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (2. 22)$$

Аналогично

$$\bar{p}_{\parallel} = \bar{m} \bar{v}_{\parallel}; \quad \bar{p}_{\perp} = \bar{m} \bar{v}_{\perp}; \quad (2. 23)$$

$$\bar{a}_{\perp} = \frac{\bar{m} c \bar{v}_{\perp}}{e B_0} = \frac{c \bar{p}_{\perp}}{e B_0}; \quad (2. 24)$$

$$\bar{a}_{\parallel} = \frac{\bar{m} c \bar{v}_{\parallel}}{e B_0} = \frac{c \bar{p}_{\parallel}}{e B_0}. \quad (2. 25)$$

7. Первый член уравнения (2. 21)

$$\left(\bar{\mathbf{R}}\right)_{\parallel} = \left[\bar{v}_{\parallel} + \frac{1}{2} \bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp} (\mathbf{h}_0 \text{ rot } \mathbf{h}_0)\right] \mathbf{h}_0 \quad (2. 26)$$

дает скорость плавного движения ведущего центра в направлении  $\mathbf{h}_0$ , т. е. в направлении магнитной силовой линии, проходящей через ведущий центр. Его можно также интерпретировать как *скорость плавного движения самой частицы* в том же направлении. В самом деле в силу соотношения (2. 7) проекция полной скорости частицы на направление  $\mathbf{h}_0$  в принятом приближении равна

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \mathbf{h}_0 &= (v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_{\perp} \mathbf{n}_1) \{ \mathbf{h} - \mathbf{a}_{\perp} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}_0 \} = \\ &= v_{\parallel} - v_{\perp} \mathbf{a}_{\perp} \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}_0 - v_{\parallel} \mathbf{a}_{\perp} \mathbf{h} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}_0. \end{aligned}$$

Усредняя это выражение по формуле (2. 19), получим

$$\overline{\mathbf{v} \mathbf{h}_0} = \bar{v}_{\parallel} + \frac{1}{2} \bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp} (\mathbf{h}_0 \text{ rot } \mathbf{h}_0),$$

что совпадает с проекцией скорости (2. 26) на направление  $\mathbf{h}_0$ . Таким образом *скорости плавных движений частицы и ее ведущего центра в направлении  $\mathbf{h}_0$  с точностью до членов второго порядка одинаковы.*

8. Остальные члены формулы (2. 21) дают скорость плавного движения ведущего центра в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{h}_0$ . Такое движение называется *дрейфом*. Член  $\frac{c}{B_0^2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0]$  дает скорость так называемого *электрического дрейфа*. Эта скорость полностью определяется мгновенными значениями электрического и магнитного полей в точке нахождения ведущего центра.

В частности, она совершенно не зависит от массы, а также от величины и знака заряда частицы\*.

Выражение для скорости электрического дрейфа допускает важное обобщение. Природа силы  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ , действующей на частицу помимо магнитного поля, совершенно не существенна. Не обязательно, чтобы сила  $\mathbf{F}$  была электрической. Она может быть и другой природы, например гравитационной или силой инерции, если движение рассматривается в неинерциальной системе отсчета. Существенно только, чтобы сила  $\mathbf{F}$  была «мала», чтобы ее влияние могло рассматриваться как малое возмущение. При этом условии компонента силы  $\mathbf{F}_\perp$ , перпендикулярная к магнитному полю, будет вызывать дрейф частицы, т. е. плавное движение ее со скоростью

$$\mathbf{w}_F = \frac{c}{eB^2} [\mathbf{F}\mathbf{B}]. \quad (2. 27)$$

Электрический дрейф, однако, отличается от всех других дрейфов тем, что его направление не зависит от знака заряда частицы. По этой причине плазма, находящаяся в скрещенных взаимно перпендикулярных постоянных и однородных полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , движется как целое с дрейфовой скоростью  $\mathbf{w} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ .

Напротив, в гравитационном поле, например, положительно и отрицательно заряженные частицы будут дрейфовать в противоположных направлениях (если отвлечься от всех прочих видов дрейфа).

9. Два последних члена в формуле (2. 21) дают скорость дрейфа из-за неоднородности магнитного поля. Этот дрейф вызывается либо пространственным изменением магнитного поля по величине, либо его изменением по направлению. В последнем случае дрейф называется *центробежным*. Происхождение этого названия будет выяснено в следующем параграфе. Сейчас же мы придадим выражению для скорости центробежного дрейфа  $w_c$  несколько иную форму.

Вектор  $\mathbf{h}_0$  есть единичный вектор касательной к магнитной силовой линии в точке нахождения ведущего центра. По определению кривизны

$$(\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0 = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{N}_0, \quad (2. 28)$$

---

\* Согласно формуле (2. 21) электрический дрейф должен существовать и для незаряженной частицы, что, очевидно, неверно, поскольку электрическое и магнитное поля на незаряженную частицу не действуют. Чтобы разрешить этот парадокс, вообразим, что заряд частицы стремится к нулю. Тогда ларморовы длины  $a_\parallel$  и  $a_\perp$  будут стремиться к бесконечности, и, следовательно, начиная с некоторого момента условие применимости дрейфовой теории (2. 1) перестанет выполняться. Следовательно, для незаряженной частицы формула (2. 21) не применима, и никакого парадокса не возникает.

где  $\varrho_0$  — радиус кривизны этой силовой линии, а  $\mathbf{N}_0$  — единичный вектор главной нормали к магнитной силовой линии в той же точке. Введем еще единичный вектор бинормали:

$$\mathbf{b}_0 = [\mathbf{h}_0 \mathbf{N}_0]. \quad (2. 29)$$

Тогда для скорости центробежного дрейфа можно написать

$$\mathbf{w}_c = \frac{\bar{v}_{\parallel} \bar{a}_{\parallel}}{\varrho_0} \mathbf{b}_0 = - \frac{\bar{v}_{\parallel}^2}{\omega_0 \varrho_0} \mathbf{b}_0. \quad (2. 30)$$

Скорость центробежного дрейфа, таким образом, направлена всегда по бинормали к магнитной силовой линии.

Дрейф, вызванный неоднородностью магнитного поля только по величине, также нетрудно представить в иной форме. Воспользуемся уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 \equiv \text{rot } (B_0 \mathbf{h}_0) = - [\mathbf{h}_0 \nabla B_0] + B_0 \text{rot } \mathbf{h}_0 = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{j}_0,$$

где  $\mathbf{j}_0$  — плотность электрического тока в точке нахождения ведущего центра. Заменим далее в тождестве (2. 20)  $\mathbf{h}$  на  $\mathbf{h}_0$  и обе части полученного уравнения умножим векторно на  $\mathbf{h}_0$ . Тогда, принимая во внимание соотношения (2. 28) и (2. 29), найдем

$$\text{rot } \mathbf{h}_0 = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{b}_0 + (\mathbf{h}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{h}_0) \mathbf{h}_0.$$

Наконец, умножим предыдущее соотношение скалярно на  $\mathbf{h}_0$ . Это дает

$$\mathbf{h}_0 \text{rot } \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 \text{rot } \mathbf{h}_0.$$

В результате получим

$$\mathbf{B}_0 \text{rot } \mathbf{h}_0 = \frac{B_0}{\varrho_0} \mathbf{b}_0 + (\mathbf{h}_0 \text{rot } \mathbf{B}_0) \mathbf{h}_0 = \frac{B_0}{\varrho_0} \mathbf{b}_0 + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{0\parallel}.$$

Через  $\mathbf{j}_{0\parallel}$  и  $\mathbf{j}_{0\perp}$  мы обозначаем компоненты плотности тока вдоль магнитного поля и перпендикулярно к нему. Теперь для скорости  $\mathbf{w}_B$  рассматриваемого дрейфа нетрудно получить

$$\mathbf{w}_B = \frac{1}{2B_0} \bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp} [\mathbf{h}_0 \nabla B_0] = \frac{\bar{a}_{\perp} \bar{v}_{\perp}}{2\varrho_0} \mathbf{b}_0 - 2\pi \frac{\bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp}}{c B_0} \cdot \mathbf{j}_{0\perp}. \quad (2. 31)$$

Если плотность тока поперек магнитного поля равна нулю, то скорость рассматриваемого дрейфа также направлена по бинормали к магнитной силовой линии.

Формулу (2. 21) можно, таким образом, записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} = & \left[ \bar{v}_{\parallel} + \frac{1}{2} \bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp} (\mathbf{h}_0 \text{rot } \mathbf{h}_0) \right] \mathbf{h}_0 + \frac{c}{B_0^2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0] - \\ & - \frac{1}{\omega_0 \varrho_0} \left( \bar{v}_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_{\perp}^2 \right) \mathbf{b}_0 - 2\pi \frac{\bar{v}_{\perp} \bar{a}_{\perp}}{c B_0} \mathbf{j}_{0\perp}. \end{aligned} \quad (2. 32)$$

10. Скорость плавного движения ведущего центра в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{h}_0$ , в первом приближении совпадает со скоростью плавного движения самой частицы в том же направлении. В самом деле в однородном и постоянном магнитном поле длина ларморова радиуса  $a \equiv a_{\perp}$  остается постоянной. Она изменяется лишь из-за пространственных и временных неоднородностей магнитного поля. Однако эти изменения за время порядка периода обращения частицы по ларморовой окружности будут величинами первого порядка малости по сравнению с длиной ларморова радиуса. Заметив это, рассмотрим проекцию движе-

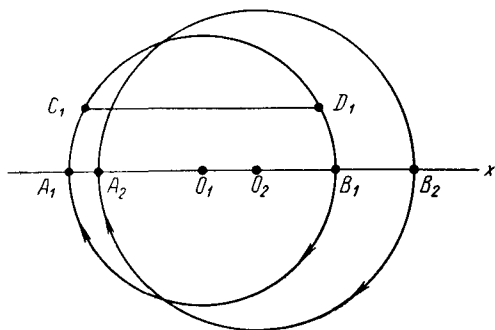


Рис. 2.

ния частицы на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{h}_0$ . В начальный момент частица вращается по ларморовой окружности радиуса  $a_1$  с центром  $O_1$  (рис.2).

За время  $T \approx \frac{2\pi}{\omega}$  центр ларморовой окружности переместится в  $O_2$ , а ее радиус делается равным  $a_2$ . Направление плавного движения ведущего центра примем за координатную ось  $x$ . Абсциссу частицы

будем обозначать через  $x$ , а абсциссу ведущего центра — через  $X$ . Допустим, что начальное и конечное положения частицы находятся на оси  $x$ . Тогда, как видно из рисунка, перемещение частицы за время  $T$

$$\Delta x \equiv A_1 A_2 = A_1 O_1 + O_1 O_2 + O_2 A_2 = \Delta X - (a_2 - a_1) = \Delta X - \Delta a,$$

где  $\Delta X = O_1 O_2$  — перемещение ведущего центра. Средняя скорость частицы  $\frac{\Delta x}{T}$  за то же время будет поэтому меньше средней скорости ведущего центра  $\frac{\Delta X}{T}$  на величину первого порядка малости  $\frac{\Delta a}{T}$ . Если бы частица сначала находилась в точке  $B_1$ , а затем перешла в точку  $B_2$ , то для ее средней скорости мы получили бы

$$\frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta X}{T} + \frac{\Delta a}{T},$$

т. е. величину на  $\frac{\Delta a}{T}$  больше средней скорости ведущего центра. Среднее из обоих значений совпадает со скоростью ведущего центра  $\frac{\Delta X}{T}$ , если пренебречь величинами второго порядка малости.



Рассуждая так же, убедимся, что средняя за период  $T$  скорость движения частицы при ее начальном положении в точке  $C_1$  меньше, а при начальном положении в точке  $D_1$  больше средней скорости ведущего центра на величины первого порядка малости. Однако если пренебречь величинами второго порядка, то среднее арифметическое из этих двух скоростей будет равно скорости ведущего центра. Отсюда видно, что если усреднить скорости движения частицы по всем возможным положениям ее на ларморовой окружности, то в первом приближении результат будет совпадать со средней скоростью ведущего центра. Но очевидно, что усредненная таким образом скорость поперечного движения частицы с точностью до величины второго порядка малости и есть скорость плавного движения ее в направлении, перпендикулярном к  $h_0$ . Этим наше утверждение доказано. При доказательстве мы отвлеклись от быстрых колебаний частицы около ее ларморовой окружности. Однако, как уже подчеркивалось, амплитуды этих колебаний представляют собой величины первого порядка малости по сравнению с длиной ларморова радиуса. При усреднении такие колебания выпадают и в первом приближении не влияют на скорость плавного движения частицы.

*Поскольку ранее было доказано, что в первом порядке продольные скорости плавных движений частицы и ее ведущего центра также равны между собой, мы приходим к заключению, что этот результат остается справедливым и для полных скоростей указанных движений.* Именно этот результат оправдывает введение понятия ведущего центра, ибо нас в конце концов интересует движение самой частицы, а не какой-то связанной с ней воображаемой математической точки.

11. При выводе всех формул настоящего параграфа предполагалось, что скорость дрейфа мала по сравнению с поперечной скоростью  $v_{\perp}$  частицы. В частности, это относится и к электрическому дрейфу. Поэтому вывод предполагает выполнение условия

$$v_{\perp} \gg c \frac{E_{\perp}}{B}. \quad (2.33)$$

Оно необходимо, чтобы частица двигалась по спирали, вьющейся вокруг траектории плавного движения ее ведущего центра. Если условие (2.33) не выполнено, то спирали не получится. Однако не существенно, чтобы траектория частицы имела спиралеобразную форму. Существенно, что все формулы для скорости движения ведущего центра, полученные в настоящем параграфе, остаются в силе и в том случае, когда условие (2.33) не выполнено. Должно быть только изменено их доказательство. Допустим поэтому, что условие (2.33) не выполнено, т. е. рассмотрим случай, когда

$$v_{\perp} \lesssim c \frac{E_{\perp}}{B}.$$

В этом случае

$$|a_{\perp}| = \left| \frac{mc v_{\perp}}{eB} \right| \lesssim \left| \frac{mc^2}{eB^2} \cdot E_{\perp} \right|,$$

$$|a_{\perp} v_{\perp}| \lesssim \left| \frac{mc^3}{eB^3} \cdot E_{\perp}^2 \right|.$$

Благодаря малым множителям  $E_{\perp}$  и  $E_{\perp}^2$  третья строка в выражении (2. 12) становится величиной второго порядка, а вторая строка — третьего порядка малости. Поэтому эти строки могут быть просто отброшены, как и соответствующие им в формуле (2. 21) члены. Формула (2. 21) остается справедливой. Однако частица движется не по спирали, а описывает какую-то сложную кривую около траектории плавного движения ведущего центра.

### § 3. Происхождение дрейфов

1. С целью лучшего уяснения результатов предыдущего параграфа рассмотрим частные случаи движения частицы в электромагнитных полях, в которых происхождение дрейфа можно понять с помощью простых и наглядных соображений. Ради простоты ограничимся рассмотрением движений с нерелятивистскими скоростями.

2. *Электрический дрейф.* Допустим, что электрическое и магнитное поля постоянны и однородны. Преобразуем уравнения движения к системе отсчета, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью  $\mathbf{w}_E$ , значение которой будет определено дальше. Скорость и импульс частицы в движущейся системе отсчета обозначим через  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{p}'$ . Тогда  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}_E$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + m\mathbf{w}_E$ , и уравнение (1. 2) перейдет в

$$\dot{\mathbf{p}}' = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}] \right\} + \frac{e}{c} [\mathbf{w}_E \cdot \mathbf{B}].$$

Выберем теперь скорость  $\mathbf{w}_E$  так, чтобы  $(\mathbf{B}\mathbf{w}_E) = 0$  и  $\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{w}_E \cdot \mathbf{B}] = 0$ , где  $\mathbf{E}_{\perp}$  — слагающая электрического поля, перпендикулярная к вектору  $\mathbf{B}$ . Этими условиями скорость  $\mathbf{w}_E$  определяется однозначно. Она равна

$$\mathbf{w}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{B}] = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \mathbf{B}]. \quad (3. 1)$$

Уравнение движения примет вид

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt} = e \left\{ \mathbf{E}_{\parallel} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}] \right\}, \quad (3. 2)$$

где  $\mathbf{E}_{\parallel}$  — компонента электрического поля в направлении вектора  $\mathbf{B}$ . Уравнение (3. 2) имеет тот же вид, что и уравнение (1. 2),

но из него выпала перпендикулярная компонента электрического поля  $E_{\perp}$ . Отсюда заключаем, что *влияние компоненты  $E_{\perp}$  сводится к тому, что она вызывает движение частицы поперек магнитного поля с постоянной скоростью, определяемой формулой (3.1)*. Это движение и есть *электрический дрейф*.

Из вывода ясно, что природа силы  $F = eE$ , действующей на частицу помимо магнитного поля, *несущественна*. Сила  $F$  может быть, например, гравитационной или силой инерции, если движение рассматривается в неинерциальной системе отсчета. Существенно только, чтобы сила  $F$  была постоянной. При этом условии *компонента этой силы  $F_{\perp}$ , перпендикулярная к магнитному полю, вызовет дрейф частицы, т. е. равномерное движение ее с постоянной скоростью*

$$w_F = \frac{c}{eB^2} [FB]. \quad (3.3)$$

На первый взгляд может показаться, что на величину поля  $E$  не надо накладывать никаких ограничений. Однако это не так. Дело в том, что мы пользовались нерелятивистскими уравнениями движения. Между тем электрическое поле  $E$  или сила  $F$  ускоряют частицу. Если они достаточно велики, то может случиться, что за время порядка циклотронного периода  $T = \left| \frac{2\pi mc}{eB} \right|$  частица приобретает скорость, сравнимую со скоростью  $c$ , когда нерелятивистскими уравнениями пользоваться уже нельзя. За время  $T$  продольная скорость частицы увеличивается на

$$\Delta v_{\parallel} = \frac{eE_{\parallel}}{m} T = 2\pi c \frac{E_{\parallel}}{B}.$$

Это приращение скорости должно быть мало по сравнению с  $c$ , что дает  $E_{\parallel} \ll B$ . Аналогично скорость дрейфа также должна быть мала по сравнению с  $c$  и, следовательно,  $E_{\perp} \ll B$ . Таким образом, условием применимости нерелятивистских уравнений движения является

$$E \ll B \quad (3.4)$$

или

$$\frac{F}{e} \ll B. \quad (3.5)$$

Если эти условия не выполняются, то задача становится существенно релятивистской. При постоянных  $B$ ,  $E$  и  $F$  релятивистские уравнения движения точно интегрируются [5], но мы не будем этим заниматься.

3. Полученные результаты легко обобщаются на случай неоднородных полей. Требуется только, чтобы поле  $E$  было слабым, а поле  $B$  медленно менялось (в пространстве и во времени).

В самом деле, теперь скорость  $w_E$ , определяемая выражением (3. 1), будет величиной первого порядка малости, а ее изменение за циклотронный период  $T$  — второго порядка. Пренебрегая величинами второго порядка малости, можно в течение коротких промежутков времени ( $\approx T$ ) рассматривать скорость  $w_E$  как величину постоянную. Переходя к системе отсчета, движущейся со скоростью  $w_E$  и повторяя приведенные выше рассужде-

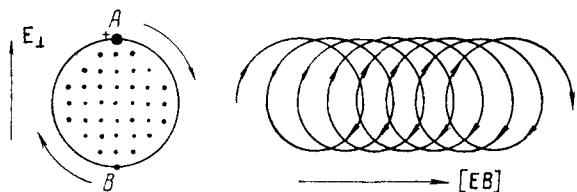


Рис. 3.

ния, мы снова приходим к заключению, что влияние поперечной компоненты электрического поля  $E$  или силы  $F$  сказывается только на появлении дрейфа, скорость которого определяется формулой (3. 1) или (3. 3). Однако при наличии неоднородности полей  $B$  и  $E$  этот результат верен только в первом приближении.

4. Происхождение электрического дрейфа, а также аналогичного дрейфа, вызванного постоянной силой  $F$ , легко понять

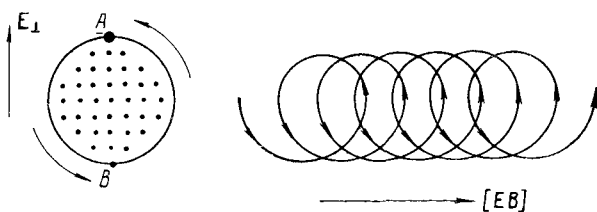


Рис. 4.

и из следующих соображений [6]. Рассмотрим проекцию траектории частицы на плоскость, перпендикулярную к магнитному полю  $B$ , которое предполагается постоянным и однородным. Примем эту плоскость за плоскость рисунка (рис. 3 и 4). Пусть магнитное поле направлено к читателю. Если бы не было электрического поля, то рассматриваемая проекция была бы окружностью радиуса  $a_{\perp}$ . Положительно заряженная частица вращалась бы по часовой стрелке, а отрицательно заряженная — против (см. рис. 3 и 4 слева). Рассмотрим теперь влияние электрического поля. Пусть перпендикулярная компонента  $E_{\perp}$  электрического поля направлена вверх. Тогда для положительно заряженной частицы скорость  $v_{\perp}$  в точке  $A$  будет наибольшая, а в точке  $B$  — наименьшая. Кроме того, в точке  $A$  силы электрического и магнитного полей действуют на частицу в противо-

положные стороны, а в точке  $B$  — в одну и ту же сторону. Обе причины приведут к тому, что кривизна  $\frac{1}{r}$  проекции траектории в верхней части делается меньше, чем в нижней части, как это видно из выражений

$$\frac{1}{r} = \frac{eB}{mv_{\perp}c} - \frac{eE_{\perp}}{mv_{\perp}^2} \quad (\text{в точке } A),$$

$$\frac{1}{r} = \frac{eB}{mv_{\perp}c} + \frac{eE_{\perp}}{mv_{\perp}^2} \quad (\text{в точке } B).$$

В результате окружность перейдет в незамкнутую кривую, двигаясь по которой, проекция частицы будет медленно перемещаться вправо (см. рис. 3). Это перемещение и есть электрический дрейф. Для отрицательно заряженной частицы аналогичная проекция траектории показана на рис. 4. В обоих случаях частица дрейфует вправо, т. е. направление электрического дрейфа, как это и должно быть, не зависит от знака заряда частицы.

5. Изложенным вопросом о природе электрического дрейфа исчерпывается. Представляет, однако, интерес выйти за пределы дрейфового приближения, поскольку при постоянных и однородных  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  легко найти точное решение задачи. Перейдем по-прежнему к системе отсчета, движущейся равномерно со скоростью, определяемой выражением (3. 1). Тогда из уравнения (3. 2)

$$\dot{\mathbf{p}}_{\parallel} = e\mathbf{E}, \quad (3. 6)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{\perp} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}'_{\perp} \cdot \mathbf{B}]. \quad (3. 7)$$

Уравнение (3. 6) описывает равноускоренное движение частицы в направлении магнитного поля, а уравнение (3. 7) — равномерное вращение ее по ларморовой окружности радиуса  $|a_{\perp}| = \left| \frac{mc\mathbf{v}'_{\perp}}{eB} \right|$  с циклотронной частотой  $\omega = -\frac{eB}{mc}$ . Чтобы получить полную скорость относительно неподвижной системы отсчета, надо к скоростям этих двух движений добавить еще постоянную скорость  $\mathbf{w}_E$  движущейся системы отсчета. Это приводит к следующему результату.

*Движение частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях в нерелятивистском приближении складывается из трех движений: равноускоренного движения вдоль магнитной силовой линии, равномерного вращения по ларморовой окружности и дрейфового движения с постоянной скоростью  $\mathbf{w}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ .*

Этот результат легко также получить из выражения (2. 10), если

заметить, что в рассматриваемом случае  $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0$ . Таким образом, роль электрического поля двоякая: параллельная компонента  $\mathbf{E}_{\parallel}$  создает ускорение в направлении магнитного поля, а перпендикулярная компонента  $\mathbf{E}_{\perp}$  вызывает дрейф в поперечном направлении со скоростью  $\mathbf{w}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{V}]$ .

Равноускоренное движение вдоль  $\mathbf{V}$  и перпендикулярное к нему равномерное дрейфовое движение складываются в *движение по параболе*. На это параболическое движение накладывается *равномерное вращение* по ларморовой окружности. Следовательно,

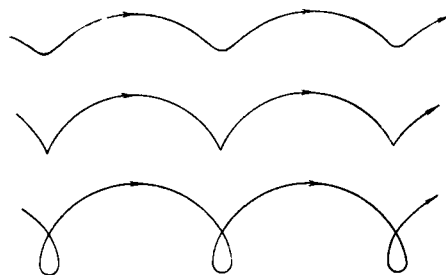


Рис. 5.

в общем случае движение происходит по спирали или волнистой кривой, вьющейся около указанной параболы.

Если электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, то  $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ . В этом случае движение вдоль магнитного поля вырождается в равномерное. Вместо параболы получится прямая. Траекторией частицы будет спиралеобразная

или волнистая линия, вьющаяся около этой прямой.

Рассмотрим частный случай, когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  взаимно перпендикулярны и, кроме того,  $v_{\parallel} = 0$ . Тогда траектория частицы будет плоской кривой. Она получается в результате сложения равномерного вращения частицы по ларморовой окружности и равномерного прямолинейного движения последней в направлении, перпендикулярном к электрическому и магнитному полям, т. е. в направлении, лежащем в плоскости окружности. Следовательно, *траектория частицы есть циклоида — удлиненная, нормальная или укороченная в зависимости от соотношения между угловой скоростью вращения по ларморовой окружности и скоростью движения центра самой окружности* (рис. 5, на котором магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка).

6. *Дрейф в неоднородном магнитном поле, меняющемся только по величине.* Происхождение дрейфа в этом случае аналогично происхождению электрического дрейфа. Допустим, что магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка и направлено к читателю. На рис. 6 изображена проекция траектории частицы на плоскость рисунка. Предполагается, что вектор  $\text{grad } B$  направлен вверх. Так как вверх магнитное поле сильнее, а величина скорости  $v$  остается постоянной, то при перемещении снизу вверх ларморов радиус  $a_{\perp}$  убывает. Иными словами, кривизна верхних частей проекции траектории больше, чем нижних. Благодаря этому проекция траектории переходит в незамкнутую

кривую — частица дрейфует влево, если ее заряд положительный, и вправо, если он отрицательный (рис. 6 относится к положительно заряженной частице). Вообще дрейф происходит в направлении вектора  $e [h \text{ grad } B]$ .

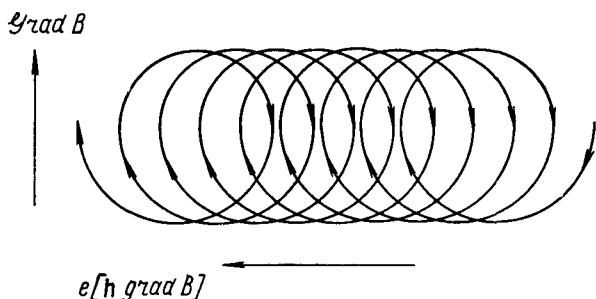


Рис. 6.

Скорость дрейфа  $w_B$  также легко определить. Примем направление вектора  $\text{grad } B$  за ось  $y$ , а перпендикулярное к нему

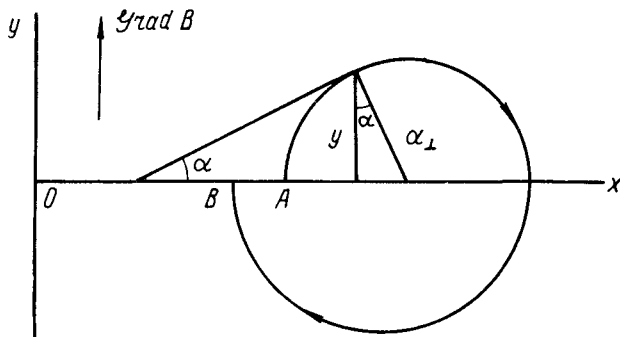


Рис. 7.

и к вектору  $B$  направление — за ось  $x$  (рис. 7). По определению кривизны

$$\frac{1}{a_{\perp}} = -\frac{d\alpha}{ds},$$

где  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и направлением касательной к проекции траектории, а дифференцирование ведется по длине этой траектории (знак минус поставлен потому, что с возрастанием  $s$  угол  $\alpha$  убывает). Очевидно  $dx = ds \cos \alpha$ , и следовательно

$$dx = -a_{\perp} \cos \alpha d\alpha.$$

Разложим  $a_{\perp}(y)$  по степеням  $y$  и оборвем это разложение на линейном члене

$$a_{\perp} = a_{\perp}(0) + \frac{da_{\perp}}{dy} y.$$

Найдем приращение абсциссы  $\Delta x = AB$ , когда частица из начального положения  $A$  переходит в  $B$  (рис. 7). Оно равно

$$\Delta x = -\frac{da_{\perp}}{dy} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-2\pi} y \cos \alpha da.$$

Чтобы найти  $\Delta x$  в первом приближении, достаточно при интегрировании взять  $y$  в нулевом приближении, т. е.  $y = a_{\perp} \cos \alpha$ .

Вычислив интеграл и разделив  $\Delta x$  на циклотронный период  $T = \frac{2\pi a_{\perp}}{v_{\perp}}$ , найдем скорость дрейфа

$$v_B = \frac{v_{\perp}}{2} \frac{da_{\perp}}{dy}. \quad (3.8)$$

Так как  $a_{\perp} = \frac{\text{const}}{B}$ , то этот результат приводится к виду

$$v_B = -\frac{a_{\perp} v_{\perp}}{2B} \cdot \frac{dB}{dy}, \quad (3.9)$$

что согласуется с формулой (2.30).

7. *Центробежный дрейф.* Исследуем теперь влияние кривизны магнитных силовых линий. Введем локальную систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг центра кривизны  $O$  магнитной силовой линии (рис. 8). В неподвижной системе отсчета уравнение движения частицы имеет вид

$$m \mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{f}, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{a}_{\text{абс}}$  — ускорение частицы в этой системе, а  $\mathbf{f}$  — полная сила, действующая на частицу. По *теореме Кориолиса* уравнение движения во вращающейся системе отсчета будет

$$m \mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{f} + 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\Omega] - m[\Omega[\Omega\mathbf{q}]] - m[\dot{\Omega}\mathbf{q}], \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{a}_{\text{отн}}$  и  $\mathbf{v}_{\text{отн}}$  — ускорение и скорость частицы во вращающейся системе отсчета, а  $\mathbf{q}$  — радиус-вектор, проведенный из центра кривизны  $O$  к частице. Полная скорость частицы:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}$ , где  $\mathbf{v}_{\text{пер}} = [\Omega\mathbf{q}]$  — *переносная скорость*, т. е. скорость, которую имела бы частица, если бы она покоилась во вращающейся системе отсчета. Выберем  $\Omega$  так, чтобы

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v}_{\text{пер}} = [\Omega\mathbf{q}], \quad (\Omega\mathbf{q}) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{отн}} &= \mathbf{v}_{\perp}, \\ \Omega &= -\frac{v_{\parallel}}{\rho^2} [\mathbf{h}\mathbf{q}]. \end{aligned} \quad (3.12)$$



Если  $\mathbf{N}$  — единичный вектор главной нормали к магнитной силовой линии, а  $\mathbf{b} = [\mathbf{h}\mathbf{N}]$  — единичный вектор бинормали, то  $\mathbf{q} = -q\mathbf{N}$ , и следовательно

$$\mathbf{\Omega} = \frac{v_{\parallel}}{q} \mathbf{b}. \quad (3.13)$$

По определению кривизны

$$(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = \frac{\mathbf{N}}{q}, \quad (3.14)$$

откуда векторным умножением на  $\mathbf{h}$  находим

$$\frac{\mathbf{b}}{q} = [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}]. \quad (3.15)$$

Из выражений (3.13) и (3.15) видно, что вектор  $\mathbf{\Omega}$  первого порядка малости. Его быстро колеблющаяся часть будет величиной второго порядка малости. Поэтому члены, содержащие  $\mathbf{\Omega}$ , как величины второго или высшего порядка могут быть отброшены. По той же причине можно не принимать во внимание изменение длины радиуса-вектора  $q$  во времени. Разложим далее поперечную скорость  $\mathbf{v}_{\perp}$  по единичным векторам главной нормали  $\mathbf{N}$  и бинормали  $\mathbf{b}$ , т. е. представим эту скорость в виде  $\mathbf{v}_{\perp} = v_N \mathbf{N} + v_b \mathbf{b}$ . Тогда, имея в виду выражения (3.12) и (3.13), для кориолисовой силы получим

$$\mathbf{F}_k = 2m [\mathbf{v}_{\text{отн}} \mathbf{\Omega}] = 2mv_N \mathbf{\Omega} [\mathbf{N}\mathbf{b}] = 2mv_N \mathbf{\Omega} \mathbf{h}.$$

Поэтому в первом приближении уравнение (3.11) перейдет в

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{f} + m\Omega^2 \mathbf{q} + 2mv_N \mathbf{\Omega} \mathbf{h}. \quad (3.16)$$

Это — уравнение движения в первом приближении в выбранной нами локальной вращающейся системе отсчета. Система отсчета выбрана так, что магнитное поле в точках, через которые проходит движущаяся частица, в первом приближении имеет в этой системе отсчета *одно и то же направление*. Переход к такой вращающейся системе отсчета эквивалентен как бы выпрямлению магнитных силовых линий — относительное движение в первом приближении происходит так, как если бы магнитные силовые линии были прямолинейны. Зато в уравнении (3.16) для относительного движения добавились две силы инерции: *центробежная сила*  $\mathbf{F}_c = m\Omega^2 \mathbf{q} = -\frac{mv_{\parallel}^2}{q} \mathbf{N}$  и *сила Кориолиса*  $\mathbf{F}_k = 2mv_N \mathbf{\Omega} \mathbf{h}$ .

Влияние кривизны магнитных силовых линий, таким образом, эквивалентно действию центробежной и кориолисовой сил. Кориолисова сила направлена по касательной к магнитной силовой линии, а поэтому ее влияние скажется лишь в изменении продольной компоненты полной скорости  $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \mathbf{v}_{\text{отн}}$ . На попе-

речное движение частицы влияет только центробежная сила. Она согласно формуле (3. 3) вызывает дрейф со скоростью

$$\mathbf{w}_c = \frac{c}{eB} [\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{h}] = \frac{mv_{\parallel}^2 c}{eBQ} [\mathbf{hN}] = - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega Q} \mathbf{b}, \quad (3. 17)$$

что с точностью до обозначений совпадает с формулой (2. 29).

#### § 4. О сглаживании и усреднении величин, содержащих быстро колеблющиеся слагаемые

1. Уравнения (2. 21), (2. 22), (2. 24) и (2. 25) не составляют полной системы уравнений дрейфовой теории. К ним необходимо добавить два уравнения для определения медленно и плавно меняющихся скоростей  $\bar{v}_{\parallel}$  и  $\bar{v}_{\perp}$  или, что то же, для определения медленно и плавно меняющихся импульсов  $\bar{p}_{\parallel} = m\bar{v}_{\parallel}$  и  $\bar{p}_{\perp} = m\bar{v}_{\perp}$ . Эти плавно меняющиеся величины могут быть получены из  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  или  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$  путем сглаживания, т. е. удаления всех быстро колеблющихся членов. Сглаженные величины будем обозначать буквами с прямой чертой над ними. Посмотрим, как можно с требуемой точностью получить значения сглаженных величин, и исследуем их свойства.

2. Пусть  $f(t)$  — какая-либо величина, характеризующая частицу или поле в точке ее нахождения. Все функции  $f(t)$ , с которыми нам придется иметь дело, могут быть разделены на два типа.

К функциям первого типа мы отнесем такие величины, которые состоят из медленно и плавно меняющегося слагаемого и быстро колеблющегося члена *нулевого порядка малости*. Эти функции в нулевом приближении, т. е. при отсутствии электрического поля и пространственно-временных неоднородностей магнитного поля, *строго периодичны, но не вырождаются в постоянные*. К ним относятся, например, векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{v}_{\perp}$ ,  $\mathbf{p}_{\perp}$ ,  $\dots$ , а также их проекции на неподвижные координатные оси.

К функциям второго типа мы отнесем величины, которые могут быть представлены в виде суммы медленно и плавно меняющегося слагаемого и быстро колеблющегося члена *первого или высшего порядка малости*. В нулевом приближении эти функции *вырождаются в постоянные*. Примерами таких функций являются  $t$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$ ,  $p_{\parallel}$ ,  $p_{\perp}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\dots$ .

Сглаживание величины сводится к простому отбрасыванию быстро колеблющегося слагаемого. Так мы поступали, например, при выводе формул (2. 13), (2. 14) и т. д. Трудность здесь заключается в том, что не ясно, как выделить «быстро колеблющееся слагаемое». Обычно это нетрудно сделать с точностью до плавно меняющейся величины, порядок малости которой превышает на единицу порядок малости быстро колеблющегося члена. В качестве примеров, иллюстрирующих это утверждение,

могут служить сглаживания, выполненные в § 2. Если величина относится ко второму типу, то приведенный способ сглаживания вносит ошибку, вообще говоря, второго порядка малости. Такая ошибка во многих случаях допустима. Если этот способ применить к величинам первого типа, то ошибка будет уже первого порядка, что, как правило, недопустимо. В этом случае, а также всегда, когда вообще необходимо повысить точность, сглаживание можно выполнить с помощью промежуточных операций *усреднения*. Можно пользоваться различными способами усреднения. Мы остановимся на следующем.

Каждому положению частицы соответствуют циклотронная частота  $|\omega| = \left| \frac{eB}{mc} \right|$  и циклотронный «период»

$$T(t) = \left| \frac{2\pi}{\omega} \right| = \left| \frac{2\pi mc}{eB} \right|. \quad (4.1)$$

Назовем *«усредненным циклотронным периодом»* величину, определяемую уравнением

$$\widetilde{T}(t) = \frac{1}{2\widetilde{T}(t)} \int_{t-\widetilde{T}(t)}^{t+\widetilde{T}(t)} T(t') dt'. \quad (4.2)$$

Аналогично определим *среднее значение функции  $f(t)$  для момента времени  $t$*  по формуле

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2\widetilde{T}(t)} \int_{t-\widetilde{T}(t)}^{t+\widetilde{T}(t)} f(t') dt'. \quad (4.3)$$

При  $f(t) \equiv T(t)$  формула (4.3) переходит в формулу (4.2). Усредненная функция  $\widetilde{f}(t)$  наряду с плавно меняющимся слагаемым будет, вообще говоря, содержать быстро колеблющуюся часть. По этой причине операция усреднения в формуле (4.3) обозначена волнистой линией в отличие от прямой черты, означающей сглаживание с устранением всех быстро колеблющихся членов.

3. Введенная нами операция усреднения (4.3) *повышает порядок малости быстро колеблющегося слагаемого, вообще говоря, на единицу*. При этом *сглаженные функции, получающиеся из  $f(t)$  и  $\widetilde{f}(t)$ , могут отличаться одна от другой на плавно меняющуюся величину, порядок малости которой превышает порядок малости  $\widetilde{f}(t)$  по крайней мере на два*.

Для доказательства представим функцию  $f(t)$  в виде

$$f(t) = \overline{f(t)} + \delta(t), \quad (4.4)$$

где  $\delta(t)$  — быстро колеблющееся слагаемое. Разлагая функцию  $\overline{f(t')}$  по степеням  $(t' - t)$  и обрывая разложение на члене

второй степени, из формулы (4. 3) находим

$$\widetilde{f}(t) = \overline{f}(t) + \left\{ \frac{1}{6} \frac{d^2 \overline{f}}{dt^2} [\widetilde{T}(t)]^2 + \delta(t) \right\}. \quad (4. 5)$$

Допустим сначала, что  $f(t)$  — функция первого типа. Тогда в нулевом приближении  $\delta(t)$  строго обращается в нуль. Следовательно, при наличии электрического и неоднородностей магнитного полей функция  $\delta(t)$  будет первого или высшего порядка малости. То же относится и к быстро колеблющемуся слагаемому, которое может содержаться в  $\delta(t)$ . Что касается величины  $\frac{1}{6} \frac{d^2 \overline{f}}{dt^2} [\widetilde{T}(t)]^2$ , то она второго (или высшего) порядка малости. Таким образом, быстро колеблющееся слагаемое в  $\widetilde{f}(t)$  будет первого или высшего порядка малости — операция усреднения (4. 3) повысила порядок малости быстро колеблющегося слагаемого по крайней мере на единицу.

Функция  $\overline{f}(t)$  и  $\delta(t)$ , если задаться определенной точностью расчета, определены не вполне однозначно. Пользуясь этим произволом,  $\delta(t)$  можно выбрать так, чтобы плавно меняющееся слагаемое, содержащееся в  $\delta(t)$ , либо обращалось в нуль, либо вообще было величиной второго порядка малости по сравнению с  $\overline{f}(t)$ . Если бы это было не так, то мы изменили бы  $\delta(t)$  на плавно меняющееся слагаемое соответствующего порядка малости, включив его в  $\overline{f}(t)$ . В таком случае порядок малости добавочного члена, заключенного в выражении (4. 5) в фигурные скобки, и его плавно меняющейся части будет не ниже двух, и обе части теоремы для рассматриваемого случая доказаны.

Если функция  $f(t)$  второго типа, то доказательство остается применимым и в этом случае. Достаточно только заметить, что  $\delta(t)$  в этом случае может быть представлена в виде суммы членов типа  $\varepsilon \delta_1(t)$ , где  $\varepsilon$  — величина первого (или высшего) порядка малости, а  $\delta_1(t)$  — быстро колеблющаяся функция и притом такая, что  $\delta_1(t)$  в нулевом приближении обращается в нуль.

Доказанная теорема составляет основную идею методов, которые применяются в настоящей статье. Если требуется сгладить какую-либо функцию  $f(t)$  и простое отбрасывание ее быстро колеблющейся части, которое может быть выполнено «на глаз», не дает требуемой точности, то для повышения точности можно сначала перейти к усредненной функции  $\overline{f}(t)$ , а затем сгладить ее. Сглаживание  $\overline{f}(t)$  выполнить легче, чем  $f(t)$ , так как быстро колеблющиеся слагаемые в  $\overline{f}(t)$  более высокого порядка малости, чем аналогичные слагаемые в  $f(t)$ . В сущности та же идея была положена в основу изложения § 2: переход от движения частицы к движению ее ведущего центра преследовал цель повышения порядка малости быстро колеблющихся членов.

4. Выясним в заключение возможность перестановки операций сглаживания и дифференцирования по времени. При этом будем предполагать, что  $f(t)$  — величина нулевого порядка малости, т. е. не обращается в нуль в нулевом порядке. Обобщение на случай величин более высокого порядка не представляет затруднений.

Заменяя в формуле (4.3)  $f(t)$  на  $\dot{f}(t)$ , получим

$$\dot{\widetilde{f}}(t) = \frac{1}{2\widetilde{T}(t)} \int_{t-\widetilde{T}(t)}^{t+\widetilde{T}(t)} \dot{f}(t') dt' = \frac{f[t+\widetilde{T}(t)] - f[t-\widetilde{T}(t)]}{2\widetilde{T}(t)}.$$

Дифференцируя же выражение (4.3) по времени и используя этот результат, найдем

$$\dot{\widetilde{f}}(t) = \dot{\widetilde{f}}(t) + \frac{\dot{\widetilde{T}}(t)}{\widetilde{T}(t)} \left\{ \frac{f[t+\widetilde{T}(t)] + f[t-\widetilde{T}(t)]}{2} - \widetilde{f}(t) \right\}$$

или

$$\dot{\widetilde{f}}(t) = \dot{\widetilde{f}}(t) + \frac{\dot{\widetilde{T}}(t)}{\widetilde{T}(t)} \left\{ \frac{\Delta f(t) - \Delta f[t-\widetilde{T}(t)]}{2} - [f(t) - \widetilde{f}(t)] \right\}, \quad (4.6)$$

где

$$\Delta f(t) = f[t+\widetilde{T}(t)] - f(t).$$

При движении в постоянном однородном магнитном поле  $\Delta f(t)$  обращается в нуль. Поэтому в общем случае  $\Delta f(t)$  будет первого, а  $\Delta f[t-\widetilde{T}(t)]$  — второго порядка малости. Следовательно, порядок малости выражения в фигурных скобках формулы (4.6) определяется, как правило, величиной  $f(t) - \widetilde{f}(t)$ . При  $f(t) \equiv T(t)$  величина  $f(t) - \widetilde{f}(t) \equiv T(t) - \widetilde{T}(t)$  первого порядка малости, поскольку  $T(t)$  — функция второго типа. Поэтому из формулы (4.6) следует

$$\dot{\widetilde{T}}(t) = \dot{\widetilde{T}}(t) \quad (4.7)$$

с ошибкой более высокого порядка малости по сравнению с  $\dot{\widetilde{T}}(t)$ . Производная  $\dot{\widetilde{T}}(t)$  относится также к функциям второго типа, а потому быстро колеблющееся слагаемое в  $\dot{\widetilde{T}}(t)$  будет второго порядка малости. В силу равенства (4.7) то же самое справедливо и для быстро колеблющегося слагаемого в  $\dot{\widetilde{T}}(t)$ . Отсюда заключаем, что с точностью до быстро колеблющихся членов второго порядка  $\dot{\widetilde{T}}(t)$  является плавно меняющейся величиной первого порядка малости. Если  $f(t)$  — функция первого типа, то  $f(t) - \widetilde{f}(t)$  — быстро колеблющаяся величина нулевого порядка малости и формула (4.6) дает

$$\dot{\widetilde{f}}(t) = \dot{\widetilde{f}}(t) + \text{быстро колеблющаяся величина первого порядка малости} \quad (4.8)$$

Если же  $f(t)$  — функция второго типа, то

$$\overline{\dot{f}(t)} = \overline{\dot{f}(t)} + \text{быстро колеблющаяся величина второго порядка малости.} \quad (4.9)$$

Величина  $\dot{f}(t)$  — функция второго типа, а потому содержащаяся в  $\overline{\dot{f}(t)}$  быстро колеблющаяся часть будет второго порядка малости. При сглаживании быстро колеблющихся частей первого порядка малости их влияние может сказаться на плавно меняющихся членах второго порядка малости. Быстро колеблющиеся части второго порядка при сглаживании могут сказаться на членах третьего порядка. Поэтому, сглаживая выражения (4.8) и (4.9), получим

$$\overline{\dot{f}(t)} = \overline{\dot{f}(t)}. \quad (4.10)$$

Для функций первого типа это соотношение верно с точностью до членов второго порядка малости, а для функций второго типа — до третьего порядка. В дальнейшем нам придется сглаживать только функции второго типа, а потому с принятой нами точностью расчета соотношение (4.10) можно считать правильным. С этой степенью точности операции сглаживания и дифференцирования по времени перестановочны.

## § 5. Полная система уравнений движения в дрейфовом приближении

1. Чтобы по формуле (2.21) или (2.32) найти скорость плавного движения ведущего центра в первом приближении, параметр  $\overline{v}_\perp$  достаточно определить в нулевом приближении, поскольку он входит множителем только при величинах первого порядка малости. Следовательно, производная  $\dot{\overline{v}}_\perp$  должна быть найдена в высшем, т. е. первом приближении. В самом деле, параметр  $\overline{v}_\perp = \int \dot{\overline{v}}_\perp dt$  надо знать в любой момент времени, в течение которого рассматривается движение. Это время может содержать большое число циклотронных периодов. При интегрировании же по большому промежутку времени порядок малости величин понижается: величины первого порядка малости переходят, вообще говоря, в величины нулевого, а величины второго порядка — в величины первого порядка малости. Что касается параметра  $\overline{v}_\parallel$ , то он входит множителем при величине нулевого порядка  $\overline{h}_0$ . По этой причине этот параметр надо определить с большей точностью, т. е. в первом приближении, а его производную  $\dot{\overline{v}}_\parallel$  — во втором приближении. Разумеется, не будет ошибки, если и производная  $\dot{\overline{v}}_\perp$  будет вычислена в том же, т. е. во втором, приближении. Это мы и сделаем в дальнейшем, так как знание производной  $\dot{\overline{v}}_\perp$  в таком приближении имеет самостоятельный

интерес. Впрочем, поскольку мы не исключаем движений с релятивистскими скоростями, целесообразно от сглаженных скоростей  $\bar{v}_{\parallel}$  и  $\bar{v}_{\perp}$  перейти к сглаженным импульсам  $\bar{p}_{\parallel}$  и  $\bar{p}_{\perp}$ , связанным с ними соотношениями (2. 23). Поэтому мы ставим задачу о нахождении производных  $\dot{p}_{\parallel}$  и  $\dot{p}_{\perp}$  во втором приближении.

2. Представив  $\mathbf{p}$  в виде  $\mathbf{p} = p_{\parallel} \mathbf{h} + p_{\perp} \mathbf{n}_1$ , из уравнения (1. 2) получим

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} \mathbf{h} + p_{\parallel} \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \frac{dp_{\perp}}{dt} \mathbf{n}_1 + p_{\perp} \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{v_{\perp}}{c} [\mathbf{n}_1 \mathbf{B}] \right\}.$$

Умножая это уравнение скалярно сначала на  $\mathbf{h}$ , а затем на  $\mathbf{n}_1$ , найдем совершенно точно

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_{\parallel} &= e(\mathbf{E}\mathbf{h}) + p_{\perp} \left( \mathbf{n}_1 \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right); \\ \dot{p}_{\perp} &= e(\mathbf{E}\mathbf{n}_1) - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_1 \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5. 1)$$

причем мы воспользовались соотношением  $(\mathbf{n}_1 \mathbf{h}) = 0$ , из которого следует

$$\mathbf{h} \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} + \mathbf{n}_1 \frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0. \quad (5. 2)$$

С помощью второй формулы (2. 11) уравнения (5. 1) можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_{\parallel} &= e(\mathbf{E}\mathbf{h}) + v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} + \\ &+ v_{\perp} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + p_{\perp} \left( \mathbf{n}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right); \\ \dot{p}_{\perp} &= e(\mathbf{E}\mathbf{n}_1) - v_{\parallel} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} - \\ &- v_{\perp} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5. 3)$$

Импульсы  $p_{\parallel}(t)$  и  $p_{\perp}(t)$  относятся к величинам, которые в предыдущем параграфе были названы функциями второго типа. Для таких функций, если пренебречь величинами третьего порядка малости, справедливо соотношение (4. 10). Поэтому задача вычисления  $\dot{p}_{\parallel}$  и  $\dot{p}_{\perp}$  во втором приближении сводится к сглаживанию правых частей уравнений (5. 3) в том же приближении.

Вычисления во втором приближении довольно кропотливы. Мы отложим их до § 7 и 8. Здесь же ограничимся вычислениями производных  $\dot{p}_{\parallel}$  и  $\dot{p}_{\perp}$  только в первом приближении. Такая точность при рассмотрении многих вопросов достаточна. В самом деле, движение ведущего центра вдоль магнитной силовой линии

есть движение «быстрое», поскольку скорость этого движения содержит член нулевого порядка малости  $\bar{v}_{\parallel} \mathbf{h}_0$ . Во многих вопросах при рассмотрении продольного движения можно ограничиться только этим членом  $\bar{v}_{\parallel} \mathbf{h}_0$  и отбросить все члены высших порядков малости. Именно так поступили Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев [2, 3]. Движение поперек магнитного поля (дрейф), напротив, есть движение «медленное». Чтобы его учесть, в скорости плавного поперечного движения ведущего центра необходимо сохранить члены первого порядка малости. Если, таким образом, допустить различную степень точности при вычислении скоростей продольного и поперечного движений ведущего центра, то обе производные  $\dot{p}_{\parallel}$  и  $\dot{p}_{\perp}$  достаточно найти в первом приближении.

3. Правые части в уравнениях (5. 3) являются величинами первого порядка малости. Поэтому в первом приближении сглаживание быстро колеблющихся слагаемых в уравнениях (5. 3) может быть выполнено сразу без промежуточных операций усреднения. Если воспользоваться формулой (2. 18) и принять во внимание соотношения (2. 8), то без труда найдем

$$\begin{aligned}\dot{p}_{\parallel} &= e(\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0) + \frac{1}{2} \bar{p}_{\perp} \bar{v}_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}_0; \\ \dot{p}_{\perp} &= -\frac{1}{2} \bar{p}_{\parallel} \bar{v}_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}_0.\end{aligned}\quad (5. 4)$$

Уравнения (2. 21), (2. 22), (2. 23), (2. 24), (2. 25) и (5. 4) образуют полную систему уравнений дрейфовой теории. Целесообразно теперь изменить обозначения, а именно: мы не будем ставить черту над всеми буквами, понимая теперь под  $\dot{\mathbf{R}}, p_{\parallel}, p_{\perp}, \dots$  сглаженные значения соответствующих величин. Далее, мы опустим нулики у  $\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0, \dots$ , понимая под  $\mathbf{B}, \mathbf{E}, \dots$  напряженности полей в точке нахождения ведущего центра\*. В этих обозначениях

$$\dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \mathbf{B}] + \frac{v_{\perp} a_{\perp}}{2} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] + v_{\parallel} a_{\parallel} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]; \quad (5. 5)$$

$$p_{\parallel} = e(\mathbf{E} \mathbf{h}) + \frac{1}{2} p_{\perp} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}; \quad (5. 6)$$

$$\dot{p}_{\perp} = -\frac{1}{2} p_{\parallel} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}. \quad (5. 7)$$

Входящие сюда величины связаны соотношениями

$$p_{\parallel} = m v_{\parallel}; \quad p_{\perp} = m v_{\perp}; \quad (5. 8)$$

\* Прежними обозначениями мы будем пользоваться и в дальнейшем, но только при доказательстве и выводах формул. Окончательные же результаты будем формулировать в новых обозначениях.



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}}}; \quad (5.9)$$

$$a_{\parallel} = \frac{cp_{\parallel}}{eB}; \quad a_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{eB}. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.7) может быть записано в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \frac{1}{\omega_Q} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{b} - 2\pi \frac{v_{\perp} a_{\perp}}{cB} \mathbf{j}_{\perp}. \quad (5.11)$$

Уравнения (5.6) и (5.7) также могут быть заменены двумя эквивалентными им уравнениями. Одним из них является *уравнение энергии*. Оно получится, если уравнения (5.6) и (5.7) умножить соответственно на  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  и сложить. Это дает

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p^2}{2} \right) = ep_{\parallel} (\mathbf{E}\mathbf{h}) \quad (5.12)$$

или в силу соотношения (1.4)

$$\frac{d}{dt} (mc^2) = e v_{\parallel} v_{\parallel}. \quad (5.13)$$

Второе уравнение найдется интегрированием выражения (5.7). Так как  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , то

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{B}}{B} = \left( \mathbf{B} \cdot \nabla \frac{1}{B} \right). \quad (5.14)$$

Далее, так как скорость поперечного движения ведущего центра — величина первого порядка малости, то с точностью до величин второго порядка

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{B} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{B} + \left( \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \nabla \frac{1}{B} \right) \approx v_{\parallel} \left( \mathbf{h} \cdot \nabla \frac{1}{B} \right),$$

и уравнение (5.7) примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}^2}{B} = 0,$$

откуда

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const}. \quad (5.15)$$

Таким образом,  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$  является *интегралом движения*. Однако это не точный, а *приближенный интеграл движения*. Он сохраняется вследствие *малости* электрического поля, а также вследствие *медленности* пространственных и временных изменений  $\mathbf{B}$ . Такого

рода приближенные интегралы движения называются *адиабатическими инвариантами*. Следовательно, величина (5.15) является *адиабатическим инвариантом*. Общей теории адиабатических инвариантов посвящена работа Крускала [16].

4. Уравнение (5.15) можно записать в двух эквивалентных ему формах. Во-первых, нетрудно видеть, что с точностью до величин второго порядка малости *средний магнитный поток*  $\Phi$  через ларморову окружность частицы равен  $\pi a_{\perp}^2 B$  или в силу соотношений (5.10)

$$\Phi = \frac{\pi c^2}{e^2} \frac{p_{\perp}^2}{B}. \quad (5.16)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (5.15), видим, что *средний магнитный поток через ларморову окружность является адиабатическим инвариантом*:

$$\Phi = \pi a_{\perp}^2 B = \text{const}. \quad (5.17)$$

Во-вторых, как видно из выражения (1.15), *средний магнитный момент* частицы, вращающейся по ларморовой окружности, равен

$$\mu = \frac{1}{2m} \frac{p_{\perp}^2}{B} = \frac{p_{\perp} v_{\perp}}{2B}. \quad (5.18)$$

Значит  $t\mu$  — *адиабатический инвариант*:

$$t\mu = \text{const}. \quad (5.19)$$

В частности, для *нерелятивистских движений*

$$\mu = \text{const}. \quad (5.20)$$

Если ввести магнитный момент в уравнение (5.6) и воспользоваться соотношением (5.14), то уравнение (5.6) легко привести к виду

$$\dot{p}_{\parallel} = (eE - \mu \nabla B) \hbar. \quad (5.21)$$

Это уравнение имеет простой физический смысл. Величина  $eE$  есть сила, действующая на частицу в электрическом поле. Так как вращающаяся по ларморовой окружности частица имеет средний магнитный момент  $-\mu \hbar$ , то со стороны магнитного поля на нее в среднем действует дополнительная сила  $-\mu (\hbar \nabla) B$ . Проекция этой силы на направление  $\hbar$  равна  $-\mu (\hbar \nabla B)$ . Сила  $eE - \mu \nabla B$  и вызывает изменение продольного импульса частицы.

## § 6. Более точная система уравнений движения в дрейфовом приближении

1. Система дрейфовых уравнений Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева, полученная в предыдущем параграфе, не вполне последовательна, поскольку из нее поперечная скорость регулярного

движения частицы может быть найдена в первом приближении, а продольная — только в нулевом. Эта непоследовательность была устранена С. И. Брагинским [7]. По методу Боголюбова и Зубарева он рассмотрел движение частицы с нерелятивистскими скоростями и нашел выражения для производных  $\dot{v}_{\parallel}$  и  $\dot{v}_{\perp}$  в нужном, т. е. во втором, приближении. Мы получим уравнения Брагинского в форме, применимой также и для релятивистских движений. Для этого, как было выяснено в предыдущем параграфе, надо сгладить во втором приближении правые части уравнений (5. 3). Хотя в принципе сделать это и просто, но вычисления получаются довольно громоздкими и могут затемнить суть дела. Поэтому в настоящем параграфе приводится полная система дрейфовых уравнений без доказательства, а их вывод дается в § 8 после изложения некоторых вспомогательных чисто математических вопросов, которым посвящен § 7. Читатель, не интересующийся доказательствами, может опустить оба эти параграфа, а также § 9 без ущерба для понимания дальнейшего.

Последовательная система дрейфовых уравнений в первом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} = & \left[ v_{\parallel} + \frac{1}{2} v_{\perp} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \right] \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \\ & + \frac{1}{2} v_{\perp} a_{\perp} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] + v_{\parallel} a_{\parallel} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]; \end{aligned} \quad (6. 1)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\parallel} = & e(\mathbf{E}\mathbf{h}) + \frac{1}{2} v_{\perp} p_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h} + e a_{\parallel} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) - \\ & - \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2} \left( \frac{\nabla B}{B} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}] \right) - \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}; \end{aligned} \quad (6. 2)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\perp} = & -\frac{1}{2} v_{\perp} p_{\parallel} \operatorname{div} \mathbf{h} - \frac{e a_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}) + \frac{e a_{\perp}}{2} \left( \mathbf{E} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] \right) + \\ & + \frac{e a_{\perp}}{2} (\mathbf{E}\mathbf{h})(\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) + \frac{a_{\parallel} v_{\parallel} p_{\perp}}{2} \left( \frac{\nabla B}{B} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}] \right) + \\ & + \frac{1}{2} a_{\parallel} p_{\perp} v_{\parallel} \mathbf{h} \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (6. 3)$$

Уравнения (5. 8), (5. 9) и (5. 10) остаются без изменения. Здесь приняты те же измененные обозначения, которые применялись в конце предыдущего параграфа.

2. Уравнения (6. 1), (6. 2) и (6. 3) можно упростить, если, следуя С. И. Брагинскому [7], ввести *новые импульсы* и соответствующие им скорости

$$\left. \begin{aligned} P_{\parallel} &= p_{\parallel} + \frac{1}{2} p_{\perp} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}); \\ P_{\perp} &= p_{\perp} - \frac{1}{2} p_{\parallel} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}); \end{aligned} \right\} \quad (6. 4)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{\parallel} &= v_{\parallel} + \frac{1}{2} v_{\perp} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}); \\ V_{\perp} &= v_{\perp} - \frac{1}{2} v_{\parallel} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Смысл  $V_{\parallel}$  и  $P_{\parallel}$  был выяснен в § 2. Эти величины представляют собой *сглаженные проекции скорости и импульса частицы на направление магнитного поля в точке нахождения ведущего центра частицы*. Легко убедиться также, что  $V_{\perp}$  и  $P_{\perp}$  являются *сглаженными значениями величин скорости и импульса частицы, перпендикулярных к тому же направлению*. Впрочем, последнее утверждение становится очевидным, если заметить, что из уравнений (6. 4) и (6. 5) следует с принятой нами степенью точности

$$\begin{aligned} P_{\parallel}^2 + P_{\perp}^2 &= p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2; \\ V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

При преобразовании уравнений (6. 1), (6. 2) и (6. 3) к новым переменным воспользуемся тождеством (2. 20). Взяв ротор от обеих частей этого тождества, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} &= - \operatorname{rot} [\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}] = - (\operatorname{rot} \mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + \\ &+ (\mathbf{h} \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{h} + \operatorname{div} \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{h} + (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h}^*. \quad (6.7)$$

Из тождества (2. 20) следует также

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} = 0. \quad (6.8)$$

Используя тождества (6. 7) и (6. 8), а также соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \operatorname{div} (B \mathbf{h}) = \mathbf{h} \nabla B + B \operatorname{div} \mathbf{h}, \quad (6.9)$$

нетрудно получить

$$\dot{\mathbf{R}} = V_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E} \mathbf{B}] + \frac{1}{2} V_{\perp} a_{\perp} \left[ \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla B}{B} \right] + V_{\parallel} a_{\parallel} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]; \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\parallel} &= e (\mathbf{E} \mathbf{h}) - \frac{1}{2B} V_{\perp} P_{\perp} (\mathbf{h} \nabla B) + e a_{\parallel} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) - \\ &- \frac{a_{\parallel} P_{\perp} V_{\perp}}{2B} (\nabla B [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]); \end{aligned} \quad (6.11)$$

\* Это тождество используется при преобразовании производной от  $\operatorname{rot} \mathbf{h}$ . Именно в нужном приближении

$$\mathbf{h} \frac{d}{dt} \operatorname{rot} \mathbf{h} = v_{\parallel} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{h} = v_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - v_{\parallel} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h}.$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\perp} = & \frac{1}{2B} V_{\perp} P_{\parallel} (\mathbf{h} \nabla B) - \frac{ea_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}) + \frac{ea_{\perp}}{2B} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \nabla B]) + \\ & + \frac{a_{\parallel} V_{\parallel} P_{\perp}}{2B} (\nabla B [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]). \end{aligned} \quad (6.12)$$

3. Уравнения (6.11) и (6.12) можно заменить двумя другими эквивалентными им уравнениями. Одно из них выражает закон сохранения энергии. Оно получится, если уравнения (6.11) и (6.12) умножить соответственно на  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$ , а затем сложить. Таким путем находим

$$\frac{1}{2m} \frac{dP^2}{dt} = \frac{d}{dt} (mc^2) = e (\mathbf{E} \dot{\mathbf{R}}) - \frac{ea_{\perp} V_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}). \quad (6.13)$$

Первый член в правой части уравнения (6.13) выражает работу электрического поля над частицей, если бы она двигалась со скоростью ведущего центра  $\dot{\mathbf{R}}$ . Второй член связан с работой, которую совершает вихревое электрическое поле над частицей, вращающейся по ларморовой окружности. Разумеется, в пределах принятой степени точности  $P$  и  $V_{\perp}$  можно заменить на  $p$  и  $v_{\perp}$ . Магнитное поле в уравнение (6.13) не вошло. Это естественно, поскольку оно не совершает работы.

Для получения второго уравнения перепишем уравнение (6.12) в виде

$$\dot{P}_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{2B} (\dot{\mathbf{R}} \nabla B) - \frac{ea_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}). \quad (6.14)$$

Так как

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\dot{\mathbf{R}} \nabla B),$$

то

$$\dot{P}_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{2B} \cdot \frac{dB}{dt} - \frac{ea_{\perp}}{2} \left\{ \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \right\}. \quad (6.15)$$

Выражение в фигурных скобках обращается в нуль в силу уравнения Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ , и мы получим

$$\dot{P}_{\perp} = \frac{P_{\perp}}{2B} \frac{dB}{dt}. \quad (6.16)$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$\frac{P_{\perp}^2}{B} = \text{const}, \quad (6.17)$$

т. е. величина  $\frac{P_{\perp}^2}{B}$  является адиабатическим инвариантом с

точностью до членов второго порядка малости. При получении этого инварианта было явно использовано уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ . Если помимо электромагнитного поля на частицу действуют другие силовые поля, то величина  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$  может и не быть адиабатическим инвариантом. В самом деле, при наличии дополнительной силы  $\mathbf{F}$ , действующей на частицу, уравнение (6. 16) принимает вид

$$\dot{p}_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{2B} \frac{dB}{dt} - \frac{a_{\perp}}{2} \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{F}. \quad (6. 18)$$

Однако если силовое поле таково, что  $\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{F} = 0$ , то равенство (6. 17) по-прежнему остается в силе. В частности, это имеет место тогда, когда поле  $\mathbf{F}$  потенциальное.

4. Окончательно систему дрейфовых уравнений удобно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= V_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \frac{V_{\perp} a_{\perp}}{2B} [\mathbf{h} \nabla B] + V_{\parallel} a_{\parallel} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]; \\ \frac{d}{dt} (mc^2) &= e (\mathbf{E} \dot{\mathbf{R}}) - \frac{ea_{\perp} V_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{E}); \\ \frac{p_{\perp}^2}{B} &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (6. 19)$$

К этим уравнениям должны быть присоединены уравнения

$$\left. \begin{aligned} P_{\parallel} &= mV_{\parallel}; \quad P_{\perp} = mV_{\perp}; \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2}{c^2}}}; \\ a_{\parallel} &= \frac{cP_{\parallel}}{eB}; \quad a_{\perp} = \frac{cP_{\perp}}{eB}. \end{aligned} \right\} \quad (6. 20)$$

Заметим, наконец, что уравнение (6. 11) приводится к виду

$$\dot{P}_{\parallel} = (e\mathbf{E} - \mu \nabla B) \left( \mathbf{h} + \frac{a_{\parallel}}{q} \mathbf{b} \right), \quad (6. 21)$$

где  $\mu$  — магнитный момент частицы, вращающейся по ларморовой окружности;  $q$  — радиус кривизны магнитной силовой линии, проходящей через ведущий центр частицы;  $\mathbf{b}$  — единичный вектор бинормали к этой силовой линии.

## § 7. Вывод некоторых вспомогательных формул

1. Чтобы вывести уравнения предыдущего параграфа, надо *сгладить* правые части уравнений (5. 3), удерживая при этом плавно меняющиеся члены *второго порядка малости*. Для этого

надо сначала с точностью до членов первого порядка включительно найти явные выражения для  $m$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $\rho_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$ ,  $\rho_{\perp}$  и  $\mathbf{n}_1$ , справедливые на малых интервалах времени порядка циклотронного периода. Если подставить такие выражения в уравнения (5.3), то правые части полученных уравнений явно разобьются на слагаемые первого и второго порядков малости. После этого нетрудно будет их сгладить либо непосредственным отбрасыванием быстро колеблющихся членов, либо при помощи промежуточных операций усреднения, как описано в § 4. Целью настоящего параграфа и является нахождение этих выражений, а также вывод некоторых формул сглаживания.

Предварительно выведем несколько вспомогательных соотношений, в которых предполагается, что векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  взяты в нулевом приближении, т. е. равномерно вращаются вокруг вектора  $\mathbf{h}$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = -\frac{e\mathbf{B}}{mc}$ .

2. Для производных по времени векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  можно написать

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_1 &= [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_1]; \\ \dot{\mathbf{n}}_2 &= [\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_2]. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

С помощью равенств (1.18) и (1.11) эти соотношения можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_1 &= \boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_2; \\ \dot{\mathbf{n}}_2 &= -\boldsymbol{\omega} \mathbf{n}_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \int \mathbf{n}_1 dt &= -\frac{1}{\omega} \mathbf{n}_2 + \text{const}; \\ \int \mathbf{n}_2 dt &= \frac{1}{\omega} \mathbf{n}_1 + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Формулы (7.2) и (7.3) по существу являются формулами дифференцирования и интегрирования синуса и косинуса, записанными в векторной форме. Интегрированием по частям нетрудно получить

$$\left. \begin{aligned} \int t \mathbf{n}_1 dt &= -\frac{t}{\omega} \mathbf{n}_2 + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{n}_1 + \text{const}; \\ \int t \mathbf{n}_2 dt &= \frac{t}{\omega} \mathbf{n}_1 + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{n}_2 + \text{const}; \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \int t^2 \mathbf{n}_1 dt &= \frac{1}{\omega} \left( \frac{2}{\omega^2} - t^2 \right) \mathbf{n}_2 + \frac{2t}{\omega^2} \mathbf{n}_1 + \text{const}; \\ \int t^2 \mathbf{n}_2 dt &= \frac{1}{\omega} \left( -\frac{2}{\omega^2} + t^2 \right) \mathbf{n}_1 + \frac{2t}{\omega^2} \mathbf{n}_2 + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Пусть  $\mathbf{A}$  — произвольный *постоянный* или *медленно и плавно меняющийся вектор*, характеризующий поле в точке нахождения частицы. Пренебрегая его производными по времени по сравнению с производными быстро меняющихся векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , в силу уравнения (7. 2) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \} &= - \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} \} = \\ &= \omega \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} \}; \\ \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \} &= \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} \} = \\ &= \omega \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \}. \end{aligned} \right\} \quad (7. 6)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= 2\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} = \\ &= 2\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot \{ [\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}] + [\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}] \} \end{aligned}$$

или в силу тождества (2. 15)

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= 2\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \\ &= 2\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (7. 7)$$

Аналогично, используя тождество (2. 16), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} &= 2\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} = \\ &= -2\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (7. 8)$$

С помощью тождеств (7. 7) и (7. 8) формулы (7. 6) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \} &= - \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} \} = \\ &= 2\omega \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \omega \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \\ &= 2\omega \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \omega \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A}; \\ \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \} &= \frac{d}{dt} \{ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} \} = \\ &= 2\omega \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \omega \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \} = \\ &= -2\omega \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \omega \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \}, \end{aligned} \right\} \quad (7. 9)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \int \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} dt &= - \frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \\ + \frac{t}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \} + \operatorname{const} &= \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \frac{t}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \} + \text{const}; \\
&\quad \int \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} dt = \frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \\
&\quad + \frac{t}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \} + \text{const} = \\
&= \frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \frac{t}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \} + \text{const}; \\
&\int \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} dt = \frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \frac{t}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \text{const} = \\
&= -\frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \frac{t}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \text{const}; \\
&\int \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} dt = \frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \frac{t}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \text{const} = \\
&= \frac{1}{2\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \frac{t}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \text{const}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Из первых двух формул (7.10) непосредственно получается

$$\int \{ \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \} dt = \frac{1}{\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \text{const}. \tag{7.11}$$

3. Примем за оси  $x$  и  $y$  (с ортами  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ ) мгновенные направления векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  в момент времени  $t = 0$ . Ось  $z$  направим вдоль вектора  $\mathbf{h}$ . Тогда

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t; \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{i} \sin \omega t + \mathbf{j} \cos \omega t. \tag{7.12}$$

Нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \cos 2\omega t + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \sin 2\omega t; \\
\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \cos 2\omega t - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \sin 2\omega t; \\
\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos 2\omega t - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \sin 2\omega t; \\
\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos 2\omega t - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \sin 2\omega t,
\end{aligned} \tag{7.13}$$

из которых следует

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = \\
 &= \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A}; \\
 \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A}; \\
 \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \cos 2\omega t + \\
 &+ \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \sin 2\omega t; \\
 \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos 2\omega t - \\
 &- \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \sin 2\omega t.
 \end{aligned} \right\} (7.14)$$

4. Выведенные формулы позволяют очень просто решить поставленную в начале настоящего параграфа задачу — *найти выражения для  $m$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{h}$ , ... в первом приближении, пригодные на малых интервалах изменения времени порядка циклотронного периода  $T(t)$* . В качестве примера найдем выражение для массы частицы. По уравнению энергии

$$\frac{dm}{dt} = \frac{e}{c^2} (\mathbf{vE}) = \frac{e}{c^2} v_{\parallel} (\mathbf{hE}) + \frac{e}{c^2} v_{\perp} (\mathbf{n}_1 \mathbf{E}).$$

С принятой нами степенью точности все величины справа, за исключением  $\mathbf{n}_1$ , могут считаться постоянными. Они могут быть вынесены из-под знака интеграла — это может внести ошибку второго порядка малости. С той же степенью точности быстро вращающийся вектор  $\mathbf{n}_1$  достаточно взять в нулевом приближении. Таким образом

$$\begin{aligned}
 m(t) &= \int \frac{e}{c^2} v_{\parallel} (\mathbf{hE}) dt + \int \frac{e}{c^2} v_{\perp} (\mathbf{n}_1 \mathbf{E}) dt = \\
 &= \frac{e}{c^2} v_{\parallel} (\mathbf{hE}) \int dt + \frac{e}{c^2} v_{\perp} \mathbf{E} \int \mathbf{n}_1 dt,
 \end{aligned}$$

откуда на основании первой из формул (7.3)

$$m(t) = \frac{ev_{\parallel}}{c^2} (\mathbf{hE}) t - \frac{ev_{\perp}}{\omega c^2} (\mathbf{n}_2 \mathbf{E}) + \text{const}.$$

Входящую сюда постоянную можно определить следующим способом. Усредним выражение для  $m(t)$  по формуле (4.3), полагая в ней  $t = 0$ . При таком усреднении оба первые слагаемые обратятся в нуль, и искомая постоянная окажется равной  $\widetilde{m}(0)$ .

Итак,

$$m(t) = \widetilde{m(0)} + \delta m, \quad (7.15)$$

где

$$\delta m = \frac{ev_{\parallel}}{c^2} (\mathbf{hE}) t - \frac{ev_{\perp}}{\omega c^2} (\mathbf{n}_2 \mathbf{E}) \quad (7.16)$$

с возможной ошибкой второго порядка малости.

Аналогично из формулы

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) B \approx v_{\parallel} (\mathbf{h} \nabla) B + v_{\perp} (\mathbf{n}_1 \nabla) B$$

находим

$$\left. \begin{aligned} B(t) &= \widetilde{B(0)} + \delta B; \\ \delta B &= v_{\parallel} (\mathbf{h} \nabla) B t - \frac{v_{\perp}}{\omega} (\mathbf{n}_2 \nabla) B. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Далее

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}(t) &= \widetilde{\mathbf{h}(0)} + \delta \mathbf{h}; \\ \delta \mathbf{h} &= v_{\parallel} t (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{v_{\perp}}{\omega} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}; \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \widetilde{\mathbf{E}(0)} + \delta \mathbf{E}; \\ \delta \mathbf{E} &= v_{\parallel} t (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{E} - \frac{v_{\perp}}{\omega} (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Наконец, найдем в первом приближении  $p_{\parallel}(t)$  и  $p_{\perp}(t)$ . Для этого проинтегрируем уравнения (5.3). Воспользовавшись первой формулой (7.10), а также соотношением

$$\widetilde{\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A})^*, \quad (7.20)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} p_{\parallel}(t) &= \widetilde{p_{\parallel}(0)} + \delta p_{\parallel}; \\ \delta p_{\parallel} &= e (\mathbf{Eh}) t - \frac{v_{\parallel} p_{\perp}}{\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{v_{\perp} p_{\perp}}{2\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + \\ &+ \frac{v_{\perp} p_{\perp}}{4\omega} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) + \frac{v_{\perp} p_{\perp}}{2} t \operatorname{div} \mathbf{h}; \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

\* Это соотношение следует из того, что  $\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}$  содержит быстро колеблющееся слагаемое первого порядка малости, а потому аналогичное слагаемое в  $\widetilde{\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}}$  будет второго порядка. Поэтому с точностью до ошибки второго порядка малости  $\widetilde{\mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}}$  должно совпадать с  $\frac{1}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A})$ . Значение последней величины дается формулой (2.19) и равно  $\frac{1}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A})$ .

$$\left. \begin{aligned} p_{\perp}(t) &= \widetilde{p_{\perp}(0)} + \delta p_{\perp}; \\ \delta p_{\perp} &= -\frac{e}{\omega} (\mathbf{E} \mathbf{n}_2) + \frac{v_{\parallel} p_{\parallel}}{\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + \\ &+ \frac{v_{\perp} p_{\parallel}}{2\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} - \frac{v_{\perp} p_{\parallel}}{4\omega} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) - \frac{v_{\perp} p_{\parallel}}{2} t \operatorname{div} \mathbf{h}. \end{aligned} \right\} (7.22)$$

5. Несколько сложнее найти выражения для векторов  $\mathbf{n}_1(t)$  и  $\mathbf{n}_2(t)$ . По определению

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{p}_{\perp}}{p_{\perp}} = \frac{\mathbf{p} - p_{\parallel} \mathbf{h}}{p_{\perp}}.$$

Дифференцируя это выражение по времени и пользуясь уравнениями (1.2) и (5.1), без труда найдем

$$\frac{d\mathbf{n}_1}{dt} = -\frac{e}{mc} [\mathbf{B} \mathbf{n}_1] + \frac{1}{p_{\perp}} \left\{ e (\mathbf{E} \mathbf{n}_2) - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_2 \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) \right\} \mathbf{n}_2 - \left( \mathbf{n}_1 \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) \mathbf{h}. \quad (7.23)$$

В отличие от всех предыдущих примеров производная  $\frac{d\mathbf{n}_1}{dt}$  наряду с членами первого порядка содержит также член  $-\frac{e}{mc} [\mathbf{B} \mathbf{n}_1]$  нулевого порядка малости, с наличием которого и связано некоторое усложнение расчета. Предварительно надо выделить из  $\mathbf{n}_1$  быстро вращающийся вектор  $\mathbf{n}_1^0$  нулевого порядка малости, производная которого в этом порядке была бы равна  $-\frac{e}{mc} [\mathbf{B} \mathbf{n}_1]$ . После этого вычисление малой поправки  $\delta \mathbf{n}_1$  к нему может быть сведено к простому интегрированию, совершенно аналогичному интегрированию при вычислении величин  $m$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{h}$  и т. д. Итак, представим единичный вектор  $\mathbf{n}_1$  в форме

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^0 + \delta \mathbf{n}_1. \quad (7.24)$$

Равномерно вращающийся единичный вектор  $\mathbf{n}_1^0$  определяется не однозначно, а с точностью до величин первого порядка малости. Распорядимся этим произволом так, чтобы вектор  $\mathbf{n}_1^0$  удовлетворял уравнению

$$\frac{d\mathbf{n}_1^0}{dt} = [\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{n}_1^0], \quad (7.25)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_0$  — постоянная угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{e \widetilde{\mathbf{B}}(0)}{m(0)c}. \quad (7.26)$$

После этого вектор  $\mathbf{n}_1^0$  определяется все еще не вполне однозначно, так как в нашем распоряжении остаются три произвольные постоянные, определяющие начальное значение вектора  $\mathbf{n}_1^0$ .

Они связаны между собой лишь условием, чтобы вектор  $\mathbf{n}_1^0$  был единичным с возможной ошибкой второго порядка малости.

Подставляя теперь выражение (7.24) в уравнение (7.23), принимая во внимание уравнение (7.25) и опуская величины второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{n}_1 = & -\frac{e}{c} \left[ \delta \frac{\mathbf{B}}{m} \cdot \mathbf{n}_1 \right] - \frac{e}{c} \left[ \frac{\mathbf{B}}{m} \cdot \delta \mathbf{n}_1 \right] + \\ & + \frac{1}{p_{\perp}} \left\{ e (\mathbf{E} \mathbf{n}_2) - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_2 \frac{dh}{dt} \right) \right\} \mathbf{n}_2 - \left( \mathbf{n}_1 \frac{dh}{dt} \right) \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

причем

$$\delta \frac{\mathbf{B}}{m} = \frac{\mathbf{B}}{m} - \frac{\widetilde{\mathbf{B}}(0)}{m(0)} = \frac{m \delta \mathbf{B} - \mathbf{B} \delta m}{m^2}.$$

Заметим, что в членах первого порядка малости безразлично, что писать:  $\omega_0$ ,  $\mathbf{n}_1^0$  или  $\omega$ ,  $\mathbf{n}_1$ , так как разница скажется лишь во втором порядке. Этим мы будем пользоваться в дальнейшем без особых оговорок.

Уравнение (7.27) все еще не удобно для вычисления вектора  $\delta \mathbf{n}_1$ , так как в правой части оно содержит самый вектор  $\delta \mathbf{n}_1$ , значение которого в первом приближении еще не известно. Поэтому мы не можем прямо взять интеграл от правой части уравнения (7.27) и вынуждены воспользоваться следующим искусственным приемом. Так как  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_1^0$  — единичные векторы, то из равенства (7.24) с точностью до величины второго порядка малости следует  $\mathbf{n}_1 \delta \mathbf{n}_1 = 0$ . Таким образом, вектор  $\delta \mathbf{n}_1$  перпендикулярен к  $\mathbf{n}_1$  и, следовательно, может быть разложен по единичным векторам  $\mathbf{n}_2$  и  $\mathbf{h}$ :

$$\delta \mathbf{n}_1 = \alpha \mathbf{n}_2 + \beta \mathbf{h}. \quad (7.28)$$

Отсюда

$$\alpha = (\mathbf{n}_2 \delta \mathbf{n}_1); \quad \beta = (\mathbf{h} \delta \mathbf{n}_1).$$

Задача свелась к вычислению коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ . Для ее решения найдем сначала производные этих коэффициентов по времени. При дифференцировании  $\beta$  по времени вектор  $\mathbf{h}$  можно не дифференцировать, так как  $\dot{\mathbf{h}} \delta \mathbf{n}_1$  — величина второго порядка малости. Далее,  $\dot{\mathbf{n}}_2 \delta \mathbf{n}_1 = -\omega \mathbf{n}_1 \delta \mathbf{n}_1 = 0$ . Наконец  $\mathbf{h} \delta \frac{\mathbf{B}}{m} = \delta \frac{\mathbf{B}}{m}$ . Принимая все это во внимание, из предыдущих формул и из уравнения (7.27) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = & -\frac{e}{c} \delta \frac{B}{m} + \frac{1}{p_{\perp}} \left\{ e (\mathbf{E} \mathbf{n}_2) - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_2 \frac{dh}{dt} \right) \right\}; \\ \frac{d\beta}{dt} = & -\omega (\mathbf{n}_2 \delta \mathbf{h}) - \left( \mathbf{n}_1 \frac{dh}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

При этом

$$\delta \frac{B}{m} = \frac{m\delta B - B\delta m}{m^2}. \quad (7.30)$$

Теперь в правых частях уравнений (7.29) стоят только функции, которые в первом порядке могут считаться известными. Поэтому искомые коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть найдены из уравнений (7.29) тем же методом интегрирования, который ранее применялся для нахождения функций  $m(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  и т. д.

Введем выражение (7.30) в уравнения (7.29) и подставим вместо  $\delta m$ ,  $\delta B$  и  $\delta \mathbf{h}$  выражения (7.16), (7.17) и (7.18). Кроме того, преобразуем  $\frac{d\mathbf{h}}{dt}$  по формуле (2.11), отбросив в ней  $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$ . Интегрируя полученные выражения для  $\frac{d\alpha}{dt}$  и  $\frac{d\beta}{dt}$  по времени с использованием формул (7.3), (7.4), (7.10) и (7.11), найдем

$$\left. \begin{aligned} \alpha = & -\frac{ev_{\parallel} t^2}{2mc} \left\{ (\mathbf{h}\nabla B) + \frac{\omega}{c} (\mathbf{h}\mathbf{E}) \right\} - \frac{v_{\parallel} t}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} + \\ & + \frac{e}{\omega p_{\perp}} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) (\mathbf{E}\mathbf{n}_1) + \frac{ev_{\perp}}{mc\omega^2} (\mathbf{n}_1 \nabla B) - \\ & - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega v_{\perp}} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} - \frac{v_{\parallel}}{2\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + \text{const}; \\ \beta = & -v_{\parallel} t \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} + \frac{v_{\perp}}{\omega} \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}_1$  определится теперь выражением  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^0 + \alpha \mathbf{n}_2 + \beta \mathbf{h}$ . Остается определить аддитивные постоянные в формулах (7.31). Эта задача не вполне однозначна, поскольку равномерно вращающийся вектор  $\mathbf{n}_1^0$  до сих пор был определен только дифференциальным уравнением (7.25), т. е. неоднозначно. Выберем вектор  $\mathbf{n}_1^0$  так, чтобы он был перпендикулярен к  $\widetilde{\mathbf{h}}(0)$ . Кроме того, постоянную в выражении для  $\alpha$  определим так, чтобы при  $t = 0$  коэффициент  $\alpha$  обращался в нуль. Значение этой постоянной в дальнейшем не понадобится, а потому мы не будем вычислять ее. Вычислим лишь постоянную в выражении для  $\beta(t)$ . Полагая  $t = 0$ , получим  $\mathbf{n}_1(0) = \mathbf{n}_1^0(0) + \beta \mathbf{h}(0)$ , откуда скалярным умножением на  $\mathbf{h}(0)$  находим начальное значение  $\beta$ :

$$\beta(0) = -\mathbf{h}(0) \cdot \mathbf{n}_1^0(0).$$

В силу соотношений (7.18)

$$\mathbf{h}(0) = \widetilde{\mathbf{h}}(0) - \frac{v_{\perp}}{\omega} \{(\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}\}_0.$$

(Нулик означает, что величина, заключенная в фигурные скобки, берется при  $t = 0$ ). А так как вектор  $\widetilde{\mathbf{h}}(0)$  перпендикулярен к  $\mathbf{n}_1^0$ ,

$$\beta(0) = \frac{v_{\perp}}{\omega} \{ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h} \}_0,$$

чем однозначно определяется  $\beta(t)$ . Аддитивная постоянная в выражении для  $\beta$ , таким образом, равна

$$\frac{v_{\perp}}{\omega} \{ \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h} - \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} \}_0.$$

Здесь нулик можно опустить, так как в силу формул (7. 14) результат в принятом приближении не зависит от времени.

Сделаем одно существенное замечание о виде формул (7. 31). Вместо единичного вектора  $\mathbf{n}_1^0$  можно было бы взять какой-либо другой равномерно вращающийся вектор с угловой скоростью, отличающийся от выражения (7. 26) постоянным слагаемым  $\delta \omega_0$  первого порядка малости. Тогда в правой части уравнения (7. 27) добавилось бы слагаемое  $[\delta \omega_0 \cdot \mathbf{n}_1]$ . Это повело бы к тому, что в первой формуле (7. 29) появился бы дополнительный член  $[\delta \omega_0 \cdot \mathbf{n}_1] \mathbf{n}_2 = (\delta \omega_0 \mathbf{h})$ , а во 2-й формуле (7. 29) — член  $[\delta \omega_0 \cdot \mathbf{n}_1] \mathbf{h} = -(\delta \omega_0 \mathbf{n}_2)$ . От их интегрирования в формулах (7. 31) получились бы дополнительные члены  $(\delta \omega_0 \mathbf{h}) t$  и  $-\frac{1}{\omega} (\delta \omega_0 \mathbf{n}_1)$ . Если менять только длину вектора  $\omega_0$ , но не его направление, то  $\delta \omega_0 = \delta \omega_0 \hat{\mathbf{h}}(\hat{0})$  или с точностью до величин второго порядка малости  $\delta \omega_0 = \delta \omega_0 \cdot \mathbf{h}$ . Следовательно,  $(\delta \omega_0 \mathbf{n}_1) = \delta \omega_0 (\mathbf{h} \mathbf{n}_1) = 0$  и вторая формула (7. 31) останется без изменения, а в первой появляется добавочный член, линейный по  $t$ .

Таким образом, если вектор  $\mathbf{n}_1^0(t)$  выбрать перпендикулярным к  $\hat{\mathbf{h}}(\hat{0})$  и потребовать, чтобы коэффициент  $\alpha$  обращался в нуль при  $t = 0$ , то для  $\alpha$  и  $\beta$  получатся выражения

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{e}{\omega p_{\perp}} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) (\mathbf{E} \mathbf{n}_1) + \frac{e v_{\perp}}{m c \omega^2} (\mathbf{n}_1 \nabla B) - \\ & - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega v_{\perp}} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - \frac{v_{\parallel}}{2\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + (at^2 + bt + d); \end{aligned} \quad (7. 32)$$

$$\beta = -v_{\parallel} t \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + \frac{v_{\perp}}{\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}.$$

Эти формулы совместно с выражениями (7. 24) и (7. 28) и решают задачу. Полином второй степени  $at^2 + bt + d$  с постоянными коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $d$  является величиной первого порядка малости. Как будет видно из дальнейшего, наличие этого полинома не сказывается на результатах сглаживания функций, которое мы будем производить ниже. При этом длину вектора  $\omega_0$  можно менять на произвольное слагаемое первого порядка малости — это совсем не отразится на второй формуле (7. 32), а в первой формуле скажется только на значении коэффициента в линейном

члене  $bt$ . Этим произволом можно пользоваться для упрощения вычислений.

6. Закончим этот параграф выводом нескольких вспомогательных формул, относящихся к усреднению и сглаживанию величин, содержащих быстро колеблющиеся члены. Будем полагать, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  — *постоянные* или *медленно и плавно меняющиеся* векторы, а  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  возьмем в *нулевом приближении*. Формулы такого типа уже были получены, а именно: формулы (2. 13), (2. 14), (2. 17), (2. 18) и (2. 19). Этими, а также аналогичными им формулами мы воспользуемся в следующем параграфе.

Общий прием нахождения сглаженных величин, который мы будем применять, заключается в следующем. В некоторых случаях сглаживаемая величина может быть представлена в виде постоянной (или медленно и плавно меняющейся) величины и быстро колеблющейся величины первого порядка малости. В таких случаях сглаживание сводится к простому отбрасыванию этих быстро колеблющихся величин. Так мы поступали, например, при выводе формул (2. 13), (2. 14) и т. д. В других случаях сглаживаемая величина может содержать быстро колеблющиеся слагаемые нулевого порядка малости. Тогда мы сначала по формуле (4. 3) находим среднее от этой величины для момента времени  $t = 0$ . Ввиду произвольности начала отсчета времени вычисленное таким путем среднее легко представить в форме, применимой для любых  $t$ . Оно будет содержать, вообще говоря, быстро колеблющуюся часть уже первого порядка малости, которую можно просто отбросить. Обоснование такого метода сглаживания было дано в § 4.

Прежде всего очевидно, что с принятой точностью

$$\overline{(\mathbf{A}\mathbf{n}_1)} = \overline{(\mathbf{A}\mathbf{n}_2)} = 0. \quad (7. 33)$$

Далее, умножая соотношения (2. 14) скалярно на  $\mathbf{C}$ , получим

$$\overline{(\mathbf{A}\mathbf{n}_1)(\mathbf{C}\mathbf{n}_2)} = \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{h}[\mathbf{A}\mathbf{C}])}. \quad (7. 34)$$

Выражения (7. 13) на циклотронном периоде  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ортогональны к выражениям  $(\mathbf{n}_1\mathbf{C})$  и  $(\mathbf{n}_2\mathbf{C})$ . Это дает следующий ряд соотношений:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_1\mathbf{C})} &= \overline{\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_1\mathbf{C})} = \\ &= \overline{\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_1\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_1\mathbf{C})} = \overline{\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_2\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_1\mathbf{C})} = \\ &= \overline{\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_1\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_2\mathbf{C})} = \overline{\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_2\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_2\mathbf{C})} = \\ &= \overline{\mathbf{n}_2(\mathbf{n}_1\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_2\mathbf{C})} = \overline{\mathbf{n}_1(\mathbf{n}_2\nabla)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{n}_2\mathbf{C})} = 0. \end{aligned} \quad (7. 35)$$



Для сглаживания выражения  $\mathbf{n}_1 (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{A}$  представим его в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{A} &= n_{1x} (\mathbf{h}\nabla) \left( n_{2x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + n_{2y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \\ &+ n_{1y} (\mathbf{h}\nabla) \left( n_{2x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + n_{2y} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

и заметим, что в силу соотношений (7. 12)

$$\left. \begin{aligned} \overline{n_{1x}n_{2x}} &= \overline{n_{1y}n_{2y}} = 0; \\ \overline{n_{1x}n_{2y}} &= -\overline{n_{2x}n_{1y}} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7. 36)$$

Это дает

$$\overline{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{h}\nabla) \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)$$

или

$$\overline{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{A}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A}). \quad (7. 37)$$

В частности, при  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{h}$

$$\overline{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{h}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}). \quad (7. 38)$$

Это выражение можно преобразовать. Применяя правило дифференцирования произведения к  $(\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h})$ , получим

$$(\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \operatorname{rot} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \operatorname{rot} \mathbf{h}.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль в силу тождества (6. 8). Поэтому

$$(\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \operatorname{rot} \mathbf{h} \quad (7. 39)$$

или в силу тождества (6. 7)

$$(\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} - (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h}. \quad (7. 40)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h}\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{h}} &= -\frac{1}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (7. 41)$$

Аналогично, переходя к координатной форме записи и сглаживая, нетрудно получить

$$\overline{\mathbf{n}_1 \cdot ((\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{A}\nabla) \mathbf{A}} = -\frac{1}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{h} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{A} \} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{A}); \quad (7. 42)$$

$$\overline{\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_1\nabla) (\mathbf{n}_2\nabla) \mathbf{A}} = 0. \quad (7. 43)$$

Последнее соотношение является следствием ортогональности функций  $n_{1x}$  и  $n_{1y}$  к функциям  $n_{1x}n_{2x}$ ,  $n_{1x}n_{2y}$ , ... на циклотронном периоде изменения времени.

Сгладим теперь выражение  $\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{C}$ . Преобразовав его с помощью формул (7. 13), а затем усредняя, получим

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{C}} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{1}{8} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} + \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) - \\ &- \frac{1}{8} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} - \frac{\partial C_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Множители  $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = \text{div } \mathbf{A} - \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A}$  и  $\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} = \mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{C}$  меняются плавно. Что касается остальных множителей, то они являются быстро колеблющимися. В этом можно убедиться, если выражения

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}$$

и

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}$$

сопоставить с формулами (7. 14). Поэтому в результате сглаживания найдем

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{C}} &= - \overline{\mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{C}} = \\ &= \frac{1}{4} \{ \text{div } \mathbf{A} - \mathbf{h} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{A} \} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{C}). \end{aligned} \quad (7. 44)$$

Особого рассмотрения требует сглаживание *вековых членов*, т. е. членов, содержащих время  $t$  в первой или второй степенях. Такие члены появляются в правых частях уравнений (5. 3) после подстановки в них выражений для  $v_{\parallel}$ ,  $p_{\parallel}$ ,  $\mathbf{n}_1$ , ... Множители  $t$  или  $t^2$  при этом будут входить всегда в комбинации с коэффициентами, являющимися величинами второго порядка малости.

За начало отсчета времени мы принимаем тот момент, для которого надо найти сглаженные значения производных  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  в уравнениях (5. 3). Поэтому сглаженные значения вековых членов следует найти также для момента времени  $t = 0$ . При этом, как следует из приведенного выше вывода выражений для вековых членов, время  $t$  может принимать небольшие значения порядка нескольких циклотронных периодов.

Каждый вековой член вносит соответствующий вклад в скорость изменения импульсов  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Усредняя этот член по

формуле (4.3), мы заменяем соответствующее ему слагаемое в мгновенной скорости его средним значением на временном интервале  $(-T, +T)$ ; в середине этого интервала находится нулевой момент времени, для которого ищется значение соответствующей скорости. Если нужно найти значение усредненной скорости в другой момент времени, то при вычислении мы должны сместить начало отсчета времени таким образом, чтобы этот другой момент времени сделался временно нулевым. Ясно поэтому, что таким путем может быть получено среднее значение векового члена для любого момента времени. Оно может меняться либо плавно и медленно, либо содержать быстро колеблющиеся члены. Последние будут второго порядка малости, и сглаживание сведется к простому отбрасыванию этих членов.

Перейдем теперь к конкретным примерам сглаживания вековых членов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Начнем с членов  $t\mathbf{n}_1(t)$  и  $t\mathbf{n}_2(t)$ . Пользуясь формулами (7.4), найдем

$$\overline{[t\mathbf{n}_1(t)]}_{t=0} = \frac{1}{2T} \left[ -\frac{t}{\omega} \mathbf{n}_2(t) + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{n}_1(t) \right]_{-T}^{+T}$$

В силу периодичности векторов  $\mathbf{n}_1(t)$  и  $\mathbf{n}_2(t)$  в нулевом приближении  $\mathbf{n}_1(T) = \mathbf{n}_1(-T) = \mathbf{n}_1(0)$  и аналогично для  $\mathbf{n}_2$ . Поэтому

$$\overline{[t\mathbf{n}_1(t)]}_{t=0} = -\frac{1}{\omega} \mathbf{n}_2(0);$$

$$\overline{[t\mathbf{n}_2(t)]}_{t=0} = \frac{1}{\omega} \mathbf{n}_1(0).$$

Если изменить начало отсчета времени, то соответствующие члены заменятся на  $-\frac{1}{\omega} \mathbf{n}_2(t)$  и  $\frac{1}{\omega} \mathbf{n}_1(t)$ . Это — быстро колеблющиеся члены, выпадающие при сглаживании. Таким образом,

$$\overline{t\mathbf{n}_1(t)} = \overline{t\mathbf{n}_2(t)} = 0. \quad (7.45)$$

Совершенно аналогично с помощью формул (7.5) находим

$$\overline{t^2\mathbf{n}_1(t)} = \overline{t^2\mathbf{n}_2(t)} = 0. \quad (7.46)$$

Формулам (7.45) и (7.46) можно придать другой вид, если спроектировать их на неподвижные координатные оси  $x$  и  $y$ . Это дает

$$\overline{t \cos \omega t} = \overline{t \sin \omega t} = 0; \quad (7.45a)$$

$$\overline{t^2 \cos \omega t} = \overline{t^2 \sin \omega t} = 0. \quad (7.46a)$$

Разумеется, эти соотношения останутся справедливыми при замене  $\omega$  на  $2\omega$ . Пользуясь ими, легко выполнить многие сглаживания. Например, для сглаживания величины  $t(\mathbf{A}\mathbf{n}_1)(\mathbf{C}\mathbf{n}_1)$  направим ось  $x$  вдоль вектора  $\mathbf{A}$ , совместив координатную плоскость  $xy$

с плоскостью (A, C). Обозначив через  $\delta$  угол между векторами A и C, можно написать

$$\begin{aligned} t(\mathbf{An}_1)(\mathbf{Cn}_1) &= tAC \cos \omega t \cos (\omega t + \delta) = \\ &= \frac{tAC}{2} \{ \cos \delta + \cos \delta \cos 2\omega t - \sin \delta \sin 2\omega t \}, \end{aligned}$$

откуда на основании равенств (7. 45а) заключаем, что искомое сглаженное равно нулю. Итак,

$$\overline{t(\mathbf{An}_1)(\mathbf{Cn}_1)} = \overline{t(\mathbf{An}_1)(\mathbf{Cn}_2)} = 0. \quad (7. 47)$$

Аналогично из внешнего вида выражений (7. 13) без всяких вычислений следует

$$\begin{aligned} \overline{t\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}} &= \overline{t\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}} = \overline{t\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A}} = \\ &= \overline{t\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A}} = 0; \end{aligned} \quad (7. 48)$$

$$\overline{t^2 \{ \mathbf{n}_2 (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{n}_1 (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{A} \}} = 0^*. \quad (7. 49)$$

Никаких вековых членов, кроме отмеченных выше, в дальнейшем не встретится. Таким образом, *сглаженные значения всех вековых членов, которые будут встречаться в дальнейшем, равны нулю.*

## § 8. Вывод последовательной системы уравнений движения в дрейфовом приближении

1. Пользуясь результатами предыдущего параграфа, мы можем теперь дать вывод системы дрейфовых уравнений, приведенной в § 6 без доказательства. Для этого надо *сгладить правые части уравнений (5. 3), удерживая регулярные члены второго порядка малости и пренебрегая всеми членами высших порядков, а также быстро колеблющимися членами второго порядка малости.*

Прежде всего можно отбросить в этих уравнениях члены, содержащие  $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$ , так как они являются быстро колеблющимися величинами второго порядка малости. Далее, очевидно

$$\overline{(\mathbf{Eh})} = (\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0). \quad (8. 1)$$

---

\* Следует предостеречь читателя от неправильного понимания операций усреднения и сглаживания вековых членов. Было бы ошибкой понимать эти операции в следующем смысле: сначала усреднить вековой член для произвольного момента времени  $t$ , т. е. на интервале  $(t - T, t + T)$ , не полагая  $t = 0$ , а затем сгладить. При таком понимании результат применения операций усреднения и сглаживания к вековому члену явно содержал бы время  $t$ , что бессмысленно. Правильное понимание, как уже отмечено выше, состоит в том, что *сначала выполняется усреднение для момента времени  $t = 0$ , т. е. на интервале  $(-T, +T)$ ; затем полученный результат распространяется на любой момент времени  $t$ , наконец, сглаживается.*

В члене первого порядка малости  $\mathbf{E} \mathbf{n}_1$  заменим  $\mathbf{E}$  выражением (7. 19), а  $\mathbf{n}_1$  — выражением  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1^0 + \alpha \mathbf{n}_2 + \beta \mathbf{h}$ . Тогда, опуская величины третьего порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{n}_1 = & \widetilde{\mathbf{E}}(0) \mathbf{n}_1^0 + v_{\parallel} t \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{E} - \\ & - \frac{v_{\perp}}{\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{E} + \alpha (\mathbf{E} \mathbf{n}_2) + \beta (\mathbf{E} \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (8. 2)$$

В членах второго порядка малости мы не делаем различия между  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_1^0$ , а также между  $\widetilde{\mathbf{E}}(0)$  и  $\mathbf{E}$ , поскольку это различие может сказаться лишь в третьем или высшем порядке. Следовательно, в членах второго порядка векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  можно считать *равномерно вращающимися*, что дает возможность воспользоваться всеми формулами усреднения и сглаживания, выведенными в § 7.

Первое слагаемое в выражении (8. 2) сначала усредним для  $t = 0$ . Пользуясь произволом в выборе длины вектора угловой скорости  $\omega_0$ , положим  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T(0)}$ . Тогда при усреднении первый

член  $\widetilde{\mathbf{E}}(0) \mathbf{n}_1^0$  в точности обратится в нуль, поскольку вектор  $\widetilde{\mathbf{E}}(0)$  постоянный, а вектор  $\mathbf{n}_1^0$  равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$ . Так как выбор начала отсчета времени произвольный, то этот результат справедлив для всех значений  $t$ . Слагаемое  $v_{\parallel} t \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{E}$  при сглаживании обратится в нуль в силу формул (7. 45). Третье слагаемое в силу формул (2. 19) даст

$$- \frac{v_{\perp}}{\omega} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{E} = \frac{v_{\perp}}{2\omega} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}) = - \frac{a_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}).$$

При сглаживании четвертого слагаемого  $\alpha (\mathbf{E} \mathbf{n}_2)$  с помощью соотношений (7. 32), (7. 33), (7. 45), (7.46), (7. 34) и (7. 35) без труда найдем

$$\begin{aligned} \overline{\alpha (\mathbf{E} \mathbf{n}_2)} &= \frac{ev_{\perp}}{2mc\omega^2} (\mathbf{h} [\nabla B \cdot \mathbf{E}]) + \frac{v_{\parallel}^2}{2\omega v_{\perp}} (\mathbf{h} [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) = \\ &= \frac{a_{\perp}}{2} \left( \mathbf{E} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] \right) + \frac{a_{\parallel} v_{\parallel}}{2v_{\perp}} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]). \end{aligned}$$

Аналогично из соотношений (7. 32), (7. 45) и (2. 19) находим

$$\overline{\beta (\mathbf{E} \mathbf{h})} = - \frac{v_{\perp}}{2\omega} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) (\mathbf{E} \mathbf{h}) = \frac{a_{\perp}}{2} (\mathbf{E} \mathbf{h}) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}).$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \overline{e (\mathbf{E} \mathbf{n}_1)} &= - \frac{ea_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{E}) + \frac{ea_{\perp}}{2} \left( \mathbf{E} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] \right) + \\ &+ \frac{ea_{\perp}}{2} (\mathbf{E} \mathbf{h}) (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) + \frac{ea_{\parallel} v_{\parallel}}{2v_{\perp}} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]). \end{aligned} \quad (8. 3)$$

Для сглаживания выражения  $v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}$  представим его в виде

$$\begin{aligned} v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} = & \overline{\overline{v_{\parallel}(0) p_{\perp}(0) \mathbf{n}_1^0 (\mathbf{h}(0) \nabla) \mathbf{h}(0)}}} + \\ & + \delta p_{\parallel} v_{\perp} \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + \delta p_{\perp} v_{\parallel} \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} - v_{\parallel} v_{\perp} \mathbf{n}_1 \delta m (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + \\ & + v_{\parallel} p_{\perp} \delta \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 (\delta \mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} + v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \delta \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

причем  $\delta p_{\parallel}$ ,  $\delta p_{\perp}$ ,  $\delta m$  и  $\delta \mathbf{h}$  определяются формулами (7. 21), (7. 22), (7. 16) и (7. 18). Пользуясь ими, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\delta p_{\perp} v_{\parallel} \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} &= \frac{ev_{\parallel}}{2\omega} (\mathbf{h} [\mathbf{E} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) = -\frac{ea_{\parallel}}{2} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]); \\ \overline{\overline{-v_{\parallel} v_{\perp} \delta m \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} &= -\frac{ea_{\parallel}}{2} \left( \frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]); \\ \overline{\overline{v_{\parallel} p_{\perp} \delta \mathbf{n}_1 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} &= \overline{\overline{v_{\parallel} p_{\perp} a \mathbf{n}_2 (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} = \\ &= \frac{ea_{\parallel}}{2} \left( 1 + \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) - \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2B} (\nabla B [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]); \\ \overline{\overline{v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\delta \mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} &= -\frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h}; \\ \overline{\overline{v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \delta \mathbf{h}}} &= \\ &= \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2} \{ (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h} - \mathbf{h} \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h} \}. \end{aligned}$$

Остальные (первые) два слагаемые в правой части выражения (8. 4) при сглаживании дадут нули. Окончательно

$$\begin{aligned} \overline{\overline{v_{\parallel} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} &= ea_{\parallel} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) - \\ &- \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2B} (\nabla B [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) - \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\perp}}{2} \mathbf{h} \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \overline{\overline{-v_{\parallel} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}}} &= -\frac{ea_{\parallel} v_{\parallel}}{2v_{\perp}} (\mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) + \\ &+ \frac{a_{\parallel} v_{\parallel} p_{\perp}}{2B} (\nabla B [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}]) + \frac{a_{\parallel} p_{\perp} v_{\parallel}}{2} \mathbf{h} \cdot \operatorname{rot} (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Остается сгладить два выражения:  $v_{\perp} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}$  и  $v_{\perp} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} v_{\perp} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} &= \overline{\overline{v_{\perp}(0) p_{\parallel}(0) \mathbf{n}_1^0 \cdot (\mathbf{n}_1^0 \nabla) \mathbf{h}}} + \\ &+ \delta p_{\parallel} v_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + \delta p_{\perp} v_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} - v_{\perp} v_{\parallel} \delta m \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + \\ &+ v_{\perp} p_{\parallel} \{ \delta \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} + \mathbf{n}_1 \cdot (\delta \mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h} \} + \\ &+ v_{\perp} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \delta \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Все слагаемые в правой части, за исключением первого, при сглаживании обратятся в нуль. Первое слагаемое представим в виде

$$\begin{aligned} & \overline{v_{\perp}(0)} \overline{p_{\parallel}(0)} \mathbf{n}_1^0 \cdot (\mathbf{n}_1^0 \nabla) \mathbf{h} = \\ & = \overline{v_{\perp}(0)} \overline{p_{\parallel}(0)} \mathbf{n}_1^0 \cdot (\mathbf{n}_1^0 \nabla) \overline{\mathbf{h}(0)} + v_{\perp} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \delta \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Усредняя в смысле формулы (4. 3), найдем для  $t = 0$

$$\overline{v_{\perp}(0)} \overline{p_{\parallel}(0)} \mathbf{n}_1^0 \cdot (\mathbf{n}_1^0 \nabla) \mathbf{h} = \frac{1}{2} \overline{v_{\perp}(0)} \overline{p_{\parallel}(0)} \operatorname{div} \overline{\mathbf{h}(0)}.$$

В силу произвольности выбора начального момента времени значение аргумента  $t = 0$  можно заменить на произвольное значение  $t$ . Далее,  $\overline{v_{\perp}(t)}$ ,  $\overline{p_{\parallel}(t)}$ ,  $\overline{\mathbf{h}(t)}$  отличаются от  $\overline{v_{\perp}(t)}$ ,  $\overline{p_{\parallel}(t)}$ ,  $\overline{\mathbf{h}(t)}$  на быстро колеблющиеся члены второго порядка малости. С той же точностью  $\overline{\mathbf{h}(t)}$  совпадает с  $\overline{\mathbf{h}_0(t)}$  — значением единичного вектора  $\mathbf{h}$  в точке нахождения ведущего центра. Поэтому

$$\overline{v_{\perp} p_{\parallel} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}} = \frac{1}{2} \overline{v_{\perp}} \overline{p_{\parallel}} \operatorname{div} \mathbf{h}_0. \quad (8. 8)$$

Аналогично

$$\overline{v_{\perp} p_{\perp} \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}} = \frac{1}{2} \overline{v_{\perp}} \overline{p_{\perp}} \operatorname{div} \mathbf{h}_0. \quad (8. 9)$$

2. В результате после сглаживания уравнений (5. 3) получаем искомые уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\overline{p}}_{\parallel} = & \dot{e}(\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0) + \frac{1}{2} \overline{v_{\perp}} \overline{p_{\perp}} \operatorname{div} \mathbf{h}_0 + e \overline{a}_{\parallel} (\mathbf{E}_0 [\mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0]) - \\ & - \frac{\overline{a}_{\parallel} \overline{p_{\perp}} \overline{v_{\perp}}}{2} \left( \frac{\nabla B_0}{B_0} [\mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0] \right) - \frac{\overline{a}_{\parallel} \overline{p_{\perp}} \overline{v_{\perp}}}{2} \mathbf{h}_0 \operatorname{rot} (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0; \quad (8. 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\overline{p}}_{\perp} = & - \frac{1}{2} \overline{v_{\perp}} \overline{p_{\parallel}} \operatorname{div} \mathbf{h}_0 - \frac{e \overline{a}_{\perp}}{2} (\mathbf{h}_0 \operatorname{rot} \mathbf{E}_0) + \frac{e \overline{a}_{\perp}}{2} \left( \mathbf{E}_0 \left[ \mathbf{h}_0 \frac{\nabla B_0}{B_0} \right] \right) + \\ & + \frac{e \overline{a}_{\perp}}{2} (\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0) (\mathbf{h}_0 \operatorname{rot} \mathbf{h}_0) + \frac{\overline{a}_{\parallel} \overline{v_{\parallel}} \overline{p_{\perp}}}{2} \left( \frac{\nabla B_0}{B_0} [\mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0] \right) + \\ & + \frac{1}{2} \overline{a}_{\parallel} \overline{p_{\perp}} \overline{v_{\parallel}} \mathbf{h}_0 \operatorname{rot} (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0. \quad (8. 11) \end{aligned}$$

При написании этих уравнений все поля мы отнесли к ведущему центру и всюду написали сглаженные значения  $\overline{p}_{\parallel}$ ,  $\overline{p}_{\perp}$ ,  $\overline{v}_{\parallel}$ ,  $\overline{v}_{\perp}$ . Это существенно, разумеется, лишь в членах первого порядка малости. В членах второго порядка нет надобности делать различие между  $\overline{p}_{\parallel}$  и  $p_{\parallel}$ ,  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{V}$  и т. д. Эти уравнения только обозначениями отличаются от уравнений (6. 2) и (6. 3). Об изменении обозначений было сказано в п. 3 § 5.

3. При выводе системы дрейфовых уравнений предполагалось, что поперечная скорость частицы  $v_{\perp}$  (а следовательно, и ее поперечный импульс) не слишком мала. Только при этом условии первый член в уравнении (7. 23) велик по сравнению со вторым. Во втором члене  $p_{\perp}$  стоит в знаменателе, и при достаточно малом  $p_{\perp}$  этот член может превзойти первый, как бы велико ни было магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Если представить  $\mathbf{n}_2$  в виде  $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{h}\mathbf{n}_1]$ , то легко видеть, что условием применимости приведенного выше вывода является выполнение неравенства

$$p_{\perp} \gg \left| \frac{1}{\omega} \left\{ e (\mathbf{E}\mathbf{n}_2) - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_2 \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) \right\} \right|. \quad (8. 12)$$

Случай

$$p_{\perp} \lesssim \left| \frac{1}{\omega} \left\{ e (\mathbf{E}\mathbf{n}_2) - p_{\parallel} \left( \mathbf{n}_2 \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right) \right\} \right| \quad (8. 13)$$

требует особого рассмотрения. Легко, однако, видеть, что и в этом случае система дрейфовых уравнений по-прежнему справедлива. В самом деле, при соблюдении условия (8. 13)  $p_{\perp}$  становится величиной первого порядка малости. Благодаря этому, как было показано в конце § 2, уравнение (2. 21) упрощается и переходит в

$$\dot{\mathbf{R}} = \bar{v}_{\parallel} \mathbf{h}_0 + \frac{c}{B_0^2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0] + \bar{v}_{\parallel} \bar{a}_{\parallel} [\mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0]. \quad (8. 14)$$

Поперечная скорость в это уравнение совсем не входит, а потому достаточно получить уравнение только для  $\dot{\bar{p}}_{\parallel}$ . Как видно из уравнения (8. 10), оно должно иметь вид

$$\dot{\bar{p}}_{\parallel} = e (\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0) + e \bar{a}_{\parallel} \mathbf{E}_0 [\mathbf{h}_0 \cdot (\mathbf{h}_0 \nabla) \mathbf{h}_0]. \quad (8. 15)$$

Задача, таким образом, сводится к доказательству справедливости уравнения (8. 15) при соблюдении условия (8. 13). При этом условии последние два члена в первой формуле (5. 3) следует отбросить, поскольку они будут третьего порядка малости. Перепишем эту формулу в виде

$$\dot{p}_{\parallel} = e (\mathbf{E}\mathbf{h}) + v_{\parallel} \mathbf{p}_{\perp} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}. \quad (8. 16)$$

Первое слагаемое в правой части при сглаживании переходит в  $e (\mathbf{E}_0 \mathbf{h}_0)$ . Чтобы сгладить второе слагаемое, найдем  $p_{\perp}$  в первом приближении. Дифференцируя по времени  $\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - p_{\parallel} \mathbf{h}$  и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{dt} = e \left\{ \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}] \right\} - p_{\parallel} v_{\parallel} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}$$



или

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{p}_\perp] + \mathbf{A}, \quad (8.17)$$

где

$$\mathbf{A} = e\mathbf{E}_\perp - \rho_\parallel v_\parallel (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}. \quad (8.18)$$

Нас интересуют значения вектора  $\mathbf{p}_\perp$  на небольших интервалах изменения времени порядка циклотронного периода  $T$ . Для таких времен угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и вектор  $\mathbf{A}$  могут рассматриваться как постоянные. В этом случае уравнение (8.17) легко решается. Действительно, положим  $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}_\perp^0 + \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{C}$  — постоянный вектор. Выберем его так, чтобы  $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{C}] + \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ; кроме того, выберем вектор  $\mathbf{C}$  так, чтобы он был перпендикулярен к  $\boldsymbol{\omega}$ . Тогда

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\omega^2} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{A}];$$

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp^0}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{p}_\perp^0].$$

Таким образом,

$$\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}_\perp^0 + \frac{1}{\omega^2} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{A}], \quad (8.19)$$

где  $\mathbf{p}_\perp^0$  — вектор постоянной длины, равномерно вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  и притом перпендикулярный к магнитному полю  $\mathbf{B}$ . При подстановке в формулу (8.16) это слагаемое не играет роли, так как вносимый им член при сглаживании обратится в нуль. Поэтому при сглаживании второе слагаемое в формуле (8.16) перейдет в

$$\frac{v_\parallel}{\omega^2} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{A}] \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = - \frac{mcv_\parallel}{B} [\mathbf{h}\mathbf{E}] \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = ea_\parallel \mathbf{E} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}],$$

чем и завершается доказательство формулы (8.15).

## § 9. Другой подход к уравнению движения ведущего центра

Методы, развитые в предыдущих параграфах, позволяют подойти к уравнению движения ведущего центра с другой точки зрения. С этой точки зрения совсем не требуется вводить понятие ведущего центра. Задача может быть поставлена как задача о нахождении сглаженной скорости *самой частицы*, а не ее ведущего центра. Так как мы располагаем всеми необходимыми формулами для решения задачи в такой постановке, то имеет смысл это решение привести. При этом, чтобы не усложнять вычисления, ограничимся рассмотрением нерелятивистского случая. В релятивистском случае никаких дополнительных трудностей не возникает, только вычисления становятся немного длиннее. Найдем

сначала сглаженный вектор импульса частицы. Разделив его затем на массу частицы, получим искомую сглаженную скорость. Сглаживание проведем для момента времени  $t = 0$ . Поскольку начальный момент времени может быть выбран произвольно, это не является каким-либо ограничением.

Представив импульс частицы в форме

$$\mathbf{p} = p_{\parallel} \mathbf{h} + p_{\perp} \mathbf{n}_1, \quad (9.1)$$

введем сюда выражения (7. 21), (7. 22), (7. 18) и (7. 24). Ограничиваясь членами первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \widetilde{p_{\parallel}(0)} \widetilde{\mathbf{h}(0)} + \mathbf{h} \delta p_{\parallel} + p_{\parallel} \delta \mathbf{h} + \\ & + \widetilde{p_{\perp}(0)} \mathbf{n}_1^0 + \delta p_{\perp} \mathbf{n}_1 + p_{\perp} \delta \mathbf{n}_1. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Первый член в правой части при сглаживании перейдет в  $\widetilde{p_{\parallel}} \mathbf{h}$ . Члены  $\mathbf{h} \delta p_{\parallel}$  и  $p_{\parallel} \delta \mathbf{h}$  при усреднении обратятся в нули. В самом деле, согласно определению  $\delta p_{\parallel} = p_{\parallel} - \widetilde{p_{\parallel}(0)}$ , откуда усреднением находим, что в принятом нами приближении  $\widetilde{\delta p_{\parallel}} = 0$ . Аналогично  $\widetilde{\delta \mathbf{h}} = 0$ . Член  $\widetilde{p_{\perp}(0)} \mathbf{n}_1^0$  также обратится в нуль при усреднении, так как  $\mathbf{n}_1^0$  есть равномерно вращающийся единичный вектор. Остается только сгладить члены  $\delta p_{\perp} \mathbf{n}_1$  и  $p_{\perp} \delta \mathbf{n}_1$ . Для первого из них из выражения (7. 22) находим

$$\begin{aligned} \delta p_{\perp} \mathbf{n}_1 = & -\frac{e}{\omega} (\mathbf{E} \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_1 + \frac{v_{\parallel} p_{\parallel}}{\omega} (\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}) \mathbf{n}_1 + \\ & + \frac{v_{\perp} p_{\parallel}}{2\omega} (\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}) \mathbf{n}_1 - \frac{v_{\perp} p_{\parallel}}{4\omega} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \mathbf{n}_1 - \frac{v_{\perp} p_{\parallel}}{2} \operatorname{div} \mathbf{h} t \mathbf{n}_1. \end{aligned}$$

Третье слагаемое в правой части обратится при усреднении в нуль, так как в силу формул (7. 13) функция  $\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}$  на циклотронном периоде ортогональна к функции  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t$ . Два последних слагаемых при сглаживании также обратятся в нули; в силу формул (7. 45) и  $\widetilde{\mathbf{n}_1(t)} = 0$ . Поэтому, сглаживая два первых слагаемых с помощью формул (2. 14), получим

$$\overline{\delta p_{\perp} \mathbf{n}_1} = \frac{e}{2\omega} [\mathbf{hE}] - \frac{v_{\parallel} p_{\parallel}}{2\omega} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}].$$

Далее, из выражений (7. 28) и (7. 32) находим в нерелятивистском приближении

$$\begin{aligned} p_{\perp} \delta \mathbf{n}_1 = & \frac{e}{\omega} (\mathbf{E} \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_2 + \frac{e v_{\perp}^2}{c \omega^2} (\mathbf{n}_1 \nabla B) \mathbf{n}_2 - \frac{v_{\parallel} p_{\parallel}}{\omega} (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}) \mathbf{n}_2 - \\ & - \frac{v_{\parallel} p_{\perp}}{2\omega} (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \nabla) \mathbf{h}) \mathbf{n}_2 + p_{\perp} (at^2 + bt + d) \mathbf{n}_2 - \end{aligned}$$

$$- p_{\perp} v_{\parallel} t (\mathbf{n}_1 (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}) \mathbf{h} + \frac{p_{\perp} v_{\perp}}{\omega} (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \nabla) \mathbf{h}) \mathbf{h}.$$

Отсюда путем сглаживания получим

$$\begin{aligned} \overline{p\delta\mathbf{n}_1} = & \frac{e}{2\omega} [\mathbf{hE}] + \frac{ev_{\perp}^2}{2c\omega^2} [\mathbf{h}\nabla B] - \frac{v_{\parallel} p_{\parallel}}{2\omega} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}] - \\ & - \frac{p_{\perp} v_{\perp}}{2\omega} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание соотношения (1. 12), (1. 21) и (1. 22), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}} = & \left[ \bar{p}_{\parallel} + \frac{1}{2} \bar{p}_{\perp} \bar{a}_{\perp} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) \right] \bar{\mathbf{h}} + \frac{mc}{B^2} [\bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{B}}] + \\ & + \frac{1}{2} \bar{p}_{\perp} \bar{a}_{\perp} \left[ \bar{\mathbf{h}} \cdot \frac{\nabla B}{B} \right] + \bar{p}_{\parallel} \bar{a}_{\parallel} [\bar{\mathbf{h}} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \bar{\mathbf{h}}]. \end{aligned} \quad (9. 3)$$

После деления на  $m$  это выражение переходит в формулу (2. 21), что и следовало ожидать.

## § 10. Примеры

1. Адиабатическая инвариантность выражения  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$  может быть пояснена на следующем простом примере. Пусть частица движется в *однородном*, но *переменном* магнитном поле. Пусть скорость частицы *перпендикулярна* к магнитному полю. В постоянном магнитном поле частица двигалась бы с постоянной скоростью по ларморовой окружности радиуса, определяемого формулой (1. 21). Если магнитное поле меняется во времени медленно, то траектория, описываемая частицей в течение циклотронного периода, будет мало отличаться от окружности. Ее радиус можно найти, если центробежную силу  $\frac{mv_{\perp}^2}{a_{\perp}}$  приравнять силе  $\frac{e}{c} v_{\perp} B$ , с которой на частицу действует магнитное поле. Ради простоты мы рассматриваем движение с *нерелятивистскими скоростями*. Это дает

$$a_{\perp} = \frac{mv_{\perp} c}{eB} = \frac{cp_{\perp}}{eB} \quad (10. 1)$$

в согласии с выражением (1. 21). Ларморов радиус  $a_{\perp}$  будет медленно изменяться во времени. Поперечный импульс  $p_{\perp}$  также будет медленно меняться. Это происходит потому, что переменное магнитное поле *индуцирует электрическое поле*, имеющее касательную компоненту  $E_s$  вдоль траектории частицы. Для скорости изменения поперечного импульса  $p_{\perp}$  можно написать

$$\dot{p}_{\perp} = eE_s. \quad (10. 2)$$

Здесь  $E_s$ , вообще говоря, медленно меняется с течением времени. Однако изменениями этой компоненты за время порядка циклотронного периода можно пренебречь. Далее, ввиду незначительного отклонения траектории частицы от ларморовой окружности (последняя на рис. 9 изображена пунктиром)  $E_s$  можно заменить проекцией вектора  $E$  на направление касательной к ларморовой окружности. Тогда  $E_s$  определится из уравнения

$$\oint E_s ds = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi a_{\perp}^2}{c} \cdot \frac{dB}{dt},$$

которое дает

$$E_s = -\frac{a_{\perp}}{2c} \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{p_{\perp}}{2eB} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (10.3)$$

В результате уравнение (10.2) переходит в

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = -\frac{p_{\perp}}{2B} \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (10.4)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const}. \quad (10.5)$$

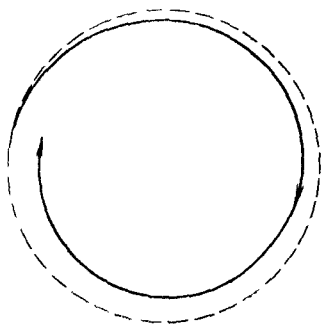


Рис. 9.

Рассмотрим теперь случай *постоянного, но неоднородного* магнитного поля. Для простоты предположим, что ведущий центр частицы движется в *направлении одной из магнитных силовых линий*. В этом случае причина изменения импульсов  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  несколько иная. На частицу со стороны магнитного поля действует сила  $\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{vB}] = \frac{eB}{c} [\mathbf{vh}]$ . Она имеет составляющую  $F_{h_0} = \frac{eB}{c} [\mathbf{vh}] \mathbf{h}_0 = \frac{eB}{c} [\mathbf{hh}_0] \mathbf{v}$  вдоль вектора  $\mathbf{h}_0$ , так как угол между  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{h}_0$ , вообще говоря, отличен от нуля. Эта составляющая будет менять *продольный импульс*  $P_{\parallel}$ . В силу сохранения энергии  $P_{\parallel}^2 + P_{\perp}^2 = \text{const}$ , а потому *будет меняться также и поперечный импульс*  $P_{\perp}$ .

К рассматриваемому случаю применимо также рассуждение, с помощью которого была получена формула (10.5). Более того, оно применимо и в том случае, когда неоднородное магнитное поле меняется во времени. Существенно только, что ведущий центр частицы в рассматриваемый момент времени движется вдоль одной из магнитных силовых линий, которая может считаться прямолинейной. Чтобы сделать очевидным это утверждение, достаточно перейти к *системе отсчета*, в которой в рассматриваемый момент времени *ведущий центр покоится*. Траектория частицы в этой системе отсчета, правда, не будет замкнутой линией, так как наличие продольной компоненты  $F_{h_0}$  силы поведет к появ-

лению продольной скорости. Но приращение этой скорости за циклотронный период мало, его квадратом можно пренебречь. Можно также пренебречь незамкнутостью траектории частицы за циклотронный период, а также изменением магнитного потока вследствие движения ларморова кружка вдоль магнитной силовой линии. Все изменения магнитного потока в рассматриваемой системе отсчета будут происходить только из-за изменений магнитного поля во времени, а потому рассуждение, приведенное при выводе формулы (10. 5), остается в силе.

2. В некоторых случаях интеграл (10. 5) является не адиабатическим, а *точным* интегралом уравнений движения. Сюда относится тривиальный случай движения частицы в постоянном однородном магнитном поле. Приведем другой — не тривиальный — случай.

Пусть электрическое поле  $\mathbf{E}$  *радиальное*, т. е. направлено к неподвижному центру  $O$  или от него. В остальном поле  $\mathbf{E}$  может быть произвольным. Пусть в точке  $O$  помещен *точечный магнитный полюс*, создающий также *радиальное* магнитное поле, *не меняющееся во времени*. Примем точку  $O$  за начало координат. Момент силы  $e\mathbf{E}$  относительно точки  $O$  равен нулю, и уравнение моментов принимает вид

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \frac{e}{c} [\mathbf{r}[\mathbf{v}\mathbf{B}]]$$

или в силу коллинеарности векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{B}$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}_{\perp}] = \frac{eBr}{c} \mathbf{v}_{\perp}. \quad (10. 6)$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \dot{r} = \frac{1}{r} \mathbf{v}_{\perp},$$

перепишем уравнение (10. 6) в виде

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}\mathbf{p}_{\perp}] = \frac{eBr^2}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (10. 7)$$

Для *кулонова* магнитного поля  $Br^2$ , а следовательно, и  $\frac{eBr^2}{c}$  величины постоянные. Обозначая последнюю постоянную через  $-A$  и интегрируя уравнение (10. 7), получим

$$[\mathbf{r}\mathbf{p}_{\perp}] + A \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{C} = \text{const}, \quad (10. 8)$$

где  $\mathbf{C}$  — интеграционная постоянная. Скалярным умножением на  $\mathbf{r}$  из формулы (10. 8) получаем

$$Ar = (\mathbf{C}\mathbf{r}). \quad (10. 9)$$

Перенесем теперь в формуле (10. 8) член  $A \frac{r}{r}$  в правую часть и возведем в квадрат. Тогда, используя равенство (10. 9), получим

$$r^2 p_{\perp}^2 = C^2 - A^2 = \text{const.} \quad (10. 10)$$

Так как для кулонова поля  $B = \frac{\text{const}}{r^2}$ , то равенство (10. 10) переходит в

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const.} \quad (10. 11)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае величина (10. 11) является *точным интегралом движения*. Полученный результат в значительной степени обесценивается из-за невозможности точной реализации кулонова магнитного поля.

3. С адиабатической инвариантностью  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$  связано явление *отражения частиц* от областей сильного магнитного поля. Допустим, что магнитное поле не меняется во времени. Пусть частица движется вдоль магнитной силовой линии в сторону возрастающей напряженности магнитного поля. Обозначим через  $\vartheta$  угол между направлениями скорости частицы и магнитной силовой линии. Тогда  $p_{\parallel} = p \cos \vartheta$ ,  $p_{\perp} = p \sin \vartheta$ . В силу уравнения энергии полный импульс частицы  $p$  остается постоянным. Однако поперечный импульс  $p_{\perp}$  должен возрасти в соответствии с уравнением

$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const.}$  Поэтому должен уменьшаться продольный импульс  $p_{\parallel}$ . Это видно также из уравнения (5. 21) или более точного уравнения (6. 21). Уравнение (5. 21) показывает, что вдоль магнитной силовой линии действует в среднем замедляющая сила, равная проекции силы  $-\mu \nabla B$  на направление магнитного поля. Эта сила направлена против вектора  $\nabla B$  и поэтому замедляет движение частицы.

По мере продвижения в область сильного магнитного поля может случиться, что в некоторой точке  $M$  магнитной силовой линии продольный импульс частицы обратится в нуль, а следовательно, поперечный импульс сделается равным полному импульсу. В этой точке  $p \cos \vartheta = 0$ ,  $p \sin \vartheta = p$ , т. е.  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому, обозначив через  $B_M$  напряженность магнитного поля в точке  $M$ , можно написать

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \frac{p^2 \sin^2 \vartheta}{B} = \frac{p^2}{B_M},$$

откуда

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{B}{B_M}}. \quad (10. 12)$$

Достигнув точки  $M$ , частица не сможет продвигаться дальше в сторону еще большей напряженности магнитного поля, так как в противном случае в силу адиабатической инвариантности  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$  ее поперечный импульс  $p_{\perp}$  должен был бы сделаться больше  $p$ , что противоречит закону сохранения энергии. Поэтому частица в точке  $M$  отразится и начнет двигаться в противоположном направлении. Явление вполне аналогично оптическому явлению полного внутреннего отражения. Области сильного магнитного поля по отношению к налетающим на них частицам ведут себя, таким образом, как зеркала. Они называются *магнитными зер-*

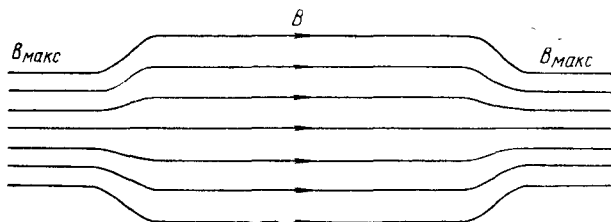


Рис. 10.

калами или магнитными пробками. Если  $\sin \vartheta > \sqrt{\frac{B}{B_M}}$ , то частица до точки  $M$  не дойдет и отразится раньше. Если же  $\sin \vartheta < \sqrt{\frac{B}{B_M}}$ , то она пройдет за точку  $M$ . Такая частица либо отразится в некоторой другой точке  $M'$ , для которой  $\sin \vartheta = \sqrt{\frac{B}{B_{M'}}}$ , либо вообще не отразится, а будет двигаться вдоль силовой линии в одном направлении.

4. Явление отражения частиц от магнитных зеркал используется для устройства различного рода *магнитных ловушек*, т. е. устройств, предназначенных для удержания заряженных частиц. Ловушки, построенные на этом принципе, относятся к классу так называемых *адиабатических ловушек*, поскольку их действие основано на адиабатической инвариантности  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$ . Одной из про-

стейших ловушек такого типа является предложенная Г. И. Будкером [8] и независимо от него Йорком [17] ловушка с *аксиально симметричным магнитным полем*. Она представляет собой цилиндрическую трубу, помещенную в соленоид, создающий сильное однородное магнитное поле  $B$ , параллельное оси ловушки. На концах трубы имеются дополнительные обмотки, усиливающие магнитное поле. Схематически магнитные силовые линии в ловушке представлены на рис. 10, на котором изображено сечение ловушки плоскостью, проходящей через ее ось. Сильное магнитное поле  $B$

заставляет частицу двигаться по ларморовым кружкам малого радиуса, препятствуя уходу частиц на боковые стенки ловушки. От областей сильного магнитного поля частицы отражаются. Обозначим через  $B_{\text{макс}}$  максимальное значение магнитного поля на концах ловушки. Если  $\vartheta$  — угол, образуемый вектором скорости частицы с направлением магнитного поля в центральной части ловушки, где поле однородно, то частица будет отражаться от магнитных зеркал, если  $\sin \vartheta > \sqrt{\frac{B}{B_{\text{макс}}}}$ . Если же  $\sin \vartheta < \sqrt{\frac{B}{B_{\text{макс}}}}$ , то магнитные зеркала не смогут удержать частицу — такая частица из ловушки уйдет. Адиабатическая ловушка Будкера способна удерживать не все частицы. Существует *предельный конус*  $\vartheta = \vartheta_0$ , где  $\vartheta_0$  определяется уравнением

$$\sin \vartheta_0 = \sqrt{\frac{B}{B_{\text{макс}}}}. \quad (10.13)$$

Если направление скорости частицы проходит вне предельного конуса ( $\vartheta > \vartheta_0$ ), то частица ловушки удерживается. Если же она попадает внутрь конуса ( $\vartheta < \vartheta_0$ ), то частица из ловушки уходит.

Для изотропного распределения скоростей частиц легко вычислить коэффициент отражения  $R$  [5], определяемый как отношение числа частиц, отраженных от магнитного зеркала в течение определенного времени, к общему числу частиц, падающих на зеркало в течение того же времени. Пусть абсолютные значения скоростей всех частиц одинаковы. Обозначим через  $n$  число частиц в кубическом сантиметре. Полное число частиц, падающих на квадратный сантиметр поверхности зеркала в одну секунду, при изотропном распределении скоростей равно  $\frac{1}{4} nv$ . Полное число частиц, отражающихся в одну секунду от квадратного сантиметра поверхности зеркала,

$$\frac{nv}{2} \int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{nv}{4} \cos^2 \vartheta_0.$$

Коэффициент отражения

$$R = \cos^2 \vartheta_0 = 1 - \frac{B}{B_{\text{макс}}}. \quad (10.14)$$

Он не зависит от величины скорости  $v$ , а потому выражение (10.14) справедливо при любом распределении скоростей, если только оно изотропно.

В области неоднородности магнитного поля частица испытывает дрейф. Согласно уравнению (5.11) скорость дрейфа

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{\omega q} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{b}, \quad (10.15)$$



так как в рассматриваемом случае  $E = 0$  и предполагается, что ток  $\mathbf{j}$  в ловушке отсутствует. Дрейф происходит, таким образом, вдоль бинормали  $\mathbf{b}$  и, следовательно, заставляет частицу вращаться вокруг оси ловушки. Поэтому этот дрейф называется азимутальным. При переходе через точку перегиба магнитной силовой линии меняется на противоположное направление вектора  $\mathbf{b}$ . В соответствии с этим азимутальный дрейф также меняет свое направление при переходе через точку перегиба силовой линии магнитного поля.

5. Допустим теперь, что магнитное зеркало медленно движется с постоянной скоростью  $u$  в направлении магнитных силовых линий. В ловушке Будкера такой случай можно реализовать, приведя в движение дополнительную обмотку, создающую усиленное магнитное поле на одном из концов ловушки.

Рассмотрим отражение частиц от медленно движущегося магнитного зеркала. В силу адиабатической инвариантности  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$ , поперечный импульс частицы после отражения от зеркала не изменяется, поскольку после отражения частица попадает в то же самое однородное магнитное поле, в котором она находилась до того, как отразилась от зеркала. Продольный импульс, а с ним и продольная скорость частицы при отражении от движущегося зеркала, однако, изменятся. Легче всего решить этот вопрос, если перейти к системе отсчета, в которой магнитное зеркало покоится. В такой системе налетающая на зеркало частица будет отражаться с той же самой продольной скоростью, с какой она двигалась до отражения от зеркала. Поэтому в исходной системе отсчета продольная скорость частицы после отражения изменится на удвоенное значение скорости движения зеркала (ради простоты мы ограничимся движениями с нерелятивистскими скоростями). Если частица и зеркало движутся навстречу одна другому, то продольная скорость частицы после отражения увеличится на  $2|u|$ ; если же они движутся в одну и ту же сторону, то продольная скорость частицы уменьшается на ту же самую величину  $2|u|$ .

Допустим ради определенности, что частица и зеркало движутся навстречу одна другому. Тогда при каждом отражении кинетическая энергия продольного движения частицы будет увеличиваться на

$$\frac{m(v_{\parallel} + 2u)^2}{2} - \frac{mv_{\parallel}^2}{2} = 2muv_{\parallel}.$$

(Мы пренебрегли членом, квадратичным по  $u$ .) Кинетическая энергия поперечного движения частицы при отражении не меняется. Пусть  $n$  — число частиц в кубическом сантиметре ловушки с продольной скоростью  $v_{\parallel}$ . Половина их движется по направлению к зеркалу, другая половина — от зеркала. Допустим, кроме того, что магнитное поле зеркала настолько сильно, что от него

отражаются все частицы. Если  $S$  — площадь зеркала, то от него будет отражаться в 1 сек  $\frac{1}{2} S n v_{\parallel}$  частиц рассматриваемого типа. Увеличение кинетической энергии  $\mathcal{E}_{\parallel}$  продольного движения частиц в ловушке будет поэтому равно

$$\frac{d\mathcal{E}_{\parallel}}{dt} = 2 m v_{\parallel} \cdot \frac{1}{2} S n v_{\parallel} = 2 \frac{\mathcal{E}_{\parallel}}{V} S u,$$

где  $V$  — объем ловушки. Так как  $S u = -\frac{dV}{dt}$ , то это уравнение принимает вид

$$\frac{d\mathcal{E}_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} + 2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (10.16)$$

и после интегрирования переходит в

$$\mathcal{E}_{\parallel} V^2 = \text{const.} \quad (10.17)$$

Сюда совершенно не входит величина  $v_{\parallel}$ , а потому введенное при выводе уравнения (10.17) предположение об одинаковости  $v_{\parallel}$  всех частиц не существенно. Уравнение (10.17) можно представить в другой форме, если ввести *продольную кинетическую температуру*  $T_{\parallel}$ , пропорциональную средней кинетической энергии продольного движения частиц. Тогда

$$T_{\parallel} V^2 = \text{const} \quad (10.18)$$

или

$$\frac{T_{\parallel}}{n^2} = \text{const.} \quad (10.19)$$

Это уравнение адиабаты с показателем  $\gamma = 3$ . Такое значение  $\gamma$  объясняется тем, что наша модель газа, в которой нет обмена энергиями продольного и поперечного движения частиц, ведет себя как *одномерный газ*, т. е. такой газ, каждая частица которого имеет только *одну степень свободы* ( $N = 1$ ). Показатель же адиабаты, как известно, в общем случае определяется выражением

$$\gamma = \frac{2 + N}{N}. \quad (10.20)$$

Если допустить, что в результате столкновений или какого-либо другого механизма в ловушке *непрерывно восстанавливается изотропное распределение скоростей*, то средняя кинетическая энергия  $\mathcal{E}_{\parallel}$  продольного движения будет связана с полной кинетической энергией  $\mathcal{E}$  соотношением  $\mathcal{E}_{\parallel} = \frac{1}{3} \mathcal{E}$  и вместо уравнения (10.16) мы придем к соотношению

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{dV}{V} = 0.$$

Оно приводит к показателю адиабаты  $\gamma = \frac{5}{3}$ , как и должно быть для одноатомного газа.

6. Рассмотренный пример может иметь значение в теории происхождения *космических лучей*. Последняя должна выяснить механизм ускорения заряженных частиц в космосе. Ускорение электростатическими полями по-видимому неправдоподобно, поскольку высокая проводимость ионизованного газа в звездах и межзвездных туманностях ограничивает величину таких полей. Поэтому выдвигались гипотезы о том, что ускорение вызывается *переменными магнитными полями*. По одной из них, предложенной Ферми [9], заряженная частица движется в магнитном поле между двумя облаками межзвездной материи. Если предположить, что в облаках магнитное поле больше, чем между ними, то частица может оказаться захваченной подобно тому, как это имеет место в адиабатической ловушке Будкера. Захваченными могут быть частицы, у которых вектор скорости направлен под сравнительно большим углом к магнитному полю. Предположим теперь, что облака движутся навстречу друг другу. Тогда заряженная частица при каждом отражении будет получать энергию, так как движущееся облако ведет себя так же, как движущееся магнитное зеркало.

Описанный механизм ускорения частиц имеет одно существенное ограничение. По мере увеличения  $v_{\parallel}$  угол  $\theta$  уменьшается, и в конце концов частица перестает захватываться. Поэтому отношение общей энергии к поперечной увеличивается лишь до определенного предела, зависящего от коэффициентов отражения облаков, как магнитных зеркал. Кроме того, поперечная скорость не может быть увеличена, пока напряженность магнитного поля  $B$  между облаками неизменна, так как  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$ , а следовательно, и  $p_{\perp}$  остаются постоянными при отсутствии столкновений и других возмущающих факторов. Чтобы получить непрерывное ускорение частиц, необходимо поэтому предположить, что столкновения или какие-либо другие причины *непрерывно восстанавливают изотропное распределение скоростей*, нарушающееся в результате отражения частиц от облаков, и что в результате этого частицы вновь могут захватываться и ускоряться. Для частиц с очень большой энергией столкновения мало эффективны. Поэтому Ферми предположил, что изотропное распределение скоростей частиц в межзвездном пространстве восстанавливается *ударными волнами* или *колебаниями плазмы*.

7. Допустим теперь, что в адиабатической ловушке Будкера конфигурация магнитных силовых линий остается неизменной, но величина напряженности магнитного поля меняется во времени. Рассмотрим движение ведущего центра частицы с помощью формулы (5. 11) [10]. Первый член  $v_{\parallel} \mathbf{h}$  в правой части этой формулы дает скорость ведущего центра вдоль магнитной силовой

отражаются все частицы. Если  $S$  — площадь зеркала, то от него будет отражаться в 1 сек  $\frac{1}{2} S n v_{\parallel}$  частиц рассматриваемого типа. Увеличение кинетической энергии  $\mathcal{E}_{\parallel}$  продольного движения частиц в ловушке будет поэтому равно

$$\frac{d\mathcal{E}_{\parallel}}{dt} = 2 m u v_{\parallel} \cdot \frac{1}{2} S n v_{\parallel} = 2 \frac{\mathcal{E}_{\parallel}}{V} S u,$$

где  $V$  — объем ловушки. Так как  $S u = -\frac{dV}{dt}$ , то это уравнение принимает вид

$$\frac{d\mathcal{E}_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} + 2 \frac{dV}{V} = 0 \quad (10.16)$$

и после интегрирования переходит в

$$\mathcal{E}_{\parallel} V^2 = \text{const.} \quad (10.17)$$

Сюда совершенно не входит величина  $v_{\parallel}$ , а потому введенное при выводе уравнения (10.17) предположение об одинаковости  $v_{\parallel}$  всех частиц не существенно. Уравнение (10.17) можно представить в другой форме, если ввести *продольную кинетическую температуру*  $T_{\parallel}$ , пропорциональную средней кинетической энергии продольного движения частиц. Тогда

$$T_{\parallel} V^2 = \text{const} \quad (10.18)$$

или

$$\frac{T_{\parallel}}{n^2} = \text{const.} \quad (10.19)$$

Это *уравнение адиабаты с показателем  $\gamma = 3$* . Такое значение  $\gamma$  объясняется тем, что наша модель газа, в которой нет обмена энергиями продольного и поперечного движения частиц, ведет себя как *одномерный газ*, т. е. такой газ, каждая частица которого имеет только *одну степень свободы* ( $N = 1$ ). Показатель же адиабаты, как известно, в общем случае определяется выражением

$$\gamma = \frac{2 + N}{N}. \quad (10.20)$$

Если допустить, что в результате столкновений или какого-либо другого механизма в ловушке *непрерывно восстанавливается изотропное распределение скоростей*, то средняя кинетическая энергия  $\mathcal{E}_{\parallel}$  продольного движения будет связана с полной кинетической энергией  $\mathcal{E}$  соотношением  $\mathcal{E}_{\parallel} = \frac{1}{3} \mathcal{E}$  и вместо уравнения (10.16) мы придем к соотношению

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{dV}{V} = 0.$$

Оно приводит к показателю адиабаты  $\gamma = \frac{5}{3}$ , как и должно быть для одноатомного газа.

6. Рассмотренный пример может иметь значение в теории происхождения *космических лучей*. Последняя должна выяснить механизм ускорения заряженных частиц в космосе. Ускорение электростатическими полями по-видимому неправдоподобно, поскольку высокая проводимость ионизованного газа в звездах и межзвездных туманностях ограничивает величину таких полей. Поэтому выдвигались гипотезы о том, что ускорение вызывается *переменными магнитными полями*. По одной из них, предложенной Ферми [9], заряженная частица движется в магнитном поле между двумя облаками межзвездной материи. Если предположить, что в облаках магнитное поле больше, чем между ними, то частица может оказаться захваченной подобно тому, как это имеет место в адиабатической ловушке Будкера. Захваченными могут быть частицы, у которых вектор скорости направлен под сравнительно большим углом к магнитному полю. Предположим теперь, что облака движутся навстречу друг другу. Тогда заряженная частица при каждом отражении будет получать энергию, так как движущееся облако ведет себя так же, как движущееся магнитное зеркало.

Описанный механизм ускорения частиц имеет одно существенное ограничение. По мере увеличения  $v_{\parallel}$  угол  $\theta$  уменьшается, и в конце концов частица перестает захватываться. Поэтому отношение общей энергии к поперечной увеличивается лишь до определенного предела, зависящего от коэффициентов отражения облаков, как магнитных зеркал. Кроме того, поперечная скорость не может быть увеличена, пока напряженность магнитного поля  $B$  между облаками неизменна, так как  $\frac{p_{\perp}^2}{B}$ , а следовательно, и  $p_{\perp}$  остаются постоянными при отсутствии столкновений и других возмущающих факторов. Чтобы получить непрерывное ускорение частиц, необходимо поэтому предположить, что столкновения или какие-либо другие причины *непрерывно восстанавливают изотропное распределение скоростей*, нарушающееся в результате отражения частиц от облаков, и что в результате этого частицы вновь могут захватываться и ускоряться. Для частиц с очень большой энергией столкновения мало эффективны. Поэтому Ферми предположил, что изотропное распределение скоростей частиц в межзвездном пространстве восстанавливается *ударными волнами или колебаниями плазмы*.

7. Допустим теперь, что в адиабатической ловушке Будкера *конфигурация магнитных силовых линий остается неизменной, но величина напряженности магнитного поля меняется во времени*. Рассмотрим движение ведущего центра частицы с помощью формулы (5. 11) [10]. Первый член  $v_{\parallel} \mathbf{h}$  в правой части этой формулы дает скорость ведущего центра вдоль магнитной силовой

линии — эта скорость нас сейчас не интересует. Третье слагаемое —  $\frac{1}{\omega Q} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{b}$  дает так называемый азимутальный дрейф, т. е. движение по окружности с центром на оси системы; оно происходит в направлении бинормали к магнитной силовой линии и также нас сейчас не интересует. Последнее слагаемое в формуле (5. 11) обращается в нуль из-за отсутствия токов ( $\mathbf{j} = 0$ ). Если бы даже в ловушке текли токи, то последующее рассмотрение и его результаты остались бы без изменения; требуется только, чтобы обращалась в нуль радиальная компонента вектора плотности тока — параллельная  $j_{\parallel}$  и азимутальная компоненты вызвали бы движение вдоль магнитного поля и азимутальный дрейф, которые сейчас нас не интересуют. Остается второе слагаемое  $\frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ , описывающее *электрический дрейф*. На нем мы и сосредоточим все внимание.

*Этот дрейф, как сейчас будет показано, приближает ведущий центр частицы к оси ловушки, если магнитное поле нарастает во времени, и удаляет его от оси ловушки, когда магнитное поле убывает.*

Для простоты предположим, что размеры области однородности магнитного поля велики по сравнению с областями, занимаемыми магнитными зеркалами. Тогда можно отвлечься от процессов, происходящих внутри магнитных зеркал. Роль последних сводится лишь к отражению налетающей на них частицы. Поэтому мы будем считать переменное магнитное поле однородным. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  возникает благодаря тому, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  меняется во времени. Из соображений симметрии ясно, что электрические силовые линии будут концентрическими окружностями с центрами на оси ловушки. Поэтому скорость  $\frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$  электрического дрейфа направлена радиально, т. е. к оси или от оси ловушки. Как нетрудно сообразить, пользуясь общими правилами для определения направления электрического поля  $\mathbf{E}$  электромагнитной индукции, в случае нарастания поля  $\mathbf{B}$  во времени эта скорость направлена к оси ловушки, а в случае убывания  $\mathbf{B}$  — от оси ловушки. Величину поля  $\mathbf{E}$  легко найти из закона электромагнитной индукции. Обозначим через  $r$  расстояние ведущего центра частицы от оси ловушки и применим теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{E}$ , взяв в качестве контура интегрирования окружность радиуса  $r$  с центром на оси ловушки, плоскость которой перпендикулярна к этой оси. Тогда

$$|2\pi r E| = \left| \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \right|,$$

где  $\Phi = \pi r^2 B$  — магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную этой окружностью.

Таким образом

$$E = \frac{r}{2c} \left| \frac{dB}{dt} \right|,$$

и скорость электрического дрейфа определится из уравнения

$$\dot{r} = -\frac{c}{B} E = -\frac{r}{2B} \frac{dB}{dt},$$

интегрирование которого дает

$$\pi r^2 B = \Phi = \text{const.} \quad (10. 21)$$

Полученному результату можно дать другое истолкование, находящееся в связи с общими принципами *магнитной гидродинамики*. Допустим, что в ловушке находится не одна, а много частиц с *объемной концентрацией*  $n$ . Пусть эта концентрация достаточно мала, так что взаимодействием частиц можно пренебречь. Тогда частицы могут рассматриваться независимыми одна от другой и к движению каждой из них можно применить результаты, полученные для отдельной частицы. При изменении магнитного поля будет меняться расстояние  $r$  каждой частицы (точнее, ее ведущего центра) от оси ловушки. Рассмотрим частицы, расположенные в некоторый момент времени на окружности с центром на указанной оси. *При изменении магнитного поля эта окружность будет деформироваться, однако пронизывающий ее магнитный поток будет оставаться неизменным.*

Сопоставляя формулу (10. 21) с формулой (5. 17), замечаем, что *расстояние  $r$  частицы до оси ловушки изменяется с изменением магнитного поля по тому же закону, по которому меняется ларморов радиус  $a_{\perp}$ . Возрастание магнитного поля приводит к ускорению вращения частицы по ларморовой окружности, т. е. к увеличению поперечной скорости  $v_{\perp}$ . Сближение магнитных зеркал ведет к увеличению продольной скорости  $v_{\parallel}$ . В результате увеличивается полная скорость движения частицы, что ведет к нагреванию плазмы в ловушке. Одновременно нарастание поля  $\mathbf{B}$  приводит к стягиванию плазмы к оси ловушки.*

8. *Нарастание магнитного поля без изменения конфигурации магнитных силовых линий приводит к сжатию плазмы не только в поперечных, но и в продольном направлениях.* Это явление легко понять, рассматривая движение отдельной частицы. При постоянном магнитном поле частица в адиабатической ловушке Будкера совершает продольные колебания между магнитными зеркалами. Положение точек отражения в областях нахождения магнитных зеркал зависит от отношения поперечной скорости частицы к ее продольной скорости  $\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}\right)$  в какой-либо фиксированной точке магнитной силовой линии. В качестве фиксированной мы будем брать точку, лежащую в плоскости поперечного сечения

ловушки, проходящей через ее центр. Чем больше указанное отношение, тем ближе расположены точки отражения к центру ловушки, тем меньше амплитуды продольных колебаний. Но простое возрастание напряженности магнитного поля без изменения конфигурации магнитных силовых линий увеличивает, как мы видели, поперечную скорость  $v_{\perp}$ , оставляя продольную  $v_{\parallel}$  неизменной. Это ведет к увеличению отношения  $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$ , а тем самым к уменьшению амплитуды продольных колебаний и связанному с ним сжатию плазмы в продольном направлении.

Следующий простой пример [10] может служить для иллюстрации этого эффекта. Допустим, что магнитное поле на оси ловушки имеет вид

$$B(z, t) = B_0(t) + \frac{1}{2} k(t) z^2,$$

где  $B_0(t)$  и  $k(t)$  — медленно меняющиеся функции времени. Приращения этих функций за период продольных колебаний предполагаются малыми. Ось  $z$  мы совместили с осью ловушки, поместив начало координат в ее центре. Уравнение продольных колебаний частицы вдоль оси  $z$  получится из уравнения (6. 21) и имеет вид

$$\ddot{z} + \Omega^2(t) z = 0, \quad (10. 22)$$

где  $\Omega(t)$  — медленно меняющаяся функция, определяемая выражением

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{\mu k}{m}}.$$

Предполагается, что функция  $k(t)$  — существенно положительна, так что частота  $\Omega(t)$  — вещественна.

Решение уравнения (10. 22) можно искать в виде

$$z = a e^{i\varphi},$$

где  $a$  и  $\varphi$  — вещественные функции времени, из которых первая меняется во времени медленно. После подстановки в уравнение (10. 22) и отделения вещественной части от мнимой получится

$$\begin{aligned} a\dot{\varphi}^2 - \ddot{a} &= a\Omega^2; \\ 2\dot{a}\dot{\varphi} + a\ddot{\varphi} &= \frac{1}{a} \frac{d}{dt} (a^2\dot{\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

В первом уравнении можно пренебречь второй производной медленно меняющейся амплитуды  $a$ , и тогда оно дает  $\dot{\varphi} = \pm \Omega$ , после чего из второго уравнения получаем

$$a^2\Omega = \text{const}. \quad (10. 23)$$



Отсюда заключаем, что *величина  $a^2\Omega$  является адиабатическим инвариантом*. Переходя теперь к вещественной форме решения, можем написать

$$z = a \cos \int \Omega(t) dt. \quad (10.24)$$

Решение имеет вид «гармонического колебания с медленно меняющимися амплитудой и частотой». Так как магнитный момент  $\mu$  также является адиабатическим инвариантом, то с увеличением  $k$  возрастает также и частота  $\Omega$ . Поэтому из формулы (10.23) заключаем, что *амплитуда колебаний  $a$  уменьшается*. С этим и связано в рассматриваемом случае сжатие плазмы в продольном направлении.

9. *Земное магнитное поле может рассматриваться как грандиозная ловушка для заряженных частиц космического происхождения*. В таком поле сглаженное движение заряженной частицы происходит вдоль магнитной силовой линии. На него накладывается дрейфовое движение на восток или на запад в направлении геомагнитной параллели. Силовые линии земного магнитного поля сгущаются вблизи магнитных полюсов Земли. Поэтому заряженные частицы, двигаясь вдоль магнитных силовых линий, могут испытывать отражения вблизи этих полюсов — последние играют роль магнитных зеркал. Частица будет совершать колебательное движение между северным и южным магнитными полюсами Земли, как в магнитной ловушке. Исследования, выполненные с помощью *искусственных спутников Земли и космических ракет*, действительно показали, что земное магнитное поле является эффективной магнитной ловушкой для заряженных частиц, образующихся в результате различных ядерных процессов в пространстве, окружающем земной шар. С этими исследованиями можно познакомиться, например, по обзорным работам С. Н. Вернова и А. Е. Чудакова [11] и Дж. А. Ван Аллена [12], где приведена также подробная библиография. Мы ограничимся здесь краткими сообщениями о результатах этих исследований.

*Вокруг Земли существуют две пространственно разобщенные зоны корпускулярных излучений высокой интенсивности. Внешняя зона, состоящая из электронов, в экваториальной плоскости начинается на расстоянии около 20 000 км от центра Земли и простирается до расстояния около 60 000 км. Границей зоны является соответствующая силовая линия земного магнитного поля. В интервале геомагнитных широт 55—70° внешняя зона наблюдается на сравнительно небольших высотах (300—1500 км над поверхностью Земли). По мере удаления от Земли вдоль силовой линии наблюдается резкое возрастание интенсивности корпускулярного излучения, что является экспериментальным подтверждением существования вокруг Земли магнитной ловушки для заряженных частиц. По своей энергии электроны внешней зоны разбиваются на две группы. Энергия электронов первой группы составляет несколько десятков килоэлектронвольт. Максимальный поток*

электронов с энергией больше 20 кэв составляет около  $10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{стерад}^{-1}$ . Энергия электронов второй группы порядка 1 Мэв. Поток таких электронов в максимуме составляет около  $10^5 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{стерад}^{-1}$ .

*Внутренняя зона*, состоящая в основном из протонов с энергией около 100 Мэв, в экваториальной плоскости западного полушария начинается на высоте около 600 км и простирается до высот порядка радиуса Земли. Границей внутренней зоны является силовая линия, выходящая из Земли на геомагнитной широте  $35^\circ$ . Поток протонов во внутренней зоне составляет около  $10^2 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{стерад}^{-1}$ . Помимо протонов высоких энергий внутренняя зона содержит также *частицы малых энергий*, являющиеся, по-видимому, *электронами*.

Корпускулярное излучение обнаружено и между этими двумя зонами. Однако потоки электронов и протонов здесь примерно на три порядка меньше, чем соответствующие потоки во внешней и внутренней зонах.

Нетрудно определить положение точек отражения, в которых заряженная частица испытывает отражение в земном магнитном поле. Последнее может быть приближенно аппроксимировано как *поле точечного магнитного диполя*, находящегося вблизи центра Земли. Обозначим через  $\mathbf{M}$  магнитный момент этого диполя. Его магнитное поле, как известно, определяется выражением

$$\mathbf{B} = \frac{3(Mr)}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}, \quad (10.25)$$

откуда

$$B = \frac{M}{r^3} \sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}, \quad (10.26)$$

где  $\lambda$  — геомагнитная широта. Нетрудно найти уравнение магнитной силовой линии диполя. Разложим вектор  $\mathbf{M}$  (рис. 11) на две компоненты:  $\mathbf{M}_{\parallel}$ , параллельную радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ , и  $\mathbf{M}_{\perp}$ , перпендикулярную к нему. Первая в точке наблюдения  $A$  дает поле  $\mathbf{B}_{\parallel} = \frac{2\mathbf{M}_{\parallel}}{r^3}$ , вторая — поле  $\mathbf{B}_{\perp} = -\frac{\mathbf{M}_{\perp}}{r^3}$ . Поэтому угол  $\beta$  между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и магнитной силовой линией определится по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} = \frac{M_{\perp}}{2M_{\parallel}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \lambda.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора  $\mathbf{B}_{\perp}$  может быть, с одной стороны, представлена как  $dr \operatorname{tg} \beta = \frac{dr}{2} \operatorname{ctg} \lambda$ ; с другой стороны, как  $-rd\lambda$ . Поэтому

$$\frac{dr}{2} \operatorname{ctg} \lambda = -rd\lambda,$$

откуда и получается уравнение силовой линии

$$r = r_s \cos^2 \lambda, \quad (10. 27)$$

где постоянная  $r_s$  имеет смысл длины радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  в экваториальной плоскости, т. е. при  $\lambda = 0$ .

Пусть  $\vartheta_s$  — угол между направлениями движения частицы и силовой линии в экваториальной плоскости. Тогда значение

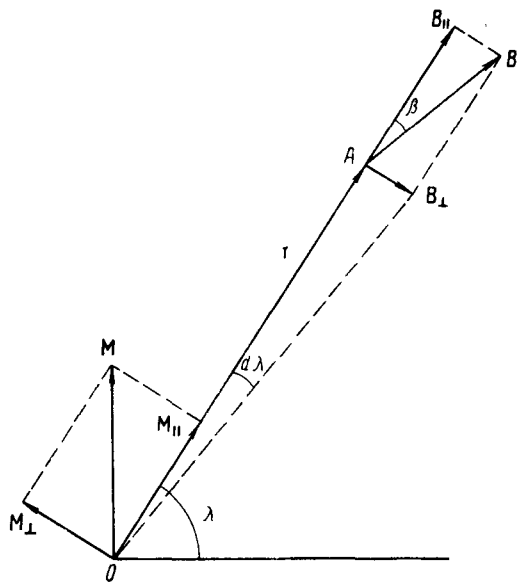


Рис. 11.

поля  $B$  в точке, где частица испытывает отражение, может быть найдено по формуле (10. 12), если в ней сделать замену  $B \rightarrow B_s$ ,  $B_m \rightarrow B$ . Это дает

$$\sin^2 \vartheta_s = \frac{B_s}{B}.$$

Исключая отсюда  $B_s$  и  $B$  с помощью формулы (10. 26) и принимая во внимание уравнение (10. 27), получим

$$\sin^2 \vartheta_s = \frac{\cos^6 \lambda}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}}. \quad (10. 28)$$

Эта формула совместно с уравнением (10. 27) и решает задачу.

10. Рассмотрим в заключение два примера, в которых траектория частицы в магнитном поле может быть найдена точно. Результаты точных решений сравним с результатами дрейфового приближения.

Допустим, что постоянное магнитное поле перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 12). Пусть в этой плоскости напряженность поля  $B$  зависит только от расстояния  $r$  до неподвижной точки  $O$ . В плоскости чертежа движется заряженная частица. Требуется найти ее траекторию.

Примем точку  $O$  за начало полярной системы координат с полярной осью  $Ox$ . Положение точки можно характеризовать ее расстоянием  $r$  от начала  $O$  и полярным углом  $\varphi$ . Обозначим через  $\vartheta$  угол между полярной осью  $Ox$  и касательной  $BA$  к траек-

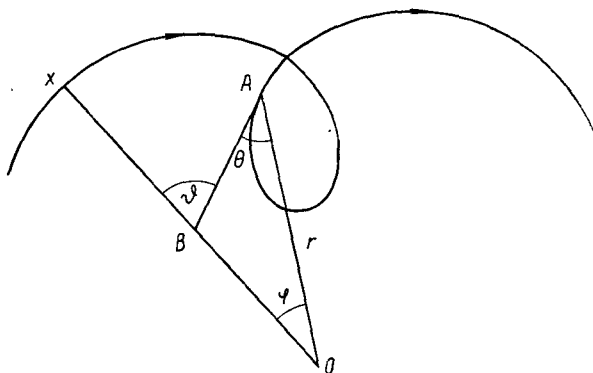


Рис. 12.

тории частицы. Радиус кривизны траектории  $a$  определяется выражением (1. 21) и при заданной скорости частицы зависит только от  $r$ . По определению кривизны

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{a} = \frac{eB}{cp}, \quad (10. 29)$$

где  $ds$  — элемент длины траектории. Обозначим через  $\Theta$  угол между радиусом-вектором  $OA$  и касательной к траектории  $BA$ . Тогда

$$\vartheta = \Theta + \varphi; \quad (10. 30)$$

$$dr = ds \cos \Theta, \quad (10. 31)$$

и уравнение (10. 29) примет вид

$$\cos \Theta \frac{d\Theta}{dr} + \cos \Theta \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{a}. \quad (10. 32)$$

К нему следует присоединить уравнение

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg} \Theta, \quad (10. 33)$$

непосредственно следующее из рис. 12. С помощью этого соотношения уравнение (10. 32) преобразуется в

$$d(r \sin \Theta) = \frac{r}{a} dr. \quad (10. 34)$$

В правой части стоит известная функция  $r$ , а потому, интегрируя уравнение (10. 34), находим

$$\sin \Theta = \frac{1}{r} \int_{r_{\text{макс}}}^r \frac{r}{a} dr, \quad (10. 35)$$

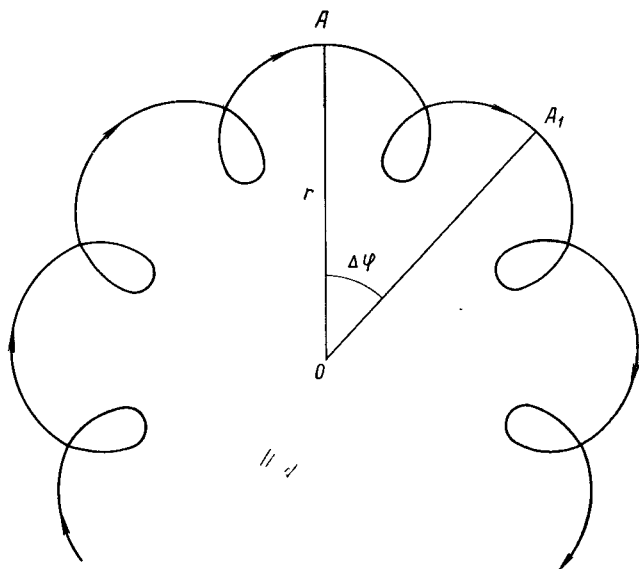


Рис. 13.

после чего из уравнения (10. 33) определится  $\varphi$ :

$$\varphi = \int_{r_{\text{макс}}}^r \frac{\text{tg } \Theta}{r} dr. \quad (10. 36)$$

При этом за полярную ось  $Ox$  мы выбрали направление одного из максимальных радиусов-векторов точек траектории. Уравнения (10. 29) и (10. 35) определяют траекторию в параметрической форме. Вид траектории изображен на рис. 13.

Простой случай получается, когда  $B = \frac{\text{const}}{r}$ . В этом случае  $\frac{a}{r}$  — величина постоянная. Обозначим эту постоянную

через  $\alpha$ . Исключая  $r$  из уравнений (10. 32) и (10. 33), получим

$$d\Theta + d\varphi = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d\varphi}{\sin \Theta}$$

или

$$d\varphi = \frac{\alpha \sin \Theta d\Theta}{1 - \alpha \sin \Theta}. \quad (10. 37)$$

С помощью этого уравнения легко определить «угол дрейфа»  $\Delta\varphi$ , т. е. угловое расстояние между двумя соседними вершинами на траектории частицы (см. рис. 13). Он, очевидно, равен

$$\Delta\varphi = \alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + 2\pi} \frac{\sin \Theta d\Theta}{1 - \alpha \sin \Theta} = 2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} - 1 \right). \quad (10. 38)$$

Вычислим теперь угол дрейфа в дрейфовом приближении. Согласно уравнению (5. 5) скорость дрейфа  $\omega = \frac{1}{2B} v\alpha \left| \frac{dB}{dr} \right|$ . Так как  $B \sim \frac{1}{r}$ , то  $\omega = \frac{v}{2} \cdot \frac{\alpha}{r} = \frac{v}{2} \alpha$ . Ведущий центр частицы за циклотронный период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  перемещается на  $\omega T = \pi \frac{v}{\omega} \alpha = \pi \alpha a$ . Ему соответствует угловое перемещение или угол дрейфа

$$\Delta\varphi = \pi \alpha \frac{a}{r} = \pi \alpha^2. \quad (10. 39)$$

Но это выражение получится, если в точной формуле (10. 38)  $\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$  разложить в ряд и отбросить члены четвертой и высшей степеней по  $\alpha$ . Таким образом, формула (10. 39) верна с точностью до членов порядка  $\alpha^4$ .

11. Допустим теперь, что магнитное поле перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 14) и меняется линейно в направлении оси  $y$  и притом так, что на оси  $x$  оно обращается в нуль. Пусть вектор  $\text{grad } B$  направлен в сторону отрицательной полуоси  $y$ . Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{eB}{cp} = -\frac{1}{A^2} y, \quad (10. 40)$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Обозначим через  $\varphi$  угол между направлением касательной к траектории частицы и положительным направлением оси  $x$ . Тогда в силу определения кривизны

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{a} = \frac{1}{A^2} y.$$

Используя соотношениями  $dx = ds \cos \varphi$  и  $dy = ds \sin \varphi$ , отсюда можно получить два уравнения:

$$y dx = A^2 \cos \varphi d\varphi; \quad (10.41)$$

$$y dy = A^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Второе из них сразу интегрируется и дает

$$y^2 = -2A^2 \cos \varphi + \text{const.}$$

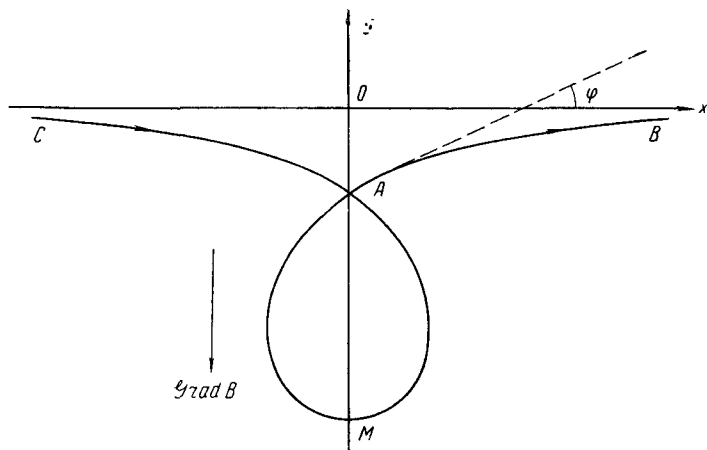


Рис. 14.

Мы рассмотрим только частный легко интегрируемый случай, выбрав const так, чтобы при  $\varphi = 0$  получить  $y = 0$ . Тогда, полагая  $\text{const} = 2A^2$ , будем иметь

$$y = 2A \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (10.42)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (10.41), придадим ему вид

$$dx = \frac{A}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{A}{2} \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} - A \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Интегрированием находим

$$x = A \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} + 2A \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (10.43)$$

Интеграционную постоянную мы выбрали так, чтобы при  $\varphi = \pi$  (точка M траектории) абсцисса  $x$  обращалась в нуль.

Уравнения (10.42) и (10.43) являются уравнениями траектории в параметрической форме. Траектория имеет только одну петлю и в обе стороны уходит в бесконечность. Ось  $x$  является асимптотой траектории. Таким образом, движение частицы

в рассматриваемом случае не имеет ничего общего с тем, что должно было бы быть по дрейфовой теории. Это и понятно, так как частица движется в области *слабого* магнитного поля (на оси  $x$  поле  $B$  равно нулю).

Заметим, что разобранный задача математически тождественна с задачей определения формы поверхности жидкости, какую она принимает под действием силы тяжести и сил поверхностного натяжения, когда на жидкость положена бесконечно длинная тяжелая пластинка, не смачиваемая жидкостью [13, 18]. Сечение этой поверхности вертикальной плоскостью, перпендикулярной к длине пластинки, при определенной глубине погружения последней воспроизводит каждую из бесконечных ветвей  $MAV$  и  $MAC$  траектории частицы.

### § 11. Дрейфовые интегралы движения в постоянных электрическом и магнитном полях

1. Дрейфовые уравнения движения (6. 10), (6. 11), (6. 12) всегда имеют один интеграл, каковым является *адиабатический инвариант*

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} \equiv I_{\perp} = \text{const.} \quad (11. 1)$$

Если электрическое и магнитное поля *не меняются во времени*, то можно написать еще один интеграл — *интеграл энергии*. В этом случае электрическое поле  $\mathbf{E}$  *потенциальное*, т. е. может быть представлено в виде  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi(r)$ . Поэтому уравнение (6. 13) перейдет в

$$\frac{d}{dt} (mc^2) = -e(\dot{\mathbf{R}}\nabla\varphi) = -e(\dot{\mathbf{R}}\nabla)\varphi = -e\frac{d\varphi}{dt}.$$

Здесь все величины являются функциями радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  ведущего центра частицы, т. е. относятся к точкам траектории этого центра. А так как  $\mathbf{R}$  в свою очередь зависит от  $t$ , то в конце концов они могут рассматриваться как функции только  $t$ . Интегрируя последнее уравнение, получаем интеграл энергии

$$mc^2 + e\varphi = \mathcal{E} = \text{const}, \quad (11. 2)$$

который однозначно определяет массу частицы  $m$  в каждой точке траектории ведущего центра. Аналогично уравнение (11. 1) однозначно определяет в точках той же траектории *поперечный импульс*  $P_{\perp}$ . Тем самым в силу уравнения (1. 4) *однозначно определится полный импульс*  $P$ , а следовательно, и его *продольная компонента*  $P_{\parallel} = \sqrt{P^2 - P_{\perp}^2}$ :

$$P_{\parallel}^2 = (mc)^2 - (m_0c)^2 - I_{\perp}B. \quad (11. 3)$$

Теперь мы меняем постановку задачи, перейдя от движения индивидуальной частицы к рассмотрению движения *ансамбля* не взаимо-



действующих тождественных частиц с одинаковыми значениями  $\mathcal{E}$  и  $I_{\perp}$ . По отношению к такому ансамблю величины  $m$ ,  $P_{\parallel}$ ,  $P_{\perp}$ , а также  $V_{\parallel}$ ,  $V_{\perp}$ ,  $a_{\parallel}$ ,  $a_{\perp}$  задаются не только вдоль траектории ведущего центра индивидуальной частицы, а во всем пространстве. Уравнение движения отдельной частицы найдется подстановкой в уравнение (6. 10) значений  $V_{\parallel}$ ,  $V_{\perp}$ ,  $a_{\parallel}$ ,  $a_{\perp}$ . Запишем это уравнение в форме, полученной А. И. Морозовым и Л. С. Соловьевым [14], которым принадлежат также основные результаты, излагаемые далее в настоящем параграфе. Имеем

$$\text{rot}(P_{\parallel} \mathbf{h}) = P_{\parallel} \text{rot} \mathbf{h} + [\nabla P_{\parallel} \mathbf{h}].$$

Из формулы (11. 3)

$$\nabla P_{\parallel} = \frac{e}{V_{\parallel}} \mathbf{E} - \frac{I_{\perp}}{2P_{\parallel}} \nabla B.$$

Поэтому

$$\text{rot}(P_{\parallel} \mathbf{h}) = P_{\parallel} \text{rot} \mathbf{h} + \frac{e}{V_{\parallel}} [\mathbf{E} \mathbf{h}] + \frac{I_{\perp}}{2P_{\parallel}} [\mathbf{h} \nabla B].$$

Используя это соотношение, запишем уравнение (6. 10) в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{V_{\parallel}}{B} \left\{ \mathbf{B} + \frac{e}{c} \text{rot}(P_{\parallel} \mathbf{h}) - \frac{cP_{\parallel}}{e} (\mathbf{h} \text{rot} \mathbf{h}) \mathbf{h} \right\}. \quad (11. 4)$$

Это обыкновенное векторное дифференциальное уравнение. Когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не зависят явно от времени, к этому уравнению сводится вся система уравнений дрейфового приближения. Оно первого порядка. Поэтому движение ведущего центра отдельной частицы однозначно определяется заданием его положения в начальный, произвольно выбранный момент времени.

2. Предположим, что  $\mathbf{h} \text{rot} \mathbf{h} = 0$ . Так как  $\mathbf{B} \text{rot} \mathbf{h} = \mathbf{h} \text{rot} \mathbf{B}$ , то это условие эквивалентно  $\mathbf{h} \text{rot} \mathbf{B} = 0$  или  $(\mathbf{h} \mathbf{j}) = 0$ . Таким образом, мы предполагаем, что продольная компонента  $\mathbf{j}_{\parallel}$  плотности тока отсутствует. Введем векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля. Тогда  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ , и уравнение (11. 4) примет вид

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{V_{\parallel}}{B} \text{rot} \mathbf{A}^*, \quad (11. 5)$$

где

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{c}{e} P_{\parallel} \mathbf{h}. \quad (11. 6)$$

На вектор

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} + \frac{c}{e} \text{rot}(P_{\parallel} \mathbf{h}) \quad (11. 7)$$

можно смотреть как на какое-то фиктивное «магнитное поле», а на  $\mathbf{A}^*$  — как на его векторный потенциал. Как видно из уравнения (11. 5), ведущий центр частицы движется всегда по силовой линии этого «магнитного поля».

Умножая уравнение (11. 5) векторно на  $\mathbf{B}^*$ , получим

$$[\dot{\mathbf{R}}\mathbf{B}^*] = 0. \quad (11. 8)$$

Формально это уравнение совпадает с уравнением движения частицы нулевой массы в магнитном поле  $\mathbf{B}^*$ . Поэтому его можно записать в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (11. 9)$$

с лагранжианом

$$L = (\mathbf{A}^*\mathbf{R}), \quad (11. 10)$$

являющимся функцией обобщенных координат  $q_i$  ведущего центра и соответствующих им обобщенных скоростей. Если какая-либо координата  $q_i$  является циклической, т. е.  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , то соответствующий ей обобщенный импульс  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  остается постоянным, т. е. является *интегралом движения*. Таким путем можно находить интегралы дрейфовых уравнений, используя *симметрию задачи*.

Рассмотрим три случая симметрии.

**а. Трансляционная симметрия.** В этом случае магнитное поле и электрический потенциал  $\varphi$  не зависят от одной из прямоугольных координат, например от  $z$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y); \quad \varphi = \varphi(x, y).$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  можно выбрать так, чтобы он также не зависел от  $z$ . В силу выражений (11. 2) и (11. 6) не будет зависеть от  $z$  и вектор  $\mathbf{A}^*$ . Координата  $z$ , таким образом, не будет входить в лагранжиан

$$L = (\mathbf{A}^*\dot{\mathbf{R}}) = \dot{x}\mathbf{A}_x^* + \dot{y}\mathbf{A}_y^* + \dot{z}\mathbf{A}_z^*,$$

и мы получим интеграл движения

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \mathbf{A}_z^* = \text{const.} \quad (11. 11)$$

**б. Осевая симметрия.** Положение точки в пространстве задается цилиндрическими координатами  $z, r, \alpha$ . При осевой симметрии компоненты  $B_z, B_r, B_\alpha$  вектора  $\mathbf{B}$  и скалярный потенциал  $\varphi$  зависят только от  $z$  и  $r$ , но не зависят от  $\alpha$ . Поэтому векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , а с ним и вектор  $\mathbf{A}^*$  можно выбрать так, чтобы компоненты  $A_z, A_r, A_\alpha$  и  $A_z^*, A_r^*, A_\alpha^*$  также не зависели от  $\alpha$ . Тогда координата  $\alpha$  не войдет в лагранжиан

$$L = \dot{z}\mathbf{A}_z^* + \dot{r}\mathbf{A}_r^* + \dot{\alpha}\mathbf{A}_\alpha^*, \quad (11. 12)$$

т. е. эта координата будет циклической, и мы получаем следующий интеграл движения:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = r A_{\alpha}^* = \text{const.} \quad (11.13)$$

Применим полученный результат к движению заряженной частицы в магнитном поле диполя. Этот вопрос уже рассматривался в пункте 9 предыдущего параграфа. Магнитное поле диполя можно описать с помощью векторного потенциала  $\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{MR}]}{R^3}$ . Он имеет только азимутальную составляющую  $A_{\alpha}$ . Как поле диполя, так и вектор  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{c}{e} P \parallel \mathbf{h}$  обладает осевой симметрией. Поэтому имеет место интеграл (11.13). В рассматриваемом случае  $A_{\alpha}^* = A_{\alpha} = \frac{M}{R^2} \cos \lambda$ ,  $r = R \cos \lambda$  и интеграл (11.13) переходит в

$$\frac{\cos^2 \lambda}{R} = \text{const.},$$

т. е. в уравнение магнитной силовой линии.

**в. Винтовая симметрия.** Положение точки в пространстве по-прежнему определяем цилиндрическими координатами  $r, z, \alpha$ . При винтовой симметрии компоненты  $B_r, B_z, B_{\alpha}$  и потенциал  $\varphi$  в точках  $r_1, z_1, \alpha_1$  и  $r_2, z_2, \alpha_2$  совпадают, если

$$r_1 = r_2; \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\pi} = \frac{z_1 - z_2}{b},$$

где  $b$  — шаг винта. Переписав последнее условие в виде

$$\alpha_1 - \frac{2\pi z_1}{b} = \alpha_2 - \frac{2\pi z_2}{b},$$

закключаем, что при винтовой симметрии  $B_r, B_z, B_{\alpha}$  и  $\varphi$  зависят только от  $r$  и от  $\alpha - \frac{2\pi z}{b}$ . Векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , а следовательно, и вектор  $\mathbf{A}^*$  можно выбрать так, чтобы их компоненты в цилиндрической системе координат  $A_r, A_z, A_{\alpha}, A_r^*, A_z^*, A_{\alpha}^*$  зависели только от тех же аргументов. Введем теперь новые обобщенные координаты:

$$r, \quad q_1 = \alpha - \frac{2\pi z}{b}, \quad q_2 = \alpha + \frac{2\pi z}{b}.$$

В этих координатах лагранжиан (11.12) представится в виде

$$L = \dot{r} A_r^* - \frac{b}{4\pi} \left( A_z^* - \frac{2\pi r}{b} A_{\alpha}^* \right) \dot{q}_1 + \\ + \frac{b}{4\pi} \left( A_z^* + \frac{2\pi r}{b} A_{\alpha}^* \right) \dot{q}_2$$

и не зависит от координаты  $q_2$ . Поэтому мы получаем интеграл

$$\frac{4\pi}{b} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = A_z^* + \frac{2\pi r}{b} A_a^* = \text{const.} \quad (11.14)$$

3. Морозов и Соловьев [11] ограничились исследованием случая, когда  $\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} = 0$ . Посмотрим теперь, можно ли обобщить их результаты на тот случай, когда это условие не выполняется. В правой части уравнения (11.4) стоит известная вектор-функция. Обозначим эту вектор-функцию через  $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ . Произвольный вектор, а следовательно, и вектор  $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ , может быть представлен в виде  $\mathbf{C} = \frac{1}{f(\mathbf{R})} \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{R})$ . Действительно, возьмем в качестве  $f(\mathbf{R})$  решение уравнения

$$\text{div}(f\mathbf{C}) = \mathbf{C} \text{ grad } f + f \text{ div } \mathbf{C} = 0. \quad (11.15)$$

Тогда, представив  $\mathbf{C}$  в виде  $\mathbf{C} = \frac{1}{f(\mathbf{R})} \mathbf{D}(\mathbf{R})$ , найдем, что  $\text{div } \mathbf{D} = 0$ , и, следовательно, можно положить  $\mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{F}$ . Поэтому уравнение (11.4) переходит в

$$f(\mathbf{R}) \dot{\mathbf{R}} = \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{R}), \quad (11.16)$$

откуда

$$[\dot{\mathbf{R}} \text{ rot } \mathbf{F}(\mathbf{R})] = 0. \quad (11.17)$$

Последнее уравнение можно записать в лагранжевой форме (11.9) с лагранжианом  $L = (\mathbf{F}\dot{\mathbf{R}})$ . Следовательно, *все полученные выше результаты остаются справедливыми и в том случае, когда  $\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h} \neq 0$ , если только вектор  $\mathbf{A}^*$  заменить на вектор  $\mathbf{F}$* . При этом, когда мы получаем интегралы движения из симметрии задачи, необходимо брать такое решение  $f(\mathbf{R})$  уравнения (11.15), а также такой вектор  $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ , которые бы обладали *той же симметрией*. Таким образом, задача свелась к интегрированию уравнения в частных производных (11.15). Практически в этом сведении мало пользы, поскольку не существует общих методов решения уравнений типа (11.15).

## § 12. Теорема Лиувилля в дрейфовом приближении

1. В дрейфовом приближении состояние движения частицы характеризуется пятью переменными: тремя координатами  $x, y, z$  ведущего центра и двумя импульсами  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$ . Вместо импульсов  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  можно также пользоваться импульсами  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ , связанными с  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  соотношениями (6.4). В этом параграфе мы будем сначала пользоваться переменными  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Тогда уравнения (6.1), (6.2) и (6.3) будут уравнениями движения в дрейфовом приближении. Используя тождество  $(\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} = -[\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}]$ ,

придадим этим уравнениям вид

$$\dot{\mathbf{R}} = \left[ v_{\parallel} + \frac{cp_{\perp}^2}{2meB} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) \right] \mathbf{h} + \frac{c}{B} [\mathbf{Eh}] + \\ + \frac{cp_{\perp}^2}{2meB^2} [\mathbf{h} \nabla B] + \frac{cp_{\parallel}^2}{meB} \text{rot } \mathbf{h} - \frac{cp_{\parallel}^2}{meB} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) \mathbf{h}; \quad (12. 1)$$

$$\dot{p}_{\parallel} = e (\mathbf{Eh}) + \frac{p_{\perp}^2}{2m} \text{div } \mathbf{h} + \frac{cp_{\parallel}}{B} (\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{h}) - \frac{cp_{\parallel}}{B} (\mathbf{Eh}) (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) - \\ - \frac{cp_{\parallel} p_{\perp}^2}{2meB} (\nabla B \text{ rot } \mathbf{h}) + \frac{cp_{\parallel} p_{\perp}^2}{2meB^2} (\nabla B \mathbf{h}) (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) + \frac{cp_{\parallel} p_{\perp}^2}{2meB} \mathbf{h} \text{ rot } [\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}]; \quad (12. 2)$$

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = - \frac{p_{\perp} p_{\perp}^2}{m} \text{div } \mathbf{h} - \frac{cp_{\perp}^2}{B} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{E}) + \frac{cp_{\perp}^2}{B^2} ([\mathbf{h} \nabla B] \mathbf{E}) + \\ + \frac{cp_{\perp}^2}{B} (\mathbf{Eh}) (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) + \frac{cp_{\parallel}^2 p_{\perp}^2}{meB^2} (\nabla B \text{ rot } \mathbf{h}) - \frac{cp_{\parallel}^2 p_{\perp}^2}{meB^2} (\mathbf{h} \nabla B) (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) - \\ - \frac{cp_{\parallel}^2 p_{\perp}^2}{meB} \mathbf{h} \text{ rot } [\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}]. \quad (12. 3)$$

Масса  $m$  является функцией импульсов  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  и в силу формулы (1. 4) связана с ними соотношением

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2. \quad (12. 4)$$

Из него находим

$$\frac{\partial m}{\partial p_{\parallel}} = \frac{v_{\parallel}}{c^2}; \quad \frac{\partial m}{\partial p_{\perp}} = \frac{v_{\perp}}{c^2}. \quad (12. 5)$$

Вообразим очень большое число (в пределе континуум) взаимодействующих тождественных частиц, состояние каждой из которых в дрейфовом приближении описывается пятью переменными: тремя прямоугольными координатами  $x, y, z$  ведущего центра и двумя импульсами  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Пусть  $x^0, y^0, z^0, p_{\parallel}^0, p_{\perp}^0$  — начальные значения этих переменных, заполняющие некоторую область  $D^0$ . Их значения  $x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp}$  в любой другой момент времени  $t$  определяются уравнениями движения (12, 1), (12, 2), (12, 3) и будут заполнять вполне определенную область  $D^t$ , в которую перейдет при движении область  $D^0$ . Допустим, что существует такая функция  $G(x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp})$ , что для любого момента времени  $t$  выполняется равенство

$$\int_{D^0} G(x^0, y^0, z^0, p_{\parallel}^0, p_{\perp}^0) dx^0 dy^0 dz^0 dp_{\parallel}^0 dp_{\perp}^0 = \\ = \int_{D^t} G(x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp}) dx dy dz dp_{\parallel} dp_{\perp}, \quad (12. 6)$$

какова бы ни была начальная область  $D^0$ . Интеграл (12. 6), обладающий таким свойством, называется *интегральным инвариантом*,

$\alpha$  величина  $d\Gamma = G dx dy dz dp_{\parallel} dp_{\perp}$  может быть названа *элементом объема пятимерного пространства*  $x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp}$ . Мы утверждаем, что в принятых нами переменных можно положить  $G = p_{\perp}$ . В самом деле, используя соотношения (12. 5), а также тождество

$$(\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \operatorname{div} \mathbf{h} + \mathbf{h} \operatorname{grad} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) + \mathbf{h} \operatorname{rot} [\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}] = 0, \quad (12. 7)$$

из уравнений (12. 1), (12. 2) и (12. 3) простым дифференцированием нетрудно получить

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \dot{R} + \frac{\partial \dot{p}_{\parallel}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{\partial}{\partial p_{\perp}^2} \left( \frac{dp_{\perp}^2}{dt} \right) = 0. \quad (12. 8)$$

Отсюда на основании известной *теоремы Пуанкаре* [15] заключаем, что *интеграл*

$$\int_{Dt} dx dy dz dp_{\parallel} dp_{\perp}^2 = 2 \cdot \int_{D^t} p_{\perp} dx dy dz dp_{\parallel} dp_{\perp} \quad (12. 9)$$

*является интегральным инвариантом*. Это утверждение можно рассматривать как *теорему Лиувилля в дрейфовом приближении*. Следовательно, можно положить  $G = p_{\perp}$ , и роль элемента объема будет играть величина

$$d\Gamma = p_{\perp} dx dy dz dp_{\parallel} dp_{\perp}. \quad (12. 10)$$

2. Нетрудно сформулировать теорему Лиувилля и в переменных  $x, y, z, P_{\parallel}, P_{\perp}$ . Для этого следует воспользоваться *теоремой Якоби* о замене переменных в *кратных интегралах*. Из формул (6. 4) и (6. 20) нетрудно получить для соответствующего *якобиана*

$$\frac{\partial(x, y, z, P_{\parallel}, P_{\perp})}{\partial(x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp})} = \frac{\partial(P_{\parallel}, P_{\perp})}{\partial(p_{\parallel}, p_{\perp})} = 1 + \frac{a_{\perp}^2}{2} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h})^2 = 1,$$

так как в рассматриваемом приближении величинами второго порядка малости следует пренебречь. Поэтому в переменных  $x, y, z, P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$  *роль элемента объема играет величина*

$$d\Gamma = \left[ P_{\perp} + \frac{1}{2} P_{\parallel} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \right] dx dy dz dP_{\parallel} dP_{\perp}, \quad (12. 11)$$

*а интегральным инвариантом является интеграл*

$$\int \left[ P_{\perp} + \frac{1}{2} P_{\parallel} a_{\perp} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h}) \right] dx dy dz dP_{\parallel} dP_{\perp}, \quad (12. 12)$$

*взятый по области, заполненной одними и теми же фазовыми точками, движущимися в фазовом пространстве  $x, y, z, P_{\parallel}, P_{\perp}$  в соответствии с дрейфовыми уравнениями движения (6. 10), (6. 11) и (6. 12). Инвариантность интеграла (12. 12) и составляет содержание теоремы Лиувилля в дрейфовом приближении*

Мы видим, что в переменных  $x, y, z, P_{\parallel}, P_{\perp}$

$$G = P_{\perp} + \frac{1}{2} P_{\parallel} a_{\perp} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}). \quad (12. 13)$$

3. Теорема Лиувилля может быть использована для вывода уравнения, которому должна удовлетворять функция распределения в пространстве переменных  $x, y, z, p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  или переменных  $x, y, z, P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$ . Допустим, например, что имеется полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов и положительно заряженных ионов, помещенная в магнитное и электрическое поле. Вообще говоря, она может содержать положительные ионы нескольких типов. Рассмотрим поведение частиц какого-либо определенного типа. В дрейфовом приближении можно ввести функцию распределения  $f(x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp})$ , определенную таким образом, что  $f(x, y, z, p_{\parallel}, p_{\perp}) d\Gamma$  дает среднее число частиц рассматриваемого типа, координаты ведущих центров которых заключены между  $x$  и  $x + dx, y$  и  $y + dy, z$  и  $z + dz$ , а импульсы  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — между  $p_{\parallel}$  и  $p_{\parallel} + dp_{\parallel}, p_{\perp}$  и  $p_{\perp} + dp_{\perp}$  (вместо  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ , разумеется, можно пользоваться  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$ ). Взаимодействие частиц между собой и с частицами других типов можно учесть по методу самосогласованного поля, т. е. электромагнитного поля, возбуждаемого как внешними источниками, так и макроскопическими объемными зарядами и токами самой плазмы. Так учитывается взаимодействие частиц на далеких, но не на близких расстояниях. Взаимодействие на близких расстояниях характеризуется тем, что частицы близко подходят одна к другой, где действуют большие кулоновы силы притяжения или отталкивания. Эти взаимодействия несут характер столкновений. Если ими пренебречь, то движение каждой частицы плазмы в дрейфовом приближении будет описываться уравнениями (6. 1), (6. 2), (6. 3) или уравнениями (6. 10), (6. 11), (6. 12). В этом приближении функция распределения  $f$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dt} (fd\Gamma) = 0,$$

выражающему сохранение числа частиц. Так как в силу теоремы Лиувилля  $d\Gamma = \text{const}$ , то этому уравнению можно придать вид

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{R} \text{ grad}_{\mathbf{r}} f + \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \dot{p}_{\parallel} + \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \dot{p}_{\perp} = 0, \quad (12. 14)$$

где производные  $\dot{\mathbf{R}}, \dot{p}_{\parallel}, \dot{p}_{\perp}$  определяются уравнениями (6. 1)—(6. 3). При этом под  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  следует понимать самосогласованные электрическое и магнитное поля. В тех случаях, когда столкновениями между частицами пренебречь нельзя, уравнение (12. 14) должно быть дополнено членом, выражающим изменение функции распределения вследствие столкновений.

Следует подчеркнуть, что введенная нами функция распределения  $f$  относится не к распределению самих частиц, а к распределению их ведущих центров.

### § 13. Об обобщении дрейфовой теории на случай сильных поперечных электрических полей

1. Дрейфовую теорию можно обобщить на тот случай, когда электрическое поле содержит *сильную* составляющую, *перпендикулярную* к направлению магнитного поля. С этой целью перейдем к *движущейся* системе отсчета, в которой электрическое и магнитное поля *параллельны* друг другу (в частности, электрическое поле может обращаться в нуль). Скорость  $\mathbf{w}$  движущейся системы отсчета выберем так, чтобы она была *перпендикулярна* к векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Тогда напряженности полей  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  в новой системе отсчета будут определяться выражениями

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{wB}]}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{wE}]}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}. \quad (13. 1)$$

Скорость  $\mathbf{w}$  может быть найдена из условия коллинеарности векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ , т. е.

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{wB}] = \alpha \left\{ \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{wE}] \right\},$$

где  $\alpha$  — скаляр. Умножая последнее уравнение векторно на  $\mathbf{B}$  и принимая во внимание, что  $(\mathbf{wB}) = (\mathbf{wE}) = 0$ , получим

$$[\mathbf{EB}] - \frac{B^2}{c} \mathbf{w} = \frac{\alpha}{c} (\mathbf{BE}) \mathbf{w},$$

а скалярным умножением на  $\mathbf{E}$  найдем

$$\alpha (\mathbf{BE}) = E^2 - \frac{1}{c} ([\mathbf{EB}] \mathbf{w}).$$

Исключение  $\alpha (\mathbf{BE})$  из последних двух уравнений дает

$$\mathbf{w} = c \frac{1 + \frac{w^2}{c^2}}{B^2 + E^2} [\mathbf{EB}], \quad (13. 2)$$

т. е. квадратное уравнение для нахождения искомой скорости  $w$ . Нетрудно убедиться, что корни этого уравнения вещественны и что их произведение равно  $c^2$ . Поэтому один корень всегда больше, а другой всегда меньше  $c$ . Разумеется, следует взять *меньший* корень. Отсюда следует, что *система отсчета с требуемыми свойствами существует и притом такая система единственная*.

Теперь следует написать уравнение движения частицы относительно выбранной таким образом движущейся системы отсчета. Наряду с электрическими и магнитными силами оно будет содержать также *силы инерции*. В новой системе отсчета электрическое поле  $\mathbf{E}'$  будет содержать только компоненту в направлении маг-



нитного поля  $\mathbf{V}'$ . Если эту компоненту, а также силы инерции можно рассматривать как величины *первого* порядка малости, то в движущейся системе можно построить дрейфовую теорию совершенно так же, как она строилась в предшествующих параграфах. Затем останется лишь выполнить обратный переход к исходной «неподвижной» системе отсчета, что является чисто кинематической задачей.

2. Чтобы не усложнять вычислений, ограничимся случаем *нерелятивистской* кинематики, а также приближением Боголюбова—Зубарева. В соответствии с этим будем пренебрегать величинами порядка  $\left(\frac{w}{c}\right)^2$  и  $\left(\frac{E}{B}\right)^2$ . Таким образом, мы по-прежнему считаем электрическое поле малым по сравнению с магнитным. Однако поле  $\mathbf{E}$  мы уже не рассматриваем как величину первого порядка малости. Величинами первого порядка малости теперь являются *продольная* слагающая поля  $\mathbf{E}$  в направлении магнитного поля, а также пространственные производные поля  $\mathbf{B}$ . В рассматриваемом приближении

$$\mathbf{w} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}; \quad (13. 3)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{w}\mathbf{B}] = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{B})}{B^2} \mathbf{B} = (\mathbf{E}\mathbf{h}) \mathbf{h}; \quad (13. 4)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \frac{1}{c} [\mathbf{w}\mathbf{E}] = \mathbf{V}, \quad (13. 5)$$

т. е. магнитное поле при переходе к новой системе отсчета можно считать неизменным. Электрическое же поле  $\mathbf{E}'$  имеет только составляющую вдоль магнитного поля. Эта составляющая, как уже говорилось, рассматривается как величина *первого* порядка малости.

Уравнение (1. 2) в движущейся системе отсчета перейдет в

$$\dot{\mathbf{p}}' = e \left( \mathbf{E}' - \frac{m}{e} \dot{\mathbf{w}} \right) + \frac{e}{c} [\mathbf{v}'\mathbf{B}], \quad (13. 6)$$

где  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{p}'$  — скорость и импульс частицы в движущейся системе отсчета. Формально это уравнение имеет такой же вид, что и уравнение (1. 2). Только роль электрического поля в нашей задаче играет вектор  $\mathbf{E}' - \frac{m}{e} \dot{\mathbf{w}}$ , который рассматривается нами как величина *первого* порядка малости. Поэтому в движущейся системе отсчета можно ввести ведущий центр, определив его координаты по формуле, аналогичной формуле (1. 17), а затем сгладить его движение. Сглаженная скорость ведущего центра относительно движущейся системы отсчета может быть найдена из формулы (5. 5), если в ней сделать замену  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{E}' - \frac{m}{e} \dot{\mathbf{w}}$ ;  $v_{\perp}$  на  $v'_{\perp}$ ;  $v_{\parallel}$

на  $v'_{\parallel}$  (последняя величина, разумеется, равна  $v_{\parallel}$ ). Под  $v'_{\perp}$  и  $v'_{\parallel}$  понимаются сглаженные значения величин поперечной и продольной скоростей частицы в *движущейся* системе отсчета. Для перехода к неподвижной системе отсчета к найденной таким образом сглаженной скорости ведущего центра надо добавить скорость  $\mathbf{w}$ . В результате для сглаженной скорости ведущего центра в *неподвижной* системе отсчета получится выражение

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] - \frac{cm}{eB^2} [\dot{\mathbf{w}}\mathbf{B}] + \frac{v'_{\perp} a_{\perp}}{2} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] + \\ + v_{\parallel} a_{\parallel} [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}]. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Оно отличается от выражения (5.5) наличием дополнительного члена  $-\frac{cm}{eB^2} [\dot{\mathbf{w}}\mathbf{B}]$ . Этот член интерпретируется как *дрейф под действием силы инерции*  $-m\dot{\mathbf{w}}$ . При этом под  $\dot{\mathbf{w}}$  здесь понимается *сглаженное* значение соответствующей производной, а именно:

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{R}}\nabla) \mathbf{w}. \quad (13.8)$$

Уравнения для  $\dot{p}_{\parallel} = m\dot{v}_{\parallel}$  и  $\dot{p}_{\perp} = m\dot{v}_{\perp}$  в приближении Боголюбова—Зубарева получаются из уравнений (5.6) и (5.7) такой же заменой, какая применялась выше. В результате получим

$$\dot{p}_{\parallel} = e(\mathbf{E}'\mathbf{h}) - m(\dot{\mathbf{w}}\mathbf{h}) + \frac{1}{2} p'_{\perp} v'_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}; \quad (13.9)$$

$$\dot{p}_{\perp} = -\frac{1}{2} p_{\parallel} v'_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}. \quad (13.10)$$

Уравнение (5.15) переходит в

$$\frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const} \quad (13.11)$$

и показывает, что  $p_{\perp}^2/B$  является *адиабатическим инвариантом*.

Уравнение (5.13) переходит в

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv'^2}{2} \right) = e(\mathbf{E}'\mathbf{v}_{\parallel}) - m(\dot{\mathbf{w}}\mathbf{v}_{\parallel}). \quad (13.12)$$

Физический смысл дополнительного члена  $-m(\dot{\mathbf{w}}\mathbf{v}_{\parallel})$  понятен: в движущейся системе отсчета работа производится не только электрическим полем, но и *силой инерции*  $-m\dot{\mathbf{w}}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
2. Боголюбов Н. Н. и Зубарев Д. Н. «Укр. матем. журн.», 7, 5 (1955).
3. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
4. Hellwig G. Zs. Naturforsch, 10a, 508 (1955).
5. Богуславский С. Пути электронов в электромагнитных полях. М., 1929. См. также сб.: «Избранные труды по физике». М., Физматгиз, 1961.
6. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
7. Брагинский С. И. «Укр. матем. журн.», 8, 119 (1956).
8. Будкер Г. И. В кн.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3.
9. Fein E. Astrophys. Journ., 119, 1 (1954).
10. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
11. Вернов С. Н. и Чудаков А. Е. «Усп. физ. наук», 70, 585 (1960).
12. Ван Аллен Дж. А. «Усп. физ. наук», 70, 715 (1960).
13. Гинзбург В. Л., Левин Л. М., Рабинович М. С., Сивухин Д. В., Четверикова Е. С. Сборник задач по общему курсу физики, ч. 2, изд. 2. М., Физматгиз, 1960 (задачи 848, 849).
14. Морозов А. И. и Соловьев Л. С. «Докл. АН СССР», 128, 506 (1959).
15. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II. М.—Л., ОНТИ, 1936, стр. 344.
16. Крускал М. Адиабатические инварианты. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
17. Бишоп А. С. Проект Шервуд. М., Атомиздат, 1960.
18. Кирхгоф Г. Механика. М., Изд-во АН СССР, 1962, лекция 14-я.

# СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Б. А. Трубников

В работе рассматриваются простейшие кинетические эффекты, обусловленные столкновениями частиц в полностью ионизованном однородном газе. Автор стремился к максимальной простоте и наглядности изложения. Относительно новым с методической точки зрения является систематическое использование специальных потенциальных функций и электростатических аналогий, что упрощает запись многих формул и иногда облегчает получение конечных результатов.

В первой главе подробно рассмотрено движение пробных частиц в плазме. во второй — проделан нестрогий вывод кинетического уравнения и в третьей — проанализированы некоторые простейшие кинетические явления в плазме.

## 1. ПРОБНЫЕ ЧАСТИЦЫ В ПЛАЗМЕ

### § 1. Сила «трения» при рассеянии в поле Кулона

Рассмотрим следующую простейшую задачу, которая в дальнейшем понадобится для вывода кинетического уравнения.

На неподвижный точечный заряд  $e_\alpha$  из бесконечности налетает со скоростью  $u$  однородный плоский поток точечных частиц  $\beta$  с массой  $m$ , зарядом  $e_\beta$  и числом частиц в единице объема  $n_\beta$ . Требуется определить среднюю силу  $F$ , действующую на неподвижный заряд  $e_\alpha$  со стороны налетающих частиц (рис. 1).

Будем считать, что в каждый данный момент времени на заряд  $e_\alpha$  налетает лишь одна частица  $\beta$  из потока. Такое ограничение называется «приближением парных столкновений».

Движение частиц в поле неподвижного кулоновского центра хорошо известно, и мы приведем здесь лишь основные результаты. Вследствие центрального характера сил движение одной частицы всегда можно рассматривать как плоское. Частица при этом движется по гиперболе, и угол рассеяния  $\theta$  связан с прицельным параметром  $\varrho$  (рис. 1) соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\varrho_\perp}{\varrho}, \quad (1.1)$$

где

$$\varrho_\perp = \frac{e_\alpha e_\beta}{m u^2}.$$

Здесь  $\varrho_\perp$  — значение прицельного параметра, при котором частица отклоняется на прямой угол  $\theta = \pi/2$  ( $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ ). Сечение рассеяния выражается известной формулой Резерфорда.

Из соображений симметрии ясно, что искомая сила  $\mathbf{F}$  может быть направлена только вдоль скорости налетающих частиц  $\mathbf{u}$ . Введем систему координат  $x, y, z$ , и ось  $z$  направим вдоль вектора  $\mathbf{u}$  (рис. 1). Поскольку «действие равно противодействию», то сила  $\mathbf{F}$  равна с обратным знаком силе, действующей со стороны

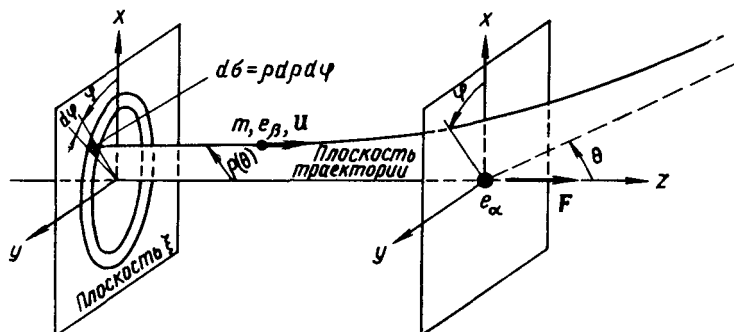


Рис. 1.

неподвижного заряда  $e_\alpha$  на поток налетающих частиц  $\beta$ . Последнюю же силу нетрудно найти из того условия, что она равна изменению в единицу времени суммарного импульса частиц потока. Таким образом

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \sum_{\beta} \mathbf{p}^{\beta} = -\frac{u}{u} m \frac{d}{dt} \left( \sum_{\beta} u_z^{\beta} \right). \quad (1.2)$$

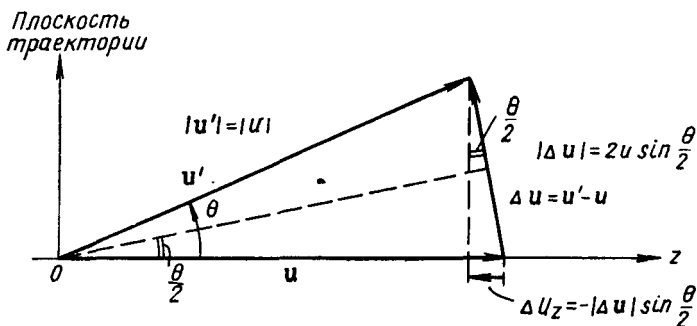


Рис. 2.

Так как столкновение с неподвижным рассеивающим центром носит упругий характер, то скорость частиц  $\beta$  после столкновения изменится лишь по направлению, но не по абсолютной величине.

Как видно из рис. 2, где  $\mathbf{u}'$  означает скорость частицы  $\beta$  после столкновения, изменение  $z$ -й проекции скорости одной такой

частицы будет равно

$$\Delta u_z^\beta = -2u \sin^2 \frac{\theta}{2} = -2u \frac{q_\perp^2}{q_\perp^2 + q^2}. \quad (1.3)$$

Здесь мы использовали связь угла рассеяния  $\theta$  с прицельным параметром  $q$  из формулы (1.1).

Через элементарную площадку  $d\sigma = qdq d\varphi$  плоскости  $\xi$ , перпендикулярной к оси  $z$  (см. рис. 1), за единицу времени проходит число частиц  $\beta$ , равное  $n_\beta u d\sigma$ . Умножая эту величину на  $\Delta p_z^\beta = m\Delta u_z^\beta$  и интегрируя по всей плоскости  $\xi$ , найдем изменение за единицу времени суммарного импульса частиц потока, а следовательно, и силу  $F$ :

$$F = -\frac{u}{u} \int_{\xi} (m\Delta u_z^\beta) (n_\beta u d\sigma) = \frac{u}{u} (m2uq_\perp^2 n_\beta u 2\pi) \int_0^\infty \frac{q dq}{q^2 + q_\perp^2}. \quad (1.4)$$

Входящий сюда интеграл логарифмически расходится при больших прицельных параметрах.

Чтобы получить для силы  $F$  конечное значение, будем считать, что интегрирование в выражении (1.4) распространяется до некоторого конечного  $q_{\text{макс}}$ , относительно которого будем предполагать, что  $q_{\text{макс}} \gg q_\perp$ . Тогда

$$\lambda \equiv \int_0^{q_{\text{макс}}} \frac{q dq}{q_\perp^2 + q^2} = \ln \frac{\sqrt{q_{\text{макс}}^2 + q_\perp^2}}{q_\perp} \cong \ln \left( \frac{q_{\text{макс}}}{q_\perp} \right). \quad (1.5)$$

Подставляя, наконец, в выражения (1.4) и (1.5) значение  $q_\perp = \frac{e\alpha e_\beta}{mu^2}$ , получим для  $F$  выражение

$$F = \lambda \frac{4\pi}{m} e_\alpha^2 e_\beta^2 n_\beta \frac{u}{u^3}, \quad (1.6)$$

где

$$\lambda = \ln \left[ \frac{q_{\text{макс}}}{e\alpha e_\beta / mu^2} \right]. \quad (1.7)$$

## § 2. «Кулоновский логарифм» и роль далеких пролетов

Величина  $\lambda$  называется «кулоновским логарифмом», и его значение определяется выбором  $q_{\text{макс}}$ . В квазинейтральной, полностью ионизованной плазме, состоящей из ионов и электронов,  $q_{\text{макс}}$  обычно полагают равным так называемому дебаевскому радиусу  $D$ , который определяется следующим образом.

Выберем в плазме какую-либо заряженную частицу  $\alpha$  и рассмотрим, как распределяются остальные заряды в поле этой

частицы. Электростатический потенциал  $\varphi$  выбранной частицы вблизи нее должен удовлетворять уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = -4\pi e (Zn_i - n_e). \quad (2.1)$$

Здесь  $Ze$  — заряд ионов;  $n_i$ ,  $n_e$  — плотности ионов и электронов, которые в состоянии термодинамического равновесия в потенциальном поле  $\varphi(r)$  должны изменяться в соответствии с распределением Больцмана:

$$\left. \begin{aligned} n_i &= n_i^0 \exp\left[-\frac{Ze\varphi}{T_i}\right]; \\ n_e &= n_e^0 \exp\left[\frac{e\varphi}{T_e}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(Для общности полагаем, что температуры  $T_i$  и  $T_e$  различны.) Постоянные коэффициенты перед экспонентами мы положили равными средним плотностям  $n_i^0$ ,  $n_e^0$  частиц в плазме, так как вдали от выбранной частицы (где  $\varphi \rightarrow 0$ ) плотности  $n_i$  и  $n_e$  должны переходить в средние. Разлагая экспоненты (2.2) в ряд и подставляя их в уравнение (2.1), с учетом квазинейтральности плазмы ( $Zn_i^0 = n_e^0$ ) получим для  $\varphi(r)$  уравнение

$$\frac{1}{r} (r\varphi)'' = -4\pi e \left[ Zn_i^0 \left(1 - \frac{Ze\varphi}{T_i}\right) - n_e^0 \left(1 + \frac{e\varphi}{T_e}\right) \right] = \frac{\varphi}{D^2}, \quad (2.3)$$

где

$$D = \sqrt{\frac{T_e T_i / 4\pi |e_e e_i|}{n_i^0 T_i + n_e^0 T_e}}. \quad (2.4)$$

Величина  $D$  имеет размерность длины и называется «радиусом Дебая — Хюккеля». Решением уравнения (2.3) является функция

$$\varphi(r) = \frac{e_a}{r} \exp\left(-\frac{r}{D}\right), \quad (2.5)$$

которая на малых расстояниях ( $r < D$ ) переходит в чисто кулоновский потенциал рассматриваемой нами частицы, а на расстояниях больше чем  $D$  — экспоненциально мала. Таким образом, в реальных условиях квазинейтральной плазмы, близкой к состоянию термодинамического равновесия, кулоновское поле отдельных зарядов обрывается (экранируется) начиная с расстояний порядка  $D$ , и практически можно считать, что при столкновениях с прицельными параметрами, большими  $D$ , частицы не взаимодействуют и не рассеиваются друг на друге. Поэтому дебаевский радиус  $D$  и подставляют в «кулоновский логарифм»  $\lambda$  в качестве  $Q_{\text{макс}}$ . Следует подчеркнуть, однако, что дебаевская экранировка устанавливается не мгновенно. Колебания объемного заряда в плазме характеризуются «плазменной частотой»  $\omega_0 = \sqrt{4\pi n e^2 / m_e}$ , поэтому

время установления экранировки по порядку величины равно

$$\tau_{\text{экр}} \sim \frac{1}{\omega_0} \sim \frac{D}{v_{T,e}} \quad (2.6)$$

( $v_{T,e} \sim \sqrt{T_e/m_e}$  — тепловая скорость электронов). В настоящем разделе всюду предполагается, что дебаевская экранировка успевает устанавливаться, и поэтому наше рассмотрение применимо лишь к достаточно медленным процессам, характерные времена протекания которых больше величины  $\tau_{\text{экр}}$ , т. е. больше периода плазменных колебаний.

Если состояние плазмы не является равновесным, то операция обрезания  $\lambda$  становится несколько неопределенной и значение  $\lambda$  может быть указано лишь с точностью до множителя порядка единицы под знаком логарифма. В этих условиях нет большого смысла подставлять в  $\lambda$  точное значение и для параметра  $q_{\perp}$ . Учитывая, что логарифм вообще является медленно меняющейся функцией, обычно берут некоторое среднее значение  $q_{\perp}$ , заменяя  $mu^2$  на  $\frac{3}{2}(T_{\alpha} + T_{\beta})$ . Таблица значений  $\lambda$  для электронно-протонной плазмы с одинаковыми температурами  $T_i$  и  $T_e$  приведена, например, в книге Л. Спитцера [2].

Рассмотрим численный пример. Пусть  $T_i = T_e = 1 \text{ кэВ}$  ( $\sim 10^7 \text{ °K}$ );  $n_e = n_i = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ;  $Z = 1$ .

Тогда

$$D = \sqrt{\frac{T}{8\pi n e^2}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

$$q_{\perp} = \frac{e^2}{3T} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ см};$$

соответственно

$$\frac{D}{q_{\perp}} = 10^7;$$

$$\lambda = \ln \frac{D}{q_{\perp}} \cong 16.$$

Это типичные цифры для проблемы осуществления управляемой термоядерной реакции. Из них мы можем сделать следующий важнейший вывод принципиального значения. При далеких столкновениях ( $q \gg q_{\perp}$ ) частицы рассеиваются на малые углы [см. формулу (1.1)]:

$$\theta = 2q_{\perp}/q \ll 1.$$

Условно можно сказать, что значение  $q_{\text{мин}} = 2q_{\perp}$  разделяет близкие и далекие столкновения. Исходя из этого, получаем:

$$\lambda = \int_0^{q_{\text{макс}}} \frac{q dq}{q^2 + q_{\perp}^2} = \lambda_{\text{б}} + \lambda_{\text{д}},$$



где

$$\lambda_6 = \int_0^{q_{\text{мин}}=2q_{\perp}} \frac{qdq}{q^2 + q_{\perp}^2} = \ln \sqrt{5} \sim 1;$$

$$\lambda_d = \int_{q_{\text{мин}}}^{q_{\text{макс}}} \frac{qdq}{q^2 + q_{\perp}^2} \approx \ln \frac{q_{\text{макс}}}{q_{\text{мин}}} \gg 1. \quad (2.7)$$

Возвращаясь к выражению (1.6) для силы  $F$ , действующей на заряженную частицу  $\alpha$  со стороны налетающих на нее частиц  $\beta$ , мы видим, что ее можно разбить на две части:

$$F = (\lambda_6 + \lambda_d) \text{const} = F_{6.п} + F_{d.п}, \quad (2.8)$$

где  $F_{6.п}$  — сила, обусловленная близкими пролетами, а  $F_{d.п}$  — сила, обусловленная далекими пролетами, причем в соответствии с выражениями (2.7) при  $\lambda \gg 1$

$$\frac{F_{d.п}}{F_{6.п}} \approx \frac{\lambda_d}{\lambda_6} \approx \lambda \gg 1. \quad (2.9)$$

Таким образом, интегрально вклад от далеких столкновений в силовое взаимодействие заряженных частиц плазмы оказывается примерно в  $\lambda$  раз больше, чем от близких. Мы можем поэтому при  $\lambda \gg 1$  приближенно с логарифмической точностью вообще пренебречь влиянием близких столкновений. Эта важная особенность кулоновских столкновений является следствием большого радиуса действия кулоновских сил, убывающих с расстоянием пропорционально  $r^{-2}$ . При более быстром спадании сил взаимодействия между частицами далекие столкновения не играют такой преобладающей роли.

### § 3. Средняя сила, действующая на частицу в плазме

Рассмотрим теперь задачу, более близкую к действительности. Найдем среднюю силу, действующую на заряженную частицу  $\alpha$ , движущуюся со скоростью  $v$  через среду, состоящую из заряженных частиц  $\beta$ , распределение которых по скоростям описывается произвольной функцией  $f_{\beta}(v')$  (так что  $\int f_{\beta}(v') dv' = n_{\beta}$  — плотность частиц  $\beta$ ). Если вновь ограничиться учетом только парных столкновений, то искомая сила  $F_{\alpha}$  будет складываться из сил, испытываемых частицей  $\alpha$  в результате ее столкновений с отдельными частицами  $\beta$ . Выделим из всей совокупности частиц  $\beta$  элементарный поток частиц, движущихся со скоростью  $v'$ . Плотность частиц в этом потоке равна

$$dn_{\beta}(v') = f_{\beta}(v') dv' \text{ [см}^{-3}\text{]}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим столкновение «пробной» частицы  $\alpha$  с одной из частиц  $\beta$  выделенного потока. Движение обеих частиц описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} &= e_{\alpha} e_{\beta} \frac{\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|^3}; \\ m_{\beta} \ddot{\mathbf{r}}_{\beta} &= e_{\alpha} e_{\beta} \frac{\mathbf{r}_{\beta} - \mathbf{r}_{\alpha}}{|\mathbf{r}_{\beta} - \mathbf{r}_{\alpha}|^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Как известно из механики, движение двух взаимодействующих частиц удобно описывать, если ввести координаты центра инерции и относительное расстояние между частицами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} + m_{\beta} \mathbf{r}_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Старые координаты частиц будут выражаться через введенные координаты по формулам

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\alpha} &= \mathbf{R} + \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{r}; \\ \mathbf{r}_{\beta} &= \mathbf{R} - \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{r}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Подставив эти выражения в уравнения (3.2), получим уравнение движения центра инерции  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ , откуда

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \text{const}, \quad (3.5)$$

что соответствует равномерному поступательному движению, и уравнение относительного движения

$$m_{\alpha\beta} \ddot{\mathbf{r}} = e_{\alpha} e_{\beta} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.6)$$

где

$$m_{\alpha\beta} = \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}},$$

описывающее движение фиктивной частицы с «приведенной» массой  $m_{\alpha\beta}$  в поле неподвижного кулоновского центра.

Последнее обстоятельство позволяет использовать результат решенной ранее задачи о силе, действующей на неподвижный рассеивающий центр.

Умножив первое уравнение (3.4) на  $m_{\alpha}$  и продифференцировав два раза по времени, с учетом равенства (3.5) получим

$$m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} = m_{\alpha} \ddot{\mathbf{R}} + m_{\alpha\beta} \ddot{\mathbf{r}} = m_{\alpha\beta} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.7)$$

Таким образом, сила, действующая на частицу  $\alpha$  в единичном акте столкновения, равна силе, действующей на частицу с приве-

денной массой, которая в свою очередь равна с обратным знаком силе, действующей на неподвижный центр. Частицы приведенной массы налетают на этот воображаемый неподвижный центр со скоростью

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{r}}_{\beta} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'. \quad (3.8)$$

Поэтому, сделав в формуле (1.6) замену

$$m \rightarrow m_{\alpha\beta}, \quad n_{\beta} \rightarrow dn_{\beta}(\mathbf{v}') \quad \text{и} \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{v}', \quad (3.9)$$

мы найдем силу, действующую на неподвижный центр со стороны выделенного нами элементарного потока частиц со скоростью  $\mathbf{v}'$ :

$$d\mathbf{F} = \lambda \frac{4\pi}{m_{\alpha\beta}} e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_{\beta}(\mathbf{v}') dV'. \quad (3.10)$$

Интегрируя по всем потокам  $dn_{\beta}$  и поставив впереди знак минус, найдем искомую нами среднюю силу, действующую на частицу  $\alpha$ , движущуюся через среду из  $\beta$  частиц со скоростью  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{v}) = - \int d\mathbf{F} = -\lambda \frac{4\pi}{m_{\alpha\beta}} e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 \int \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} f_{\beta}(\mathbf{v}') dV'. \quad (3.11)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем подразумевать под  $\lambda$  приближенное среднее значение

$$\lambda = \ln \frac{D}{\langle \varrho_{\perp} \rangle}, \quad (3.12)$$

где

$$\langle \varrho_{\perp} \rangle = \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{m_{\alpha\beta} |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \approx \frac{e_{\alpha} e_{\beta}}{\frac{3}{2} (T_{\alpha} + T_{\beta})}$$

[ $D$  — дебаевский радиус, см. формулу (2.4)].

Любопытно отметить, что интеграл по пространству скоростей имеет в точности такой же вид, каким выражалось бы в электростатике электрическое поле системы зарядов, непрерывно распределенных в обычном координатном пространстве с плотностью  $\varrho(\mathbf{r}) = f_{\beta}(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \varrho(\mathbf{r}') dV' = -\text{grad}_r \varphi_{\beta}(\mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Здесь потенциал  $\varphi_{\beta}(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению Пуассона  $\Delta_r \varphi_{\beta} = -4\pi\varrho$  и равен

$$\varphi_{\beta}(\mathbf{r}) = \int \frac{\varrho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.14)$$

Имея в виду эту полезную аналогию, введем формально «потенциальную» функцию  $\varphi_{\beta}(\mathbf{v})$ , такую, что

$$\left. \begin{aligned} \Delta_v \varphi_{\beta} &= f_{\beta}, \\ \varphi_{\beta}(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f_{\beta}(\mathbf{v}') dV'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

т. е. аналогичную электростатическому потенциалу  $\varphi_\alpha$  (множитель —  $1/4\pi$ , как и в рационализованной системе электромагнитных единиц, дописан из соображений удобства). Сила  $F_\alpha(\mathbf{v})$  из равенства (3. 11), действующая на пробную частицу  $\alpha$ , будет выражена через  $\varphi_\beta$  по формуле

$$F_\alpha(\mathbf{v}) = -\lambda \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\alpha m_\beta} (4\pi e_\alpha e_\beta)^2 \nabla_0 \varphi_\beta(\mathbf{v}) \quad (3. 16)$$

и во многих случаях может быть написана непосредственно по аналогии с электростатикой. Различные применения этой формулы рассмотрены в гл. III.

#### § 4. Пробные частицы в плазме

Пользуясь найденной в § 3 силой, из уравнения движения

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F_\alpha(\mathbf{v}) \quad (4. 1)$$

можно определить, как будет в среднем изменяться скорость частицы с течением времени. Однако полученное уравнение отнюдь не описывает с достаточной полнотой всей картины движения пробной частицы в плазме.

Это движение удобно рассматривать, введя так называемое «пространство скоростей», по трем осям которого откладываются компоненты скорости  $v_x, v_y, v_z$  (рис. 3). Если пробная частица  $\alpha$  обладает в некоторый момент времени скоростью  $\mathbf{v}$ , то будем говорить, что эта частица находится в точке  $\mathbf{v}$  пространства скоростей.

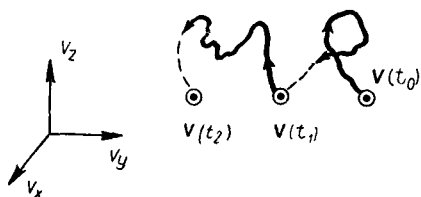


Рис. 3.

При изменении скорости частицы ее положение в пространстве скоростей будет соответственно меняться — скачком или непрерывно. В общем случае эти перемещения будут весьма сложными и запутанными (рис. 3).

Мы, конечно, не в состоянии проследить за движением одной частицы, в котором к тому же трудно было бы усмотреть какие-либо общие закономерности, и поэтому должны обратиться к так называемому «статистическому рассмотрению».

Для этого мы предположим, что в плазме имеется не одна, а большое число  $N$  (в пределе бесконечное) пробных частиц  $\alpha$ , которые в момент времени  $t_0 = 0$  обладали одинаковой скоростью  $\mathbf{v}_0$ . Такая совокупность многих абсолютно одинаковых объектов называется в статистике «ансамблем».

Введенный нами «ансамбль» пробных частиц эквивалентен плоскому потоку из  $N$  частиц  $\alpha$  в бесконечной однородной среде

полевых частиц  $\beta$ . В момент  $t_0 = 0$  все  $N$  пробных частиц потока были сосредоточены в точке  $\mathbf{v}_0$  пространства скоростей. Для наглядности их можно мысленно представить себе в виде облака сферически-симметричной формы, весьма малых размеров (а следовательно высокой плотности), расположенного в точке  $\mathbf{v}_0$ . В последующие моменты времени это облако будет расплываться, изменяя свою форму и размеры. Качественно такое поведение облака пробных частиц в пространстве скоростей изображено на рис. 4.

Выясним, какие величины могут быть пригодны для полного описания этого процесса.

Положение облака в некоторый момент времени естественно охарактеризовать координатами его «центра тяжести»:

$$\overline{v_i}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N v_i^{(\nu)}(t);$$

$$i = x, y, z, \quad (4.2)$$

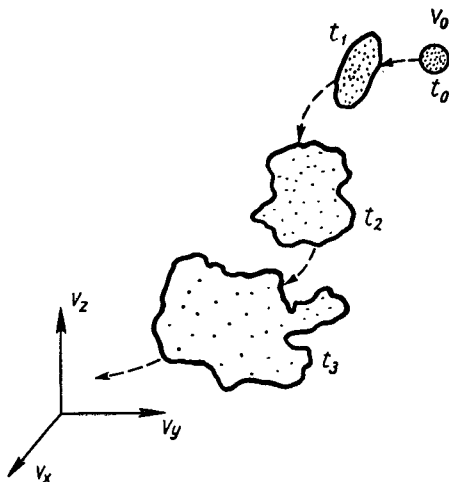


Рис. 4.

где суммирование производится по всем  $N$  частицам облака. Эта величина, таким образом, есть просто средняя скорость частиц облака.

Соответственно этому «скорость» перемещения облака как целого будет определяться значением производной  $\frac{d}{dt} \overline{v_i}(t)$ .

Теперь мы должны выбрать величину, которая характеризовала бы размеры и форму облака, т. е. величину его «размазанности» в разных направлениях. В одномерном случае, как известно, для характеристики «размазанности» некоторой величины  $x$  вводят так называемое «среднее квадратичное отклонение»

$$(\overline{\Delta x})^2 = \overline{(x - \overline{x})^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2. \quad (4.3)$$

Непосредственным обобщением этой величины в нашем пространственном случае должен, очевидно, являться симметричный тензор II ранга:

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_j} = \overline{(v_i - \overline{v}_i)(v_j - \overline{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \overline{v}_i \overline{v}_j. \quad (4.4)$$

Соответственно «скорость» изменения размеров и формы облака будет определяться производной этого тензора  $\frac{d}{dt} \overline{\Delta v_i \Delta v_j}$ .

Обобщая две рассмотренные величины, характеризующие состояние облака, мы можем предположить, что для полного описания его состояния, т. е. распределения пробных частиц по пространству скоростей, необходимо задать бесконечный набор тензорных величин

$$\overline{v_i}, \overline{v_i v_j}, \overline{v_i v_j v_k}, \overline{v_i v_j v_k v_l}, \dots \quad (4.5)$$

или связанных с ними соотношениями типа формул (4.4) тензоров

$$\overline{v_i}, \overline{\Delta v_i \Delta v_j}, \overline{\Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k}, \dots \quad (4.6)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по ансамблю пробных частиц в скоростном пространстве, т. е. для любой функции  $\omega(\mathbf{v})$ , зависящей от скорости  $\mathbf{v}$ , операцию

$$\overline{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{v}=1}^N \omega(\mathbf{v}^{(v)}). \quad (4.7)$$

Величины типа тензоров (4.5) или (4.6), определенные таким способом, называются «моментами» и часто применяются в физике для описания различных распределений. Например, известное в электростатике разложение потенциала по мультиполям (диполь, квадруполь, октополь и т. д.) является не чем иным, как применением «метода моментов» для описания распределения системы электрических зарядов по пространству координат. Исходя из этой аналогии, мы вправе заключить, что подобно тому, как для полного описания некоторой системы распределенных в пространстве зарядов достаточно указать, чему равны все ее моменты (дипольный, квадрупольный и т. д., включая моменты бесконечно высокого порядка), так и в нашем случае распределение по пространству скоростей будет полностью описано, если известны все его моменты.

Следовательно, для того чтобы полностью охарактеризовать процесс расплывания облака пробных частиц, необходимо, чтобы были известны скорости изменения всех моментов во времени:

$$\frac{d}{dt} \overline{v_i}, \frac{d}{dt} \overline{\Delta v_i \Delta v_j}, \frac{d}{dt} \overline{\Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k} \text{ и т. д.} \quad (4.8)$$

Эти производные мы вычислим для начального момента времени  $t_0 = 0$ , когда все пробные частицы облака находятся в точке  $\mathbf{v}_0$  пространства скоростей.

## § 5. Скорость изменения моментов

Заметим прежде всего, что первая производная  $\frac{d}{dt} \overline{v_i}$  по смыслу есть среднее ускорение пробной частицы  $\alpha$ , которое связано со средней силой, действующей на эту частицу в результате ее столкновений с частицами среды. Эту силу мы вычисляли

ранее, поэтому первая величина в последовательности (4. 8) нам уже известна. Однако для большей ясности будем проводить вычисления параллельно для трех выписанных в формуле (4. 8) производных моментов I, II и III порядков.

Введем условное обозначение  $\alpha/\beta$ , указывающее, что данная величина относится к процессу рассеяния пробной частицы  $\alpha$  в среде из «полевых» частиц  $\beta$ . Поскольку производная по времени от некоторой величины есть изменение ее за единичный интервал времени, мы обозначим величины (4. 8) более удобными символами

$$\langle v_i \rangle^{\alpha/\beta}, \quad \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta}, \quad \langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} \text{ и т. д.,} \quad (5. 1)$$

рассматривая их как изменение в единицу времени соответствующих моментов. Дальнейшие вычисления аналогичны тем, которые были проделаны в § 1 и 3 при определении силы, действующей на пробную частицу  $\alpha$ .

Совокупность полевых частиц  $\beta$ , как и в формуле (3. 1), представим в виде наложения элементарных плоских потоков. Пространственная плотность одного такого потока, в котором частицы движутся со скоростью  $\mathbf{v}'$ , равна

$$dn_\beta = dn_\beta(\mathbf{v}') = f_\beta(\mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad \text{см}^{-3}. \quad (5. 2)$$

Рассмотрим столкновение пробной частицы  $\alpha$ , обладающей скоростью  $\mathbf{v}$ , с одной из частиц  $\beta$  этого потока и введем координаты центра инерции  $\mathbf{R}$  и относительное  $\mathbf{r}$  по формулам (3. 3). Пользуясь первой формулой (3. 4), изменение скорости частицы  $\alpha$  в результате столкновения можно выразить через изменение скорости фиктивной частицы с приведенной массой

$$\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{u},$$

откуда

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \Delta \mathbf{u}, \quad (5. 3)$$

поскольку скорость центра инерции  $\dot{\mathbf{R}}$  не меняется при столкновении. Таким образом, мы вновь свели задачу к рассеянию потока частиц с приведенной массой на неподвижном центре.

В момент  $t = 0$ , для которого мы будем вычислять производные (5. 1) всех моментов, очевидно,  $\bar{v}_i|_{t=0} = v_i^0$ . Нетрудно видеть, что операция суммирования при усреднении по пробным частицам облака-ансамбля [формулы (4. 2) и (4. 7)] сводится в этих условиях к суммированию по всем частицам потока, налетающего на неподвижный рассеивающий центр. Через площадку  $d\sigma = qd\varrho d\varphi$  плоскости  $\xi$  (см. рис. 1) за единицу времени проходит число частиц, определяемое плотностью выделенного потока и равное

$$dn_\beta(\mathbf{v}') |\mathbf{u}| d\sigma = f_\beta(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' u d\sigma. \quad (5. 4)$$

Умножая это число на компоненты вектора  $\Delta v_\alpha = \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \Delta u$  и интегрируя по всей плоскости  $\xi$ , как это делается в формуле (1. 4), а затем по всем элементарным потокам как в формуле (3. 11), найдем

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \quad & \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} = \int f_\beta(\mathbf{v}') \omega_i d\mathbf{v}', \\ & \omega_i = \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \int_{\xi} \Delta u_i u d\sigma; \\ \text{где} \quad & \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta} = \int f_\beta(\mathbf{v}') \omega_{ij} d\mathbf{v}', \\ & \omega_{ij} = \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^2 \int_{\xi} \Delta u_i \Delta u_j u d\sigma; \\ \text{где} \quad & \langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = \int f_\beta(\mathbf{v}') \omega_{ijk} d\mathbf{v}', \\ & \omega_{ijk} = \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^3 \int_{\xi} \Delta u_i \Delta u_j \Delta u_k u d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5. 5)$$

Аналогично вычисляются изменения в единицу времени и более высоких моментов. Величины  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\omega_{ijk}$  и т. д. являются тензорами соответствующих рангов. Единственный вектор, от которого они могут зависеть, это вектор относительной скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ , и поэтому из соображений тензорной размерности можем написать

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \frac{u_i}{u} A; \quad \omega_{ij} = \delta_{ij} B + \frac{u_i u_j}{u^2} C; \\ \omega_{ijk} &= \left( \frac{u_i}{u} \delta_{jk} + \frac{u_j}{u} \delta_{ik} + \frac{u_k}{u} \delta_{jl} \right) D + \frac{u_i u_j u_k}{u^3} E. \end{aligned} \right\} \quad (5. 6)$$

Других комбинаций нужной тензорной размерности из компонент вектора  $\mathbf{u}$  и каких-либо единичных тензоров составить нельзя. Величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  являются скалярами, и их удобно вычислять в системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{u}$ , как это изображено на рис. 1. В этой системе, как видно из рис. 2,

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_x &= u \sin \theta \cos \varphi; \quad \Delta u_y = u \sin \theta \sin \varphi; \\ \Delta u_z &= -u (1 - \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (5. 7)$$

Применяя эти общие формулы к рассматриваемому нами случаю кулоновского взаимодействия, для которого [см. формулу (1. 1)]

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{e_\perp}{e}, \quad (5. 8)$$

где

$$e_\perp = \frac{e_\alpha e_\beta}{m_{\alpha\beta} u^2},$$



получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_x &= 2u \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \varphi = 2u \frac{q q_{\perp}}{q^2 + q_{\perp}^2} \cos \varphi; \\ \Delta u_y &= 2u \frac{q q_{\perp}}{q^2 + q_{\perp}^2} \sin \varphi; \quad \Delta u_z = -2u \frac{q_{\perp}^2}{q^2 + q_{\perp}^2}. \end{aligned} \right\} (5.9)$$

В рассматриваемой системе координат вектор  $\omega_i$  имеет лишь одну  $z$ -ю составляющую, которая равна  $A$ . Из формул (5.5), (5.6), и (5.9) находим

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \int_{\xi} \Delta u_z u d\sigma = \\ &= -\frac{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}}{4\pi u^2} \left( \frac{4\pi e_{\alpha} e_{\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int_0^{q_{\text{макс}}} \frac{q dq}{q^2 + q_{\perp}^2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Стоящий здесь расходящийся интеграл мы условились обрезать на верхнем пределе  $q_{\text{макс}} = D$  и обозначать буквой  $\lambda$  (см. § 1 и 2).

Тензор  $\omega_{ij}$  в нашей системе координат будет диагонален [см. формулы (5.5) и (5.6)]:

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B + C \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} B &= \omega_{xx} = \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int (\Delta u_x)^2 u d\sigma; \\ B + C &= \omega_{zz} = \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int (\Delta u_z)^2 u d\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\Delta u_i$  из формулы (5.9), найдем

$$\begin{aligned} B &= \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int_{\xi} \left( 2u \frac{q q_{\perp}}{q^2 + q_{\perp}^2} \cos \varphi \right)^2 u q d\varphi d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi u} \left( \frac{4\pi e_{\alpha} e_{\beta}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int_0^{q_{\text{макс}}} \frac{q^3 dq}{(q^2 + q_{\perp}^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь интеграл также логарифмически расходится и лишь на величину порядка единицы отличается от интеграла в выражении (5.10), который мы условились обозначать буквой  $\lambda$ :

$$\int_0^{q_{\text{макс}}} \frac{q^3 dq}{(q^2 + q_{\perp}^2)^2} = -\frac{1}{2} + \int_0^{q_{\text{макс}}} \frac{q dq}{q^2 + q_{\perp}^2} = \lambda - \frac{1}{2}. \quad (5.13)$$

Поскольку величина  $\lambda$  определена с точностью до слагаемого порядка единицы, то различием этих двух интегралов можно пренебречь.

Вычисляя далее интеграл для  $B + C = \omega_{zz}$ , найдем, что он не расходится, и потому оказывается в  $\lambda$  раз меньше расходящегося  $\omega_{xx}$ . При  $\lambda \gg 1$  можно  $\omega_{zz}$  приближенно считать нулем. Учитывая сделанные выше оговорки, окончательно получаем

$$\omega_i = \frac{u_i}{u} A = - \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right) L^{\alpha/\beta} \frac{u_i}{4\pi u^3}; \quad (5.14)$$

и для тензора  $\omega_{ij}$  (полагая  $\omega_{zz} = B + C = 0$ )

$$\omega_{ij} = \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{u^2} \right) B = L^{\alpha/\beta} \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{u^2} \right) \frac{1}{4\pi u}, \quad (5.15)$$

где для краткости мы обозначили  $L^{\alpha/\beta} = \lambda \left( \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{m_\alpha} \right)^2$ .

## § 6. Особенности кулоновского взаимодействия. Введение потенциальных функций $\psi$ и $\varphi$

Если бы мы стали вычислять далее тензор третьего ( $\omega_{ijk}$ ) и более высоких порядков, то обнаружили бы, что все они содержат интегралы, которые не расходятся, а напротив, сходятся на расстояниях порядка  $\varrho_\perp$ , так как  $\varrho_\perp$  — единственный параметр в интегралах этого типа. Их величина, следовательно, обусловлена близкими столкновениями в отличие от логарифмически расходящихся интегралов в  $\omega_i$  и  $\omega_{ij}$ , основной вклад в которые вносят далекие столкновения. Поскольку процедура обрезания расходящихся интегралов вводится нами из дополнительных соображений, то формально мы можем считать сходящиеся интегралы пренебрежимо малыми по сравнению с расходящимися. Фактически с учетом действительного обрезания на  $\varrho_{\max} = D$  сходящиеся интегралы меньше логарифмически расходящихся в  $\lambda$  раз.

Мы видим, таким образом, что в последовательности величин  $\langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta}$ ,  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta}$ ,  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}$  и т. д., которые в совокупности полностью описывают процесс распыления облака пробных частиц в пространстве скоростей, для случая кулоновского взаимодействия частиц наибольшую роль играют первая и вторая величины:

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} &= - \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right) L^{\alpha/\beta} \frac{1}{4\pi} \int \frac{u_i}{u^3} f_\beta(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'; \\ & \quad (\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'); \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta} &= L^{\alpha/\beta} \frac{1}{4\pi} \int \left( \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^3} \right) f_\beta(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'. \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Эти формулы мы получили, подставив  $\omega_i$  и  $\omega_{ij}$  из выражений (5.14) и (5.15) в формулы (5.5). Остальные «скорости изменения моментов» — третья  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}$  и более высокие — ока-

зываются в  $\lambda$  раз меньше, и при  $\lambda \gg 1$  ими можно пренебрегать\*.

Это обстоятельство является важнейшей особенностью кулоновского взаимодействия, отличающей его от всех других взаимодействий, спадающих более быстро. Именно возможность пренебрежения третьим  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle$  и более высокими моментами позволяет рассматривать движение частиц, взаимодействующих по закону Кулона, как процесс диффузии в скоростном пространстве, что будет использовано в следующей главе для вывода кинетического уравнения. Укажем также, что приближение, когда ограничиваются первым  $\langle \Delta v_i \rangle$  и вторым  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$  моментами, пренебрегая более высокими, называется «приближением Фоккера — Планка». В книге Л. Спитцера [2] величины  $\langle \Delta v_i \rangle$  и  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$  называются «диффузионными коэффициентами».

В заключение настоящего параграфа придадим выражениям (6. 1) более удобный вид.

Используя соотношения

$$\text{и } \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 |u|}{\partial v_i \partial v_j} &= \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^3} \\ \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{1}{u} &= -\frac{u_i}{u^3}, \end{aligned} \right\} \quad (6. 2)$$

где  $u = v - v'$ , выражения (6. 1) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} &= \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right) L^{\alpha/\beta} \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_\beta(v')}{|v - v'|} dv' \right); \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta} &= L^{\alpha/\beta} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left( \frac{1}{4\pi} \int |v - v'| f_\beta(v') dv' \right). \end{aligned} \right\} \quad (6. 3)$$

Отсюда видно, что целесообразно ввести две «потенциальные функции», относящиеся к распределению частиц  $\beta$ \*\*:

\* Моменты разных порядков, например второго  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$  и третьего  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle$ , имеют различную размерность, поэтому сравнивать их величину можно лишь в безразмерных единицах, например измеряя скорость в единицах  $\sqrt{T/m}$ .

\*\* Потенциальные функции подобного типа были введены в 1957 г. в статье Розенблюта и др. [3] и независимо, но несколько позже, автором [4]. Функции  $g$  и  $h$ , введенные Розенблютом и др. [3], выражаются через наши соотношениями

$$g(v) = -8\pi \sum_{\beta} \psi_{\beta}(v) \quad \text{и} \quad h_{\alpha}(v) = -4\pi \sum_{\beta} \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right) \varphi_{\beta}(v)$$

и фактически менее удобны, чем наши «индивидуальные»  $\psi_{\beta}$  и  $\varphi_{\beta}$ , относящиеся к частицам одного сорта  $\beta$ .

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\beta}(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_{\beta}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \\ \varphi_{\beta} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f_{\beta}(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}' \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

и

Коэффициенты здесь выбраны с таким расчетом, чтобы между функциями  $\psi_{\beta}$  и  $\varphi_{\beta}$  и функцией распределения  $f_{\beta}$  существовали наиболее простые соотношения \*

$$\Delta\psi_{\beta} = \varphi_{\beta} \text{ и } \Delta\Delta\psi_{\beta} = \Delta\varphi_{\beta} = f_{\beta}, \quad (6.5)$$

в справедливости которых легко убедиться на основании формул

$$\Delta_v |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| = \frac{2}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}; \quad \Delta_v \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \quad (6.6)$$

Вводя «потенциальные функции»  $\psi_{\beta}$  и  $\varphi_{\beta}$  в формулы (6.3), окончательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} &= -\left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}\right) L^{\alpha/\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial v_i}; \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta} &= -2L^{\alpha/\beta} \frac{\partial^2 \psi_{\beta}}{\partial v_i \partial v_j}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Кроме того, на основании соотношений (6.5) можно заключить, что

$$\langle \Delta v_k \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = -2L^{\alpha/\beta} \Delta_v \psi_{\beta} = -2L^{\alpha/\beta} \varphi_{\beta}, \quad (6.8)$$

где в соответствии с принятым в тензорных вычислениях правилом по дважды встречающемуся индексу  $k$  подразумевается суммирование по  $k = x, y, z$ .

Из выражений (6.8) и (6.7) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} &= \frac{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} \langle \Delta v_k \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = \\ &= \frac{1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}}{2} \frac{\partial}{\partial v_k} \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Таким образом, вспоминая физический смысл величин  $\langle \Delta v_i \rangle$  и  $\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle$ , можем сказать, что скорость движения в скоростном пространстве облака пробных частиц как целого связана со скоростью его расплывания по всем направлениям.

Укажем в заключение, что полученные формулы позволяют определить среднюю скорость потери импульса пробной частицы  $\alpha$ , движущейся в среде частиц  $\beta$ :

$$\frac{dp_{\alpha}}{dt} = m_{\alpha} \langle \Delta \mathbf{v} \rangle^{\alpha/\beta} = -m_{\alpha} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}\right) L^{\alpha/\beta} \nabla_v \varphi_{\beta} \quad (6.10)$$

\* Здесь  $\Delta$  означает оператор Лапласа по скорости, в то время как в формулах  $\langle \Delta v_i \rangle$  и  $\langle \Delta v_i \Delta v_i \rangle$  значок  $\Delta$  означает приращение:  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ .

и скорость потери энергии:

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha}}{dt} = \frac{m_{\alpha}}{2} \frac{d}{dt} \overline{v_i v_i} = m_{\alpha} \left( \frac{1}{2} \langle \Delta v_i \Delta v_i \rangle + v_i \langle \Delta v_i \rangle \right). \quad (6.11)$$

Здесь использовано соотношение

$$\overline{\Delta v_i \Delta v_i} = \overline{v_i v_i} - \overline{v_i} \overline{v_i}. \quad (6.12)$$

Подставляя в формулу (6.11) выражения (6.7) и (6.8), получаем

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha}}{dt} = -m_{\alpha} L^{\alpha/\beta} \left[ \Phi_{\beta} + \left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right) (\mathbf{v} \nabla \Phi_{\beta}) \right]. \quad (6.13)$$

Применение формул (6.10) и (6.13) рассматривается в гл. III.

## § 7. Использование сечений рассеяния

В кинетической теории газов столкновения частиц удобно описывать с помощью так называемых «эффективных сечений». В случае короткодействующих межчастичных сил, например для нейтральных молекул, сечение упругого рассеяния примерно равно

$$\sigma = \pi d^2, \text{ см}^2, \quad (7.1)$$

где  $d$  — эффективный диаметр частицы-молекулы.

Сечение имеет размерность площади и иногда называется также «эффективным поперечником рассеяния». Величина

$$\sqrt{\sigma} = f, \text{ см}, \quad (7.2)$$

имеет размерность длины и называется «амплитудой рассеяния». Какая-либо молекула, пройдя в газе путь  $\Delta x$ , должна столкнуться со всеми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра с высотой  $\Delta x$  и площадью основания  $\pi d^2 = \sigma$ . Если плотность газа равна  $n$ , то таких молекул будет  $\Delta x n \sigma$ . «Длиной свободного пробега»  $l$  называется такой отрезок  $\Delta x$ , на котором частица-молекула испытывает одно столкновение:

$$l n \sigma = 1,$$

откуда

$$l = \frac{1}{n \sigma}. \quad (7.3)$$

Время между двумя последовательными столкновениями будет равно

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{1}{n v \sigma}, \quad (7.4)$$

где  $v$  — скорость (обычно тепловая) рассматриваемых частиц.

Введенные величины — сечение, длина пробега и время  $\tau$  (последнее применительно к плазме обычно называют «временем

релаксации») — являются удобными характеристиками различных процессов, происходящих в газе. Зная их, можно, в частности, оценить коэффициенты диффузии, вязкости и теплопроводности, которые определяют соответственно плотность потока частиц, потока импульса и потока энергии, обусловленную столкновениями в газе:

$$\left. \begin{aligned} i &= -D \frac{dn}{dx}; \\ \pi_{xy} &= -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}; \\ q &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Эти уравнения принято называть «уравнениями переноса», а коэффициенты  $D$ ,  $\eta$  и  $\kappa$  — «коэффициентами переноса». Элементарная кинетическая теория газов (см. также работу С. И. Брагинского в настоящем выпуске) показывает, что эти коэффициенты приближенно можно оценить по формулам

$$\left. \begin{aligned} D &\cong lv = \frac{v}{n\sigma}; \\ \eta &\cong mnD = \frac{mv}{\sigma}; \\ \kappa &\cong nD = \frac{v}{\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

где  $v = \sqrt{T/m}$  — тепловая скорость молекул.

При более строгом подходе оказывается, что для детальной характеристики различных процессов следует ввести не одно, а несколько сечений и соответственно несколько длин пробега и времен релаксации. В гл. III мы увидим, что в плазме для каждого сорта частиц необходимо ввести по меньшей мере три релаксационных времени.

Рассмотрим более подробно вопрос о сечениях. «Дифференциальным сечением рассеяния» называется величина

$$d\sigma = \left( \frac{\varrho(\theta)}{\sin \theta} \frac{d\varrho(\theta)}{d\theta} \right) d\Omega = \varrho d\varrho d\varphi, \quad (7.7)$$

где  $\varrho(\theta)$  — прицельный параметр, рассматриваемый как функция угла рассеяния  $\theta$  в системе центра инерции. Геометрически величина  $d\sigma$  представляет собой элементарную площадку на плоскости  $\xi$ , перпендикулярной к скорости потока частиц, падающих на рассеивающий центр  $O$  (см. рис. 1). Физически сечение  $d\sigma$  равно отношению числа частиц, рассеиваемых за единицу времени под углом  $\theta$  в элемент телесного угла  $d\Omega$ , к плотности потока падающих частиц. Величина

$$\sigma = \int d\sigma = \int \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (7.8)$$

называется «полным сечением рассеяния». Если только потенциал взаимодействия не обращается строго в нуль для всех прицельных параметров, больших некоторого (это имеет место, например, в случае упругих шаров, которые вообще не взаимодействуют, если не соприкасаются), то интеграл (7. 8) расходится и полное сечение рассеяния обращается в бесконечность (по крайней мере в классической теории; в квантовом случае сечение может быть конечным, если потенциал убывает достаточно быстро). Вследствие указанной расходимости полное сечение, очевидно, не может входить в какие-либо формулы, определяющие физические свойства газа. Наибольший интерес для кинетики представляют величины вида

$$\sigma_k = \int (1 - \cos^k \theta) d\sigma, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (7. 9)$$

Первую из них

$$\sigma_1 = \int (1 - \cos \theta) d\sigma \quad (7. 10)$$

называют «транспортным сечением» (применяются также названия «диффузионное сечение» и «сечение замедления»), что связано с тем, что множитель  $(1 - \cos \theta)$  определяет потерю направленной скорости частицы при упругом рассеянии (см. рис. 2):

$$\Delta u_z = -u (1 - \cos \theta) \quad (7. 11)$$

[см. также формулу (1. 3)]. Вторую величину

$$\sigma_2 = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma \quad (7. 12)$$

удобно было бы назвать «сечением отклонения», так как множитель  $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$  характеризует среднеквадратичное приращение поперечной скорости частиц при рассеянии плоского потока на неподвижном силовом центре. В книге Чемпена и Каулинга [5] показано, что вязкость и теплопроводность газа определяются именно сечением отклонения  $\sigma_2$ . Если  $\mathbf{g}$  — скорость относительного движения двух частиц, измеренная в единицах  $\sqrt{2T/\mu}$ , так что распределение Максвелла для относительных скоростей имеет вид

$$f_{\text{отн}} d\mathbf{v}_{\text{отн}} = \left( \frac{\mu}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2T} \right) d\mathbf{v}_{\text{отн}} = \pi^{-3/2} e^{-g^2} dg \quad (7. 13)$$

(здесь  $\mu$  — приведенная масса и выбрана нормировка  $\int f_{\text{отн}} d\mathbf{v}_{\text{отн}} = 1$ ), то, обозначая скобками  $\langle \rangle$  усреднение по этому распределению, имеем (см. работу [5]) формулы для коэффициентов вязкости и теплопроводности простого газа (не смеси):

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{5}{2} \sqrt{mT} \left\langle g^5 \sigma_2 \right\rangle; \\ \kappa &= \frac{15}{4m} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (7. 14)$$

Сечение замедления  $\sigma_1$  определяет подвижность частиц и входит в коэффициент диффузии, имеющей место в неоднородной смеси двух газов:

$$D_{12} = \sqrt{\frac{9T}{8\mu_{12}}} / n \langle g^3 \sigma_1 \rangle. \quad (7.15)$$

В отличие от формул (7. 6), определяющих лишь порядок величин, формулы (7. 14) и (7. 15) дают уже количественные выражения для коэффициентов переноса.

Для иллюстрации рассмотрим пример, когда молекулы можно считать идеально упругими твердыми шариками диаметром  $d_\alpha$  ( $\alpha$  — сорт частиц). В этом случае дифференциальное сечение рассеяния в системе центра инерции изотропно и совсем не зависит от относительной скорости:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi \left( \frac{d_\alpha + d_\beta}{2} \right)^2 / 4\pi. \quad (7.16)$$

При этом «сечение замедления» равно

$$\sigma_1 = \int (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \pi \left( \frac{d_\alpha + d_\beta}{2} \right)^2,$$

и для коэффициента взаимной диффузии в смеси двух газов в соответствии с выражением (7. 15) получаем

$$D_{12} = \sqrt{\frac{9T}{8\mu_{12}}} / n\sigma_1^{1/2} \langle g^3 \rangle = \frac{1}{n(d_1 + d_2)^2} \sqrt{\frac{9T}{8\pi\mu_{12}}}. \quad (7.17)$$

Здесь  $n = n_1 + n_2$  — полная плотность газа. «Сечение отклонения» для молекул одного сорта равно

$$\sigma_2 = \int (1 - \cos^2 \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{2}{3} \pi d^2 \quad (7.18)$$

и в соответствии с формулами (7. 14) коэффициенты вязкости и теплопроводности простого газа (не смеси) для модели упругих шарообразных молекул приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{5}{2} \sqrt{mT} \left/ \sigma_2 \langle g^5 \rangle = \frac{5 \sqrt{mT}}{16d^2 \sqrt{\pi}}; \right. \\ \kappa &= \frac{15\eta}{4m} = \frac{25 \sqrt{T/m}}{64d^2 \sqrt{\pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

В формулах (7. 17) и (7. 19) средние значения  $\langle g^n \rangle$  определены в соответствии с выражением (7. 13):

$$\langle g^n \rangle = \pi^{-3/2} \int |g|^n e^{-g^2} dg = 2\pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{n+1}{2}} dx = \frac{n+1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad (7.20)$$



Рассмотрим теперь вопрос о поведении пробной частицы  $\alpha$  в среде полевых частиц  $\beta$ , описываемых функцией распределения  $f_\beta(\mathbf{v}_\beta)$ , и попытаемся определить скорость изменения импульса и энергии пробной частицы.

Изменение скорости пробной частицы  $\alpha$  при столкновении ее с частицей  $\beta$  связано с изменением их относительной скорости  $\mathbf{u}$  соотношением (5. 3):

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \Delta \mathbf{u}. \quad (7. 21)$$

Отсюда для изменения импульса и энергии получаем

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_\alpha &= m_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha = m_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{u}; \\ \Delta \varepsilon_\alpha &= \frac{m_\alpha}{2} [(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})^2 - \mathbf{v}^2] = m_\alpha \left[ \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{v})^2 \right] = \\ &= m_{\alpha\beta} \left[ \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{u} + \frac{m_{\alpha\beta}}{2m_\alpha} (\Delta \mathbf{u})^2 \right]. \end{aligned} \quad (7. 22)$$

Так как рассеяние упругое, то модуль  $u$  не меняется. Поэтому

$$(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})^2 - \mathbf{u}^2 = 2\mathbf{u} \Delta \mathbf{u} + (\Delta \mathbf{u})^2 = 0. \quad (7. 23)$$

Таким образом, изменение энергии будет равно

$$\Delta \varepsilon_\alpha = m_{\alpha\beta} \left( \mathbf{v}_\alpha - \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \mathbf{u} \right) \Delta \mathbf{u}. \quad (7. 24)$$

Интегрируя по всем прицельным параметрам  $qdq d\varphi = d\sigma$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \int \Delta \mathbf{p}_\alpha d\sigma &= m_{\alpha\beta} \int \Delta \mathbf{u} d\sigma; \\ \int \Delta \varepsilon_\alpha d\sigma &= m_{\alpha\beta} \left( \mathbf{v}_\alpha - \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \mathbf{u} \right) \int \Delta \mathbf{u} d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (7. 25)$$

Для последнего интеграла, учитывая, что

$$\begin{aligned} \Delta u_z &= -u(1 - \cos \theta); \\ \Delta u_x &= u \sin \theta \cos \varphi; \\ \Delta u_y &= u \sin \theta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (7. 26)$$

имеем

$$\int \Delta \mathbf{u} d\sigma = -\mathbf{u} \sigma_1. \quad (7. 27)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \int \Delta \mathbf{p}_\alpha d\sigma &= -m_{\alpha\beta} \mathbf{u} \sigma_1; \\ \int \Delta \varepsilon_\alpha d\sigma &= -m_{\alpha\beta} \left( \mathbf{v}_\alpha \mathbf{u} - \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \mathbf{u}^2 \right) \sigma_1. \end{aligned} \quad (7. 28)$$

Принимая во внимание выражение (5. 4), средние скорости изменения импульса и энергии пробной частицы могут быть получены умножением выражений (7. 28) на  $f_\beta u d\mathbf{v}_\beta$  и последующим интегрированием по всем полевым частицам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} &= \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \mathbf{u} \int \Delta \mathbf{p}_\alpha d\sigma = -m_{\alpha\beta} \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \sigma_1 |\mathbf{u}| \mathbf{u}; \\ \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} &= \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \mathbf{u} \int \Delta \varepsilon_\alpha d\sigma = \\ &= -m_{\alpha/\beta} \mathbf{v}_\alpha \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \sigma_1 |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \frac{m_{\alpha/\beta}^2}{m_\alpha} \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \sigma_1 |\mathbf{u}|^3. \end{aligned} \right\} (7.29)$$

Эти формулы применимы при произвольном законе взаимодействия частиц. Они имеют особенно простой вид для так называемых «максвелловских молекул», которые отталкиваются с силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния:

$$\mathbf{F} = -\nabla_r U(r) \sim r^{-5}, \quad (7.30)$$

где

$$U(r) = \gamma/r^4.$$

Простота этого частного случая обусловлена тем, что, как это видно из простых соображений размерности, зависимость угла рассеяния  $\theta$  от прицельного параметра  $\varrho$  должна иметь вид

$$\theta = f(U(\varrho)/\varepsilon_{\text{отн}}), \quad (7.31)$$

где  $U(\varrho) = \gamma/\varrho^4$  — потенциал взаимодействия;  $\varepsilon_{\text{отн}} = \mu u^2/2$  — энергия относительного движения ( $\mu$  — приведенная масса);  $f(x)$  — безразмерная функция.

Обратная функция  $\varrho(\theta)$  будет

$$\varrho(\theta) = \varrho_\perp g(\theta), \quad (7.32)$$

где  $\varrho_\perp = (\gamma/\varepsilon_{\text{отн}})^{1/4} \sim |\mathbf{u}|^{-1/2}$  и  $g(\theta)$  — вновь безразмерная функция. Следовательно, сечение

$$d\sigma = \varrho d\varrho d\varphi = \varrho_\perp^2 h(\theta) d\Omega, \quad (7.33)$$

где  $h(\theta)$  — новая безразмерная функция, будет обратно пропорционально относительной скорости:  $d\sigma \sim u^{-1}$ . При этом и транспортное сечение  $\sigma_1$  оказывается обратно пропорциональным  $u$ :

$$\sigma_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{«максвелловские} \\ \text{молекулы»} \end{array} \right. = \frac{\text{const}}{u}. \quad (7.34)$$

Время между соударениями  $\tau = 1/n\sigma u$  в этом случае вообще не зависит от энергии относительного движения. Обращаясь к формулам (7.29), можно видеть, что в случае «максвелловских молекул» оба фигурирующие в них интеграла легко вычисляются в общем виде (подставляем  $\sigma_1 = \text{const}/u$ ):

$$\left. \begin{aligned} \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \sigma_1 |\mathbf{u}| \mathbf{u} &= \text{const } \mathbf{v}_\alpha n_\beta; \\ \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \sigma_1 |\mathbf{u}|^3 &= \text{const } (v_\alpha^2 + \langle v_\beta^2 \rangle) n_\beta. \end{aligned} \right\} (7.35)$$

(Для простоты мы считаем, что газ полевых частиц  $\beta$  в целом покоится, так что  $\int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \mathbf{v}_\beta = 0$ ). Как видим, передача (потеря) импульса и энергии пробной частицы  $\alpha$  в этом случае определяется

только плотностью  $n_\beta$  и средней энергией (температурой) полевых частиц  $\beta$  (так как  $\langle v_\beta^2 \rangle = 3T_\beta/m_\beta$ ).

Как показано в книге Чепмена и Каулинга [5], для «максвелловских молекул» сравнительно простым оказывается и вычисление кинетических коэффициентов, на чем останавливаться мы не будем.

В общем случае через различные сечения  $\sigma_k$  могут быть выражены и введенные нами в § 5 тензоры  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\omega_{ijk}$  и т. д. Так, используя формулы (7.26), для скалярных величин  $A$ ,  $B$  и  $C$ , определяемых формулами (5.10) и (5.11), найдем

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \int \Delta u_z u \, d\sigma = -\frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} u^2 \sigma_1; \\ B &= \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^2 \int (\Delta u_x)^2 u \, d\sigma = \frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha^2} u^3 \frac{\sigma_2}{2}; \\ B + C &= \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^2 \int (\Delta u_z)^2 u \, d\sigma = \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^2 u^3 \int (1 - \cos \theta)^2 d\sigma = \\ &= \frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha^2} u^3 (2\sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Подставляя найденные значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в формулу (5.6), получим:

$$\begin{aligned} \omega_i &= -\frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} u_i u \sigma_1; \\ \omega_{ij} &= \frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha^2} u^3 \left[ \delta_{ij} \frac{\sigma_2}{2} + \frac{u_i u_j}{u^2} \left( 2\sigma_1 - \frac{3}{2} \sigma_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Тензоры более высокого ранга ( $\omega_{ijk}$ ,  $\omega_{ijkl}$  и т. д.) будут содержать сечения  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  и более высокого порядка, которые уже не имеют столь простого наглядного смысла, как сечения  $\sigma_1$  («замедления») и  $\sigma_2$  («отклонения»).

Вернемся теперь к частицам, взаимодействующим по закону Кулона. В этом случае дифференциальное сечение рассеяния описывается, как известно, формулой Резерфорда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q(\theta)}{\sin \theta} \frac{dq(\theta)}{d\theta} = \frac{q_1^2}{4 \sin^4(\theta/2)}, \quad (7.38)$$

где

$$q_1 = \frac{e_\alpha e_\beta}{\mu u^2},$$

для получения которой следует использовать формулу (1.1), связывающую прицельный параметр с углом рассеяния

$$q(\theta) = q_1 \operatorname{ctg}(\theta/2). \quad (7.39)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае все «частичные» сечения  $\sigma_k$  логарифмически расходятся на малых углах рассеяния, т. е. на больших прицельных параметрах,

$$\sigma_k = \int (1 - \cos^k \theta) \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \cong \pi (2\rho_{\perp})^2 k \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta}. \quad (7.40)$$

Как было показано ранее, максимальный прицельный параметр, при котором частицы еще эффективно взаимодействуют и, следовательно, рассеиваются, в плазме следует положить равным радиусу Дебая  $D$ . Тогда

$$\theta_{\min} = 2\rho_{\perp}/D; \quad \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta} = \ln \frac{\pi}{\theta_{\min}} \cong \ln \frac{D}{\rho_{\perp}} = \lambda, \quad (7.41)$$

т. е. получаем «кулоновский логарифм». Вводя обозначение

$$\sigma_{\text{кулон}}(\mathbf{u}) = \pi\lambda (2\rho_{\perp})^2 = \pi\lambda \left( \frac{e_{\alpha}e_{\beta}}{\mu u^2/2} \right)^2, \quad (7.42)$$

из формулы (7.40) получаем

$$\sigma_k |_{\text{для плазмы}} = k\sigma_{\text{кулон}}(\mathbf{u}). \quad (7.43)$$

Отсюда, в частности,  $\sigma_2 = 2\sigma_1$ , что третью формулу (7.36) превращает в нуль:  $B + C = 0$ . Подставляя теперь

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{кулон}}(\mathbf{u}) = \lambda \frac{4\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\alpha\beta}^2} \cdot \frac{1}{u^4} \quad (7.44)$$

в формулы (7.29), найдем среднее за единицу времени изменение импульса и энергии пробной частицы  $\alpha$ , движущейся в среде полевых частиц  $\beta$ , при кулоновском взаимодействии (напоминаем, что  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{\alpha}}{dt} &= -\lambda \frac{4\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\alpha\beta}} \int \frac{\mathbf{u}}{u^3} f_{\beta} d\mathbf{v}_{\beta}; \\ \frac{d\varepsilon_{\alpha}}{dt} &= -\lambda \frac{4\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\alpha\beta}} \left[ \mathbf{v}_{\alpha} \int \frac{\mathbf{u}}{u^3} f_{\beta} d\mathbf{v}_{\beta} - \frac{m_{\alpha\beta}}{m_{\alpha}} \int \frac{1}{u} f_{\beta} d\mathbf{v}_{\beta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

что, как нетрудно заметить, совпадает с формулами (6.10) и (6.13).

Для различных качественных оценок энергию относительного движения  $\mu u^2/2$  в выражении  $\sigma_{\text{кулон}}(\mathbf{u})$  можно заменить на температуру. Мы видим, таким образом, что в плазме сечение столкновения приближенно можно считать равным

$$\sigma_{\text{кулон}} = \pi \left( \frac{e^2}{T} \right)^2 \lambda \cong \frac{\lambda e^4}{T^2}; \quad (T = kT^{\circ}). \quad (7.46)$$

При этом средняя длина пробега  $l$  и время между столкновениями (среднее время релаксации) по порядку величины равны

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{1}{n\sigma_{\text{Кулон}}} = \frac{T^2}{\lambda n e^4}; \\ \tau &= \frac{l}{v} = \frac{\sqrt{m} T^{3/2}}{\lambda n e^4}. \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

Отсюда, например, видно, что при одинаковых температурах длины пробегов ионов и электронов будут одинаковы, в то же время

$$\tau^{e/e} : \tau^{i/i} \approx \sqrt{m/M}. \quad (7.48)$$

Так как величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  примерно одинаковы, то «длина замедления»  $l = 1/n\sigma_1$  примерно равна «длине отклонения»  $l = 1/n\sigma_2$ .

Следует иметь в виду, что для правильной оценки каждого процесса необходимо вводить свое «эффективное сечение», и таким образом их будет несколько. Рассмотрим, например, вопрос об обмене энергией между ионами и электронами. Для простоты ограничимся случаем, когда электрон  $m_e = m$  налетает на покоящийся ион  $m_i = M \gg m$ . При этом  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha$  и

$$m_{ei} = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \cong m \left(1 - \frac{m}{M}\right). \quad (7.49)$$

Тогда из выражения (7.28) получаем

$$\int \Delta \varepsilon_e d\sigma = -m_{ei} \left(1 - \frac{m_{ei}}{m_e}\right) u^2 \sigma_1 \cong -\varepsilon_e \left(2 \frac{m}{M} \sigma_1\right). \quad (7.50)$$

Аналогично и в том случае, когда ион налетает на покоящийся электрон, имеем

$$\int \Delta \varepsilon_i d\sigma = -m u^2 \sigma_1 = -\varepsilon_i \left(2 \frac{m}{M} \sigma_1\right). \quad (7.51)$$

Если ввести «сечение передачи энергии»  $\sigma_e^{\alpha/\beta}$  по формуле

$$\int \Delta \varepsilon_\alpha d\sigma = -\varepsilon_\alpha \sigma_e^{\alpha/\beta}, \quad (7.52)$$

то по порядку величины

$$\sigma_e^{e/i} = \sigma_e^{i/e} = 2 \frac{m}{M} \sigma_1 \cong \left(\frac{m}{M}\right) \frac{\lambda e^4}{T^2}. \quad (7.53)$$

Мы видим, что относительная доля передаваемой при столкновении двух частиц энергии зависит от отношения их масс: она максимальна при равных массах и пропорциональна  $m/M \ll 1$  при сильно различающихся массах. Поэтому сечение передачи энергии в  $2m/M$  раз меньше сечения замедления. Соответственно этому для времен релаксации имеем

$$\tau^{e/e} : \tau^{i/i} : \tau_e^{e/i} \approx 1 : \sqrt{\frac{M}{m}} : \frac{M}{m}. \quad (7.54)$$

В гл. III мы будем в основном оперировать не сечениями, а временами релаксации, которые непосредственно характеризуют длительность различных процессов в плазме.

## II. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦ С КУЛОНОВСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

### § 8. Движение частиц в фазовом пространстве

Как известно, для статистического описания совокупности многих частиц удобно ввести шестимерное «фазовое» пространство, по осям которого отложены координаты  $x, y, z$  и скорости  $v_x, v_y, v_z$ \* (рис. 5).

Если некоторая частица находится в точке  $\mathbf{r}$  и обладает скоростью  $\mathbf{v}$ , то принято говорить, что эта частица находится в точке  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  фазового пространства.

Число частиц сорта  $\alpha$ , находящихся в элементе объема этого пространства

$$dN_{\alpha}^{(6)} = d\mathbf{r} d\mathbf{v} = dx dy dz dv_x dv_y dv_z, \quad (8.1)$$

можно представить в виде

$$dN_{\alpha} = f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v}, \quad (8.2)$$

где  $f_{\alpha}$  — плотность распределения частиц  $\alpha$  по фазовому пространству, называемая обычно «функцией распределения».

«Кинетическим уравнением» называется уравнение для функции  $f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ , которое показывает, как с течением времени изменяется распределение частиц по фазовому пространству, т. е. по координатам и скоростям.

Нам представляется, что проделанный ниже вывод этого уравнения, хотя он и не может претендовать на строгость, является достаточно наглядным.

Рассмотрим картину движения частиц в фазовом пространстве.

При отсутствии столкновений координаты и скорости частиц меняются непрерывно, «от точки к точке», что соответствует непрерывному движению частиц в фазовом пространстве. В этих условиях функция  $f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  удовлетворяет «уравнению непрерывности»:

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{v}f_{\alpha}) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}}\mathbf{j} = 0, \quad (8.3)$$

---

\* Обычно под «фазовым» пространством понимают пространство координат и импульсов, а не скоростей. Это различие, конечно, несущественно, однако интерпретация и операции с введенными нами потенциальными функциями выглядят проще в пространстве скоростей, которым мы и будем пользоваться.

где

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{v}} f_{\alpha} = \frac{\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}}{m_{\alpha}} f_{\alpha} \quad (8.4)$$

есть поток частиц  $\alpha$  в пространстве скоростей,  $\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}$  — внешняя сила, действующая на частицу  $\alpha$ .

Уравнение (8.3) аналогично обычному уравнению непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (8.5)$$

где

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho,$$

описывающему движение произвольной «сплошной» среды — жидкости или газа в обычном трехмерном пространстве координат.

Оба эти уравнения выражают закон сохранения числа частиц, в соответствии с которым количество частиц внутри произвольного фиксированного объема изменяется только вследствие поступления в этот объем частиц через окружающую его замкнутую поверхность, что схематически изображено на рис. 5.

Записав это в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^{(6)}} f_{\alpha} d\Omega^{(6)} = - \oint j_N^{(6)} d\Sigma^{(5)}, \quad (8.6)$$

где  $j_N^{(6)}$  — проекция шестимерного потока частиц  $\alpha$  на направление внешней нормали  $N$  к поверхности  $\Sigma^{(5)}$ , и преобразуя по теореме Гаусса интеграл от нормального потока вектора через замкнутую поверхность  $\Sigma^{(5)}$  в интеграл от шестимерной дивергенции по объему  $\Omega^{(6)}$ , получим уравнение (8.3).

Учтем теперь влияние столкновений. Изменением пространственных координат частиц за время одного соударения всегда можно с макроскопической точки зрения пренебречь. Поэтому движение частиц в отношении координатной части фазового пространства сохраняет свой непрерывный характер «от точки к точке», и второй член  $\operatorname{div}_r (\mathbf{v} f_{\alpha})$  в кинетическом уравнении (8.3), описывающий это движение, остается неизменным.

Столкновения, однако, резко нарушают непрерывность движения в пространстве скоростей. За время одного соударения, т. е. практически мгновенно, скорость частицы, испытавшей столкновение, может измениться весьма значительно. Если обозначить

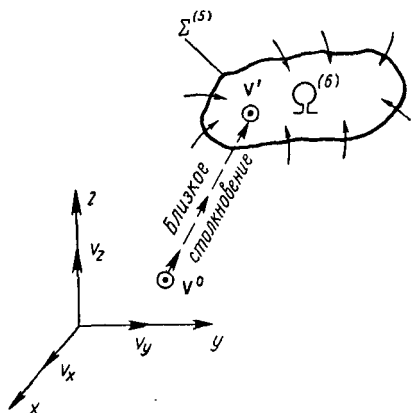


Рис. 5.

скорость некоторой частицы до и после столкновения соответственно через  $v$  и  $v'$ , то эта частица в момент столкновения как бы исчезает в точке  $v$  и вновь возникает в уже далекой от нее точке  $v'$ , не проходя при этом через промежуточные точки пространства скоростей. Обращаясь к рис. 5, где условно пунктиром изображен один такой переход  $v \rightarrow v'$ , мы видим, что внутри выделенного объема  $\Omega^{(6)}$  могут появляться частицы, которые попали туда, не пересекая окружающую его поверхность  $\Sigma^{(5)}$ . Именно поэтому влияние столкновений в общем случае не может быть учтено в кинетическом уравнении в виде члена с дивергенцией некоторого потока в пространстве скоростей. Однако такая ситуация возможна лишь в случае «близких» столкновений, когда скорости частиц меняются резко. Между тем в предыдущей главе было показано, что в случае частиц, взаимодействующих по закону Кулона, изменение их скорости, характеризуемое величинами  $\langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta}$  и  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle^{\alpha/\beta}$ , найденными в § 6, обусловлено в основном далекими столкновениями, при которых скорости сталкивающихся частиц изменяются мало.

Пусть, например,  $\lambda = \ln(q_{\text{макс}}/q_{\perp}) = 15$  (обычное значение для проблемы управляемой термоядерной реакции). Тогда относительное изменение скорости частицы в единичном акте столкновения по порядку величины составит

$$\frac{|\Delta v|}{v} \sim \theta_{\text{расс}} \approx \frac{q_{\perp}}{q} \approx e^{-\lambda} \frac{q_{\text{макс}}}{q} \sim 10^{-6} \left( \frac{q_{\text{макс}}}{q} \right). \quad (8.7)$$

т. е. микроскопически малую величину.

Частицы при таких столкновениях переходят в близлежащие точки скоростного пространства, что можно рассматривать как процесс диффузии. Движение частиц в этих условиях вновь приобретает непрерывный, или, точнее, почти непрерывный характер и состоит из последовательных микроскопических скачков в пространстве скоростей. Такая картина «квазинепрерывного» движения вновь приводит к уже знакомой нам ситуации, когда число частиц внутри выделенного объема  $\Omega^{(6)}$  изменяется только вследствие притока частиц, поступающих в объем через окружающую его поверхность  $\Sigma^{(5)}$ . Уравнение непрерывности (8.3) вновь оказывается справедливым.

## § 9. Выражение для потока

Итак, если считать, что в плазме происходят только далекие столкновения (что, как мы видели в гл. I, оказывается приближенно справедливым при  $\lambda \gg 1$ ), то кинетическое уравнение должно иметь вид уравнения непрерывности (8.3):

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \text{div}_r(\mathbf{v}f_{\alpha}) + \text{div}_v \mathbf{j} = 0. \quad (9.1)$$

Однако выражение для потока  $\mathbf{j}$  в скоростном пространстве будет



отличаться от формулы (8. 4), поскольку теперь необходимо учитывать столкновения.

Попытаемся найти выражение для потока  $\mathbf{j}$ . Квазинепрерывное движение частиц в пространстве скоростей можно уподобить течению некоторого газа через неоднородную пористую среду.

При таком течении (в координатном пространстве) поток газа может в принципе состоять из двух слагаемых: кинематического потока вида  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  и диффузионного потока вида  $\mathbf{j} = -D \nabla \rho$ . Это наиболее известные виды непрерывного течения.

Приведенная аналогия позволяет заключить, что в уравнении (9. 1) поток  $\mathbf{j}$  в пространстве скоростей должен иметь вид

$$\mathbf{j} = \dot{v} f_{\alpha} - D \nabla_v f_{\alpha}, \quad (9. 2)$$

где коэффициент диффузии  $D$  ввиду очевидной неизотропности скоростного пространства в общем случае следует рассматривать как тензор.

Помимо указанной аналогии, выбор потока в форме (9. 2) можно обосновать также следующими соображениями. Как мы видели выше, столкновения

эквивалентны скачкам частиц в пространстве скоростей, в частности, далекие столкновения эквивалентны микроскопически малым ( $|\Delta v|/v \sim 10^{-6}$ ) скачкообразным перемещениям. Это означает, что полный поток частиц через некоторую поверхность  $S^{(2)}$  в пространстве скоростей (рис. 6) будет определяться не только плотностью  $f$  этих частиц на самой поверхности (как было бы при строго непрерывном течении), но также плотностью их вблизи этой поверхности.

Математически это явление находит выражение в том, что поток в общем случае будет иметь вид разложения в ряд

$$j_i = a_i f + b_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j} + c_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k} + d_{ijkl} \frac{\partial^3 f}{\partial v_j \partial v_k \partial v_l} + \dots \quad (9. 3)$$

(по дважды встречающимся индексам — суммирование от 1 до 3), где  $a_i$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ijk}$  и т. д. — коэффициенты, обладающие соответствующей тензорной размерностью. Чем меньше скачки частиц, тем более картина движения должна быть похожа на строго непрерывное течение, при котором поток определяется лишь плотностью среды в точках, лежащих на самой поверхности  $S^{(2)}$ , т. е. первым членом  $a_i f_{\alpha}$  разложения (9. 3). Таким образом, малость скачков должна проявляться в том, что члены ряда (9. 3) будут быстро убывать. В первом приближении конечную величину скачков, т. е. то, что они являются все-таки не бесконечно малыми,

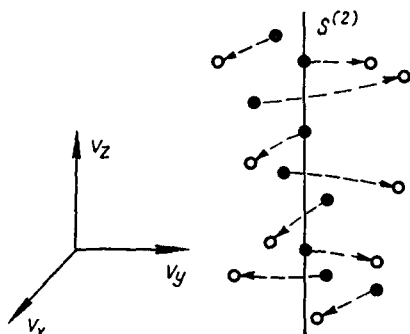


Рис. 6.

можно отразить, оставив в разложении (9. 3) два члена:

$$j_i = a_i f_\alpha + b_{ij} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j}, \quad (9. 4)$$

что совпадает с записью в форме (9. 2).

Первый — «кинематический» — член  $\dot{\mathbf{v}} f_\alpha$  в формуле (9. 2) (он аналогичен потоку  $\mathbf{v}q$  в гидродинамике) можно выразить через силу, действующую на частицу  $\alpha$ . Эта сила должна включать как внешнюю силу  $\mathbf{F}^{(e)}$ , так и силу торможения, обусловленную столкновениями  $\mathbf{F}_{\text{ст}}$ :

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} = \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha^{(e)} + \mathbf{F}_{\text{ст}}). \quad (9. 5)$$

Подставляя выражение (9. 2) для потока с учетом равенства (9. 5) в уравнение непрерывности (9. 1) и перенося для удобства все члены, учитывающие столкновения, в правую часть, можем окончательно кинетическое уравнение записать в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \text{div}_r (\mathbf{v} f_\alpha) + \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v (\mathbf{F}_\alpha^{(e)} f_\alpha) = - \nabla_v j^\alpha, \quad (9. 6)$$

где  $j^\alpha$  — поток частиц  $\alpha$  в пространстве скоростей, обусловленный столкновениями:

$$j_i^\alpha = \frac{F_i^\alpha}{m_\alpha} f_\alpha - D_{ik}^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} \quad (9. 7)$$

(по  $k$  — суммирование от 1 до 3).

Условимся силу  $\mathbf{F}^\alpha$ , обусловленную столкновениями и возникшую из «кинематического» члена  $\dot{\mathbf{v}} f$ , следуя С. Чандрасекару [1], называть «динамической силой трения» (поскольку «кинематика» в пространстве скоростей — это уже динамика!). Тензор  $D_{ik}^\alpha$  будем называть «тензором диффузии» в скоростном пространстве.

Если в плазме имеются частицы различных сортов, то взаимодействие частиц выделенного сорта  $\alpha$  с другими будет складываться аддитивно, поскольку весь расчет ведется в приближении парных столкновений. Следовательно, можно написать, что

$$\left. \begin{aligned} j^\alpha &= \sum_\beta j^{\alpha/\beta}; \\ \mathbf{F}^\alpha &= \sum_\beta \mathbf{F}^{\alpha/\beta}; \\ D_{ik}^\alpha &= \sum_\beta D_{ik}^{\alpha/\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (9. 8)$$

где  $\mathbf{F}^{\alpha/\beta}$  — сила динамического трения частиц  $\alpha$  в среде частиц  $\beta$ ;  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  — тензор диффузии частиц  $\alpha$  в среде из  $\beta$ -частиц.

Поскольку рассмотрение взаимодействия какой-либо выделенной частицы  $\alpha$  с остальными частицами того же сорта  $\alpha$  ничем не отличается от ее взаимодействия с частицами другого сорта,  $\alpha$  в формуле (9. 8) следует считать, что сумма по всем  $\beta$  ( $\sum_{\beta}$ ) включает также значение  $\beta = \alpha$ , т. е. столкновения частиц одного сорта между собой.

## § 10. Сила динамического трения и тензор диффузии

Для величин  $F_i^{\alpha/\beta}$  и  $D_{ij}^{\alpha/\beta}$  нам осталось получить явные выражения и уточнить их физический смысл. С этой целью вернемся к задаче, рассмотренной в первой главе о «пробной» частице  $\alpha$ , движущейся в среде «полевых» частиц  $\beta$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  скорость частицы  $\alpha$  равнялась  $\mathbf{v}_0$ . Требуется указать характер ее дальнейшего движения.

Как и прежде, с целью статистического рассмотрения задачи введем «ансамбль» пробных частиц  $\alpha$ , которые в момент времени  $t = 0$  обладали одинаковой скоростью  $\mathbf{v}_0$ . Мы опять приходим к детально рассмотренной картине сплошного облака пробных частиц в скоростном пространстве, расплывающегося с течением времени (см. рис. 4). Однако теперь для описания этой картины мы располагаем более удобным аппаратом.

Если раньше распределение частиц по облаку мы описывали путем задания бесконечного набора «моментов»

$$\overline{v_i}, \overline{\Delta v_i \Delta v_j}, \overline{\Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k}, \dots, \quad (10. 1)$$

где  $\Delta v_i = v_i - \overline{v_i}$ , или эквивалентных им величин  $\overline{v_i}$ ,  $\overline{v_i v_j}$ ,  $\overline{v_i v_j v_k}$  (аналогичных последовательности «мультиполей» — диполь, квадруполь и т. д. в электростатике), то теперь мы можем его описывать, непосредственно задавая плотность частиц в различных участках облака, т. е. саму функцию распределения  $f_{\alpha}(t, \mathbf{v})$  пробных частиц по фазовому пространству.

Рассматривая ранее облако как совокупность большого числа точечных частиц ( $N \rightarrow \infty$ ), мы усредняли некоторую функцию  $W(\mathbf{v})$  по распределению частиц в скоростном пространстве по формуле

$$\overline{W}(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{v}=1}^N W(\mathbf{v}^{(v)}(t)). \quad (10. 2)$$

Теперь же, зная  $f_{\alpha}(t, \mathbf{v})$ , мы рассматриваем облако как сплошную среду с плотностью  $f_{\alpha}(t, \mathbf{v})$  и ту же операцию усреднения записываем в виде

$$\overline{W}(t) = \frac{1}{n_{\alpha}} \int W(\mathbf{v}) f_{\alpha}(t, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (10. 3)$$

где  $n_{\alpha} = \int f_{\alpha}(t, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$ .

Физически между этими двумя подходами нет никакой разницы, так как, устремляя число частиц  $N$  в облаке-ансамбле к бесконечности, мы приходим к представлению о непрерывной сплошной среде\*.

В частности, если известна функция распределения, то «моменты распределения» [см. выражение (10. 1)] могут быть найдены по формулам

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_i &= \frac{1}{n_\alpha} \int v_i f_\alpha(\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \\ \overline{\Delta v_i \Delta v_j} &= \frac{1}{n_\alpha} \int (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f_\alpha(\mathbf{v}) d\mathbf{v}; \\ \overline{\Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k} &= \frac{1}{n_\alpha} \int (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)(v_k - \bar{v}_k) f_\alpha(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \end{aligned} \right\} (10. 4)$$

и т. д. И наоборот, если известны все моменты, включая и моменты бесконечно высокого порядка, то по ним можно найти функцию распределения.

Итак, попытаемся теперь описать процесс расплывания облака с помощью функции распределения  $f_\alpha$ . В начальный момент времени все частицы облака имеют одинаковую скорость  $\mathbf{v}_0$ . Поэтому мы можем рассматривать введенный нами «ансамбль» частиц в момент  $t = 0$  как однородный плоский поток, движущийся в безграничной однородной среде полевых частиц  $\beta$ .

Таким образом,

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})|_{t=0} = n_\alpha \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0), \quad (10. 5)$$

где  $n_\alpha$  — пространственная плотность частиц  $\alpha$  в потоке.

Полагая, что внешняя сила  $F_\alpha^{(e)}$  отсутствует и, следовательно, распределение пробных частиц изменяется только вследствие их столкновений с полевыми частицами  $\beta$ , получаем кинетическое уравнение для функции  $f_\alpha$  [см. уравнения (9. 6) и (9. 7)]

$$\frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla_v j^{a/\beta}, \quad (10. 6)$$

где

$$j_i^{a/\beta} = \frac{F_i^{a/\beta}}{m_\alpha} f_\alpha - D_{ik}^{a/\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k}.$$

Член с  $\text{div}_v(\mathbf{v}f_\alpha)$  выпадает, так как в этих условиях функция  $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  вообще не будет зависеть от пространственных координат  $x, y, z$ .

\* Следует лишь обратить внимание на одно формальное отличие, состоящее в том, что в формуле (10. 2), имеющей дело с совокупностью частиц, скорость  $\mathbf{v}(t)$  выступает именно как скорость некоторой частицы, зависящая от времени. В функции же распределения  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ , описывающей сплошную среду, скорость  $\mathbf{v}$  означает просто точку скоростного пространства и, конечно, не зависит от времени. Подобно этому и аргумент  $\mathbf{r}$  в функции  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  является независимой переменной, означающей точку в обычном координатном пространстве.

Нашей задачей является получение явных выражений для силы динамического трения  $F_i^{\alpha/\beta}$  и тензора диффузии  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$ . Для этого мы вычислим скорости изменения моментов (10.4) для облака пробных частиц  $\alpha$ , используя кинетическое уравнение (10.6), а затем сравним результаты с полученными в первой главе. Следуя этой программе, находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{v}_i &= \frac{1}{n_\alpha} \int v_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\mathbf{v} = -\frac{1}{n_\alpha} \int v_i \operatorname{div}_v \mathbf{j} d\mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{n_\alpha} \int j_i d\mathbf{v} = \frac{1}{n_\alpha} \int \left( f_\alpha \frac{F_i}{m_\alpha} - D_{ik} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} \right) d\mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha \left( \frac{F_i}{m_\alpha} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial v_k} \right) d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Подставляя теперь в правую часть начальное значение функции  $f_\alpha|_{t=0} = n_\alpha \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ , получим

$$\left. \frac{d\bar{v}_i}{dt} \right|_{t=0} = \left( \frac{F_i^{\alpha/\beta}}{m_\alpha} + \frac{\partial}{\partial v_k} D_{ik}^{\alpha/\beta} \right)_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_0}. \quad (10.8)$$

Величина  $\left. \frac{d\bar{v}_i}{dt} \right|_{t=0}$  и есть та начальная скорость смещения облака пробных частиц в скоростном пространстве, которую мы вычисляли в первой главе, обозначив ее там  $\langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta}$ . Таким образом, опуская для простоты нулевой значок у  $\mathbf{v}_0$  в выражении (10.8), находим:

$$\left. \frac{d\bar{v}_i}{dt} \right|_{t=0} = \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} = \frac{F_i^{\alpha/\beta}}{m_\alpha} + \frac{\partial}{\partial v_k} D_{ik}^{\alpha/\beta}. \quad (10.9)$$

Вычисляя аналогично производную второго момента из выражения (10.4) при  $t=0$ , получим:

$$\left. \frac{d}{dt} \overline{(v - \bar{v})_i (v - \bar{v})_k} \right|_{t=0} = \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = 2D_{ik}^{\alpha/\beta}. \quad (10.10)$$

Таким образом, введенные нами формально в § 9 сила динамического трения  $F^{\alpha/\beta}$  и тензор диффузии  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  связаны формулами (10.9) и (10.10) с величинами  $\langle \Delta v_i \rangle$  и  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$ , физический смысл и явные выражения которых рассмотрены в первой главе.

Используя формулы (6.7), окончательно находим:

$$\left. \begin{aligned} D_{ik}^{\alpha/\beta} &= \frac{1}{2} \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = -L^{\alpha/\beta} \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial v_i \partial v_k}; \\ \frac{1}{m_\alpha} F_i^{\alpha/\beta} &= \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_k} \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = \\ &= -\frac{m_\alpha}{m_\beta} L^{\alpha/\beta} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial v_i}. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Подставив эти выражения в формулу (10. 6) для столкновительного потока  $j^{\alpha/\beta}$ , получим:

$$j_i^{\alpha/\beta} = \frac{F_i^{\alpha/\beta}}{m_\alpha} f_\alpha - D_{ik}^{\alpha/\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} = \\ = \langle \Delta v_i \rangle^{\alpha/\beta} f_\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_k} (\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} f_\alpha). \quad (10. 12)$$

Последняя запись потока называется записью в виде «приближения Фоккера — Планка». Она, однако, имеет менее наглядный внешний вид, чем запись

$$j_i^{\alpha/\beta} = \frac{1}{m_\alpha} F_i^{\alpha/\beta} f_\alpha - D_{ik}^{\alpha/\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k}, \quad (10. 13)$$

где первый и второй члены по внешнему виду аналогичны «кинематическому» ( $\mathbf{j} = \mathbf{v}q$ ) и «диффузионному» ( $\mathbf{j} = -D\nabla q$ ) потокам в обычном координатном пространстве. Поэтому мы всегда будем записывать столкновительный поток в виде выражения (10. 13).

В заключение попытаемся установить, с какой точностью двухчленное выражение (10. 13) для потока  $j^{\alpha/\beta}$  можно считать справедливым. Если с его помощью мы вычислим производную третьего момента из выражения (10. 4) при  $t = 0$ , то найдем, что она равна нулю, как и все более высокие:

$$\frac{d}{dt} \overline{(v - \bar{v})_i (v - \bar{v})_j (v - \bar{v})_k} \Big|_{t=0} = 0 \quad (10. 14)$$

(из-за наличия множителей вида  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$  под знаком интеграла). Между тем, по определению, эта производная должна совпадать с введенной в первой главе величиной  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle$ , которая не равна нулю, но, как мы видели, не содержит логарифмически расходящихся интегралов и, следовательно, обусловлена близкими пролетами в отличие от двух первых моментов  $\langle \Delta v_i \rangle$  и  $\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle$ .

Итак, представление потока в виде двух членов с  $f$  и  $\frac{\partial f}{\partial v_k}$  [см. выражение (10. 13)] автоматически предполагает, что производными всех высоких моментов, начиная с третьего, можно пренебречь, что для кулоновского взаимодействия, как мы видели в первой главе, оказывается с «логарифмической точностью» ( $\sim \frac{1}{\lambda}$ ) правильным.

Для учета старших моментов, например третьего, нужно было бы выбрать поток в виде трех членов с  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v_i}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_k}$  [см. также ряд (9. 3)]:

$$j_i = a_i f + b_{ik} \frac{\partial f}{\partial v_k} + c_{ikl} \frac{\partial^2 f}{\partial v_k \partial v_l}. \quad (10. 15)$$

При этом мы установили бы, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k} \Big|_{t=0} = 6c_{ijk} = \langle \Delta v_i \Delta v_j \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}; \\ \left( \sim \frac{1}{\lambda} \neq 0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Однако учет членов порядка  $1/\lambda$  является превышением точности нашего рассмотрения.

### § 11. Кинетическое уравнение при кулоновском взаимодействии

Суммируя результаты предыдущих параграфов, можно видеть, что кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия частиц должно иметь вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \text{div}_r(\mathbf{v}f_\alpha) + \frac{1}{m_\alpha} \text{div}_v(\mathbf{F}^{(e)}f_\alpha) = C^\alpha = \sum_\beta C^{\alpha/\beta}, \quad (11.1)$$

где  $C^\alpha$  — так называемый «столкновительный член», состоящий из суммы слагаемых  $C^{\alpha/\beta}$ , каждое из которых описывает столкновения частиц рассматриваемого сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$  (в том числе возможно  $\beta = \alpha$ ):

$$C^{\alpha/\beta} = -\text{div}_v j^{\alpha/\beta}, \quad (11.2)$$

где

$$j_i^{\alpha/\beta} = \frac{1}{m_\alpha} F_i^{\alpha/\beta} f_\alpha - D_{ik}^{\alpha/\beta} \nabla_k f_\alpha.$$

В формулах (11.1) и (11.2) индекс  $r$  или  $v$  у операторов ( $\text{div}$ ,  $\nabla$ ,  $\Delta$  и т. д.) означает пространство, к которому относится данный оператор. Условимся также, что оператор без индекса относится к пространству скоростей.

Тензор диффузии  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  и сила динамического трения  $F_i^{\alpha/\beta}$ , входящие в выражение (11.2), определяются формулами (10.11)

$$\left. \begin{aligned} D_{ik}^{\alpha/\beta} &= -L^{\alpha/\beta} \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial v_i \partial v_k}; \\ F_i^{\alpha/\beta} &= -\frac{m_\alpha^2}{m_\beta} L^{\alpha/\beta} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial v_i}, \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

из которых следует также, что

$$F_i^{\alpha/\beta} = \frac{m_\alpha^2}{m_\beta} \frac{\partial}{\partial v_k} D_{ik}^{\alpha/\beta}. \quad (11.4)$$

Здесь  $L^{\alpha/\beta} = \lambda (4\pi e_{\alpha} e_{\beta} / m_{\alpha})^2$ , а  $\psi_{\beta}$  и  $\Phi_{\beta}$  — потенциальные функции распределения  $\beta$ -частиц, определяемые соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} f_{\beta} &= \Delta\psi_{\beta}, \quad \Phi_{\beta} = \Delta\psi_{\beta}; \\ \psi_{\beta} &= -\frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f'_{\beta} d\mathbf{v}'; \\ \Phi_{\beta} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f'_{\beta} d\mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Физический смысл величин  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  и  $F_i^{\alpha/\beta}$  рассмотрен в предыдущем параграфе. Тензор диффузии  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  есть начальная скорость изменения тензора квадратичных отклонений скорости от средней в облаке-ансамбле пробных частиц  $\alpha$ :

$$D_{ik}^{\alpha/\beta} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{(v - \bar{v})_i (v - \bar{v})_k} \Big|_{t=0}. \quad (11.6)$$

Динамическая сила трения  $F_i^{\alpha/\beta}$  от средней силы  $\mathbf{F}_{\alpha}$ , действующей на пробную частицу  $\alpha$  в среде частиц  $\beta$ , отличается лишь множителем  $\frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}$ :

$$\mathbf{F}^{\alpha/\beta} = \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_{\beta}} \mathbf{F}_{\alpha}. \quad (11.7)$$

Тем не менее не следует забывать, что все-таки «реальной» физической величиной является средняя сила  $\mathbf{F}_{\alpha}$ , в то время как динамическая сила трения — это лишь формально введенное удобное понятие.

Определенные в выражениях (11.5) потенциальные функции  $\psi_{\beta}$  и  $\Phi_{\beta}$  сами по себе не имеют какого-либо простого физического смысла, однако их наглядное истолкование не представляет труда. Функция  $\Phi_{\beta}$ , как уже говорилось, аналогична потенциалу электрического поля в электростатике. Функция же  $\psi_{\beta}(\mathbf{v})$  с точностью до несущественного множителя  $(-n_{\beta}/8\pi)$  геометрически есть не что иное, как среднее расстояние (удаленность) точки наблюдения  $\mathbf{v}$  от тех точек  $\mathbf{v}_{\beta}$  в пространстве скоростей, в которых расположены полевые частицы  $\beta$ ; иначе говоря, среднее абсолютное значение относительной скорости

$$\psi_{\beta}(\mathbf{v}) = \left( -\frac{n_{\beta}}{8\pi} \right) \overline{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\beta}|}^{(\beta)}. \quad (11.8)$$

Здесь черта означает усреднение по распределению полевых частиц  $\beta$  в скоростном пространстве.

Возвращаясь к уравнению (11.1), заметим, что в том случае, когда движение частицы в поле внешней силы  $\mathbf{F}^{(e)}$  может быть описано уравнениями Гамильтона (а это не всегда так, например при наличии трения)

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{v}; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{F}^{(e)}, \quad (11.9)$$



мы можем второй и третий члены в левой части уравнения (11. 1) привести к виду

$$\operatorname{div}_r(\mathbf{v}f_\alpha) + \frac{1}{m_\alpha} \operatorname{div}_v(\mathbf{F}^{(e)}f_\alpha) = (\mathbf{v}\nabla_r)f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}^{(e)}\nabla_v)f_\alpha + f_\alpha \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_i} F_i^{(e)} \right\}. \quad (11. 10)$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_i} F_i^{(e)} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} = 0. \quad (11. 11)$$

Поэтому кинетическое уравнение (11. 1) примет более знакомый вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla_r)f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}^{(e)}\nabla_v)f_\alpha = C^\alpha, \quad (11. 12)$$

где

$$C^\alpha = -\operatorname{div}_v \left( \sum_\beta \mathbf{j}^{\alpha/\beta} \right). \quad (11. 13)$$

Если формулы (11. 3) подставить в выражение (11. 2) для столкновительного потока, то получим:

$$\mathbf{j}^{\alpha/\beta} = -L^{\alpha/\beta} \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} f_\alpha \nabla \varphi_\beta - (\nabla f_\alpha \nabla) \nabla \psi_\beta \right]. \quad (11. 14)$$

Собственный столкновительный член  $C^{\alpha/\alpha}$  будет при этом иметь вид:

$$\begin{aligned} C^{\alpha/\alpha} &= L^{\alpha/\alpha} \nabla [f_\alpha \nabla \varphi_\alpha - (\nabla f_\alpha \nabla) \nabla \psi_\alpha] = \\ &= L^{\alpha/\alpha} \left( f_\alpha^2 - \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial v_i \partial v_k} \right). \end{aligned} \quad (11. 15)$$

Нетрудно убедиться, что распределение Максвелла обращает в нуль собственный поток  $\mathbf{j}^{\alpha/\alpha}$ , а вместе с ним и член  $C^{\alpha/\alpha}$ .

В заключение покажем, как можно выражение (11. 14) для потока  $\mathbf{j}^{\alpha/\beta}$  привести к виду, полученному Л. Д. Ландау в 1936 г. [6]. Для этого обозначим:

$$U_{ik} = \frac{\partial^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{\partial v_i \partial v_k} = \frac{\delta_{ik}}{u} - \frac{u_i u_k}{u^3}, \quad (11. 16)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ .

Тогда, учитывая что  $\Phi_\beta = \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial v_k \partial v_k}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i \Phi_\beta &= -\frac{1}{8\pi} \int U_{ik} \frac{\partial f'_\beta}{\partial v'_k} d\mathbf{v}'; \\ \nabla_i \nabla_k \psi_\beta &= -\frac{1}{8\pi} \int U_{ik} f'_\beta d\mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

где  $f'_\beta \equiv f_\beta(\mathbf{v}')$ .

Подставляя выражения (11.17) в формулу (11.14), можно выражение для потока  $j^{a/\beta}$  записать в симметричной форме

$$j_i^{a/\beta} = 2\pi\lambda \frac{e_a^2 e_\beta^2}{m_a} \int U_{ik} \left( \frac{f_a}{m_\beta} \frac{\partial f'_\beta}{\partial v'_k} - \frac{f'_\beta}{m_a} \frac{\partial f_a}{\partial v_k} \right) d\mathbf{v}', \quad (11.18)$$

в которой оно и было впервые получено Ландау. Любопытно отметить, что в зарубежной литературе до недавнего времени было распространено ошибочное мнение, что уравнение, полученное Ландау, якобы неправильно. Это мнение основано, по-видимому, на известной статье Коэна, Спитцера и Роутли [7], в которой утверждается, что Ландау не учел силу динамического трения, что не соответствует истине.

После Ландау много важных результатов в этой области было получено Чандрасекаром [1], который изучал динамику звезд, рассматривая их как частицы, взаимодействующие по закону Кулона. Им, в частности, были получены выражения для силы динамического трения и тензора диффузии в случае максвелловского распределения полевых частиц.

Из недавних работ следует отметить изящный вывод уравнения Ландау в работе Розенблюта, Мак-Дональда и Джадда [3], в которой, как уже упоминалось, введены потенциальные функции, сходные с нашими.

## § 12. Кинетическое уравнение с учетом поляризации среды

В предыдущих параграфах на основе представления о парных столкновениях частиц было получено кинетическое уравнение для плазмы. Картина парных столкновений хорошо применима при короткодействующих межчастичных силах для достаточно разреженного газа. В самом деле, если радиус взаимодействия частиц  $d$  (эффективный диаметр частицы-молекулы) много меньше среднего расстояния между частицами, равного по порядку величины  $n^{-1/3}$ , где  $n$  — плотность газа, то в сфере взаимодействия с объемом  $\sim d^3$  в среднем будет мало молекул:

$$\bar{N}_d = nd^3 \ll 1. \quad (12.1)$$

В этих условиях можно пренебречь вероятностью множественных столкновений, при которых в сфере взаимодействия одновременно

оказывается три или более молекул, и учитывать лишь парные столкновения.

Однако кулоновские силы, действующие между частицами плазмы, нельзя считать короткодействующими. Потенциальная энергия взаимодействия  $U_{12}$  между двумя частицами плазмы, обладающими зарядами  $e_1$  и  $e_2$ , в присутствии остальных зарядов искажается дебаевской экранировкой:

$$U_{12}^{(\text{эф})} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}} \exp\left(-\frac{r_{12}}{D}\right); \quad r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|. \quad (12.2)$$

Поэтому в плазме взаимодействие между частицами эффективно простирается по меньшей мере на расстояния порядка радиуса Дебая  $D$ . Однако в рассматриваемых нами условиях, типичных для квазинейтральной плазмы,  $D \gg n^{-1/2}$ , и в сфере взаимодействия оказывается много частиц:

$$N_D = nD^3 \gg 1. \quad (12.3)$$

Таким образом, в плазме некоторая выделенная частица одновременно взаимодействует с многими другими частицами. В этих условиях становится сомнительной применимость формул, полученных в предыдущих параграфах на основе представления о парных столкновениях.

Тем не менее строгое рассмотрение показывает, что указанные формулы, имеющие, как мы знаем, логарифмическую точность (т. е. справедливые с точностью до множителя порядка единицы под знаком кулоновского логарифма), являются правильными, и явный учет множественных столкновений в обычных условиях (см. ниже) приводит к тем же результатам. Детальное обоснование этого интересного вывода является довольно сложным и требует рассмотрения системы уравнений для коррелятивных функций. Читатели, интересующиеся этим вопросом, должны обратиться к оригинальным работам [8—10]. Здесь же мы ограничимся наглядными нестрогими соображениями.

Рассмотрим пробную частицу  $\alpha$ , летящую через плазму. Для простоты будем считать эту частицу бесконечно тяжелой ( $m_\alpha \rightarrow \infty$ ). Тогда ее движение можно считать заданным — она будет двигаться по прямой линии с постоянной скоростью  $\mathbf{v}_\alpha$ . Заметим, что, как это следует из формулы (11.7), полученной из картины парных столкновений, средняя сила торможения, испытываемая в этих условиях пробной частицей со стороны полевых частиц  $\beta$ , совпадает с динамической силой трения:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^\alpha &= \lim_{m_\alpha \rightarrow \infty} \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\alpha} \mathbf{F}^{\alpha/\beta} = \\ &= \mathbf{F}^{\alpha/\beta} = \lambda \frac{4\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\beta} \nabla_\alpha \int \frac{f_\beta d\mathbf{v}_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Иными словами, динамическая сила трения — это сила, которую испытывала бы пробная частица, если бы она была бесконечно тяжелой (или если бы двигалась заданным образом по прямой с постоянной скоростью).

Опишем вокруг траектории частицы цилиндр радиуса  $\varrho$  (рис. 7).

Столкновения пробной частицы с теми полевыми частицами, которые обладают прицельными параметрами  $\varrho \gg n^{-1/2}$ , будем называть «множественными столкновениями». Ниже рассмотрим их отдельно. «Парными столкновениями» следовало бы называть столкновения с прицельными параметрами, много меньшими среднего расстояния между частицами, т. е. с  $\varrho \ll n^{-1/2}$ . Следует

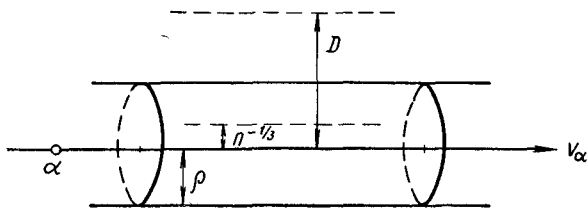


Рис. 7.

обратить внимание, что вследствие дальнедействующего характера кулоновских сил в полностью ионизованной плазме трудно выделить столкновения, которые можно было бы назвать «тройными», «четверными» и т. д., т. е. «не слишком множественными».

Покажем, что метод расчета парных столкновений можно применять не только к столкновениям с прицельными параметрами, удовлетворяющими условию  $\varrho \ll n^{-1/2}$ , но и при  $\varrho \sim n^{-1/2}$  и даже при еще больших прицельных параметрах. В самом деле, как было показано в § 2, электростатический потенциал пробной частицы  $\alpha$  в плазме искажается дебаевской экранировкой (2. 5) и поэтому эффективная потенциальная энергия взаимодействия \* некоторой полевой частицы  $\beta$  с пробной частицей  $\alpha$  имеет вид (12. 2):

$$U_{\alpha\beta}^{(\text{эф})} = \frac{e_{\alpha}e_{\beta}}{r_{\alpha\beta}} \exp\left(-\frac{r_{\alpha\beta}}{D}\right). \quad (12. 5)$$

В этой формуле  $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|$ , и при  $\bar{r}_{\alpha\beta} \ll D$  имеем просто

$$U_{\alpha\beta}^{(\text{эф})} |_{r_{\alpha\beta} \ll D} = \frac{\tilde{e}_{\alpha}e_{\beta}}{r_{\alpha\beta}}. \quad (12. 6)$$

Иными словами, если расстояние между двумя частицами меньше дебаевского радиуса, то присутствие остальных частиц никак не сказывается на взаимодействии этих двух выделенных частиц. При этом изменение импульса и энергии обеих частиц будет,

\* Вывод и возможность рассмотрения этой величины как эффективной энергии взаимодействия двух частиц приводятся также в работе А. А. Веденова, помещенной в настоящем выпуске.

очевидно, таким же, как если бы эти две частицы были изолированы от всех остальных. Мы видим, таким образом, что формула парных столкновений может применяться для всех прицельных параметров, меньших дебаевского радиуса, т. е. при  $q \ll D$ . Так как в наших условиях  $D \gg n^{-1/2}$ , то столкновения можно рассчитывать как парные, в том числе и при  $q \gg n^{-1/2}$ , если по-прежнему  $q \ll D$ . Фактически, однако, даже при  $q = D$  отклонение правильного закона взаимодействия (12. 5), учитывающего присутствие остальных частиц, от чисто кулоновского закона (12. 6) невелико — на множитель порядка единицы. Поэтому, ограничиваясь логарифмической точностью, можно все столкновения вплоть до  $q = D$  рассматривать как парные (что и делалось ранее в предыдущих параграфах), а вкладом столкновений с  $q > D$  вообще пренебречь.

Таким образом, обрезание кулоновского логарифма на максимальном прицельном параметре  $q_{\text{макс}} = D$  является грубым, приближенным способом учета множественного характера столкновений при  $q \gg n^{-1/2}$ . Эту множественность можно, однако, учесть более правильным и последовательным способом. В самом деле, множественность столкновений заключается в том, что выделенная частица («пробная») в каждый данный момент времени взаимодействует (сталкивается) не с одной, а с большим числом остальных частиц. Такая ситуация позволяет рассматривать множественные столкновения макроскопически, т. е. как взаимодействие выделенной частицы со средой. Электромагнитные свойства этой среды — плазмы — полностью описываются тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , учитывающим временную и пространственную дисперсию. Можно заранее предвидеть, что полученные на основе указанного макроскопического подхода формулы, явным образом учитывающие множественность столкновений в плазме и применимые при  $q \gg n^{-1/2}$ , будут естественным образом «сшиваться» с формулами парных столкновений, применимость которых, как уже было разъяснено выше, ограничена условием  $q \ll D$ . В самом деле, так как  $D \gg n^{-1/2}$ , то в области прицельных параметров  $n^{-1/2} \ll q \ll D$  должны быть применимы и те, и другие формулы.

Следуя намеченной программе, рассмотрим движение бесконечно тяжелой пробной частицы  $\alpha$  в среде, обладающей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ij}$ , и определим среднюю тормозящую силу, действующую на указанную частицу. При макроскопическом подходе, когда плазма рассматривается как сплошная среда, для этого необходимо решить уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{стоп}} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\hat{\epsilon} \cdot \mathbf{E})}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (12. 7)$$

где величину  $\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$  следует понимать как вектор с компонентами  $(\hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E})_i = \varepsilon_{ij} E_j$ . Здесь  $\mathbf{j}_{\text{сгор}} = e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\alpha} t)$  — плотность «стороннего» тока, создаваемого пробной частицей  $\alpha$ . Для решения этих уравнений удобно разложить все величины в интегралы Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}; \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{j}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

При этом, используя известное представление

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\alpha} t) = (2\pi)^{-3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\alpha} t)} d\mathbf{k}, \quad (12.9)$$

найдем, что фурье-компонента плотности тока равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} (2\pi)^{-3} e^{-i\omega t}, \quad (12.10)$$

где  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}$ . Фурье-компоненты остальных величин зависят от времени аналогичным образом. Исключая из уравнений (12.7) магнитное поле, получим уравнение

$$(\varepsilon_{ik} + N_i N_k - \delta_{ik} N^2) E_k = \frac{4\pi}{i\omega} j_i, \quad (12.11)$$

где  $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{k}c}{\omega}$ .

Для простоты будем рассматривать плазму как однородную изотропную среду без магнитного поля. Тогда тензор  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  должен быть построен лишь на тензорах  $\delta_{ij}$  и  $k_i k_j$  и поэтому может быть записан в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}, \quad (12.12)$$

где  $\varepsilon^l$ ,  $\varepsilon^{tr}$  — скалярные функции  $\mathbf{k}$  и  $\omega$ . При этом, умножив уравнение (12.11) слева на вектор  $\mathbf{k}$ , найдем

$$\varepsilon^l \mathbf{k} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{i\omega} \mathbf{k} \mathbf{j}. \quad (12.13)$$

Подставляя отсюда  $\mathbf{k} \mathbf{E}$  в уравнение (12.11), можно найти фурье-компоненту поля

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi}{i\omega} \left\{ \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{j})}{\varepsilon^l} - \frac{[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{j}]]}{\varepsilon^{tr} - N^2} \right\}, \quad (12.14)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ , и далее по формуле (12.8) — само поле. В той точке  $\mathbf{r} = \mathbf{v}_{\alpha} t$ , где находится пробная частица  $\alpha$ , это поле будет равно

$$\mathbf{E} = -i \frac{e_{\alpha}}{2\pi^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon^l} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}) [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{v}_{\alpha}]]}{c^2 [1 - (\mathbf{n}\mathbf{v}_{\alpha}/c)^2 \varepsilon^{tr}]} \right\}_{\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}}. \quad (12.15)$$

Ограничимся для простоты случаем нерелятивистских скоростей  $v \ll c$ . Тогда второй член в фигурных скобках, пропорциональный

$v^2/c^2$  (и отвечающий, как показывает специальный анализ, черенковскому излучению), можно опустить. Полученное поле и определяет силу, действующую на пробную частицу

$$\mathbf{F}_{\text{макро}} = e_a \mathbf{E} = -i \frac{e_a^2}{2\pi^2} \int \frac{\mathbf{k} dk}{k^2 \epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)_{\omega = \mathbf{k}v_a}}. \quad (12.16)$$

Эта формула, однако, является слишком общей, так как определяет торможение пробной частицы в произвольной среде, обладающей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ . Чтобы применить ее к плазме, нужно знать конкретный вид тензора  $\epsilon_{ij}$  в плазме.

В настоящем разделе мы не можем заняться детальным выводом тензора  $\epsilon_{ij}$  для плазмы, так как это выходит сейчас за рамки нашей задачи и требует места. Воспользуемся поэтому готовым результатом. Комплексная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)$  (так называемая «продольная») в нерелятивистской плазме равна

$$\epsilon^l(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\beta} \frac{4\pi e_{\beta}^2}{m_{\beta} \omega k^2} \int_{\odot} \frac{\mathbf{k}v_{\beta}}{\omega - \mathbf{k}v_{\beta}} \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial v_{\beta}} \right) dv_{\beta}. \quad (12.17)$$

Здесь значок  $\odot$  у интеграла означает, что при интегрировании по  $v_{\beta}$  полюс  $\omega - \mathbf{k}v_{\beta} = 0$  следует обходить в комплексной плоскости  $v_{\beta}$  снизу\*.

Мнимую и действительную части диэлектрической проницаемости  $\epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)$  можно выделить, воспользовавшись известной формулой

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}v} = P \frac{1}{\omega - \mathbf{k}v} + i\pi \delta(\omega - \mathbf{k}v). \quad (12.18)$$

Здесь  $P$  — символ главного значения интеграла. Учитывая также, что действительная часть  $\epsilon^l$  (т. е.  $\text{Re} \epsilon^l$ ) является четной функцией  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  (см. [11]), выражение  $1/\epsilon^l$  в формуле (12.16) можно заменить выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^l} &\rightarrow -i \frac{\text{Im} \epsilon}{|\epsilon|^2} = \frac{i\pi}{|\epsilon|^2} \sum_{\beta} \frac{4\pi e_{\beta}^2}{m_{\beta} \omega k^2} \int (\mathbf{k}v_{\beta}) \times \\ &\times \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\beta}}{\partial v_{\beta}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k}v_{\beta}) dv_{\beta}. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Слагаемое с  $\text{Re} \epsilon^l$  в числителе выпадает из формулы (12.16) при интегрировании по  $k$  вследствие указанной четности. Наличие

\* Читатели, интересующиеся выводом выражения (12.17), могут найти его в книге В. Силина и А. Рухадзе [11], где приводится также вывод формулы (12.15).

$\delta$ -функции в выражении (12. 19) позволяет также сократить множитель  $k v_{\beta}$  с  $\omega$  в знаменателе. Таким образом, формулу (12. 16) в случае плазмы можно представить в виде

$$F_{\text{макро}} = \sum_{\beta} F_{\text{макро}}^{\alpha/\beta},$$

где

$$F_{\text{макро}}^{\alpha/\beta} = 2 \frac{e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\beta}} \int \hat{U} \cdot \frac{\partial f_{\beta}}{\partial v_{\beta}} dv_{\beta}. \quad (12. 20)$$

Здесь точка между тензором  $\hat{U}$  и вектором  $\partial f_{\beta}/\partial v_{\beta}$  означает свертку по ближайшим индексам.

Тензор  $\hat{U}$  имеет компоненты

$$U_{ij} = \int \frac{k_i k_j \delta(k v_{\alpha} - k v_{\beta})}{k^4 |\varepsilon^l(k, \omega)|_{\omega=k v_{\alpha}}^2} dk. \quad (12. 21)$$

В каком отношении эта сила торможения соответствует силе трения, полученной нами ранее на основе картины парных столкновений?

Заметим, прежде всего, что при решении уравнений (12. 7) считалось, что пробная частица создает в среде ток

$$\mathbf{j}_{\text{стоп}} = e_{\alpha} v_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\alpha} t). \quad (12. 22)$$

Это значит, что пробная частица движется с заданной скоростью  $\mathbf{v}_{\alpha}$  по прямой, не отклоняясь и не рассеиваясь. Определяемая при таких предположениях сила торможения является в действительности не истинной средней силой, а, как это отмечалось при выводе формулы (12. 4), динамической силой трения (см. также работу [12]). Поэтому формулу (12. 20) следует сравнить с формулой (12.4)

$$F_{\text{микро}}^{\alpha/\beta} = \lambda \frac{4\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\beta}} \nabla_{\alpha} \int \frac{f_{\beta} dv_{\beta}}{|\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}|}, \quad (12. 23)$$

соответствующей динамической силе трения, полученной из картины парных столкновений. Здесь  $\lambda = \ln(\varrho_{\text{макс}}/\varrho_{\text{мин}})$ , причем  $\varrho_{\text{макс}} = D$ , а  $\varrho_{\text{мин}} = e^2/T$ . Как было показано в § 1—2, этот кулоновский логарифм возникает при интегрировании по прицельным параметрам начиная от  $\varrho = 0$  до  $\varrho_{\text{макс}} = D$ , причем обрезание на верхнем пределе приходится вводить искусственно. Аргументы в пользу такого обрезания сводились к тому, что поляризация среды приводит к дебаевской экранировке кулоновского поля зарядов. Поэтому столкновения с прицельными параметрами  $\varrho > D$  не приводят к отклонению или торможению частиц. Макроскопическая формула (12. 20) автоматически учитывает поляризацию среды, и поэтому обрезание на верхнем пределе должно возникать



само собой. В самом деле, вводя единичный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ , формулу (12. 17) для  $\varepsilon^l$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \varepsilon^l(\mathbf{k}, \omega)_{\omega = k v_\alpha} = \\ & = 1 + \frac{1}{k^2} \sum_{\beta} \frac{4\pi e_{\beta}^2}{m_{\beta} (n v_{\alpha})} \int \frac{n v_{\beta}}{n v_{\alpha} - n v_{\beta}} \left( \mathbf{n} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial v_{\beta}} \right) d v_{\beta}. \end{aligned} \quad (12. 24)$$

Если, например,  $f_{\beta}$  — максвелловские распределения с одинаковыми температурами, то

$$\varepsilon^l(\mathbf{k}, k v_{\alpha}) = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} \left\{ \sum_{\beta} \left\langle \frac{n v_{\beta}}{n v_{\beta} - n v_{\alpha}} \right\rangle_{\beta} \right\}. \quad (12. 25)$$

Здесь  $D = \sqrt{T/4\pi n e^2}$  — дебаевский радиус, а скобки  $\langle \rangle_{\beta}$  означают усреднение по распределению частиц  $\beta$ . Выражение в фигурных скобках можно считать безразмерной функцией порядка единицы, если скорость пробной частицы  $\alpha$  порядка тепловых скоростей частиц плазмы. Очевидно, и при произвольных неравновесных распределениях функция  $\varepsilon^l(\mathbf{k}, k v_{\alpha})$  будет иметь вид

$$\varepsilon^l(\mathbf{k}, k v_{\alpha}) = 1 + \frac{1}{k^2 D^2} \xi(\mathbf{v}_{\alpha}), \quad (12. 26)$$

где  $\xi(\mathbf{v}_{\alpha})$  — функция порядка единицы. Отсюда следует, что тензор  $U_{ij}$ , определяемый формулой (12. 21), имеет вид

$$U_{ij} = \int \frac{k_i k_j \delta(k v_{\alpha} - k v_{\beta}) dk}{k^4 [1 + (\xi_1/k^2 D^2) + (\xi_2/k^4 D^4)]}, \quad (12. 27)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — функции  $\mathbf{v}_{\alpha}$  порядка единицы. Волновой вектор  $k$  по порядку величины соответствует прицельному параметру  $\varrho \sim \sim k^{-1}$ , и интегрирование в формуле (12. 27) по  $k$  соответствует интегрированию по прицельным параметрам. При  $\varrho \rightarrow \infty$ , что соответствует  $k \rightarrow 0$ , интеграл (12. 27) сходится естественным образом, и никакого искусственного обрезания вводить не требуется. При малых  $k$ , таких, что  $kD \ll 1$ , величина  $\varepsilon^l$  будет большой, и подынтегральное выражение будет мало. Интеграл (12. 27) приближенно, с логарифмической точностью, можно вычислить, считая, что интегрирование начинается не от  $k = 0$ , а от  $k_{\text{мин}} \sim D^{-1}$ , и полагая при этом  $\varepsilon = 1$ . Тогда

$$U_{ij} = \int_{k_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{k_i k_j}{k^4} \delta(k v_{\alpha} - k v_{\beta}) dk. \quad (12. 28)$$

Этот интеграл логарифмически расходится при больших  $k$ , т. е. при малых прицельных параметрах. Однако на малых расстояниях — порядка межчастичных  $n^{-1/3}$  и меньших — макроскопический подход к задаче неприменим, так как при этом плазма

не может рассматриваться как сплошная среда. Поэтому интегрирование в формуле (12. 28) будем проводить не до  $k = \infty$ , а до некоторого  $k_{\text{макс}}^*$ , удовлетворяющего условию  $k_{\text{макс}}^* \ll n^{1/3}$ , которое на языке прицельных параметров соответствует условию  $q_{\text{мин}}^* \gg n^{-1/3}$ .

Последнее условие является, как мы знаем, условием применимости макроскопического подхода. Тогда, обозначив  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$  и учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} u_i U_{ij} &= 0; \\ U_{ii} &= \int_{k_{\text{мин}}}^{k_{\text{макс}}^*} k^{-2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{u}) d\mathbf{k} = \frac{2\pi}{u} \ln \left( \frac{k_{\text{макс}}^*}{k_{\text{мин}}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (12. 29)$$

нетрудно найти

$$U_{ij}(\mathbf{u}) = \pi \lambda^* \left( \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^3} \right), \quad (12. 30)$$

где

$$\lambda^* = \ln \frac{k_{\text{макс}}^*}{k_{\text{мин}}} = \ln \frac{D}{q_{\text{мин}}^*}.$$

Очевидно, величина  $\lambda^*$  является частью кулоновского логарифма. Подставляя найденное значение  $U_{ij}$  в формулу (12. 20), получим

$$F_{i\text{макро}}^{\alpha/\beta} = 2\pi \lambda^* \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\beta} \int \left( \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^3} \right) \frac{\partial f_\beta}{\partial v_\beta} d\mathbf{v}_\beta. \quad (12. 31)$$

Фигурирующий здесь в скобках тензор можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^3} \right)_{\mathbf{u}=\mathbf{v}_\alpha-\mathbf{v}_\beta} &= \nabla_{i\alpha} \nabla_{j\alpha} |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| = \\ &= -\nabla_{i\alpha} \nabla_{j\beta} |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|, \end{aligned} \quad (12. 32)$$

где  $\nabla_{i\alpha} \equiv \partial/\partial v_{i\alpha}$ .

Тогда интеграл можно преобразовать по частям:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v}_\beta (\nabla_{j\beta} f_\beta) \nabla_{i\alpha} \nabla_{i\alpha} |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| &= \int d\mathbf{v}_\beta f_\beta \nabla_{i\alpha} \Delta_\beta |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| = \\ &= 2 \nabla_{i\alpha} \int \frac{f_\beta d\mathbf{v}_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|}. \end{aligned} \quad (12. 33)$$

Окончательно получаем

$$F_{\text{макро}}^{\alpha/\beta} = \lambda^* \frac{4\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\beta} \nabla_\alpha \int \frac{f_\beta d\mathbf{v}_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|}. \quad (12. 34)$$

Напоминаем, что здесь  $\lambda^* = \ln(D/q_{\text{мин}}^*)$ , причем  $q_{\text{мин}}^* \gg n^{-1/3}$ . Тем самым мы исключили прицельные параметры порядка межчастичных расстояний и меньшие. Последние следует рассматри-

вать по формулам парных столкновений, картина которых применима, как уже было разъяснено выше, от  $q = 0$  до  $q \ll D$ . Если выбрать введенное выше  $q_{\text{мин}}^*$  так, чтобы  $q_{\text{мин}}^* \ll D$ , то вклад парных столкновений с прицельными параметрами от  $q = 0$  до  $q_{\text{мин}}^*$  составит [см. формулу (12. 4)]:

$$F_{\text{микро}}^{\alpha/\beta} = \text{In} \left( \frac{q_{\text{мин}}^*}{e^2/T} \right) \frac{4\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\beta}} \nabla_{\alpha} \int \frac{f_{\beta} dv_{\beta}}{|v_{\alpha} - v_{\beta}|}. \quad (12. 35)$$

Складывая выражения (12. 35) и (12. 34), получим формулу (12. 4):

$$F^{\alpha/\beta} = F_{\text{микро}}^{\alpha/\beta} + F_{\text{макро}}^{\alpha/\beta} = \lambda \frac{4\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2}{m_{\beta}} \nabla_{\alpha} \int \frac{f_{\beta} dv_{\beta}}{|v_{\alpha} - v_{\beta}|}, \quad (12. 36)$$

где теперь уже

$$\lambda = \text{In} \left( \frac{q_{\text{мин}}^*}{e^2/T} \right) + \text{In} \left( \frac{D}{q_{\text{мин}}^*} \right) = \text{In} \left( \frac{D}{e^2/T} \right), \quad (12. 37)$$

т. е. получаем полный кулоновский логарифм. Тот факт, что две эти силы складываются столь естественным образом, объясняется, как было установлено в начале параграфа, тем, что области применимости микроскопического и макроскопического подходов, т. е. парных и множественных столкновений, перекрываются: первые пригодны от  $q = 0$  до  $q \ll D$ , а вторые — от  $q \gg n^{-1/3}$  до  $q = \infty$ . Таким образом, при правильном рассмотрении нет необходимости вводить какое-либо искусственное обрезание прицельных параметров, так как учет поляризации сред автоматически приводит к такому обрезанию. Кроме того, показано, что с логарифмической точностью все столкновения вплоть до  $q = D$  можно рассчитывать как парные.

Возможен, однако, и другой подход. Структура формулы (12. 20) для  $F_{\text{макро}}^{\alpha/\beta}$  такова, что множественные столкновения можно рассматривать по существу как парные, но осложненные влиянием среды, т. е. присутствием других частиц. Переход от формулы (12. 27) к формуле (12. 28) показывает, что это осложняющее влияние пропадает для волновых чисел  $k \gg D^{-1}$ , т. е. для прицельных параметров  $q \ll D$ . Поэтому формулу (12. 29) можно экстраполировать на область волновых чисел  $k > k_{\text{макс}}^*$ , отвечающую парным столкновениям, которые учитываются при этом правильным образом. В кулоновском логарифме роль минимального прицельного параметра играет  $q_{\text{мин}} = e^2/T$ , который, однако, в формулах парных столкновений возникает автоматически, а не искусственно, в отличие от  $q_{\text{макс}} = D$ . Интеграл по волновым числам  $k$  в формуле (12. 28) логарифмически расходится при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому, чтобы правильно экстраполировать формулы множественных столкновений на область  $k > k_{\text{макс}}^*$ , где столкновения являются парными, интегралы по  $k$  следует искусственно обрезать на

$$k_{\text{макс}} = q_{\text{мин}}^{-1} = T/e^2. \quad (12. 38)$$

При таком подходе для силы динамического трения получим выражение (12. 20)

$$F_i^{\alpha/\beta} = 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\beta} \int U_{ij} \frac{\partial f_\beta}{\partial v_{j\beta}} d\mathbf{v}_\beta, \quad (12. 39)$$

где теперь

$$U_{ii} = \int_0^{k_{\text{макс}}=T/e^2} \frac{k_i k_j \delta (\mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k} \mathbf{v}_\beta)}{k^4 |\epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)|_{\omega=\mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha}^2} dk. \quad (12. 40)$$

Термин «множественные столкновения» можно было бы заменить термином «взаимодействие с волнами». Можно сказать, что формулы (12. 39) и (12. 40) правильно учитывают как парные столкновения (собственно «столкновения»), так и взаимодействие пробной частицы с волнами в плазме. Поэтому формулы (12. 39) и (12. 40) являются не только уточнением формулы парных столкновений (12. 36), но и обладают новым физическим содержанием. В обычных условиях, когда температуры ионов и электронов в плазме одинаковы и различные колебания в плазме возбуждены лишь до уровня равновесных тепловых шумов, формулы множественных столкновений (12. 39) и (12. 40) с логарифмической точностью совпадают с формулой (12. 30) парных столкновений.

Возможны, однако, и такие условия, когда формула парных столкновений (12. 30) оказывается неверной и нужно пользоваться формулами (12. 39) и (12. 40). В работе В. Силина и Л. Горбунова [13] показано, что такие условия имеют место, например, в сильно неизотермической плазме, когда температура электронов значительно (примерно в тысячу раз  $T_e/T_i \sim M/m$ ) превышает температуру ионов. Легко понять причину, почему в этом случае взаимодействие с волнами оказывается существенным. Волна, обладающая частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , распространяется с фазовой скоростью  $\omega/k$  и взаимодействует в основном с теми частицами плазмы, скорости которых близки к значению  $\omega/k$ . Такие частицы, двигаясь в том же направлении, что и волна, будут долгое время находиться в фазе с волной, и потому их взаимодействие будет существенным. Отметим, что такой «резонансный» характер взаимодействия частиц с волнами обуславливает появление в выражении (12. 17) для диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon^l$  «резонансных» знаменателей  $\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}$ . Поэтому учет взаимодействия частиц плазмы с волнами оказывается необходимым, если в плазме сильно возбуждены волны, фазовые скорости которых  $\omega/k$  по порядку величины близки (или меньше) к тепловым (т. е. средним) скоростям частиц. В примере В. Силина и Л. Горбунова [13] сильно возбуждены ионно-звуковые колебания (так называемый «ионный звук с электронной температурой»), фазовая скорость которых при  $T_e \gg T_i$  примерно равна  $v_{\text{фаз}} = \sqrt{T_e/M}$ . Условие

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{T_e/M} \gg \sqrt{T_i/M} = v_{Ti} \quad (12. 41)$$

обеспечивает слабость взаимодействия этих волн с ионами, и потому волны сравнительно слабо затухают, т. е. оказываются сильно возбужденными (чего не было бы при  $T_e \sim T_i$ ). С другой стороны,

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{T_e/M} \ll \sqrt{T_e/m} = v_{Te}, \quad (12.42)$$

и поскольку в плазме много медленных электронов (в соответствии с распределением Максвелла), то необходимо учитывать взаимодействие электронов с волнами. Использование формулы (12.36) для силы динамического трения, учитывающей лишь парные столкновения, привело бы к неверным результатам. В подобных условиях неприменимо и кинетическое уравнение с обычным (парным) столкновительным членом в форме, предложенной Ландау.

Для того чтобы установить вид нового столкновительного члена, учитывающего взаимодействие частиц с волнами, необходимо, кроме силы динамического трения, выраженной формулами (12.39) и (12.40), знать еще тензор диффузии пробных частиц в пространстве скоростей. При макроскопическом способе рассмотрения множественных столкновений механизм такой диффузии является рассеяние пробной частицы на колебаниях (флуктуациях) электрического поля в среде, исследование которых сильно осложнило бы нашу задачу\*. Поэтому мы воспользуемся лишь нестрогими наглядными соображениями.

Наиболее просто тензор диффузии  $\hat{D}^{\alpha/\beta}$  можно вычислить в случае термодинамического равновесия, когда распределение пробных частиц является максвелловским:

$$f_{\alpha} = \text{const} \exp\left(-\frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2T_{\alpha}}\right). \quad (12.43)$$

В этом случае поток частиц в скоростном пространстве [см. формулу (10.2)] должен обращаться в нуль:

$$j_i^{\alpha/\beta} = \frac{1}{m_{\alpha}} F_i^{\alpha/\beta} f_{\alpha} - D_{ij}^{\alpha/\beta} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial v_{j\alpha}} = 0. \quad (12.44)$$

Подставив сюда  $\partial f_{\alpha} / \partial v_{\alpha}$  из формулы (12.43), после сокращения  $f_{\alpha}$  получим связь тензора диффузии с силой динамического трения:

$$\frac{1}{m_{\alpha}} F_i^{\alpha/\beta} = -v_{j\alpha} D_{ij}^{\alpha/\beta} \frac{m_{\alpha}}{T_{\alpha}}. \quad (12.45)$$

Это соотношение является аналогом (для скоростного пространства) известной формулы Эйнштейна, связывающей диффузию частиц (обычную) с их подвижностью. Подставив сюда  $F^{\alpha/\beta}$

---

\* Рассмотрение этих колебаний и вывод тензора диффузии приводятся в 3 выпуске «Вопросов теории плазмы» в работе В. Д. Шаfranова.

из формулы (12. 39), получим

$$F_i^{\alpha/\beta} = -\frac{m_\alpha^2}{T_\alpha} v_{j\alpha} D_{ij}^{\alpha/\beta} = 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\beta} \int d\mathbf{v}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial v_\beta} \int_0^{T/e^2} \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta)}{k^4 |\varepsilon^I|^2} d\mathbf{k}. \quad (12. 46)$$

Это соотношение справедливо только в условиях полного термодинамического равновесия, когда, в частности, и полевые частицы  $\beta$  описываются максвелловским распределением

$$f_\beta = \text{const} \exp\left(-\frac{m_\beta v_\beta^2}{2T_\beta}\right), \quad (12. 47)$$

причем температуры  $T_\alpha$  и  $T_\beta$  должны быть одинаковы ( $T_\alpha = T_\beta = T$ ). При этом производную  $\partial f_\beta / \partial v_\beta$  в выражении (12. 46) можно заменить:

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial v_\beta} = -\frac{m_\beta}{T} \mathbf{v}_\beta f_\beta. \quad (12. 48)$$

Скалярное произведение  $\mathbf{k}\mathbf{v}_\beta$ , получающееся при этом в интеграле по  $k$ , можно ввиду наличия дельта-функции  $\delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta)$  заменить на  $\mathbf{v}\mathbf{k}_\alpha$ . Тогда из выражения (12. 46) получим

$$v_{i\alpha} D_{ij}^{\alpha/\beta} = v_{i\alpha} \left\{ 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha^2} \int U_{ij} f_\beta d\mathbf{v}_\beta \right\} \quad (12. 49)$$

(по  $i$  — суммирование от 1 до 3).

Естественно заключить, что выражение в фигурных скобках и является тензором диффузии

$$D_{ij}^{\alpha/\beta} = 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha^2} \int U_{ij} f_\beta d\mathbf{v}_\beta, \quad (12. 50)$$

где

$$U_{ij} = \int_0^{T/e^2} \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta)}{k^4 |\varepsilon^I|_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}^2} d\mathbf{k}.$$

В соответствии с выводом следовало бы считать, что это выражение применимо только в случае термодинамического равновесия. Однако, если взаимодействие с волнами несущественно, то для тензора  $\hat{U}$  справедливо приближенное выражение, аналогичное выражению (12. 30):

$$U_{ij} = \int_{k_{\text{мин}}=D^{-1}}^{k_{\text{макс}}=T/e^2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta) \frac{k_i k_j}{k^4} d\mathbf{k} = \pi\lambda \left( \frac{\delta_{ij}}{u} - \frac{u_i u_j}{u^3} \right)_{u=\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta}, \quad (12. 51)$$

где теперь  $\lambda = \ln(k_{\text{макс}}/k_{\text{мин}}) = \ln(DT/e^2)$  — полный кулоновский логарифм. Нетрудно убедиться, что в этом случае тензор диффузии полностью совпадает с «парным» тензором диффузии (11. 3), который пригоден не только для состояния термодинамического равновесия, но и в общем случае. Естественно поэтому предположить, что и выражение (12. 50) пригодно в общем случае. Строгое рассмотрение, основанное на решении системы уравнений для коррелятивных функций, подтверждает правильность этого заключения.

Зная силу динамического трения (12. 46) и тензор диффузии (12. 50), можно написать столкновительный член  $C^\alpha$  в кинетическом уравнении для функции распределения частиц  $\alpha$ . В соответствии с формулами (11. 1) и (11. 2) он имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} C^\alpha &= \sum_{\beta} C^{\alpha/\beta}; \\ C^{\alpha/\beta} &= -\text{div}_{\mathbf{v}_\beta} \mathbf{j}^{\alpha/\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (12. 52)$$

Поток  $\mathbf{j}^{\alpha/\beta}$  частиц  $\alpha$  равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i^{\alpha/\beta} &= \frac{1}{m_\alpha} F_i^{\alpha/\beta} f_\alpha - D_{ij}^{\alpha/\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{ja}} = 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha} \int U_{ij} \left( \frac{f_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta}{\partial v_{j\beta}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_\beta}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{ja}} \right) d\mathbf{v}_\beta, \end{aligned} \quad (12. 53)$$

где

$$U_{ij} = \int_0^{T/e^2} \frac{k_i k_j \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k}\mathbf{v}_\beta)}{k^4 |\varepsilon^l(\mathbf{k}, \omega)|_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}^2} d\mathbf{k}.$$

Кинетическое уравнение с таким столкновительным членом было впервые получено с использованием сложной диаграммной техники в работе Р. Балеску [14] и затем в работе А. Ленарда [15]. Кроме того, в работе Ю. Климонтовича и С. Темко [16] и в работе В. Силина [17] было получено обобщение указанного столкновительного члена на квантовый случай. В упоминавшейся ранее работе В. Силина и Л. Горбунова [13] на основе столкновительного члена (12. 53) была развита гидродинамика сильно неизотермической плазмы с  $T_e \gg T_i$  и показано, что учет взаимодействия электронов с волнами приводит к коэффициентам переноса, существенно отличающимся в некоторых случаях от обычных значений, получаемых с «парным» столкновительным членом. Отметим в заключение, что при переходе от уравнения (12. 15) к формуле (12. 16) мы ограничились случаем нерелятивистских скоростей. Если остаться в силе динамического трения второй член формулы (12. 15), соответствующий черенковскому излучению поперечных волн, то можно получить релятивистский столкновительный член (см. работу [17]), учитывающий взаимодействие с волнами.

Наконец, в работах А. Веденова, Е. Велихова и Р. Сагдеева [18, 19] был рассмотрен случай, когда уровень возбуждения колебаний в плазме значительно превышает уровень тепловых шумов. При этом можно пренебречь парными столкновениями частиц и учитывать лишь взаимодействие частиц с волнами.

### III. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

#### § 13. Пробная частица в среде покоящихся бесконечно тяжелых полевых частиц

В первой главе мы получили формулы, описывающие поведение пробной частицы  $\alpha$  в среде полевых частиц  $\beta$ , в частности, нашли среднюю скорость изменения ее импульса и энергии [формулы (6. 10) и (6. 13)]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} &= -m_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) L^{\alpha/\beta} \nabla \varphi_\beta; \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_\alpha}{dt} &= -m_\alpha L^{\alpha/\beta} \left[ \varphi_\beta + \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) (\mathbf{v} \nabla \varphi_\beta) \right], \end{aligned} \quad (13. 1)$$

где

$$\varphi_\beta(\mathbf{v}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f_\beta(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}'. \quad (13. 2)$$

Эти формулы становятся более наглядными, если использовать аналогию с электростатикой, для чего введем «потенциал»  $\varphi_{\text{ан}}$  и «поле»  $\mathbf{E}_{\text{ан}}$ , определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\text{ан}} &= -4\pi\varphi_\beta = \int \frac{f_\beta(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}'; \\ \mathbf{E}_{\text{ан}} &= -\nabla\varphi_{\text{ан}}, \end{aligned} \right\} \quad (13. 3)$$

с помощью которых формулы (13. 1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{p}_\alpha}{dt} &= -q_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \mathbf{E}_{\text{ан}}; \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_\alpha}{dt} &= -q_\alpha \left[ \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \mathbf{v} \mathbf{E}_{\text{ан}} - \varphi_{\text{ан}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (13. 4)$$

где  $q_\alpha = 4\pi\lambda \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha}$  — как бы эффективный «заряд» пробной частицы  $\alpha$ .

Рассмотрим простейшие примеры с использованием этих выражений.



Самый простой случай получится, если считать, что все полевые частицы находятся в состоянии покоя и обладают бесконечной массой ( $m_\beta \rightarrow \infty$ ). В плазме, состоящей из ионов и электронов, такие свойства часто приписывают медленным тяжелым ионам, если рассматривается движение электронов. При  $m_\beta \rightarrow \infty$  формулы (3. 4) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{dp}_\alpha}{dt} &= -q_\alpha E_{\text{ан}}; \\ \frac{d\overline{\varepsilon}_\alpha}{dt} &= -q_\alpha [(\mathbf{v} E_{\text{ан}}) - \varphi_{\text{ан}}]. \end{aligned} \right\} \quad (13. 5)$$

Заметим попутно, что динамическая сила трения  $\mathbf{F}^{\alpha/\beta}$  при  $m_\beta \rightarrow \infty$  обращается в нуль. Покоящиеся полевые частицы аналогичны точечному заряду  $Q_{\text{ан}} = \int f_\beta d\mathbf{v} = n_\beta$ , находящемуся в начале координат пространства скоростей. Поэтому, по аналогии с электростатикой, имеем:

$$\varphi_{\text{ан}} = \frac{n_\beta}{v}; \quad E_{\text{ан}} = \frac{n_\beta}{v^2} \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (13. 6)$$

Подставляя эти значения в формулы (13. 5), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{dp}_\alpha}{dt} &= m_\alpha \frac{d\overline{v}_\alpha}{dt} = -q_\alpha \frac{n_\beta}{v^3} \mathbf{v}; \\ \frac{d\overline{\varepsilon}_\alpha}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13. 7)$$

Второй результат соответствует тому очевидному условию, что энергия пробной частицы  $\alpha$  не может измениться при упругих столкновениях с покоящимися бесконечно тяжелыми полевыми частицами. Первая формула более интересна, и из нее следует, что чем больше скорость  $\mathbf{v}$  пробной частицы, тем меньшая сила торможения  $\mathbf{F}_\alpha$  на нее действует ( $F_\alpha \sim \frac{1}{v^2}$ ). Этот необычный закон «падающего трения» является специфической особенностью кулоновского взаимодействия. Первую формулу (13. 7) можно также записать в виде

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}}{\tau_s^{\alpha/\beta}}, \quad (13. 8)$$

введя

$$\tau_s^{\alpha/\beta} = \frac{m_\alpha v^3}{n_\beta q_\alpha} = \frac{4\pi v^3}{n_\beta L^{\alpha/\beta}}.$$

Величина  $\tau_s^{\alpha/\beta}$  имеет размерность времени и физически, как видно из такой записи, играет роль «времени продольного замедления» пробной частицы. В рассматриваемом частном случае столкновения вообще не меняют абсолютной величины скорости  $|\mathbf{v}|$

пробной частицы, поэтому уравнение (13. 8) фактически можно записать в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -\text{const} \cdot \mathbf{v}, \quad (13. 9)$$

откуда

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 e^{-\frac{t}{\tau_s}}.$$

Таким образом, за время  $\tau_s$  средняя скорость уменьшается в  $e = 2,7$  раза. В других условиях  $\tau_s$  не имеет такого простого смысла, но по порядку величины оно всегда характеризует время суще-

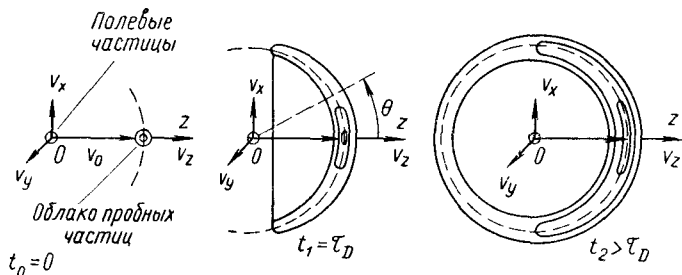


Рис. 8.

ственного ( $\Delta v \sim v$ ) изменения средней скорости. В общем случае вводимые по образцу формулы (13. 2) времена  $\tau$  называются «временами релаксации» [2].

Полученные выше уравнения (13. 7) не дают, однако, полного представления о движении пробной частицы. Для этого, как мы знаем, необходимо обратиться к представлению о сплошном облаке ансамбля пробных частиц, расплывающемся в пространстве скоростей. В рассматриваемом нами случае скорости частиц облака не меняются по абсолютной величине, и облако будет расплываться по поверхности сферы  $|\mathbf{v}| = v_0$ , как это схематично изображено на рис. 8.

В начальный момент  $t_0 = 0$  оно было сосредоточено в точке  $\mathbf{v}_0$ , а при  $t = \infty$  будет, очевидно, равномерно размазано по всей поверхности сферы  $|\mathbf{v}| = v_0$ . Как мы уже знаем, тенденция облака к расплыванию будет полностью описана, если заданы две величины:

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{v} \rangle^{\alpha/\beta} &= \frac{1}{m_\alpha} \frac{d\bar{\mathbf{p}}_\alpha}{dt}; \\ \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} &= -2L^{\alpha/\beta} \frac{\partial^2 \Psi_B}{\partial v_i \partial v_k}. \end{aligned} \right\} \quad (13. 10)$$

Первая величина, характеризующая изменение импульса, нами уже рассмотрена. Изменение энергии, найденное в фор-

муле (13. 7), связано лишь с суммой диагональных элементов тензора  $\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta}$  [см. формулу (6. 11)]. Рассмотрение остальных компонент этого тензора, очевидно, позволит нам дополнить картину расплывания облака. Чтобы найти этот тензор, вычислим, во-первых, потенциальную функцию  $\psi_{\beta}$  полевых частиц. Поскольку они покоятся ( $\mathbf{v}_{\beta} = 0$ ), то легко получим [см. формулу (11. 8)]:

$$\psi_{\beta}(\mathbf{v}) = -\frac{n_{\beta}}{8\pi} |\overline{\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\beta}}|^{(\beta)} = -\frac{n_{\beta} |\mathbf{v}|}{8\pi}, \quad (13. 11)$$

и тогда из выражения (13. 10) следует:

$$\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} = 2D_{ik}^{\alpha/\beta} = \frac{n_{\beta} L^{\alpha/\beta}}{4\pi} \left( \frac{\delta_{ik}}{v} - \frac{v_i v_k}{v^3} \right), \quad (13. 12)$$

где  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  — тензор диффузии [см. формулу (10. 11)].

В системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль начальной скорости пробной частицы  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$  (рис. 8), этот тензор будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \overline{(v - \bar{v})_i (v - \bar{v})_k} \Big|_{t=0} = 2 \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13. 13)$$

где  $D_{xx} = D_{yy} = \frac{n_{\beta} L^{\alpha/\beta}}{8\pi v}$ . Обозначая значками  $\parallel$  и  $\perp$  направления, параллельное и перпендикулярное вектору  $\mathbf{v}_0$  (см. рис. 8), мы, таким образом, получаем:

$$\frac{d}{dt} \overline{(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})_{\parallel}^2} = \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle = 2D_{zz} = 0. \quad (13. 14)$$

Следовательно, «толщина» облака в продольном направлении не меняется, что, очевидно, связано с тем фактом, что в рассматриваемом случае столкновения вообще не меняют  $|\mathbf{v}|$  пробных частиц.

В поперечном направлении размеры облака увеличиваются со скоростью

$$\frac{d}{dt} \overline{(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})_{\perp}^2} = \langle (\Delta v_x)^2 \rangle + \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = 2(D_{xx} + D_{yy}) = \frac{n_{\beta} L^{\alpha/\beta}}{2\pi v}.$$

Это соотношение удобно записать в виде

$$\langle (\Delta \mathbf{v})_{\perp}^2 \rangle^{\alpha/\beta} = \frac{v^2}{\tau_d^{\alpha/\beta}}, \quad (13. 15)$$

где  $\tau_d^{\alpha/\beta} = \frac{2\pi v^3}{n_{\beta} L^{\alpha/\beta}}$ .

Введенное таким способом «время отклонения»  $\tau_d$  характеризует скорость отклонения направления полета частицы  $\alpha$  от первоначального (см. рис. 8). Это время  $\tau_d$ , как видим, в рассматриваемом

мом частном случае ( $v_\beta = 0$ ,  $m_\beta = \infty$ ) в два раза меньше введенного выше «времени продольного замедления»  $\tau_s$  [см. формулу (13. 8)].

Помимо двух указанных времен релаксации  $\tau_s$  и  $\tau_d$ , Спитцер [2] вводит также «время обмена энергией»  $\tau_e$ , которое он определяет по скорости увеличения разброса энергий или, что то же самое, по скорости расплывания облака в продольном направлении, поскольку  $\langle (\Delta \varepsilon)^2 \rangle = m^2 v^2 \langle (\Delta v_\parallel)^2 \rangle$ :

$$\tau_e^{\alpha/\beta} = \frac{\varepsilon^2}{\langle (\Delta \varepsilon)^2 \rangle} = \frac{v^2}{4 \langle (\Delta v_\parallel)^2 \rangle} = \frac{v^2}{8 D_\parallel}. \quad (13. 16)$$

В нашем случае величина  $\tau_e$  равна бесконечности, поскольку энергия частиц вообще не меняется ( $D_\parallel = 0$ ). Вводить время релаксации энергии из соотношения  $\langle \Delta \varepsilon \rangle = -\varepsilon/\tau$ , подобного формуле (13. 8), было бы нецелесообразным, поскольку величина  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  обычно бывает знакопеременной. В частности, в точке, где  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ , частица не изменяла бы своей энергии, в то время как увеличение дисперсии по энергиям все равно имело бы место.

#### § 14. Решение кинетического уравнения для предыдущего случая. «Простейшее время релаксации»

Попытаемся теперь применить к изображенному на рис. 8 процессу расплывания облака пробных частиц  $\alpha$  вследствие их столкновений с полевыми частицами  $\beta$  кинетическое уравнение, полученное в предыдущей главе. Из формулы  $F_i^{\alpha/\beta} = (m_\alpha^2/m_\beta) \times \times \nabla_k D_{ik}^{\alpha/\beta}$  можно видеть, что при  $m_\beta \rightarrow \infty$  сила динамического трения  $F^{\alpha/\beta}$  равна нулю, поэтому кинетическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} &= -\operatorname{div}_v \mathbf{j}^{\alpha/\beta} = \nabla_i (D_{ik}^{\alpha/\beta} \nabla_k f_\alpha) = \frac{n_\beta L^{\alpha/\beta}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial v_i} \times \\ &\times \left( \frac{v^2 \delta_{ik} - v_i v_k}{v^3} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_k} \right). \end{aligned} \quad (14. 1)$$

Здесь мы использовали найденное в формуле (13. 12) выражение для тензора диффузии  $D_{ik}^{\alpha/\beta}$  при покоящихся  $\beta$ -частицах. Вводя сферическую систему координат  $v$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  с осью  $z$  вдоль  $\mathbf{v}_0$ , мы можем входящий в уравнение (14. 1) оператор записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{v^2 \delta_{ik} - v_i v_k}{v^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k} \right) &= \nabla \left[ \frac{v^2 \nabla f - \mathbf{v} (\mathbf{v} \nabla f)}{v^3} \right] = \\ &= \frac{[\mathbf{v} \nabla]^2 f}{v^3} = \frac{\Delta_{\theta, \varphi} f}{v^3}, \end{aligned} \quad (14. 2)$$

где

$$\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (14. 3)$$

так называемый «угловой лапласиан», собственными функциями которого являются, как известно, полиномы Лежандра:  $\Delta_{\theta, \varphi} P_l \times \times (\cos \theta) = -l(l+1)P_l(\cos \theta)$  [сравни выражение (14. 2) с оператором квадрата момента  $\hat{\mathbf{M}} = [\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}}] = -i\hbar [\mathbf{r} \nabla_r]$  в квантовой механике]. Полученное уравнение

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{2\tau_s} \Delta_{\theta, \varphi} f_{\alpha}, \quad (14. 4)$$

где  $\tau_s = (4\pi v^3)/(n_{\beta} L^{a/\beta})$  — введенное в уравнении (13. 8) «время продольного замедления», легко решить методом разделения переменных. С учетом начального условия

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{v})|_{t=0} = n_{\alpha} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \delta(|\mathbf{v}| - v_0) \delta(1 - \cos \theta) \frac{n_{\alpha}}{2\pi v_0^2}, \quad (14. 5)$$

используя известное разложение

$$\delta(1 - \cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( l + \frac{1}{2} \right) P_l(\cos \theta), \quad (14. 6)$$

окончательно получим:

$$f_{\alpha}(t, v, \theta) = \frac{n_{\alpha}}{2\pi v_0^2} \delta(|\mathbf{v}| - v_0) \sum_{l=0}^{\infty} \left( l + \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{l(l+1)}{2\tau_s} t} P_l(\cos \theta). \quad (14. 7)$$

При  $t \rightarrow \infty$  все члены с  $l \neq 0$  обращаются в нуль, и тогда

$$f_{\alpha}(t, v, \theta)|_{t=\infty} = \frac{n_{\alpha}}{2\pi v_0^2} \delta(|\mathbf{v}| - v_0), \quad (14. 8)$$

что соответствует равномерному распределению по поверхности сферы  $|\mathbf{v}| = v_0$ .

Пользуясь решением (14. 7), можно получить

$$\left. \begin{aligned} \langle v_{\parallel} \rangle &= \frac{1}{n} \int v \cos \theta f d\mathbf{v} = v_0 e^{-t/\tau_s}; \\ \langle v_{\perp}^2 \rangle &= \frac{1}{n} \int v^2 \sin^2 \theta f d\mathbf{v} = \frac{2}{3} v_0^2 (1 - e^{-3t/\tau_s}). \end{aligned} \right\} \quad (14. 9)$$

Из последнего уравнения при  $t \ll \tau_s$  имеем:

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle = v_0^2 \frac{t}{\tau_d}, \quad (14. 10)$$

где  $\tau_d = \tau_s/2$ .

В общем случае времена релаксации  $\tau_s$ ,  $\tau_d$ ,  $\tau_e$ , определяемые по формулам (13. 8), (13. 5) и (13. 16):

$$\tau_s = - \frac{v}{\langle \Delta v_{\parallel} \rangle}, \quad \tau_d = \frac{v^2}{\langle (\Delta v)_{\perp}^2 \rangle}, \quad \tau_e = \frac{v^2}{4 \langle (\Delta v)_{\parallel}^2 \rangle}, \quad (14. 11)$$

не являются физически четко определенными понятиями. Тем не менее они могут служить удобными качественными характеристиками столкновительных процессов в полностью ионизированной плазме. Условимся в дальнейшем время продольного замедления  $\tau_s^{\alpha/\beta}$  пробной частицы  $\alpha$ , вычисленное для того простейшего случая, когда полевые частицы  $\beta$  считаются покоящимися и бесконечно тяжелыми, обозначать  $\tau_1^{\alpha/\beta}$  [см. формулу (13. 8)]:

$$\tau_1^{\alpha/\beta}(\epsilon_{\alpha}) = \frac{4\pi v^3}{n_{\beta} L^{\alpha/\beta}} = \frac{\sqrt{m_{\alpha}}}{\pi \sqrt{2} (e_{\alpha} e_{\beta})^2} \cdot \frac{\epsilon_{\alpha}^{3/2}}{\lambda n_{\beta}}, \quad (14. 12)$$

где  $\epsilon_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v^2}{2}$ , и называть «простейшим временем релаксации».

Например, простейшее время релаксации электрона на однозарядных ионах в условиях, когда  $\epsilon_e = 1$  кэв,  $n_i = 10^{15}$  см<sup>-3</sup> и  $\lambda = 15$ , будет равно

$$\tau_1^{e/i} = \frac{\sqrt{m_e}}{\pi \sqrt{2} e^4} \cdot \frac{\epsilon_e^{3/2}}{\lambda n_i} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ сек.} \quad (14. 13)$$

Время отклонения  $\tau_d$  будет вдвое меньше:  $\tau_d = \frac{\tau_1}{2} = 0,25 \cdot 10^{-6}$  сек.

Время  $\tau$  одного столкновения электрона с выделенным ионом мы можем по порядку величины оценить как время пролета электроном длины дебаевского радиуса  $D$  [см. формулу (2. 4)], что в наших условиях составит:  $D = 0,5 \cdot 10^{-3}$  см,  $v_{1 \text{ кэв}} = 2 \cdot 10^9$  см/сек и  $\tau \approx \frac{D}{v} \approx 0,25 \cdot 10^{-12}$  сек.

Таким образом, электрон отклонится на угол порядка 90° примерно за  $\frac{\tau_d}{\tau} = \frac{\tau_1}{2\tau} \approx 10^6$  столкновений.

## § 15. Сферически-симметричное распределение полевых частиц

Допустим теперь, что все полевые частицы обладают конечной массой ( $m_{\beta} \neq \infty$ ) и движутся с одинаковой по абсолютной величине скоростью  $|\mathbf{v}_{\beta}| = V$ , причем направления их скоростей распределены сферически-симметрично (рис. 9). В электростатике такое распределение аналогично равномерно заряженной поверхности сферы радиуса  $V$  с полным зарядом  $Q = n_{\beta}$ . Поэтому имеем:

$$\mathbf{E}_{\text{ан}} = \begin{cases} 0 & \text{при } v < V; \\ \frac{n_{\beta}}{v^2} \left( \frac{\mathbf{v}}{v} \right); & v > V; \end{cases} \quad \varphi_{\text{ан}} = \begin{cases} \frac{n_{\beta}}{V} & \text{при } v < V; \\ \frac{n_{\beta}}{v}; & v > V. \end{cases} \quad (15. 1)$$

Подставляя эти выражения в формулы (13. 4), получим:

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = -q_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \mathbf{E}_{\text{ан}} = \begin{cases} 0 & \text{при } |\mathbf{v}| < V; \\ -q_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \frac{n_\beta}{v^2} \frac{\mathbf{v}}{v} & \text{при } |\mathbf{v}| > V, \end{cases} \quad (15. 2)$$

где  $q_\alpha = m_\alpha L^{\alpha/\beta}/4\pi$ . Таким образом, передача импульса изменяется скачком. Пробная частица, движущаяся медленнее полевых ( $v < V$ ), не обменивается с ними импульсом, так как электрическое поле  $\mathbf{E}_{\text{ан}}$  внутри равномерно заряженной сферической поверхности равно нулю. На языке времен релаксации это означало бы, что внутри сферы  $\tau_s^{\alpha/\beta} = \infty$ . Этот своеобразный эффект сферической полости, впервые отмеченный Беляевым и Будкером [20], является характерной особенностью кулоновского взаимодействия.

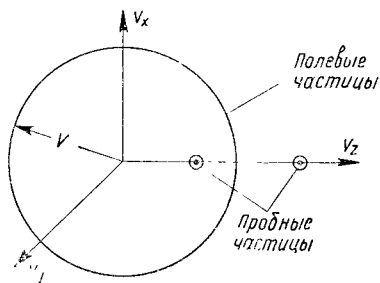


Рис. 9.

Из второй формулы (13. 4) с помощью выражений (15. 1) найдем среднюю скорость потери энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varepsilon}_\alpha}{dt} &= -q_\alpha \left[ \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) (\mathbf{v} \mathbf{E}_{\text{ан}}) - \Phi_{\text{ан}} \right] = \\ &= \begin{cases} q_\alpha \frac{n_\beta}{V} & \text{при } v < V; \\ -\frac{m_\alpha}{m_\beta} q_\alpha \frac{n_\beta}{V}; & v > V, \end{cases} \end{aligned} \quad (15. 3)$$

которая также изменяется скачком, меняя знак при переходе точки  $v = V$ .

В случае произвольного сферически-симметричного распределения полевых частиц  $f_\beta = f_\beta(|\mathbf{v}|)$  нетрудно по аналогии с электростатикой заключить, что пробная частица  $\alpha$  не обменивается импульсом со всеми теми полевыми частицами, у которых  $|\mathbf{v}_\beta| > |\mathbf{v}_\alpha|$ .

Эквивалентное электрическое поле  $\mathbf{E}_{\text{ан}}$  в точке скоростного пространства  $\mathbf{v}$ , где находится полевая частица, легко определить по теореме Гаусса:

$$\mathbf{E}_{\text{ан}} = \frac{4\pi n_\beta(\mathbf{v})}{S_v} = \frac{n_\beta(\mathbf{v})}{v^2}, \quad (15. 4)$$

где  $S_v = 4\pi v^2$  — поверхность сферы радиуса  $v$ ;  $n_\beta(\mathbf{v}) = \int_0^v f'_\beta d\mathbf{v}'$  — полный «заряд» в этой сфере.

Поэтому из формулы (13. 4) для произвольного сферически-симметричного распределения имеем:

$$\frac{d\bar{p}_a}{dt} = - \left( \frac{\mathbf{v}}{v} \right) q_a \left( 1 + \frac{m_a}{m_\beta} \right) \frac{n_\beta(\mathbf{v})}{v^2}. \quad (15. 5)$$

Рассмотрим, в частности, максвелловское распределение полевых частиц:

$$f_\beta(\mathbf{v}) = n_\beta \left( \frac{m_\beta}{2\pi T_\beta} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{m_\beta v^2}{2T_\beta} \right). \quad (15. 6)$$

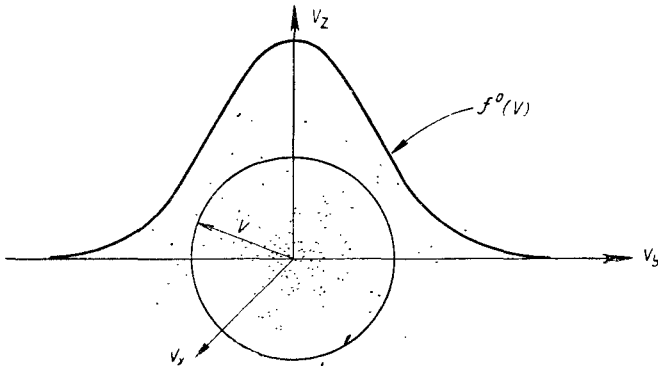


Рис. 10.

В этом случае

$$n_\beta(\mathbf{v}) = \int_0^v f_\beta(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' = n_\beta \frac{\int_0^v \exp \left( - \frac{m v'^2}{2T} \right) v'^2 dv'}{\int_0^\infty \exp \left( - \frac{m v'^2}{2T} \right) v'^2 dv'} = n_\beta \mu(\mathbf{v}_\beta^2), \quad (15. 7)$$

где  $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v} \sqrt{m_\beta/2T_\beta}$  — безразмерная скорость, и обозначено:

$$\mu(\mathbf{v}^2) = \frac{4}{V\pi} \int_0^{|\mathbf{v}|} e^{-t^2} t^2 dt = \frac{2}{V\pi} \int_0^{\mathbf{v}^2} e^{-y} \sqrt{y} dy. \quad (15. 8)$$

Таким образом,

$$\mu(x) = \frac{2}{V\pi} \int_0^x e^{-\xi} \sqrt{\xi} d\xi. \quad (15. 9)$$

Безразмерная функция  $\mu(\mathbf{v}^2)$  имеет простой физический смысл — это интеграл по сфере конечного радиуса от распределения Максвелла, нормированного на единицу, что условно изображено на рис. 10. Поэтому в дальнейшем мы будем называть функ-



цию  $\mu(x)$ , определяемую интегралом (15. 9), просто интегралом Максвелла. Ее численные значения приведены в табл. 1. При увеличении радиуса сферы интегрирования, т. е. при  $x \rightarrow \infty$ , эта функция стремится к единице.

Т а б л и ц а 1

Значения интеграла Максвелла

$$\mu(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-v^2} v^2 dv \bigg/ \int_0^{\infty} e^{-v^2} v^2 dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} \sqrt{t} dt$$

и некоторых связанных с ним функций

$x$	$\sqrt{x}$	$\mu(x)$	$\mu'(x)$	$\frac{\mu(x)}{2x}$	$\frac{\mu + \mu' - \frac{\mu}{2x}}{2x}$	$\frac{\mu}{\mu'}$	$\mu - \mu'$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,001	0,0316	0	0,0356	0	0,0356	0	-0,0356
0,01	0,1	0,0008	0,1117	0,04	0,0725	0,0072	-0,1109
0,05	0,2236	0,0082	0,2399	0,082	0,1661	0,0342	-0,2317
0,1	0,3162	0,0222	0,3228	0,111	0,234	0,06877	-0,3006
0,2	0,4472	0,0597	0,4131	0,1493	0,3235	0,1445	-0,3534
0,4	0,6325	0,1505	0,4784	0,1881	0,4408	0,3146	-0,3279
0,6	0,7746	0,2470	0,4808	0,2058	0,5220	0,5137	-0,2338
0,8	0,8944	0,3405	0,4535	0,2128	0,5812	0,7508	-0,1130
1,0	1,0	0,4276	0,4151	0,2138	0,6289	1,0301	0,0125
1,25	1,1180	0,5247	0,3615	0,2099	0,6763	1,4515	0,1632
1,5	1,2247	0,6083	0,3083	0,2027	0,7139	1,9731	0,3000
1,75	1,3229	0,6792	0,2594	0,1941	0,7445	2,6184	0,4198
2,0	1,4142	0,7329	0,2166	0,1832	0,7663	3,3837	0,5163
2,5	1,5811	0,8280	0,1465	0,1656	0,8089	5,6519	0,6815
3,0	1,7321	0,8884	0,0974	0,1481	0,8377	9,1211	0,7910
4,0	2,0	0,9539	0,0413	0,1192	0,8760	23,0969	0,9126
5,0	2,2361	0,9814	0,0170	0,09814	0,9003	57,729	0,9644
10,0	3,1623	1,0	0,0	0,05	0,95	6180,0	1,0
20,0	4,4721	1,0	0,0	0,025	0,975		1,0
40,0	6,3246	1,0	0,0	0,0125	0,9875		1,0
60,0	7,7460	1,0	0,0	0,00833	0,992		1,0
80,0	8,9443	1,0	0,0	0,00625	0,994		1,0
100,0	10,0	1,0	0,0	0,005	0,995		1,0

Приближенные выражения функции  $\mu(x)$  в двух предельных случаях имеют вид:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{14}x^2 - \dots \right) & \text{(разложение при } x \ll 1); \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x} \sqrt{x} \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \dots \right) & \text{(асимптотика при } x \gg 1). \end{cases}$$

(15. 10)

Функцию  $\mu(x^2)$  можно было бы выразить также через известную «функцию ошибок»  $\Phi(x)$ :

$$\mu(x^2) = \Phi(x) - x\Phi'(x), \quad (15.11)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy.$$

Учитывая простой физический смысл функции  $\mu(x)$ , именно ее, а не  $\Phi(x)$ , удобно принять в качестве основной «простейшей» функции в формулах кинетики, связанных с распределением Максвелла.

Чандрасекар [1] вводит также функцию

$$G(x) = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{2x^2} = \frac{\mu(x^2)}{2x^2}, \quad (15.12)$$

которая приведена и в книге Спитцера [2].

Подставляя выражения (15.7) и (15.12) в формулу (15.4), получаем:

$$E_{\text{ан}} = \frac{n_{\beta}(v)}{v^2} = \frac{n_{\beta}m_{\beta}}{T_{\beta}} \frac{\mu(v_{\beta}^2)}{2v_{\beta}^2} = \frac{n_{\beta}m_{\beta}}{T_{\beta}} G(v_{\beta}). \quad (15.13)$$

Таким образом, функция Чандрасекара  $G(x)$  аналогична с точностью до постоянного множителя электрическому полю системы зарядов, непрерывно распределенных в пространстве по Максвеллу. Подставив выражение (15.3) в уравнение (15.5) и записав последнее в виде, подобном выражению (13.8), найдем «время продольного замедления»:  $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau_s}$ , где

$$\tau_s^{\alpha/\beta} = -\frac{v}{\langle \Delta v_{\parallel} \rangle} = \frac{v}{\left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}\right) A_D \frac{m_{\beta}}{2T_{\beta}} G(v_{\beta})}, \quad (15.14)$$

приводимое в таком виде ( $A_D = n_{\beta}L^{\alpha/\beta}/2\pi$ ) у Спитцера [2] [в русском переводе формула (5.28)].

Эта формула будет выглядеть проще и понятнее, если, во-первых, подставить в нее введенное нами в предыдущем параграфе «простейшее время релаксации» [см. формулу (14.12)]

$$\tau_1^{\alpha/\beta}(\epsilon_{\alpha}) = \frac{4\pi v^3}{n_{\beta}L^{\alpha/\beta}} = \frac{\sqrt{m_{\alpha}}}{\pi \sqrt{2} (\epsilon_{\alpha} e_{\beta})^2} \frac{\epsilon_{\alpha}^{3/2}}{\lambda n_{\beta}}, \quad (15.15)$$

равное времени продольного замедления  $\tau_s$  в случае покоящихся и бесконечно тяжелых полевых частиц; во-вторых, если пользоваться не функцией Чандрасекара  $G(v_{\beta})$ , а введенным выше «интегралом Максвелла»  $\mu(x)$  [см. выражение (15.9)]. Тогда,

обозначая

$$x_{\beta} = v_{\beta}^2 = \frac{m_{\beta} v^2}{2T_{\beta}} = \frac{\varepsilon_{\beta}(v)}{T_{\beta}} = \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha}}{T_{\beta}}, \quad (15.16)$$

где

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v^2}{2},$$

получим окончательно

$$\tau_s^{\alpha/\beta}(\varepsilon_{\alpha}) = \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}(\varepsilon_{\alpha})}{\left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}}\right) \mu(x_{\beta})}. \quad (15.17)$$

Такая запись представляется нам более удобной, чем запись в виде выражения (15.14), употребляемого Спитцером.

## § 16. Явление «убегающих электронов»

В качестве примера использования полученных нами формул рассмотрим явление так называемого «просвиста», или «убегания электронов» («runaway»). Оно заключается в том, что при некотором достаточно большом электрическом поле в плазме, состоящей из ионов и электронов, последние начинают неограниченно ускоряться.

Это является следствием уже отмечавшегося нами в § 13 «закона падающего трения», состоящего в том, что при достаточно больших скоростях сила трения, действующая на электрон вследствие его столкновений с ионами, падает по мере роста скорости — асимптотически по кулоновскому закону  $F_{\alpha} \sim E_{\text{ан}} \sim v^{-2}$  [см. формулы (13.7)]. Поэтому в реальной плазме, где распределение электронов всегда близко к максвелловскому, обязательно найдется некоторое число достаточно быстрых электронов, которые даже при слабом электрическом поле в плазме будут «уходить в просвист», т. е. неограниченно ускоряться.

Однако для того, чтобы электронный газ начал ускоряться как целое, необходимо достаточно сильное электрическое поле. Для определения этого критического поля предположим в качестве первого приближения, что распределение электронов по скоростям все время остается максвелловским. С течением времени изменяется лишь их средняя скорость  $\bar{v}_e = v_0(t)$ , т. е. изменяется положение «центра тяжести» этого максвелловского распределения в пространстве скоростей, что условно изображено на рис. 11.

Математически это означает, что функция распределения электронов имеет вид движущегося максвелловского распределения:

$$f_e(t, \mathbf{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2T_e} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 \right\}. \quad (16.1)$$

Ионы можно считать практически покоящимися и бесконечно тяжелыми. Тогда уравнение движения электрона приобретает вид [см. формулы (13. 7)]:

$$m \frac{dv}{dt} = eE - q_e \frac{n_i}{v^3} v,$$

где

$$q_e = \frac{m_e L^{e/i}}{4\pi}. \quad (16. 2)$$

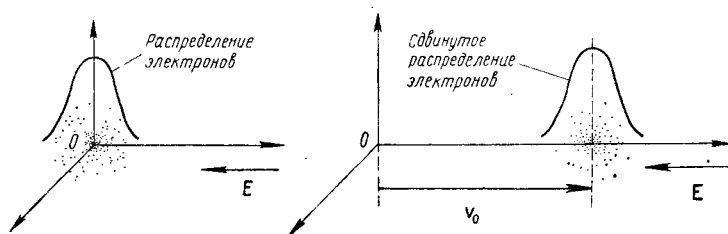


Рис. 11.

Умножая уравнение (16. 2) на функцию (16. 1) и интегрируя по скоростям, получим уравнение, описывающее движение электронного газа как целого:

$$n_e m \frac{dv_0}{dt} = en_e E + n_e F_{\text{эф. тр}}^{e/i}, \quad (16. 3)$$

где

$$n_e F_{\text{эф. тр}}^{e/i} = -q_e n_i \int \frac{v}{v^3} f_e(t, v) dv. \quad (16. 4)$$

Здесь по определению величина  $n_e F_{\text{эф. тр}}^{e/i}$  представляет собой суммарную силу трения, действующую на все  $n_e$  электронов, заключенных в  $1 \text{ см}^3$ , а величина  $F_{\text{эф. тр}}^{e/i}$  — эффективную силу трения, приходящуюся на один электрон. Для простоты будем считать ионы однозарядными. Тогда в условиях квазинейтральности  $n_e = n_i$ .

Интеграл в выражении (16. 4) нетрудно подсчитать. Для нас, однако, будет более поучительным, если вместо непосредственного его вычисления мы воспользуемся тем очевидным обстоятельством, что ввиду положения «действие равно противодействию» сила  $F_{\text{эф. тр}}^{e/i}$  при  $n_e = n_i$  должна равняться средней силе, действующей на один ион со стороны электронов. Переходя к системе координат, в которой электронный газ в целом покоится, мы можем рассматривать ион как пробную частицу, летящую со скоростью  $-v_0$  через среду электронов, распределенных по Максвеллу, и применять формулы,

полученные в § 15. Исходя из этих соображений, и используя формулы (13. 4) и (15. 13), найдем:

$$F_{эф. тр}^{e/i} = -F_i = q_i \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) E_{эл}(-v_0) |_{m_i \rightarrow \infty} = -\frac{e^2 \lambda}{D^2} G(v_e). \quad (16. 5)$$

Здесь  $D = (T_e / 4\pi n e^2)^{1/2}$  — дебаевский радиус, а  $G(v) = \mu(v^2) / 2v^2$  — функция Чандрасекара [см. уравнение (15. 12)].

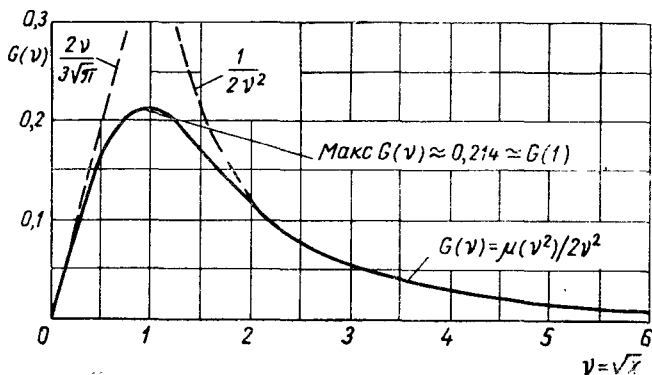


Рис. 12.

График этой функции изображен на рис. 12, а числовые значения приведены в табл. 1.

Максимум функции Чандрасекара находится в точке  $v \approx 1$  и равен 0,214. Поэтому в том случае, когда электроны в целом обладают движущимся максвелловским распределением [см. уравнение (16. 1)], эффективная сила трения, приходящаяся на один электрон и обусловленная столкновениями с ионами, вообще не может быть больше значения

$$\text{макс } F_{эф. тр}^{e/i} = -\frac{e^2 \lambda}{D^2} 0,214. \quad (16. 6)$$

Подставляя выражение (16. 5) в уравнение (16. 3), можно написать:

$$nm \frac{dv_0}{dt} = enE + nF_{эф. тр}^{e/i} = en \left[ E - \frac{e\lambda}{D^2} G(v_e^0) \right], \quad (16. 7)$$

где  $v_e^0 = v_0 \sqrt{m_e / 2T_e}$ . Отсюда, учитывая выражение (16. 6), можно видеть, что электронный газ как целое будет неограниченно ускоряться, если электрическое поле в плазме превосходит критическое значение

$$E_{кр} = \frac{e\lambda}{D^2} 0,214 \approx \frac{e}{D^2}. \quad (16. 8)$$

практически (ввиду  $\lambda \approx 10$ ) равное полю элементарного заряда на расстоянии дебаевского радиуса  $D$ . Например, при  $T_e = 1 \text{ кэВ}$ ,  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и  $\lambda = 15$  имеем:

$$D \approx 10^{-3} \text{ см};$$

$$E_{\text{кр}} \approx 1 \text{ в/см.} \quad (16. 9)$$

Хотя это поле по абсолютной величине является довольно слабым, следует иметь в виду, что даже такое поле трудно создать внутри полностью ионизованной плазмы, которая обладает весьма высокой электропроводностью и потому стремится скомпенсировать все внутренние электрические поля.

В действительности, как уже отмечалось, и при менее сильных полях некоторая экспоненциально малая часть электронов может «уходить в просвист». С исчерпывающей полнотой явление «убегания электронов» было исследовано Дрейсером [21], которому для этого пришлось прибегнуть к численному интегрированию кинетического уравнения для  $f_e(t, v)$ .

### § 17. Максвелловское распределение полевых частиц. Времена релаксации

Предположим теперь, что полевые частицы  $\beta$  распределены по Максвеллу, и покажем, как вычислить все величины, характеризующие поведение пробной частицы  $\alpha$  в такой среде. Удобно все функции, встречающиеся при этом, выражать через введенный ранее «интеграл Максвелла» и его производную

$$\mu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t} \sqrt{t} dt, \quad \mu'(x) = \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x} \sqrt{x}. \quad (17. 1)$$

В частности, вводя удобные обозначения для безразмерной скорости и ее квадрата:

$$v_\beta = v \sqrt{m_\beta / 2T_\beta} \quad \text{и} \quad x_\beta = v_\beta^2 = \frac{m_\beta v^2}{2T_\beta}, \quad (17. 2)$$

будем распределение Максвелла записывать в виде

$$f_\beta(v) = n_\beta \left( \frac{m_\beta}{2\pi T_\beta} \right)^{3/2} e^{-v_\beta^2} = n_\beta \left( \frac{m_\beta}{2T_\beta} \right)^{3/2} f^0(v_\beta), \quad (17. 3)$$

где  $f^0(v_\beta)$  — безразмерная функция, нормированная на единицу:

$$f^0(v) = \frac{e^{-v^2}}{\pi^{3/2}} = \frac{\Phi'(v)}{2\pi} = \frac{\mu'(v^2)}{2\pi v}; \quad \int f^0(v) dv = 1. \quad (17. 4)$$

Здесь  $v \equiv |v|$ , а  $\Phi(v)$  — «функция ошибок» [см. выражение (15. 11)]. Прежде всего нам необходимо найти потенциальную

функцию  $\psi_{\beta}(\mathbf{v})$ , через которую, как мы знаем, выражаются все остальные величины. Используя выражения (17. 2) и (17. 3), получаем:

$$\psi_{\beta}(\mathbf{v}) = \frac{-1}{8\pi} \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_{\beta}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' = n_{\beta} \sqrt{\frac{2T_{\beta}}{m_{\beta}}} \psi^0(\mathbf{v}_{\beta}). \quad (17. 5)$$

Здесь  $\psi^0(\mathbf{v})$  — безразмерная функция

$$\psi^0(\mathbf{v}) = -\frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f^0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad (17. 6)$$

определенная так, чтобы было выполнено соотношение

$$\Delta_{\mathbf{v}}^2 \psi^0(\mathbf{v}) = f^0(\mathbf{v}) = \frac{e^{-v^2}}{\pi^{3/2}}, \quad (17. 7)$$

аналогичное соотношению  $\Delta_{\mathbf{v}}^2 \psi_{\beta}(\mathbf{v}) = f_{\beta}(\mathbf{v})$  для исходных функций [см. формулы (6. 5)].

Интеграл в правой части равенства (17. 6) нетрудно вычислить, сделав в нем замену переменной  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{r}$  и переходя к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с осью  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \psi^0(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \frac{e^{-v'^2}}{\pi^{3/2}} d\mathbf{v}' = -\frac{1}{8\pi^{5/2}} \int |\mathbf{r}| e^{-(\mathbf{v}+\mathbf{r})^2} d\mathbf{r} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^{5/2}} \int_0^{\infty} r^3 dr \int_0^{\pi} e^{-(v^2+r^2+2vr \cos \theta)} \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (17. 8)$$

Интегрируя по  $\theta$  и преобразуя оставшиеся члены, окончательно найдем:

$$\begin{aligned} \psi^0(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{16\pi} \left[ \Phi'(\mathbf{v}) + \left( 2\mathbf{v} + \frac{1}{\mathbf{v}} \right) \Phi(\mathbf{v}) \right] = \\ &= -\frac{1}{8\pi v} \left[ (x+1) \mu'(x) + \left( x + \frac{1}{2} \right) \mu(x) \right]_{x=v^2}. \end{aligned} \quad (17. 9)$$

Штрих у обозначения функции означает, как обычно, производную по аргументу, так что здесь

$$\Phi'(\mathbf{v}) = \frac{d}{dv} \Phi(\mathbf{v}) \text{ и } \mu'(\mathbf{v}^2) = \frac{d}{d(\mathbf{v}^2)} \mu(\mathbf{v}^2) = \frac{d\mu(\mathbf{v}^2)}{2v d\mathbf{v}}. \quad (17. 10)$$

Приведем также для справок значения производных функции  $\psi^0(\mathbf{v})$ :

$$\frac{d\psi^0(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} = -\frac{1}{8\pi} \left( \mu + \mu' - \frac{\mu}{2x} \right)_{x=\mathbf{v}^2}; \quad \frac{d^2\psi^0(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}^2} = -\frac{\mu}{8\pi\mathbf{v}^3};$$

$$\Delta_{\mathbf{v}}\psi^0(\mathbf{v}) = -\frac{\mu + \mu'}{4\pi\mathbf{v}}; \quad (17.11)$$

$$\Delta_{\mathbf{v}}\Delta_{\mathbf{v}}\psi^0(\mathbf{v}) = \frac{\mu'}{2\pi\mathbf{v}} = f^0(\mathbf{v}).$$

Здесь подразумевается  $\mu \equiv \mu(\mathbf{v}^2)$ .

Итак, мы вычислили потенциальную функцию  $\psi_{\beta}(\mathbf{v})$  [см. формулы (17.5) и (17.9)]. Как и исходное распределение Максвелла, она является сферически симметричной. Тензор диффузии, а тем самым распывание облака пробных частиц  $\alpha$  мы найдем теперь по формулам (6.7) и (11.3), вычисляя вторые производные функции  $\psi_{\beta}(\mathbf{v})$ :

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} &= 2D_{ik}^{\alpha/\beta} = -2L^{\alpha/\beta} \frac{\partial^2 \psi_{\beta}(\mathbf{v})}{\partial v_i \partial v_k} = \\ &= - \left[ 2L^{\alpha/\beta} n_{\beta} \left( \frac{m_{\beta}}{2T_{\beta}} \right)^{1/2} \right] \frac{\partial^2 \psi^0(\mathbf{v})}{\partial v_i \partial v_k} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\beta}}, \end{aligned} \quad (17.12)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi^0(|\mathbf{v}|)}{\partial v_i \partial v_k} &= \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \frac{v_k}{v} \frac{d\psi^0(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}} \right) = \\ &= \delta_{ik} \frac{d\psi^0}{v d\mathbf{v}} + \frac{v_i v_k}{v^2} \left( \frac{d^2 \psi^0}{d\mathbf{v}^2} - \frac{\partial \psi^0}{v d\mathbf{v}} \right). \end{aligned} \quad (17.13)$$

Полученный тензор будет диагонален в системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль скорости  $\mathbf{v}$  пробной частицы

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle^{\alpha/\beta} &= \\ &= 2 \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle (\Delta v_x)^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle (\Delta v_y)^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle (\Delta v_z)^2 \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (17.14)$$

причем

$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = -K \left( \frac{d\psi^0(\mathbf{v})}{v d\mathbf{v}} \right)_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\beta}}$$

и

$$\langle (\Delta v_z)^2 \rangle = -K \left( \frac{d^2 \psi^0(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}^2} \right)_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\beta}}. \quad (17.15)$$

Здесь мы временно обозначили буквой  $K$  постоянный коэффициент, заключенный в квадратные скобки в формуле (17.12).



Подставляя сюда значения производных  $\psi^0(v)$  из выражений (17. 11), получим:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v)_{\perp}^2 \rangle &= \langle (\Delta v_x)^2 \rangle + \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \\ &= \frac{K}{4\pi v_{\beta}} \left( \mu + \mu' - \frac{\mu}{2x_{\beta}} \right); \end{aligned} \quad (17. 16)$$

$$\langle (\Delta v)_{\parallel}^2 \rangle = \langle (\Delta v_z)^2 \rangle = \frac{K}{4\pi v_{\beta}} \cdot \frac{\mu}{2x_{\beta}},$$

где  $x_{\beta} = v_{\beta}^2$ .

Из этих выражений найдем время отклонения

$$\tau_d^{\alpha/\beta} = \frac{v^2}{\langle (\Delta v)_{\perp}^2 \rangle} = \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}}{2 \left( \mu + \mu' - \frac{\mu}{2x_{\beta}} \right)} \quad (17. 17)$$

и время обмена энергией

$$\tau_{\varepsilon}^{\alpha/\beta} = \frac{v^2}{4 \langle (\Delta v_{\parallel})^2 \rangle} = \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}}{4\mu/x_{\beta}}. \quad (17. 18)$$

Для полноты выпишем также время продольного замедления  $\tau_s^{\alpha/\beta}$ , найденное в предыдущем параграфе:

$$\tau_s^{\alpha/\beta} = \frac{v}{\langle \Delta v_{\parallel} \rangle} = \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}}{\left( 1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}} \right) \mu (x_{\beta})}. \quad (17. 19)$$

В этих формулах  $\tau_1$  — «простейшее время релаксации», определяемое по формуле (15. 15). В дальнейшем введем также ряд других времен релаксации. Во избежание путаницы необходимо иметь в виду, что любую формулу типа  $\frac{df}{dt} = g$ , содержащую производную по времени, можно записать в форме

$$\frac{df}{dt} = g \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{f}{\tau_f}, \quad (17. 20)$$

где

$$\tau_f = \frac{f}{g},$$

пределяя тем самым «время релаксации величины  $f$ » как  $\tau_f$ . Поэтому «времен релаксации» можно ввести сколько угодно. Однако в случае сферически-симметричного распределения задание всех времен  $\tau_s$ ,  $\tau_d$  и  $\tau_{\varepsilon}$  эквивалентно заданию величин  $\langle \Delta v_i \rangle$ ,  $\langle \Delta v_i \Delta v_k \rangle$  и вполне достаточно для полного статистического

описания поведения пробной частицы  $\alpha$ . Впрочем, ввиду равенства (6. 9), эти времена связаны дифференциальным соотношением:

$$-\frac{1}{\tau_s^{\alpha/\beta}} = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \frac{\partial}{\partial (v^2)} \left( \frac{v^2}{\tau_d^{\alpha/\beta}} + \frac{v^2}{4\tau_e^{\alpha/\beta}} \right). \quad (17. 21)$$

Зная функцию  $\psi_\beta(\mathbf{v})$ , можно найти вторую потенциальную функцию  $\varphi_\beta(\mathbf{v})$ :

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(\mathbf{v}) &= \Delta_v \psi_\beta(\mathbf{v}) = n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2T_\beta}} \Delta_v \psi^0(\mathbf{v})|_{v=v_\beta} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} n_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2T_\beta}} \frac{\mu(v_\beta^2) + \mu'(v_\beta^2)}{v_\beta} = -\frac{1}{4\pi} \varphi_{\text{ан}}. \end{aligned} \quad (17. 22)$$

Отсюда получим потенциал и поле, аналогичные электростатическим:

$$\varphi_{\text{ан}} = \frac{n_\beta}{v} [\mu(x_\beta) + \mu'(x_\beta)]; \quad \mathbf{E}_{\text{ан}} = -\nabla_v \varphi_{\text{ан}} = \frac{n_\beta}{v^2} \mu(x_\beta) \left(\frac{\mathbf{v}}{v}\right). \quad (17. 23)$$

На больших «расстояниях», где  $\mu(x_\beta) \rightarrow 1$ , они переходят в «кулоновские». Поле  $\mathbf{E}_{\text{ан}}$  получено нами в предыдущем параграфе [см. формулу (15. 13)]. По формулам (17. 23) можно вычислить скорость потери энергии пробной частицей [см. формулы (13. 4)]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} &= -q_\alpha \left[ \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) (\mathbf{v}\mathbf{E}_{\text{ан}}) - \varphi_{\text{ан}} \right] = \\ &= -\frac{2\varepsilon_\alpha}{\tau_1^{\alpha/\beta}} \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} \mu(x_\beta) - \mu'(x_\beta) \right], \end{aligned} \quad (17. 24)$$

где  $x_\beta = \frac{m_\beta v^2}{2T_\beta} = \frac{m_\beta}{m_\alpha} \cdot \frac{\varepsilon_\alpha}{T_\beta}$ . Эта производная  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  меняет знак в той точке  $x_\beta^*$ , где  $(m_\alpha/m_\beta) \mu(x_\beta^*) - \mu'(x_\beta^*) = 0$  или, иначе, где

$$\frac{m_\beta}{m_\alpha} = \frac{\mu(x_\beta^*)}{\mu'(x_\beta^*)}. \quad (17. 25)$$

В § 19 уравнения (17. 24) и (17. 25) исследуются более детально.

## § 18. Плоский поток в равновесной плазме

Рассмотрим теперь пример, показывающий целесообразность введения времен релаксации, которые позволяют составить более наглядное представление о различных процессах в плазме. Предположим, что однородный плоский поток частиц  $\alpha$  движется через квазинейтральную плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов, причем те и другие распределены по Максвеллу с температурой  $T = T_e = T_i$ . Их массы будем обозначать соответственно буквами  $m \equiv m_e$  и  $M \equiv m_i$  без индексов ( $M \gg m$ ).

Частицы потока могут быть или электронами или ионами того же сорта, что и полевые. Возможные обобщения ( $T_e \neq T_i$ ;  $e_i \neq e_e$ ;  $m_\alpha \neq m$ ;  $M$ ) не представляют затруднений и будут рассмотрены позднее.

Поскольку плоский поток эквивалентен ансамблю пробных частиц  $\alpha$ , то достаточно рассмотреть три основных процесса, происходящих с частицами потока: передачу импульса, отклонение частиц и обмен энергией. Эти процессы описываются соответственно уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} &= m_\alpha (\langle \Delta \mathbf{v} \rangle^{\alpha/e} + \langle \Delta \mathbf{v} \rangle^{\alpha/i}) \dots \\ &= m_\alpha \left( \frac{\mathbf{v}}{\tau_s^{\alpha/e}} + \frac{\mathbf{v}}{\tau_s^{\alpha/i}} \right) = - \frac{m_\alpha \mathbf{v}}{\tau_s^\alpha}; \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{(\Delta v_\perp)_\alpha^2} &= \langle (\Delta v)_\perp^2 \rangle^{\alpha/e} + \langle (\Delta v)_\perp^2 \rangle^{\alpha/i} = \\ &= \frac{v^2}{\tau_d^{\alpha/e}} + \frac{v^2}{\tau_d^{\alpha/i}} = \frac{v^2}{\tau_d^\alpha}; \end{aligned} \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{(\Delta \varepsilon)_\alpha^2} &= (m_\alpha v)^2 (\langle (\Delta v)_\parallel^2 \rangle^{\alpha/e} + \\ &+ \langle (\Delta v)_\parallel^2 \rangle^{\alpha/i}) = \frac{\varepsilon^2}{\tau_e^{\alpha/e}} + \frac{\varepsilon^2}{\tau_e^{\alpha/i}} = \frac{\varepsilon^2}{\tau_e^\alpha}. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Здесь мы ввели «полные времена релаксации»  $\tau_s^\alpha$ ,  $\tau_d^\alpha$  и  $\tau_e^\alpha$ , связанные с «частичными» временами  $\tau_s^{\alpha/\beta}$ ,  $\tau_d^{\alpha/\beta}$  и  $\tau_e^{\alpha/\beta}$  соотношениями вида:

$$\frac{1}{\tau^\alpha} = \sum_\beta \frac{1}{\tau^{\alpha/\beta}} = \frac{1}{\tau^{\alpha/e}} + \frac{1}{\tau^{\alpha/i}}. \quad (18.4)$$

«Частичные» времена замедления, отклонения частиц и обмена энергией выражаются соответственно формулами (17. 17)—(17. 19):

$$\begin{aligned} \tau_s^{\alpha/\beta} &= \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \mu}; \quad \tau_d^{\alpha/\beta} = \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}}{2 \left(\mu + \mu' - \frac{\mu}{2x_\beta}\right)}; \\ \tau_e^{\alpha/\beta} &= \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}}{4\mu/x_\beta}, \end{aligned} \quad (18.5)$$

в которых обозначено:

$$\mu = \mu(x_\beta); \quad x_\beta = \frac{\varepsilon_\beta}{T_\beta} = \frac{m_\beta}{m_\alpha} \cdot \frac{\varepsilon_\alpha}{T_\beta}; \quad \tau_1^{\alpha/\beta} = \frac{\sqrt{m_\alpha}}{\pi \sqrt{2} e_\alpha^2 e_\beta^2} \cdot \frac{\varepsilon_\alpha^{3/2}}{\lambda n_\beta}. \quad (18.6)$$

Нам достаточно рассмотреть четыре типа столкновений:  $e/i$ ,  $e/e$ ,  $i/i$  и  $i/e$ .

В первом примере будем считать, что энергия  $\epsilon_a$  частиц потока фиксирована и настолько велика, что во всех случаях справедливо неравенство  $x_\beta \gg 1$ . В этих условиях

$$\tau_1^{\alpha/\beta} \sim \sqrt{m_\alpha}; \quad x_\beta \gg 1; \quad \mu(x_\beta) = 1; \quad \mu'(x_\beta) \cong 0. \quad (18.7)$$

Тогда, принимая за единицу простейшее время релаксации электронов на ионах  $\tau_1^{e/i}$ , получаем значения  $\tau_s$ ,  $\tau_d$  и  $\tau_e$  для разных случаев (табл. 2).

Таблица 2

Времена релаксации при  $x_\beta \gg 1$

$\tau$	$\alpha/\beta$			
	$e/i$	$e/e$	$i/i$	$i/e$
$\tau_s^{\alpha/\beta}$	«1»	0,5	$0,5 \sqrt{\frac{M}{m}}$	$\sqrt{\frac{m}{M}}$
$\tau_d^{\alpha/\beta}$	0,5	0,5	$0,5 \sqrt{\frac{M}{m}}$	$0,5 \sqrt{\frac{M}{m}}$
$\tau_e^{\alpha/\beta}$	$\left(\frac{\epsilon}{4T}\right) \frac{M}{m}$	$\left(\frac{\epsilon}{4T}\right)$	$\left(\frac{\epsilon}{4T}\right) \sqrt{\frac{M}{m}}$	$\left(\frac{\epsilon}{4T}\right) \sqrt{\frac{m}{M}}$
Условие применимости	$\epsilon_e \gg \frac{m}{M} T$	$\epsilon_e \gg T$	$\epsilon_i \gg T$	$\epsilon_i \gg \frac{M}{m} T$

В последней строке табл. 2 указаны условия применимости, вытекающие из требования  $x_\beta = \frac{\epsilon}{T} \frac{m_\beta}{m_\alpha} \gg 1$ .

Отсюда видно, что в этих условиях поток электронов тормозился бы всего лишь вдвое быстрее на электронах, чем на ионах ( $\tau_s^{e/e} = 0,5\tau_s^{e/i}$ ), в то время как поток ионов тормозился бы почти исключительно на электронах ( $\tau_s^{i/e} = 2 \frac{m}{M} \tau_s^{i/i}$ ). Кроме того, замедление и отклонение электронов происходят практически одновременно ( $\tau_s^e = 4/3\tau_d^e$ ), в то время как ион замедляется, почти не отклоняясь ( $\tau_s^i = 4 \frac{m}{M} \tau_d^i$ ).

Другой пример — энергия частиц потока равна средней тепловой энергии частиц плазмы, т. е.  $\epsilon_a = (3/2) T$ . Пользуясь значе-

ниями функций  $\mu(x)$  и  $(\mu + \mu' - \frac{\mu}{2x})$ , приведёнными в табл. 1, а также разложениями (15. 10), необходимыми для случая  $i/e$ , получим  $\tau_s$ ,  $\tau_d$  и  $\tau_e$  (табл. 3).

Таблица 3

Времена релаксации при $\varepsilon_\alpha = (3/2)T$				
$\tau$	$\alpha/\beta$			
	$e/i$	$e/e$	$i/i$	$i/e$
$\tau_s^{\alpha/\beta}$	«1»	0,82	$0,82 \sqrt{\frac{M}{m}}$	$0,73 \frac{M}{m}$
$\tau_d^{\alpha/\beta}$	0,5	0,70	$0,70 \sqrt{\frac{M}{m}}$	$0,54 \frac{M}{m}$
$\tau_e^{\alpha/\beta}$	$0,37 \frac{M}{m}$	0,62	$0,62 \sqrt{\frac{M}{m}}$	$0,27 \frac{M}{m}$

Как видим, все релаксационные времена разбиваются на три группы:  $\sim 1$ ,  $\sim \sqrt{M/m}$  и  $\sim M/m$ . Соответствующие процессы будут при этом отличаться скоростью протекания, что мы используем в § 20 для общего анализа релаксационных процессов в плазме. Сравнение данных табл. 3 с данными табл. 2 показывает, что в случае электронного потока относительная эффективность столкновений типа  $e/i$  и  $e/e$  почти не изменилась, в то время как для ионов ситуация стала противоположной. Если раньше сверхбыстрый ион с  $\varepsilon \gg \frac{M}{m} T$  тормозился и обменивался энергией преимущественно с электронами:

$$\tau_{s, e}^{i/e} \sim \frac{m}{M} \tau_{s, e}^{i/i}, \quad (18. 8)$$

(однако  $\tau_d^{i/e} = \tau_d^{i/i}$ ), то теперь «тепловой» ион с  $\varepsilon = (3/2) T$  с точки зрения всех трех процессов взаимодействует преимущественно с ионами:

$$\tau_{s, d, e}^{i/i} \sim \sqrt{\frac{m}{M}} \tau_{s, d, e}^{i/e}. \quad (18. 9)$$

Отметим, что времена продольного замедления  $\tau_s^{i/e}$  и  $\tau_s^{i/i}$  сравниваются при энергии  $\varepsilon_i^{(s)}$ , равной

$$\varepsilon_i^{(s)} = T \left( \frac{9\pi}{4} \frac{M}{m} \right)^{1/3}. \quad (18. 10)$$

Времена обмена энергией  $\tau_e^{i/\beta}$  сравниваются при близкой энергии:

$$\varepsilon_i^{(e)} = T \left( \frac{9\pi}{16} \frac{M}{m} \right)^{1/3} = 0,63\varepsilon_i^{(s)}; \quad (18. 11)$$

$$(\tau_e^{i/i} = \tau_e^{i/e}).$$

Для ионов водорода  $\left(\frac{M}{m} = 1823\right)$  и дейтерия  $\left(\frac{M}{m} = 3646\right)$  соответственно имеем:

$$\left. \frac{\varepsilon_i^{(s)}}{T} \right|_H = 24 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\varepsilon_i^{(s)}}{T} \right|_D = 2^{1/3} \left. \frac{\varepsilon_i^{(s)}}{T} \right|_H = 30. \quad (18. 12)$$

Отсюда можно найти и энергию  $\varepsilon_i^{(e)} = 0,63\varepsilon_i^{(s)}$ .

### § 19. Передача энергии

Продолжим рассмотрение задачи о плоском потоке из электронов или ионов того же сорта, что и полевые, и исследуем вопрос о передаче энергии. В отличие от импульса, который всегда передается только от потока к плазме ( $dp/dt < 0$ ), так что поток тормозится, изменение энергии частиц потока, описываемое уравнением (17. 24)

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_\alpha}{dt} = - \frac{2\varepsilon_\alpha}{\tau_1^{\alpha/e}} \left[ \frac{m_\alpha}{m} \mu - \mu' \right]_{x_e} - \frac{2\varepsilon_\alpha}{\tau_1^{\alpha/i}} \left[ \frac{m_\alpha}{M} \mu - \mu' \right]_{x_i}, \quad (19. 1)$$

может иметь оба знака, поскольку поток достаточно быстрых частиц будет нагревать плазму, в то время как поток медленных частиц (например, в пределе — покоящихся) будет ее охлаждать. Таким образом, прежде чем говорить об относительной эффективности столкновений того или иного типа для передачи энергии, мы должны выяснить направление этой передачи. Последнее, как это следует из уравнений (17. 24), определяется знаком выражения

$$\frac{m_\alpha}{m_\beta} \mu(x_\beta) - \mu'(x_\beta) = \begin{cases} > 0, \text{ тогда } \alpha \rightarrow \beta; \\ < 0, \text{ тогда } \beta \rightarrow \alpha, \end{cases} \quad (19. 2)$$

которое обращается в нуль в точке  $x_\beta^*$ , определяемой уравнением (17. 25)

$$\frac{m_\beta}{m_\alpha} = \frac{\mu(x_\beta^*)}{\mu'(x_\beta^*)}, \quad (19. 3)$$

где

$$x_{\beta}^* = \frac{m_{\beta}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\varepsilon_{\alpha}^*}{T_{\beta}}. \quad (19.4)$$

Пользуясь табл. 1, а также приближенными выражениями для  $\mu(x)$  [см. выражение (15.10)], можно получить:

$$\frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = \begin{cases} \frac{2}{3}x & (\text{при } x \ll 1); \\ 1 & (\text{при } x \cong 1, \text{ точнее, } 0,98); \\ \frac{e^x}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} & (\text{при } x \gg 1). \end{cases} \quad (19.5)$$

Отсюда и из выражения (19.3) найдем «критическую» энергию  $\varepsilon_{\alpha}^*$ , при которой направление передачи энергии меняет знак (табл. 4).

Таблица 4

Критическая энергия  $\varepsilon_{\alpha}^*$

$\alpha/\beta$	$e/i$	$e/e$	$i/i$	$i/e$
$\frac{\varepsilon_{\alpha}^*}{T}$	$\approx \frac{m}{M} \ln \left( \frac{M}{m} \frac{10}{3} \right) \approx \frac{1}{210}$ для $H$ и $\frac{1}{390}$ для $D$	1	1	3/2

Малость значения  $\varepsilon_{\alpha}^*/T$  в табл. 4 для случая  $e/i$  обусловлена спецификой кулоновского взаимодействия.

Следует обратить внимание на то, что указанная критическая энергия отнюдь не равна средней тепловой энергии  $(3/2) T_{\beta}$  частиц среды, как это могло бы показаться на первый взгляд. Объясняется это тем, что плоский поток частиц с такой энергией находится как бы в «мгновенном» равновесии  $(d\varepsilon/dt)_{t=0} = 0$  со средой, а отнюдь не в полном термодинамическом равновесии, для которого требуется максвелловское распределение (см. § 20). Если  $\varepsilon_{\alpha}$  превосходит значения  $\varepsilon_{\alpha}^*$ , указанные в табл. 4, то энергия передается от потока  $\alpha$  к частицам  $\beta$  в плазме, если же  $\varepsilon_{\alpha} < \varepsilon_{\alpha}^*$ , то, наоборот,

$$\left( \frac{d\bar{\varepsilon}_{\alpha}}{dt} \right)^{\alpha/\beta} = \begin{cases} < 0 & (\text{при } \varepsilon_{\alpha} > \varepsilon_{\alpha}^*); \\ 0 & (\text{при } \varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^*); \\ > 0 & (\text{при } \varepsilon_{\alpha} < \varepsilon_{\alpha}^*). \end{cases} \quad (19.6)$$

Возвращаясь к формуле (19.1), рассмотрим практически важный случай ионного потока, причем будем считать, что  $\varepsilon_{\alpha} \gg \gg (3/2) T$ . Тогда в соответствии с табл. 4 проходящий поток будет нагревать и ионы и электроны среды, и, чтобы судить о скорости нагревания частиц того или иного сорта, необходимо сравнить

относительную величину первого  $i/i$  и второго  $i/e$  членов в уравнении:

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha}}{dt} = -\frac{2\varepsilon}{\tau_1^{i/i}} \left[ \mu \left( \frac{\varepsilon}{T} \right) - \mu' \left( \frac{\varepsilon}{T} \right) \right] - \frac{2\varepsilon}{\tau_1^{i/e}} \left[ \frac{M}{m} \mu \left( \frac{m\varepsilon}{MT} \right) - \mu' \left( \frac{m\varepsilon}{MT} \right) \right]. \quad (19.7)$$

Поскольку ионы однозарядные, здесь  $\tau_1^{i/i} = \tau_1^{i/e}$ . При условии  $\varepsilon \gg \frac{3}{2} T$  мы можем в первом  $i/i$  члене приближенно положить  $\mu - \mu' \approx 1$ . Тогда возможны два случая. Если энергия  $\varepsilon_{\alpha}$  настолько велика, что  $\varepsilon_{\alpha} \gg (M/m)T$ , то

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha}}{dt} = -\frac{2\varepsilon_{\alpha}}{\tau_1^{i/i}} - \frac{2\varepsilon_{\alpha}}{\tau_1^{i/e}} \frac{M}{m}. \quad (19.8)$$

В этом случае греются в основном электроны — в  $M/m$  раз интенсивнее ионов. В другом случае при условии

$$\frac{\varepsilon}{T} \gg \frac{3}{2} \text{ и } \frac{m}{M} \frac{\varepsilon}{T} \ll 1, \quad (19.9)$$

разлагая в ряд  $\mu(x)$  и  $\mu'(x)$  в члене  $i/e$ , имеем:

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha}}{dt} = -\frac{2\varepsilon}{\tau_1^{i/i}} - \frac{2\varepsilon}{\tau_1^{i/e}} \left[ \left( \frac{\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \left( \frac{m\varepsilon}{MT} \right)^{1/2} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \right], \quad (19.10)$$

и, если  $\left( \frac{\varepsilon}{T} - \frac{3}{2} \right) \sim 1$ , то поток греет преимущественно ионы.

Нагревание электронов и ионов будет одинаковым, когда выражение в квадратных скобках в формуле (19.10) будет равно единице, т. е. примерно при энергии  $\varepsilon_{\alpha}^{**}$ :

$$\frac{\varepsilon_{\alpha}^{**}}{T} \Big|_{\alpha=i} = \left( \frac{9\pi}{16} \cdot \frac{M}{m} \right)^{1/3}, \quad (19.11)$$

что составляет 14,7 для ионов водорода  $H$  ( $M = 1823 m$ ) и 18,5 для ионов дейтерия  $D$ .

Критическая энергия  $\varepsilon_i^{**}$ , как видим, полностью совпадает с энергией  $\varepsilon_i^{(e)}$ , найденной в предыдущем параграфе из условия  $\tau_e^{i/i} = \tau_e^{i/e}$ . Это случайное обстоятельство обусловлено удачным выбором коэффициентов при определении  $\tau_e^{\alpha/\beta}$ , характеризующим расплывание облака-ансамбля в продольном направлении. Если, пользуясь общим определением  $\tau$  по формуле (17.20), ввести специальное «время передачи энергии»  $\tau_{\pi}$  на основе формулы (17.24):

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_{\alpha}}{dt} = -\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\tau_{\pi}^{\alpha/\beta}}, \quad (19.12)$$



где

$$\tau_n^{\alpha/\beta} = \frac{\tau_1^{\alpha/\beta}(\varepsilon_\alpha)}{2 \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} \mu - \mu' \right] x_\beta}, \quad (19.13)$$

то в критических точках (19.5)  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^*$  (см. табл. 4), где  $\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = 0$ , это время обращалось бы в бесконечность. Если исключить эти точки и их ближайшую окрестность, то введенное время передачи энергии  $\tau_n^{\alpha/\beta}$  будет для энергий, близких к тепловой, совпадать по порядку величины со временем обмена энергиями  $\tau_e^{\alpha/\beta}$ . В табл. 5 приведены значения  $\tau_n$  для  $\varepsilon = 2T$  (а не  $(3/2)T$ , что для столкновений  $i/e$  составляет критическую энергию, см. табл. 4).

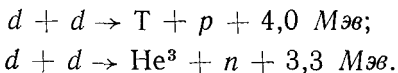
Таблица 5

Время передачи энергии  $\tau_n$  при  $\varepsilon = 2T$

$\alpha/\beta$	$e/i$	$e/e$	$i/i$	$i/e$
$\tau_n^{\alpha/\beta}$	$0,5 \frac{M}{m}$	«1»	$\sqrt{\frac{M}{m}}$	$0,94 \frac{M}{m}$

Как видно из табл. 5,  $\tau_n$  для  $\varepsilon = 2T$  примерно совпадает с  $\tau_e^{\alpha/\beta}$  для  $\varepsilon = (3/2)T$  (см. табл. 3).

Особый интерес представляет вопрос о передаче энергии продуктов ядерных реакций частицам плазмы, служащей «горючей смесью» в проектируемых термоядерных реакторах. Рассмотрим, например, дейтериевую плазму, в которой протекают реакции:



Заряженные частицы  $p$ ,  $T$  и  $\text{He}^3$ , образующиеся в этих реакциях, обладают соответственно энергиями:

$$\varepsilon_p^0 = 3 \text{ Мэв}, \quad \varepsilon_T^0 = 1 \text{ Мэв}, \quad \varepsilon_{\text{He}^3}^0 = 0,83 \text{ Мэв}. \quad (19.14)$$

В частности, наиболее энергичная из них — протон ( $p$ ), сталкиваясь с дейтонами ( $i = d$ ) и электронами ( $e$ ) плазмы, будет терять свою энергию в соответствии с уравнением (19.12):

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = -\frac{\varepsilon_p}{\tau_n^{p/d}} - \frac{\varepsilon_p}{\tau_n^{p/e}} = -\frac{\varepsilon_p}{\tau_n^{(p)}}, \quad (19.15)$$

где соответственно имеем:

$$\tau_n^{p/d} = \frac{\tau_1^{p/d}}{\mu \left( 2 \frac{\varepsilon}{T} \right) - 2\mu' \left( 2 \frac{\varepsilon}{T} \right)}$$

и

$$\tau_{\Pi}^{p/e} = \frac{\tau_1^{p/e}}{2 \frac{M}{m} \mu \left( \frac{m\varepsilon}{MT} \right) - 2\mu' \left( \frac{m\varepsilon}{MT} \right)}. \quad (19.16)$$

Для определенности предположим, например, что температура плазмы составляет  $T = T_i = T_e = 50$  кэВ. В начальный момент  $\varepsilon_p^0 = 3$  МэВ  $= 3 \cdot 10^3$  кэВ и, следовательно, при этом:

$$\frac{\varepsilon}{T} = \frac{3000}{50} = 60 \quad \text{и} \quad \frac{m\varepsilon}{MT} = \frac{60}{1823} = \frac{1}{30}. \quad (19.17)$$

Используя для  $\mu(x)$  в одном случае асимптотику, а в другом — разложение в ряд [см. выражение (15.10)], получим:

$$\tau_{\Pi}^{p/d} = \tau_1^p(\varepsilon)$$

и

$$\tau_{\Pi}^{p/e} = \left[ \frac{V\sqrt{\pi}/4}{\frac{2\varepsilon}{3T} - 1} \left( \frac{MT}{m\varepsilon} \right)^{1/2} \right] \tau_1^p(\varepsilon) = \frac{\tau_1^p(\varepsilon)}{16}, \quad (19.18)$$

где  $\tau_1^p(\varepsilon) = \tau_1^{p/d} = \tau_1^{p/e}$ . Например, при  $n = 10^{13}$  см<sup>-3</sup>;  $\varepsilon = 3$  МэВ;  $\lambda = 20$  это «простейшее» время составляет [см. (18.6)]:

$$\tau_1^p = 285 \text{ сек} \quad (!). \quad (19.19)$$

Таким образом, вначале энергия передается электронам в 16 раз быстрее, чем дейтонам. Нагревание электронов и дейтонов плазмы становится одинаковым ( $\tau_{\Pi}^{p/d} = \tau_{\Pi}^{p/e}$ ) примерно при энергии протона  $\varepsilon_p^{**}$ , для которой [см. формулы (19.18)]

$$\frac{V\sqrt{\pi}/4}{\frac{2\varepsilon^{**}}{3T} - 1} \left( \frac{MT}{m\varepsilon^{**}} \right)^{1/2} \cong 1, \quad (19.20)$$

откуда

$$\varepsilon_p^{**} \cong \left( \frac{9\pi M}{64m} \right)^{1/3} T = 9,3T = 0,5 \text{ МэВ}.$$

Ниже этой энергии при  $\varepsilon_p < 0,5$  МэВ протоны нагревают преимущественно дейтоны. Например, для  $\varepsilon_p = 2T = 100$  кэВ из формулы (19.16) или (19.18) можно получить:

$$\tau_{\Pi}^{p/d} = 1,15\tau_1^p$$

и

$$\tau_{\Pi}^{p/e} = \left( \frac{9\pi M}{32m} \right)^{1/2} \tau_1^p = 40\tau_1^p, \quad (19.21)$$

причем для значений  $n = 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $\varepsilon = 0,1$  МэВ,  $\lambda = 20$  здесь  $\tau_1^p = 1,7$  сек в отличие от результата в выражении (19.19).

## § 20. Установление равновесия в двухкомпонентной плазме

Составленная нами в § 18 для случая  $\epsilon_\alpha = (3/2)T$  табл. 3 времен релаксации по порядку величин будет вообще справедлива при  $\epsilon_\alpha \sim T$ . При этом условии мы можем применить ее для качественного рассмотрения вопроса о том, как устанавливается равновесие в плазме, начальное состояние которой было неравновесным. Все релаксационные процессы в соответствии с табл. 3 будут протекать в три этапа.

На первом этапе ( $\tau \sim \langle 1 \rangle$ ) столкновения типа  $e/i$  приведут к установлению изотропного распределения электронов по скоростям. Этот процесс был рассмотрен в § 14. Одновременно с этим столкновения  $e/e$  постепенно приведут электроны к равновесному максвелловскому распределению. Этот процесс «максвеллизации» будет рассмотрен ниже.

На втором этапе ( $\tau \sim \sqrt{M/m}$ ) столкновения типа  $i/i$  приведут ионы к изотропному равновесному распределению.

На третьем этапе ( $\tau \sim M/m$ ) столкновения типа  $i/e$  и  $e/i$  между электронами и ионами, которые порознь уже успели максвеллизироваться, но возможно обладают различными температурами  $T_e$  и  $T_i$ , постепенно сравнивают эти температуры.

Чтобы рассмотреть последний процесс, воспользуемся уравнением (19. 11)

$$\frac{d\epsilon_\alpha}{dt} = -\frac{2\epsilon_\alpha}{\tau_1^{\alpha/\beta} \{\epsilon_\alpha\}} \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} \mu(x_\beta) - \mu'(x_\beta) \right],$$

где

$$\tau_1 \{\epsilon\} \sim \epsilon^{3/2}, \quad (20. 1)$$

описывающим изменение энергии пробной частицы  $\alpha$  в среде максвелловских частиц  $\beta$ . Предполагая, что пробные частицы  $\alpha$  также распределены по Максвеллу со своей температурой  $T_\alpha$ , можно просто усреднить уравнение (20. 1) по этому последнему распределению. Тогда, учитывая, что операция усреднения по максвелловскому распределению частиц  $\alpha$  есть не что иное, как интегрирование по  $dx_\alpha$ , где  $x_\alpha = \epsilon_\alpha/T_\alpha$  с весом  $\mu'(x_\alpha)$ , и что  $\tau_1 \{\epsilon\} \sim \epsilon^{3/2}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \frac{dT_\alpha}{dt} = & -\frac{2T_\alpha}{\tau_1^{\alpha/\beta} \{T_\alpha\}} \int_0^\infty \frac{x_\alpha}{x_\alpha^{3/2}} \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} \mu(x_\beta) - \mu'(x_\beta) \right] \times \\ & \times \mu'(x_\alpha) d_\alpha. \end{aligned} \quad (20. 2)$$

Здесь  $x_\beta = \frac{m_\beta T_\alpha}{m_\alpha T_\beta} x_\alpha$ . Подставляя сюда выражение для  $\mu'(x)$  и интегрируя один раз по частям, получим:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{dT_\alpha}{dt} = -\frac{2T_\alpha}{\tau_1^{\alpha/\beta} \{T_\alpha\}} \int_0^\infty \left[ \frac{m_\alpha}{m_\beta} \mu(x_\beta) - \mu'(x_\beta) \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_\alpha} dx_\alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2T_\alpha}{\tau_1^{\alpha/\beta} \{T_\alpha\}} \frac{4m_\beta T_\alpha}{\pi m_\alpha T_\beta} \int_0^\infty e^{-(x_\alpha + x_\beta)} \left( \frac{m_\alpha}{m_\beta} - \frac{1}{2x_\beta} + 1 \right) \sqrt{x_\beta} dx_\alpha = \\
&= -\frac{2T_\alpha}{\tau_1^{\alpha/\beta} \{T_\alpha\}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{1 - \frac{T_\beta}{T_\alpha}}{\left( \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{T_\beta}{T_\alpha} + 1 \right)^{3/2}} = \\
&= -\frac{m_\alpha^4}{m_\beta \sqrt{\pi}} \frac{T_\alpha - T_\beta}{\tau_1^{\alpha/\beta} \left\{ T_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_\beta} T_\beta \right\}}. \quad (20.3)
\end{aligned}$$

Здесь  $\tau_1^{\alpha/\beta} \{ \epsilon_\alpha \}$  — «простейшее время релаксации» [см. формулы (18.6)], в котором аргумент  $\epsilon_\alpha$  заменен на  $T_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_\beta} T_\beta$ . Из этой формулы, в частности, нетрудно видеть, что

$$n_\alpha \frac{dT_\alpha}{dt} = -n_\beta \frac{dT_\beta}{dt} \quad (20.4)$$

в соответствии с законом сохранения энергии.

Формула (20.3) впервые получена Спитцером [22] и, независимо, Коганом [23]. Ее можно записать, как это делает Спитцер, в виде

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = \frac{T_\beta - T_\alpha}{\tau_T^{\alpha/\beta}}, \quad (20.5)$$

вводя тем самым релаксационное «время выравнивания температур»:

$$\tau_T^{\alpha/\beta} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{m_\beta}{m_\alpha} \tau_1^{\alpha/\beta} \left\{ T_\alpha + \frac{m_\alpha}{m_\beta} T_\beta \right\}. \quad (20.6)$$

Тогда, учитывая, что под  $\alpha$  и  $\beta$  можно подразумевать также две максвелловские группы частиц одного и того же сорта, нетрудно убедиться, что по порядку величины при  $T_\alpha \sim T_\beta$

$$\tau_T^{e/e} : \tau_T^{i/i} : \tau_T^{i/e} : \tau_T^{e/e} = \langle 1 \rangle : \sqrt{\frac{M}{m}} : \frac{M}{m} : \frac{M}{m}. \quad (20.7)$$

Сравнивая выражение (20.7) с последней строкой табл. 3, можно убедиться, что по порядку величин при  $T_\alpha \sim T_\beta$

$$\tau_T^{\alpha/\beta} \sim \tau_e^{\alpha/\beta}(\epsilon) |_{\epsilon \sim T}, \quad (20.8)$$

что лишний раз подтверждает физическую правильность термина «время обмена энергией» для величины  $\tau_e$ , введенной в формуле (13.16).

Рассмотрим теперь несколько подробнее упомянутый выше процесс «максвеллизации», т. е. установления максвелловского распределения для частиц некоторого сорта  $\alpha$  в результате их взаимных ( $\alpha/\alpha$ ) столкновений. Этот процесс описывается кинетическим уравнением [см. уравнения (11. 12) и (11. 15), в которых индекс  $\alpha$  опускаем]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{j} = L \left( f^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_k} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial v_i \partial v_k} \right), \quad (20. 9)$$

где

$$f(t, \mathbf{v}) = \Delta_{\mathbf{v}}^2 \psi \quad \text{и} \quad L = \lambda \left( \frac{4\pi e^2}{m} \right)^2.$$

Получить решение этого уравнения в общем виде невозможно. Из закона возрастания энтропии, в согласии с которым, как это можно показать, находится и уравнение (20. 9), ясно, что любое наперед заданное начальное распределение частиц  $f(0, \mathbf{v})$  должно постепенно переходить в максвелловское распределение  $f^0(\mathbf{v})$ , при котором энтропия максимальна.

Температура последнего в соответствии с законом сохранения энергии будет определяться средней энергией относительного движения частиц в начальный момент времени:

$$\frac{3}{2} T = \bar{\varepsilon}_{\text{отн}} = \frac{1}{n} \int \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle_0)^2 f(0, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (20. 10)$$

Приводя уравнение (20. 9) к безразмерному виду, можно при этом заключить, что равновесие будет устанавливаться за характерные времена порядка

$$\tau_1^{\alpha/\alpha}(T) = \frac{\sqrt{m_\alpha}}{\pi \sqrt{2} e_\alpha^4} \frac{T^{3/2}}{\lambda n_\alpha}, \quad (20. 11)$$

где  $T = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_{\text{отн}}$ , что находится в согласии с табл. 3.

В качестве примера рассмотрим, следуя В. И. Когану [23], задачу о скорости выравнивания «продольной» и «поперечной» температур для находящегося в магнитном поле газа из заряженных частиц, распределение которых в начальный момент времени имеет вид:

$$f(0, \mathbf{v}) = \operatorname{const} e^{-\frac{mv_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}} - \frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}}} \quad (20. 12)$$

Постоянная здесь определяется из соображений нормировки:  $\operatorname{const} = n (m/2\pi)^{3/2} / T_{\parallel} V \sqrt{T_{\parallel}}$ . Направив ось  $z$  вдоль магнитного поля так, что  $v_{\parallel} = v_z$  и  $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$ , имеем:

$$\bar{\varepsilon}_{\parallel} = \frac{\overline{mv_{\parallel}^2}}{2} = \frac{T_{\parallel}}{2} \quad \text{и} \quad \bar{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\overline{mv_{\perp}^2}}{2} = \frac{T_{\perp}}{2} + \frac{T_{\perp}}{2} = T_{\perp}. \quad (20. 13)$$

Пользуясь кинетическим уравнением (20. 9) и учитывая закон сохранения энергии, получим:

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{T_{\parallel}}{2} = -\frac{1}{n} \int \frac{mv_z^2}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = -\frac{m}{n} \int v_z j_z d\mathbf{v}. \quad (20. 14)$$

Для вычисления  $j_z$  в данном случае проще всего использовать запись потока в форме Ландау [см. выражение (11. 18)]:

$$j_z^{\alpha/a} = \frac{L^{\alpha/a}}{8\pi} \int U_{zi} \left( f \frac{\partial f'}{\partial v_i} - f' \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) d\mathbf{v}', \quad (20. 15)$$

где  $U_{zi} = \frac{\delta_{zi}}{u} - \frac{u_z u_i}{u^3}$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ . Пользуясь выражением (20. 12) для  $f(0, \mathbf{v})$ , находим:

$$\frac{\partial f}{\partial v_x} = -\frac{m}{T_{\perp}} v_x f; \quad \frac{\partial f}{\partial v_y} = -\frac{m}{T_{\perp}} v_y f; \quad \frac{\partial f}{\partial v_z} = -\frac{m}{T_{\parallel}} v_z f \quad (20. 16)$$

и аналогично для штрихованных величин. Подставляя эти выражения в уравнение (20. 15) и производя суммирование по индексу  $i$ , получим:

$$\begin{aligned} U_{zi} \left( f \frac{\partial f'}{\partial v_i} - f' \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) &= m f f' \left( U_{zx} \frac{u_x}{T_{\perp}} + \right. \\ &\left. + U_{zy} \frac{u_y}{T_{\perp}} + U_{zz} \frac{u_z}{T_{\parallel}} \right) = m \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} f f' \frac{u_z u_{\perp}^2}{u^3}. \end{aligned} \quad (20. 17)$$

Тогда из уравнений (20. 14) и (20. 15) имеем:

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{T_{\parallel}}{2} = -2\pi e^4 \lambda \frac{1}{n} \frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{T_{\perp} T_{\parallel}} \int \int f f' \frac{v_z u_z u_{\perp}^2}{u^3} d\mathbf{v} d\mathbf{v}'. \quad (20. 18)$$

Стоящий здесь интеграл с функцией  $f(0, \mathbf{v})$ , определяемой выражением (20. 12), можно вычислить до конца (см. работу [23]), однако мы ограничимся случаем близких температур  $|T_{\perp} - T_{\parallel}| \ll T_{\parallel}$ . Вводя обозначения

$$\Delta T = T_{\perp} - T_{\parallel} \quad \text{и} \quad T = \frac{2}{3} (\bar{\epsilon}_{\parallel} + \bar{\epsilon}_{\perp}) = \frac{T_{\parallel}}{3} + \frac{2T_{\perp}}{3} \quad (20. 19)$$

и ограничиваясь членом первого порядка малости по  $\Delta T$ , интеграл в уравнении (20. 18) можно вычислять не с функцией  $f(0, \mathbf{v})$  из выражения (20. 12), а с распределением Максвелла:

$$f_m^0(\mathbf{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}}. \quad (20. 20)$$

Здесь для удобства в качестве индекса функции указана масса

частицы  $m$ . Введем в качестве новых переменных интегрирования скорость центра инерции двух частиц и относительную скорость

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}'}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'. \quad (20.21)$$

Учитывая, что при такой замене имеют место соотношения

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{u}; \quad \mathbf{v}' = \mathbf{V} - \frac{1}{2} \mathbf{u}; \quad (20.22)$$

$$\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}'^2 = 2\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$$

и, кроме того,

$$f_m^0(\mathbf{v}) f_m^0(\mathbf{v}') d\mathbf{v} d\mathbf{v}' = f_{2m}^0(\mathbf{V}) f_{\frac{m}{2}}^0(\mathbf{u}) d\mathbf{V} d\mathbf{u}, \quad (20.23)$$

где  $2m$  — суммарная масса, а  $\frac{m}{2}$  — приведенная, для уравнения (20.18) получим

$$\begin{aligned} & \int \int f_m^0(\mathbf{v}) f_m^0(\mathbf{v}') \frac{v_z u_z u_{\perp}^2}{u^3} d\mathbf{v} d\mathbf{v}' = \\ & = \int \int f_{2m}^0(\mathbf{V}) f_{\frac{m}{2}}^0(\mathbf{u}) \left( \mathbf{V}_z + \frac{u_z}{2} \right) \frac{u_z u_{\perp}^2}{u^3} d\mathbf{V} d\mathbf{u} = \\ & = n \int f_{\frac{m}{2}}^0(\mathbf{u}) \frac{u_z^2 u_{\perp}^2}{2u^3} d\mathbf{u} = \frac{n}{2} (\cos^2 \theta \sin^2 \theta) \int f_{\frac{m}{2}}^0(\mathbf{u}) u d\mathbf{u} = \\ & = \frac{n}{2} \left( \frac{2}{15} \right) n \sqrt{\frac{16T}{\pi m}}. \end{aligned} \quad (20.24)$$

Подставляя найденное значение в уравнение (20.18), окончательно имеем:

$$\frac{dT_{\perp}}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dT_{\parallel}}{dt} = -\frac{T_{\perp} - T_{\parallel}}{\frac{15}{8} \sqrt{2\pi} \tau_1(T)}. \quad (20.25)$$

Таким образом, разность температур убывает экспоненциально:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = 3 \frac{dT_{\perp}}{dt} = -\frac{\Delta T}{\tau} \quad \text{откуда} \quad \Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (20.26)$$

Она уменьшается в  $e = 2,7$  раза за время

$$\tau = \frac{5}{8} \sqrt{2\pi} \tau_1(T) = 1,56 \tau_1(T), \quad (20.27)$$

где  $\tau_1(T)$  — простейшее время релаксации, в котором аргумент заменен на  $T$  [см. уравнение (20.11)].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
  2. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
  3. Rosenbluth M., MacDonald W. and Judd D. Phys. Rev., **107**, 1 (1957).
  4. Трубников Б. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 1341 (1958).
  5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
  6. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **7**, 203 (1937); Phys. Z. der Sowjetunion, **10**, 154 (1936).
  7. Cohen, Spitzer L. and McRoutly. Phys. Rev., **80**, 230 (1950). (Перевод «Динамика плазмы» в «Пробл. совр. физ.», **2**, 54 (1956)).
  8. Боголюбов Н. Н. Динамические проблемы в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946.
  9. Кадомцев В. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 151 (1957).
  10. Коган В. И. «Докл. АН СССР», **135**, 1374 (1960).
  11. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
  12. Gasiorowicz S., Neuman M. and Riddell R. Phys. Rev., **10**, 922 (1956).
  13. Силин В. П., Горбунов Л. М. «Докл. АН СССР», **145**, 1265 (1962).
  14. Valescu S. Phys. Fluids., **3**, 52 (1960).
  15. Leonard A. Ann. of Phys. **3**, 90 (1960).
  16. Климонтович Ю. Л., Темко С. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 132 (1957).
  17. Силин В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 1768 (1961).
  18. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», **1**, 82 (1961).
  19. Веденов А. А. «Атомная энергия», **12**, № 2, (1962).
  20. Беляев С. Т. и Будкер Г. И. «Докл. АН СССР», **107**, 807 (1956).
  21. Дрейсер. К теории «убегающих» электронов. В кн.: «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии.» Избр. доклады иностр. ученых. Т.1 — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 170.
  22. Spitzer L. Monthly Notices, Roy. Astron. Soc., **100**, 396 (1940)
  23. Коган В. И. В кн.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 130.
-



## ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ

С. И. Брагинский

### § 1. Уравнения переноса

Состояние ионизованного газа (плазмы) можно характеризовать заданием функций распределения  $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  составляющих его частиц. Эти функции дают плотность частиц сорта  $a$  в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  фазового пространства, так что  $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r}d\mathbf{v}$  есть число частиц в шестимерном элементе объема  $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ . В простейшем случае плазма может состоять из электронов ( $a = e$ ) и одного сорта ионов ( $a = i$ ), в более сложных случаях она может содержать несколько сортов ионов, а также нейтральные частицы ( $a = n$ ) — атомы, молекулы, возбужденные атомы и т. д. Поведение ионизованного газа описывается системой кинетических уравнений (уравнениями Больцмана), определяющих изменение функций распределения со временем (см., например, [1, 2, 3, 39]):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (v_\beta f_a) + \frac{\partial}{\partial v_\beta} \left( \frac{F_{a\beta}}{m_a} f_a \right) = C_a. \quad (1.1)$$

Здесь  $F_a$  — сила, действующая в точке  $\mathbf{r}$  на частицу сорта  $a$ , имеющую скорость  $\mathbf{v}$ ;  $m_a$  — масса частиц  $a$ . Для заряженных частиц с зарядом  $e_a$  в электрическом поле  $\mathbf{E}$  и магнитном поле  $\mathbf{B}$

$$F_a = e_a \mathbf{E} + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}]. \quad (1.2)$$

Кинетическое уравнение не учитывает тепловых флуктуаций. Входящая в уравнение (1.1) функция  $f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  — это сглаженная плотность, усредненная по объемам, содержащим очень много частиц.

Сила  $F_a$ , входящая в левую часть кинетического уравнения, это тоже «сглаженная» макроскопическая сила, усредненная по объемам, содержащим много частиц, и временам, большим по сравнению с соответствующим временем пролета; то же самое относится к полям  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Сила  $F_a$  не учитывает быстро флуктуирующих микрополей и микросил, возникающих при сильном сближении частиц. Эти эффекты (будем для краткости называть

их просто столкновениями) учитываются стоящим в правой части столкновительным членом  $C_a$ . Вопрос об отделении самосогласованного поля от микрополей является весьма сложным. Он рассматривался во многих работах, например, в работе Б. Б. Кадомцева [37].

Частицы сорта  $a$  могут сталкиваться между собой и с частицами других сортов. В соответствии с этим

$$C_a = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b), \quad (1.3)$$

где  $C_{ab}$  дает изменение в единицу времени функции распределения частиц  $a$  в результате столкновений с частицами  $b$ . Члены  $C_{ab}$  могут соответствовать как упругим, так и неупругим столкновениям\*. Так называемый больцмановский столкновительный член для упругих столкновений приведен в приложении. Для упругих столкновений между заряженными частицами мы будем брать столкновительный член в той сравнительно простой форме, которая ему была придана Л. Ландау [11]. Для неупругих столкновений столкновительный член имеет гораздо более сложный вид, он даже не всегда может быть написан в явном виде. Далее неупругие столкновения мы рассматривать не будем.

Некоторые свойства столкновительного члена можно указать и не зная его явного вида. Если не учитывать процессы, превращающие частицы одного сорта в частицы другого сорта — ионизацию, диссоциацию и т. д., то столкновительные члены удовлетворяют условиям

$$\int C_{ab} dv = 0; \quad (1.4)$$

$$\int m_a v C_{aa} dv = 0; \quad (1.5)$$

$$\int \frac{m_a v^2}{2} C_{aa} dv = 0 \quad (1.6)$$

Действительно, интеграл (1.4), умноженный на  $dg$ , дает изменение полного числа частиц  $a$  в элементе объема  $dg$  в результате столкновений с частицами  $b$ . Но при упругих столкновениях такого изменения нет. Интегралы (1.5) и (1.6) дают изменение соответственно импульса и энергии частиц  $a$  в результате столкновений между собой. Но так как при столкновениях импульс и энергия сохраняются, то эти интегралы равны нулю. Анало-

\* При этом, например, возбужденные атомы считаются частицами иного «сорта», чем невозбужденные, и им приписывается другой номер  $a$ . Заметим также, что в уравнении (1.1) не учитываются явно вращательные степени свободы, существенные, например, при рассмотрении молекул. Для их учета надо было бы рассматривать функцию распределения, зависящую (кроме  $g, v$ ) также и от полного момента вращения частиц  $M$ . Формально можно считать, что переменные  $M$ , как и внутренние степени свободы, тоже учитываются индексом  $a$ , но фактически учет вращения очень сложен, поэтому мы не будем им заниматься, а предположим, что по вращательным переменным произведено соответствующее усреднение.

гично для упругих столкновений между разными частицами  $a$ ,  $b$ , когда сохраняются суммарные импульсы и энергия, справедливы соотношения

$$\int m_a \mathbf{v} C_{ab} d\mathbf{v} + \int m_b \mathbf{v} C_{ba} d\mathbf{v} = 0; \quad (1.5')$$

$$\int (m_a v^2/2) C_{ab} d\mathbf{v} + \int (m_b v^2/2) C_{ba} d\mathbf{v} = 0. \quad (1.6')$$

Согласно общим положениям статистической физики, в состоянии теплового равновесия частицы любого газа имеют максвелловское распределение по скоростям  $f^0$ :

$$f^0 = \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} e^{-\frac{m}{2T}(\mathbf{v}-\mathbf{v})^2}. \quad (1.7)$$

Здесь индекс  $a$  опущен;  $n$  — плотность, т. е. число частиц данного сорта в единице объема;  $T$  — температура газа;  $\mathbf{V}$  — его скорость как целого. Температуру мы везде будем выражать в энергетических единицах, поэтому постоянная Больцмана в формулах фигурировать не будет. Левая часть кинетического уравнения при подстановке в нее максвелловского распределения обращается в нуль. Таким образом, каков бы ни был конкретный вид столкновительного члена, при подстановке в него максвелловского распределения он должен обращаться в нуль. Более того, можно доказать, что если газ предоставлен самому себе, так что его функция распределения изменяется только вследствие столкновений, то при любых начальных условиях функция распределения со временем стремится к максвелловской — это знаменитая H-теорема Больцмана, доказательство которой можно найти в работах [1, 2, 3]. Процесс приближения функции распределения к максвелловской при столкновениях называют релаксацией. Релаксация происходит за время порядка среднего интервала между столкновениями.

Описание плазмы с помощью функций распределения является весьма подробным и далеко не всегда необходимо. Часто для описания плазмы бывает достаточно задать некоторые средние величины, например, число частиц данного сорта в единице объема

$$n_a(t, \mathbf{r}) = \int f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (1.8)$$

их среднюю скорость

$$\mathbf{V}_a(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{n_a} \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle_a \quad (1.9)$$

и среднюю энергию или температуру. При тепловом равновесии, когда функция распределения максвелловская, средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу  $m\langle v^2 \rangle/2$ , просто связана с температурой, и в той системе координат, где  $V = 0$ , имеет место соотношение  $m\langle v^2 \rangle/2 = \frac{3}{2} T$ . Если газ не находится в состоянии теплового равновесия, то мы будем по-прежнему называть его температурой величину  $m\langle v^2 \rangle/3$  в системе

координат, где  $V = 0$ . Определенная таким образом температура является функцией  $t, r$ , как и остальные локальные макрохарактеристики газа

$$T_a(t, r) = \frac{1}{n_a} \int \frac{m_a}{3} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_a)^2 f_a(t, r, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\ = \frac{m_a}{3} \langle (\mathbf{v} - \mathbf{V}_a)^2 \rangle. \quad (1.10)$$

Макроскопические параметры  $n_a, \mathbf{V}_a, T_a$  в неравновесном состоянии вообще различны для частиц разных сортов. Иногда, кроме этих параметров, имеющих простой физической смысл, бывает удобно пользоваться и другими, более сложными.

Уравнения для макроскопических параметров, называемые уравнениями переноса, можно получить из кинетического уравнения. Умножим уравнение (1.1) на  $1, m_a \mathbf{V}, m_a v^2/2$  и проинтегрируем по скоростям. В результате, учитывая тождество (1.4), получим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0; \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnV_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}(mn \langle v_\alpha v_\beta \rangle) - en \left( E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]_\alpha \right) = \\ = \int m v_\alpha C d\mathbf{v}; \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{mn}{2} \langle v^2 \rangle \right) + \operatorname{div} \left( \frac{mn}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle \right) - en \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = \\ = \int \frac{m v^2}{2} C d\mathbf{v}. \quad (1.13)$$

Здесь и далее индекс  $a$  в целях упрощения опускается. Угловые скобки означают усреднение по функции распределения скоростей.

При интегрировании первых двух членов в уравнении (1.1) меняется порядок интегрирования по скоростям с дифференцированием по времени и координатам; в третьем члене производится интегрирование по частям и учитывается, что функция распределения быстро стремится к нулю при  $v \rightarrow \infty$ . Уравнение (1.11), выражающее закон сохранения частиц, называют уравнением переноса частиц или уравнением непрерывности. Если частицы могут образовываться или уничтожаться, то условие (1.4) неверно, и в правой части уравнения (1.11) вместо нуля должна стоять соответствующая интенсивность источников частиц.

Уравнения (1.12) и (1.13) удобно преобразовать следующим образом. Разделим скорость на две составляющие — среднюю  $\mathbf{V}$

и хаотическую  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ . Очевидно, что  $\langle \mathbf{v}' \rangle = 0$ . Вторым член уравнения (1.12) преобразуем так:

$$\begin{aligned} \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle &= \langle (V_\alpha + v'_\alpha)(V_\beta + v'_\beta) \rangle = \\ &= V_\alpha V_\beta + \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle, \text{ так как } \langle v'_\alpha \rangle = \langle v'_\beta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Выражая  $\partial n / \partial t$  с помощью уравнения непрерывности, можно привести уравнение (1.12) к виду:

$$mn \frac{dV_\alpha}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + en \left( E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]_\alpha \right) + R_\alpha, \quad (1.14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \quad (1.15)$$

— это так называемая субстанциальная производная;

$$p = nm \langle v'^2 \rangle / 3 = nT; \quad (1.16)$$

$$\pi_{\alpha\beta} = nm \langle v'_\alpha v'_\beta - (v'^2/3) \delta_{\alpha\beta} \rangle; \quad (1.17)$$

$$\mathbf{R} = \int m \mathbf{v}' C d\mathbf{v}. \quad (1.18)$$

Здесь  $p$  — скалярное давление частиц данного сорта. Полный тензор давления частиц данного сорта равен

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} &= \int m v'_\alpha v'_\beta f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\ &= nm \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle = p \delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если функция распределения по скоростям (хаотическим) изотропна, то  $\langle v'^2_x \rangle = \langle v'^2_y \rangle = \langle v'^2_z \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle$ ;  $\langle v'_x v'_y \rangle = \langle v'_x v'_z \rangle = \langle v'_y v'_z \rangle = 0$ , следовательно  $P_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta}$ . Тензор  $\pi_{\alpha\beta}$  представляет собой ту часть  $P_{\alpha\beta}$ , которая связана с отклонением распределения от сферической симметрии. Мы будем называть  $\pi_{\alpha\beta}$  тензором вязких напряжений для газа частиц данного сорта. Как и  $P_{\alpha\beta}$ , этот тензор симметричен  $\pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha}$ .

Величина  $\mathbf{R}$  дает среднее изменение импульса частиц рассматриваемого сорта вследствие столкновений со всеми остальными частицами.

Уравнение (1.14) называют уравнением переноса импульса или просто уравнением движения. Оно представляет собой обобщение соответствующего уравнения газодинамики.

Производя аналогичные преобразования в уравнении (1.13),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{v^2}{2} v_\beta \right\rangle &= \frac{1}{2} V^2 V_\beta + V_\alpha \langle v'_\alpha v'_\beta \rangle + \frac{1}{2} \langle v'^2 \rangle V_\beta + \\ &+ \left\langle \frac{1}{2} v'^2 v'_\beta \right\rangle = \left( \frac{1}{2} V^2 + \frac{5}{2} \frac{P}{mn} \right) V_\beta + \frac{1}{mn} V_\alpha \pi_{\alpha\beta} + \left\langle \frac{1}{2} v'^2 v'_\beta \right\rangle, \end{aligned}$$

можно привести это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{nm}{2} V^2 + \frac{3}{2} nT \right) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \left( \frac{nm}{2} V^2 + \frac{5}{2} nT \right) V_\beta + \right. \\ \left. + (\pi_{\alpha\beta} \cdot V_\alpha) + q_\beta \right\} = en \mathbf{E} \mathbf{V} + \mathbf{R} \mathbf{V} + Q. \quad (1.20)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{q} = \int \frac{m}{2} v'^2 \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = nm \left\langle \frac{v'^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle; \quad (1.21)$$

$$Q = \int \frac{mv'^2}{2} C d\mathbf{v}. \quad (1.22)$$

Вектор  $\mathbf{q}$  есть плотность потока тепла, переносимого частицами данного сорта. Он выражает собой перенос энергии хаотического движения в системе координат, где газ частиц этого сорта неподвижен в данной точке пространства.

Величина  $Q$  дает выделение тепла в газе частиц данного сорта вследствие столкновений с остальными частицами.

Уравнение (1.20) называют уравнением переноса энергии. Первый член в уравнении (1.20) представляет изменение полной энергии частиц данного сорта — кинетической  $nmV^2/2$  и внутренней  $\frac{3}{2} nT$  (на единицу объема). Член в фигурных скобках представляет полный поток энергии, который складывается из макроскопического переноса полной энергии со скоростью  $\mathbf{V}$ , из микропереноса энергии, т. е. потока тепла  $\mathbf{q}$ , и из работы сил давления, равной

$$\frac{\partial V_\alpha P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial (\rho V_\beta + \pi_{\alpha\beta} V_\alpha)}{\partial x_\beta}.$$

Члены правой части уравнения учитывают работу остальных сил и выделение тепла.

Иногда бывает удобно исключить из уравнения (1.20) изменение кинетической энергии с помощью уравнений непрерывности и движения. Тогда получается уравнение переноса внутренней энергии или уравнение баланса тепла:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial nT}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{3}{2} nT \mathbf{V} \right) + nT \operatorname{div} \mathbf{V} + \\ + \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \operatorname{div} \mathbf{q} = Q. \quad (1.23)$$

Согласно уравнению непрерывности (1.11), здесь можно также написать

$$\frac{3}{2} \frac{\partial nT}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{3}{2} nT \mathbf{V} \right) = \frac{3}{2} n \frac{dT}{dt}.$$

Пользуясь уравнением непрерывности (1. 11) и вводя величину

$$s = \ln (T^{3/2}/n) = \ln (p^{3/2}/n^{5/2}),$$

уравнение (1. 23) можно переписать в виде

$$Tn \frac{ds}{dt} = T \left\{ \frac{\partial ns}{\partial t} + \operatorname{div}(ns\mathbf{V}) \right\} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + Q. \quad (1. 23')$$

Величина  $s$  с точностью до несущественной постоянной есть энтропия, приходящаяся на одну частицу.

Пусть  $R_{ab}$  — изменение импульса,  $Q_{ab}$  — выделение тепла в газе частиц  $a$  вследствие столкновений с частицами  $b$ . Тогда  $R_a = \sum_b R_{ab}$ ,  $Q_a = \sum_b Q_{ab}$ . Пользуясь законами сохранения (1. 4)—(1. 6) частиц, импульса и энергии при столкновениях, легко получить

$$\begin{aligned} R_{ba} &= -R_{ab}; & Q_{ab} + Q_{ba} &= -R_{ab} V_a - R_{ba} V_b = \\ & & &= -R_{ab} (V_a - V_b). \end{aligned} \quad (1. 24)$$

Для того чтобы уравнениями (1. 11), (1. 14) и (1. 23) можно было фактически пользоваться для нахождения параметров  $n$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$ , необходимо сначала каким-то образом установить связь величин  $\pi_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $Q$  с параметрами  $n$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$ . Эту связь можно найти или феноменологически, или методами кинетики. Во втором случае надо путем приближенного решения кинетических уравнений выразить функцию распределения в данной точке через  $n$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$ , а затем подставить это выражение в (1. 17), (1. 18), (1. 21), (1. 22) и получить выражение для величин  $\pi_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $Q$  в этой точке. Такое приближенное локальное решение кинетического уравнения в принципе возможно в том практически важном случае, когда выполнены определенные условия макроскопичности плазмы. Эти условия заключаются в малости всех градиентов и в медленном изменении всех величин во времени. Возможность локального решения связана с наличием процесса релаксации, вследствие которого любая функция распределения благодаря столкновениям стремится принять максвелловскую форму. Максвелловское распределение представляет собой решение кинетического уравнения в случае, когда градиенты и производные по времени точно равны нулю. Если же они не равны нулю, но достаточно малы, то функция распределения отличается от максвелловской, но это отличие пропорционально малым градиентам и тоже невелико. Таким образом, если мы интересуемся изменениями, происходящими за промежутки времени, гораздо большие, чем интервал между столкновениями, и все величины в плазме мало изме-

няются на таких расстояниях, которые могут пройти частицы между двумя столкновениями, то можно рассматривать лишь решения кинетического уравнения, близкие к локально-максвелловскому распределению, т. е. можно искать решение в виде

$$f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_a^0 + f_a^1 = \frac{n_a(t, \mathbf{r})}{(2\pi T_a/m_a)^{3/2}} e^{-\frac{m_a}{2T_a(t, \mathbf{r})}[\mathbf{v} - \mathbf{v}_a(t, \mathbf{r})]^2} + f_a^1, \quad (1.25)$$

где  $|f_a^1| \ll f_a^0$ . Поправку  $f_a^1$  можно приближенно найти как малое возмущение основной части функции распределения  $f_a^0$ . Эта поправка пропорциональна тем факторам, которые нарушают максвелловское распределение, — градиентам, электрическим полям и т. д. Максвелловская функция и ее производные однозначно определяются параметрами  $n$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$  и их производными, поэтому через эти же величины выражается поправка  $f^1$  и, в конечном счете, величины  $\pi_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$ . Эти величины, таким образом, пропорциональны тем факторам, которые создают отклонение от равновесия. Соответствующие коэффициенты пропорциональности (например, коэффициенты трения между частицами разных сортов, коэффициенты теплопроводности и вязкости и т. д.) называют коэффициентами переноса. Их определение и составляет основную цель кинетической теории.

Указанную программу удастся провести до конца лишь для полностью ионизованной плазмы с одним сортом ионов.

Мы будем далее называть ее простой плазмой и уделим ей в последующем изложении основное внимание.

Коэффициенты переноса для простой плазмы приведены в § 2 и 4. Эти коэффициенты интерпретируются качественно на основе наглядных представлений и определяются по порядку величины в § 3, а количественное вычисление их из кинетического уравнения производится в § 4. Применение уравнений переноса к плазме с сильным магнитным полем часто приводит к различным парадоксам, которые в свое время вызывали различные неясности и недоумения. Некоторые из таких парадоксов рассматриваются в § 5. Приведение систем уравнений переноса для частиц различных сортов к уравнениям, описывающим модель плазмы в виде одного сложного газа, производится в § 6 для полностью ионизованной плазмы и в § 7 для частично ионизованной плазмы. Такая магнитогидродинамическая модель плазмы часто применяется практически, причем иногда она может быть обоснована с помощью кинетического уравнения и уравнений переноса, иногда же используется по соображениям простоты. Изложение далее построено так, чтобы отдельные параграфы были по возможности независимы. Так § 4 и 5 могут быть опущены без ущерба для понимания остального текста.



## § 2. Уравнения переноса простой плазмы (сводка результатов)

В этом параграфе приводится для справок система уравнений переноса для полностью ионизованной плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов с зарядом  $Ze$ . Коэффициенты переноса для полностью ионизованной плазмы вычислялись многими авторами. Метод получения уравнений переноса из кинетических уравнений подробно изложен в монографии Чепмена и Каулинга [1]. В той же работе получены выражения для потока тепла и тензора вязких напряжений для однокомпонентного ионизованного газа в магнитном поле, а также выражение для электропроводности плазмы в магнитном поле. Коэффициенты переноса для полностью ионизованной плазмы вычислялись также в работах [12—22] и в ряде других. Коэффициенты переноса получались разными методами и в разной форме, но во всех работах они найдены для случая, когда локальная функция распределения мало отличается от максвелловской. Здесь приводятся результаты, а в § 4 их вывод, в форме, соответствующей работе [17].

До настоящего времени ни один из коэффициентов переноса простой плазмы, кроме электропроводности, не был определен экспериментально.

Система уравнений переноса простой плазмы содержит уравнения непрерывности, движения и теплового баланса для электронов и для ионов

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \mathbf{V}_e) = 0; \quad (2. 1e)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{V}_i) = 0; \quad (2. 1i)$$

$$m_e n_e \frac{d_e V_{e\alpha}}{dt} = - \frac{\partial p_e}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{e\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - e n_e \left( E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e \mathbf{B}]_\alpha \right) + R_\alpha; \quad (2. 2e)$$

$$m_i n_i \frac{d_i V_{i\alpha}}{dt} = - \frac{\partial p_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{i\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + Z e n_i \left( E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{B}]_\alpha \right) - R_\alpha; \quad (2. 2i)$$

$$\frac{3}{2} n_e \frac{d_e T_e}{dt} + p_e \operatorname{div} \mathbf{V}_e = - \operatorname{div} \mathbf{q}_e - \pi_{e\alpha\beta} \frac{\partial V_{e\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_e; \quad (2. 3e)$$

$$\frac{3}{2} n_i \frac{d_i T_i}{dt} + p_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i = - \operatorname{div} \mathbf{q}_i - \pi_{i\alpha\beta} \frac{\partial V_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + Q_i, \quad (2. 3i)$$

где

$$p_e = n_e T_e; \quad p_i = n_i T_i; \\ \frac{d_e}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \nabla); \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla). \quad (2. 4)$$

В выражениях для коэффициентов переноса далее используется условие квазинейтральности плазмы и обозначается  $n = n_e = Z n_i$ . Используется также малость отношения  $m_e/m_i$ .

Электронные и ионные «времена между столкновениями» (в секундах) берутся в виде \*:

$$\tau_e = \frac{3 \sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} \lambda e^4 Z^3 n_i} = \frac{3,5 \cdot 10^4}{(\lambda/10)} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{Zn}; \quad (2. 5e)$$

$$\tau_i = \frac{3 \sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{4 \sqrt{\pi} \lambda e^4 Z^3 n_i} = \frac{3,0 \cdot 10^6}{(\lambda/10)} \left( \frac{m_i}{2m_p} \right)^{1/2} \frac{T_i^{3/2}}{Z^3 n}, \quad (2. 5i)$$

где  $m_p$  — масса протона,  $\lambda$  — кулоновский логарифм [6]

(при  $T_e < 50\text{эв}$   $\lambda = 23,4 - 1,15 \lg n + 3,45 \lg T_e$ ;

при  $T_e > 50\text{эв}$   $\lambda = 25,3 - 1,15 \lg n + 2,3 \lg T_e$ ).

Циклотронные частоты ( $\text{сек}^{-1}$ ) электронов и ионов равны:

$$\omega_e = \frac{eB}{m_e c} = 1,76 \cdot 10^7 B; \quad (2. 6e)$$

$$\omega_i = \frac{ZeB}{m_i c} = 0,96 \cdot 10^4 \frac{ZB}{m_i/m_p}. \quad (2. 6i)$$

Коэффициенты переноса в магнитном поле зависят от  $\omega\tau$ . В этом параграфе приводятся только предельные выражения для больших значений  $\omega_e\tau_e$  и  $\omega_i\tau_i$ . Из них легко получить также выражения для случая  $B = 0$ , учитывая, что приведенные здесь коэффициенты переноса вдоль магнитного поля равны коэффициентам переноса без поля. Выражения для произвольных  $\omega\tau$  приведены в § 4.

Значки  $\parallel$  и  $\perp$  у векторов означают, что берется компонента вектора, соответственно параллельная и перпендикулярная к магнитному полю, например  $\mathbf{u}_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{u}\mathbf{h})$ ,  $\mathbf{u}_{\perp} = [\mathbf{h}[\mathbf{u}\mathbf{h}]]$ , где  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$  — единичный вектор вдоль магнитного поля.

Передача импульса путем столкновений от ионов к электронам  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T$  складывается из двух частей: силы трения  $\mathbf{R}_u$ , обусловленной наличием относительной скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$ , и термосилы  $\mathbf{R}_T$ , возникающей благодаря градиенту температуры электронов. Из двух аналогичных частей складывается и электронный поток тепла:  $\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_u^e + \mathbf{q}_T^e$ . Относительная скорость электронов и ионов просто связана с плотностью тока, а именно  $\mathbf{j} = -en\mathbf{u}$ .

При больших  $\omega_e\tau_e$  формулы § 4 дают при  $Z = 1$  следующие выражения для передачи импульса путем столкновений и для потоков тепла электронов.

Сила трения:

$$\mathbf{R}_u = -\frac{m_e n_e}{\tau_e} (0,51 \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}) = en \left( \frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right), \quad (2. 6)$$

\* Во всех «практических» формулах здесь и далее температура выражается в электронвольтах, магнитное поле — в гауссах, а все остальные величины — в единицах CGS.

где коэффициенты электропроводности равны

$$\sigma_{\perp} = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} = \sigma_1 T_e^{3/2}; \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\parallel} = 1,96 \sigma_{\perp} = 1,96 \sigma_1 T_e^{3/2}, \quad (2.8)$$

где

$$\sigma_1 = \frac{0,9 \cdot 10^{13}}{(\lambda/10) Z} \text{ сек} \cdot \text{эв}^{-3/2}.$$

Термосила:

$$\mathbf{R}_T = -0,71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_e \tau_e} [\mathbf{h} \nabla T_e]. \quad (2.9)$$

Электронные потоки тепла:

$$\mathbf{q}_u^e = 0,71 n_e T_e \mathbf{u}_{\parallel} + \frac{3}{2} \frac{n_e T_e}{\omega_e \tau_e} [\mathbf{h} \mathbf{u}]; \quad (2.10)$$

$$\mathbf{q}_T^e = -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{c n_e T_e}{e B} [\mathbf{h} \nabla T_e], \quad (2.11)$$

где коэффициенты теплопроводности равны:

$$\kappa_{\parallel}^e = 3,16 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}; \quad (2.12)$$

$$\kappa_{\perp}^e = 4,66 \frac{n_e T_e}{m_e \omega_e^2 \tau_e}. \quad (2.13)$$

Если  $Z \neq 1$ , то коэффициенты в этих выражениях следует заменить согласно табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Z	Номера формул					
	(2. 8)	(2. 9) и (2. 10)		(2. 11)	(2. 12)	(2. 13)
1	0,51	0,71	3/2	5/2	3,16	4,66
2	0,44	0,9	3/2	5/2	4,9	4,0
3	0,40	1,0	3/2	5/2	6,1	3,7
4	0,38	1,1	3/2	5/2	6,9	3,6
$\infty$	0,29	1,5	3/2	5/2	12,5	3,2

Поток тепла ионов при  $\omega_i \tau_i \gg 1$  равен:

$$\mathbf{q}_i = -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{c n_i T_i}{Z e B} [\mathbf{h} \nabla T_i]; \quad (2.14)$$

$$\kappa_{\parallel}^i = 3,9 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i}; \quad (2.15)$$

$$\kappa_{\perp}^i = 2 \frac{n_i T_i}{m_i \omega_i^2 \tau_i}. \quad (2.16)$$

Тепло, получаемое ионами при столкновениях с электронами:

$$Q_i = Q_\Delta = \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e}{\tau_e} (T_e - T_i). \quad (2.17)$$

Тепло, выделяющееся в электронах вследствие столкновений с ионами,

$$Q_e = -\mathbf{R}\mathbf{u} - Q_\Delta = \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} + \frac{1}{en_e} \mathbf{j}\mathbf{R}\mathbf{T} - \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e}{\tau_e} (T_e - T_i). \quad (2.18)$$

Тензор вязких напряжений без магнитного поля:

$$\pi_{\alpha\beta} = -\eta_0 W_{\alpha\beta}, \quad (2.19)$$

где тензор скорости сдвигов

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial V_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}. \quad (2.20)$$

В сильном магнитном поле ( $\omega\tau \gg 1$ ) компоненты тензора  $\pi_{\alpha\beta}$  имеют следующий вид в системе координат с осью  $z$ , параллельной магнитному полю:

$$\left. \begin{aligned} \pi_{zz} &= -\eta_0 W_{zz}; \\ \pi_{xx} &= -\eta_0 \frac{1}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \eta_1 \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy}; \\ \pi_{yy} &= -\eta_0 \frac{1}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \eta_1 \frac{1}{2} (W_{yy} - W_{xx}) + \eta_3 W_{xy}; \\ \pi_{xy} &= \pi_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \eta_3 \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}); \\ \pi_{xz} &= \pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz}; \\ \pi_{yz} &= \pi_{zy} = -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Выражения (2.21) годятся и для ионов, и для электронов, но для каждого сорта частиц надо, конечно, подставить свой тензор  $W_{\alpha\beta}$  и свои коэффициенты вязкости.

Коэффициенты вязкости для ионов:

$$\eta_0^i = 0,96 n_i T_i \tau_i; \quad (2.22)$$

$$\eta_1^i = \frac{3}{10} \frac{n_i T_i}{\omega_i^2 \tau_i}; \quad \eta_2^i = 4\eta_1^i; \quad (2.23)$$

$$\eta_3^i = \frac{1}{2} \frac{n_i T_i}{\omega_i}; \quad \eta_4^i = 2\eta_3^i. \quad (2.24)$$

Коэффициенты вязкости для электронов при  $Z = 1$ :

$$\eta_0^e = 0,73 n_e T_e \tau_e; \quad (2.25)$$

$$\eta_1^e = 0,51 \frac{n_e T_e}{\omega_e^2 \tau_e}; \quad \eta_2^e = 4\eta_1^e; \quad (2.26)$$

$$\eta_3^e = -\frac{1}{2} \frac{n_e T_e}{\omega_e}; \quad \eta_4^e = 2\eta_3^e. \quad (2.27)$$

Выделение тепла вследствие вязкости:

$$Q_{\text{вяз}} = -\pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}$$

или, пренебрегая членами порядка  $(\omega\tau)^{-2}$ ,

$$Q_{\text{вяз}} = -\pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{3}{4} \eta_0 W_{zz}^2 = \frac{\eta_0}{3} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2. \quad (2.28)$$

Выражение для  $\pi_{\alpha\beta}$  в произвольной системе координат приведено в § 4.

### § 3. Кинетика простой плазмы (качественное рассмотрение)

**Движение и столкновение частиц.** Приведенные в § 2 выражения для коэффициентов переноса можно пояснить с помощью наглядных представлений, основанных на картине движения отдельных частиц и свойствах кулоновских столкновений.

Без магнитного поля свободное движение частиц происходит по прямым линиям с постоянной скоростью. Столкновения искривляют траектории частиц и изменяют величину их скорости. Результирующее движение можно грубо представить как движение по ломаной линии, состоящей из хаотически направленных отрезков длиной порядка  $l = v\tau$ , где  $v \sim (2T/m)^{1/2}$  — характерная величина тепловой скорости,  $\tau$  — характерный интервал времени между столкновениями, изменяющими направление движения.

В магнитном поле заряженная частица движется без столкновений по винтовой линии с радиусом порядка  $r = mv c/eB$ , навивающейся на магнитную силовую линию. Столкновения нарушают это правильное движение, и можно предположить, что через время  $\sim \tau$  частица каждый раз начинает описывать новую винтовую линию, не являющуюся продолжением предыдущей. При этом следует различать два предельных случая. В слабом магнитном поле  $r \gg l$ , или, что то же самое,  $\omega\tau \ll 1$  ( $\omega = eB/mc$  — циклотронная частота). В сильном поле  $r \ll l$ ,  $\omega\tau \gg 1$ . В слабом поле части винтовых линий, проходимые частицей между столкновениями, мало отличаются от отрезков прямых линий. В сильном поле частица между столкновениями успевает описать много витков. При  $\omega\tau \gg 1$  магнитное поле сильно влияет на переносы в поперечном направлении, тогда как вдоль поля частицы двигаются свободно, проходя между столкновениями расстояние  $\sim l$ , как и при  $B = 0$ , поэтому на продольные потоки магнитное поле не влияет. Таким образом, для продольных потоков и для потоков в произвольном направлении при  $B = 0$  получаются одинаковые коэффициенты переноса.

Следует иметь в виду, что кулоновские столкновения не являются истинными, т. е. мгновенными столкновениями, так как из-за дальнего действия кулоновских сил стохастическое взаимодействие между заряженными частицами происходит непрерывно и вызывает непрерывную же хаотизацию скоростей частиц. Но это сказывается лишь на конкретном виде столкновительного члена, а для качественной характеристики явления несущественно. Надо только в качестве характерных интервалов между столкновениями брать такие времена, за которые накапливаются изменения в направлении скорости на угол порядка единицы.

Для количественного рассмотрения кулоновских столкновений надо пользоваться соответствующим выражением для столкновительного члена (см. § 4). Грубо можно представлять, что кулоновские столкновения обладают эффективным сечением рассеяния, примерно на порядок превосходящим величину  $\pi (e_1 e_2 / \epsilon)^2$ , где  $e_1, e_2$  — заряды сталкивающихся частиц,  $\epsilon$  — энергия их относительного движения,  $e_1 e_2 / \epsilon$  — расстояние минимального сближения частиц. Таким образом, свободный пробег при кулоновских столкновениях пропорционален квадрату энергии частиц или квадрату температуры.

Далее, как и в § 2, мы будем пользоваться двумя характерными временами:  $\tau_e$  — временем рассеяния электронов на ионах и  $\tau_i$  — временем рассеяния ионов на ионах. Первое из них зависит только от температуры электронов, так как электроны имеют гораздо большие скорости, и при столкновениях электронов с ионами относительная скорость определяется именно электроном. Второе время зависит от температуры ионов. Все остальные времена удобно выражать через  $\tau_e$  и  $\tau_i$ .

Характерной чертой полностью ионизованной плазмы является очень малая величина отношения масс составляющих ее компонент — электронов и ионов. Вследствие этого (как внутри электронного газа, так и внутри ионного) частицы обмениваются энергией между собой за времена, гораздо более короткие, чем время обмена энергией между электронами и ионами. Пусть время обмена энергией между электронами  $\sim \tau_{ee}$ , время обмена энергией между ионами  $\sim \tau_{ii}$ , а время обмена энергией между электронами и ионами  $\sim \tau_{ei}^e$ . Тогда, если температуры электронов и ионов одного порядка,

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^e = 1 : (m_i/m_e)^{1/2} : (m_i/m_e).$$

Действительно, свободный пробег определяется энергией частиц, поэтому он для ионов и электронов имеет один и тот же порядок величины. Скорости же у ионов в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше, чем у электронов, поэтому  $\tau_{ii} \sim (m_i/m_e)^{1/2} \tau_{ee}$ . При столкновениях электронов с ионами относительная скорость имеет тот же порядок величины, что и при столкновениях между электронами, поэтому электроны с электронами сталкиваются примерно так же часто, как и с ионами. Существенный обмен энергией между одинаковыми

частицами происходит за одно столкновение, поэтому  $\tau_{ee} \sim \tau_e$ ,  $\tau_{ii} \sim \tau_i$ . При столкновениях легкой частицы с тяжелой передается лишь малая доля энергии — порядка отношения их масс, поэтому

$$\tau_{ei}^e \sim (m_i/m_e) \tau_e \sim (m_i/m_e) \tau_{ee}.$$

Если, как это часто бывает, температура ионов меньше температуры электронов, то пробег ионов меньше и  $\tau_{ii}$  уменьшается. Оба других времени при этом не меняются, так что по-прежнему  $\tau_{ee} \ll \tau_{ei}^e$  и  $\tau_{ii} \ll \tau_{ei}^e$ . Если температура ионов больше температуры электронов, то  $\tau_{ii}$  возрастает, однако условие  $\tau_{ii} \ll \tau_{ei}^e$  все же выполняется при  $T_i/T_e \ll (m_i/m_e)^{1/3}$ .

Таким образом, локальное тепловое равновесие (максвелловское распределение) внутри каждой из компонент простой плазмы устанавливается быстрее, чем между компонентами. Именно это обстоятельство и позволяет получить уравнения переноса с различными температурами электронов и ионов. Передача импульса ионов электронам происходит за то же время  $\sim \tau_{ei}^e$ , что и передача энергии, поэтому она тоже мала по сравнению с обменом импульсом между ионами. Таким образом, на вид ионной функции распределения столкновения с электронами вообще влияют слабо. Передача импульса от электронов к ионам и обмен импульсом между электронами происходят за времена одного порядка  $\tau_e \sim \tau_{ee}$ , поэтому на вид электронной функции распределения столкновения с ионами влияют существенно.

**Сила трения  $R_u$ .** При столкновениях электронов с ионами, которые в среднем неподвижны ( $V_i = 0$ ), скорости электронов, почти не меняясь по величине, хаотически изменяют свое направление. Таким образом, за время  $\sim \tau_e$  электроны теряют свою упорядоченную скорость  $\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$  относительно ионов, следовательно, они теряют (а ионы приобретают) импульс  $m_e \mathbf{u}$  на каждый электрон. Это значит, что на электроны действует сила трения порядка  $-(m_e n_e / \tau_e) \mathbf{u}$ ; равная ей, но противоположно направленная сила, действует на ионы. Заметим, что величина  $\tau_e$ , определяемая формулой (2. 5e), выбрана именно так, чтобы выражение для силы трения  $\mathbf{R}^0$ , возникающей от взаимодействия электронов с максвелловским распределением, сдвинутым как целое относительно ионов на величину  $\mathbf{u}$ , имело простой вид:  $\mathbf{R}^0 = -(m_e n_e / \tau_e) \mathbf{u}$  без числовых коэффициентов.

В действительности, если под действием какой-нибудь силы, например электрического поля, у электронов возникает скорость  $\mathbf{u}$ , направленная вдоль  $\mathbf{B}$  (или при  $B = 0$ ), то функция распределения электронов не является просто сдвинутым как целое на  $\mathbf{u}$  максвелловским распределением. Это объясняется тем, что частота кулоновских столкновений уменьшается с ростом энергии электронов ( $\tau \sim v^3$ ), поэтому более быстрые электроны под действием той же силы сильнее сдвигаются относительно ионов, чем медленные.

В результате функция распределения искажается так, что в создании средней скорости  $\mathbf{u}$ , т. е. в переносе электрического тока, относительно большую роль играют быстрые электроны, поэтому и общий коэффициент трения получается меньше, чем для сдвинутого максвелловского распределения. Если бы столкновения электронов между собой, стремящиеся установить максвелловское распределение, происходили гораздо чаще, чем столкновения электронов с ионами, то этот эффект отсутствовал бы. В действительности же  $\tau_{ee} \sim \tau_e$ , поэтому получается «эффект порядка единицы», т. е. искажение максвелловского распределения того же порядка величины, что и его сдвиг. Например, при  $Z = 1$  уменьшение коэффициента трения дается множителем 0,51. При больших  $Z$ , когда относительная роль электрон-ионных столкновений возрастает по сравнению с электрон-электронными столкновениями, коэффициент трения уменьшается еще сильнее (см. табл. 1).

При движении электронов относительно ионов поперек сильного магнитного поля ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp$ ) поправка к сдвинутому максвелловскому распределению имеет порядок  $(\omega_e \tau_e)^{-1}$ , и при  $\omega_e \tau_e \gg 1$  ею можно пренебречь, поэтому поперечная сила трения равна просто  $\mathbf{R}_\perp = -(m_e n_e / \tau_e) \mathbf{u}_\perp$ . Таким образом, в сильном магнитном поле коэффициент трения между электронами и ионами для продольного тока меньше, чем для поперечного, т. е. продольная электропроводность  $\sigma_\parallel$  больше поперечной  $\sigma_\perp$ . При  $Z = 1$  получается  $\sigma_\parallel \approx 2\sigma_\perp^*$ .

**Термосила  $R_T$ .** Пусть электроны и ионы в среднем покоятся ( $V_e = V_i = 0$ ), так что через любое сечение, скажем  $x = x_0$ , слева направо и справа налево в единицу времени проходит в точности одинаковое количество электронов. Каждый из этих взаимно компенсирующих потоков по порядку величины равен  $n_e v_e$ . В результате столкновений электронов с ионами эти потоки испытывают силы трения  $\mathbf{R}_+$  и  $\mathbf{R}_-$  порядка  $m_e n_e v_e / \tau_e$ , причем в случае полной однородности эти силы трения точно компенсируются, и результирующей силы не возникает. Столкновения электронов с ионами могут, однако, создавать результирующую силу, если распределение скоростей электронов, приходящих справа, иное, чем приходящих слева, так что силы  $\mathbf{R}_+$  и  $\mathbf{R}_-$  не уравновешиваются. Если, например, справа приходят электроны с большей в среднем энергией, чем слева, то сила, действующая на быстрые «правые» электроны, будет меньше, чем на более медленные «левые» электроны (так как  $\tau \sim v^3$ ), и в результате возникает сила, направленная налево.

Пусть имеется градиент температуры вдоль оси  $x$  (рис. 1) и магнитное поле отсутствует (или направлено параллельно  $\nabla T$ ). Тогда в точке  $x = x_0$  будут испытывать столкновения электроны, пришедшие справа и слева в среднем с расстояний порядка свободного пробега  $l \sim v \tau$ , т. е. справа будет приходить электроны

\* Наличие убегающих электронов увеличивает  $\sigma_\parallel / \sigma_\perp$ .



из областей, где температура на величину  $\sim l \partial T_e / \partial x$  больше, чем в областях, откуда приходят электроны слева. В результате неуравновешенная часть сил  $R_+$  и  $R_-$  будет иметь порядок величины

$$R_T \sim \frac{l}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{m_e n_e v_e}{\tau_e} \sim \frac{m_e v_e^2}{T_e} n_e \frac{\partial T_e}{\partial x} \sim n_e \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

и будет направлена налево, т. е. против градиента температуры [знак минус в формуле (2. 9)]. Как и в случае с продольной силой трения  $R_u$  (и по той же причине), величина этого эффекта возрастает с ростом  $Z$  (см. табл. 1). Следует подчеркнуть, что термосила возникает именно вследствие столкновений и ее величина и знак определяются конкретной зависимостью частоты столкновений от скорости

(в данном случае  $\tau \sim v^3$ ), хотя выражение для термосилы —  $\text{const } n \partial T_e / \partial x$  не содержит величины  $\tau$  в явном виде.

Проведем теперь аналогичные рассуждения для случая, когда имеется сильное магнитное поле, направленное по оси  $z$ , а градиент температуры по-прежнему направлен по оси  $x$  (рис. 2).

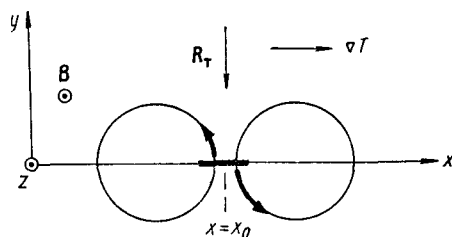


Рис. 2.

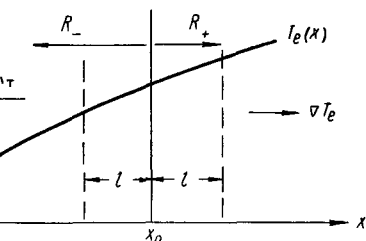


Рис. 1.

В сильном магнитном поле ( $\omega_e \tau_e \gg 1$ ) электроны вращаются по кружкам радиуса  $r_e \sim v_e / \omega_e$ , так что в точку  $x = x_0$  приходят электроны справа и слева с расстояний порядка  $r_e$ . Эти электроны «приносят с собой» разность температур порядка  $r_e \partial T_e / \partial x$  и вызывают, как видно из рис. 2, некомпенсацию сил

трения у потоков, направленных по оси  $y$ ; потоки же вдоль оси  $x$  образуются в точке  $x = x_0$  электронами, приходящими в среднем из областей с  $x = x_0$ , поэтому у них силы трения компенсируются. В результате столкновений с ионами возникает, таким образом, термосила, направленная перпендикулярно к  $B$  и  $\nabla T_e$ , т. е. по оси  $y$ , и равная по порядку величины

$$R_T \sim \frac{r_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} \frac{m_e n_e v_e}{\tau_e} \sim \frac{n_e}{\omega_e \tau_e} \frac{\partial T_e}{\partial x}.$$

Легко проверить, что и знак термосилы (минус) как раз такой, как в формуле (2. 9).

Заметим, что аналогичный эффект влияния магнитного поля на термосилу давно известен для металлов и называется эффектом Нернста [19].

**Электронный поток тепла  $q_y^e$ .** С наличием термосилы тесно связано присутствие в выражении для электронного потока тепла членов, пропорциональных относительной скорости  $u$ . Исходя из принципов термодинамики необратимых процессов (так называемый принцип симметрии кинетических коэффициентов или принцип Онзагера), можно показать, что, зная члены в выражении для силы трения, пропорциональные  $\nabla T_e$ , можно найти члены в выражении потока тепла, пропорциональные  $u$ . Это сделано в § 4. Качественный же смысл этих членов следующий. Как уже было показано, из-за того, что  $\tau \sim v^3$ , ток вдоль магнитного поля (или без магнитного поля) переносится в большей мере относительно более быстрыми электронами. Поэтому в системе координат, где  $V_e = 0$ , в направлении  $u$  летит больше быстрых электронов, а в направлении  $-u$  — больше медленных. И хотя в этой системе потоки электронов компенсируются, потоки энергии не компенсируются и возникает тепловой поток в направлении  $u$ . Из соображений, изложенных при рассмотрении силы трения, ясно, что это «эффект порядка единицы», поэтому соответствующий поток тепла имеет порядок величины  $\sim n_e T_e u$ . Он, как и продольная термосила, связан со столкновениями, хотя его выражение не содержит  $\tau$  явно.

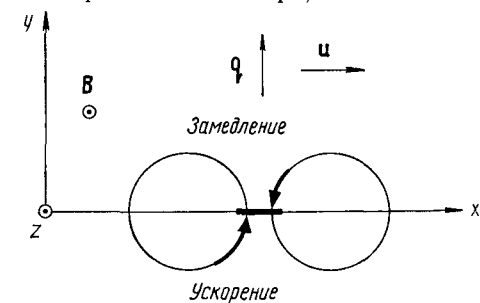


Рис. 3.

Если ток течет поперек сильного магнитного поля  $u = u_{\perp}$ , то тоже возникает поток тепла, но по другой причине. Сила, уравновешивающая трение электронов об ионы, в течение одного полупериода вращения электрона ускоряет его, а в течение другого полупериода — замедляет (рис. 3). Поэтому площадку, лежащую в плоскости векторов  $u$  и  $B$ , пересекают, с одной стороны, ускоренные электроны, а с другой — замедленные. Разность их энергий имеет порядок величины  $(m_e u / \tau_e) r_e$ . В результате, например при  $u = u_x$ ,  $B = B_z$ , возникает поток тепла

$$q_y \sim \frac{m_e u_x}{\tau_e} r_e n_e v_e \sim \frac{m_e u_x}{\tau_e} \frac{v_e^2}{\omega_e} n_e \sim \frac{n_e T_e}{\omega_e \tau_e} u_x.$$

**Газокинетические оценки.** Прежде чем рассматривать остальные эффекты, напомним известные из элементарной кинетической теории газов простые оценки, дающие порядок величины коэффициентов диффузии, теплопроводности и вязкости газов. Суще-

ствуует близкая аналогия между этими процессами, в которых происходит перенос соответственно вещества, энергии и импульса.

Рассмотрим сначала диффузию. Диффузия происходит в определенной среде, которую будем считать неподвижной и не подверженной влиянию самих диффундирующих частиц.

Пусть плотность этих частиц есть  $n(x)$  (рис. 4) и пусть каждая частица за время  $\tau$  между двумя столкновениями смещается с равной вероятностью вправо или влево на расстояние  $\Delta x$ . Через плоскость  $x = x_0$  в положительном направлении (слева) пройдет в единицу времени половина тех частиц, которые испытывают столкновения в слое от  $x_0 - \Delta x$  до  $x_0$ , другая половина пойдет после столкновения налево. Считая, что  $n(x)$  мало меняется на расстоянии  $\Delta x$ , так что

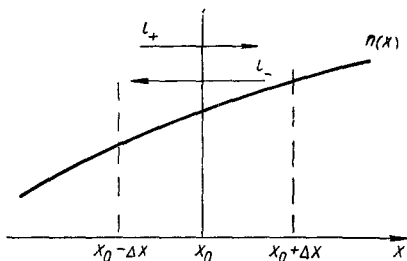


Рис. 4.

$$n(x) = n(x_0) + \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0),$$

получим, что этот односторонний поток слева равен

$$i_+ = \frac{1}{2} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} \frac{1}{\tau} n(x) dx = \frac{1}{2} \left[ n(x_0) - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \frac{\Delta x}{\tau}.$$

Диффузионный поток возникает из-за отсутствия баланса левого и правого потоков  $i = i_+ - i_-$ ; он равен

$$i = - \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \frac{\partial n}{\partial x} = -D \frac{\partial n}{\partial x}, \text{ где } D = \frac{(\Delta x)^2}{2\tau}. \quad (3.1)$$

Если  $\Delta x$  и  $\tau$  непостоянны, то для оценки коэффициента диффузии можно пользоваться формулой (3.1), подставляя в нее характерные значения  $\Delta x$  и  $\tau$  \*.

Потоки тепла и импульса оцениваются аналогично.

Пусть потока частиц нет. Односторонний поток тепла, например слева направо, имеет порядок  $q_+ \sim (\Delta x/\tau) nT$ . Из-за наличия градиента температуры относительная доля порядка  $\frac{\Delta x}{T} \frac{\partial T}{\partial x}$  обоих односторонних потоков не компенсируется, и возникает

\* Заметим, что если различные частицы имеют разные  $\Delta x$  и  $\tau$ , например  $\Delta x$  и  $\tau$  зависят от скорости, то формула (3.1) применима для частиц с одной определенной скоростью и для получения полного потока надо просуммировать (проинтегрировать) потоки частиц всех скоростей

$$i = - \frac{\partial}{\partial x} \int \left[ \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \right]_v f(v) dv = - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left\langle \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \right\rangle n \right\}, \quad (3.1')$$

поток тепла  $q$ , равный

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \kappa \sim \frac{n(\Delta x)^2}{\tau} \sim nD. \quad (3.2)$$

Если скорость  $V_y$  меняется по  $x$ , то точно так же возникает поток  $\pi_{yx}$   $y$ -го импульса вдоль оси  $x$  из-за аналогичного отсутствия баланса односторонних потоков импульса, каждый из которых имеет порядок  $(\Delta x/\tau) nmV_y$ :

$$\pi_{yx} = -\eta \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \eta \sim \frac{mn(\Delta x)^2}{\tau} \sim mnD. \quad (3.3)$$

Выражения (3.2) и (3.3) дают связь коэффициентов теплопроводности  $\kappa$  и вязкости  $\eta$  с коэффициентом диффузии.

Заметим, что если частицы между столкновениями двигаются свободно, то  $\Delta x \sim l \sim v\tau$  и формула (3.1) дает обычное выражение  $D \sim lv$ , которое приводится в учебниках при изложении элементарной кинетической теории газов. Однако формула (3.1) является более общей, чем  $D \sim lv$ , так как оценка  $D \sim (\Delta x)^2/\tau$  годится и в тех случаях, когда смещение частиц между столкновениями не равно их свободному пробегу. То же самое относится и к формулам (3.2) и (3.3), которые поэтому можно использовать для оценки коэффициентов переноса при наличии магнитного поля.

**Теплопроводность.** Коэффициенты теплопроводности, входящие в выражения для потоков тепла электронов и ионов в направлениях, параллельном и перпендикулярном к магнитному полю, легко оценить по порядку величины, пользуясь газокинетической формулой (3.2). Надо только учитывать, что поперек сильного магнитного поля ( $\omega\tau \gg 1$ ) частица смещается между столкновениями на расстояние порядка своего ларморова радиуса, а не свободного пробега  $(\Delta x)_\perp \sim r \sim v/\omega$ , так что  $\kappa_\perp \sim nr^2/\tau \sim nT/m\omega^2\tau$ , тогда как вдоль поля частицы двигаются свободно  $(\Delta x)_\parallel \sim l \sim v\tau$ , поэтому  $\kappa_\parallel \sim nl^2/\tau \sim nT\tau/m$ . Таким образом,  $\kappa_\parallel/\kappa_\perp \sim (\omega\tau)^2$ . Эти оценки справедливы и для ионов и для электронов, поэтому здесь опущены индексы  $i, e$ , надо лишь подставлять в них скорости, температуры и т. д., соответствующие частицам каждого сорта.

где угловые скобки означают усреднение по частицам в точке  $x_0$ . Если, например,  $\Delta x = v_x\tau$ ,  $\tau = \text{const}$ , то

$$(\Delta x)^2 = v_x^2 \tau^2; \quad \langle v_x^2 \rangle = \frac{T}{m};$$

$$i = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\tau}{2} \langle v_x^2 \rangle n \right\} = -\frac{\tau}{2m} \frac{\partial nT}{\partial x} = -\frac{\tau}{2m} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1')$$

Если же  $\tau$  зависит от  $v$ , то в потоке, кроме члена, пропорционального  $\nabla p$ , появляется еще член, пропорциональный  $\nabla T$ . Это явление называется термодиффузией. При движении в среде частицы испытывают силу трения порядка  $-m\dot{v}/\tau$ . Из выражения (3.1) видно, что диффузию частиц можно рассматривать как движение с трением под действием силы  $-\nabla p$ . Термодиффузию можно рассматривать как движение с трением под действием соответствующей термосилы.

Отметим, что при  $T_e \sim T_i$  вдоль поля теплопроводность электронов больше, чем ионов:  $\kappa_{\parallel}^e / \kappa_{\parallel}^i \sim (m_i / m_e)^{1/2}$ , а поперек поля, наоборот, больше ионная теплопроводность:  $\kappa_{\perp}^e / \kappa_{\perp}^i \sim (m_e / m_i)^{1/2}$ .

Выражения (2. 11) и (2. 14) содержат также «косые» потоки тепла, перпендикулярные и к  $\mathbf{V}$ , и к  $\nabla T$ . Эти потоки возникают из-за того, что через площадку, лежащую в плоскости  $\mathbf{V}$ ,  $\nabla T$  (рис. 5), проходят с одной стороны более быстрые в среднем частицы, чем с другой, так что если односторонние потоки частиц  $\sim n v$  компенсируются, то у односторонних потоков энергии, имеющих порядок  $n T v$ , остается нескомпенсированной доля порядка  $(r/T) \partial T / \partial x$ . В результате возникает поток тепла

$$q_y \sim n v r \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{c n T}{e B} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

У ионов и электронов эти потоки имеют противоположные знаки. Эти косые потоки переносят тепло вдоль изотерм и поэтому не приводят непосредственно к охлаждению плазмы и к увеличению энтропии.

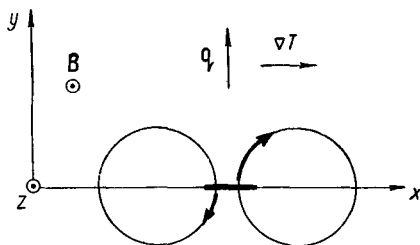


Рис. 5.

**Вязкость.** Более сложный характер имеет вязкость плазмы в магнитном поле, так как она определяется тензорными величинами. Выражения для тензора вязких напряжений (давлений) при  $\omega \tau \gg 1$  приведены в § 2, а для произвольных  $\omega \tau$  — в § 4. Из этих выражений видно, прежде всего, что и без магнитного поля и с полем вязкие напряжения зависят не просто от производных скорости  $\partial V_{\alpha} / \partial x_{\beta}$ , а от некоторой их комбинации  $W_{\alpha\beta}$ , называемой тензором скорости сдвигов

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial V_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Этот тензор, как легко убедиться, обращается в нуль, если плазма вращается как целое,  $\mathbf{V} = [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]$ , или испытывает равномерное всестороннее сжатие,  $\mathbf{V} = \operatorname{const} \mathbf{r}$ , т. е. когда элементы объема плазмы не деформируются. Тензор  $W_{\alpha\beta}$ , как и  $\pi_{\alpha\beta}$ , симметричен и имеет равный нулю след:  $W_{\alpha\alpha} = 0$ .

Если магнитное поле отсутствует, то связь  $\pi_{\alpha\beta}$  и  $W_{\alpha\beta}$  имеет очевидный простой вид:  $\pi_{\alpha\beta} = -\eta_0 W_{\alpha\beta}$ . Величину коэффициента вязкости можно оценить по обычной газокINETической формуле (3. 3), подставляя туда  $\Delta x \sim l \sim v \tau$ , что приводит к  $\eta_0 \sim n T \tau$ .

При наличии магнитного поля существенно по-разному происходит перенос импульса вдоль магнитного поля и поперек, причем существенно также направление самого переносимого импульса. Связь  $\pi_{\alpha\beta}$  с  $W_{\alpha\beta}$  при этом сильно усложняется и содержит уже пять независимых коэффициентов вязкости. Симметричный тензор со следом, равным нулю, имеет пять независимых

составляющих, поэтому самый общий вид линейной однородной зависимости содержит именно пять независимых коэффициентов пропорциональности.

Рассмотрим несколько простых частных случаев возникновения вязкости плазмы в сильном магнитном поле  $\omega\tau \gg 1$ . При этом всегда будем считать, что магнитное поле направлено по оси  $z$ .

Если скорость тоже направлена по оси  $z$  и имеет произвольную в этом же направлении, то возникает поток импульса того же порядка, что и без поля:  $\pi_{zz} \sim -\eta_0 \partial V_z / \partial z$  и вязкая сила, равная  $F_z = \frac{\partial}{\partial z} \eta_0 \frac{\partial V_z}{\partial z}$ , так как продольный импульс переносится вдоль магнитного поля свободно.

Пусть теперь скорость  $V_z$  изменяется в перпендикулярном к полю направлении, скажем по оси  $x$ . Перенос импульса будет происходить при этом поперек поля. Поэтому, оценивая коэффициент вязкости по формуле (3.3), надо подставить  $\Delta x \sim r$ , что дает поток импульса и силу вязкости, равные:

$$\pi_{zx} \sim -\eta_{\perp} \frac{\partial V_z}{\partial x}; \quad F_z \sim \frac{\partial}{\partial x} \eta_{\perp} \frac{\partial V_z}{\partial x},$$

где

$$\eta_{\perp} \sim \frac{\eta_0}{(\omega\tau)^2} \sim \eta_{\perp} \sim \eta_2.$$

Аналогичное уменьшение коэффициента вязкости в  $(\omega\tau)^2$  раз получается и в случае, когда вдоль оси  $x$  изменяется поперечная составляющая скорости  $V_y$ . Тогда

$$\pi_{xy} \sim -\eta_{\perp} \frac{\partial V_y}{\partial x}; \quad F_y \sim \frac{\partial}{\partial x} \eta_{\perp} \frac{\partial V_y}{\partial x}.$$

Перенос поперечного импульса ослабляется магнитным полем, даже если этот перенос происходит вдоль поля. Если, например,  $V_x$  изменяется по  $z$ , т. е.  $\partial V_x / \partial z \neq 0$ , то тензор скорости сдвигов  $W_{\alpha\beta}$  получается таким же, как и при  $\partial V_z / \partial x \neq 0$ , так что и  $\pi_{\alpha\beta}$  будет таким же:  $\pi_{xz} \sim -\eta_{\perp} \partial V_x / \partial z$ . Можно сказать, что вследствие вращения частица как бы «забывает» о своей поперечной упорядоченной скорости через время  $\sim \omega^{-1}$ , за которое она успевает сместиться лишь на расстояние порядка своего ларморова радиуса.

Тензор вязких напряжений, как видно из выражений (2.21), содержит также члены, уменьшенные лишь в  $\omega\tau$  раз (а не в  $(\omega\tau)^2$  раз) по сравнению со случаем  $B = 0$ . При  $\partial V_y / \partial x \neq 0$ , например, возникают еще потоки и сила вязкости, равные:

$$\pi_{xx} = -\pi_{yy} \sim \frac{nT}{\omega} \frac{\partial V_y}{\partial x} \sim \frac{\eta_0}{\omega\tau} \frac{\partial V_y}{\partial x}; \quad F_x \sim \frac{\partial}{\partial x} \frac{nT}{\omega} \frac{\partial V_y}{\partial x}.$$

При  $\partial V_x / \partial z \neq 0$  возникают поток и сила:

$$\pi_{yz} \sim \frac{nT}{\omega} \frac{\partial V_x}{\partial z} \sim \frac{\eta_0}{\omega\tau} \frac{\partial V_x}{\partial z}; \quad F_y \sim \frac{\partial}{\partial z} \frac{nT}{\omega} \frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

Эти силы направлены перпендикулярно скорости и не приводят к диссипации энергии. Такие не зависящие от  $\tau$  члены в потоке импульса аналогичны косым членам  $\sim (nT/m\omega) [h\nabla T]$  в потоке тепла, и мы не будем интерпретировать их здесь более подробно. Наглядное рассмотрение этих членов можно найти в работе [22].

Рассмотрим, наконец, еще сжатие плазмы поперек сильного магнитного поля, когда поправки к скалярному давлению возникают вследствие совершенно иного механизма. Пусть, например,  $V = V_x$  изменяется в направлении  $x$ , так что  $\text{div } \mathbf{V} = \partial V_x / \partial x = = -\dot{n}/n \neq 0$ . При этом магнитные силовые линии тоже сжимаются и магнитное поле растет:  $B \sim n$ . В растущем поле частицы увеличивают энергию своего поперечного движения и посредством столкновений выравнивают распределение энергии по всем трем степеням свободы. Это выравнивание не является полным, так как столкновения происходят не бесконечно часто. В результате поперечное давление оказывается больше продольного на долю порядка  $\tau \dot{B}/B = -\tau \dot{n}/n$  и возникают напряжения:

$$\pi_{xx} = \pi_{yy} \sim -p \frac{\tau \dot{n}}{n} \sim -\eta_0 \frac{\partial V_x}{\partial x}; \quad \pi_{zz} \sim \eta_0 \frac{\partial V_x}{\partial x}.$$

Таким образом, при движениях с  $\text{div } \mathbf{V} \neq 0$  коэффициент вязкости в сильном магнитном поле имеет тот же порядок величины, что и без поля. Процесс установления равновесия — это необратимый процесс, который, как известно, всегда связан с диссипацией энергии и выделением тепла. В данном случае выделение тепла равно

$$Q_{\text{вязк}} = -\pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} = -\pi_{xx} \frac{\partial V_x}{\partial x} \sim \eta_0 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 \sim \eta_0 \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2.$$

Нагрев плазмы, использующий этот процесс, иногда называют гирорелаксационным нагревом.

В отличие от теплопроводности, которая вдоль поля больше у электронов, а поперек — у ионов (при  $\omega_i \tau_i \gg 1$ ), вязкость ионов при  $T_e \sim T_i$  всегда гораздо больше, чем электронов

$$\eta_0^i \sim \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \eta_0^e; \quad \frac{\eta_0^i}{\omega_i \tau_i} \sim \frac{m_i}{m_e} \frac{\eta_0^e}{\omega_e \tau_e}; \quad \frac{\eta_0^i}{\omega_i^2 \tau_i^2} \sim \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2} \frac{\eta_0^e}{\omega_e^2 \tau_e^2}.$$

Таким образом, вязкость плазмы целиком определяется ионами.

Заметим еще, что наличие тепловых потоков тоже может приводить к переносу импульса и возникновению вязких напряжений, даже и при  $V = 0$ . Эти напряжения весьма малы, но в сильном магнитном поле они могут в принципе становиться одного порядка с теми из членов в выражениях (2. 21), у которых стоит коэффициент вязкости, уменьшенный в  $(\omega\tau)^2$  раз. По порядку величины можно оценить эти напряжения, добавив к тензору  $W_{\alpha\beta}$  аналогичный тензор, составленный из производных вектора

$q/nT$ . Количественное вычисление этих членов произведено в работах [16, 22a].

**Выделение тепла.** Предположим сначала, что масса ионов бесконечна и ионы в среднем покоятся:  $V_i = 0$ . Тогда столкновения электронов с ионами будет происходить без обмена энергией. Электроны при столкновениях с ионами хаотизируют свои скорости, поэтому энергия их упорядоченного движения со скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$  переходит в тепло. Ионы же своей энергией не меняют. Выделение тепла в электронном газе в этом случае равно работе полной силы трения электронов об ионы  $-\mathbf{R}\mathbf{u}$ . Учтем теперь, что отношение  $m_i/m_e$ , хотя и велико, но конечно, и пусть сначала  $u = 0$ . Если  $T_e = T_i$ , то между ионами и электронами существует тепловое равновесие, и передачи тепла нет. Если же, например,  $T_e > T_i$ , то электроны передают тепло ионам. Как известно, при столкновении легкой частицы с покоящейся тяжелой может быть передана доля энергии порядка отношения их масс  $m_1/m_2$ . Например, при изотропном рассеянии средняя передаваемая доля энергии равна  $2m_1/m_2$ . Таким образом, обмен энергией в единицу времени между электронами и ионами  $Q_\Delta$  можно оценить так:

$$Q_\Delta \sim \frac{n_e}{\tau_e} \frac{2m_e}{m_i} \frac{3}{2} (T_e - T_i).$$

Вычисление  $Q_\Delta$  с использованием столкновительного члена было впервые произведено Ландау [11]. Оно показывает, что при выборе  $\tau_e$  в виде, соответствующем формуле (2.5e), это соотношение справедливо даже не по порядку величины, а количественно.

Если одновременно  $u \neq 0$ ,  $T_e - T_i \neq 0$ , то, пренебрегая долей  $\sim m_e/m_i$  от  $-\mathbf{R}\mathbf{u}$ , которую получают ионы, и поправками  $\sim m_e u^2/T_e$ , можно просто сложить оба указанных эффекта, так что

$$Q_i = Q_\Delta; \quad Q_e = -\mathbf{R}\mathbf{u} - Q_\Delta = -\mathbf{R}_u\mathbf{u} - \mathbf{R}_T\mathbf{u} - Q_\Delta.$$

Член  $-\mathbf{R}_T\mathbf{u}$  — это джоулево тепло, которое можно переписать в более привычном виде

$$Q_J = \frac{j_\parallel^2}{\sigma_\parallel} + \frac{j_\perp^2}{\sigma_\perp}.$$

Член  $-\mathbf{R}_T\mathbf{u}$  изменяет знак при изменении направления тока или градиента температуры; он дает обратимое выделение тепла. Аналогичный эффект в металлах называется эффектом Томсона [4].

При высокой температуре в тепловом балансе плазмы могут играть роль тормозное и магнитное излучения электронов и выделение тепла при термоядерных реакциях. При этом к  $Q_e$ ,  $Q_i$  надо добавить соответствующие члены.

**Условия применимости.** Входящие в уравнения переноса «потоки»  $\mathbf{q}$ ,  $\pi_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $Q$  определяются в предположении, что процесс релак-



сации, стремящийся «максвеллизовать» функцию распределения, нарушается слабо, поэтому эти уравнения справедливы лишь при соблюдении некоторых условий, требующих, чтобы все средние величины в плазме медленно изменялись во времени и в пространстве. Функция распределения «максвеллизуется» за время порядка времени столкновений. Поэтому для применимости уравнений переноса все величины в плазме должны мало изменяться за время  $\tau$  между столкновениями и на тех расстояниях, на которые может сместиться частица за время между двумя столкновениями. Условие медленности изменения величин со временем можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \ll \frac{1}{\tau}. \quad (3.4)$$

Условие медленности пространственных изменений для случая, когда магнитное поле отсутствует или не очень сильное, т. е.  $\omega\tau \gtrsim 1$ , имеет простой вид:

$$L \gg l, \quad (3.5)$$

где  $L$  — характерное расстояние, на котором существенно изменяются все величины;  $\nabla \sim 1/L$ . Эти два условия таковы же, как и условия применимости уравнений обычной газодинамики.

В случае сильных магнитных полей, когда  $\omega\tau \gg 1$ , первое условие остается прежним, а второе усложняется. Движение частицы поперек магнитного поля ограничено ее ларморовым радиусом  $r$ , который меньше свободного пробега в  $\omega\tau$  раз. Поэтому в ряде случаев условия применимости смягчаются и принимают вид

$$L_{\perp} \gg r; \quad L_{\parallel} \gg l, \quad (3.6)$$

где  $L_{\perp}$ ,  $L_{\parallel}$  — характерные расстояния в направлениях поперек и вдоль магнитного поля:  $\nabla_{\perp} \sim 1/L_{\perp}$ ;  $\nabla_{\parallel} \sim 1/L_{\parallel}$ . Однако такие «мягкие» условия годятся лишь для систем, сильно вытянутых вдоль магнитных силовых линий и обладающих достаточной симметрией, например, для длинного аксиально-симметричного плазменного цилиндра радиуса  $\sim L_{\perp}$  с симметричным магнитным полем или тора, полученного изгибанием такого цилиндра по очень большому радиусу  $R$  и замыканием его на себя. В неоднородном магнитном поле частицы, как известно, кроме вращения по ларморовым окружностям, совершают еще дрейфовое движение со скоростью порядка  $V_c \sim vr |\nabla B/B|$ . Этот дрейф тоже приводит к смещению частиц за время между столкновениями, и если линии дрейфов различных частиц проходят через области, например, с разной температурой, то происходит дополнительный перенос тепла и возникает отклонение функции распределения от максвелловской. Условие  $L_{\perp} \gg r$  справедливо только при отсутствии такого «перемешивания». В симметричной системе с малой кривизной силовых линий, как, например, в торе с очень большим

радиусом кривизны  $R \gg L_{\perp}$ , «перемешивание» происходит со скоростями порядка  $v r/R$ , поэтому за время между столкновениями частица успевает сместиться на расстояние  $\sim v \tau r/R \sim l r/R$ , и, кроме условия  $L_{\perp} \gg r$ , должно соблюдаться также условие  $L_{\perp} \gg l r/R$ . Если нет такой специальной симметрии, то «перемешивание» происходит со скоростями порядка  $v r/L_{\perp}$  и условия применимости имеют вид

$$L_{\perp} \gg \sqrt{l r}; \quad L_{\parallel} \gg l. \quad (3.7)$$

При вычислении коэффициентов переноса мы пользовались столкновительным членом Ландау, в котором не учитывается влияние магнитного поля на сам акт соударения. Это справедливо, если ларморов радиус велик по сравнению с эффективным размером области, в которой происходит кулоновское столкновение частиц, т. е. по сравнению с дебаевским радиусом  $\delta_D = (T/4\pi e^2 n)^{1/2}$ :  $r \gg \delta_D$  или  $B^2 \ll 8\pi n_e m_e c^2$ .

Если это условие не выполнено, то коэффициенты переноса изменяются, но не очень сильно, практически меньше, чем на один порядок, так как роль столкновений с малыми параметрами удара (меньшими  $r$ ) всего лишь в  $\ln(\delta_D/r)$  раз меньше, чем столкновений с большими параметрами. Коэффициенты переноса в очень сильном магнитном поле ( $r \ll r_D$ ) рассмотрены в работе [19].

Приведем несколько числовых примеров.

Пусть  $B = 10^4$  гс,  $m_i = m_p$ . Тогда  $\omega_e = 1,8 \cdot 10^{11}$  сек $^{-1}$ ;  $\omega_i = 10^8$  сек $^{-1}$ .

При  $n = 10^{14}$  см $^{-3}$ ,  $T_e = T_i = 30$  эв, обозначив  $v = \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2}$ , получим:

$$r_e = \frac{v_e}{\omega_e} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ см}; \quad r_i = \frac{v_i}{\omega_i} = 7,7 \cdot 10^{-2} \text{ см}; \quad \delta_D = 4,1 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Кулоновский логарифм  $\lambda = 11$ ;  $l_e \approx l_i \approx 20$  см;  $\tau_e = 5 \cdot 10^{-8}$  сек;  $\tau_i = 3 \cdot 10^{-6}$  сек;  $\omega_e \tau_e = 10^4$ ;  $\omega_i \tau_i = 3 \cdot 10^2$ .

При  $n = 10^{17}$  см $^{-3}$ ,  $T_e = T_i = 10^2$  эв получим:  $r_e = 3 \cdot 10^{-3}$  см;  $r_i = 1,4 \cdot 10^{-1}$  см;  $\delta_D = 2,4 \cdot 10^{-5}$  см;  $\lambda = 10$ ;  $l_e \approx l_i \approx 0,25$  см;  $\tau_e = 3,5 \cdot 10^{-10}$  сек;  $\tau_i = 2,1 \cdot 10^{-8}$  сек;  $\omega_e \tau_e = 63$ ;  $\omega_i \tau_i = 2$ .

Существует еще одна причина, из-за которой применимость рассмотренных здесь уравнений переноса может быть очень сильно ограничена. Заключается она в неустойчивости плазмы. В условиях, когда плазма неустойчива, в ней могут возникать хаотические переменные поля, которые могут приводить к сильному перемешиванию и, следовательно, к резкому увеличению коэффициентов переноса. Это явление аналогично турбулентности в обычной гидродинамике. Известно, например, что даже поток в обычной водопроводной трубе из-за турбулентности невозможно рассчитать с помощью стационарных решений уравнений Навье-Стокса.

Теория турбулентности в плазме в настоящее время далека от завершения. Она будет рассматриваться в следующих выпусках настоящей серии. Приведем поэтому лишь простую оценку, показывающую, как сильно могут возрасти переносы в замагниченной плазме в турбулентном режиме.

Предположим, что в плазме возникли переменные электрические поля, имеющие амплитуды  $\sim E'$  и изменяющиеся независимо в точках на расстоянии, большем  $l'$ . Эти поля вызывают дрейф частиц со скоростью  $V_c' \sim cE'/B$ , которая хаотически изменяет свое направление после того, как частица продрейфует на расстояние порядка  $l'$ . Коэффициент возникающей при этом диффузии можно оценить с помощью формулы (3. 1), откуда  $D_{\text{турб}} \sim l' V_c' \sim cE'l'/B$ .

Предположим теперь, что амплитуда флуктуирующих полей такова, что соответствующая энергия имеет такой же порядок величины, как и тепловая энергия частиц, т. е.  $eE'l' \sim T$ . Это соотношение, конечно, нуждается в обосновании, но оно, во всяком случае, не выглядит заведомо бессмысленным. В результате получим

$$D_{\text{турб}} \sim \frac{cT}{eB}. \quad (3. 8)$$

Аналогичный результат получится и для других коэффициентов переноса согласно выражениям (3. 2) и (3. 3). Такая оценка была дана Бомом, который впервые указал на возможность сильного увеличения коэффициента диффузии в плазме в результате ее турбулизации и возникновения переменных полей. Он опубликовал [23] без формального вывода выражение  $D = cT_e/16eB$ , которое иногда называет «бомовским коэффициентом диффузии» (см. также [23а]). Сравнивая этот коэффициент с обычной оценкой для поперечного переноса  $r^2/\tau$ , получим:

$$\frac{D_{\text{турб}}}{r^2/\tau} \sim \omega\tau. \quad (3. 9)$$

Отсюда видно, что при  $\omega\tau \gg 1$  турбулентность в плазме может в принципе сильно увеличить все переносы поперек магнитного поля.

#### § 4. Кинетика простой плазмы (количественное рассмотрение)

Определение локальных функций распределения ионов и электронов можно произвести методом последовательных приближений аналогично тому, как это делается, например, в известной монографии Чепмена и Каулинга [1]. Этот метод заключается, грубо говоря, в следующем. Функция распределения считается мало отличающейся от максвелловской функции  $f^0$  с параметрами

$n, V, T$ , медленно зависящими от координат и времени, и представляется в виде ряда

$$f = f^0 + f^1 + f^2 + \dots \quad (4.1)$$

В кинетическом уравнении в качестве основных членов рассматриваются столкновительный и магнитный. Остальные члены, содержащие производные по координатам и времени, а также электрическое поле, считаются малыми. Магнитный член  $[\mathbf{v}\omega] \nabla f$  обращается в нуль любой сферически-симметричной функцией скоростей.

Если пренебречь малыми членами, то решением будет функция  $f^0$ , обращающая в нуль и столкновительный и магнитный члены\*.

В следующем приближении, подставив в кинетическое уравнение  $f = f^0 + f^1$ , достаточно в малых членах учесть только  $f^0$ , пренебрегая  $f^1$ , а в столкновительном члене  $C(f, f)$  достаточно учесть часть, линейную по  $f^1$ , т. е.  $C(f^0, f^1) + C(f^1, f^0)$ , пренебрегая величинами, квадратичными по  $f^1$ . В малых членах производные по координатам и по времени войдут только вследствие дифференцирования параметров  $n, V, T$ , причем производные по времени можно с помощью уравнений переноса (см. § 1) выразить с соответствующей точностью через производные по координатам в данный момент времени. В результате получается линейное интегро-дифференциальное уравнение в пространстве скоростей для функции  $f^1$ . Решив его, можно найти функцию  $f^1(\mathbf{v})$ , причем она будет линейно зависеть как от параметров, от факторов, нарушающих максвелловское распределение:  $\nabla T, \partial V_\alpha / \partial x_\beta$  и т. д.

Эту процедуру можно было бы продолжить с тем, чтобы учесть члены второго порядка по возмущениям и найти  $f^2$ , однако это требует весьма громоздких вычислений. Подставив  $f^1$  в выражения для потоков тепла, импульса и т. д., можно найти эти потоки и таким образом замкнуть систему уравнений переноса. Условием применимости этих уравнений является малость отброшенных членов по сравнению с учтенными при определении локальной функции распределения, т. е. достаточно быстрое уменьшение слагаемых ряда (4.1). При более строгом рассмотрении для определения условия применимости первого приближения следовало бы найти поправку второго приближения  $f^2$  и убедиться, что она мала, но мы ограничимся качественными соображениями, приведенными в § 3.

**Упрощение перекрестных столкновительных членов.** Для дальнейшего изложения удобно произвести в кинетическом уравнении (1.1) замену переменных и перейти от скорости  $\mathbf{v}$  к «хаотической скорости»  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - V_a(t, \mathbf{r})$ . Тогда для функции

\* Это утверждение не совсем точно, далее оно будет уточнено.

$f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_a)$  получается уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d_a f_a}{dt} + \mathbf{v}_a \nabla f_a + \left( \frac{e_a}{m_a} \mathbf{E}_a^* - \frac{d_a V_a}{dt} \right) \nabla_v f_a - \\ & - \frac{\partial V_{a\gamma}}{\partial x_\beta} v_{a\beta} \frac{\partial f_a}{\partial v_{a\gamma}} + \frac{e_a}{m_a c} [\mathbf{v}_a \mathbf{B}] \nabla_v f_a = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\nabla_v$  означает градиент в пространстве скоростей;

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}_a \nabla); \quad \mathbf{E}_a^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_a \mathbf{B}].$$

При получении уравнения (4.2) из уравнения (1.1) учтено также, что  $\nabla_v \mathbf{F} = 0$ .

Столкновительные члены берем в соответствии с работой Ландау [11] в виде

$$C_{ab}(f_a, f_b) = - \frac{2\pi\lambda e_a^2 e_b^2}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \int \left\{ \frac{f_a(\mathbf{v})}{m_b} \cdot \frac{\partial f_b(\mathbf{v}')}{\partial v'_\gamma} - \frac{f_b(\mathbf{v}')}{m_a} \frac{\partial f_a(\mathbf{v})}{\partial v_\gamma} \right\} U_{\beta\gamma} d\mathbf{v}'; \quad (4.3)$$

$$U_{\beta\gamma} = \frac{1}{u^3} (u^2 \delta_{\beta\gamma} - u_\beta u_\gamma); \quad u_\beta = v_\beta - v'_\beta.$$

Для столкновения частиц существенна их относительная скорость  $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ , поэтому выражение (4.3) имеет одинаковый вид в любой системе координат, но надо, конечно, заботиться о том, чтобы входящие в выражение (4.3) функции распределения были выражены в одной и той же системе координат.

«Кулоновский логарифм»  $\lambda$  в выражении (4.3) равен логарифму отношения характерного максимального и минимального параметров столкновения  $\lambda = \ln(\rho_{\text{макс}}/\rho_{\text{мин}})$ . В качестве нижнего параметра сюда надо подставить тот, при котором происходит отклонение на угол порядка  $\pi/2$ , так что  $\rho_{\text{мин}} \approx e^2/m < v^2 > \approx e^2/3T$ . Максимальный параметр удара определяется тем, что кулоновское поле частиц в плазме экранируется на расстояниях порядка дебаевской длины  $\rho_{\text{макс}} \approx \delta_D$ , где  $\delta_D = (T_e/4\pi e^2 n)^{1/2}$ . При больших скоростях, когда  $e^2/hv < 1$ , где  $h$  — постоянная Планка (т. е.  $v/c < 1/137$ ), для максимального параметра удара надо брать меньшее значение, а именно то, при котором угол рассеяния становится одного порядка с его квантовой неопределенностью, тогда  $\rho_{\text{макс}} \approx \delta_D e^2/hv$ . Влияние магнитного поля на акт столкновения в выражении (4.3) не учитывается, что справедливо при не слишком сильных полях, когда радиус кривизны траектории частиц велик по сравнению с дебаевской длиной.

Решение системы кинетических уравнений для ионов и электронов можно упростить, если учесть малость отношения масс этих частиц. При этом упрощаются выражения для перекрестных столкновительных членов  $C_{ei}$ ,  $C_{ie}$  и оказывается возможным решать уравнения системы (4.2) не совместно, а каждое в отдельности. Связано это с тем, что скорости электронов гораздо больше

скоростей ионов, так что относительная скорость электрона и иона почти совпадает с электронной скоростью. Поэтому перекрестный столкновительный член  $C_{ei}(f_e, f_i)$  с хорошей точностью не зависит от детального вида функции распределения ионов, а определяется заданием средних величин  $n_i, V_i, T_i$ .

Входящий в  $C_{ei}$  тензор  $U_{\alpha\beta} = (u^2\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) u^{-3}$  зависит от разности скоростей электронов  $\mathbf{v}$  и ионов  $\mathbf{v}'$ , так как  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ . Если разложить  $U_{\alpha\beta}$  по степеням скорости ионов

$$U_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} - \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma} v'_\gamma + \frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial v_\gamma \partial v_\delta} \frac{v'_\gamma v'_\delta}{2} + \dots,$$

где

$$V_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}|_{v'=0} = \frac{1}{v^3} (v^2\delta_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta),$$

и проинтегрировать по  $\mathbf{v}'$ , то получим приближенное выражение для  $C_{ei}$ . Такое вычисление удобно в системе координат, где средняя скорость ионов равна нулю. В результате получается:

$$C_{ei} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\tau_e} \left( \frac{2T_e}{m_e} \right)^{3/2} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left\{ V_{\alpha\beta} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} + \right. \\ \left. + \frac{m_e}{m_i} \left( \frac{2v_\alpha}{v^3} f_e + \frac{T_i}{m_e} \frac{3v_\alpha v_\beta - v^2\delta_{\alpha\beta}}{v^5} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} \right) \right\}. \quad (4.4)$$

Здесь

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} \lambda e^2 n_i}. \quad (4.5)$$

Скорость электронов в выражении (4.4) отсчитывается от средней ионной скорости  $V_i$  (а не от  $V_e$ ). Первый (главный) член в выражении (4.4) будем далее обозначать  $C'_{ei}$ ; он совершенно не зависит от функции распределения ионов:

$$C'_{ei} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\tau_e} \left( \frac{2T_e}{m_e} \right)^{3/2} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left( V_{\alpha\beta} \frac{\partial f_e}{\partial v_\beta} \right). \quad (4.4')$$

Во втором члене  $C''_{ei} \sim m_e/m_i$  при интегрировании по  $\mathbf{v}'$  мы пренебрегли отклонением тензора давления ионов от скалярного давления  $n_i T_i$  (пренебрегли  $\pi_{i\alpha\beta}$ ). Вычислим силу трения  $\mathbf{R}^0$ , действующую на электроны со стороны ионов в случае, когда электроны имеют максвелловское распределение, сдвинутое относительно ионного распределения на величину\*  $\mathbf{U} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$ . Считая сдвиг малым по сравнению с тепловыми скоростями электронов, можно, разложив по  $U$ , приближенно записать это электронное распределение в системе координат, где  $V_i = 0$ , в виде

$$f_e = f_e^0 \left( 1 + \frac{m_e}{T_e} \mathbf{U} \mathbf{v} \right), \quad \text{где } f_e^0 = \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \exp \left( -\frac{m_e v^2}{2T_e} \right).$$

\* Здесь в отличие от § 2, 3 разность средних скоростей обозначена заглавной буквой.

Подставив это выражение в формулу (4. 4), пользуясь выражением (1. 18) и пренебрегая членами  $\sim m_e/m_i$ , получим

$$\mathbf{R}^0 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\tau_e} \left(\frac{2T_e}{m_e}\right)^{3/2} \int m_e v \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left\{ V_{\alpha\beta} \frac{m_e}{T_e} U_\beta f_e^0 \right\} dv = \\ = - \frac{m_e n_e}{\tau_e} \mathbf{U}. \quad (4. 6)$$

Здесь использовано свойство тензора  $V_{\alpha\beta}$ :  $v_\alpha V_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} v_\beta = 0$ , благодаря которому  $C_{ei}'$  обращается в нуль любой сферически-симметричной функцией распределения электронов, а также  $\partial V_{\alpha\beta}/\partial v_\alpha = -2v_\beta/v^3$  и  $\overline{v_\alpha v_\beta} = (v^2/3) \delta_{\alpha\beta}$  (черта означает усреднение по всем направлениям).

Величина  $\tau_e$ , введенная в выражение (4. 4) и представляющая собой характерное время между столкновениями электронов с ионами, выбрана так, чтобы выражение (4. 6) для  $\mathbf{R}_0$  имело простой вид.

Ион-электронный интеграл столкновений  $C_{ie}(f_i, f_e)$  также может быть упрощен разложением входящего в него тензора  $U_{\alpha\beta}'$  по степеням отношения скорости ионов  $v$  к скорости электронов  $v'$ :

$$U_{\alpha\beta}' = V_{\alpha\beta}' - \frac{\partial V_{\alpha\beta}'}{\partial v_\gamma} v_\gamma + \dots; \quad V_{\alpha\beta}' = \frac{1}{v'^2} (v'^2 \delta_{\alpha\beta} - v'_\alpha v'_\beta),$$

однако здесь для того, чтобы фактически произвести интегрирование по скоростям электронов  $v'$ , надо знать их функцию распределения. Если считать, что функция распределения электронов мало отличается от максвелловской  $f_e^0$ , т. е. имеет вид  $f_e = f_e^0 + f_e^1$ , где  $f_e^1$  — малая поправка, причем величина разности средних скоростей  $\mathbf{U} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$  мала по сравнению с характерными электронными скоростями, то в результате простых вычислений получается приближенное выражение

$$C_{ie} = \frac{m_e n_e}{m_i n_i} \frac{1}{\tau_e} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left( v_\alpha f_i + \frac{T_e}{m_i} \frac{\partial f_e}{\partial v_\alpha} \right) + \frac{1}{m_i n_i} \mathbf{R}_i \nabla v f_i. \quad (4. 7)$$

Скорость ионов здесь отсчитывается от их средней скорости  $\mathbf{V}_i$ . Согласно выражению (1. 18) обозначено:  $\mathbf{R}_i = \int m_i v C_{ie} dv = -\mathbf{R}$  ( $\mathbf{R}$  без индекса означает  $\mathbf{R}_e$ ). Вычисление при выводе формулы (4. 7) удобно производить в системе координат, где электроны в среднем неподвижны ( $\mathbf{V}_e = 0$ ), а затем уже перейти к системе, где средняя скорость ионов равна нулю ( $\mathbf{V}_i = 0$ ), для чего  $v$  надо заменить на  $v - \mathbf{U}$  и воспользоваться выражением (4. 6) для  $\mathbf{R}^0$ . При вычислении «столкновений с малой поправкой»  $f_e^1$  достаточно в  $U_{\alpha\beta}'$  учесть лишь главный член  $V_{\alpha\beta}'$ .

Выражение (4. 7), как и следовало ожидать, имеет такой же вид, как и столкновительный член Фоккер — Планковского типа в случае броуновских частиц в движущейся среде с температурой  $T_e$ .

Обмен теплом между ионами и электронами при столкновениях можно подсчитать, пренебрегая малыми отклонениями функций распределения от максвелловских. Подставив выражение (4.7) в равенство (1.22), для максвелловской функции ионов получим  $Q_i = Q_\Delta$ , где

$$Q_\Delta = \frac{3m_e}{m_i} \frac{n_e}{\tau_e} (T_e - T_i). \quad (4.8)$$

Пользуясь формулой (4.5) и учитывая члены  $\sim m_e/m_i$ , получим аналогично  $Q_e = -Q_\Delta$ , если принять для электронов максвелловское распределение с  $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i$ . В общем случае  $Q_e$  проще всего можно подсчитать, пользуясь законами сохранения энергии и импульса (1.24) при столкновениях:  $Q_e + Q_i = -\mathbf{R}\mathbf{U}$ , откуда

$$Q_e = -\mathbf{R}\mathbf{U} - Q_\Delta. \quad (4.9)$$

Далее в этом параграфе мы будем везде пользоваться только переменными  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \mathbf{V}_a(t, \mathbf{r})$ , т. е. «хаотическими» скоростями, и для краткости опустим индекс  $a$ .

**Уравнения для поправок.** Перейдем к выводу уравнения для функции распределения электронов. Кинетическое уравнение (4.2) для электронов можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{ee}(f_e, f_e) + C'_{ei}(f_e, f'_i) - [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_e] \nabla_{\mathbf{v}} f_e = \\ = \frac{d_e f_e}{dt} + \mathbf{v} \nabla f_e + \left( \frac{e_e}{m_e} E_e^* - \frac{d_e \mathbf{V}_e}{dt} \right) \nabla_{\mathbf{v}} f_e - \frac{\partial V_{e\alpha}}{\partial x_\beta} v_\beta \frac{\partial f_e}{\partial v_\alpha} - \\ - C'_{ei}(f_e, f_i - f'_i) - C''_{ei}(f_e, f_i). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь вектор  $\boldsymbol{\omega}_e = (e_e/m_e c)\mathbf{B}$  по величине равен циклотронной частоте электронов и направлен антипараллельно магнитному полю, так как  $e_e = -e$ .

Члены, стоящие в правой части уравнения, малы при малых градиентах, медленных временных изменениях и малом сдвиге средних скоростей электронов и ионов.

В уравнении (4.10) добавлен и вычтен член  $C'_{ei}(f_e, f'_i)$ , где  $f'_i$  — ионная функция распределения, сдвинутая так, что средняя скорость ионов совпадает со средней скоростью электронов. Поэтому  $C'_{ei}(f_e, f'_i)$  представляет собой  $C'_{ei}$  согласно выражению (4.4), но со скоростью электронов, отсчитываемой [как и во всех членах уравнения (4.10)] от  $V_e$ . Появляющийся при этом в правой части уравнения член  $C'_{ei}(f_e, f_i - f'_i)$  мал по сравнению с  $C'_{ei}(f_e, f'_i)$ , если относительная макроскопическая скорость электронов и ионов  $\mathbf{U} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$  мала по сравнению с тепловыми скоростями электронов, что предполагается выполненным.

Нулевое приближение удовлетворяет уравнению без правой части. Его решением является максвелловское распределение со средней скоростью  $\mathbf{V}_e$  и с произвольными плотностью и температурой. Будем считать параметры этого распределения совпадаю-



щами с плотностью и температурой электронов в данной точке пространства.

Если бы в уравнении (4. 10) слева был оставлен целиком весь перекрестный интеграл столкновений  $C_{ei}$ , то решением уравнения без правой части (совместно с соответствующим уравнением для ионов) было бы максвелловское распределение с  $T_e = T_i$  и  $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i$ . Именно такой метод применен, например, в монографии Чепмена и Каулинга. При этом, однако, не используется малость отношения  $m_e/m_i$ . Произведенная в уравнении (4. 10) перегруппировка в  $C_{ei}$ , при которой в числе главных членов оставлен лишь  $C'_{ei}(f_e, f'_i)$ , нужна именно для того, чтобы исключить влияние малых членов на выбор нулевого приближения. Это позволяет получить отдельно для электронов и для ионов уравнения переноса с разными температурами и средними скоростями, а также «развязывает» кинетические уравнения электронов и ионов.

Представим функцию распределения электронов в виде  $f_e = f_e^0(1 + \Phi)$ , где  $\Phi$  — малая поправка. Подставив это выражение в уравнение (4. 10) и отбросив члены второго порядка малости, получим уравнение для поправки. Левая часть в результате такой линеаризации принимает вид:

где

$$I_{ee}(\Phi) + I_{ei}(\Phi) - f_e^0[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_e] \nabla_v \Phi,$$

$$I_{ee}(\Phi) = C_{ee}(f_e^0, f_e^0\Phi) + C_{ee}(f_e^0\Phi, f_e^0); \quad (4. 11)$$

$$I_{ei}(\Phi) = C'_{ei}(f_e^0\Phi, f'_i).$$

В правую часть уравнения (4. 10) достаточно подставить  $f^0$ , а также можно опустить члены  $\sim m_e/m_i$  и, разложив интеграл  $C'_{ei}(f_e^0, f'_i - f'_i)$  по степеням  $U(m_e/T_e)^{1/2}$ , оставить только первый член разложения. Появляющиеся в правой части производные по времени от  $n_e, \mathbf{V}_e, T_e$  можно заменить их нулевыми приближениями. Уравнение без правой части имеет решения\*  $\Phi = 1; v^2$ ; поэтому для разрешимости уравнения его правая часть должна быть ортогональна к этим решениям. Умножив уравнение для поправки на 1,  $\mathbf{v}, m_e v^2/2$  и проинтегрировав по скоростям, получим выражение для нулевых приближений производных по времени от  $n_e, \mathbf{V}_e, T_e$ , которые надо подставить в правую часть. Эти выражения совпадают с тем, что дают уравнения переноса в нулевом приближении, т. е. с опущенными вязкими напряжениями, потоком тепла и т. д. В результате для поправки первого приближения  $\Phi$  получается следующее уравнение:

$$I_{ee}(\Phi) + I_{ei}(\Phi) - f_e^0[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_e] \nabla_v \Phi = f_e^0 \left\{ \left( \frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \nabla \ln T_e + \right.$$

\* Это сразу следует из того, что левая часть уравнения (4. 10) обращается в нуль максвелловским распределением с произвольными  $n$  и  $T$ .

$$+ \left[ \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{(T_e/m_e)^{3/2}}{v^3} - 1 \right] \frac{m_e}{T_e \tau_e} \mathbf{U} \mathbf{v} + \frac{1}{n_e T_e} \mathbf{R}^1 \mathbf{v} + \left. + \frac{m_e}{2T_e} \left( v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) W_{e\alpha\beta} \right\}, \quad (4.12)$$

где

$$\mathbf{R}^1 = \int m_e \mathbf{v} I_{ei}(\Phi) dv. \quad (4.13)$$

Заметим, что в правой части уравнения (4.12) отсутствуют члены, пропорциональные  $\nabla n$  и  $\mathbf{g}_e = \frac{e_e}{m_e} \mathbf{E}_e^* - \frac{d_e \mathbf{V}_e}{dt}$ . Это получается потому, что член  $f_{e\nu}^0 \nabla \ln n_e$  объединяется с  $\mathbf{g}_e \nabla_{\nu} f_e^0 = -f_e^0 (m_e/T_e) (\mathbf{v} \mathbf{g}_e)$ , а их сумма, согласно уравнению движения  $-m_e n_e \mathbf{g}_e = \nabla n_e T_e + \mathbf{R}$ , дает члены, пропорциональные  $\nabla T_e$  и  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{R}^1 = -(m_e n_e / \tau_e) \mathbf{U} + \mathbf{R}^1$ .

В последнем члене в правой части уравнения (4.12) произведена симметризация и введен симметричный тензор  $W_{\alpha\beta}$  со следом, равным нулю

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (4.14)$$

называемый тензором скорости сдвигов.

Кинетическое уравнение для ионов преобразуется аналогичным образом, однако с той разницей, что перекрестный член столкновений  $C_{ie}$ , как показывают простые оценки, мал по сравнению с собственным  $C_{ii}$ , так что он весь относится к малым членам и переносится в правую часть. Нулевое приближение, удовлетворяющее уравнению без правой части, есть максвелловское распределение  $f_i^0$ . Функция распределения ионов представляется в виде  $f_i = f_i^0 (1 + \Phi)$  и для малой поправки получается уравнение:

$$I_{ii}(\Phi) - f_i^0 [\mathbf{v} \mathbf{\omega}_i] \nabla_{\nu} \Phi = f_i^0 \left\{ \left( \frac{m_i v^2}{2T_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \nabla \ln T_i + \frac{m_i}{2T_i} \left( v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) W_{i\alpha\beta} \right\}. \quad (4.15)$$

Члены справа, связанные со столкновениями ионов с электронами, взаимно сокращаются, если взять  $C_{ie}$  в виде, соответствующем выражению (4.7). В результате уравнение (4.15) имеет такой же вид, как и для однокомпонентного газа (не смеси). Таким образом, форма ионной функции распределения в рассматриваемом приближении определяется лишь столкновениями ионов с ионами. Форма электронной функции распределения, напротив, определяется и собственными (электрон — электрон) и перекрестными (электрон — ион) столкновениями, как видно из формул (4.12) и (4.13).

Уравнение (4.15) определяет поправку  $\Phi$  с точностью до членов  $c_0 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{v} + c_2 v^2$ , обращающих в нуль левую часть. Так как нулевое приближение уже дает правильное значение плотности средней скорости и средней энергии ионов, то эти члены

определяются из требования, чтобы поправка не меняла значений этих параметров, т. е.

$$\int f^0 \Phi dv = 0; \quad \int v f^0 \Phi dv = 0; \quad \int v^2 f^0 \Phi dv = 0. \quad (4.16)$$

Таким же условиям должна удовлетворять поправка для электронной функции распределения. Этого, очевидно, можно добиться, так как левая часть уравнения (4.12) обращается в нуль выражением вида  $c_0 + c_2 v^2$ , а наличие в правой части уравнения (4.12) члена, пропорционального неизвестной заранее величине  $R^1$ , позволяет искать решение в таком виде, чтобы оно удовлетворяло условию  $\int v f_e^0 \Phi dv = 0$ .

**Решение уравнений (4.12) и (4.15).** Уравнения (4.12) и (4.15) линейны, поэтому их решения можно искать в виде суммы членов, каждый из которых соответствует какому-нибудь одному возмущающему фактору — градиенту температуры  $\nabla T$ , сдвигу скоростей  $U$ , неоднородности скоростей  $W_{\alpha\beta}$ .

Соображения тензорной инвариантности подсказывают следующий вид решения:

$$\Phi(v) = \Phi_\alpha(v^2) v_\alpha + \Phi_{\alpha\beta}(v^2) \left( v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (4.17)$$

Здесь первый (векторный) член соответствует векторным возмущениям  $\nabla T$  и  $U$ , второй (тензорный) член соответствует  $W_{\alpha\beta}$ . Первый и второй члены, очевидно, ортогональны друг к другу, так как усреднение по углам в пространстве скоростей дает  $\bar{v}_\alpha = 0$ ,  $\bar{v}_\alpha v_\beta v_\gamma = 0$ . Угловая зависимость в пространстве скоростей для первого и второго членов выражается сферическими функциями соответственно первого и второго порядка. Поток тепла  $q$  и передача импульса посредством столкновений  $R^1$  определяются только вектором  $\Phi$ , вязкие напряжения  $\pi_{\alpha\beta}$  — только тензором  $\Phi_{\alpha\beta}$ .

Рассмотрим в качестве примера, как определяется поправка  $\Phi_\alpha v_\alpha$  для электронов, связанная с  $\nabla T_e$  и соответствующие части в  $q_e$  и  $R^1$ . Столкновительные интегралы изотропны, они не зависят от какого-либо выделенного направления. Поэтому, если магнитное поле отсутствует, то, согласно симметрии задачи, зависимость вектора  $\Phi(v^2)$  от  $\nabla T_e$  должна иметь вид:  $\Phi(v^2) = A(v^2) \nabla \ln T_e$ , где  $A$  — скалярная функция. При наличии магнитного поля эта зависимость имеет вид:

$$\Phi(v^2) = A \nabla_{\parallel} \ln T_e + A' \nabla_{\perp} \ln T_e + A'' [\omega_e \nabla \ln T_e], \quad (4.18)$$

где  $\nabla_{\parallel} \ln T_e$ ,  $\nabla_{\perp} \ln T_e$  — слагающие вектора  $\nabla \ln T_e$  вдоль и поперек магнитного поля. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай поперечного градиента, так как выражение для  $A(v^2)$  получается из  $A'(v^2)$ , если положить  $\omega_e = 0$ .

Уравнение, определяющее часть поправки, возникающую от  $\nabla_{\perp} \ln T_e$ , имеет вид:

$$I_{ee}(\Phi) + I_{ei}(\Phi) - f_e^0 [\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_e] \nabla_v \Phi = f_e^0 \left\{ \left( \frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \nabla_{\perp} \ln T_e + \frac{1}{n_e T_e} \mathbf{R}_T^1 \mathbf{v} \right\}. \quad (4.19)$$

Термосилу  $\mathbf{R}_T^1$  можно записать в виде:

$$\mathbf{R}_T^1 = n_e T_e (K' \nabla_{\perp} \ln T_e + K'' [\boldsymbol{\omega}_e \nabla \ln T_e]),$$

где  $K'$  и  $K''$  — пока неизвестные коэффициенты. Подставив выражения (4.18) и (4.20) и приравняв нулю коэффициенты при  $\nabla_{\perp} \ln T_e$  и  $[\boldsymbol{\omega}_e \nabla \ln T_e]$ , получим два уравнения для определения  $A'$  и  $A''$ . Введем комплексные величины

$$A = A' + i(\boldsymbol{\omega}_e \mathbf{h}) A'', \quad K = K' + i(\boldsymbol{\omega}_e \mathbf{h}) K'', \quad (4.20)$$

можно свести их к одному уравнению для  $A$ :

$$I_{ee}(A\mathbf{v}) + I_{ei}(A\mathbf{v}) - i(\boldsymbol{\omega}_e \mathbf{h}) f_e^0 A\mathbf{v} = f_e^0 \left\{ \frac{m_e v^2}{2T_e} - \frac{5}{2} + K \right\} \mathbf{v}. \quad (4.21)$$

Чтобы не заниматься численным решением этого интегрального уравнения, можно, согласно [1], поступить следующим образом. Разложим  $A(v^2)$  по системе ортогональных функций, в качестве которых удобно взять полиномы Сонина, иначе называемые полиномами Лагерра. Эти полиномы  $L_p^{(m)}(x)$  имеют следующую производящую функцию:

$$(1 - \xi)^{-m-1} \exp\left(-\frac{x\xi}{1-\xi}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \xi^p L_p^{(m)}(x). \quad (4.22)$$

Полиномы ортогональны на интервале от 0 до  $\infty$  с весом  $x^m e^{-x}$ :

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_p^{(m)}(x) L_q^{(m)}(x) dx = \frac{(p+m)!}{p!} \delta_{pq}. \quad (4.23)$$

Первые два полинома  $L_0^{(m)} = 1$ ;  $L_1^{(m)} = m + 1 - x$ .

Разложение  $A(v^2)$  запишем в виде:

$$A(v^2) = \tau_e \sum_{k=1}^{\infty} a_k L_k^{(3/2)}(x); \quad x = \frac{m_e v^2}{2T_e}. \quad (4.24)$$

Разложение начинается с члена  $k = 1$ , а не  $k = 0$ , чтобы было выполнено условие  $\int \mathbf{v} f_e^0 \Phi dv = 0$ . Умножив уравнение (4.21) на

$$-\frac{4}{15} \frac{1}{n_e} \frac{m_e}{2T_e} \mathbf{v} L_k^{(3/2)} \left( \frac{m_e v^2}{2T_e} \right) dv,$$

проинтегрировав по скоростям и пользуясь соотношением (4.23),

получим вместо интегрального уравнения бесконечную систему алгебраических уравнений для коэффициентов разложения:

$$\sum_{l=1}^{\infty} (\alpha_{kl} + \alpha'_{kl}) a_l + i (\omega_e \mathbf{h}) \tau_e \frac{(k + 3/2)!}{k! (5/2)!} a_k = \delta_{1k}; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.25)$$

где  $\alpha_{kl}$ ,  $\alpha'_{kl}$  — безразмерные матрицы:

$$\begin{aligned} \alpha_{kl} &= -\frac{4\tau_e}{15n_e} \frac{m_e}{2T_e} \int L_k^{(3/2)}(x) v_{\beta} I_{ee} (L_l^{(3/2)}(x) v_{\beta}) dv; \quad x = \frac{m_e v^2}{2T_e}; \\ \alpha'_{kl} &= -\frac{4\tau_e}{15n_e} \frac{m_e}{2T_e} \int L_k^{(3/2)}(x) v_{\beta} I_{ei} (L_l^{(3/2)}(x) v_{\beta}) dv. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Поток тепла  $\mathbf{q}_T$  и термосилу  $\mathbf{R}_T$  можно с помощью выражений (1. 21), (1. 18) и (4. 23), (4. 26) выразить через коэффициенты разложения (4. 24):

$$\mathbf{q}_T = -\frac{5}{2} \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} (\alpha'_1 \nabla_{\perp} T_e + \alpha''_1 [\omega_e \nabla T_e]); \quad (4.27)$$

$$\mathbf{R}_T = -\frac{5}{2} n_e \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_{0k} (\alpha'_k \nabla_{\perp} T_e + \alpha''_k [\omega_e \nabla T_e]), \quad (4.28)$$

где аналогично формулам (4. 20)  $a_k = \alpha'_k + i (\omega_e \mathbf{h}) \alpha''_k$ . Если теперь ограничиться приближением  $A(v^2)$  с помощью нескольких первых членов ряда (4. 24), то соответствующим образом оборвется и бесконечная система уравнений (4. 25). Решив получившуюся конечную систему для нескольких первых коэффициентов, можно получить приближенные выражения для потока тепла и термосилы, если разделить в  $a_k$  вещественную и мнимую части и воспользоваться выражениями (4. 27) и (4. 28).

Совершенно аналогично находятся поправки к функции распределения и вклады в  $\mathbf{q}_e$  и  $\mathbf{R}^1$ , соответствующие относительной скорости  $\mathbf{U} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$ , а также поправка к ионной функции распределения от  $\nabla T_i$  и поток тепла ионов. Соответствующие системы уравнений, аналогичные уравнениям (4. 25), и матрицы коэффициентов  $\alpha_{kl}$ ,  $\alpha'_{kl}$  приведены в работе [17].

Вычисление  $\Phi_{\alpha\beta}$  и тензора вязкости производится аналогично, но разбиение возмущения на независимые части производится несколько сложнее. Тензор  $W_{\alpha\beta}$  разбивается на три независимые части  $W_{\alpha\beta} = W_{c\alpha\beta} + W_{1\alpha\beta} + W_{2\alpha\beta}$  и вводятся еще два тензора  $W_{3\alpha\beta}$ ,  $W_{4\alpha\beta}$ , составленные из компонент  $W_{\alpha\beta}$ . Поправка к максвелловскому распределению, обусловленная возмущением  $W_{\alpha\beta}$ , ищется в виде

$$\Phi_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = -\sum_{p=0}^4 B_p(v^2) W_{p\alpha\beta} v_{\alpha\beta}, \quad \text{где } v_{\alpha\beta} = v_{\alpha} v_{\beta} - \frac{v^2}{3} \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.29)$$

Тензоры  $W_{p\alpha\beta}$  оказывается возможным выбрать так, что действие

магнитного оператора  $[\mathbf{v}\mathbf{h}] \nabla_v$  обращает в нуль член  $W_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}$  и

$$[\mathbf{v}\mathbf{h}] \nabla_v W_{1\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = 2W_{2\alpha\beta} v_{\alpha\beta}; \quad [\mathbf{v}\mathbf{h}] \nabla_v W_{3\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = -2W_{1\alpha\beta} v_{\alpha\beta};$$

$$[\mathbf{v}\mathbf{h}] \nabla_v W_{2\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = W_{4\alpha\beta} v_{\alpha\beta}; \quad [\mathbf{v}\mathbf{h}] \nabla_v W_{4\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = -W_{2\alpha\beta} v_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, существует три независимых типа движений, различным образом влияющих на вязкость. Поправки  $\Phi_{\alpha\beta}$  для каждого из них можно находить независимо. Уравнения для  $B_1$ ,  $B_3$  и для  $B_2$ ,  $B_4$  попарно объединяются введением соответствующих комплексных величин. Функции  $B(v^2)$  находятся тем же приближенным методом, что и  $A(v^2)$ . Функции  $B(v^2)$  оказываются удобным представлять в виде ряда по полиномам  $L_k^{(s/2)}(mv^2/2T)$  с последующим обрывом получающейся системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения. Эта система уравнений приведена в работе [17]. Тензор вязкости находится с помощью выражения (1. 17). Он зависит только от коэффициента при  $L_0^{(s/2)}$ .

Чем больше число  $N$  полиномов, с помощью которых аппроксимируется поправка к функции распределения, тем точнее получаются коэффициенты переноса при вычислении описанным приближенным методом. Сравнение результатов, получаемых с разными  $N$ , показывает, что при  $N = 1$  ошибка для некоторых коэффициентов может быть сравнима с самой вычисляемой величиной, а при переходе к  $N = 2$  точность резко возрастает. Дальнейшее увеличение  $N$  не дает уже столь резкого повышения точности и сильно увеличивает громоздкость формул. Далее приводятся коэффициенты переноса, полученные с двумя аппроксимирующими полиномами в работе [17]\*.

Результаты вычислений электронных потоков с большим числом полиномов (до  $N = 6$ ) для  $0 \leq \omega_e \tau_e \leq 6$  приведены в работе [21]. «Точные» значения коэффициентов переноса при  $\omega_e \tau_e = 0$  получены в работе [14] непосредственно численным интегрированием уравнения для поправки без разложения по полиномам.

При  $N = 2$  и  $\omega\tau = 0$  получается точность в несколько процентов. Асимптотический ход коэффициентов переноса при  $\omega\tau \rightarrow \infty$  определяется числовыми коэффициентами, которые далее приведены в виде простых рациональных дробей. Эти коэффициенты получаются точно [18]. Наибольшую ошибку (10—20%) коэффициенты переноса могут иметь в промежуточной области  $\omega\tau \sim 1$ .

**Результаты.** Передача импульса при столкновениях от ионов к электронам  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{R}^1$  складывается из силы трения  $\mathbf{R}_u = \mathbf{R}_u^0 + \mathbf{R}_u^1$  и термосилы  $\mathbf{R}_T = \mathbf{R}_T^1$ :

$$\mathbf{R}_u = -\alpha_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} - \alpha_{\perp} \mathbf{u}_{\perp} + \alpha_{\wedge} [\mathbf{h}\mathbf{u}]; \quad (4. 30)$$

$$\mathbf{R}_T = -\beta_{\parallel}^{uT} \nabla_{\parallel} T_e - \beta_{\perp}^{uT} \nabla_{\perp} T_e - \beta_{\wedge}^{uT} [\mathbf{h}\nabla T_e]. \quad (4. 31)$$

\* Отметим опечатки, допущенные в работе [17]: в выражении (3. 18) для  $q_u$  вместо знака минус перед фигурной скобкой должен стоять плюс. В выражении (4. 14) вместо  $b''$  следует читать  $-b''$ , так как, согласно выражению (4. 13), именно  $-b''$  является положительным числом.

Из аналогичных двух частей складывается электронный поток тепла  $q_e = q_u^e + q_T^e$ :

$$q_u^e = \beta_{\parallel}^{Tu} \mathbf{u}_{\parallel} + \beta_{\perp}^{Tu} \mathbf{u}_{\perp} + \beta_{\wedge}^{Tu} [\mathbf{h}\mathbf{u}]; \quad (4.32)$$

$$q_T^e = -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \kappa_{\wedge}^e [\mathbf{h}\nabla T_e]. \quad (4.33)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\parallel} &= \frac{m_e n_e}{\tau_e} \alpha_0; & \alpha_{\perp} &= \frac{m_e n_e}{\tau_e} \left( 1 - \frac{\alpha_1' x^2 + \alpha_0'}{\Delta} \right); \\ \alpha_{\wedge} &= \frac{m_e n_e}{\tau_e} \frac{x(\alpha_1'' x^2 + \alpha_0'')}{\Delta}; \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

$$\beta_{\parallel}^{uT} = n_e \beta_0; \quad \beta_{\perp}^{uT} = n_e \frac{\beta_1' x^2 + \beta_0'}{\Delta}; \quad \beta_{\wedge}^{uT} = n_e \frac{x(\beta_1'' x^2 + \beta_0'')}{\Delta}; \quad (4.35)$$

$$\beta_{\parallel}^{Tu} = \beta_{\parallel}^{uT} T_e; \quad \beta_{\perp}^{Tu} = \beta_{\perp}^{uT} T_e; \quad \beta_{\wedge}^{Tu} = \beta_{\wedge}^{uT} T_e; \quad (4.36)$$

$$\kappa_{\parallel}^e = \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \gamma_0; \quad \kappa_{\perp}^e = \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \frac{(\gamma_1' x^2 + \gamma_0')}{\Delta}; \quad (4.37)$$

$$\kappa_{\wedge}^e = \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e} \frac{x(\gamma_1'' x^2 + \gamma_0'')}{\Delta},$$

где

$$x = \omega_e \tau_e; \quad \Delta = x^4 + \delta_1 x^2 + \delta_0. \quad (4.38)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  приведены в табл. 2 для различных значений  $Z$ .

Согласно работе [14] точные значения коэффициентов, полученные непосредственно численным решением интегрального уравнения при  $B = 0$ ,  $Z = 1$ , равны:  $\alpha_0 = 0,5063$ ;  $\beta_0 = 0,7033$ ;  $\gamma_0 = 3,203$ . При  $Z = \infty$  точное решение уравнения для поправки позволяет получить:

$$\alpha_0 = \frac{3\pi}{32} = 0,2945; \quad \beta_0 = \frac{3}{2}; \quad \gamma_0 = \frac{128}{3\pi} = 13,58.$$

Поток тепла ионов:

$$q_i = -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \kappa_{\wedge}^i [\mathbf{h}\nabla T_i]; \quad (4.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{\parallel}^i &= 3,906 n_i T_i \tau_i / m_i; \\ \kappa_{\perp}^i &= (n_i T_i \tau_i / m_i) (2x^2 + 2,645) / \Delta; \\ \kappa_{\wedge}^i &= (n_i T_i \tau_i / m_i) x \left( \frac{5}{2} x^2 + 4,65 \right) / \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

где

$$x = \omega_i \tau_i; \quad \Delta = x^4 + 2,70x^2 + 0,677.$$

Тензор вязких напряжений для частиц каждого сорта (значки  $i$ ,  $e$  опущены) выражается через соответствующий тензор  $W_{\alpha\beta}$

Т а б л и ц а 2

	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 3$	$Z = 4$	$Z \rightarrow \infty$
$\alpha_0 = 1 - (\alpha'_0/\delta_0)$	0,5129	0,4408	0,3965	0,3752	0,2949
$\beta_0 = \beta'_0/\delta_0$	0,7110	0,9052	1,016	1,090	1,521
$\gamma_0 = \gamma'_0/\delta_0$	3,1616	4,890	6,064	6,920	12,471
$\delta_0$	3,7703	1,0465	0,5814	0,4106	0,0961
$\delta_1$	14,79	10,80	9,618	9,055	7,482
$\alpha'_1$	6,416	5,523	5,226	5,077	4,63
$\alpha'_0$	1,837	0,5956	0,3515	0,2566	0,0678
$\alpha''_1$	1,704	1,704	1,704	1,704	1,704
$\alpha''_0$	0,7796	0,3439	0,2400	0,1957	0,0940
$\beta'_1$	5,101	4,450	4,233	4,124	3,798
$\beta'_0$	2,681	0,9473	0,5905	0,4478	0,1461
$\beta''_1$	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2
$\beta''_0$	3,053	1,784	1,442	1,285	0,877
$\gamma'_1$	4,664	3,957	3,721	3,604	3,25
$\gamma'_0$	11,92	5,118	3,525	2,841	1,20
$\gamma''_1$	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2
$\gamma''_0$	21,67	15,37	13,53	12,65	10,23

[см. формулу (4. 14)] с помощью пяти коэффициентов вязкости:

$$\pi_{\alpha\beta} = -\eta_0 W_{0\alpha\beta} - \eta_1 W_{1\alpha\beta} - \eta_2 W_{2\alpha\beta} + \eta_3 W_{3\alpha\beta} + \eta_4 W_{4\alpha\beta}, \quad (4. 41)$$

причем  $W_{\alpha\beta} = W_{c\alpha\beta} + W_{1\alpha\beta} + W_{2\alpha\beta}$ .



Здесь

$$\left. \begin{aligned} W_{0\alpha\beta} &= \frac{3}{2} \left( h_\alpha h_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \left( h_\mu h_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right) W_{\mu\nu}; \\ W_{1\alpha\beta} &= \left( \delta_{\alpha\mu}^\perp \delta_{\beta\nu}^\perp + \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^\perp h_\mu h_\nu \right) W_{\mu\nu}; \\ W_{2\alpha\beta} &= \left( \delta_{\alpha\mu}^\perp h_\beta h_\nu + \delta_{\beta\nu}^\perp h_\alpha h_\mu \right) W_{\mu\nu}; \\ W_{3\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha\mu}^\perp \varepsilon_{\beta\gamma\nu} + \delta_{\beta\nu}^\perp \varepsilon_{\alpha\gamma\mu} \right) h_\gamma W_{\mu\nu}; \\ W_{4\alpha\beta} &= \left( h_\alpha h_\mu \varepsilon_{\beta\gamma\nu} + h_\beta h_\nu \varepsilon_{\alpha\gamma\mu} \right) h_\gamma W_{\mu\nu}, \end{aligned} \right\} (4.42)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}^\perp = \delta_{\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — антисимметричный единичный тензор.  
 В системе координат, где ось  $z$  направлена по магнитному полю ( $x, y, z \rightarrow 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{h} = (0, 0, 1); \quad \delta_{\alpha\beta}^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} h_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и тензоры  $W_{p\alpha\beta}$  принимают вид:

$$W_{0\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (W_{xx} + W_{yy}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (W_{xx} + W_{yy}) & 0 \\ 0 & 0 & W_{zz} \end{pmatrix}$$

$$W_{1\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) & W_{xy} & 0 \\ W_{yx} & \frac{1}{2} (W_{yy} - W_{xx}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_{2\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{xz} \\ 0 & 0 & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_{3\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -W_{xy} & \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) & 0 \\ \frac{1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) & W_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_{4\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W_{yz} \\ 0 & 0 & W_{xz} \\ -W_{zy} & W_{zx} & 0 \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что справедливо следующее условие ортогональности:

$$W_{p\alpha\beta} W_{q\alpha\beta} = 0, \text{ если } p \neq q. \quad (4.43)$$

Коэффициенты вязкости ионов:

$$\left. \begin{aligned} \eta_0^i &= 0,96n_iT_i\tau_i; \\ \eta_2^i &= n_iT_i\tau_i\left(\frac{6}{5}x^2 + 2,23\right)/\Delta; \\ \eta_4^i &= n_iT_i\tau_ix(x^2 + 2,38)/\Delta, \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

где

$$x = \omega_i\tau_i; \quad \Delta = x^4 + 4,03x^2 + 2,33.$$

Коэффициенты  $\eta_1^i$  и  $\eta_3^i$  получаются из  $\eta_2^i$ ,  $\eta_4^i$  заменой  $\omega_i$  на  $2\omega_i$ :

$$\eta_1^i = \eta_2^i(2x); \quad \eta_3^i = \eta_4^i(2x).$$

Коэффициенты вязкости электронов для  $Z = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \eta_0^e &= 0,733n_eT_e\tau_e; \\ \eta_2^e &= n_eT_e\tau_e(2,05x^2 + 8,50)/\Delta; \quad \eta_1^e = \eta_2^e(2x); \\ \eta_4^e &= -n_eT_e\tau_ex(x^2 + 7,91)/\Delta; \quad \eta_3^e = \eta_4^e(2x), \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

где

$$x = \omega_e\tau_e; \quad \Delta = x^4 + 13,8x^2 + 11,6.$$

**Симметрия кинетических коэффициентов.** Напомним кратко терминологию и некоторые положения термодинамики необратимых процессов (подробнее см., например, [9]). Различные факторы, вызывающие отклонение от теплового равновесия  $X_m$  (например,  $\nabla T$ ,  $W_{\alpha\beta}$  и т. д.), называют термодинамическими «силами». Они создают в системе соответствующие «потоки»  $I_m$  (например,  $q$ ,  $\pi_{\alpha\beta}$  и т. д.). При малом отклонении от равновесия «потоки» и «силы» связаны линейно:

$$I_m = \sum_n L_{mn}X_n. \quad (4.46)$$

Необратимое увеличение энтропии в неравновесной системе называют рождением энтропии  $\theta$ . Согласно второму началу термодинамики, всегда  $\theta > 0$ . «Потоки»  $I_m$  и «силы»  $X_n$  называют сопряженными, если рождение энтропии выражается в виде

$$\theta = \sum_m I_m X_m. \quad (4.47)$$

В термодинамике необратимых процессов доказывается следующий принцип симметрии кинетических коэффициентов или принцип Онзагера. Пусть «потоки» и «силы» выбраны так, что для них справедливо соотношение (4.47). Тогда кинетические коэффициенты, связывающие эти «потоки» и «силы», удовлетворяют условиям

$$L_{mn}(\mathbf{B}) = L_{nm}(-\mathbf{B}), \quad (4.48)$$

если обе «силы»  $X_m, X_n$  — четные функции скоростей частиц (как, например,  $\nabla T$ ) или обе — нечетные (как, например,  $W_{\alpha\beta}$ ). Если же одна из «сил» — четная, а другая — нечетная, то имеют место условия:

$$L_{mn}(\mathbf{B}) = -L_{nm}(-\mathbf{B}). \quad (4.48')$$

Баланс энтропии для электронов можно легко получить, пользуясь уравнениями баланса тепла (2.3e) и непрерывности (2.1e). Энтропия, отнесенная на один электрон, равна

$$s_e = \frac{3}{2} \ln T_e - \ln n_e + \text{const}. \quad (4.49)$$

Баланс энтропии приводится к виду

$$\frac{\partial n_e s_e}{\partial t} + \text{div} \left( s_e n_e \mathbf{V}_e + \frac{\mathbf{q}_e}{T_e} \right) + \frac{Q_\Delta}{T_e} = \theta_e, \quad (4.50)$$

где  $\theta_e$  — рождение энтропий в единице объема:

$$T_e \theta_e = -\mathbf{q}_e \nabla \ln T_e - \mathbf{R} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}. \quad (4.51)$$

Левая часть уравнения (4.50) содержит изменение энтропии со временем, а также уход энтропии в другие области пространства и к ионам.

Из выражения (4.51) видно, что «потoki»  $\mathbf{q}_e, \mathbf{R}, \pi_{\alpha\beta}, Q_\Delta$  и «силы»  $\nabla \ln T_e, \mathbf{u}, \frac{1}{2} W_{\alpha\beta}, (T_e - T_i)/T_e T_i$  являются сопряженными.

Рассмотрим соотношения (4.30) — (4.33) между «потокami» и «силами». Так как  $\mathbf{B}$  — аксиальный вектор, а  $\mathbf{q}, \mathbf{R}, \nabla T, \mathbf{u}$  — полярные векторы, то коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  должны быть четными функциями  $\mathbf{B}$ . Принцип Онзагера приводит к следующим нетривиальным соотношениям для «перекрестных» эффектов — термосилы и потока тепла от относительной скорости:

$$T_e \beta_{\parallel}^{uT} = \beta_{\parallel}^{Tu}, \quad T_e \beta_{\perp}^{uT} = \beta_{\perp}^{Tu}, \quad T_e \beta_{\wedge}^{uT} = \beta_{\wedge}^{Tu}. \quad (4.52)$$

При вычислении коэффициентов переноса из кинетического уравнения эти соотношения удовлетворяются автоматически [см. соотношения (4.36)].

Для вязкости, а также для ионных коэффициентов переноса принцип Онзагера не приводит к нетривиальным соотношениям.

С учетом симметрии коэффициентов переноса и условия ортогональности (4.43) рождение энтропии можно записать в виде:

$$\begin{aligned} T_e \theta_e = & \frac{\alpha_{\parallel}^e}{T_e} (\nabla_{\parallel} T_e)^2 + \frac{\alpha_{\perp}^e}{T_e} (\nabla_{\perp} T_e)^2 + \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} + \\ & + \frac{1}{2} \{ \eta_0^e W_{0\alpha\beta}^2 + \eta_1^e W_{1\alpha\beta}^2 + \eta_2^e W_{2\alpha\beta}^2 \}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Аналогично получается рождение энтропии для ионов:

$$T_i \theta_i = \frac{\kappa_{\parallel}^i}{T_i} (\nabla_{\parallel} T_i)^2 + \frac{\kappa_{\perp}^i}{T_i} (\nabla_{\perp} T_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^2 \eta_p^i W_{p\alpha\beta}^2. \quad (4.54)$$

Баланс энтропии для всей плазмы имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ s_e n_e \mathbf{V}_e + s_i n_i \mathbf{V}_i + \frac{q_e}{T_e} + \frac{q_i}{T_i} \right\} = \theta_e + \theta_i + \theta_{ei}, \quad (4.55)$$

где  $S = s_e n_e + s_i n_i$  — энтропия плазмы на единицу объема;

$$\theta_{ei} = Q_{\Delta} \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_e} \right) = \frac{3m_e}{m_i} \cdot \frac{n_e}{\tau_e} \cdot \frac{(T_e - T_i)^2}{T_e T_i}. \quad (4.56)$$

### § 5. Некоторые парадоксы

Непосредственное применение уравнений переноса к замагниченной плазме, в которой  $\omega\tau \gg 1$ , нередко приводит к кажущимся противоречиям с тем, чего на первый взгляд следовало бы ожидать, исходя из картины движения (дрейфа) отдельных частиц в магнитном поле. Такие парадоксы рассматривались в работах [6, 26, 27, 28]. Некоторые из них мы рассмотрим в этом параграфе.

Пусть градиенты всех величин и электрическое поле перпендикулярны к магнитному полю. Будем рассматривать процесс, достаточно медленный, чтобы можно было пренебречь инерцией ионов и электронов и чтобы все величины мало изменялись за время между столкновениями. При этих условиях можно из уравнений движения получить для поперечных скоростей ионов и электронов явные выражения через градиенты. Если сложить уравнения движения для ионов и электронов и пренебречь вязкостью и инерцией, то получается условие равновесия плазмы в виде

$$-\nabla(p_e + p_i) + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] = 0.$$

Отсюда следует выражение для поперечного электрического тока

$$\mathbf{j}_{\perp} = -en_e(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)_{\perp} = \frac{c}{B} [h\nabla(p_e + p_i)]. \quad (5.1)$$

Подставив выражение (5.1) в выражение для силы  $\mathbf{R}$  (2.6) и (2.9) и учитывая условие  $-en_e = e_i n_i = en$ , получим:

$$\mathbf{V}_e = \frac{c}{B} [\mathbf{E}h] - \frac{c}{enB} [h\nabla p_e] + \mathbf{V}_D; \quad (5.2e)$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{c}{B} [\mathbf{E}h] + \frac{c}{enB} [h\nabla p_i] + \mathbf{V}_D, \quad (5.2i)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_D &= -\frac{c^2}{\sigma_{\perp} B^2} \left\{ \nabla (p_e + p_i) - \frac{3}{2} n_e \nabla T_e \right\} = \\ &= -\frac{m_e c^2}{e^2 \tau_e B^2} \left\{ (T_e + T_i) \frac{\nabla n}{n} + \nabla T_i - \frac{1}{2} \nabla T_e \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Учет вязкости привел бы к появлению членов  $\sim B^{-4}$ .

Отбросим временно в формулах (5.2) член  $\mathbf{V}_D$ , связанный со столкновениями, и сравним остальные члены с тем, что получается непосредственно из картины движения частиц.

Движение заряженной частицы в сильном магнитном поле без столкновений можно представить как вращение по окружности, центр которой (так называемый ведущий центр) движется со скоростью  $\mathbf{V}_c$ , равной (см., например, работы [8, 38])

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_c &= \frac{c}{B} [\mathbf{E}\mathbf{h}] + \frac{mv_{\perp}^2 c}{2eB} \left[ \mathbf{h} \frac{\nabla B}{B} \right] + \frac{mv_{\parallel}^2 c}{eB} [\mathbf{h} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}] + \\ &+ \frac{mv_{\perp}^2 c}{2eB} \mathbf{h} (\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}) + v_{\parallel} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ ;  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  — усредненные по вращению проекции скорости частицы на направление магнитного поля и на перпендикуляр к нему в точке, соответствующей ведущему центру. Первый член в выражении (5.4) называют обычно электрическим дрейфом, второй — магнитным дрейфом, третий — центробежным.

Если усреднить выражение (5.4) по распределению скоростей, мало отличающемуся от максвелловского, то получится

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_c \rangle &= \frac{c}{B} [\mathbf{E}\mathbf{h}] + \frac{cT}{eB} \left[ \mathbf{h}, \frac{\nabla B}{B} + (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} \right] + \\ &+ \frac{cT}{eB} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}) + V_{\parallel} \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь  $m \langle v_{\parallel}^2 \rangle = T$ ;  $m \langle v_{\perp}^2 \rangle = 2T$ ;  $\langle v_{\parallel} \rangle = V_{\parallel} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{h}$ .

Величина  $n \langle \mathbf{V}_c \rangle$  есть плотность потока ведущих центров, а  $\int_S n \langle \mathbf{V}_c \rangle dS$  дает поток центров через поверхность  $S$ , тогда как  $n\mathbf{V}$  и  $\int_S n\mathbf{V} dS$  представляют собой плотность потока и поток самих частиц. Поток частиц может вообще отличаться от потока центров, и некоторые парадоксы возникают, когда смешивают эти величины.

Сравним между собой формулы (5.2) и (5.5)

Первый член в выражении (5.2) легко интерпретируется — это электрический дрейф.

Второй член в выражении (5.2), который будем называть ларморовым, связан с тем, что частицы, пересекающие площадку

в противоположных направлениях, приходят из областей с разными плотностями и температурами, в результате чего их односторонние потоки не компенсируются. Частицы приходят с расстояний  $\sim r = mc/eB$  и «приносят» с собой поток  $\sim nv$ , поэтому результирующий разностный поток имеет порядок  $(mc/eB) \nabla n v^2 \sim (c/eB) \nabla p$ . Парадоксальным на первый взгляд представляется отсутствие в выражениях (5. 2) членов, соответствующих магнитному и центробежному дрейфам и содержащих явно производные по координатам от магнитного поля. В действительности же отсутствие таких членов совершенно естественно, так как магнитное поле, независимо от того, однородное оно или нет, не нарушает максвелловское распределение:  $[\mathbf{v}\omega] \nabla_{\omega} f^0 = 0$ . Поэтому, если плотность и температура частиц не зависят от координат, то потока частиц (5. 2) внутри плазмы нет, хотя поток центров (5. 5) есть, если магнитное поле неоднородно. Магнитный и центробежный дрейфы проявляются при этом как краевые эффекты, создавая обтекающие потоки частиц на границе области с постоянными плотностью и температурой. В этом легко убедиться на простых примерах, но можно показать и в общем виде. Воспользовавшись тождествами

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h} &= -[\mathbf{h} \text{ rot } \mathbf{h}]; \\ [\mathbf{h} \cdot (\mathbf{h}\nabla) \mathbf{h}] &= \text{rot } \mathbf{h} - \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h}), \end{aligned} \right\} \quad (5. 6)$$

выражение (5. 5) легко привести к виду

$$\langle \mathbf{V}_c \rangle = \frac{c}{B} [\mathbf{E}\mathbf{h}] + \frac{cT}{e} \text{rot } \frac{\mathbf{h}}{B} + V_{\parallel} \mathbf{h}. \quad (5. 7)$$

Сравнивая теперь поток центров с потоком частиц (без учета столкновений), получим для частиц любого сорта

$$n\mathbf{V} = n \langle \mathbf{V}_c \rangle - \text{rot} \left( \frac{cnT}{eB} \mathbf{h} \right) \quad (5. 8)$$

или

$$\int n\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \int n \langle \mathbf{V}_c \rangle \cdot d\mathbf{S} - \oint \frac{cnT}{eB} (\mathbf{h} \cdot d\mathbf{l}). \quad (5. 8')$$

Отсюда непосредственно видно, что различие между потоком центров и потоком частиц через любую площадку целиком определяется значениями величин на границе площадки. Это различие связано с тем, что вблизи края площадку пересекают некоторые частицы, у которых ведущие центры проходят мимо площадки. Величина потока, создаваемого такими частицами, равна  $cnT/eB$  на единицу длины края вдоль  $\mathbf{h}$ , причем противоположные края площадки пересекаются во взаимно противоположных направлениях.

Таким образом, замагниченную плазму можно представлять себе как бы состоящей из «квазичастиц» — кружочков, движущихся

щихся со скоростью дрейфа. Легко подсчитать, что магнитный момент каждого кружочка равен  $\mu = -(mv_{\perp}^2/2B) \mathbf{h}$ , так что без учета столкновений намагниченность плазмы на единицу объема равна:

$$\mathbf{M} = - \sum_a n_a \frac{m_a \langle v_{\perp}^2 \rangle_a}{2B} \mathbf{h}. \quad (5.9)$$

Полная плотность тока получается при таком представлении в виде суммы дрейфового тока и тока намагниченности:

$$\mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \langle V_c \rangle_a + \text{rot} \sum_a \frac{cn_a \langle v_{\perp}^2 \rangle_a}{2B} \mathbf{h} = \mathbf{j}_c + c \text{rot} \mathbf{M}. \quad (5.10)$$

При  $m_a \langle v_{\perp}^2 \rangle_a = 2T_a$  отсюда получается как раз выражение (5.1). Можно было бы, как это обычно делается в макроскопической электродинамике, ввести, кроме  $\mathbf{B}$ , также и  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$  и написать для них уравнения Максвелла в виде:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.11)$$

Практически, однако, для плазмы обычно удобнее учитывать все токи в явном виде, не разделяя токов дрейфа и токов намагниченности. При явном учете всех токов  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{H}$  и определяется уравнениями Максвелла в виде:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.11')$$

Члены  $V_D$  в выражении (5.2) зависят от столкновений частиц, а именно от столкновений электронов с ионами. Эти члены можно условно назвать диффузионными. Они тождественно совпадают для ионов и электронов и зависят только от градиентов плотности и температуры, но не зависят от электрического поля. Оба эти результата представляются на первый взгляд парадоксальными. Действительно, коэффициент диффузии заряженной частицы поперек магнитного поля имеет порядок величины  $D_{\perp} \sim r^2/\tau$ . У ионов  $r, \tau$  больше в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз, чем у электронов. Поэтому, казалось бы, ионный коэффициент диффузии должен быть в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз больше, чем электронный. В действительности же это не так. Пусть, например, имеется градиент плотности ионов вдоль оси  $x$  и магнитное поле направлено по оси  $z$ . Тогда возникает ларморовый поток ионов по оси  $y$  со скоростью  $V_y = (cT/enB) dn/dx$ . В этом случае применять непосредственно формулу  $D \sim r^2/\tau$  нельзя, ибо диффузия происходит в движущейся среде, и при столкновениях ион получает в среднем некоторый импульс вдоль оси  $y$ . Перейдем в систему координат, где  $V_y = 0$ . В этой системе имеется электрическое поле  $E'_x = (V_y/c)B = (T/e) d \ln n/dx$ , в котором ионы имеют как раз больцмановское

распределение и их поток равен нулю, так как поток, вызванный электрическим полем, компенсирует диффузию. Столкновения между одинаковыми частицами, таким образом, не приводят к их диффузии поперек магнитного поля. Что же касается столкновений между электронами и ионами, то они приводят к диффузии, потому что ларморовы токи электронов и ионов направлены в противоположные стороны. Получающийся поток вдоль оси  $x$  можно рассматривать как результат дрейфа, возникающего под действием направленной по оси  $y$  силы трения  $\mathbf{R}$  между электронами и ионами. Так как  $\mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_e$ , то скорости частиц обоих сортов в точности одинаковы.

Рассмотрим теперь роль электрического поля. Пусть вдоль оси  $x$  имеется электрическое поле. Оно вызывает дрейф частиц обоих знаков вдоль оси  $y$  со скоростью  $V_y = -cE/B$ . В системе координат, где  $V_y = 0$ , электрическое поле  $E' = 0$ , так что никакого потока по оси  $x$ , т. е. по направлению приложенного электрического поля, не возникает. В этой связи иногда говорят (неудачно), что проводимость плазмы поперек магнитного поля равна нулю.

Перейдем теперь к уравнениям переноса тепла. При медленном изменении магнитного поля со временем у частиц сохраняется величина  $v_{\perp}^2/B$ , т. е. энергия поперечного движения  $\varepsilon_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$  изменяется пропорционально полю — это бетатронный эффект. Уравнение переноса тепла не содержит члена, пропорционального  $\partial B/\partial t$ . Можно, однако, убедиться на простых примерах, что оно учитывает бетатронный эффект.

Пусть, например, однородное магнитное поле направлено по оси  $z$  и растет со временем. Пусть плазма занимает цилиндрический объем, бесконечный вдоль оси  $z$ . Примем, что плотность и температура плазмы постоянны по объему (тогда не будет потоков тепла) и для простоты будем пренебрегать столкновениями электронов с ионами и, следовательно, джоулевым теплом. Можно также пренебречь экранировкой внешнего магнитного поля токами в плазме. Тогда индукционное электрическое поле равно  $E = E_{\varphi} = -\dot{B}r/2c$ . Электрический дрейф приводит к сжатию плазмы со скоростью  $V_r = -\dot{B}r/2B$ , так что  $\text{div } \mathbf{V} = -\dot{B}/B$ . Уравнение переноса тепла имеет вид:

$$\frac{3}{2} n \frac{dT}{dt} = -nT \text{div } \mathbf{V} = \frac{nT}{B} \frac{dB}{dt}. \quad (5.12)$$

Это выражение как раз дает бетатронный эффект. Действительно, при бетатронном нагреве непосредственно увеличивается лишь энергия поперечного движения  $d\varepsilon = \varepsilon_{\perp} dB/B$ . Столкновения уравнивают равнораспределение по степеням свободы, так что  $\varepsilon_{\perp} = \frac{2}{3} \varepsilon$  и  $(3/2) d\varepsilon/dt = (\varepsilon/B) dB/dt$ . Бетатронный эффект проявляется в данном случае как нагрев от адиабатического сжатия



плазмы. Этот обратимый (в термодинамическом смысле) нагрев не надо путать с упомянутым в § 3 необратимым гирорелаксационным нагревом, который возникает вследствие необратимого процесса — выравнивания энергии по степеням свободы. После уменьшения магнитного поля до его первоначального значения и соответствующего расширения плазмы адиабатическое охлаждение при расширении согласно уравнению (5.12) полностью компенсирует нагрев, имевший место при сжатии, тогда как тепло, выделяющееся при гирорелаксационном нагреве, остается в плазме, так как оно пропорционально  $(\dot{B}/B)^2$ .

Рассмотрим теперь случай, когда столкновения электронов с ионами как раз «уравновешивают» электрический дрейф:  $cE_\varphi/B + V_D = 0$ , так что плазма неподвижна. При этом в плазме возникнут тепловые потоки, поэтому будем рассматривать полное увеличение энергии во всем объеме плазмы. Если уравнения переноса тепла для ионов и электронов сложить и проинтегрировать по объему плазменного цилиндра (высотой равного 1 по оси  $z$ ), то получится:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{d}{dt} \int (n_e T_e + n_i T_i) 2\pi r dr = \int E_\varphi j_\varphi 2\pi r dr.$$

Подставив сюда  $E_\varphi = -\dot{B}r/2c$ ;  $j_\varphi = (c/B) \partial p / \partial r$ ;  $p = n_e T_e + n_i T_i$  и проинтегрировав справа по частям, получим опять  $(3/2) d\varepsilon/dt = (\varepsilon/B) dB/dt$ . В этом случае бетатронный эффект проявляется как выделение джоулева тепла.

Между двумя рассмотренными примерами в одном отношении имеется различие. В первом случае ионы и электроны нагреваются от сжатия одинаково. Во втором случае тепло выделяется непосредственно в электронном газе и лишь затем столкновениями передается ионам, хотя, казалось бы, при бетатронном нагреве ионы должны получать столько же тепла, сколько и электроны. Дело в том, что при отсутствии тока ионов в плазме возникает радиальное электрическое поле, величина которого определяется условием равновесия ионов  $e_i n_i E_r = -\partial p_i / \partial r$ . Это поле приводит к дрейфу ионов в азимутальном направлении против вихревого электрического поля. Нетрудно убедиться, что его работа (отрицательная) на этом дрейфе как раз компенсирует бетатронный нагрев ионов. Электроны в радиальном поле тоже дрейфуют и набирают столько же энергии, сколько теряют ионы.

Перенос тепла, как и перенос частиц, тоже можно рассматривать с точки зрения движения ведущих центров. При этом, пренебрегая столкновениями, можно получить формулу, аналогичную формуле (5.8). Плотность полного потока энергии, согласно уравнению (1.20), равна  $q_{\text{полн}} = \frac{5}{2} n T V + q$ . Воспользуемся соотношением (5.8) и учтем в потоке тепла члены  $q_\Delta$ , не зависящие от столкновений и, согласно выражениям (2.11)

и (2. 14), равные  $q_{\Lambda} = \frac{5}{2} \frac{cnT}{eB} [h\nu T]$ . Тогда выражение для  $q_{\text{полн}}$  можно преобразовать к виду:

$$q_{\text{полн}} = \frac{5}{2} nT\mathbf{V} + q_{\Lambda} - \frac{5}{2} nT \langle V_{\epsilon} \rangle - \text{rot} \left( \frac{5}{2} \frac{cnT^2}{eB} \mathbf{h} \right). \quad (5. 13)$$

По поводу этой формулы можно сделать замечания, совершенно аналогичные тем, которые были высказаны выше по поводу соотношения (5. 8).

## § 6. Гидродинамическое описание плазмы

Система уравнений переноса соответствует модели плазмы в виде совокупности взаимно проникающих друг в друга заряженных газов — ионного (одного или нескольких) и электронного. Часто бывает удобнее пользоваться одножидкостной моделью плазмы. При этом вместо уравнений движения для ионов и для электронов получаются уравнения движения для всей плазмы в целом, являющееся обобщением уравнения движения обычной гидродинамики, и выражение для электрического тока, представляющее собой обобщение известного закона Ома. Такой переход к одножидкостной гидродинамической модели оказывается наиболее полезным для описания не слишком высокочастотных процессов, когда можно пренебречь инерцией электронов и принять условие квазинейтральности плазмы.

Мы рассмотрим одножидкостную гидродинамическую модель сначала для простой плазмы, а затем в § 7 отметим некоторые особенности, характерные для многокомпонентной плазмы.

**Уравнения непрерывности и квазинейтральность.** Введем плотность массы  $\rho$  и гидродинамическую скорость  $\mathbf{V}$  (скорость массы):

$$\rho = \sum_a m_a n_a; \quad (6. 1)$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \sum_a m_a n_a \mathbf{V}_a. \quad (6. 2)$$

Пренебрегая массой электронов по сравнению с массой ионов, будем далее приближенно полагать:

$$\rho = m_i n_i; \quad (6. 3)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_i. \quad (6. 4)$$

Уравнение непрерывности для ионов перепишем в виде уравнения сохранения массы (его называют также просто уравнением непрерывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (6. 5)$$

Уравнение (6. 5) справедливо и при точных определениях (6. 1) и (6. 2).

Плотность электрического заряда  $\rho_e$  и плотность электрического тока  $\mathbf{j}$  равны (обозначаем  $\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i$ ):

$$\rho_e = \sum_a e_a n_a = e (Zn_i - n_e); \quad (6. 6)$$

$$\mathbf{j} = \sum_a e_a n_a \mathbf{V}_a = \rho_e \mathbf{V}_i - en_e \mathbf{u}. \quad (6. 7)$$

Из уравнений непрерывности для электронов и ионов получается уравнение сохранения электрического заряда:

$$-\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (6. 8)$$

Будем далее везде предполагать, что плазма квазинейтральна. Это не значит, что в плазме отсутствует объемный заряд, предполагается лишь, что этот заряд очень мал по сравнению с величиной  $en_e$ , так что разностью  $Zn_i - n_e$  можно пренебречь по сравнению с  $n = n_e$ . Плотность тока при этом выразится в виде

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}. \quad (6. 9)$$

Будем рассматривать такие достаточно медленные процессы (в электродинамике их называют квазистационарными), когда в уравнении (6. 8) можно пренебречь  $\partial \rho_e / \partial t$ , а в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения. Тогда уравнение (6. 8) и уравнения Максвелла примут вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad (6. 10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (6. 11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6. 12)$$

Условие квазинейтральности накладывает на величины, описывающие плазму, одну связь:  $Zn_i = n_e$ . Следовательно, из системы уравнений для плазмы одно уравнение должно быть отброшено, а именно уравнение Пуассона, в которое явно входит объемный заряд

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e. \quad (6. 13)$$

Пренебрегая в остальных уравнениях величиной  $\rho_e = e (Zn_i - n_e)$ , мы вместе с тем не накладываем никаких условий на  $\operatorname{div} \mathbf{E}$ . Вихревые электрические поля определяются при этом из уравнения (6. 11), а потенциальные поля, возникающие в результате малой некомпенсации положительных и отрицательных зарядов (сами эти поля не малы!), определяются условием (6. 10) совместно с уравнениями движения. Иными словами, собственные

потенциальные электрические поля в плазме автоматически подбираются именно так, чтобы не допустить слишком сильного разделения зарядов  $Zn_i - n_e$ . Уравнение Пуассона при этом может служить для того, чтобы по известному  $E$  найти  $\varrho_e$ .

Приведем некоторые оценки. По порядку величины из уравнения (6.13) получаем  $\varrho_e \sim E/4\pi L$ . В статической или медленно двиющейся плазме, или в плазме без магнитного поля обычно  $enE \sim \nabla p$  или  $E \sim T/eL$ , откуда получается  $\varrho_e/en \sim \delta_D^2/L^2$ , где  $\delta_D = (T/4\pi en)^{1/2}$  — дебаевская длина, которая всегда очень мала по сравнению с характерными размерами плазмы (в противном случае ионизованный газ принято не называть плазмой). В слоях толщиной  $\sim \delta_D$  квазинейтральность, конечно, может нарушаться. Эти отклонения от квазинейтральности обычно имеют место вблизи границ плазмы, а также при высокочастотных колебаниях. В плазме, движущейся поперек магнитного поля, может возникать также индукционное поле  $E \sim VB/c$ . Пусть мы имеем дело с быстрым процессом (см. далее), в котором скорость плазмы определяется ее инерцией и действующей магнитной силой. Тогда  $\omega qV \sim \frac{1}{c} jB$ , где  $\omega$  — характерная частота процесса. Плотность заряда будет в этом случае порядка  $\varrho_e \sim E/4\pi L \sim (c_A^2/c^2)j/\omega L$ , где  $c_A = B/(4\pi q)^{1/2}$  — так называемая альфвеновская скорость. При этом относительная величина первого члена в уравнении (6.8) порядка  $\omega \varrho_e/(j/L) \sim c_A^2/c^2$ , так что можно пользоваться уравнением (6.10), если  $c_A^2/c^2 = B^2/4\pi qc^2$  мало. В дальнейшем это условие будет считаться выполненным. Пусть, например,  $n_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $m_i = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ ,  $B = 10^4 \text{ гс}$ , тогда  $c_A^2/c^2 \sim 10^{-4}$ .

Условие квазинейтральности может нарушаться для плазмы малой плотности, а также для релятивистской плазмы, где  $V \sim c$  или  $u \sim c$ .

**Уравнение движения.** Сложив уравнения движения для ионов и электронов и пренебрегая инерцией электронов, получим уравнение движения плазмы

$$e \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [jB] + F, \quad (6.14)$$

где  $V = V_i$ ;  $d/dt = \partial/\partial t + (VV)$ ;  $p$  — полное давление, равное

$$p = p_e + p_i. \quad (6.14')$$

В замагниченной плазме в лабораторных условиях основные силы — это градиент давления и магнитная сила. Член  $F$  представляет собой сумму остальных сил, действующих на единицу объема плазмы. В их число входят: сила вязкости  $F_\alpha^\pi = -\frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$ , где  $\pi_{\alpha\beta} = \pi_{i\alpha\beta} + \pi_{e\alpha\beta} \approx \pi_{i\alpha\beta}$  — тензор вязких напряжений, сила тяжести  $F_g = \varrho g$ , существенная во многих астрофизических

проблемах,  $g$  — ускорение силы тяжести. Электрическая сила  $F_E = q_e E$  обычно очень мала по сравнению с остальными.

Магнитную силу для большей наглядности часто бывает полезно выразить через максвелловские напряжения

$$F_{\alpha}^B = -\frac{1}{c} [jB]_{\alpha} = -\frac{\partial T_{\alpha\beta}^B}{\partial x_{\beta}}; \quad T_{\alpha\beta}^B = \frac{1}{4\pi} \left( B_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (6.15)$$

Это выражение легко получается с помощью уравнений (6.12). Тензор  $T_{\alpha\beta}^B$  соответствует давлению  $B^2/8\pi$  поперек магнитных силовых линий и такой же величины натяжению вдоль линий; или, что то же самое, всестороннему давлению  $B^2/8\pi$  и продольному натяжению  $B^2/4\pi$ . Если, например, на границе плазмы имеется касательное поле  $\mathbf{B}$ , которое экранируется токами в поверхностном слое, то давление этого поля  $B^2/8\pi$  передается на экранирующую его плазму. Нормальное к поверхности плазмы поле не может передать плазме свое натяжение, так как магнитные силовые линии не могут обрываться ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ) и непрерывно проходят внутрь плазмы. Натяжение магнитных линий может передаваться плазме, если в ней текут токи, искривляющие силовую линию. Тогда возникает выпрямляющая сила, направленная опять поперек силовой линии. Если  $\mathbf{n}$  — главная нормаль к силовой линии, а  $R$  — ее радиус кривизны, то

$$\mathbf{F}_B = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B^2}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{n}}{R}. \quad (6.15')$$

Давлению  $B^2/8\pi$  в  $1 \text{ кг/см}^2$  соответствует  $B = 5 \cdot 10^3 \text{ гс}$ .

Электрическая сила тоже может быть представлена с помощью максвелловских напряжений. При  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  из уравнения (6.13) получаем\*:

$$F_{\alpha}^E = q_e E_{\alpha} = -\frac{\partial T_{\alpha\beta}^E}{\partial x_{\beta}}; \quad T_{\alpha\beta}^E = \frac{1}{4\pi} \left( E_{\alpha} E_{\beta} - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (6.16)$$

Резко изменяться вблизи границы плазмы может только нормальная компонента электрического поля. Силовые линии при этом оканчиваются на зарядах вблизи поверхности, и на плазму действует не удерживающее ее давление, как в случае магнитного поля, а натяжение (отрицательное давление)  $E^2/8\pi$ . Натяжению в  $1 \text{ кг/см}^2$  соответствует  $E = 1,5 \cdot 10^6 \text{ в/см}$ .

\* В общем случае с учетом токов смещения и  $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$  получается

$$F_{\alpha}^B + F_{\alpha}^E = \frac{1}{c} [jB]_{\alpha} + q_e E_{\alpha} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}^B}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}^E}{\partial x_{\beta}} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial t},$$

где  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$  — вектор Пойнтинга;  $S/c^2$  — это плотность импульса электромагнитного поля.

Если в плазме  $enE \sim \nabla p$ , то  $|\nabla E^2/8\pi|/|\nabla p| \sim \delta_D^2/L^2$ , так что сила  $F_E$  может быть большой только в тонких слоях. Если  $E \sim VB/c$ , то  $E^2/B^2 \sim V^2/c^2$ . Отсюда видно, что в релятивистской плазме электрические силы могут быть того же порядка, что и магнитные.

По относительной роли инерции можно все процессы в плазме разделить на быстрые и медленные. В быстрых процессах инерционный член в уравнении (6.14) того же порядка величины, что и остальные члены — это процессы со сравнительно большими частотами порядка  $c_S/L$  или  $c_A/L$ , где  $c_S \sim (p/\rho)^{1/2}$ ;  $c_A = (B^2/4\pi\rho)^{1/2}$ . В медленных процессах инерция в первом приближении не существенна — плазма неподвижна или движется так медленно, что действующие на нее силы все время почти точно уравновешены. К быстрым процессам относятся различные кратковременные и переходные процессы, а при длительном существовании плазмы — магнитогидродинамические волны. К медленным относятся различные «установившиеся» процессы с характерным временем, значительно превосходящим  $L/c_S$ . Типичным примером быстрого процесса является сжатие плазмы давлением внезапно приложенного к ней магнитного поля — внешнего или созданного током, текущим по плазме (быстрый пинч). Характерная скорость сжатия при этом порядка  $c_A$ .

Для медленных процессов, оставляя в уравнении (6.14) только главные члены, получим:

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (6.17)$$

Это уравнение вместе с уравнениями (6.12) определяет так называемые равновесные магнитогидродинамические конфигурации. Из уравнений (6.17) видно, что  $\mathbf{B}\nabla p = 0$ ;  $\mathbf{j}\nabla p = 0$ . Следовательно, магнитные силовые линии и линии тока лежат на поверхностях постоянного давления. Эти поверхности называют магнитными. Плазму, изолированную магнитным полем (равновесную конфигурацию), можно представлять себе в виде совокупности вложенных одна в другую магнитных поверхностей.

Важным безразмерным параметром, характеризующим эффективность использования магнитного поля для удержания плазмы, является отношение  $8\pi p/B^2$ , где  $p$ ,  $B$  — характерные величины давления и поля. В реальных лабораторных устройствах с медленными процессами эта величина гораздо меньше единицы, так как плазма обычно очень легко теряет тепло.

Разделение процессов на медленные и быстрые, конечно, очень грубо и не исчерпывает всех возможностей. Нам, однако, здесь и в дальнейшем изложении интересуют лишь грубые оценки для первой ориентировки, а не подробная классификация процессов. В конкретных задачах необходим, конечно, более детальный анализ.

**Закон Ома.** Известный закон Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  связывает плотность тока с электрическим полем в тот же момент времени. Электрическое поле определяет ускорение электронов, а не их скорость, поэтому в общем случае такой связи нет. Но в таких процессах, когда все величины мало изменяются за время между столкновениями электронов с ионами, инерция электронов перестает играть роль и действие электрического поля уравнивается при определенной величине  $\mathbf{u} = -\mathbf{j}/en$  трением электронов об ионы. Это условие равновесия электронного газа и дает закон Ома. Аналогично получается закон Ома для плазмы.

Удобно выражать электрическое поле через ток, а не наоборот. Такой способ записи, кроме упрощения формул, лучше соответствует качественной картине явлений в хорошо проводящей плазме, где индуктивное сопротивление больше активного, и внешние условия обычно задают именно ток, а электрическое поле определяется по нему согласно закону Ома.

Пренебрегая в уравнении движения электронов инерцией и вязкостью и пользуясь выражениями (2. 6), (2. 9) или (4. 30), (4. 31) для силы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_u + \mathbf{R}_T$ , получим:

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} + \frac{1}{en_e c} [\mathbf{j}\mathbf{B}], \quad (6. 18)$$

где  $\mathbf{E}'$  — эффективное электрическое поле, равное

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] + \frac{1}{en_e} (\nabla p_e - \mathbf{R}_T). \quad (6. 19)$$

Если выразить  $\mathbf{j}$  через  $\mathbf{E}'$ , то получится:

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E}'_{\parallel} + \frac{\sigma_{\perp}}{1 + \omega_e^2 \tau_e^2} \{ \mathbf{E}'_{\perp} + \omega_e \tau_e [\mathbf{h}\mathbf{E}'] \}. \quad (6. 20)$$

В  $\mathbf{E}'$  входит электрическое поле  $\mathbf{E}^*$  в системе координат, движущейся вместе с веществом (с ионами):

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]. \quad (6. 21)$$

Кроме того,  $\mathbf{E}'$  содержит термоэлектродвижущую силу  $-\mathbf{R}_T/en_e$  и силу электронного давления  $\nabla p_e/en_e$ . Последняя в обычных металлических проводниках не играет роли, так как в них давление электронов постоянно. В плазме же давление электронов может сильно изменяться, поэтому для плазмы этот член может быть весьма существенным.

Если магнитное поле в плазме отсутствует, то  $\mathbf{E}' = \mathbf{j}/\sigma_{\parallel}$ . В сильном магнитном поле ( $\omega_e \tau_e \gg 1$ ) сохраняется такое же соотношение для составляющих вдоль магнитного поля

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{j}_{\parallel}/\sigma_{\parallel}, \quad (6. 22a)$$

но для поперечных составляющих получаются существенные изменения (рис. 6). Эффективное поле  $E'_{\perp}$  почти перпендикулярно к току  $j_{\perp}$ . Проекция поля  $E'_{\perp}$  на ток связана с  $j_{\perp}$  соотношением

$$(E'_{\perp})_j = j_{\perp} / \sigma_{\perp}, \quad (6.22б)$$

не очень сильно отличающимся от выражения (6.22а). Магнитное поле влияет на трение электронов об ионы не очень сильно. Например,  $\sigma_{\perp} \approx \sigma_{\parallel} / 2$  при  $Z = 1$ . Однако для протекания тока поперек магнитного поля необходима составляющая  $E'$ , перпендикулярная к току и к магнитному полю, — так называемое холловское

поле. Оно уравнивает действующую на электроны силу  $\frac{1}{c} [jB]$  и равно

$$E'_{\text{холл}} = \frac{1}{en_e c} [jB] = \frac{\omega_e \tau_e}{\sigma_{\perp}} [jh]. \quad (6.22в)$$

Часто  $E'_{\text{холл}}$  возникает в плазме автоматически вследствие небольшого разделения зарядов в рамках квазинейтральности, а внешнее поле, которое надо прикладывать к плазме, определяется

выражениями (6.22а) и (6.22б). В связи с этим иногда говорят, что магнитное поле не влияет на проводимость плазмы. Это утверждение следует понимать именно в указанном условном смысле.

Закон Ома для плазмы может быть записан в нескольких эквивалентных формах. Часто бывает удобнее вместо уравнения движения электронов воспользоваться уравнением движения ионов и ввести новое эффективное поле  $E''$ , равное

$$E'' = E + \frac{1}{c} [VB] - \frac{1}{en_e} (\nabla p_i + R_T) - \frac{m_i}{Ze} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{en_e} F. \quad (6.23)$$

При этом получится выражение, не содержащее холловского члена:

$$E'' = \frac{j_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}}{\sigma_{\perp}}. \quad (6.24)$$

Это же выражение получится, если исключить из соотношения (6.18) член  $\frac{1}{c} [jB]$  с помощью уравнения движения (6.14). Запись закона Ома для плазмы в форме (6.24) без холловского члена была предложена Шлютером [24]. Такая форма записи особенно удобна в тех случаях, когда можно легко определить  $dV/dt$ , в частности, для медленных процессов, где этот член мал и им в первом приближении можно пренебречь.

Выражения (6.18) и (6.24), хотя и выглядят различно, в действительности эквивалентны, если учесть уравнение движения.



В замагниченной плазме, изолированной магнитным полем, происходит своеобразная инверсия уравнений. Из уравнения (6.14) определяется поперечная компонента тока. Если пренебречь вязкостью, то она равна

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{c}{B} [\mathbf{h} \nabla \rho]. \quad (6.25)$$

Закон Ома, наоборот, определяет скорость плазмы поперек магнитного поля. Подставив выражение (6.25) в формулу (6.24) и опуская  $d\pi_{\alpha\beta}/dx_{\beta}$  и  $dV/dt$ , получим, пренебрегая для простоты  $\mathbf{R}_T$ :

$$\mathbf{V}_{\perp} = \frac{c}{B} \left[ \left( \mathbf{E} - \frac{\nabla p}{en_e} \right) \mathbf{h} \right] - \frac{c^2}{\sigma_{\perp} B^2} \nabla_{\perp} \rho. \quad (6.26)$$

Второй член в выражении (6.26) называют скоростью диффузии плазмы поперек магнитного поля. Заметим, что согласно общепринятой терминологии диффузией называется относительно движение различных компонент сложной плазмы, а формулой (6.26) выражается гидродинамическая скорость плазмы. Желательно поэтому пользоваться другим термином, например «скорость просачивания». Если ток (6.25) поддерживается индукцией, которая выражается членом  $\frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}]$ , то скорость просачивания плазмы сквозь поле дается как раз вторым членом выражения (6.26), пропорциональным поперечному сопротивлению плазмы  $1/\sigma_{\perp}$ .

Порядок величины тока и скорости  $u = -j/en$  определяется уравнением движения. Согласно уравнениям (6.12),  $B'/L \sim 4\pi j/c$ , где  $B'$  — поле, создаваемое токами в плазме. Для быстрых процессов из  $\rho V^2 \sim B'^2/4\pi$  получим  $u^2/V^2 \sim 1/\Pi$ , а для медленных процессов из  $\rho \sim B'^2/4\pi$  получим  $u^2/c_s^2 \sim 1/\Pi$ , где

$$\Pi = \frac{4\pi e^2 n_e^2 L^2}{\rho c^2} = \frac{4\pi Z e^2 n_e L^2}{m_i c^2}. \quad (6.27)$$

Безразмерное число  $\Pi$  пропорционально числу частиц  $nL^2$  на единицу длины системы.

Таким образом, в системах с большим числом частиц скорость электронов «привязана» к скорости ионов не только столкновениями, но и самосогласованным магнитным полем.

Характерные частоты быстрых процессов имеют порядок величины  $c_A/L \sim \omega_i/\Pi^{1/2}$ . Если  $\Pi \gg 1$ , то они малы по сравнению с циклотронной частотой ионов.

Для быстрых процессов, оценивая по порядку величины различные члены в законе Ома при  $\Pi \gg 1$ ,  $\omega \ll \omega_i$ ,  $L \gg r_i$  легко получить, что главные члены в эффективном поле — это

$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]$ . При редких столкновениях, отбросив также  $\mathbf{j}/\sigma$ , можно в первом приближении записать закон Ома в виде:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] = 0. \quad (6.28)$$

Исключив электрическое поле с помощью уравнения (6.28), получим уравнение индукции в приближении идеальной магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V}\mathbf{B}]. \quad (6.29)$$

Это уравнение имеет наглядную интерпретацию: магнитные силовые линии как бы приклеены к веществу и двигаются вместе с ним со скоростью  $\mathbf{V}$ . Уравнение (6.29) часто используется при рассмотрении колебаний и устойчивости плазмы.

Уравнение индукции, полученное из выражения (6.18) с учетом всех членов, имеет громоздкий вид\*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V}\mathbf{B}] - \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}}{en_e} \mathbf{B} \right] - \frac{c}{en} [\nabla n \nabla T] - \\ - \frac{c}{e} \text{rot} \frac{\mathbf{R}_T}{n_e} - c \text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Часто вместо него пользуются следующим упрощенным уравнением с изотропной и однородной проводимостью:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V}\mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (6.31)$$

Здесь использованы уравнения (6.12) и  $\text{rot rot } \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$ . Это уравнение описывает скин-эффект; оно учитывает, что силовые

\* Исключая из уравнения (6.30)  $[\mathbf{j}\mathbf{B}]$  с помощью уравнения движения или пользуясь сразу соотношением (6.24), можно с помощью преобразования  $\text{rot } d\mathbf{V}/dt = \partial \text{rot } \mathbf{V}/\partial t - \text{rot} [\mathbf{V} \text{rot } \mathbf{V}]$  получить уравнение индукции в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{B} + \frac{m_i c}{Ze} \text{rot } \mathbf{V} \right) = \text{rot} \left[ \mathbf{v} \left( \mathbf{B} + \frac{m_i c}{Ze} \text{rot } \mathbf{V} \right) \right] + \\ + \frac{c}{Zen} [\nabla n \nabla T_i] - (c/en_e) \text{rot} \left( \mathbf{F}_i^{\pi} + \mathbf{R}_T \right) - c \text{rot} \left( \mathbf{j}_{\parallel} / \sigma_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} / \sigma_{\perp} \right), \end{aligned} \quad (6.30')$$

где

$$F_{i\alpha}^{\pi} = -\partial \pi_{i\alpha\beta} / \partial x_{\beta}.$$

Если здесь можно пренебречь последними тремя членами в правой части, то «приклеены» к веществу линии  $\mathbf{B} + (m_i c/e_i) \text{rot } \mathbf{V}$ , но при  $\Pi \gg 1$ ,  $\omega \ll \omega_i$  получается  $|\text{rot } \mathbf{V}| \ll e_i B / m_i c$ , и можно считать «приклеенными» линии  $\mathbf{B}$ . При  $B = 0$  отсюда получается известная из обычной гидродинамики теорема о «приклеенности» вихревых линий [3].

линии не полностью приклеены и просачиваются сквозь вещество с коэффициентом диффузии  $D_m$ , равным

$$D_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \quad (6.32)$$

Это тот же самый процесс, что и просачивание плазмы через магнитное поле, описываемое последним членом в выражении (6.26). При  $\rho \sim B^2/4\pi$  скорость просачивания порядка  $D_m/L$ . При  $\rho \ll B^2/4\pi$  из выражения (6.26) видно, что скорость просачивания порядка  $(4\pi\rho/B^2) D_m/L$ . Этот же результат получается, конечно, и из формулы (6.32), если учесть, что относительная величина градиента поля имеет порядок  $B'/LB \sim 4\pi\rho/B^2L$ , где  $B'$  — разность полей снаружи и внутри плазмы — определяется условием равновесия плазмы  $BB'/4\pi \sim \rho$ , поэтому скорость просачивания поля  $\sim D_m B'/LB \sim (4\pi\rho/B^2) D_m/L$ .

Если в результате турбулентности уменьшается эффективное значение  $\sigma_{\perp}$ , то, согласно выражению (6.26), просачивание плазмы через магнитное поле происходит быстрее — это так называемая «аномальная диффузия».

**Уравнения переноса энергии и тепла.** В тех случаях, когда температуры электронов и ионов различаются сильно, для них приходится пользоваться отдельными уравнениями баланса тепла, приведенными в предыдущих параграфах. Если же обмен теплом между электронами и ионами достаточно интенсивен, так что относительная разность температур мала  $|T_e - T_i| \ll T$ , то можно пользоваться одним суммарным уравнением, положив  $T_e = T_i = T$ .

Температуры ионов и электронов могут сильно различаться, если в одном из этих газов выделяется гораздо больше тепла, чем в другом. Джоулево тепло, например, выделяется в электронном газе. Если приравнять по порядку величины  $Q_{дж}$  передаче тепла ионам  $Q_{\Delta}$ , то получим разность температур, обеспечивающую эту передачу. Грубая оценка дает

$$\frac{(T_e - T_i)_{дж}}{T} \sim \frac{j^2 m_i}{e^2 n^2 T} \sim \frac{u^2}{v_i^2} \quad \text{или} \quad \frac{(T_e - T_i)_{дж}}{T} \sim \frac{1}{\Pi} \frac{B'^2}{4\pi\rho}.$$

Здесь использовано соотношение  $(4\pi/c) j \sim B'/L$ , где магнитное поле  $B'$  создается токами в плазме. В медленных процессах, где основным источником нагрева является джоулево тепло, есть тенденция к превышению температуры электронов над температурой ионов.

С другой стороны, выделение тепла вследствие вязкости происходит в основном в ионном газе, так как ионная вязкость гораздо больше электронной. Приравняв по порядку величины  $Q_{вяз} \sim \eta V^2/L^2 \sim Q_{\Delta}$ , получим соответствующую разность температур. Если играет роль «продольная» вязкость  $\eta_0$ , то

$$\frac{(T_i - T_e)_{вяз}}{T} \sim \frac{m_i}{m_e} \frac{V^2 \tau_i \tau_e}{L_{\parallel}^2} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{V \tau_i}{L_{\parallel}}\right)^2 \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{l}{L_{\parallel}} \frac{V}{v_i}\right)^2$$

и если играет роль «поперечная» вязкость  $\eta_{1,2} \sim \eta_0 / \omega_i^2 \tau_i^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{(T_i - T_e)_{\text{вяз}}}{T} &\sim \frac{m_i \tau_e}{m_e \tau_i} \left( \frac{m_i V c}{e B L_{\perp}} \right)^2 \sim \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left( \frac{m_i V c}{e B L_{\perp}} \right)^2 \sim \\ &\sim \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left( \frac{r_i}{L_{\perp}} \frac{V}{v_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Кроме того, скорость сильных ударных волн в плазме больше ионной тепловой скорости, но обычно меньше электронной, поэтому сильный нагрев в ударных волнах испытывают только ионы. Таким образом, в тех случаях, когда основным источником нагрева является диссипация энергии, связанная с движениями плазмы (ударные волны, сильные колебания плазмы вследствие неустойчивости и т. д.), больше тепла выделяется в ионном газе и температура ионов может быть выше температуры электронов.

Если можно с достаточной точностью принять  $T_e = T_i = T$ , то вместо энергетических уравнений для электронов и для ионов по отдельности удобнее пользоваться общим балансом энергии. Сложив уравнения переноса энергии (1. 20) для ионов и электронов, учитывая соотношения (1. 24) и пренебрегая инерцией электронов, получим уравнение переноса энергии для плазмы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varrho V^2 + \frac{3}{2} p \right) + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left\{ \left( \frac{1}{2} \varrho V^2 + \frac{5}{2} p \right) V_{\beta} + \right. \\ \left. + \pi_{\alpha\beta} V_{\alpha} + q_{\beta} \right\} = \mathbf{E} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (6. 33)$$

Здесь  $\rho = \rho_e + \rho_i$ ;

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i + \frac{5}{2} p_e \mathbf{u}. \quad (6. 33')$$

Из уравнений Максвелла (6. 11) и (6. 12) получается уравнение энергии для поля (теорема Пойнтинга в приближении  $E \ll B$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{8\pi} + \text{div } \mathbf{S} = - \mathbf{E} \mathbf{j}, \quad (6. 34)$$

где  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{B}]$  — вектор Пойнтинга.

Сложив уравнения (6. 33) и (6. 34), получим закон сохранения полной энергии в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{\text{полн}}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q}_{\text{полн}} &= 0; \\ \varepsilon_{\text{полн}} &= \frac{1}{2} \varrho V^2 + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{8\pi}; \\ \mathbf{q}_{\text{полн}} &= \left( \frac{1}{2} \varrho V^2 + \frac{5}{2} p \right) \mathbf{V}_{\beta} + \pi_{\alpha\beta} V_{\alpha} + q_{\beta} + S_{\beta}. \end{aligned} \quad (6. 35)$$

Складывая уравнения (1. 23) для электронов и ионов с учетом соотношений (1.24) и  $\text{div}(n_e \mathbf{u}) = 0$  или исключая из уравнения (6. 33) кинетическую энергию и пользуясь законом Ома (6. 18), получим уравнение баланса тепла для плазмы:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div} \left( \frac{3}{2} p \mathbf{V} \right) + p \text{div} \mathbf{V} = - \text{div} \mathbf{q} + \mathbf{u} \nabla p_e + \Sigma Q. \quad (6. 36)$$

Здесь правая часть уравнения содержит сумму всех источников тепла, включая нагрев от вязкости:  $\Sigma Q = -\mathbf{R}\mathbf{u} + Q_{\text{вяз}}$ .

Изменение энергии осуществляется макромеханизмами (перенос со скоростью  $\mathbf{V}$  и работа давления) и микромеханизмами (теплопроводность, вязкость и т. д.). Микромеханизмы и соответствующие им члены в уравнениях энергии и тепла называют диссипативными. Они увеличивают энтропию плазмы и вызывают переход механической энергии в тепло. Энтропия плазмы, как и всякого одноатомного газа, в расчете на одну частицу равна с точностью до несущественной постоянной  $\ln(T^{3/2}/n)$  или  $\ln(p^{3/2}/q^{5/2})$ . Из уравнения (6. 36) непосредственно видно, что в отсутствие диссипативных процессов энтропия сохраняется.

Заметим, что левая часть уравнения (6. 36) может быть с помощью уравнения непрерывности переписана в виде

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} - \frac{5}{2} \frac{p}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{3}{2} p \frac{d}{dt} \ln(p/q^\gamma),$$

где  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты для одноатомного газа.

Относительная роль диссипативных процессов тем меньше, чем больше размер системы, так как осуществляемый ими перенос энергии имеет диффузионный характер. Если времена диссипативных процессов ( $L^2/D_m$  — для электрического сопротивления,  $L^2 n/\kappa$  — для теплопроводности,  $L^2 q/\eta$  — для вязкости и т. д.) велики по сравнению с обратными величинами частот движений в плазме:  $1/\omega$  или  $L/V$ , то диссипативные члены малы. При этом можно в первом приближении считать процесс адиабатическим и принять

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{q^\gamma} = 0. \quad (6. 37)$$

Диссипативные процессы увеличивают энтропию и вызывают затухание всевозможных макроскопических движений в плазме, магнитогидродинамических волн и т. д.

Уравнение баланса энтропии для плазмы получим, сложив уравнения (1. 23') для электронов и для ионов:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \text{div} \left\{ S\mathbf{V} + S_e \mathbf{u} + \frac{q_e + q_i}{T} \right\} = 0; \quad (6. 38)$$

$$T\theta = -(q_e + q_i) \nabla \ln T + \Sigma Q. \quad (6. 39)$$

Здесь  $S = S_e + S_i = n_e \ln(T^{3/2}/n_e) + n_i \ln(T^{3/2}/n_i)$  — энтропия

плазмы на единицу объема. Величина  $\theta$  называется рождением энтропии. Легко убедиться, что она всегда положительна, т. е. диссипативные процессы действительно вызывают монотонное увеличение энтропии. В  $T\theta$  входит джоулево тепло  $j_{\parallel}^2/\sigma_{\parallel} + j_{\perp}^2/\sigma_{\perp}$  и вязкое тепло  $-\frac{1}{2} \pi_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}$ , которое тоже всегда положительно.

## § 7. Многокомпонентная плазма

**Диффузия в тройной смеси.** В качестве простейшей модели неполностью ионизованного газа можно представить себе тройную смесь, содержащую электроны, один сорт ионов и один сорт нейтральных частиц. Движение этих компонент можно определить тремя скоростями:  $V_e$ ,  $V_i$  и  $V_n$  или общей гидродинамической скоростью  $V$ , приближенно равной

$$V = \frac{1}{\rho} (m_i n_i V + m_n n_n V_n), \quad (7.1)$$

и двумя относительными скоростями, в качестве которых можно выбрать, например,

$$u = V_e - V_i; \quad w = V_i - V_n. \quad (7.2)$$

В случае простой плазмы имеется одно уравнение для относительной скорости — закон Ома, в случае тройной смеси необходимы два уравнения: для скорости диффузии  $w$  и для токовой скорости  $u = -j/en_e$ .

Для определения диффузионных скоростей следовало бы решить систему трех кинетических уравнений и найти локальные функции распределения для всех компонент [12]. Можно, однако, получить приближенные результаты более простым, хотя и более грубым способом, если воспользоваться уравнениями движения отдельных компонент (1. 14). Сила трения получается от взаимодействия частиц данного сорта со всеми остальными:  $R_a = \sum_b R_{ab}$ .

Силу  $R_{ab} = -R_{ba}$  можно приближенно вычислить, сделав предположение, что компоненты  $a$  и  $b$  имеют максвелловские распределения со скоростями  $V_a$  и  $V_b$ . В результате получаем:

$$R_{ab} = -\alpha_{ab} (V_a - V_b); \quad \alpha_{ab} = \alpha_{ba}. \quad (7.3)$$

Коэффициент трения  $\alpha_{ab}$ , очевидно, пропорционален  $n_a n_b$ , а также приведенной массе сталкивающихся частиц  $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$  и коэффициенту  $\alpha'_{ab}$ , равному по порядку величины  $v\sigma$ , где  $v$  и  $\sigma$  — характерные значения относительной скорости и эффективного сечения сталкивающихся частиц:

$$\alpha_{ab} = n_a n_b m_{ab} \alpha'_{ab}. \quad (7.4)$$

Вычисление  $\alpha_{ab}$  приведено в приложении, его можно также найти в работе [1]. Пусть  $T_a = T_b = T$ . Если сечение рассеяния [здесь играет роль так называемое транспортное сечение  $\sigma' = \int (1 - \cos \theta) d\sigma(\theta)$ ] обратно пропорционально относительной скорости  $\sigma'_{ab}(v) = \alpha'_{ab}/v$ , то непосредственно получается выражение (7. 4). Для твердых гладких шариков с радиусами  $r_a$  и  $r_b$  сечение равно  $\sigma_{ab} = \pi (r_a + r_b)^2$ . Для них

$$\alpha'_{ab} = \frac{4}{3} \sigma_{ab} \left( \frac{8}{\pi} \frac{T}{m_{ab}} \right)^{1/2}. \quad (7. 5)$$

Для ионов с зарядами  $e_a, e_b$  [сравни формулу (2. 5e)]

$$\alpha'_{ab} = \frac{4\sqrt{2\pi}\lambda e_a^2 e_b^2}{3\sqrt{m_{ab}T^{3/2}}}. \quad (7. 6)$$

Выражение (7. 3) не учитывает возможную в магнитном поле анизотропию коэффициента трения, а также термосилу, и поэтому не дает термодиффузию. В простых случаях эти эффекты можно оценить по порядку величины, как в § 3.

Уравнения движения компонент, пользуясь выражениями (7. 2) и (7. 3) и пренебрегая инерцией электронов, запишем в виде:

$$-\nabla p_e - en_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e \mathbf{B}] \right) = -\alpha_e \frac{\mathbf{j}}{en_e} + \alpha_{en} \mathbf{w}; \quad (7. 7e)$$

$$-m_i n_i \frac{d_i \mathbf{V}_i}{dt} - \nabla p_i + en_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{B}] \right) = \alpha_{ei} \frac{\mathbf{j}}{en_e} + \alpha_{in} \mathbf{w}; \quad (7. 7i)$$

$$-m_n n_n \frac{d_n \mathbf{V}}{dt} - \nabla p_n = \alpha_{en} \frac{\mathbf{j}}{en_e} - \alpha_n \mathbf{w}. \quad (7. 7n)$$

Здесь подставлено  $\mathbf{u} = -\mathbf{j}/en_e$  и введены обозначения:

$$\alpha_e = \alpha_{ei} + \alpha_{en} = m_e n_e / \tau_e; \quad \tau_e = \left( \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{en}} \right)^{-1}; \quad (7. 8)$$

$$\alpha_n = \alpha_{in} + \alpha_{in} = \alpha_{in} / (1 - \varepsilon); \quad \varepsilon = \alpha_{en} / \alpha_n. \quad (7. 9)$$

Более точно в уравнениях (7. 7) вместо  $\nabla p_a$  ( $a = e, i, n$ ) следовало бы писать с учетом вязкости  $\partial P_{\alpha\alpha\beta} / \partial x_\beta = \partial p_a / \partial x_\alpha + \partial \pi_{\alpha\alpha\beta} / \partial x_\beta$ , но далее вязкостью мы все же будем пренебрегать.

Коэффициент трения  $\alpha_n$  между плазмой и нейтральным газом обусловлен в основном столкновениями тяжелых частиц, так как они приводят к большей передаче импульса, поэтому обычно

$$\alpha_n \approx \alpha_{in}; \quad \varepsilon = \alpha_{en} / \alpha_n \approx (m_e / m_{in}) (\alpha'_{en} / \alpha'_{in}) \ll 1.$$

Складывая уравнения (7. 7e) и (7. 7i), получим уравнение движения для ионизованных частиц. При этом электрическое поле выпадает:

$$-m_i n_i \frac{d_i V_i}{dt} - \nabla (p_e + p_i) + \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] = -\alpha_{en} \frac{\mathbf{j}}{en_e} + \alpha_n \mathbf{w}. \quad (7. 7p)$$

Суммирование уравнений (7. 7n) и (7. 7p) дает общее уравнение движения.

Если столкновения редки, то удобнее пользоваться отдельными уравнениями движения для нейтральных и для ионизованных частиц, так как только столкновения «привязывают» их скорости друг к другу (строго говоря, при редких столкновениях надо пользоваться кинетическими уравнениями). Если же столкновения часты и применимо гидродинамическое описание, то удобнее пользоваться общим уравнением движения для  $\mathbf{V}$  и уравнениями для относительных скоростей. Рассмотрим далее второй случай. При этом в инерционных членах заменим  $d_i V_i/dt$  и  $d_n V_n/dt$  на  $d\mathbf{V}/dt$ , что соответствует пренебрежению членами порядка  $d\mathbf{w}/dt$  по сравнению с членами порядка  $\mathbf{w}/\tau$ , содержащимися в силе трения. Вязкостью тоже пренебрегаем.

В разных работах, например [7, 25, 29], различным образом преобразуются уравнения (7. 7) и получаются различные выражения для относительных скоростей, удобные для тех или иных задач. Скорость диффузии плазмы относительно нейтралов  $\mathbf{w}$  можно определить, например, из уравнений (7. 7n) и (7. 7p). Исключив из этих двух уравнений инерционный член, можно получить выражение для  $\mathbf{w}$  в виде

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\alpha_n} \left\{ -\mathbf{G} + \frac{\xi_n}{c} [\mathbf{jB}] \right\} + \frac{e\mathbf{j}}{en_e}, \quad (7. 10)$$

где

$$\mathbf{G} = \xi_n \nabla (p_e + p_i) - \xi_i \nabla p_n. \quad (7. 11)$$

Здесь введены относительные концентрации

$$\xi_n = m_n n_n / Q; \quad \xi_i = m_i n_i / Q; \quad \xi_n + \xi_i = 1.$$

Если  $T_i = T_n = T$ ,  $m_i = m_n$ , то  $\mathbf{G} = \xi_n \nabla p_e + (p_i + p_n) \nabla \xi_i$ ;  $p_i + p_n = TQ/m_i$ .

Закон Ома можно получить, например, исключая  $\mathbf{w}$  из уравнения движения для электронов (7. 7e) с помощью выражения (7. 10):

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{B}] + \frac{1}{en_e} (\nabla p_e - e\mathbf{G}) = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{1 - e\xi_n}{en_e c} [\mathbf{jB}], \quad (7. 12)$$

где

$$\sigma = e^2 n_e^2 \left( \alpha_{ei} + \frac{\alpha_{en} \alpha_{in}}{\alpha_{en} + \alpha_{in}} \right)^{-1} \approx \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}. \quad (7. 13)$$



Соотношение (7.12) очень близко к выражению (6.18), так как  $\varepsilon \ll 1$ , но содержит сопротивление  $1/\sigma$ , которое определяется полной частотой столкновений электронов  $1/\tau_e$ . Если исключить из выражения (7.12) член  $[\mathbf{j}\mathbf{B}]$  с помощью общего уравнения движения, то получим закон Ома в той форме, которая была ему придана Шлютером [25].

Иногда удобнее, чтобы в записи закона Ома содержалось электрическое поле  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]$  в системе координат, движущейся со скоростью всего вещества  $\mathbf{V}$ . Пользуясь соотношением  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V} + \xi_n \mathbf{w}$  и выражением (7.10), получим из уравнения (7.12)

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] + \frac{1}{en_e} (\nabla p_e - \varepsilon \mathbf{G}) - \frac{\xi_n}{\alpha_n c} [\mathbf{G}\mathbf{B}] = \frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}^*} + \frac{1-2\varepsilon\xi_n}{en_e c} [\mathbf{j}\mathbf{B}], \quad (7.14)$$

где

$$\sigma_{\parallel} = \sigma; \quad \frac{1}{\sigma_{\perp}^*} = \frac{1}{\sigma} + \frac{\xi_n^2 B^2}{\alpha_n c^2}. \quad (7.15)$$

При  $m_i = m_n$ ,  $\varepsilon \ll 1$  получаем:  $\sigma/\sigma_{\perp}^* = 1 + 2\xi_n \omega_e \tau_e \omega_i \bar{\tau}_{in}$ , где

$$1/\bar{\tau}_{in} = \alpha'_{in} (n_i + n_n).$$

Поступая так же, как при выводе выражения (6.26), и пользуясь уравнением (7.12), получим, что при наличии нейтралов скорость просачивания изолированной магнитным полем плазмы поперек магнитных поверхностей (соответствующий член в  $\mathbf{V}_i$ ) равна  $-(c^2/\sigma B^2) \nabla p$ , где  $\sigma$  выражается формулой (7.13),  $p$  — полное давление.

Закон Ома в форме (7.14) был записан Каулингом [7]. В него входит эффективное поперечное сопротивление  $1/\sigma_{\perp}^*$ , которое в сильном магнитном поле может быть во много раз больше продольного. Этот эффект объясняется тем, что протекание тока поперек магнитного поля вызывает движение плазмы относительно нейтрального газа, что из-за большого коэффициента трения между ионами и нейтралами приводит к большой диссипации энергии. Следует, однако, учитывать, что в некоторых случаях, особенно для медленных процессов, когда давление плазмы почти уравновешено магнитной силой, в выражении (7.10) члены в фигурных скобках могут в значительной степени компенсировать друг друга, и тогда в уравнении (7.14) последний член слева будет компенсировать член  $\mathbf{j}_{\perp}/\sigma_{\perp}^*$ .

Большое различие между выражениями (7.12) и (7.14), куда входят  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{B}]$  и  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]$ , показывает, насколько

важно при определении электрического поля в присутствии магнитного четко представлять, к какой системе координат относится электрическое поле, так как оно может сильно измениться даже при небольшом изменении скорости системы координат.

Рассмотрим диссипацию энергии в смеси  $e, i, n$  вследствие трения. Полное тепло, выделяющееся от трения, равно  $Q_{\text{тр}} = Q_e + Q_i + Q_n$ . Учитывая общее соотношение (1. 24), его можно записать в виде  $Q_{\text{тр}} = -\mathbf{R}_{ei}\mathbf{u} - \mathbf{R}_{en}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \mathbf{R}_{in}\mathbf{w}$ . Пользуясь выражением (7. 3), получим:

$$\begin{aligned} Q_{\text{тр}} &= \alpha_{ei}u^2 + \alpha_{en}(\mathbf{u} + \mathbf{w})^2 + \alpha_{in}w^2 = \\ &= \alpha_e u^2 + \alpha_n w^2 + 2\alpha_{en}\mathbf{u}\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (7. 16)$$

С помощью выражений (7. 10) и (7. 13) можно преобразовать выражение (7. 16) к виду

$$Q_{\text{тр}} = \frac{j^2}{\sigma} + \frac{1}{\alpha_n} \left( \frac{\xi_n}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] - \mathbf{G} \right)^2. \quad (7. 17)$$

Если ток течет вдоль магнитного поля (или  $B = 0$ ), то из-за большого коэффициента трения тяжелых частиц получается  $w \sim \varepsilon u \ll \ll u$ , поэтому диссипация от трения тяжелых частиц мала:  $\alpha_n w^2 \sim \sim \varepsilon \alpha_e u^2$ . Если же ток течет поперек магнитного поля, то возможна сильная диссипация от столкновений ионов с нейтралами.

В случаях, когда можно пренебречь  $\mathbf{G}$ , например, если плазма холодная или если степень ионизации очень мала, из выражения (7. 17) получается  $Q_{\text{тр}} = j_{\parallel}^2/\sigma + j_{\perp}^2/\sigma_1^*$ .

Полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов ( $a = e$ ) и двух разных сортов ионов ( $a = 1, 2$ ), дает еще один важный пример тройной смеси. Такой смесью является, например, водородная плазма, содержащая ионы посторонней примеси, ионизованная смесь дейтерия и трития и т. д.

Плотность и гидродинамическая скорость в такой плазме приближенно равны:

$$\rho = m_1 n_1 + m_2 n_2; \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} (m_1 n_1 \mathbf{V}_1 + m_2 n_2 \mathbf{V}_2). \quad (7. 18)$$

Плотность тока выражается в виде суммы электронной и ионной составляющих:

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{u}_e + \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \rho \xi_1 \xi_2 \mathbf{w}, \quad (7. 19)$$

где введены

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}; \quad \mathbf{w} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 \quad (7. 20)$$

и относительные концентрации  $\xi_1 = m_1 n_1 / \rho$  и  $\xi_2 = m_2 n_2 / \rho$ , которые входят в выражения  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} + \xi_2 \mathbf{w}$  и  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V} - \xi_1 \mathbf{w}$ .

Система уравнений для компонент имеет вид:

$$m_1 n_1 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p_1 + e_1 n_1 \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_1 \mathbf{B}] \right) - \alpha_{12} \mathbf{w} - \alpha_{1e} (\xi_2 \mathbf{w} - \mathbf{u}_e); \quad (7.21)$$

$$m_2 n_2 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p_2 + e_2 n_2 \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_2 \mathbf{B}] \right) + \alpha_{12} \mathbf{w} + \alpha_{2e} (\xi_1 \mathbf{w} + \mathbf{u}_e); \quad (7.22)$$

$$0 = -\nabla p_e - e n_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e \mathbf{B}] \right) + (\alpha_{e1} \xi_2 - \alpha_{e2} \xi_1) \mathbf{w} - \alpha_e \mathbf{u}_e. \quad (7.23)$$

Здесь заменено  $d_a \mathbf{V}_a / dt$  на  $d\mathbf{V} / dt$ ,  $\partial P_{\alpha\alpha\beta} / \partial x_\beta$  на  $\partial p_\alpha / \partial x_\alpha$  и обозначено:

$$\alpha_e = \alpha_{e1} + \alpha_{e2} = m_e n_e / \tau_e; \quad 1/\tau_e = 1/\tau_{e1} + 1/\tau_{e2}. \quad (7.24)$$

Пользуясь этой системой уравнений, можно найти относительные скорости и получить закон Ома и выражение для  $\mathbf{w}$ , которые в общем случае довольно громоздки [10а, 10б].

Если  $T_i$  не превышает слишком сильно  $T_e$ , то можно считать  $\alpha_{12} \gg \alpha_{e1}, \alpha_{e2}$ . Например, при  $T_i \sim T_e$  получается  $\alpha_{12} \sim (m_i/m_e)^{1/2} \alpha_e$ .

При  $B = 0$  из-за большой величины  $\alpha_{12}$  получается  $\omega \ll u_e$ , так что ток переносится в основном электронами, и закон Ома можно записать приближенно в виде

$$\mathbf{E} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}; \quad (7.25)$$

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}. \quad (7.26)$$

То же самое справедливо для компонент вдоль магнитного поля.

Поперек сильного магнитного поля ионы из-за большей массы двигаются легче электронов, поэтому ионная составляющая тока поперек магнитного поля может быть велика, особенно в быстрых процессах. Рассмотрим некоторые соотношения между поперечными составляющими для случая, когда  $\omega_i \tau_i$  велико. В этом случае можно в первом приближении пренебречь столкновениями, а затем учесть их как малую поправку. Например, можно написать  $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{w}^{(2)}$ , где  $\mathbf{w}^{(1)}$  может быть найдено, если пренебречь столкновениями. Разделим уравнение (7.21) на  $e_1 n_1$ , а уравнение (7.22) на  $e_2 n_2$  и вычтем одно из другого. Отбросив силы трения и выражая  $\mathbf{w}$ , получим:

$$\mathbf{w}^{(1)} = \frac{c}{B} \left[ \mathbf{h} \left( \frac{\nabla p_1}{e_1 n_1} - \frac{\nabla p_2}{e_2 n_2} \right) \right] + \frac{c}{B} \left( \frac{m_1}{e_1} - \frac{m_2}{e_2} \right) \left[ \mathbf{h} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right]. \quad (7.27)$$

Электрическое поле отсюда выпало. Значок  $\perp$  опускаем. Учитывая только трение между ионами и подставляя в член  $\alpha_{12}w$  выражение (7. 27), получим:

$$w^{(2)} = - \frac{m_{12}c^2\alpha'_{12}n_e}{e_1e_2B^2} \left\{ \left( \frac{\nabla p_1}{Z_1 n_1} - \frac{\nabla p_2}{Z_2 n_2} \right) + \left( \frac{m_1}{Z_1} - \frac{m_2}{Z_2} \right) \frac{dV}{dt} \right\}, \quad (7. 28)$$

где  $Z_1 = e_1/e$ ;  $Z_2 = e_2/e$ .

Аналогично можно выразить  $u_e = u_e^{(1)} + u_e^{(2)}$ , пользуясь уравнением (7. 23) и исключая электрическое поле  $E^* = E + c^{-1} [VB]$ .

Рассмотрим установившийся медленный процесс в плазме, изолированной магнитным полем, когда можно пренебречь инерцией.

Оценка членов выражения (7. 28) показывает, что скорость диффузии  $w^{(2)}$  в  $\sim (\alpha_{12}/\alpha_e) \sim (m_i/m_e)^{1/2}$  раз больше, чем скорость просачивания (6. 26) для простой плазмы. Возникает вопрос: не увеличивается ли в  $\sim (m_i/m_e)^{1/2}$  раз и скорость просачивания плазмы с разными сортами ионов по сравнению с простой плазмой из-за сильного трения между разными ионами? В установившемся процессе этого в действительности не происходит, так как скорость электронов поперек магнитной поверхности  $u_e^{(2)}$  по-прежнему остается порядка  $c^2\rho/\sigma B^2L$ , где  $\sigma$  выражается формулой (7. 26). Ток поперек магнитных поверхностей равен нулю, поэтому должно быть  $w^{(2)} \sim u_e^{(2)}$ . Следовательно, в плазме установится такое распределение ионов, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\nabla p_1}{e_1 n_1} - \frac{\nabla p_2}{e_2 n_2} \sim \frac{\alpha_e}{\alpha_{12}} \approx 0. \quad (7. 29)$$

Процесс установления идет со скоростью в  $\sim (m_i/m_e)^{1/2}$  раз большей скорости просачивания, после чего  $w^{(1)}$  станет малой,  $w^{(1)} \sim (\alpha_e/\alpha_{12}) u_e^{(1)}$ , и большой силы трения между ионами не будет. Из условия (7. 29) видно, что при этом ионы с большим зарядом будут концентрироваться в области плазмы с большей плотностью, например при  $T_1 = T_2 = T$  и  $\nabla T = 0$  будет больцмановское распределение  $\frac{1}{e_1} \nabla \ln n_1 = \frac{1}{e_2} \nabla \ln n_2$ .

**Диффузия в слабо ионизованном газе.** Обозначим  $u_a$  диффузионную скорость компоненты  $a$ , равную

$$u_a = V_a - V; \quad \sum_a m_a n_a u_a = 0, \quad (7. 30)$$

где  $V$  определяется выражением (6. 2). Уравнение движения компоненты  $a$ , пользуясь уравнением (1. 14) и заменяя  $d_a V_a/dt$  на  $dV/dt$ ,  $dP_{\alpha\beta}/dx_\beta$  на  $\partial p_\alpha/\partial x_\alpha$ , можно записать в виде

$$m_a n_a \frac{dV}{dt} = -\nabla p_a + e_a n_a \left( E^* + \frac{1}{c} [u_a B] \right) - \sum_b \alpha_{ab} (u_a - u_b). \quad (7. 31)$$

Рассмотрим случай, когда число ионизованных частиц во много раз меньше числа нейтральных, так что в силе трения достаточно

учитывать только член  $\mathbf{R}_{an}$  — трение о нейтральный газ. Эффективное сечение столкновений электронов с ионами гораздо больше, чем с нейтралами (например, для водорода при  $T_e = 1$  эв получается  $\alpha_{ei}/\alpha_{en} \sim 10^2 n_i/n_{H_2}$ ). Поэтому пренебрегать столкновениями электронов с ионами можно лишь в случае, когда число нейтральных частиц на несколько порядков превышает число ионов (более точная оценка зависит от температуры электронов и от рода газа). Гидродинамическую скорость можно при этом считать совпадающей со скоростью нейтрального газа  $\mathbf{V} \approx \mathbf{V}_n$ ,  $\mathbf{u}_n \approx 0$ . Уравнение (7. 31) будет далее рассматриваться для частиц всех сортов  $a$ , кроме основной нейтральной компоненты. То же самое относится к встречающимся ниже суммам по  $a$ . Скорость  $\mathbf{V}$  определяется общим уравнением движения, где может играть роль и вязкость. Силу трения в уравнении (7. 31) можно записать в виде  $\mathbf{R}_a = -\alpha_{an}\mathbf{u}_a$ .

Пусть  $B = 0$ . Тогда из уравнения (7. 31) получим

$$\mathbf{u}_a = b_a(e_a\mathbf{E} - \mathbf{G}_a/n_a) = b_a \left( e_a\mathbf{E} - m_a \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) - D_a \nabla \ln p_a, \quad (7. 32)$$

где

$$\mathbf{G}_a = \nabla p_a + m_a n_a \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \quad (7. 33)$$

Коэффициенты подвижности  $b_a$  и диффузии  $D_a$  частиц  $a$  равны

$$b_a = \frac{n_a}{\alpha_{an}} = \frac{\tau_a}{m_{an}}; \quad D_a = \frac{\tau_a}{m_{an}} T_a, \quad \text{где } \tau_a = \frac{\alpha'_{an}}{n_n}. \quad (7. 34)$$

Эти коэффициенты связаны так называемым соотношением Эйнштейна

$$D_a = b_a T_a. \quad (7. 34')$$

Последний член в выражении (7. 32) пропорционален  $\nabla n_a/n_a + \nabla T_a/T_a$ , но учет термосилы может изменить коэффициент при  $\nabla T_a$  (см. сноску на стр. 201).

Плотность тока с учетом квазинейтральности равна  $\mathbf{j} = \sum e_a n_a \mathbf{u}_a$ . Согласно выражению (7. 32)

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \sum_a e_a b_a \mathbf{G}_a, \quad (7. 35)$$

где

$$\sigma = \sum_a e_a^2 n_a b_a. \quad (7. 36)$$

При наличии магнитного поля для параллельных вектору  $\mathbf{B}$  компонент  $\mathbf{u}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{j}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{G}_{\parallel}$  получаются такие же соотношения, как и при  $B = 0$ . Для перпендикулярных компонент из уравнения (7. 31) получаем

$$\mathbf{u}_{a\perp} = b_{a\perp} (e_a \mathbf{E}^* - \mathbf{G}_a/n_a)_{\perp} - b_{a\wedge} [(e_a \mathbf{E}^* - \mathbf{G}_a/n_a) \mathbf{h}], \quad (7. 37)$$

где

$$b_{a\perp} = \frac{b_a}{1 + \omega_{an}^2 \tau_a^2}; \quad b_{a\wedge} = \omega_{an} \tau_a b_{a\perp}. \quad (7.38)$$

Здесь обозначено

$$\omega_{an} = e_a B / m_{an} c; \quad \omega_{en} \approx -\omega_e.$$

Плотность тока поперек магнитного поля равна

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sigma_1 \mathbf{E}_{\perp}^* + \sigma_2 [\mathbf{E}^* \mathbf{h}] - \sum_a e_a b_{a\perp} \mathbf{G}_{a\perp} - \sum_a e_a b_{a\wedge} [\mathbf{G}_a \mathbf{h}], \quad (7.39)$$

где

$$\sigma_1 = \sum_a e_a^2 n_a b_{a\perp}; \quad \sigma_2 = \sum_a e_a^2 n_a b_{a\wedge}. \quad (7.40)$$

Для того, чтобы из записи (7.39) выразить  $\mathbf{E}_{\perp}^* = \mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}]$  через  $\mathbf{j}_{\perp}$ , надо умножить выражение (7.39) на  $\sigma_1 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  и, кроме того, умножить его векторно на  $\mathbf{h} \sigma_2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , а затем сложить результаты. В итоге получим

$$\mathbf{E}_{\perp}^* = \frac{1}{\sigma_{\perp}} \mathbf{j}_{\perp} + \frac{1}{\sigma_{\wedge}} [\mathbf{j} \mathbf{h}] + \sum_a \beta_{a\perp} \mathbf{G}_{a\perp} + \sum_a \beta_{a\wedge} [\mathbf{G}_a \mathbf{h}], \quad (7.41)$$

где  $1/\sigma_{\perp}$  — поперечное сопротивление;  $\mathbf{h}/\sigma_{\wedge}$  — так называемый вектор Холла:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \quad \frac{1}{\sigma_{\wedge}} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \quad (7.42)$$

$$\beta_{a\perp} = e_a \left( \frac{b_{a\perp}}{\sigma_{\perp}} - \frac{b_{a\wedge}}{\sigma_{\wedge}} \right); \quad \beta_{a\wedge} = e_a \left( \frac{b_{a\wedge}}{\sigma_{\perp}} + \frac{b_{a\perp}}{\sigma_{\wedge}} \right).$$

Если играет роль сила тяжести, то во всех уравнениях надо заменить  $d\mathbf{V}/dt$  на  $d\mathbf{V}/dt - \mathbf{g}$ . Этот член при необходимости можно исключить с помощью общего уравнения движения.

Выражения (7.39) и (7.41) упрощаются, если можно пренебречь членами  $\mathbf{G}_a$ . В этом случае тепло трения тоже выражается просто:  $Q_{\text{тр}} = \mathbf{E}^* \mathbf{j} = j_{\parallel}^2 / \sigma_{\parallel} + j_{\perp}^2 / \sigma_{\perp}$ .

Рассмотрим еще так называемую амбиполярную диффузию плазмы. Пусть все градиенты и электрическое поле параллельны друг другу и направлены по оси  $x$  и пусть  $j_x = 0$ . Такая ситуация возникает, например, если плазма находится в длинной трубке с изолирующими стенками, так что можно пренебречь градиентами вдоль оси трубки и учитывать только диффузию плазмы по радиусу (роль  $x$  играет  $r$ ), причем  $j_r = 0$ . Эта совместная диффузия электронов и ионов называется амбиполярной.

Пусть плазма содержит ионы одного сорта (возьмем для простоты  $Z = 1$ ) и пусть  $\nabla T_e = \nabla T_i = \mathbf{V} = d\mathbf{V}/dt = 0$ .

Если  $B = 0$ , то из выражения (7.32) получим

$$nu_{ex} = -b_e enE - D_e \nabla n; \quad nu_{ix} = b_i enE - D_i \nabla n.$$

Из  $j_x = nu_{ex} - nu_{ix} = 0$  получим

$$E_x = -\frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \frac{1}{en} \frac{dn}{dx}.$$

Исключив электрическое поле, можно выразить поток плазмы  $nu_{ex} = nu_{ix}$  через один лишь градиент плотности:

$$nu_{ex} = nu_{ix} = -D_A \nabla n, \quad (7.43)$$

где  $D_A$  — так называемый амбиполярный коэффициент диффузии,

$$D_A = \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_e + b_i} = (T_e + T_i) \frac{b_e b_i}{b_e + b_i}. \quad (7.44)$$

Это же выражение сразу получается из выражения (7.10), если учесть  $\xi_n \approx 1$ ;  $V \approx V_a = 0$ ;  $\omega_x = u_{ix} = u_{ex}$ ;  $G_x \approx (T_e + T_i) dn/dx$  и формулы (7.9) и (7.34).

Если имеется магнитное поле  $B = B_z$ , то вместо выражения (7.43) получим  $nu_{ex} = nu_{ix} = -D_{A\perp} \nabla n$ , где  $D_{A\perp}$  находится из формулы (7.44) заменой  $b_a$  на  $b_{a\perp}$ :

$$D_{A\perp} = \frac{D_A}{1 + \omega_e \tau_e \omega_{in} \tau_i}. \quad (7.44')$$

Этот же результат можно получить из выражения (7.10), если принять  $V = 0$ , выразить  $j_y$  с помощью уравнения (7.14):  $j_y = (\sigma_{\perp}^* \xi_n B_z / \alpha_n c) G_x$  и положить  $\xi_n \approx 1$ .

Диффузия рассматривалась выше с помощью приближенного выражения (7.3) для силы трения. Более точное рассмотрение диффузии, а также вычисление теплопроводности требуют использования кинетического уравнения.

Кинетическое рассмотрение диффузии и теплопроводности электронов в слабо ионизованном газе при наличии магнитного поля произведено в работе Давыдова [30]. В ней показано, что функция распределения электронов может быть приближенно представлена в виде  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(t, \mathbf{r}, v) + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}, v) \cdot \mathbf{v}/v$  и путем усреднения кинетического уравнения, умноженного на 1 и  $\mathbf{v}/v$ , по углам в пространстве скоростей получена система уравнений для  $f_0$ ,  $\mathbf{f}_1$ :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{f}_1 + \frac{e}{3m_e v^2} \frac{\partial (v^2 \mathbf{f}_1)}{\partial v} \cdot \mathbf{E} = C_{en}(f_0); \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla f_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{f}_1 \mathbf{B}] = -\frac{\mathbf{f}_1}{\tau_e}, \quad (7.45')$$

где  $1/\tau_e = \alpha'_{en} n_n$ ,  $C_{en}(f_0)$  — усредненный по углам столкновительный член. Здесь положено  $V = 0$ .

Так как предполагается, что электроны сталкиваются с нейтралами, а не между собой, то нет оснований ожидать, что сферически симметричная часть функции распределения  $f_0$  будет максвелловской. Если  $\partial/\partial t \ll 1/\tau_e$ , то с помощью уравнения (7. 45') можно выразить  $f_1$  через  $f_0$  и получить из уравнения (7. 45) уравнение для  $f_0$ . Это уравнение решено в работе [30], для различных  $\tau_e(v)$  получены  $f_0$  и найдены соответствующие выражения для потоков частиц и энергии. Кроме того, в работе [30] получены выражения потоков для максвелловской функции  $f_0$ .

**Многокомпонентная плазма.** В лабораторных, гео- и астрофизических проблемах часто приходится иметь дело с многокомпонентной плазмой. Полностью ионизованная плазма может содержать ионы различных сортов, не полностью ионизованный газ может, кроме того, содержать молекулы, атомы, возбужденные атомы и т. д. Если столкновения между частицами достаточно часты, то можно пользоваться гидродинамическим описанием такой плазмы. Плотность плазмы и гидродинамическая скорость определяются формулами (6. 1) и (6. 2), где суммирование производится по всем компонентам, причем, как и для простой плазмы, электроны можно не учитывать. Кроме уравнения сохранения массы (6. 5), теперь нужны еще уравнения для компонент, определяющие изменение состава плазмы. Если скорость образования частиц  $a$  в единице объема равна  $\Gamma_a$ , то эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \text{div} (n_a \mathbf{V}_a) = \Gamma_a \text{ или}$$

$$\varrho \frac{d\xi_a}{dt} + \text{div} (m_a n_a \mathbf{u}_a) = m_a \Gamma_a, \quad (7. 46)$$

где  $\mathbf{u}_a = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}$  — диффузионная скорость,  $\xi_a = m_a n_a / \varrho$  — относительная концентрация компоненты  $a$ . Согласно законам сохранения массы и заряда,  $\sum_a m_a \Gamma_a = 0$ ;  $\sum_a e_a \Gamma_a = 0$ .

Уравнение движения плазмы, представляющее собой суммарный баланс импульса, получается сложением уравнений переноса импульса (1. 12) для всех компонент с учетом сохранения импульса при столкновениях. С помощью уравнения непрерывности оно приводится к виду (6. 14), где  $\rho = \sum_a \rho_a$ ,  $\pi_{\alpha\beta} = \sum_a \pi_{a\alpha\beta}$  \*.

\* Следует отметить, что эти выражения получаются, если принять новые, несколько иные, чем в § 1, определения величин  $\rho_a$ ,  $\pi_{a\alpha\beta}$ , которые чаще используются при рассмотрении газовых смесей. Разница заключается в том, что здесь при определении температуры в качестве хаотической скорости компоненты  $a$  берется  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ , а не  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \mathbf{V}_a$ , как в § 1. «Новые» и «старые» величины связаны соотношениями:

$$T_a^{\text{нов}} = T_a^{\text{ст}} + \frac{m_a u_a^2}{3}; \quad p_a^{\text{нов}} = p_a^{\text{ст}} + m_a n_a u_a^2;$$

$$\pi_{a\beta\gamma}^{\text{нов}} = \pi_{a\beta\gamma}^{\text{ст}} + m_a n_a u_a \beta u_{a\gamma}.$$



Диффузионные скорости  $u_a$  можно приближенно определять из системы уравнений (7. 31), но в общем случае это приводит к громоздким выражениям. Некоторые частные случаи рассмотрены в предыдущих разделах.

Суммарное тепло трения, согласно выражениям (1. 24) и (7. 3), равно

$$Q_{\text{тр}} = \sum_a Q_a = \sum_{a,b} Q_{ab} = \sum_{a>b} \alpha_{ao} (u_a - u_b)^2. \quad (7. 47)$$

Умножив уравнение (7. 31) на  $u_a$ , просуммировав по всем компонентам и учитывая выражение (7. 47), получим

$$Q_{\text{тр}} = \mathbf{E} * \mathbf{j} - \sum_a u_a \nabla p_a. \quad (7. 48)$$

Уравнение баланса энергии для многокомпонентной плазмы получается суммированием балансов энергии для всех компонент и имеет вид, подобный выражениям (6. 33) или (6. 35), где поток тепла равен \*

$$\mathbf{q} = \sum \mathbf{q}_a + \sum \frac{5}{2} p_a \mathbf{u}_a.$$

Следует, однако, учитывать, что уравнения (6. 33) и (6. 35) справедливы лишь для плазмы, состоящей из «одноатомных» компонент, когда можно считать, что все частицы обладают только кинетической энергией поступательного движения, например, если плазма полностью ионизована. При этом внутренняя энергия плазмы на единицу объема равна  $\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a = \frac{3}{2} p$ . В общем случае в выражении для энергии  $\frac{3}{2} p$  надо заменить на внутреннюю энергию  $\varepsilon$ , а в выражении для потока энергии  $\frac{5}{2} p$  надо заменить на  $\varepsilon + p$ . Например, для двухатомных молекул, которые обладают пятью эффективными степенями свободы,  $\varepsilon_a = \frac{5}{2} T_a n_a = \frac{5}{2} p_a$ ;  $\varepsilon_a + p_a = \frac{7}{2} p_a$ .

Уравнение баланса тепла (уравнение переноса внутренней энергии) получается для многокомпонентной плазмы аналогично уравнению (6. 36) и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{V}) + p \operatorname{div} \mathbf{V} &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + \sum_a u_a \nabla p_a + \sum Q = \\ &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{E} * \mathbf{j} + Q_{\text{вяз}}, \end{aligned} \quad (7. 49)$$

Эта разница не очень существенна, так как в тех случаях, когда столкновения часты и гидродинамическое описание применимо, величины  $u_a$  малы и их квадратами можно пренебрегать. Учет разницы между «старыми» и «новыми» величинами является превышением точности гидродинамического описания.

\* Точнее  $\mathbf{q} = \sum q_a^{\text{нов}} + \sum \frac{5}{2} p_a \mathbf{u}_a$ , где  $q_a^{\text{нов}} = q_a^{\text{ст}} + \frac{m_a}{2} n_a u_a^2 u_{a\beta} + \pi_{a\beta\gamma}^{\text{ст}} u_{a\gamma}$ , но эта разница несущественна (см. предыдущее примечание). Величину  $\sum q_a$  иногда называют приведенным потоком тепла.

где  $\sum Q = Q_{\text{тр}} + Q_{\text{вяз}}$ . Сюда могут входить и другие источники (потери) тепла.

Уравнение баланса энтропии при условии, что состояние плазмы можно считать близким к локально термодинамически равновесному, получается в общем случае методами термодинамики необратимых процессов [9, 10а]. Оно имеет такой же вид, как и уравнение (6. 38) с заменой  $q_e + q_i$  на  $\sum_a q_a$  и  $S_e u$  на  $\sum_a S_a u_a$ .

Для потока тепла и для вязких напряжений плазмы из «одноатомных» компонент можно получить общий вид выражений и оценки по порядку величины, пользуясь качественными соображениями § 3 и результатами для простой плазмы. При очень малой степени ионизации теплопроводность и вязкость определяются в основном нейтральным газом. Для одноатомного газа их можно оценить по формулам, приведенным в монографии [1].

В газе с вращательными или с внутренними степенями свободы (возбуждения, ионизация, диссоциация) имеют место новые эффекты. Возможен, например, дополнительный поток тепла, если частицы в некоторой точке ионизируются или диссоциируют, а в другой рекомбинируют и выделяют соответствующую энергию [10а]. В тензоре вязких напряжений газа с внутренними степенями свободы содержится член вида  $-\zeta \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V}$ , где  $\zeta$  — так называемая вторая вязкость [3]. Существенную роль в потоке тепла может играть также и излучение.

В неполностью ионизованном газе температура электронов часто сильно отличается от температуры тяжелых частиц — ионов и нейтралов, поэтому для них приходится пользоваться отдельными энергетическими уравнениями. Если ионизация в газе поддерживается электронными ударами, то  $T_e$  определяется в основном потенциалом ионизации газа и устанавливается обычно в несколько раз меньше этой величины, так что наиболее быстрые электроны способны ионизовать. В этом случае энергия, получаемая электронами, идет в основном на излучение, связанное с возбуждением и ионизацией электронными ударами. При этом скорость ионизации очень чувствительна к величине  $T_e$ , которая, наоборот, сравнительно слабо зависит от различных условий и имеет порядок величины электронвольт. Если плотность газа не очень велика, то передача тепла от электронов к ионам и нейтралам сильно заторможена из-за малости отношения  $m_e/m_i$ . Поэтому, если нейтральный газ хорошо охлаждается и не имеет другого источника нагрева, то легко возникает большая разница в температурах электронов и тяжелых частиц, например в два порядка. В неполностью ионизованных газах часто более важную роль играет не динамика плазмы, а такие факторы, как поддержание ионизации, возбуждение атомов, потеря энергии с излучением, взаимодействие плазмы со стенками сосуда и т. д. При протекании электрического тока через газы возникает широкий круг

разнообразных явлений, изучаемых физикой электрического разряда в газах. Хорошее элементарное введение в эти процессы дает маленькая книга Пеннинга [10].

## § 8. Примеры

**Пинч-эффект.** Магнитное поле, создаваемое текущим по плазме током, стремится сжать плазму, так как «нити тока», из которых складывается полный ток, притягиваются одна к другой. Это явление называют пинч-эффектом. Будем для краткости плазменный шнур, стягиваемый магнитным полем, называть просто «пинчем».

Рассмотрим в качестве простейшего примера бесконечный цилиндр плазмы, удерживаемой магнитным полем, т. е. прямой пинч (рис. 7). Пусть все величины в пинче изменяются только по  $r$  ( $\partial/\partial z = \partial/\partial\varphi = 0$ ), а плазма в целом не движется по  $z$  и не вращается. Магнитное поле и ток при этом имеют только  $z$ - и  $\varphi$ -составляющие; магнитные поверхности представляют собой цилиндры ( $r = \text{const}$ ).

Условие равновесия пинча имеет вид [см. уравнения (6. 17)]

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c} (j_z B_\varphi - j_\varphi B_z) = B_\varphi \frac{\partial r B_\varphi}{r \partial r} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial r}. \quad (8. 1)$$

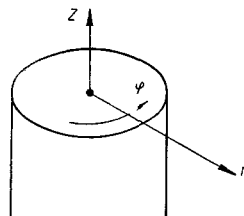


Рис. 7.

Умножим выражение (8. 1) на  $r^2$  и проинтегрируем по  $r$  от 0 до  $a$ , где  $a$  — радиус пинча. Интегрируя по частям и учитывая, что  $p(a) = 0$ ,  $B_\varphi(a) = 2J/ca$ , где  $J$  — полный ток, получим условие равновесия пинча в интегральном виде [31]:

$$2c^2(N_e \bar{T}_e + N_i \bar{T}_i) = J^2 + \frac{a^2 c^2}{4} [B_z^2(a) - \bar{B}_z^2], \quad (8. 2)$$

где  $\bar{B}_z^2 = \int_0^a B_z^2 2\pi r dr / \pi a^2$ ;  $N_e$ ,  $N_i$  — числа электронов и ионов на единицу длины пинча;  $\bar{T}_e$ ,  $\bar{T}_i$  — средние температуры. Собственное магнитное поле тока  $J$  всегда сжимает плазму. Продольное магнитное поле сжимает плазму в случае, если наружное поле  $B_z(a)$  больше внутреннего, и стремится расширить ее, если наружное поле меньше внутреннего.

Рассмотрим теперь на примере прямого пинча применение закона Ома. Из уравнений (6. 18) и (6. 19) получаем

$$\mathbf{E}_\parallel = \mathbf{j}_\parallel / \sigma_\parallel; \quad \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] - \frac{1}{en_e} \mathbf{R}_\perp = \mathbf{j}_\perp / \sigma_\perp, \quad (8. 3)$$

где  $E_{\perp}$  — компонента электрического поля, перпендикулярная к магнитному полю и касательная к магнитной поверхности  $r = \text{const}$ . Из выражения (6. 24) получаем  $E_r' = 0$ . Если пренебречь инерцией и радиальной силой вязкости по сравнению с  $\partial p_i / \partial r$ , то

$$E_r = \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_i}{\partial r}. \quad (8. 4)$$

Радиальное электрическое поле в равновесии автоматически принимает значение (8. 4) и уравнивает давление ионов, которые в этом поле имеют при  $T_i = \text{const}$  больцмановское распределение. Холловское поле при этом согласно выражению (6. 18) тоже автоматически принимает нужное значение

$$E_r' = E_r + \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial r} = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]_r. \quad (8. 5)$$

В быстром пинче, где играет роль инерция ионов, справедливо только выражение (8. 5), но не выражение (8. 4).

Поперечная компонента тока равна  $\mathbf{j}_{\perp} = (c/B) [\mathbf{h}\nabla p]$ . Подставив ее во второе из уравнений (8. 3), получим выражение для скорости

$$V_r = \frac{c}{B} (h_z E_{\phi} - h_{\phi} E_z) - \frac{c^2}{\sigma_{\perp} B^2} \left( \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{3}{2} n_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right). \quad (8. 6)$$

Если электрическое поле, соответствующее выражению (8. 4), почему-либо не может установиться (например, если пинч конечной длины и влияние торцов почему-либо очень сильно), то в плазме возникнет согласно формуле (6. 26) скорость  $V_{\phi}$ , равная

$$V_{\phi} = \frac{c}{B} \left( E_r - \frac{1}{en_e} \frac{\partial p_i}{\partial r} \right) h_z.$$

Неоднородность  $V_{\phi}$  вызовет у ионов появление  $\phi$ -проекции вязкой силы  $F_{\alpha}^{\pi} = -\partial \pi_{i\alpha\beta} / \partial x_{\beta}$  и согласно закону Ома [см. формулу (6. 24)] в выражении для  $V_r$  появится дополнительный член

$$V_{r \text{ вяз}} = \frac{c}{en_e B} F_{\phi}^{\pi} h_z. \quad (8. 7)$$

Об этой скорости иногда говорят как о скорости диффузии от ионных столкновений [20], хотя она пропорциональна не первым, а третьим производным плотности по радиусу. По порядку величины  $V_{r \text{ вяз}} \sim (r_i^4 / \tau_i a^3) \sim 1/B^4$ , что может сравниваться с  $\delta \times$  оулевой скоростью просачивания  $\sim r_e^2 / \tau_e a$  при  $r_i^2 / a^2 \sim (m_e / m_i)^{1/2}$ .

Если очень быстро увеличивать ток в плазме или внешнее магнитное поле, то условие равновесия (8. 2) не будет выполняться и магнитное поле будет быстро сжимать плазму. При этом из-за скин-эффекта магнитное поле не успеет сразу проникнуть внутрь, а будет подобно поршню сжимать плазму с края, вследствие

чего от края к оси пойдет сильная ударная волна. Схлопнувшись, пинч благодаря своей упругости начнет расширяться и, как показывают эксперименты, совершив небольшое число колебаний, разваливается вследствие различных неустойчивостей.

Подробный расчет колебаний пинча требует решения сложной системы магнитогидродинамических уравнений [34], но оценку времени схлопывания можно получить просто [32, 33]. Пусть, например,  $J = \dot{J}t$  и  $B_z = 0$ . При быстром нарастании тока в пинче возникает скин-эффект. Ток течет по поверхности пинча, и там же действует сила магнитного давления. Скин-эффект определяется удельным сопротивлением  $1/\sigma_{\perp}$ , связанным со столкновениями ионов с нейтралами [см. формулу (7. 15)], которое может быть значительно больше сопротивления  $1/\sigma$  от электрон-ионных столкновений; этот эффект иначе можно представлять себе как перенос магнитных силовых линий вместе с ионами [33]. Из-за скин-эффекта и возникновения сильной ударной волны сначала плазма «сгребается» полем с края, и постепенно ускоряются все новые слои. Считая, что вся масса приведенного в движение газа сосредоточена в «точке»  $a(t)$  и равна  $\rho_0 \pi (a_0^2 - a^2)$ , где  $a_0$  — начальный радиус пинча,  $\rho_0$  — начальная плотность, напишем для нее уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho_0 \pi (a_0^2 - a^2) \frac{da}{dt} \right\} = - \frac{B_{\phi}^2}{8\pi} 2\pi a = - \frac{J^2}{c^2 a} = - \frac{j^2 t^2}{c^2 a}. \quad (8. 8)$$

Проинтегрируем это выражение приближенно, вынося при первом интегрировании по времени справа из-под интеграла значение  $a(t)$  на верхнем пределе. В результате получаем

$$a^2 = a_0^2 (1 - t^2/t_0^2); \quad (8. 9)$$

$$t_0 = (3\pi\rho_0 c^2)^{1/4} a_0 j^{-1/2}. \quad (8. 10)$$

Схлопывание соответствует примерно моменту времени  $t_0$  и току  $J_0 = \dot{J}t_0$ . Легко видеть, что  $1/t_0 \sim a_0/c_A$ , где  $c_A = = B_0/(4\pi\rho_0)^{1/2}$  и  $B_0 \sim J_0/c a_0$ .

Совершенно аналогично можно оценить время схлопывания пинча, сжимаемого полем  $B_z$ .

Если в пинче, находящемся в равновесии, быстро создавать малые возмущения, нарушающие равновесие, то в нем возникнут малые колебания. В следующем разделе эти колебания рассматриваются для неограниченной плазмы, но по порядку величины полученные там формулы можно применять и к пинчу.

Если изменения в равновесном пинче производятся медленно, с частотами, малыми по сравнению с характерными частотами этих магнитогидродинамических колебаний, то пинч все время будет оставаться в квазиравновесном состоянии и инерция не будет играть роли — это медленный процесс.

Все сказанное справедливо, конечно, лишь в том случае, если пинч устойчив, но условия устойчивости мы здесь обсуждать не будем.

**Магнитогидродинамические волны.** Рассмотрим малые колебания в однородной плазме с однородным магнитным полем. В плазме возможны многие колебания различных типов. Мы сейчас будем интересоваться лишь сравнительно низкочастотными и крупномасштабными колебаниями, в которых существенную роль играет движение вещества и к которым применимо гидродинамическое описание § 6 (выполнены условия квазинейтральности,  $c_A^2 \ll c^2$  и т. д.). Рассмотрение таких колебаний дает представление о характере упругости плазмы. Обычный газ обладает только продольной упругостью, в нем могут распространяться волны одного типа — звуковые. Как показал впервые Альфвен [5, 4], проводящая жидкость в магнитном поле по отношению к поперечным смещениям также обладает своеобразной упругостью, обусловленной тем, что магнитные силовые линии ведут себя подобно натянутым упругим струнам. Возникающие в результате этого колебания и волны называют магнитогидродинамическими.

Положим

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho'; \quad \rho = \rho_0 + \rho'; \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}', \quad (8.11)$$

где нуликом отмечены равновесные невозмущенные значения, а штрихом — малые возмущения. Скорость  $\mathbf{V}$  тоже является малой величиной.

Будем сначала пренебрегать всеми диссипативными процессами, считая, что проводимость плазмы достаточно велика, вязкость мала и т. д. (более точные критерии будут получены в следующем разделе). Условие адиабатичности (6.37) дает в этом случае  $\rho/\varrho^\gamma = \text{const} = \rho_0/\varrho_0^\gamma$ , где  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. Пользуясь выражениями (8.11) и разлагая по малым величинам, получим

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left( \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\gamma = \rho_0 + \frac{\gamma \rho_0}{\varrho_0} \varrho' + \frac{\rho_0 \gamma (\gamma - 1)}{2} \left( \frac{\varrho'}{\varrho_0} \right)^2 + \dots = \\ &= \rho_0 + c_s^2 \varrho' + \frac{\gamma - 1}{2 \varrho_0} c_s^2 \varrho'^2 + \dots, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где  $c_s$  — скорость звука, определяемая соотношением

$$c_s = \left( \frac{\partial \rho}{\partial \varrho} \right)_s^{1/2} = \left( \frac{\gamma \rho_0}{\varrho_0} \right)^{1/2}. \quad (8.13)$$

Пренебрегая в уравнениях непрерывности, движения и индукции всеми степенями малых возмущений выше первой, получим следующую систему линеаризованных уравнений:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \quad (8.14a)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -c_s^2 \nabla p' - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B}_0 \text{rot } \mathbf{B}']; \quad (8.14б)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V} \mathbf{B}_0]. \quad (8.14в)$$

В уравнении индукции отброшен также холловский член, что согласно оценкам § 6 справедливо при  $\Pi \gg 1$ . В качестве характерного размера можно взять длину волны колебаний  $\lambda$  или лучше обратное волновое число  $1/k = \lambda/2\pi$ , так что уравнение (8.14в) справедливо при условии

$$\Pi = \frac{4\pi e^2 n_e^2}{\rho c^2 k^2} \gg 1. \quad (8.15)$$

Будем искать решение уравнений (8.14), в котором все возмущенные величины пропорциональны  $e^{i(kr - \omega t)}$ , т. е. в виде гармонических плоских волн с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Произвольное возмущение может быть разложено по Фурье и представлено в виде суперпозиции таких гармоник. Заменяя  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ ,  $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ , получим

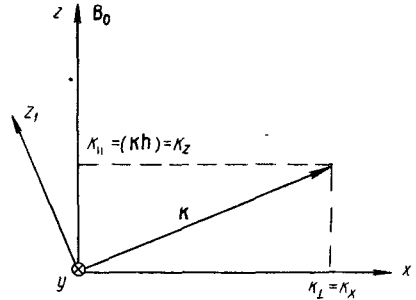


Рис. 8.

$$-\omega \rho' / \epsilon_0 + (\mathbf{k} \mathbf{V}) = 0; \quad (8.16а)$$

$$-\omega \mathbf{V} = -k c_s^2 \rho' / \epsilon_0 - [\mathbf{B}_0 [\mathbf{k} \mathbf{B}']] / 4\pi \epsilon_0; \quad (8.16б)$$

$$-\omega \mathbf{B}' = [\mathbf{k} [\mathbf{V} \mathbf{B}_0]]. \quad (8.16в)$$

Согласно условию  $\text{div } \mathbf{B}' = 0$  переменное магнитное поле перпендикулярно к волновому вектору. Выберем ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{B}_0 = B_{0z} \mathbf{h}$ , а ось  $y$  перпендикулярно к векторам  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$  (рис. 8). Спроектировав уравнения (8.16) на эти оси, увидим, что вся система уравнений разбивается на две независимые системы для переменных  $V_y, B'_y$  и для  $\rho', V_x, V_z, B'_x, B'_z$ . В уравнениях (8.16) мнимая единица выпала. Это значит, что в каждой волне  $\rho', \mathbf{V}, \mathbf{B}$  колеблются «в фазе», т. е. все пропорциональны, например  $\cos(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)$ .

Рассмотрим сначала первую систему. Так как  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0$ , то  $\rho' = 0$  и, следовательно,  $p' = 0$ . Из уравнений (8.16) получаем

$$-\omega V_y = k_{\parallel} B'_y B_0 / 4\pi \epsilon_0; \quad (8.17а)$$

$$-\omega B'_y = k_{\parallel} V_y B_0. \quad (8.17б)$$

Условие разрешимости этой системы дает связь частоты с волновым вектором в виде

$$\omega^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2 = \frac{(\mathbf{B}_0 \mathbf{k})^2}{4\pi Q_0}, \quad (8.18)$$

где  $c_A$  — так называемая альфвеновская скорость;

$$c_A = \frac{B_0}{(4\pi Q_0)^{1/2}}. \quad (8.19)$$

Эта волна называется альфвеновской. Скорость и переменное поле в ней перпендикулярны к  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$  и связаны соотношением

$$V_y = B'_y (4\pi Q_0)^{-1/2}, \quad (8.20)$$

а плотность и давление не колеблются, поэтому волна одинаково распространяется в сжимаемой и несжимаемой жидкости.

Групповая скорость альфвеновских волн равна  $\partial\omega/\partial\mathbf{k} = \mathbf{B}_0 (4\pi Q_0)^{-1/2} = c_A \mathbf{h}$ . Она не зависит от  $\mathbf{k}$ , это значит, что соответствующие возмущения любых (но, конечно, не слишком малых) масштабов, произведенные в каком-нибудь месте плазмы, переносятся со скоростью  $c_A$  вдоль магнитных силовых линий.

Рассмотрим теперь вторую систему уравнений для  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{B}'$ , лежащих в плоскости  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{k}$ . Магнитное поле перпендикулярно к  $\mathbf{k}$ , поэтому оно направлено по оси  $z_1$  (см. рис. 8). Эту проекцию мы обозначим просто  $B'$ . Проектируя уравнения (8.16в) на  $z_1$  и уравнение (8.16б) — на  $x$  и  $z$ , получим

$$\omega \varrho' / \varrho_0 = k_{\parallel} V_z + k_{\perp} V_x; \quad (8.21a)$$

$$\omega B' (4\pi Q_0)^{-1/2} = c_A k V_x; \quad (8.21б)$$

$$\omega V_x = c_s^2 k_{\perp} \varrho' / \varrho_0 + c_A k B' (4\pi Q_0)^{-1/2}; \quad (8.21в)$$

$$\omega V_z = c_s^2 k_{\parallel} \varrho' / \varrho_0. \quad (8.21г)$$

Исключая  $\varrho'$  и  $B'$ , получим

$$(\omega^2 - c_s^2 k_{\perp}^2 - c_A^2 k^2) V_x = c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp} V_z; \quad (8.22a)$$

$$(\omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2) V_z = c_s^2 k_{\parallel} k_{\perp} V_x. \quad (8.22б)$$

Условие разрешимости этой системы дает

$$\omega^4 - \omega^2 (c_A^2 k^2 + c_s^2 k^2) + c_A^2 c_s^2 k^2 k_{\parallel}^2 = 0. \quad (8.23)$$

Отсюда находятся два корня:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (c_A^2 + c_s^2) \pm \left[ \frac{1}{4} (c_A^2 + c_s^2)^2 - c_A^2 c_s^2 k_{\parallel}^2 / k^2 \right]^{1/2}. \quad (8.24)$$

Эти волны получили название магнитозвуковых: быстрой называют волну со знаком плюс, медленной — со знаком минус. При  $c_A \ll c_s$  одна из волн превращается в обычную звуковую волну



с частотой  $\omega = c_s k$ , а другая ведет себя как альфвеновская волна с частотой  $\omega = c_A k$ . В несжимаемой проводящей жидкости  $c_s \rightarrow \infty$  возможны, таким образом, две альфвеновские волны с разными поляризациями.

Рассмотрим подробнее случай  $c_s \ll c_A$ . При этом частота быстрой волны равна

$$\omega = c_A k. \quad (8. 25)$$

Групповая скорость равна фазовой и направлена по  $k$ . В этой волне движение происходит в основном по оси  $x$ , возмущение плотности мало. Из уравнений (8. 21) и (8. 22) получаем

$$V_x = \frac{B'}{(4\pi Q_0)^{1/2}}; \quad V_z = \frac{c_s^2}{c_A^2} \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k^2} V_x; \quad \frac{Q'}{Q_0} = \frac{k_{\perp}}{k} \frac{V_x}{c_A}. \quad (8. 26)$$

Медленная волна при  $c_s \ll c_A$  представляет собой звук, искаженный магнитным полем. Частота такой волны равна

$$\omega = c_s k_{\parallel}. \quad (8. 27)$$

Движение в этой волне происходит в основном по оси  $z$ , возмущение магнитного поля мало:

$$\frac{Q'}{Q_0} = \frac{V_z}{c_s}; \quad V_x = -\frac{c_s^2}{c_A^2} \frac{k_{\parallel} k_{\perp}}{k^2} V_z; \quad \frac{B'}{(4\pi Q_0)^{1/2}} = -\frac{c_s}{c_A} \frac{k_{\perp}}{k} V_z. \quad (8. 28)$$

Групповая скорость тоже направлена по оси  $z$ , а не по  $k$ , как в обычном звуке:  $\partial\omega/\partial k = c_s h$ . Эти возмущения переносятся вдоль силовых линий, как по рельсам.

Колебания температуры выражаются через  $Q'$ :

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{p'}{p_0} - \frac{Q'}{Q_0} = (\gamma - 1) \frac{Q'}{Q_0}. \quad (8. 29)$$

Электрические поля определяются законом Ома. Согласно выражениям (6. 28) в альфвеновской волне  $E = E_x = -V_y B_0/c$ , в быстрой волне  $E = E_y = V_x B_0/c$ . Эти выражения можно уточнить, пользуясь выражением (6. 18) без диссипативных членов и учитывая  $p'_e/n_e = \gamma T_0 Q'/Q_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{c} [\mathbf{V}B_0] + \frac{1}{en_e c} [j\mathbf{B}_0] + \frac{\nabla p_e}{en_e} = \\ &= \frac{1}{c} [\mathbf{V}B_0] + \frac{i[[\mathbf{k}B']\mathbf{B}_0]}{4\pi en_e} + \frac{ik\gamma T_0 Q'}{eQ_0}. \end{aligned} \quad (8. 30)$$

Здесь второй член (холловский) меньше первого в  $\sim\Pi$  раз. Третий член (потенциальное поле) отсутствует в альфвеновской волне, а в быстрой — порядка  $(c_s^2/c_A^2)/\Pi$ . В звуковой волне потенциальное поле может быть и меньше и больше вихревого, но это не влияет на уравнение индукции, так как туда входит  $\text{rot } \mathbf{E}$ .

Энергию волн можно найти, подставив выражения (8. 11) в общее выражение (6. 35) и сохраняя члены второго порядка малости. Пользуясь разложением (8. 12), получим

$$\epsilon_{\text{полн}} = \left( \frac{p_0}{\gamma - 1} + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) + \left( \frac{c_s^2 q'}{\gamma - 1} + \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{B}'}{4\pi} \right) + \left( \frac{q_c V^2}{2} + \frac{c_s^2 q'^2}{2q_0} + \frac{B'^2}{8\pi} \right). \quad (8. 31)$$

Здесь первая скобка представляет собой энергию невозмущенной плазмы. Вторая скобка содержит осциллирующие члены, исчезающие при интегрировании по объему волны или при усреднении по времени. Третья скобка дает энергию, связанную с волной. Энергия электрического поля здесь не учитывается, так как она гораздо меньше магнитной энергии:

$$E^2/B'^2 \sim (VB_0/c)^2/4\pi q_0 V^2 \sim c_A^2/c^2$$

— предполагается, что это отношение малó. Энергия волны, приходящаяся на единицу объема, равна среднему значению третьей скобки

$$\bar{\epsilon} = \frac{q_0 \bar{V}^2}{2} + \frac{c_s^2 \bar{q}'^2}{2q_0} + \frac{\bar{B}'^2}{8\pi}. \quad (8. 32)$$

Пользуясь уравнениями (8. 14), легко непосредственно убедиться, что усредненная по объему волны величина  $\bar{\epsilon}$  сохраняется в колебаниях. Энергия альфвеновской волны согласно выражению (8. 20) равна

$$\bar{\epsilon} = q_0 \bar{V}_y^2 = \bar{B}'^2/4\pi. \quad (8. 33)$$

Энергия быстрой магнитозвуковой волны при  $c_s \ll c_A$  приближенно равна

$$\bar{\epsilon} = q_0 \bar{V}_x^2 = \bar{B}'^2/4\pi. \quad (8. 34)$$

Здесь опущена энергия давления и  $V_z^2$ .

Энергия звуковой волны при  $c_s \ll c_A$  приближенно равна

$$\bar{\epsilon} = q_0 \bar{V}_z^2 = c_s^2 \bar{q}'^2/q_0. \quad (8. 35)$$

Здесь опущена магнитная энергия и  $V_x^2$ .

В общем случае при произвольном  $c_s/c_A$  с помощью выражения (8. 24) легко показать, что справедливо соотношение

$$\bar{\epsilon} = q_0 \bar{V}^2 = \bar{B}'^2/4\pi + c_s^2 \bar{q}'^2/q_0. \quad (8. 36)$$

**Затухание магнитогидродинамических волн.** Диссипативные эффекты, которые пока не учитывались, приводят к затуханию колебаний. Энергия колебаний уменьшается со временем, переходя в тепло. В результате  $\omega$  становится комплексной:  $\omega = \omega_1 - i\omega_2$ ,

амплитуда колебаний уменьшается со временем пропорционально  $e^{-\omega_2 t}$ . Повторение предыдущих вычислений с учетом диссипативных эффектов привело бы к громоздким выкладкам, однако в наиболее интересном случае, когда затухание мало ( $\omega_2 \ll \omega_1$ ), его можно найти более простым и прямым путем (см. [3] § 77).

Обозначим:  $\omega_1 = \omega$  — вещественная частота;  $\omega_2 = \omega\delta$ , где  $\delta$  — логарифмический декремент затухания. Энергия волны (проинтегрированная по объему) пропорциональна квадрату амплитуды, и, следовательно, при затухании  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 e^{-2\omega\delta t}$ , где  $\bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}(t=0)$ . Вследствие того, что часть энергии (энергия волны) находится в плазме в «организованной» форме, энтропия плазмы имеет некоторую отрицательную добавку  $-\overline{\Delta S}$ , которая с течением времени затухает вместе с энергией волны:  $-\overline{\Delta S} = -(\overline{\Delta S})_1 e^{-2\omega\delta t}$ . Когда вся энергия волны диссипирует, энтропия плазмы возрастет на величину  $\bar{\epsilon}_1/T_0$ , следовательно,  $(\overline{\Delta S})_1 = \bar{\epsilon}_1/T_0$ . Пользуясь этим соотношением, легко выразить декремент затухания через  $d\overline{\Delta S}/dt$ :

$$\delta = \frac{1}{2\omega} \frac{T_0}{\bar{\epsilon}} \frac{d\overline{\Delta S}}{dt} = \frac{1}{2\omega\bar{\epsilon}} T_0 \theta. \quad (8.37)$$

Величину  $d\overline{\Delta S}/dt$  можно вычислить с помощью уравнения (6.38). При этом в случае слабого затухания можно в первом приближении пользоваться выражениями для всех величин в волне, полученными выше без учета затухания. Как и рождение энтропии (6.39), декремент затухания (8.37) будет в этом случае выражаться в виде суммы членов, каждый из которых дает затухание от какого-нибудь одного диссипативного эффекта:

$$\delta = \delta_{\text{дж}} + \delta_{\text{вяз}} + \delta_{\text{тепл}} + \delta_{\text{диф}} + \dots \quad (8.38)$$

Для применимости этих вычислений, а также приведенных выше выражений частоты и поляризации (без учета диссипативных эффектов) должно соблюдаться условие  $\delta \ll 1$ .

Рассмотрим сначала затухание волн в простой плазме.

Альфвеновская волна. Учитывая  $Q_{\text{дж}} = j_{\parallel}^2 \sigma_{\parallel} + j_{\perp}^2/\sigma_{\perp}$  и  $\mathbf{j} = (c/4\pi) i [\mathbf{k}\mathbf{V}']$ , получим для альфвеновской волны

$$\overline{Q}_{\text{дж}} = (c^2/4\pi) (k_{\parallel}^2/\sigma_{\perp} + k_{\perp}^2 \sigma_{\parallel}) \overline{B}^2/4\pi.$$

Отсюда, пользуясь соотношением (8.37) и выражением  $\bar{\epsilon} = \overline{B}^2/4\pi$ , находим

$$2\omega\delta_{\text{дж}} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_{\parallel}} k_{\perp}^2 + \frac{c^2}{4\pi\sigma_{\perp}} k_{\parallel}^2. \quad (8.39)$$

В вязкой диссипации  $Q_{\text{вяз}} = (1/2) \pi_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = (1/2) \sum_{p=0}^2 \eta_p W_{p\alpha\beta}^2$

существенны  $\partial V_y/\partial x = W_{xy} = ik_{\perp} V_y$ ;  $\partial V_y/\partial z = W_{yz} = ik_{\parallel} V_y$ . Отличны от нуля тензоры  $W_{1\alpha\beta}$  и  $W_{2\alpha\beta}$ , поэтому играет роль только поперечная вязкость. Простые вычисления с помощью выражений (4.42) или (2.21) дают\*:  $\bar{Q}_{\text{вяз}} = (\eta_1 k_{\perp}^2 + \eta_2 k_{\parallel}^2) \bar{V}_y^2$ .

Учитывая  $\bar{\epsilon} = \rho \bar{V}_y^2$ , находим

$$2\omega\delta_{\text{вяз}} = \frac{1}{\rho_0} (\eta_1 k_{\perp}^2 + \eta_2 k_{\parallel}^2). \quad (8.40)$$

Колебаний плотности и температуры в альфвеновской волне нет, поэтому  $\delta_{\text{тепл}} = 0$ .

**Быстрая магнитозвуковая волна.** В этой волне ток направлен по оси  $y$  поперек магнитного поля, поэтому  $Q_{\text{дж}} = j^2/\sigma_{\perp} = (c^2/4\pi\sigma_{\perp}) k^2 (B'^2/4\pi)$ . Отсюда, учитывая выражение (8.34), получаем

$$2\omega\delta_{\text{дж}} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_{\perp}} k^2. \quad (8.41)$$

Скорость в этой волне направлена в основном по оси  $x$  и имеет производные по  $x$  и по  $z$ , так что играют роль все три коэффициента вязкости  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$ . Вычислив  $\bar{Q}_{\text{вяз}}$  с помощью выражений (8.37) и (8.34), получим

$$2\omega\delta_{\text{вяз}} = \frac{1}{\rho_0} \left[ \left( \frac{\eta_0}{3} + \eta_1 \right) k_{\perp}^2 + \eta_2 k_{\parallel}^2 \right]. \quad (8.42)$$

Рождение энтропии вследствие теплопроводности равно

$$\bar{\theta}_{\text{тепл}} = -\bar{\mathbf{q}} \nabla T / T_0^2 = Q_{\text{тепл}} / T_0,$$

где

$$\bar{Q}_{\text{тепл}} = \frac{\kappa_{\parallel}^e}{T_0} \overline{(\nabla_{\parallel} T_e)^2} + \frac{\kappa_{\perp}^e}{T_0} \overline{(\nabla_{\perp} T_e)^2} + \frac{\kappa_{\parallel}^i}{T_0} \overline{(\nabla_{\parallel} T_i)^2} + \frac{\kappa_{\perp}^i}{T_0} \overline{(\nabla_{\perp} T_i)^2}.$$

Считая  $T_e' = T_i' = T'$ , определяя  $T'/T_0$  из выражения (8.29) и пользуясь формулами (8.26) и (8.34), получим, обозначив  $\kappa = \kappa^e + \kappa^i$ :

$$2\omega\delta_{\text{тепл}} = \frac{(\gamma-1)^2 T_0 k_{\perp}^2}{\rho_0 c_A^2 k^2} (\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp} k_{\perp}^2). \quad (8.43)$$

**Звуковая волна.** Тем же способом с помощью выражений (8.28) и (8.35) получаем, считая  $V \approx V_z$ :

$$2\omega\delta_{\text{дж}} = \frac{c^2}{4\pi\sigma_{\perp}} k_{\perp}^2 \frac{c_s^2}{c_A^2}; \quad (8.44)$$

\* Здесь при вычислении вязкой диссипации используются обозначения § 4. Можно пользоваться непосредственно выражениями (2.21), но это менее удобно.

$$2\omega\delta_{\text{вяз}} = \frac{1}{\varrho_0} \left( \frac{4}{3} \eta_0 k_{\parallel}^2 + \eta_2 k_{\perp}^2 \right); \quad (8.45)$$

$$2\omega\delta_{\text{тепл}} = \frac{(\gamma - 1)^2 T_0}{\varrho c_s^2} (\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \kappa_{\perp} k_{\perp}^2). \quad (8.46)$$

Из выражения (8.46) температура выпадает, если подставить  $c_s^2 = \gamma p_0 / \varrho_0 = \gamma (Z + 1) T_0 / m_i$ . Если теплопроводность электронов очень велика, то выражения (8.43) и (8.46) надо изменить. При  $\kappa_e \rightarrow \infty$  движение электронов изотермическое, а не адиабатическое, поэтому можно считать, что у них показатель «адиабаты» равен  $\gamma_e = 1$ . При этом электронные члены выпадают из выражений (8.43) и (8.46) и, кроме того, несколько изменяется скорость звука:  $c_s^2 = (p_e + \gamma p_i) / \varrho = (Z + \gamma) T_0 / m_i$ .

**Столкновения с нейтралами.** При наличии нейтрального газа тепло трения увеличивается, так как электроны сталкиваются не только с ионами, но и с нейтралами и, кроме того, что еще важнее, выделяется тепло от трения между ионами и нейтралами. Этот эффект рассматривался в работах [29, 35, 36]. Кроме того, в выражения для  $\delta_{\text{вяз}}$  и  $\delta_{\text{тепл}}$  войдут коэффициенты вязкости и теплопроводности с учетом нейтрального газа; при малой степени ионизации они изотропны.

Затухание от трения в тройной смеси  $e, i, n$  можно вычислить, пользуясь выражением (7.17). В вычисленные выше выражения для  $\delta_{\text{дж}}$  надо теперь подставить  $\sigma$  согласно выражению (7.13). Кроме того, в декремент затухания войдет еще один член, который мы назовем диффузионным  $\delta_{\text{диф}}$ . Он появляется от столкновений ионов с нейтралами и связан со вторым членом в выражении (7.17):

$$Q_{\text{диф}} = \frac{1}{\alpha_n} \left\{ \frac{\xi_n}{c} [\mathbf{jB}] - \mathbf{G} \right\}^2; \quad \mathbf{G} = \xi_n \mathbf{V} (p_e + p_i) - \xi_i \mathbf{V} p_n.$$

В альфвеновской волне  $\mathbf{G} = 0$ ; в быстрой магнитозвуковой волне отношение  $G$  к первому члену в фигурных скобках порядка  $\xi_i c_s^2 / c_A^2$ . Пренебрегая  $G$ , получаем  $Q_{\text{диф}} = (\xi_n^2 B^2 / \alpha_n c^2) j_{\perp}^2$ . Это выражение имеет такой же вид, как и джоулево тепло, поэтому можно, не повторяя вычислений, сразу найти затухание с помощью выражений (8.39) и (8.41), подставив туда  $1/\sigma_{\perp}^* = 1/\sigma + \xi_n^2 B^2 / \alpha_n c^2$  вместо  $1/\sigma$ . Столкновения ионов с нейтралами в этом случае просто увеличивают эффективное поперечное сопротивление.

Выпишем отдельно диффузионное затухание для альфвеновской и для быстрой магнитозвуковой волны:

$$2\omega\delta_{\text{диф}} = \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{4\pi} \frac{\xi_n^2 B^2}{\alpha_n c^2} \quad (\text{альфвеновская волна}); \quad (8.47a)$$

$$2\omega\delta_{\text{диф}} = \frac{c^2 k^2}{4\pi} \frac{\xi_n^2 B^2}{\alpha_n c^2} \quad (\text{быстрая волна}). \quad (8.47b)$$

Пусть  $m_i = m_n$  и можно пренебречь  $\alpha_{en}$  по сравнению с  $\alpha_{in}$ . Тогда диффузионное затухание больше джоулева в  $2 \xi_n \omega_e \tau_e \omega_i \tau_{in}$  раз, где  $1/\tau_{in} = \alpha'_{in} (n_i + n_n)$ . Оба выражения (8.47а) и (8.47б) при этом приводятся к виду

$$\delta_{\text{диф}} = \omega \bar{\tau}_{in} (n_n/n_i). \quad (8.48)$$

Оценивая величину диффузионной скорости, найдем  $\omega/V \sim \omega \bar{\tau}_{in} \xi_i$  — эта величина должна быть мала для применимости полученных выражений.

В звуковой волне оба члена в  $Q_{\text{диф}}$  одного порядка. Пусть  $m_i = m_n$ , тогда  $\mathbf{G} = \xi_n \nabla p_e$ . Вычисления с помощью выражения (8.28) дают  $\nabla p_e = ik (n_e/n_0) Q_0 c_s V_z$ , где  $n_0 = n_e + n_i + n_n$ ;  $[j\mathbf{B}] / c = ik_{\perp} Q_0 c_s V_z$  и далее обычным путем получаем

$$\begin{aligned} 2\omega \delta_{\text{диф}} &= \frac{Q_0 c_s^2 \xi_n^2}{\alpha_n} \left\{ k_{\parallel}^2 \frac{n_e^2}{n_0^2} + k_{\perp}^2 \frac{(n_i + n_n)^2}{n_0^2} \right\} \approx \\ &\approx \omega^2 \bar{\tau}_{in} \frac{2n_n}{n_i} \left\{ \frac{n_e^2}{n_0^2} + \frac{k_{\perp}^2 (n_i + n_n)^2}{k_{\parallel}^2 n_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Во втором равенстве мы пренебрегли  $\alpha_{en}/\alpha_{in}$  и подставили  $\omega = c_s k_{\parallel}$ .

При наличии нейтрального газа  $\delta_{\text{диф}}$  часто может давать основной вклад в затухание.

Столкновения между разными ионами. Если плазма содержит ионы с разными величинами  $e/m$ , то эти ионы двигаются в волне с несколько отличающимися скоростями, и трение между ними тоже вызывает затухание волны.

Рассмотрим случай  $\omega_i \tau_i = e_i B / m_i c \gg 1$ . Здесь можно взять выражение (7.27) для диффузионной скорости ионов. Для альфвеновской и быстрой магнитозвуковой волны, пренебрегая давлением, получим

$$\mathbf{w} = \frac{c}{B} \left( \frac{m_1}{e_1} - \frac{m_2}{e_2} \right) \left[ \mathbf{h} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right] = -\frac{i\omega}{B} \left( \frac{m_1}{e_1} - \frac{m_2}{e_2} \right) [\mathbf{hV}].$$

Подсчитав тепло трения  $\bar{Q}_{\text{тр}} = \alpha_{12} \bar{\omega}^2$  (учитываем только столкновения между ионами), получим для этих типов волн

$$2\omega \delta_{\text{диф}} = \frac{\alpha_{12}}{Q_0} \frac{c^2}{B^2} \left( \frac{m_1}{e_1} - \frac{m_2}{e_2} \right)^2 \omega^2 \quad (8.50)$$

или по порядку величины  $\delta_{\text{диф}} \sim \omega / \omega_i^2 \tau_i$ . Это затухание слабее, чем затухание от столкновений с нейтралами, так как в основном ионы двигаются со скоростью электрического дрейфа, которая у них одинакова.

Столкновительный член для упругих столкновений имеет вид [1, 2, 3]

$$C_{ab}(f_a, f_b) = \int \{ f_a(\mathbf{v}') f_b(\mathbf{v}'_b) - f_a(\mathbf{v}) f_b(\mathbf{v}_b) \} u d\sigma d\mathbf{v}_b. \quad (\text{П. 1})$$

Здесь  $d\sigma = \sigma(u, \vartheta) d\vartheta$  — дифференциальное эффективное сечение рассеяния в элемент телесного угла  $d\vartheta = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  при столкновении частиц с относительной скоростью  $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_b|$ . Перед столкновением частиц  $a$  с частицами  $b$  первые имеют скорость  $\mathbf{v}$ , вторые — скорость  $\mathbf{v}_b$ . Их скорости после столкновения  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}'_b$  связаны с  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_b$  законами упругого удара (законами сохранения импульса и энергии). Второй член в фигурных скобках дает уход частиц  $a$  из элемента объема  $d\mathbf{v}$  в пространстве скоростей около  $\mathbf{v}$  в результате столкновений с частицами  $b$ ; первый член дает приход в этот элемент объема. Картина столкновения частиц  $a$ ,  $b$  со скоростями  $v_a$ ,  $v_b$  проще всего выглядит в системе координат, где их суммарный импульс равен нулю:  $m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b = 0$ . Введя относительную скорость  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$ , получим в этой системе  $\mathbf{v}_a = m_b (m_a + m_b)^{-1} \mathbf{u}$ ;  $\mathbf{v}_b = -m_a (m_a + m_b)^{-1} \mathbf{u}$ ;  $m_a v_a^2/2 + m_b v_b^2/2 = m_{ab} u^2/2$ , где  $m_{ab} = m_a m_b (m_a + m_b)^{-1}$  — приведенная масса. После соударения относительная скорость вследствие закона сохранения энергии не меняет своей величины:  $u = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| = |\mathbf{v}'_a - \mathbf{v}'_b|$ , а может только повернуться на некоторый угол  $\vartheta$ .

Больцмановское выражение (П. 1) для столкновительного члена, строго говоря, не годится для кулоновских столкновений. Формально это проявляется в том, что подстановка вместо  $d\sigma$  резерфордского сечения приводит к расходящимся интегралам. Если, однако, обрезать эти интегралы, как указано в § 4, то выражение (П. 1) дает те же результаты, что и выражение столкновительного члена, полученное Ландау.

Подсчитаем силу трения  $\mathbf{R}_{ab}$ , испытываемую газом частиц  $a$  при столкновении с частицами  $b$ , причем оба сорта частиц обладают максвелловскими распределениями с одинаковыми температурами, но с разными средними скоростями  $\mathbf{V}_a$  и  $\mathbf{V}_b$ . Обозначим  $\mathbf{U} = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b$  и предположим, что этот сдвиг мал по сравнению со скоростями относительного движения частиц  $U \ll (T/m_{ab})^{1/2}$ . Сила трения равна

$$\mathbf{R}_{ab} = \int m_a \mathbf{v} C_{ab}(f_a, f_b) d\mathbf{v}.$$

От системы координат она не зависит. Будем вычислять ее в системе, где  $\mathbf{V}_a = 0$ ,  $\mathbf{V}_b = -\mathbf{U}$ . В этой системе координат  $f_a = f_a^0$ , а  $f_b$ , разложив по степеням  $U$ , можно представить в виде:

$$f_b = f_b^0 - (m_b/T) (\mathbf{U} \mathbf{v}_b) f_b^0.$$

Подстановка  $f_a^0$ ,  $f_b^0$  в  $\mathbf{R}_{ab}$  дает, очевидно, нуль, так что

$$\mathbf{R}_{aba} = - \frac{m_a m_b}{T} U_{\beta} \int v_{\alpha} C_{ab}(f_a^0, f_b^0 v_{b\beta}) d\mathbf{v}.$$

Здесь  $C_{ab}$  дается выражением (П. 1) и представляет собой вектор, зависящий от  $\mathbf{v}$  (по  $\mathbf{v}_b$  проинтегрировано). Так как этот вектор не содержит никаких векторных параметров, кроме самой скорости  $\mathbf{v}$ , то он имеет вид  $v_{\alpha} A(v)$  или в компонентах  $v_{\beta} A(v)$ , где  $A(v)$  — скалярная функция от величины скорости. Производя под интегралом усреднение по углам и пользуясь соотношением  $\overline{v_{\alpha} v_{\beta}} = (v^2/3) \delta_{\alpha\beta}$ , получим

$$\mathbf{R}_{ab} = - \frac{m_a m_b}{3T} \mathbf{U} \int v_{\beta} C_{ab}(f_a^0, f_b^0 v_{b\beta}) d\mathbf{v}.$$

Подставим сюда  $C_{ab}$  согласно выражению (П. 1) и воспользуемся соотношением  $f_a^0(v_a') f_b^0(v_b') = f_a^0(v_a) f_b^0(v_b)$ , которое следует из закона сохранения энергии при столкновениях (пишем  $v_a$  вместо  $v$  для симметрии записи). Тогда

$$R_{ab} = -\frac{m_a m_b}{3T} U \int f_a^0 f_b^0 v_{a\beta} \{v_{b\beta}' - v_{b\beta}\} u d\sigma dv_a dv_b.$$

Для вычисления интеграла перейдем от переменных  $v_a, v_b$  к скорости центра тяжести  $v_c$  и к относительной скорости  $u$ :

$$v_a = v_c + \frac{m_b}{m_a + m_b} u; \quad v_b = v_c - \frac{m_a}{m_a + m_b} u. \quad (\text{П. 2})$$

Легко убедиться, что  $dv_a dv_b = dv_c du$  и  $f_a^0 f_b^0 = n_a n_b f_c^0 f_u^0$ , где

$$f_c^0 = \left(\frac{m_a + m_b}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{(m_a + m_b)v_c^2}{2T}}; \quad f_u^0 = \left(\frac{m_{ab}}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_{ab}u^2}{2T}}. \quad (\text{П. 3})$$

Интегрирование по  $dv_c$  легко выполняется, в результате член  $v_c$  из  $v_a$  выпадает, а интегрирование  $f_c^0$  дает единицу. Рис. 9 непосредственно показывает, что  $u_\beta (u_\beta - u_\beta') = u^2 (1 - \cos \vartheta)$ , и мы окончательно получаем

$$R_{ab} = -n_a n_b m_{ab} \alpha'_{ab} U, \quad (\text{П. 4})$$

где

$$\alpha'_{ab} = \frac{m_{ab}}{3T} \int u^3 \sigma'_{ab} f_u^0 du; \quad (\text{П. 5})$$

$$\sigma'_{ab}(u) = \int (1 - \cos \vartheta) d\sigma(u, \vartheta). \quad (\text{П. 6})$$

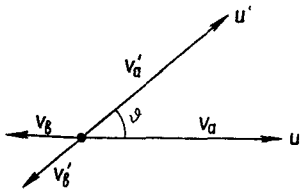


Рис. 9.

При  $\sigma'_{ab} = \alpha'_{ab}/u$  отсюда получается выражение (7. 4); при  $\sigma'_{ab} = \text{const}$  получается выражение (7. 5). Подставив в выражение (П. 6) резерфордовское сечение, получим расходящийся интеграл, обрезание которого дает выражение (7. 6).

Аналогично можно вычислить тепло трения  $Q_{ab}$ , выделяющееся в газе частиц  $a$  при столкновениях с частицами  $b$ , когда оба сорта частиц обладают максвелловскими распределениями с одинаковыми температурами и малым сдвигом  $U$ . В выражении

$$Q_{ab} = \int \frac{m_a v_a^2}{2} C_{ab} (f_a^0, f_b^0) dv_a$$

произведем разложение по сдвигу до квадратичных членов:

$$f_b = f_b^0 \left[ 1 - \frac{m_b}{T} (U v_b) - \frac{m_b}{2T} U^2 + \frac{m_b^2}{2T^2} (U v_b)^2 \right].$$

Отличный от нуля вклад дает только последний член:

$$Q_{ab} = \frac{m_a m_b^2}{4T^2} U_a U_\beta \int f_a^0 f_b^0 v_a^2 \{v_{b\alpha}' v_{b\beta}' - v_{b\alpha} v_{b\beta}\} u d\sigma dv_a dv_b.$$

Произведя замену  $v_a, v_b \rightarrow v_c, u$ , после простых вычислений получим

$$Q_{ab} = \frac{m_b}{m_a + m_b} n_a n_b m_{ab} \alpha'_{ab} U^2. \quad (\text{П. 7})$$



Выражение для  $Q_{ba}$  получается отсюда перестановкой индексов. Легко видеть, что  $Q_{ab} + Q_{ba} = -R_{ab}U$ , причем полное тепло, выделяющееся при трении, распределяется между компонентами обратно пропорционально их массам.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1946.
4. Ландау Л., Лифшиц Е. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
5. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
6. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
7. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных уравнений. М., Физматгиз, 1958.
9. Де-Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов. М., Гостехиздат 1956.
10. Пенинг Ф. Электрические разряды в газах. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
- 10а. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
- 10б. Половин Р. В., Черкасова К. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 649 (1962).
11. Ландау Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **7**, 203 (1937).
12. Каулинг Т. Г. Электропроводность ионизованного газа в магнитном поле с применениями к солнечной атмосфере и ионосфере. В сб.: «Современные проблемы астрофизики и физики Солнца». М., Изд-во иностр. лит., 1951.
13. Ландсгоф Р. Явления переноса в полностью ионизованном газе при наличии магнитного поля. В сб.: «Проблемы современной физики», № 2, М., Изд-во иностр. лит., 1956.
14. Спитцер Л., Хэрм Р. Явления переноса в полностью ионизованном газе. В сб.: «Проблемы современной физики», № 2. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
15. Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958.
16. Фрадкин Е. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, № 5, 1176 (1957).
17. Брагинский С. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, № 2, 459 (1957).
18. Брагинский С. И. Потоки частиц и тепла поперек сильно магнитного поля в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958.
19. Беляев С. Т. Кинетика ионизованного газа в сильном магнитном поле. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958.
20. Longmire C. L., Rosenbluth M. N. Phys. Rev., **103**, No. 3, 507 (1956).
21. Kaneko S. J. Phys. Soc. Japan, **15**, No. 9, 1685 (1960).
22. Kaufmann A. N. Phys. Fluids, **3**, No. 4, 610 (1960).
- 22а. Herdan R., Liley B. S. Rev. Mod. Phys., **32**, No. 4, 731 (1960).
- 22б. Robinson B. V., Bernstein T. B. Annals of Physics, **18**, No. 1, 110 (1962).
23. Bohm D. The Characteristic of Electrical Discharges in Magnetic Fields, ed. by A. Guthrie and R. K. Wakerling. N. Y., 1949.
- 23а. Spitzer L. Jr. Phys. Fluids, **3**, 600 (1960).

24. Шлютер А. Динамика плазмы. I. Основные уравнения, плазма в скрещенных полях. В сб.: «Проблемы современной физики», № 2. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
  25. Шлютер А. Динамика плазмы. II. Плазма с нейтральным газом. В сб.: «Проблемы современной физики», № 2. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
  26. Schlüter A. *Ann. d. Phys.*, **6—10**, 422 (1952).
  27. Spritzer L. Уравнения движения для идеальной плазмы. В сб.: «Проблемы современной физики», № 2. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
  28. Брагинский С. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, № 3, 645 (1957).
  29. Lehnert V. *Suppl. Nuovo Cimento*, **13**, No. 1 (1959).
  30. Давыдов Б. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **7**, 1069 (1937).
  31. Брагинский С. И., Шафранов В. Д. Плазменный шнур при наличии продольного магнитного поля. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958.
  32. Леонтович М. А., Осовец С. М. «Атомная энергия», **3**, 81 (1956).
  33. Брагинский С. И., Мигдал А. Б. Процессы в плазменном столбе при быстром нарастании тока. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958.
  34. Брагинский С. И., Гельфанд И. М., Федоренко Р. П. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958.
  35. Piddington J. H. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **94**, 638, 651 (1954).
  36. Франк-Каменецкий Д. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **30**, № 8 893 (1960).
  37. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 151 (1957).
  38. Сивухин Д. В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях. См. наст. сб., стр. 7.
  39. Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. См. наст. сб., стр. 98.
-

## ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

А. А. Веденов

В работе рассматриваются вопросы статистической термодинамики плазмы— системы частиц с кулоновским взаимодействием. Задачей статистической термодинамики является вычисление термодинамических функций системы взаимодействующих частиц, находящейся в тепловом равновесии. Проще всего эта задача решается, как известно, в случае, когда взаимодействие между частицами мало, т. е. когда они образуют идеальный газ.

Термодинамические величины неидеальных систем практически вычислить невозможно, если нет малого физического параметра, по которому можно вести разложение интересующих нас величин. По этой причине мы будем изучать лишь слабо-неидеальные газовые системы с кулоновскими силами. Малым параметром задачи в этом случае является отношение  $f/r$  средней амплитуды кулоновского рассеяния  $f \sim e^2/E$  ( $E$  — средняя энергия частиц плазмы) к среднему расстоянию между частицами  $r \sim n^{-1/3}$  ( $n$  — плотность частиц плазмы). Термодинамический потенциал плазмы может быть разложен по этому малому параметру, и мы будем интересоваться основными членами этого «вириального» разложения.

### § 1. Классическая система с кулоновским взаимодействием

Рассмотрим термодинамические функции системы с кулоновским взаимодействием между частицами в классическом случае. Под классическим подразумевается такой случай, когда система подчиняется Больцмановской статистике (т. е. эффекты вырождения предполагаются несущественными) и, кроме того, движение частиц этой системы может быть описано в рамках классической механики.

Такое описание справедливо при выполнении двух неравенств:  $\lambda \ll r$  и  $\lambda \ll f$ , где  $\lambda \sim \frac{\hbar}{mv}$  — средняя де-Бройлевская длина волны частиц ( $v$  — средняя тепловая скорость),  $r$  — среднее расстояние между частицами, а  $f$  — средняя амплитуда рассеяния (равная по порядку величины корню квадратному из среднего эффективного сечения рассеяния). Первое из этих неравенств приводит к малости эффектов квантовой статистики, а второе указывает на применимость классической картины для описания столкновений, т. е. взаимодействия частиц.

Как отмечено выше, мы будем рассматривать случай, когда система близка к идеальной, т. е. обусловленные взаимодействием поправки к термодинамическим величинам малы по сравнению с этими величинами.

Говоря о классических системах с кулоновским взаимодействием, необходимо заметить, что в таких системах взаимодействие между частицами является кулоновским лишь на больших расстояниях. На близком расстоянии потенциал взаимодействия частиц  $V$  должен отличаться от кулоновского. Действительно, статистический интеграл

$$\int e^{-\beta \sum_{i,k} V_{ik}} \prod_i dx_i$$

сильнейшим образом расходится из-за роста подынтегрального выражения на малых расстояниях, если между некоторыми частицами действуют силы притяжения, обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними. Это означает, что чисто классическое рассмотрение системы с  $V \sim \frac{1}{r}$  некорректно (см. § 2).

Поэтому, ограничиваясь здесь классическим рассмотрением, будем считать, что на малых расстояниях между двумя частицами действуют силы отталкивания, переходящие при удалении одной частицы от другой в кулоновские силы притяжения или отталкивания в зависимости от знака заряда обеих частиц.

В рассматриваемой задаче имеются три характерные длины: радиус действия сил отталкивания  $a$ , средняя амплитуда рассеяния в кулоновском поле  $e^2/T$  и среднее расстояние между частицами  $r^*$ .

Если  $a$  и  $e^2/T$ , характеризующие взаимодействие, малы по сравнению со средним межчастичным расстоянием  $r$ , то система мало отличается от идеальной. При этом формально можно считать малым параметром задачи плотность газа  $n \sim r^{-3}$  и попытаться найти разложение термодинамических функций исследуемой кулоновской системы по малому параметру  $n$ . Если в первом приближении пренебречь обеими характеризующими взаимодействием длинами, считая отношения  $a/r$  и  $e^2/Tr$  равными нулю, то мы придем к термодинамическим функциям идеального газа. Нас же будут интересовать в дальнейшем первые члены разложения искомых термодинамических функций по  $a/r$  и  $e^2/Tr$ , т. е. по плотности частиц  $n$ .

Для решения этой задачи нам понадобится бинарная корреляционная функция  $K(x_1, x_2)$ , представляющая собой вероятность нахождения частицы 2 в точке  $x_2$ , если частица 1 находится в точке  $x_1$ . С помощью функции  $K(x_1, x_2)$ , зависящей в случае

\* Среднюю де-бройлевскую длину волны  $\lambda$  в классическом случае можно считать равной нулю.

центральных сил лишь от расстояния  $|x_1 - x_2|$  между частицами 1 и 2, можно найти термодинамические функции произвольной классической системы с парным взаимодействием. Для этого можно воспользоваться, например, одной из двух следующих формул\*: для свободной энергии  $F$  единицы объема

$$F = F_0 + \frac{n^2}{2} \int_0^1 d\lambda \int dx V(x) K^{\lambda V}(x) \quad (1.1)$$

и для давления  $P$

$$P = nT - \frac{1}{6} \int dx x \frac{\partial V(x)}{\partial x} K(x). \quad (1.2)$$

Для смеси газов с плотностями  $n_\alpha$  формула (1.1) принимает вид

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda \int dx \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta V_{\alpha\beta}(x) K_{\alpha\beta}^{\lambda V}(x). \quad (1.1a)$$

Здесь  $F_0$  — свободная энергия идеального газа, а индекс  $\lambda V$  функции  $K$  означает, что она должна быть найдена для случая, когда потенциал взаимодействия между частицами равен  $\lambda V$ . Второй член формулы (1.1) представляет собой изменение энергии системы при адиабатическом включении взаимодействия. В формуле (1.2) второе слагаемое также обусловлено силами взаимодействия частиц: оно выражает отклонение уравнения состояния системы с взаимодействием от уравнения Клапейрона.

Корреляционная функция  $K(x)$  для малых расстояний между частицами  $x$  равна функции больцмановского распределения в поле с потенциалом  $V(x)$

$$K_s = e^{-V/T}. \quad (1.3)$$

Если мы воспользуемся выражением (1.3) для нахождения по формуле (1.1) или (1.2) поправки к давлению или свободной энергии, то получим бессмысленные бесконечные выражения, связанные с медленностью убывания на больших расстояниях величины

$$K_s - 1 \simeq e^2/Tx.$$

(эта величина представляет собой обусловленную взаимодействием поправку к корреляционной функции идеального газа, тождественно равной единице). Чтобы избежать этого, необходимо учитывать так называемое «дебаевское экранирование» потенциала  $e^2/x$  на больших расстояниях (см. задачу 3). Для определения

\* См. 1 и 2 задачи в конце этого параграфа.

этого экранированного потенциала  $U$  можно воспользоваться наряду с уравнением

$$K_l - 1 = e^{-\beta U} - 1 \simeq -\beta U \quad (1.4)$$

законом Пуассона, связывающим потенциал  $U$  с плотностью создающих его зарядов: точечного заряда  $e$  в начале координат и вероятностным распределением зарядов с плотностью  $eK_l$

$$\Delta U = 4\pi e(-e\delta(x) - \sum eK_l) * \quad (1.5)$$

Подставляя сюда  $K_l$  из уравнения (1.4), получим следующее уравнение для  $U$ :

$$\Delta U - U/D^2 = -4\pi e^2\delta(x) \quad (1.6)$$

(где «дебаевский радиус»  $D$  равен  $\sqrt{T/4\pi\Sigma ne^2}$  и значительно превышает среднее расстояние между частицами). Отсюда найдем экранированный потенциал

$$U = \frac{e^2}{x} e^{-x/D} \quad (1.7)$$

и корреляционную функцию на больших расстояниях ( $x \gg a$ ;  $x \gg \frac{e^2}{T}$ )

$$K_{l,\alpha\beta} \simeq 1 - \beta U_{\alpha\beta} + \frac{\beta^2 U_{\alpha\beta}^2}{2}; \quad (1.8)$$

$$U_{\alpha\beta} = \frac{e\alpha e\beta}{x} e^{-x/D}. \quad (1.9)$$

Следует заметить, что выражения (1.3) и (1.8) совпадают в области, где  $a \ll x \ll D$ , когда, с одной стороны, потенциал  $U$  является уже кулоновским, а с другой — дебаевское экранирование еще несущественно. Таким образом, формулы (1.3) и (1.8) для  $K_s$  и  $K_l$  полностью определяют корреляционную функцию в нужном нам приближении.

Теперь можно воспользоваться формулой (1.1) или (1.2) для определения различных термодинамических функций системы с помощью найденной бинарной корреляционной функции  $K$ . Получим, например, с помощью формулы (1.2) первые члены разложения давления разреженной классической кулоновской системы по плотности частиц  $n$ . Разобьем в выражении (1.2) область интегрирования по  $x$  на две: от нуля до некоторого значения  $R$  и от  $R$  до бесконечности. Значение  $R$  выберем так, чтобы

$$a \ll R \ll D. \quad (1.10)$$

Тогда в первой области для корреляционной функции  $K$  можно использовать выражение (1.3), а во второй области — корреля-

\* Сумма берется по различным сортам зарядов.

ционную функцию (1. 8) для больших расстояний. Подставляя эти выражения в формулу (1. 1а), получим

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \left( \int_{|x| < R} dx V_{\alpha\beta} K_{s, \alpha\beta}^{(\lambda V)} + \int_{|x| > R} dx V_{\alpha\beta} K_{l, \alpha\beta}^{(\lambda V)} \right). \quad (1. 11)$$

Производя интегрирование в последнем слагаемом правой части выражения (1. 11) и считая в соответствии с неравенствами (1. 10) отношение  $R/D$  малым по сравнению с единицей, получим

$$F = F_0 + \frac{T}{2} \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \int_{|x| < R} dx \left( e^{-\beta U_{\alpha\beta}} - 1 \right) - \frac{T}{8\pi D^3} \left( \frac{2}{3} - \frac{R}{2D} \right) + \left( \sum_{\alpha} n_\alpha e_\alpha^3 \right)^2 4\pi \int_0^1 \frac{d\lambda}{2} \lambda^2 \frac{\beta^2}{2} \ln \frac{D}{R} \quad (1. 12)$$

Заметим теперь, что при изменении  $R$  от значения, удовлетворяющего неравенствам (1. 10), до  $R = \infty$  выражение (1. 12), являющееся функцией  $R$ , меняется лишь на величину порядка  $n^2 T (\beta e^2)^3$ , оставаясь конечным. Поэтому, пренебрегая членами этого порядка в разложении  $F$  по плотности  $n$ , можно устранить неопределенность в выборе  $R$  в выражении (1. 12), если перейти к пределу  $R \rightarrow \infty$ :

$$F = F_0 - \frac{T}{12\pi D^3} + \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -2\pi T \int_0^R r^2 dr \sum_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \left( e^{-\beta V_{\alpha\beta}} - 1 \right) + \frac{TR}{16\pi D^4} + \frac{\pi}{3} \left( \sum_{\alpha} n_\alpha e_\alpha^3 \right)^2 \frac{1}{T^2} \ln \frac{D}{R} \right\}. \quad (1. 13)$$

Таким образом, для классической кулоновской системы мы получили первые члены разложения по плотности

$$F - F_0 = An^{3/2} + Bn^2 \ln n + Cn^2. \quad (1. 14)$$

Это разложение аналогично известному вириальному разложению для газовых систем с короткодействующими силами:

$$F - F_0 = B_2 n^2 T + \dots \quad (1. 15)$$

Здесь  $F_0$  — свободная энергия идеальной плазмы (без учета взаимодействия), а слагаемое  $An^{3/2}$  — так называемая «дебаевская поправка» к свободной энергии.

Характерным отличием разложения (1. 14) от обычного вириального разложения является наличие не только дробных степеней

плотности  $n$ , но также и появление множителей  $\ln n$ , содержащих плотность под знаком логарифма. В частном случае системы заряженных частиц, для которой выполняется соотношение

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha}^3 = 0^*,$$

логарифмический член в разложении по плотности исчезает, так что

$$F - F_0 = An^{3/2} + Cn^2.$$

Переход к случаю короткодействующих сил в выражениях (1. 13) — (1. 14) можно произвести, положив  $e = 0$  и устремив затем  $R \rightarrow \infty$ . При этом мы получаем первые члены разложения (1. 15) и значение второго вириального коэффициента

$$B_2 = -2\pi \int_0^{\infty} r^2 dr (e^{-\beta V(r)} - 1).$$

### ЗАДАЧИ

1. Выразить свободную энергию классической системы  $N$  частиц с центральным парным взаимодействием  $V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$  через бинарную корреляционную функцию  $K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ .

Дифференцируя выражение для свободной энергии системы со взаимодействием  $\lambda V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$

$$F(\lambda) = -T \ln \int \dots \int e^{-\lambda \beta \sum_{i>k} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|)} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N$$

по параметру  $\lambda$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\int \dots \int \sum_{i>k} V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|) e^{-\lambda \beta \sum_{i>k} V_{ik}} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N}{\int \dots \int e^{-\lambda \beta \sum_{i>k} V_{ik}} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N} = \\ &= \frac{N^2}{2\omega^2} \iint d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) K^{(\lambda V)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \end{aligned} \quad (1. 16)$$

где  $\omega$  — объем, а

$$K^{(\lambda V)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{\int \dots \int e^{-\lambda \beta \sum_{i>k} V_{ik}} d\mathbf{x}_3 \dots d\mathbf{x}_N}{\int \dots \int e^{-\lambda \beta \sum_{i>k} V_{ik}} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N}$$

бинарная корреляционная функция для взаимодействия  $\lambda V$ .

Интегрируя уравнение (1. 16) по  $\lambda$  в пределах от 0 до 1 и учитывая, что  $F(0)$  — свободная энергия идеального газа (так как при  $\lambda = 0$  взаимодействие «выключено»), а  $N/\omega = n$ , приходим к формуле (1. 1).

\* Кулоновская система с  $\sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha}^3 = 0$  называется симметричной.



2. Получить уравнение состояния классической системы, если известна бинарная корреляционная функция  $K(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ .

Применим известную из механики теорему вириала

$$2\langle t \rangle = \langle \Sigma \mathbf{f} \mathbf{x} \rangle$$

(где символ  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение,  $\mathbf{f}$  — сила, а  $t$  — кинетическая энергия) к системе  $N$  взаимодействующих частиц, находящихся в замкнутом объеме  $\omega$ . В этом случае

$$\langle t \rangle = N \frac{3}{2} T,$$

а вириал  $\sum_{k=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k$  складывается из вириала сил взаимодействия

$$\sum_{k>l} \frac{\partial V_{kl}}{\partial \mathbf{x}_{kl}} \mathbf{x}_{kl}$$

(где  $\mathbf{x}_{kl} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l$ ) и вириала сил давления на частицы со стороны стенок сосуда

$$\int P \mathbf{n} \mathbf{x} d\sigma = 3P\omega$$

(где  $\mathbf{n}$  — нормаль к стенке, а  $P$  — давление), так что

$$2N \frac{3}{2} T = 3P\omega + \left\langle \sum_{i>k} \mathbf{x}_{ik} \frac{\partial V_{ik}}{\partial \mathbf{x}_{ik}} \right\rangle. \quad (1.17)$$

Производя усреднение в выражении (1.17) с помощью формулы

$$\langle \Psi \rangle = \frac{\int \Psi e^{-\beta \Sigma V_{ik}} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N}{\int e^{-\beta \Sigma V_{ik}} d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N},$$

получаем уравнение (1.2):

$$\frac{P}{nT} = 1 - \frac{n}{6T} \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} K(\mathbf{x}).$$

3. Найти выражение для бинарной корреляционной функции почти идеальной классической кулоновской системы, исходя из распределения Гиббса

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N) = e^{-\beta \sum_{i>k} V_{ik}}; \quad V_{ik} = \frac{e_i e_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|}. \quad (1.18)$$

Дифференцируя (1.18) по  $\beta$  и интегрируя получающееся равенство по  $d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_N$ , получим следующую систему уравнений для корреляционных функций:

$$\begin{aligned} F_s(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_s) &= \int \mathcal{W} d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_N; \\ \frac{\partial F_s}{\partial \beta} + V_s F_s + N \int \sum_{k=1}^s V_{k, s+1} F_{s+1} d\mathbf{x}_{s+1} + \\ + \frac{N^2}{2} \int V_{s+1, s+2} F_{s+2} d\mathbf{x}_{s+1} d\mathbf{x}_{s+2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $V_s = \sum_{1 \leq i < k \leq s} V_{ik}$ ;  $N$  — число частиц (объем системы принят равным единице);  $N \gg 1$ ;  $N \gg s$ .

Будем искать решение системы (1. 19), предполагая, что корреляция между частицами мала. Это означает, что в первом приближении в корреляционной функции комплекса  $s$  частиц  $F_s$  можно учитывать лишь парные корреляции частиц комплекса, так что в этом приближении

$$F_1 - 1 = 0;$$

$$F_{12} - 1 = G_{12};$$

$$F_{123} - 1 = G_{12} + G_{13} + G_{23} + G_{12}G_{13} + \dots$$

$$F_{1234} - 1 = G_{12} + G_{13} + G_{14} + G_{23} + G_{24} + G_{34} + G_{12}G_{13} + G_{12}G_{14} + \dots$$

Подставляя эти выражения в одно из уравнений (1. 19) с  $s \geq 2$  (например, в уравнение с  $s = 2$ ), получаем уравнение для функции  $G$ :

$$0 = \frac{\partial G_{ab}}{\partial \beta} + V_{ab} + 2 \int \sum_c n_c G_{ac} V_{cb} d\mathbf{x}_c + \int \sum_{c,d} n_c n_d G_{ac} G_{bd} V_{cd} d\mathbf{x}_c d\mathbf{x}_d, \quad (1. 20)$$

где сумма берется по различным сортам заряда. Ищем решение в виде  $G_{ab} = \frac{e_a e_b}{\sum n e^2} G(|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|)$ . Тогда для компоненты Фурье  $g(\mathbf{k}, \beta)$  функции  $G(\mathbf{x}, \beta)$  из равенства (1. 20) получается уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} + 4\pi \sum n e^2 (1 + g)^2 / k^2 = 0.$$

Решая его с граничным условием  $g(\mathbf{k}, 0) = 0^*$ , находим

$$g(\mathbf{k}, \beta) = - \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k^2}$$

и

$$F_{ab} = 1 - \frac{\beta e_a e_b e}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|} \frac{-|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}{D}$$

где

$$\kappa^2 = D^{-2} = 4\pi\beta \sum_c n_c e_c^2.$$

## § 2. Квантовая система с кулоновским взаимодействием

Как было отмечено в предыдущем параграфе, рассмотрение неидеального газа с кулоновским взаимодействием в рамках классической статистической термодинамики невозможно (что видно уже из расходимости статистического интеграла при наличии кулоновского притяжения). Это связано с тем, что в случае, когда взаимодействующие по закону Кулона частицы находятся на не-

\* Соответствующим полному исчезновению корреляции при бесконечном повышении температуры.

большом расстоянии одна от другой, их относительное движение следует описывать квантовомеханически, а не с помощью законов классической механики; по этой причине и при нахождении термодинамических функций кулоновской системы нужно вычислять не статистический интеграл, а квантовомеханическую статистическую сумму.

Однако для нахождения первых членов разложения термодинамических потенциалов несимметричной ( $\sum ne^3 \neq 0$ ) плазмы по плотности  $n$  можно воспользоваться в основном классическим расчетом, поскольку эти члены оказываются слабо зависящими от квантового параметра задачи, содержащего постоянную Планка  $\hbar$ .

Как и в классическом случае, в рассматриваемой задаче участвуют три характерные длины: среднее расстояние между частицами  $r$ , средняя кулоновская амплитуда рассеяния  $e^2/T$  и длина  $\lambda$ , содержащая постоянную Планка. В качестве  $\lambda$  можно выбрать, например, среднюю де-Бройлевскую длину волны частиц  $\hbar/mu$ , где  $u$  — средняя тепловая скорость частиц.

Мы будем рассматривать здесь случай разреженной плазмы, когда  $r \gg \frac{e^2}{T}$ ;  $r \gg \lambda$ . Что касается отношения  $\frac{e^2}{T\lambda} \sim \frac{e^2}{\hbar u}$ , представляющего собой известный параметр квантовомеханической задачи о движении частицы в кулоновском поле, то мы будем считать его по порядку величины равным единице.

Возможность использования классического метода для нахождения первых членов разложения термодинамических функций по  $n$  связана с дальнедействующим характером кулоновских сил. Действительно, бинарная корреляционная функция заметно отличается от единицы вплоть до расстояний порядка дебаевского радиуса  $D$ , значительно превышающего в разреженной плазме длины  $\lambda$  и  $e^2/T$ . Поэтому имеется большая область значений  $x$

$$\lambda \ll x \leq D,$$

которая вносит основной вклад в интегралы (1. 1) или (1. 2) и в которой квантовыми эффектами можно пренебречь. Учесть же квантовые эффекты можно следующим образом: поскольку на расстояниях  $x \sim \lambda$  полученное в предыдущем параграфе выражение (1. 8) для корреляционной функции уже несправедливо, интегрирование по  $x$  в формуле (1. 1) следует вести не от  $x = 0$ , а от  $x \sim \lambda$ .

Подставляя в выражение (1. 1a) бинарную корреляционную функцию (1. 8) и интегрируя, получим (удерживая члены  $\sim n^2 \ln n$  и пренебрегая членами порядка  $n^2$ ):

$$F = F_0 - \frac{T}{12\pi D^3} + \frac{\pi}{3T^2} \left( \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha}^3 \right)^2 \ln \frac{D}{\lambda}. \quad (2. 1)$$

Мы видим, что для несимметричной плазмы в первые члены разложения  $F$  по плотности квантовая длина  $\lambda$  входит лишь под знаком логарифма, так что в нашем приближении, когда учитываются только члены порядка  $n^{3/2}$  и  $n^2 \ln n$ , точное значение  $\lambda$  несущественно.

Как указывалось выше, квантовые эффекты в системе многих частиц проявляются двояко: во-первых, если де-бройлевская длина волны частиц  $\lambda$  не мала по сравнению с амплитудой рассеяния, то взаимодействие частиц в газе нужно описывать с помощью квантовой механики; во-вторых, если  $\lambda$  становится сравнимой со средним расстоянием между частицами  $r$ , необходимо учитывать вырождение, пользуясь квантовой статистикой.

До сих пор в § 2 мы учитывали квантовые эффекты только первого типа. Посмотрим теперь, какой вид принимают разложения термодинамических потенциалов в условиях, когда существенно вырождение.

При увеличении  $\lambda$  вырождение становится существенным прежде всего для электронов. Ионы же из-за их большой массы имеют очень короткую длину волны, и их вырождением мы будем пренебрегать. Поправка к термодинамическому потенциалу идеальной плазмы  $\Omega^*$ , возникающая из-за взаимодействия зарядов плазмы, состоит в рассматриваемом случае из двух членов, которые можно назвать «дебаевским» и «обменным».

«Дебаевский» член обусловлен взаимодействием зарядов на значительно больших расстояниях, чем средняя амплитуда рассеяния. Как в классической кулоновской системе, так и в разреженной плазме «дебаевская» поправка к термодинамическому потенциалу имеет вид

$$-\frac{T}{12\pi D^3}, \quad (2.2)$$

где  $D$  — дебаевский радиус. Следует, однако, иметь в виду, что в газе, где существенны эффекты вырождения, дебаевский радиус определяется выражением

$$\left( \sum 4\pi \frac{\partial n}{\partial \mu} e^2 \right)^{-1/2}, \quad (2.3)$$

---

\* Термодинамический потенциал  $\Omega$  используется в статистике Гиббса с переменным числом частиц и определяется формулой (см., напр., Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М., Гостехиздат, 1951)

$$\Omega(\mu, T, \omega) = -T \ln \text{Sp} \exp -(\hat{H} - \hat{N}\mu)/T,$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы;  $\hat{N}$  — оператор полного числа частиц, а  $\mu$  — химический потенциал. Зная  $\Omega$ , можно найти уравнение состояния, теплоемкости и т. п. с помощью соотношений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -N; \quad P = -\frac{\Omega}{\omega}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial T} = -S.$$

переходящим в классическое  $(4\pi\beta \sum ne^2)^{-1/2}$  лишь в разреженном газе (когда  $\lambda \ll r$  и применима Больцмановская статистика).

«Обменную» поправку к термодинамическому потенциалу можно получить посредством усреднения выражения для энергии электростатического взаимодействия электронов между собой, причем усреднение можно проводить по состояниям идеального газа, поскольку мы интересуемся малыми поправками к термодинамическим потенциалам:

$$\frac{\text{Sp } e^{-\beta(\hat{H}_0 - \hat{N}\mu)} \sum_{pp'q} \frac{1}{2} V_q a_p^+ a_{p'}^+ a_{p'-q} a_{p+q}}{\text{Sp } e^{-\beta(\hat{H}_0 - \hat{N}\mu)}}; \quad (2.4)$$

$$V_q = \frac{4\pi e^2}{q^2}.$$

Так как оператор кинетической энергии имеет вид  $\hat{H}_0 = \sum_p \epsilon_p a_p^+ a_p$ , где  $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ , то при усреднении в выражении (2.4) дадут вклад лишь те члены суммы, в которых  $p' = p + q$ . Производя статистическое усреднение с помощью формулы

$$\frac{\text{Sp } e^{-\beta(\hat{H}_0 - \hat{N}\mu)} a_p^+ a_p}{\text{Sp } e^{-\beta(\hat{H}_0 - \hat{N}\mu)}} = n_p = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1}. \quad (2.5)$$

Найдем выражение для «обменной» поправки:

$$-\frac{1}{2} \int V_q n_p n_{p+q} dp dq. \quad (2.6)$$

Складывая «дебаевский» и «обменный» члены, получим формулу для поправки к термодинамическому потенциалу  $\Omega$ , обусловленной кулоновским взаимодействием частиц в плазме с вырожденными электронами:

$$\Delta\Omega \equiv \Omega - \Omega_0 = -\frac{1}{2} \int V_q n_p n_{p+q} dp dq - \frac{T}{12\pi D^3}. \quad (2.7)$$

В предельном случае сильного вырождения, когда  $\lambda \sim r$ , обменная поправка равна по порядку величины  $e^2/r$  (на одну частицу) и значительно превышает дебаевскую. Нужно сказать, что в этом предельном случае формула (2.7) применима только к плазме высокой плотности. Это ограничение следует из того, что обменная поправка  $e^2/r$  должна составлять лишь небольшую часть кинетической энергии, равной по порядку величины  $\hbar^2/mr^2$ ,

а это возможно только в том случае, когда среднее расстояние между частицами значительно меньше радиуса Бора

$$r \ll \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

В почти невырожденной плазме, где  $\lambda \ll r$ , основной вклад в формулу (2. 7) вносит дебаевский член; обменный член при этом уменьшается и становится по порядку величины равным  $e^2\lambda^2/r^3$ .

Мы видим, таким образом, что наряду с понижением энергии плазмы, связанной с дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия [дебаевская поправка в формуле (2. 7)], в квантовой плазме возникает дополнительное уменьшение энергии обменного типа.

### § 3. Степень ионизации плазмы

При повышении температуры нейтральный газ частично ионизуется. Если получающаяся при этом неполностью ионизованная плазма находится в состоянии полного термодинамического равновесия, то степень ионизации может быть найдена из условия минимальности свободной энергии системы. Рассмотрим случай, когда средняя де-бройлевская длина волны электронов в плазме значительно меньше среднего расстояния между ними, т. е. когда электроны можно описывать с помощью бoльцмановской статистики. Предположим, что средняя энергия частиц плазмы значительно меньше энергии ионизации.

$$T \ll I.$$

Тогда отношение числа атомов, находящихся на первом (или более высоком) возбужденном уровне, к числу атомов в основном состоянии весьма мало. Мы можем считать, таким образом, что плазма состоит из смеси нейтральных атомов в основном состоянии (с плотностью  $N$ ) и ионизованной компоненты — равного количества ионов и электронов ( $n_+ = n_- \equiv n$ ).

Мы будем рассматривать разреженную плазму, когда среднее расстояние между частицами велико по сравнению с амплитудой рассеяния, и, следовательно, плазму можно считать смесью трех идеальных газов: нейтральных атомов, ионов и электронов. Свободная энергия такой смеси на единицу объема равна сумме свободных энергий компонент

$$F = -NT \ln \left[ \frac{e}{N} \left( \frac{M+m}{2\pi\hbar^2} T \right)^{3/2} e^{I/T} \right] - \\ - 2nT \ln \left[ \frac{e}{n} \left( \frac{VMm}{2\pi\hbar^2} T \right)^{3/2} \right], \quad (3. 1)$$

где  $M$  и  $m$  — массы иона и электрона. При термодинамическом равновесии  $F$  минимальна, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0, \quad (3.2)$$

при дополнительном условии  $N + n = \text{const}$ , выражающем сохранение числа частиц. Подставляя выражение (3.1) в уравнение (3.2), находим

$$\frac{N}{n^2} \frac{m'T}{2\pi\hbar^2} e^{-I/T} = 1; \quad m' = \frac{mM}{m+M}.$$

Отсюда следует, что степень ионизации плазмы  $\alpha$  определяется формулой (называемой обычно формулой Саха):

$$\alpha \equiv \frac{n}{N+n} = \frac{1}{\sqrt{1+K}}, \quad (3.3)$$

причем константа ионизационного равновесия  $K$  равна

$$K = \frac{P}{T} \left( \frac{m'T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} e^{I/T}; \quad P = (N + 2n) T. \quad (3.4)$$

Предэкспоненциальный множитель в формуле (3.4) по порядку величины равен  $(\lambda/r)^3$  и в рассматриваемом случае Больцмановской статистики очень мал. Поэтому степень ионизации в разреженной термодинамически равновесной плазме может быть значительной при малых  $T/I$ .

Формулу (3.3) можно применять и в случае, когда при нагревании нейтрального газа происходит диссоциация его молекул. Константа диссоциации здесь также определяется выражением (3.4) с тем лишь отличием, что величина  $I$  имеет в этом случае смысл энергии диссоциации молекулы, а  $m'$  есть приведенная масса атомов, образующихся при ее распаде. Если молекула диссоциирует на пару противоположно заряженных ионов, то получающийся при нагревании частично диссоциированный газ является примером классической плазмы. При увеличении плотности такой плазмы электростатические силы, действующие между частицами заряженной компоненты, будут понижать энергию системы и диссоциация молекулы становится более выгодной, чем в разреженной плазме. Для степени диссоциации (ионизации) такой неидеальной плазмы формула Саха будет давать заниженный результат.

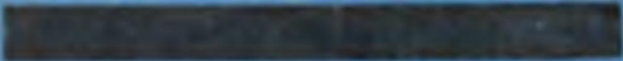
## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
<b>Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях. Д. В. Сивухин</b>	7
§ 1. Движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле	—
§ 2. Движение ведущего центра	11
§ 3. Происхождение дрейфов	26
§ 4. О сглаживании и усреднении величин, содержащих быстро колеблющиеся слагаемые	34
§ 5. Полная система уравнений движения в дрейфовом приближении	38
§ 6. Более точная система уравнений движения в дрейфовом приближении	42
§ 7. Вывод некоторых вспомогательных формул	46
§ 8. Вывод последовательной системы уравнений движения в дрейфовом приближении	60
§ 9. Другой подход к уравнению движения ведущего центра	65
§ 10. Примеры	67
§ 11. Дрейфовые интегралы движения в постоянных электрическом и магнитном полях	86
§ 12. Теорема Лиувилля в дрейфовом приближении	90
§ 13. Об обобщении дрейфовой теории на случай сильных поперечных электрических полей	94
<i>Литература</i>	97
<b>Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. Б. А. Трубников</b>	98
<b>I Пробные частицы в плазме</b>	—
§ 1. Сила «трения» при рассеянии в поле Кулона	—
§ 2. «Кулоновский логарифм» и роль далеких пролетов	100
§ 3. Средняя сила, действующая на частицу в плазме	103
§ 4. Пробные частицы в плазме	106
§ 5. Скорость изменения моментов	108
§ 6. Особенности кулоновского взаимодействия. Введение потенциальных функций $\psi$ и $\phi$	112
§ 7. Использование сечений рассеяния	115
<b>II. Кинетическое уравнение для частиц с кулоновским взаимодействием</b>	124
§ 8. Движение частиц в фазовом пространстве	—
§ 9. Выражение для потока	126
§ 10. Сила динамического трения и тензор диффузии	129
§ 11. Кинетическое уравнение при кулоновском взаимодействии	133
§ 12. Кинетическое уравнение с учетом поляризации среды	136
<b>III. Кинетические явления в высокотемпературной плазме</b>	—
§ 13. Пробная частица в среде покоящихся бесконечно тяжелых полевых частиц	150
§ 14. Решение кинетического уравнения для предыдущего случая. «Простейшее время релаксации»	154



§ 15. Сферически-симметричное распределение полевых частиц . . .	156
§ 16. Явление «убегающих электронов» . . . . .	161
§ 17. Максвелловское распределение полевых частиц. Времена релаксации . . . . .	164
§ 18. Плоский поток в равновесной плазме . . . . .	168
§ 19. Передача энергии . . . . .	172
§ 20. Установление равновесия в двухкомпонентной плазме . . . . .	177
<i>Литература</i> . . . . .	182
<b>Явления переноса в плазме С. И. Брагинский</b> . . . . .	183
§ 1. Уравнения переноса . . . . .	—
§ 2. Уравнения переноса простой плазмы (сводка результатов) . . . . .	191
§ 3. Кинетика простой плазмы (качественное рассмотрение) . . . . .	195
§ 4. Кинетика простой плазмы (количественное рассмотрение) . . . . .	209
§ 5. Некоторые парадоксы . . . . .	226
§ 6. Гидродинамическое описание плазмы . . . . .	232
§ 7. Многокомпонентная плазма . . . . .	244
§ 8. Примеры . . . . .	257
<i>Приложение</i> . . . . .	269
<i>Литература</i> . . . . .	271
<b>Термодинамика плазмы А. А. Веденов</b> . . . . .	273
§ 1. Классическая система с кулоновским взаимодействием . . . . .	—
§ 2. Квантовая система с кулоновским взаимодействием . . . . .	280
§ 3. Степень ионизации плазмы . . . . .	284

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ



ГОСАТОМИЗДАТ · 1963