

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

*Под редакцией М. А. ЛЕОНТОВИЧА*

ВЫПУСК 2



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛИТЕРАТУРЫ  
ПО АТОМНОЙ НАУКЕ И ТЕХНИКЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО КОМИТЕТА  
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР

Москва 1963

*Второй выпуск серии сборников «Вопросы теории плазмы» является продолжением работ первого выпуска.*

*Во втором выпуске освещаются в основном вопросы теории, связанные с проблемой удержания высокотемпературной плазмы электромагнитными полями. Производится систематическое исследование структуры магнитных полей. Излагаются методы и результаты решения уравнений движения зарядов в заданном электромагнитном поле. Освещается гидродинамическая теория удержания плазмы, которая включает в себя проблемы равновесия и устойчивости плазмы в квазистационарном магнитном поле.*

---

## ГЕОМЕТРИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*А. И. Морозов, Л. С. Соловьев*

### § 1. Общие замечания

Решение проблемы управляемых термоядерных реакций впервые выдвинуло задачу — найти конструкционный материал, способный удерживать вещество, нагретое до температур, достигающих многих миллионов градусов. Очевидно, что таким материалом в условиях Земли может быть только электромагнитное поле.

Перспективность использования электромагнитных полей различных видов для устойчивого удержания плазмы требует детального изучения свойств этих полей.

Настоящая работа посвящена рассмотрению квазистационарных и статических магнитных полей, которые для краткости мы будем называть в дальнейшем магнитными полями. Особый интерес, который проявляется именно к магнитным полям, объясняется тем, что электрическое квазистационарное поле вообще не может удерживать в равновесии плазменную конфигурацию, а волновые электромагнитные поля (СВЧ, свет), хотя в принципе и могут удерживать плазму, однако трудности получения таких полей большой амплитуды еще слишком велики.

Как конструкционный материал магнитное поле резко отличается от обычных материалов — дерева, стали, бетона и т. п. И дело здесь даже не в том, что обычные материалы видимы и осязаемы, — существенной является невозможность изготовления из поля «кирпичей», при помощи которых можно было бы создавать любые заданные конструкции. Магнитное поле выступает как единое целое, поскольку локальные возмущения могут существенно исказить его структуру в целом. Это, в частности, особенно сильно проявляется у тороидальных магнитных полей, которым посвящена основная часть настоящей работы.

Практическое использование магнитного поля для удержания плазмы требует решения ряда вопросов. В первую очередь необходимо выяснить, какие именно свойства поля определяют устойчивое удержание как отдельных частиц, так и плазмы.

Исследование условий удержания отдельных частиц в дрейфовом приближении и условий существования и устойчивости ряда

классов равновесных плазменных конфигураций в гидродинамическом приближении показало, что удерживающие свойства магнитного поля зависят, прежде всего, от геометрии его силовых линий и поведения в пространстве модуля его напряженности  $B = |\mathbf{B}|$ .

Геометрия силовых линий может выступать в критериях равновесия и устойчивости различно: в выпуклости или вогнутости силовых линий, в величине градиента удельного объема магнитных трубок, в существовании магнитных поверхностей и угла прокручивания и в ряде других характеристик, о чем подробно рассказывается в § 2. Дальнейшее развитие теории равновесия и устойчивости плазменных конфигураций, особенно кинетической теории, может выявить новые важные характеристики силовых линий.

Все это выдвигает задачу детального исследования структур, образуемых магнитными силовыми линиями. И эту область теории естественно было бы назвать морфологией магнитного поля.

Если напряженность поля  $\mathbf{B}$  является локальной величиной, то силовые линии являются интегральными характеристиками поля, и это резко усложняет их изучение. Тем не менее к настоящему времени изучен большой класс конкретных полей, и общая картина морфологии магнитных полей значительно прояснилась. Успех дальнейшего развития морфологии магнитного поля во многом будет зависеть от разработки новых эффективных методов исследования дифференциальных уравнений магнитных силовых линий.

При изложении материала мы придерживались принципа последовательного описания полей все возрастающей сложности (§ 4, 5, 7), связывая их по возможности с конкретными магнитными системами, удерживающими плазму. Эти системы несколько условно могут быть разделены на две группы:

а) системы, в которых требуемая геометрия поля создается в основном токами, текущими в плазме; к таким системам относятся Зета и Токамак;

б) системы, в которых магнитное поле определяется внешними токами, а собственным полем токов, текущих в плазме, можно либо пренебречь (stellараторы, ловушки с магнитными пробками), либо учесть наличие токов в плазме с помощью граничного условия  $(\mathbf{B}_n) = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности плазмы (ловушки со встречными полями).

Конкретные выражения для поля в системах первой группы можно найти только путем совместного решения уравнений поля и уравнений магнитной гидродинамики. Этим полям и соответствующим им конфигурациям плазмы посвящена работа В. Д. Шафранова, публикуемая в этом же выпуске.

В системах второй группы, называемых магнитными ловушками, магнитное поле в первом приближении является безвихревым и определяется поэтому только уравнениями поля. Рассмотрению таких полей и посвящена в основном иллюстративная часть настоящей работы.

Ряд изучаемых в настоящее время магнитных ловушек изображен на рис. 1. Эти ловушки делятся на тороидальные, в которых основная часть силовых линий не пересекает стенок камеры, и торцовые, у которых все силовые линии пересекают стенки камеры.

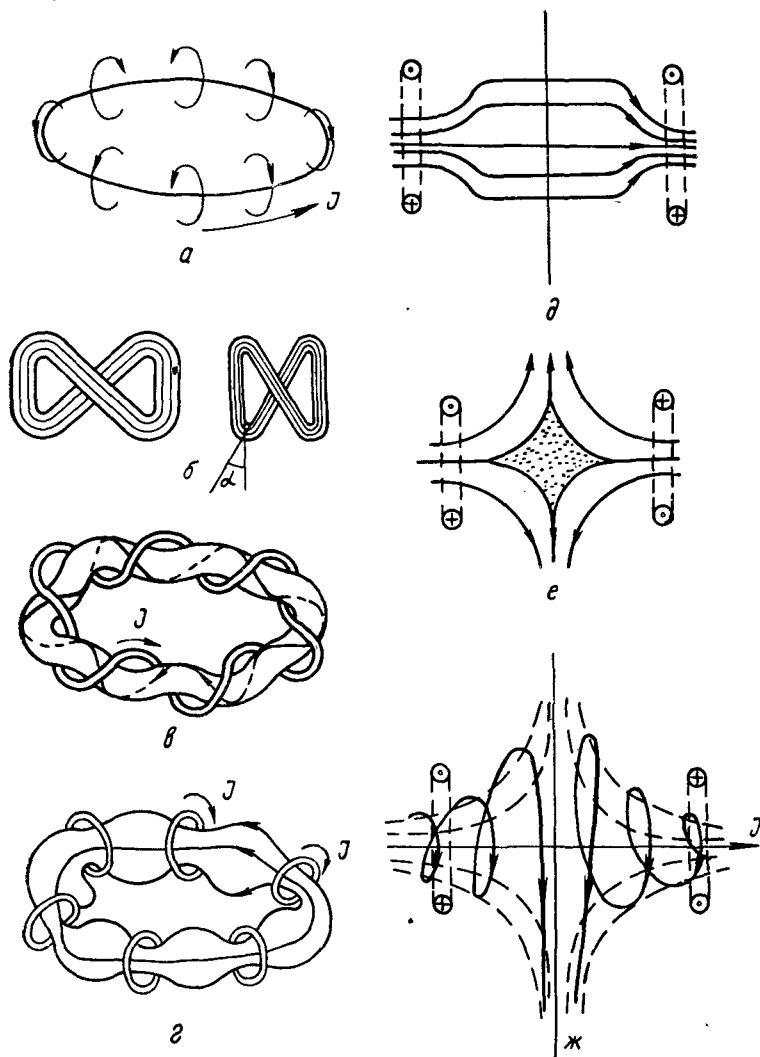


Рис. 1

К тороидальным ловушкам относится левитрон, использующий магнитное поле кольца с током (рис. 1, а), стелларатор в виде восьмерки, использующий квазиоднородное поле с осью двоякой кривизны (рис. 1, б), стелларатор с винтовым полем (рис. 1, в), система с гофрированным полем (рис. 1, г).

К торцовым ловушкам относятся система с магнитными пробками (рис. 1, *д*), система со встречными полями (рис. 1, *е*), а также системы с комбинированными полями (рис. 1, *ж*).

При практическом осуществлении магнитных ловушек большое значение имеет устойчивость структуры выбранного поля относительно малых возмущений. Это особенно важно для тороидальных систем, где проблема устойчивости приобретает нетривиальный характер. Исследованию устойчивости полей посвящен § 6.

В настоящей работе мы лишь в малой степени касаемся практически важного вопроса об отыскании токов, создающих заданные

безвихревые поля, поскольку в принципе он решается просто. Не рассматриваются в ней и такие технические вопросы, как расчет катушек [25] или выбор оптимальной геометрии поля для тех или иных задач.

Несколько слов об истории предмета.

В течение длительного времени широко обсуждались лишь простейшие виды полей — поля прямой нити, плоских контуров, а также постоянных магнитов. Изучение этих частных полей привело к весьма распространенному мнению о том, что магнитные

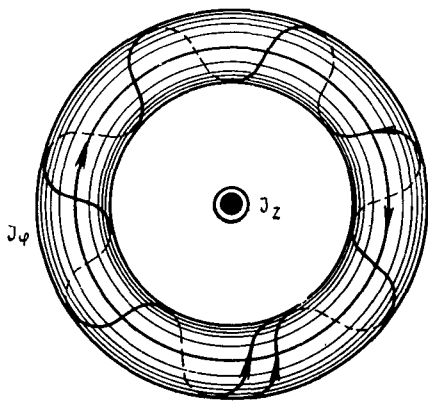


Рис. 2

силовые линии в силу условия  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  или замыкаются, или уходят в бесконечность. И. Е. Тамм (1928) на примере поля кольца и прямого тока показал [1], что существуют силовые линии, которые не замыкаются и не уходят в бесконечность (рис. 2). Потом стало ясно, что эти силовые линии являются наиболее общими.

Следующий крупный шаг был сделан Л. Спитцером [2], доказавшим, что существуют тороидальные безвихревые поля, силовые линии которых непрерывно обвивают кольцевую тороидальную ось (так называемую магнитную ось) и с большой точностью ложатся на тороидальные поверхности, называемые магнитными поверхностями\*.

Исследуя равновесие и устойчивость плазмы в тороидальных системах, Спитцер с сотрудниками показали важность понятия магнитной поверхности, скорости обвивания (характеризуемого параметром прокручивания  $\omega$ ) силовой линией магнитной поверхности, а также зависимости  $\omega$  от расстояния до магнитной оси. Эти работы Спитцера и его сотрудников легли в основу теории стеллараторов.

\* В примере И. Е. Тамма [1] в силу симметрии силовые линии точно ложатся на магнитную поверхность.

В последующих работах была изучена точная структура симметричных полей, для которых удается свести задачу нахождения силовых линий к квадратурам [3], и с помощью метода усреднения выяснено влияние различных малых возмущений на структуру магнитного поля [4, 5]. В работе [3] установлено также понятие сепаратрисы (см. § 2). В работах [6, 7, 8] описано впервые обнаруженное с помощью численного счета разрушение магнитных поверхностей, на основе чего дана общая качественная картина поля при отсутствии симметрии [9]. Наконец, в работах [10, 11] изложен характер разрушения сепаратрисы при возмущениях.

В свою очередь исследования по теории равновесия и устойчивости плазмы [12, 13, 14, 15] привели к понятию удельного объема магнитной трубки и удельного объема магнитной поверхности.

## § 2. Основные понятия

### 1. Уравнения квазистационарного магнитного поля

Напряженность статического, или квазистационарного, магнитного поля  $\mathbf{B}$  определяется из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока, а  $c$  — скорость света.

Если плотность тока  $\mathbf{j}$  всюду задана, то при расчете поля удобно использовать векторный потенциал  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (2.3)$$

который при введении добавочного условия

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (2.4)$$

удовлетворяет простому уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.5)$$

Хорошо известно решение этого уравнения

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}' dv'}{R}; \quad dv' = dx' dy' dz', \quad (2.6)$$

откуда непосредственно следует формула Био — Савара для определения напряженности поля по заданным токам

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}' \mathbf{R}]}{R^3} dv'; \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'.$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения, а  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор, пробегающий всю область интегрирования, где  $\mathbf{j}' \neq 0$ .

Определением поля  $\mathbf{B}$  мы, как правило, не будем заниматься, считая напряженность поля  $\mathbf{B}$  известной величиной.

В областях, где  $\mathbf{j} = 0$ , поле, как это следует из уравнения (2. 2), можно описывать скалярным потенциалом

$$\mathbf{B} = \nabla\Phi, \quad (2. 8)$$

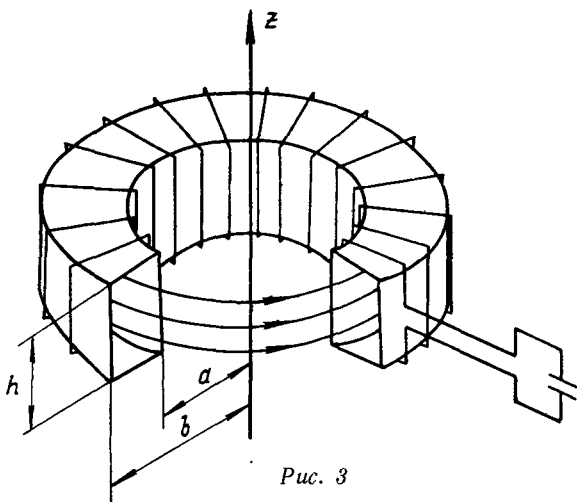


Рис. 3

который в силу уравнения (2. 1) удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2. 9)$$

В случаях, когда в некотором объеме известно поле (например, безвихревое), часто бывает важно подобрать токи, с помощью которых данное поле может быть получено. Эта задача решается неоднозначно, поскольку для получения заданного поля можно взять проводники разных размеров и форм. Поясним сказанное примером.

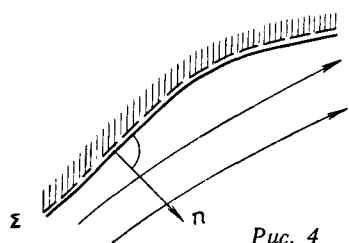


Рис. 4

Пусть внутри тора прямоугольного сечения необходимо получить безвихревое поле, имеющее лишь азимутальную компоненту, спадающую как  $1/r$  (рис. 3). Это поле мы можем получить как с помощью прямого проводника, идущего вдоль оси  $z$ , так и с помощью коробчатого проводника или прямоугольной катушки, у которой магнитное поле существует лишь внутри интересующей нас области, а также множеством других способов.

Однако способ коробчатого проводника-экрана или аналогичной по форме катушки наиболее интересен, так как при этом поле создается только в нужном объеме. Этот метод можно распространить на безвихревые поля любой геометрии, для чего необходимо



использовать касательные к полю (рис. 4) экраны (катушки), в каждой точке которых должен течь поверхностный ток, равный на основании уравнения (2. 2)

$$\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n} \mathbf{B}] \Big|_{\Sigma}. \quad (2. 10)$$

## 2. Силовые линии и магнитные трубки

Знание напряженности поля  $\mathbf{B}$  как функции координат еще не дает ясного представления о свойствах магнитного поля как ловушки для плазмы и отдельных частиц. «Ловушечные» свойства поля определяются прежде всего геометрией силовых линий поля и характером зависимости  $B = |\mathbf{B}|$  от координат.

Большая роль силовых линий обусловлена тем, что и плазма, и частицы легко перемещаются вдоль силовых линий магнитного поля. Если, например, плазма подчиняется уравнениям магнитной гидродинамики, то в состоянии равновесия справедливо уравнение

$$\nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}].$$

Умножая его на  $\mathbf{B}$ , получим

$$(\mathbf{B} \nabla p) = 0,$$

т. е. давление плазмы вдоль силовой линии в состоянии равновесия постоянно. Поэтому равновесную гидродинамическую конфигурацию, удерживаемую только магнитным полем, можно получить лишь в тороидальной системе, когда силовые линии не пересекают стенок камеры.

Значение  $B = |\mathbf{B}|$  как функции координат в проблеме удержания частиц и плазмы отчетливо проявляется, например, при рассмотрении движения частиц в дрейфовом приближении [27]. Известно, что при наличии большой поперечной составляющей скорости частица отражается от областей с большой напряженностью поля. На этом основаны так называемые ловушки с пробками (см. рис. 1,  $\delta$  и  $\varepsilon$ ).

Уравнение силовых линий

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (2. 11)$$

имеет два интеграла:

$$f(x, y, z) = c_1, \quad g(x, y, z) = c_2,$$

каждый из которых представляет собой поверхность, состоящую из силовых линий. Пересечение двух таких поверхностей определяет одну силовую линию.

Очевидно, что способы задания поля с помощью  $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$  и с помощью  $B$  и силовых линий  $(f, g)$  формально эквивалентны, так как одно однозначно определяет другое и наоборот.

Однако практически они не эквивалентны, поскольку нахождение силовых линий при известном  $\mathbf{B}$  требует решения нелинейных дифференциальных уравнений (2. 11), тогда как определение направления вектора поля  $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{B}}{B}$  по заданным силовым линиям сводится к дифференцированию

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{[\nabla f \nabla g]}{\sqrt{[\nabla f \nabla g]^2}}. \quad (2. 12a)$$

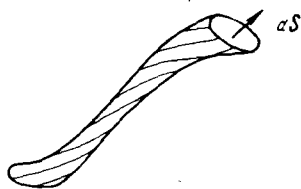


Рис. 5

В связи с этим укажем на интересный способ задания поля, данный в работе [26]. Из уравнения непрерывности следует, что произвольное магнитное поле может быть задано двумя функциями. В частности, можно записать

$$\mathbf{B} = [\nabla F \nabla G]. \quad (2. 12b)$$

Тогда уравнение непрерывности удовлетворяется автоматически. Подставляя выражение (2. 12b) в уравнения (2. 11), получим интегралы системы (2. 11):

$$F = \text{const}, \quad G = \text{const}.$$

Обратное, очевидно, несправедливо: не всякие интегралы  $f$  и  $g$  системы (2. 11) дают свое поле при их подстановке в формулу

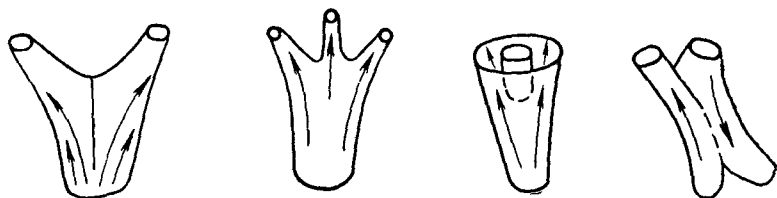


Рис. 6

(2. 12b). Задание поля формулой (2. 12b) удобно при некоторых теоретических исследованиях, поскольку в принципе это наиболее адекватное описание для наших целей, однако фактическое определение  $F$  и  $G$  даже для безвихревого поля наталкивается на значительные математические трудности.

Наряду с силовой линией часто рассматривается магнитная трубка, под которой понимают трубку бесконечно малого сечения  $dS$ , образованную силовыми линиями (рис. 5).

Из уравнения (2. 1) следует, что внутри трубки магнитный поток  $d\Phi = \mathbf{B} dS$  сохраняется\* и она не может неожиданно обрваться. Однако трубка может расщепиться на две или на большее

\* Магнитную трубку иногда удобно представлять заключенной в идеально проводящую оболочку, совпадающую с поверхностью трубки. Поле в такой трубке определяется из уравнения (2. 9) при граничном условии на поверхности  $\mathbf{nB} = 0$ .

число (рис. 6). Это ведет к расщеплению в особой точке и силовых линий. В § 9 рассмотрено несколько таких примеров.

Если силовая линия не расщепляется, то она не имеет ни начала, ни конца. Поэтому априори возможны три типа нерасщепляющихся силовых линий:

а) силовые линии, начинающиеся в бесконечности и уходящие в бесконечность;

б) силовые линии (замкнутые или незамкнутые), все время остающиеся в ограниченном объеме;

в) силовые линии, приходящие из бесконечности и «запутывающиеся» в конечном объеме.

Нетрудно видеть, что перечисленные типы силовых линий действительно могут иметь место.

### 3. Удельный объем магнитной трубки

Знание силовых линий и модуля напряженности позволяет вычислить ряд характеристик поля, которые играют важную роль в теории равновесия и устойчивости плазменных конфигураций.

Простейшей характеристикой является удельный объем [12, 13] магнитной трубки  $U$ , под которым понимается отношение геометрического объема трубки  $dV$  к магнитному потоку  $d\Phi$ , проходящему внутри нее, т. е.

$$U = \frac{dV}{d\Phi}. \quad (2.13)$$

Учитывая сохранение потока внутри трубки, получим

$$U = \int \frac{dS_n dl}{dS_n B} = \int \frac{dl}{B}. \quad (2.14)$$

Здесь  $dS_n$  — площадь нормального сечения трубки. Интеграл в выражении (2.14) берется вдоль всей силовой линии, если она замкнута, или между условными точками, соответствующими началу и концу трубки. При рассмотрении плазменных конфигураций начало и конец трубки определяются областью, занятой плазмой. Применение понятия удельного объема к бесконечной силовой линии требует иного подхода, о чем будет сказано ниже.

Поясним теперь смысл понятия «удельный объем» на примере редкой плазмы ( $\beta = \frac{8\pi p}{B^2} \ll 1$ ), находящейся в поле с замкнутыми силовыми линиями. Как всякий газ, имеющий конечную температуру, плазма в магнитном поле стремится расширяться. Однако при высокой проводимости она не может двигаться независимо от магнитного поля. Поэтому при достаточно быстром расширении плазмы вместе с ней будет расширяться и содержащая ее магнитная трубка, вытесняя или меняя места с другими магнитными трубками без плазмы, имеющими равный магнитный поток \*.

\* Равенство потоков следует из условия  $\beta \ll 1$ .

Из рис. 7 видно, что плазма, расширяясь, перемещается в область поля, характеризуемую большим удельным объемом. В частности, если удельный объем магнитных трубок по направлению к стенкам камеры возрастает, то оторванная от стенок плазменная конфигурация будет гидродинамически неустойчивой и, наоборот, если удельный объем убывает, то система устойчива.

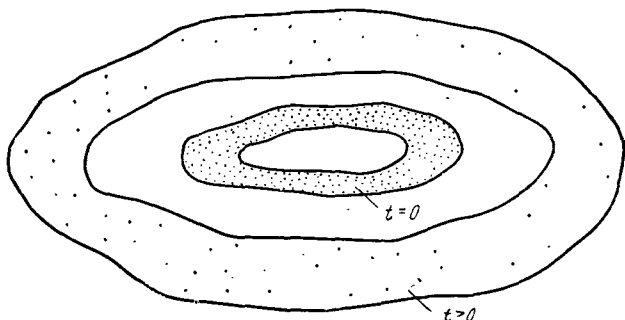


Рис. 7

Пусть, например, редкая плазма находится в поле бесконечной прямой нити [13]. В этом случае существует равновесная плазменная конфигурация в виде бесконечного полого цилиндра (рис. 8, а).

Однако достаточно хотя бы немного возмутить внешнюю поверхность плазменного цилиндра, как на ней станут быстро расти кольцевые желобки, выступающие части которых начнут непрерывно двигаться по направлению к стенкам камеры (см. рис. 8, б). В то же время возмущение внутренней поверхности цилиндра не приведет к развитию неустойчивости. Это обусловлено тем, что в данном случае удельный объем

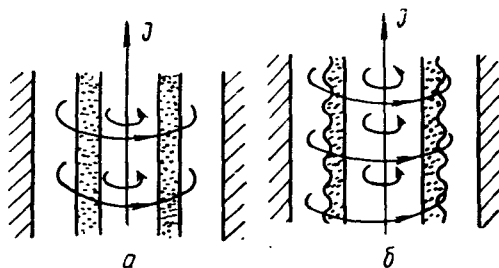


Рис. 8

$$U = \frac{\pi c}{J} r^2; \quad B = \frac{2J}{cr} \quad (2.15)$$

возрастает с увеличением радиуса.

Неустойчивость, связанная с возрастанием удельного объема по направлению к стенке камеры, получила название желобковой или конвективной неустойчивости.

В работе [16] показано, что зависимость удельного объема от координат определяет не только устойчивость, но и равновесие плазмы в полях с замкнутыми силовыми линиями и в про-

бочных ловушках. Оказывается, что поверхности равного давления плазмы  $p = \text{const}$  должны в состоянии равновесия совпадать с поверхностями  $U = \text{const}$ .

#### 4. Тороидальные магнитные поля

Выше было отмечено, что при гидродинамическом равновесии давление плазмы вдоль силовой линии постоянно. Этот вывод будет практически всегда справедлив, если поле удерживает плазму в течение заметно большего времени, чем время столкновения\*. Поэтому особый интерес для удержания плазмы представляют ловушки тороидального типа, где основная часть силовых линий не пересекает стенок камеры. Более строго — под тороидальными полями мы будем понимать поля, содержащие торообразную область  $V_i$ , внутри которой силовые линии не расщепляются и делают неограниченное или практически неограниченное число оборотов вдоль большой окружности тора (рис. 9,  $\theta$  — направление).

Объем  $V_i$  будем называть внутренней, а остальную часть пространства  $V_e$  — внешней областью тороидального поля. Поверхность, разделяющую эти области, назовем сепаратрисой  $S_c$ . Очевидно, наибольший практический интерес представляет внутренняя часть тороидального поля.

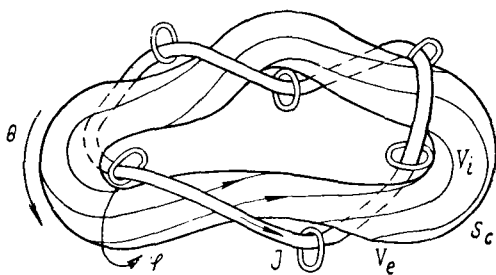


Рис. 9

Определения  $V_i$ ,  $V_e$  и  $S_c$  требуют пояснений. Тороидальные поля могут быть в принципе созданы двумя способами: с помощью системы линейных проводников (см. рис. 9), по которым текут известные токи, и с помощью нужным образом «мятой» тороидальной поверхности с проводимостью  $\sigma \rightarrow \infty$ , по внутренней стороне которой в тонком скин-слое текут токи\*\*, устанавливающиеся в соответствии с условием  $n\mathbf{B} = 0$ .

Во втором случае вся область, занятая полем, является внутренней, тогда как в первом случае поле существует и во внутренней области  $V_i$ , где силовые линии «обобществлены», и во внешней области  $V_e$ , где силовые линии замыкаются около «своих» проводников.

Ниже мы увидим, что сепаратриса, как правило, имеет щели и поэтому происходит частичный обмен силовыми линиями

\* Под столкновениями здесь понимаются любые процессы, ведущие к максвеллизации.

\*\* Формально математически в первом случае мы определяем поле по формуле (2. 6), а во втором — решаем задачу Неймана при заданном полном потоке через сечение  $\theta = \text{const}$ .

между  $V_i$  и  $V_e$ . Однако величина магнитного потока, проходящего через эти щели, может быть весьма небольшой, и таким потоком можно пренебречь.

Наряду с собственно тороидальными полями, периодичными по координатам  $\theta$  и  $\varphi$  (см. рис. 9), мы будем также рассматривать «прямые» поля, напряженность которых является периодической функцией декартовой координаты  $z$  (рис. 10). Внутренняя область  $V_i$  этих полей представляет собой бесконечный «мятый» цилиндр.

Изучение прямых полей обычно проще изучения тороидальных, и поскольку прямые поля также являются двояко-периодическими

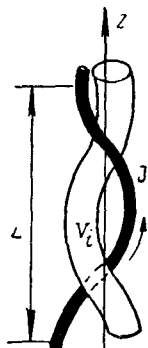


Рис. 10

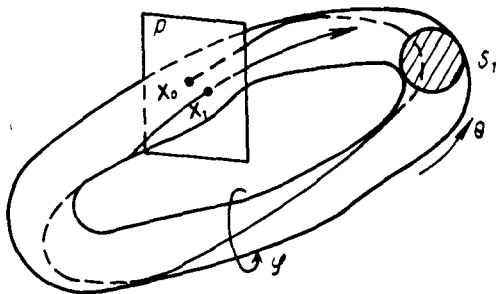


Рис. 11

(по  $z$  и  $\varphi$ ), то многие закономерности, свойственные тороидальным полям, могут быть выяснены на прямых полях \*.

О характере поведения силовой линии во внутренней области  $V_i$  тороидального поля удобно судить по множеству точек пересечения рассматриваемой силовой линии с произвольной фиксированной плоскостью  $P$ , перпендикулярной направлению  $\theta$  (рис. 11). Эти точки мы будем называть изображающими [2]. Если силовая линия тороидального поля замыкается после одного, двух или  $n$  обходов вдоль тороида, то множество изображающих точек состоит соответственно из одной, двух или  $n$  точек. Если же силовая линия не замыкается сама на себя, то мы имеем бесконечное множество изображающих точек:  $\{x_k\} = \{x_0, x_1, \dots\}$ .

При каждом обходе тора множество изображающих точек переходит само в себя \*\*. Поэтому естественно ввести понятие о преобразовании обхода  $N$ , подразумевая под этим соответствие первоначального положения изображающих точек их положению после одного обхода. Если в плоскости  $P$  ввести полярную систему координат, то это преобразование может быть представлено системой функций  $R$  и  $Q$

$$(r_2, \varphi_2) = N(r_1, \varphi_1) = (R(r_1, \varphi_1), Q(r_1, \varphi_1)).$$

\* Период прямого поля топологически эквивалентен тору.

\*\* Очевидно, переходит само в себя и подмножество точек, лежащих внутри сепаратрисы, если в ней нет щелей.

Отметим одно свойство рассматриваемого преобразования. Если через  $\Sigma_1$  обозначить некоторую область в плоскости  $P$ , а через  $\Sigma_2$  — область, в которую переходит  $\Sigma_1$  после преобразования обхода, то, очевидно, в силу уравнения (2. 1)

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (2. 16a)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{B_n(r_2, \varphi_2)}{B_n(r_1, \varphi_1)} \frac{\partial(r_2, \varphi_2)}{\partial(r_1, \varphi_1)} = 1, \quad (2. 16b)$$

где  $\frac{\partial(r_2, \varphi_2)}{\partial(r_1, \varphi_1)}$  — якобиан.

### 5. Тороидальные магнитные поверхности

Важным является вопрос о типах множеств изображающих точек незамкнутых силовых линий тороидальных полей.

Известно, что в случае симметричных полей (см. § 3) множество изображающих точек точно ложится на замкнутую кривую в плоскости  $P$ . Это соответствует наличию так называемой магнитной поверхности, т. е. поверхности, эргодически покрываемой незамыкающейся силовой линией. Иными словами, такая силовая линия подходит сколь угодно близко к любой точке магнитной поверхности.

В случае тороидальных несимметричных полей множество изображающих точек, как правило, не ложится на замкнутую кривую и, следовательно, магнитных поверхностей не существует (см. § 6). Однако ниже, в § 3, мы покажем, что магнитные поверхности, по крайней мере в рамках «адиабатического» приближения, существуют у весьма широкого класса несимметричных тороидальных полей. Эти приближенные магнитные поверхности мы будем называть адиабатическими.

Отметим, что силовая линия, окруженная магнитными поверхностями и переходящая сама в себя при каждом обходе тора, называется магнитной осью. Таких осей может быть несколько.

Если мы рассматриваем прямые поля, то в принципе магнитные поверхности становятся условным понятием, поскольку из уходящих в бесконечность силовых линий можно составить поверхности различных форм. Однако, учитывая, что период прямого поля топологически эквивалентен тору, мы можем выделить класс «истинных» магнитных поверхностей прямого поля. Очевидно, эти поверхности должны иметь период, равный периоду поля.

Тороидальные поля, состоящие из системы вложенных одна в другую магнитных поверхностей (рис. 12), представляют большой интерес для проблемы удержания плазмы [2, 17]. Связано это с тем, что на такой поверхности в состоянии равновесия давление плазмы постоянно, поскольку поверхность всюду плотно покрывается силовой линией, на которой, как указывалось выше,

$p = \text{const}$ . Задавая на поверхностях  $p = p(v)$  \*, где  $v$  — «номер» магнитной поверхности, мы можем построить широкий класс плазменных шнуров с плавно меняющимся давлением, оторванных от стенок камеры.

Каждую магнитную поверхность можно охарактеризовать следующими так называемыми поверхностными величинами.

**Угол прокручивания.** При каждом обходе тора изображающая точка силовой линии перемещается в плоскости  $P$  по замкнутой линии-следу «своей» магнитной поверхности, обходя изображающую точку  $O$  магнитной оси. Это вращение можно изобразить графически, показав, например, во что деформируется пучок лучей, выходящих из точки  $O$  после одного обхода (рис. 13).

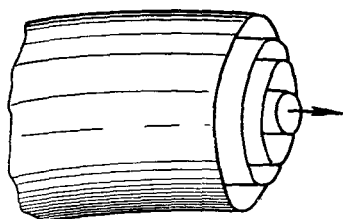


Рис. 12

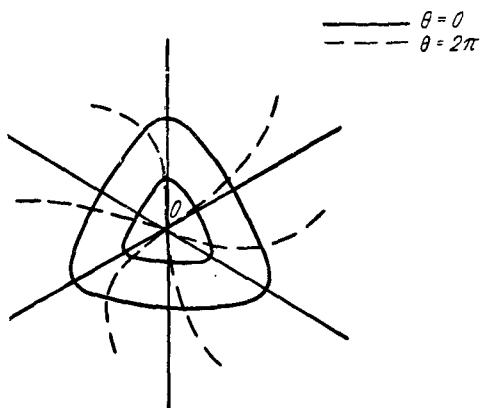


Рис. 13

В качестве аналитической характеристики вращения изображающей точки можно взять среднее значение угла поворота изображающей точки после  $n \rightarrow \infty$  обходов тора

$$\iota = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \iota_k}{n}. \quad (2.17)$$

Эту величину мы будем называть углом прокручивания. Когда параметр прокручивания на данной магнитной поверхности

$$\omega = \frac{\iota}{2\pi} \quad (2.18)$$

является рациональным числом, вся эта поверхность состоит из замкнутых силовых линий или на этой поверхности имеются замкнутые силовые линии, к которым асимптотически прижимаются остальные линии данной поверхности (см. п. 3. § 3).

Как отмечалось выше, вложенные одна в другую тороидальные магнитные поверхности, обвиваемые силовыми линиями (т. е.

\* Чтобы не исказить рассматриваемое поле,  $p$  должно быть достаточно малой величиной.



при  $\omega \neq 0$ ), можно получить не только вокруг замкнутого проводника с током, но и при его отсутствии, хотя это на первый взгляд противоречит условию  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ . В этом случае мы имеем не аксиально-симметричные, как в примере с кольцевым током, а деформированные тем или иным образом магнитные поверхности (сечения подобных поверхностей приведены на рис. 30 и последующих). При удалении от магнитной оси деформация магнитных поверхностей возрастает, и на некотором расстоянии от оси, при переходе через сепаратрису, поле распадается на области, замыкающиеся вокруг отдельных проводников, создающих поле (примером может служить поле, схематически изображенное на рис. 9).

**Продольный и азимутальный потоки.** Введем на магнитной тороидальной поверхности координаты  $\theta$  и  $\varphi$  (см. рис. 9 и 11), причем будем считать, что линии  $\varphi = \text{const}$  проходят, не обвивая тора, в направлении  $\theta$ . Продольный магнитный поток  $\Phi(\nu)$  внутри данной поверхности — это поток поля через  $S_1$ , т. е. через поперечное сечение  $\theta = \text{const}$ .

Азимутальный поток  $\chi(\nu)$  — это магнитный поток, проходящий через поверхность  $S_2$ , натянутую между магнитной осью и линией  $\varphi = \text{const}$ .

Используя  $\chi(\nu)$  и  $\Phi(\nu)$ , можно дать еще одно определение для угла прокручивания, по всей вероятности эквивалентное выражению (2.18):

$$\iota = 2\pi \frac{d\chi}{d\Phi}. \quad (2.19)$$

Покажем эквивалентность этих определений  $\iota$  на простом примере поля однородного тока  $j_z = \text{const}$  в присутствии однородного продольного поля  $\mathbf{B}_0$  (рис. 14).

Поле тока равно  $B_\varphi = B_{\varphi a} \frac{r}{a}$ , и поэтому внутри проводника

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{B_\varphi}{rB_0} = \frac{B_{\varphi a}}{aB_0}.$$

Если  $L$  — длина тора, то

$$\iota = \frac{B_{\varphi a} L}{aB_0}. \quad (2.20)$$

С другой стороны,

$$\Phi = \pi r^2 B_0, \quad \chi = \frac{B_{\varphi a} r^2 L}{2a},$$

и, следовательно, определение (2.19) приводит к выражению

$$\iota = 2\pi \frac{\chi}{\Phi} = \frac{B_{\varphi a} L}{aB_0},$$

которое совпадает с выражением (2.20).

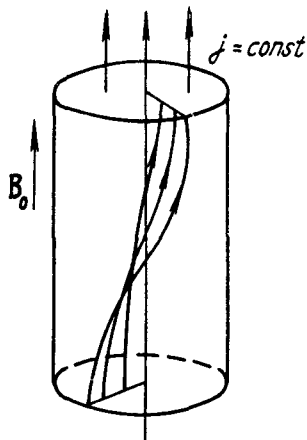


Рис. 14

**Удельный объем магнитной поверхности.** Если известен геометрический объем магнитной поверхности  $V(v)$ , то мы можем ввести удельный объем этой поверхности, определив его как

$$U = \frac{dV}{d\Phi}, \quad (2.21)$$

что является естественным обобщением удельного объема магнитной трубки для того случая, когда силовая линия эргодически покрывает поверхность.

Роль данной величины в проблеме устойчивости тороидальных шнуров с прокручиванием аналогична роли удельного объема в системах типа ловушек с пробками или гофрированного тора. Однако, как показывают расчеты и физические соображения, большую роль здесь наряду с  $U$  играет изменение угла прокручивания  $\iota$  от поверхности к поверхности, которое называется сдвигом или перехлестом силовых линий [14].

### 6. Обратные задачи по геометрии поля

Выше мы рассмотрели задачу об определении силовых линий для заданного поля  $\mathbf{B}(r, t)$ . Здесь мы остановимся на обратной задаче — на определении поля по заданным силовым линиям. Это позволит отчетливее представить специфику связи поля с геометрией силовых линий.

1. Пусть в некотором объеме  $V$  задана произвольная система гладких непересекающихся линий, каждая из которых начинается и оканчивается на стенках объема. Такую ситуацию мы имеем в торцовых ловушках (см. рис. 1,  $\partial$ ). Найдем поле, для которого эти линии будут силовыми. В общем случае поле будет вихревым, и поэтому для его определения мы можем использовать только уравнение непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

Задание силовых линий в данном случае эквивалентно заданию поля направлений, которое можно характеризовать единичным вектором  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(r)$ . Подставив в уравнение непрерывности

$$\mathbf{B} = B\boldsymbol{\tau}, \quad (2.22)$$

получим следующее уравнение для  $B$ :

$$B \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \nabla B = 0,$$

или

$$\frac{d \ln B}{dl} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \quad (2.23)$$

где  $dl$  — элемент дуги силовой линии.

Следовательно, задавая  $B$  в одной точке на каждой силовой линии, мы определяем поле во всем объеме  $V$ \*. Отсюда видно, что поле в объеме  $V$  определяется неоднозначно.

\* Если, однако, в рассматриваемом объеме содержится замкнутая силовая линия  $C$ , то в ее окрестности силовые линии не могут быть заданы произвольно. Действительно, в силу однозначности  $B$  на этой линии должен быть равен нулю интеграл

$$\oint \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dl = 0.$$

2. Возникает вопрос: каким условиям должно удовлетворять множество силовых линий, чтобы соответствующим выбором  $\mathbf{V}$  можно было получить безвихревое поле. Чтобы избежать громоздких выкладок, ограничимся плоским случаем. Возьмем уравнение силовых линий в виде

$$f(x, y) = \text{const.}$$

Очевидно, компонента векторного потенциала  $A_z$  в таком случае равна

$$A_z = F(f(x, y)), \quad (2.24)$$

а компоненты  $A_x = A_y = 0$ . Если  $\mathbf{j} = 0$ , то  $\Delta A_z = 0$  и, следовательно,

$$\Delta A_z = F''(\nabla f)^2 + F' \Delta f = 0.$$

Отсюда получаем условие для  $f$ :

$$\frac{\Delta f}{(\nabla f)^2} = -\frac{F''}{F'} = G(f), \quad (2.25)$$

где  $G(f)$  — в принципе произвольная функция. Если  $f$  удовлетворяет этому условию, то после двух интегрирований находим

$$A_z = c_1 \int_0^f dt \exp\left(-\int_0^t G df\right) + c_2, \quad (2.26)$$

причем  $A_z$  определяется теперь только двумя константами. Если учесть, что постоянная  $c_2$  не влияет на величину поля  $\mathbf{B}$ , а  $c_1$  пропорциональна амплитуде поля, то мы приходим к выводу, что поле определяется однозначно с точностью до амплитуды.

### § 3. Уравнения магнитных поверхностей

Уравнения магнитных поверхностей в аналитической форме могут быть легко получены в трех случаях. Во-первых, если поле обладает симметрией, то существует точный интеграл уравнений силовых линий (2.11), который и является уравнением магнитной поверхности. Во-вторых, для периодических полей, обладающих большой продольной составляющей, система уравнений (2.11) имеет приближенный интеграл, что соответствует существованию так называемых адиабатических магнитных поверхностей. В-третьих, уравнения магнитных поверхностей могут быть получены также в малой окрестности замкнутых силовых линий.

#### 1. Симметричные поля

Пусть поле обладает какой-либо симметрией — трансляционной, аксиальной или винтовой. Если ввести цилиндрическую систему координат (рис. 15) с осью  $z$ , связанной с симметрией, то в первом случае поле будет зависеть от  $r$  и  $\varphi$ , во-втором — от  $r$  и  $z$ , а в третьем случае — от  $r$  и  $\varphi - az$ , где  $a = \frac{2\pi}{L}$ , а  $L$  — шаг винта.

Подставляя в уравнение силовой линии

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\varphi}{B_\varphi} = \frac{dz}{B_z} \quad (3.1)$$

компоненты магнитного поля, выраженные через компоненты векторного потенциала,

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; & B_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1a)$$

и учитывая симметрию, легко получить интегралы

$$A_z(r, \varphi) = \text{const}; \quad (3.2a)$$

$$r A_\varphi(r, z) = \text{const}; \quad (3.2b)$$

$$A_z(r, \varphi - az) + ar A_\varphi(r, \varphi - az) = \text{const}, \quad (3.2в)$$

соответствующие трансляционной, аксиальной и винтовой симметрии. Они определяют поверхности, обладающие той же симметрией, а следовательно, той же периодичностью, что и само поле. Таким образом, уравнения (3.2) являются уравнениями магнитных поверхностей. Знание интегралов позволяет также выразить решение системы (3.1) в квадратурах.

Из трех интегралов (3.2) только второй может описывать ограниченные конфигурации.

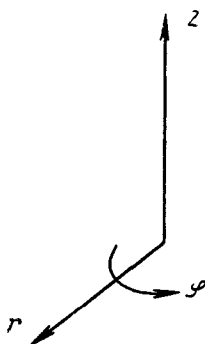


Рис. 15

## 2. Усредненные магнитные поверхности

Существует широкий класс полей, для которых магнитные поверхности могут быть найдены приближенно методом усреднения. В этот класс входят поля, периодичные вдоль оси  $z$ , вдоль азимута  $\varphi$  или вдоль винтовой линии, имеющие большие продольные компоненты вдоль соответствующих направлений. Для таких полей метод усреднения позволяет в общем виде получить уравнения усредненных магнитных поверхностей с точностью до величин  $\sim \left(\frac{B_\perp}{B_\parallel}\right)^2$ , где  $B_\perp$  и  $B_\parallel$  — характерные величины поперечного и продольного полей. Рассмотрим сначала вывод усредненных магнитных поверхностей для «квазипрямого» поля, а затем проведем вычисления в криволинейных координатах, чтобы получить магнитные поверхности для «кваситороидального» и «квази-винтового» магнитных полей [28].

1. Пусть магнитное поле имеет большую составляющую  $\mathbf{V}_0(r, \varphi)$ , направленную вдоль оси  $z$  цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$ , и малое (по сравнению с  $\mathbf{V}_0$ ) поле  $\mathbf{b}(r, \varphi, z)$ , периодическое по координате  $z^*$ . Уравнения силовых линий

\* Для применимости метода усреднения необходимо, чтобы период поля  $L$  был порядка или менее наименьшего масштаба неоднородности поля.

такого поля с точностью до членов порядка  $\left(\frac{b}{B_0}\right)^2$  могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{b_r}{B_0 + b_z} \simeq \frac{b_r}{B_0} - \frac{b_r b_z}{B_0^2}; \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{b_\varphi}{B_0 + b_z} \simeq \frac{b_\varphi}{r B_0} - \frac{b_\varphi b_z}{r B_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Здесь  $B_r = b_r$ ,  $B_\varphi = b_\varphi$ ,  $B_z = B_0 + b_z$ , причем  $B_0$  выбирается таким образом, чтобы среднее значение  $b_z$  равнялось нулю. Обозначая через  $\bar{r}$  и  $\bar{\varphi}$  усредненные координаты силовой линии и используя усредненные уравнения (см. приложение I на стр. 242)

$$\frac{d\bar{x}_k}{dz} = \bar{f}_k + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x_i} \hat{f}_i, \quad (3.3')$$

мы можем с интересующей нас точностью записать

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dz} &= \frac{\bar{b}_r}{B_0} - \frac{\overline{b_r b_z}}{B_0^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_r}{B_0} \right) \frac{\hat{b}_r}{B_0} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{b_r}{B_0} \right) \frac{\hat{b}_\varphi}{r B_0}; \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dz} &= \frac{\bar{b}_\varphi}{r B_0} - \frac{\overline{b_\varphi b_z}}{r B_0^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_\varphi}{r B_0} \right) \frac{\hat{b}_r}{B_0} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{b_\varphi}{r B_0} \right) \frac{\hat{b}_\varphi}{r B_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где чертой сверху и знаком  $\wedge$  обозначены операции усреднения и интегрирования по переменной  $z$ :

$$\bar{a} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L a dz, \quad \hat{a} \equiv \int_0^{\overline{z}} \widetilde{a} dz, \quad \widetilde{a} \equiv a - \bar{a}.$$

Заменяя в уравнениях (3.4) производные  $\frac{db_r}{dr}$  и  $\frac{db_\varphi}{d\varphi}$  их значениями из условия  $\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r b_r + \frac{1}{r} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0$ , после простых преобразований с учетом тождеств  $\frac{d\hat{a}}{dz} = \widetilde{a}$ ,  $\overline{\hat{a}b} + \overline{a\hat{b}} = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dz} &= \frac{\bar{b}_r}{B_0} - \frac{1}{r B_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{\left( \frac{\hat{b}_r b_\varphi}{B_0} \right)}; \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dz} &= \frac{\bar{b}_\varphi}{r B_0} + \frac{1}{r B_0} \frac{\partial}{\partial r} \overline{\left( \frac{\hat{b}_r b_\varphi}{B_0} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Вводя векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и подставляя вместо  $\bar{b}_r$  и  $\bar{b}_\varphi$  их выражения  $\bar{b}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial \varphi}$ ,  $\bar{b}_\varphi = -\frac{\partial \bar{A}_z}{\partial r}$  [см. (3. 1a)], запишем уравнения (3. 5) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dz} &= \frac{1}{rB_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}; \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dz} &= -\frac{1}{rB_0} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (3. 6)$$

где

$$\psi = \bar{A}_z + \overline{\frac{\hat{b}_r \hat{b}_\varphi}{B_0}}. \quad (3. 7)$$

Уравнением усредненных магнитных поверхностей является, очевидно, интеграл системы (3. 6)

$$\psi(\bar{r}, \bar{\varphi}) = \text{const.} \quad (3. 8)$$

Истинный ход силовых линий с учетом периодических поправок первого порядка малости по  $\frac{b}{B_0}$  определяется формулами (см. приложение I на стр. 242):

$$r = \bar{r} + \frac{\hat{b}_r}{B_0}, \quad \varphi = \bar{\varphi} + \frac{\hat{b}_\varphi}{rB_0}, \quad (3. 9)$$

и для определения магнитных поверхностей с точностью до членов  $\frac{b}{B_0}$  достаточно вместо аргументов  $\bar{r}$  и  $\bar{\varphi}$  подставить в уравнение (3. 8) их выражения через  $r$  и  $\varphi$  из формул (3. 9).

Отметим, что, согласно уравнениям (3. 6), если функция  $\psi$  зависит только от  $r$ , она выражается через среднюю скорость прокручивания силовой линии вокруг оси  $z$ :

$$\psi = - \int_0^r B_0 \bar{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dz} dr, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dz} = \alpha \omega. \quad (3. 10)$$

Если поле периодически по азимуту  $\varphi$ , т. е. является не прямым, а тороидальным, то аналогично получим

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{\varphi}} = -\frac{1}{B_{\varphi 0}} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{d\bar{z}}{d\bar{\varphi}} = \frac{1}{B_{\varphi 0}} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (3. 11)$$

где

$$\psi(\bar{r}, \bar{z}) = r\bar{A}_\varphi + \frac{r^2}{B_{\varphi 0}} \overline{\hat{B}_r B_z}, \quad (3. 12)$$

а  $B_{\varphi_0}$  — усредненное по азимуту поле, большое по сравнению с поперечными составляющими  $B_1$  и  $B_2$ . Усреднение и операция  $\wedge$  производятся здесь по аргументу  $\varphi$ . Уравнения усредненных магнитных поверхностей  $\psi(r, z) = \text{const}$  зависят теперь от координат  $r$  и  $z$ .

2. Выведем теперь уравнение усредненных поверхностей в криволинейных координатах  $x_i$ , из которого, в частности, вытекают выражения (3. 7) и (3. 12). Пусть магнитное поле  $\mathbf{B}$  имеет квазиоднородную продольную компоненту  $B^3$  и малое по сравнению с ней возмущающее поле  $\mathbf{b}$ . Уравнение силовых линий запишем в криволинейных координатах  $x_1, x_2, x_3$ , в которых координатные линии  $x_3$  совпадают с силовыми линиями поля:

$$\frac{dx_k}{dx_3} = \frac{B^k}{B^3} \quad (k = 1; 2). \quad (3. 13)$$

Здесь и далее через  $B^i$  обозначены контрвариантные компоненты поля, а через  $B_i$  — ковариантные компоненты. Будем считать, что поперечные поля  $B^1 \equiv b^1$  и  $B^2 \equiv b^2$  малы, а продольное поле  $B^3 = B_0^3 + b^3$  содержит большую квазиоднородную часть  $B_0^3(x_1, x_2)$ , не зависящую от  $x_3$ , и малую поправку  $b^3$ . Уравнения (3. 13) с точностью до членов порядка  $\mathbf{b}^2$  запишем в виде

$$\frac{dx_k}{dx_3} = \frac{1}{B_0^3} \left( b^k - \frac{b^3 b^k}{B_0^3} \right) \equiv f_k(x_i, x_3); \quad i, k = 1; 2. \quad (3. 14)$$

Предположим, что поле  $b$  является периодической функцией аргумента  $x_3$  и выберем  $b^3$  таким образом, чтобы его среднее значение по  $x_3$  равнялось нулю. Усредненные силовые линии описываются уравнениями (3. 3')

$$\frac{\bar{d}x_k}{dx_3} = \bar{f}_k + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial x_i} \hat{f}_i; \quad i, k = 1, 2, \quad (3. 15)$$

где усреднение и операция  $\wedge$  производятся по аргументу  $x_3$ . Поведение силовой линии с учетом ее колебаний около среднего положения с точностью до членов более высокого порядка малости дается формулами

$$x_k = \bar{x}_k + \hat{f}_k(x_i, x_3); \quad k = 1; 2. \quad (3. 16)$$

Подставляя в уравнения (3. 15) конкретные выражения для  $f_k$  из уравнений (3. 14) и преобразуя полученные соотношения с учетом уравнения

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} B^i) = 0,$$

получим (в предположении, что определитель метрического тензора  $g = |g_{ik}|$  не зависит от  $x_3$ ) с точностью до членов второго порядка малости по  $\mathbf{b}$  \*

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_3} &= \frac{\overline{b^1}}{B_0^3} - \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sqrt{g} \frac{\widehat{b^1 b^2}}{B_0^3} \right); \\ \frac{dx_2}{dx_3} &= \frac{\overline{b^2}}{B_0^3} + \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sqrt{g} \frac{\widehat{b^1 b^2}}{B_0^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Выражая  $b^1$  и  $b^2$  через векторный потенциал магнитного поля  $\mathbf{B}$ ,

$$B^i = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial A_k}{\partial x_j},$$

и принимая во внимание, что  $\frac{\partial A_i}{\partial x_3} = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_3} &= \frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overline{A_3} - \frac{\sqrt{g}}{B_0^3} \widehat{b^1 b^2} \right); \\ \frac{dx_2}{dx_3} &= -\frac{1}{\sqrt{g} B_0^3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \overline{A_3} - \frac{\sqrt{g}}{B_0^3} \widehat{b^1 b^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Интегрируя выражения (3.18), находим окончательно уравнение усредненных магнитных поверхностей

$$\Psi(x_1, x_2) \equiv \overline{A_3} - \frac{\sqrt{g}}{B_0^3} \widehat{B^1 B^2} = \text{const.} \quad (3.19)$$

Если выразить векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  через их физические составляющие, то из формулы (3.19) получим усредненные магнитные поверхности для квазипрямого, квазитороидального и квазивинтового полей, для которых выполнено принятое выше условие о независимости  $g$  от продольной координаты.

а. Если поле  $\mathbf{B}^3$  имеет прямые силовые линии, направленные вдоль оси  $z$ , то в декартовых координатах  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$

$$\Psi(x, y) = \overline{A_z} - \frac{1}{B_z} \widehat{B_x B_y}, \quad (3.20)$$

а в цилиндрических координатах  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \varphi$ ,  $x_3 = z$  получим выражение (3.7), где, как и в выражении (3.20), усреднение и операция  $\widehat{\quad}$  производятся по аргументу  $z$ .

б. В случае, когда  $\mathbf{B}^3$  имеет силовые линии, направленные по азимуту  $\varphi$ , используя цилиндрические координаты  $x_1 = z$ ,  $x_2 = r$ ,  $x_3 = \varphi$ , получим формулу (3.12).

\* Мы опускаем далее черты сверху у усредненных координат  $x_i$ .



в. Если силовые линии основного поля  $\mathbf{B}^3$  являются винтовыми линиями:  $\theta = \varphi - \alpha z = \text{const}$  (где  $L = \frac{2\pi}{\alpha} = \text{const}$  — шаг винта), то, выбрав в качестве  $x_i$  координаты  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \theta$ ,  $x_3 = z$ , получим

$$\psi(r, \theta) = \bar{A}_z + \alpha r \bar{A}_\varphi - \frac{1}{\bar{B}_z} \overline{\hat{B}_r (B_\varphi - \alpha r B_z)}, \quad (3. 21)$$

где усреднение и операция  $\overline{\quad}$  производятся по аргументу  $z$  вдоль линий  $\theta = \text{const}$ . Так как  $\bar{B}_\varphi = \alpha r \bar{B}_z$  и вдоль линий  $\theta = \text{const}$  имеем  $\hat{B}_r^\varphi = \alpha \hat{B}_r^z$ , то формула (3. 21) может быть представлена также в виде

$$\psi(r, \theta) = \bar{A}_z + \alpha r \bar{A}_\varphi - \frac{r}{\bar{B}_z} \overline{\hat{B}_r (B_\varphi - \alpha r B_z)}, \quad (3. 22)$$

где усреднение и операция  $\overline{\quad}$  производятся по аргументу  $\varphi$  вдоль линий  $\theta = \text{const}$ , а координатами  $x_i$  являются  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = r$ ,  $x_3 = \varphi$ .

Приведенные выше выражения (3. 7) и (3. 12) для прямого и тороидального полей получаются из выражений (3. 21) и (3. 22) предельными переходами  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$ . Отметим еще, что для полей, обладающих трансляционной, аксиальной и винтовой симметрией, формулы (3. 7), (3. 12) и (3. 22) дают точные выражения для магнитных поверхностей, обладающих соответствующей симметрией. В случае же квазисимметричных полей истинные магнитные поверхности с точностью до членов порядка  $\frac{B^1}{B_0^3}$  определяются уравнением (3. 19), в котором аргументы функции  $\psi$  заменены на правые части выражений

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{\hat{B}^1}{B_0^3}; \quad \bar{x}_2 = x_2 - \frac{\hat{B}^2}{B_0^3}. \quad (3. 23)$$

Вопрос о точности полученных выше соотношений рассмотрен в приложении I на стр. 242. Однако в нашем случае особый интерес представляет поведение силовой линии в целом, т. е. при бесконечном числе ее обходов вдоль тора. Учитывая, что по своему характеру приближенные интегралы силовых линий подобны адиабатическим инвариантам, следует ожидать, что для полей с замкнутыми силовыми линиями они дают качественно правильный ответ о поведении магнитной поверхности в целом, тогда как для полей с прокручивающимися силовыми линиями они имеют экспоненциальную точность типа  $\exp(-1/\omega)$ . Следует отметить, кроме того, что используемый метод усреднения не применим вблизи сепаратрисы, где  $\frac{B_\perp}{B_\parallel}$  представляет собой значительную величину.

### 3. Магнитные поверхности вблизи замкнутой силовой линии

Если вблизи замкнутой силовой линии магнитного поля поперечные компоненты являются линейными функциями по отклонению от этой силовой линии, то в ее окрестности существуют магнитные поверхности, причем сечения этих поверхностей на изображающей плоскости представляются эллипсами, гиперболами или системой параллельных прямых.

Рассмотрим магнитное поле вблизи прямой силовой линии. Направив вдоль нее ось  $z$ , запишем уравнения силовых линий в окрестности  $x = y = 0$  в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{B_x}{B_z} \simeq \frac{1}{B_z(z)} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} x + \frac{\partial B_x}{\partial y} y \right); \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{B_y}{B_z} \simeq \frac{1}{B_z(z)} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

где напряженность продольного поля  $B_z$  и производные от поперечных компонент в рассматриваемом приближении берутся при  $x = y = 0$  и, следовательно, являются функциями только от  $z$ .

Пусть поле является периодической функцией  $z$  с периодом  $L$ . В этом случае уравнения (3.24) будут системой двух линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Обозначим через  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$ ,  $Y_1(z)$  и  $Y_2(z)$  решения, удовлетворяющие начальным условиям  $X_1(0) = Y_2(0) = 1$ ,  $Y_1(0) = X_2(0) = 0$ ; тогда решение системы (3.24) на  $n + 1$  периоде будет

$$\left. \begin{aligned} x &= x_n X_1(z) + y_n X_2(z); \\ y &= x_n Y_1(z) + y_n Y_2(z). \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

В силу периодичности коэффициентов уравнений (3.24) функции  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  достаточно определить на интервале  $(0, L)$ . Поэтому из соотношений (3.25) получаем систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами  $\alpha_{ik}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_{11} x_n + \alpha_{12} y_n; \\ y_{n+1} &= \alpha_{21} x_n + \alpha_{22} y_n; \end{aligned} \quad (\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} X_1(L), & X_2(L) \\ Y_1(L), & Y_2(L) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Эти уравнения связывают координаты изображающих точек на плоскостях  $z = nL$  и  $z = (n + 1)L$  \*.

Используя равенство нулю  $\operatorname{div} \mathbf{B}$ , легко убедиться в том, что  $D(L) = |\alpha_{ik}| = 1$ . Действительно, согласно уравнениям (3.24), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dD(z)}{dz} &= \frac{1}{B_z} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) D(z) = - \frac{D(z)}{B_z} \frac{dB_z}{dz}; \\ D(z) &\equiv \begin{vmatrix} X_1(z), & X_2(z) \\ Y_1(z), & Y_2(z) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

\* Если рассматривать поле в окрестности замкнутой силовой линии, то эти плоскости сливаются в одну изображающую плоскость.

Отсюда  $D(z) B_z(z) = \text{const}$  и из периодичности  $B_z(z)$  и начальных условий для  $X_i$  и  $Y_i$  следует, что  $D(L) = 1$ .

Решение системы разностных уравнений (3.26), аналогично решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений [18], имеет вид  $x_n = c_1 \lambda^n$ ,  $y_n = c_2 \lambda^n$ . Подстановка в уравнения (3.26) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \lambda + 1 = 0, \quad (3.27)$$

корни которого удовлетворяют условию

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (3.28)$$

Общее решение уравнений (3.26) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x_n &= a_1 \lambda_1^n + a_2 \lambda_2^n; \\ y_n &= b_1 \lambda_1^n + b_2 \lambda_2^n, \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — постоянные, определяемые из начальных условий.

Решение (3.29) удобно записать через тригонометрические или гиперболические функции. С этой целью полагают  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\mu}$ , где  $\mu$  — так называемый характеристический показатель, определяемый равенством

$$\cos \mu = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2}. \quad (3.30)$$

Если определить постоянные  $a_i$  и  $b_i$  через начальные значения  $x_0$ ,  $y_0$ , то получим решение системы (3.26) в виде

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_0 \cos \mu n + \left( \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2 \sin \mu} x_0 + \frac{\alpha_{12}}{\sin \mu} y_0 \right) \sin \mu n; \\ y_n &= y_0 \cos \mu n + \left( \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2 \sin \mu} y_0 + \frac{\alpha_{21}}{\sin \mu} x_0 \right) \sin \mu n. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

При мнимом  $\mu$  тригонометрические функции переходят в соответствующие гиперболические. Для  $\mu = 0$  и  $\mu = \pi$  решения (3.31) теряют смысл, однако соответствующие решения могут быть получены предельными переходами  $\mu \rightarrow 0$  и  $\mu \rightarrow \pi$ . Таким образом при  $\mu \rightarrow 0$  получаем

$$\left. \begin{aligned} x_n &= x_0 + \left( \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2} x_0 + \alpha_{12} y_0 \right) n; \\ y_n &= y_0 + \left( \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2} y_0 + \alpha_{21} x_0 \right) n, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

а при  $\mu \rightarrow \pi$

$$\left. \begin{aligned} x_n &= (-1)^n \left\{ x_0 - \left( \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2} x_0 + \alpha_{12} y_0 \right) n \right\}; \\ y_n &= (-1)^n \left\{ y_0 - \left( \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2} y_0 + \alpha_{21} x_0 \right) n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

Формулы (3. 31) — (3. 33) определяют положение силовой линии, вышедшей из точки  $(x_0, y_0)$  в плоскостях  $z = nL$ , расположенных одна от другой на расстоянии периода  $L$ , или в изображающей плоскости, если рассматривается окрестность замкнутой силовой линии длины  $L$ . Уравнение для сечения магнитных поверхностей изображающей плоскостью получается из выражений (3. 31), если мы определим  $\cos \mu l$  и  $\sin \mu l$  и приравняем единице сумму их квадратов

$$\alpha_{21}x_n^2 - \alpha_{12}y_n^2 - (\alpha_{11} - \alpha_{22})x_n y_n - \text{const.} \quad (3.34)$$

Условие положительной определенности квадратичной формы (3. 34)

$$-4 \alpha_{12} \alpha_{21} > (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2$$

эквивалентно условию  $|\cos \mu| < 1$ . Таким образом, из уравнения (3. 34) следует, что при  $|\cos \mu| < 1$  точка  $O$ , в которой замкнутая силовая линия пересекает изображающую плоскость, является особой точкой эллиптического типа, так что последовательные изображающие точки ложатся на эллипсы с центром в точке  $O$ , двигаясь вокруг этой точки (рис. 16). При  $|\cos \mu| > 1$

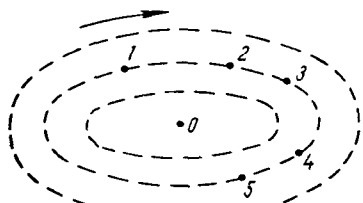


Рис. 16

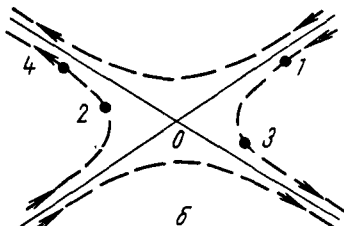
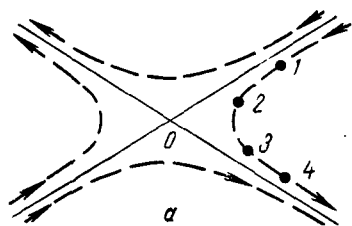


Рис. 17

точка  $O$  является гиперболической особой точкой и изображающие точки либо двигаются по «своим» ветвям гипербол, как это показано стрелками на рис. 17, а, либо после каждого обхода по периоду  $L$  перескакивают с одной ветви на другую (см. положение 1, 2, 3, 4 на рис. 17, б), причем, как это следует из выражений (3. 28) и (3. 29), первый случай имеет место при  $\lambda > 0$ , а второй — при  $\lambda < 0$ . Точки, попадающие на одну из асимптот, движутся к центру  $O$ , а по другой — от центра в бесконечность.

Приведенные рассуждения теряют смысл в вырожденных случаях, когда  $\mu = 0$  и  $\mu = \pi$  (или  $\lambda = 1$  и  $\lambda = -1$ ). Как видно из формул (3. 32) и (3. 33), в этих случаях начальные точки, лежащие на прямой

$$\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2} x_0 + \alpha_{12} y_0 = 0, \quad (3.35)$$

которая в силу соотношения (3. 30) и равенства единице детерминанта  $|\alpha_{ik}|$  совпадает с прямой  $\frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2} y_0 + \alpha_{21} x_0 = 0$ , при обходе периода переходят сами в себя или в точки, симметричные относительно начала координат. Таким образом, в рассматриваемых случаях существует магнитная поверхность, полностью состоящая из замкнутых силовых линий и пересекающая изображающую плоскость по прямой линии (3. 35). Уравнения сечений соседних магнитных поверхностей мы получим, исключая  $n$  из уравнений (3. 32) и (3. 33). Отсюда следует, что

$$\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = -\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{2\alpha_{12}},$$

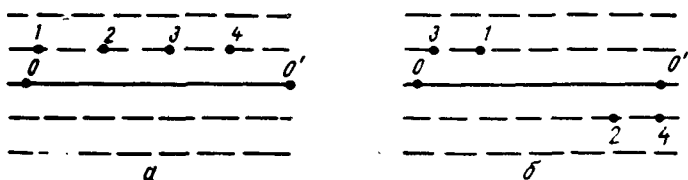


Рис. 18

т. е. последовательные изображающие точки ложатся на прямые, параллельные сечению особой магнитной поверхности (3. 35). При этом, как нетрудно убедиться на основании уравнений (3. 32) и (3. 33), в случае  $\lambda = 1$  эти точки движутся по «своим» прямым (рис. 18, а) со скоростью, растущей при удалении от  $OO'$ . При  $\lambda = -1$  точки перескакивают на зеркальную прямую после каждого периода (см. рис. 18, б) в полной аналогии с соответствующими выводами для гиперболической точки.

Полученные результаты основываются на двух предположениях: на равенстве единице детерминанта  $\alpha_{ik}$  и на возможности линеаризации уравнений силовых линий в окрестности замкнутой силовой линии. Если первое предположение всегда выполняется в силу равенства  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  (см. § 2), то второе предположение может и не выполняться. Примером замкнутой силовой линии, допускающей линеаризацию в своей окрестности, является магнитная ось двухзаходного винтового поля (см. § 5). В случае же трехзаходного винтового поля линеаризация в окрестности его оси невозможна, так как в разложении поперечных компонент поля отсутствуют члены, линейные по удалению от оси.

## § 4. Поля с замкнутыми силовыми линиями

### 1. Поле кольца с током

Единственным примером симметричной конфигурации с силовыми линиями, лежащими в ограниченной области, может служить система, созданная коаксиальными кольцевыми токами.

Как известно, магнитное поле кольца с током, расположенного в плоскости  $z = 0$ , описывается одной компонентой векторного потенциала [20]

$$A_{\varphi} = \frac{4J}{ck} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right\}; \quad k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}. \quad (4.1)$$

Здесь  $a$  — радиус кольца, а  $E$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы. Вблизи проводника  $k \simeq 1$ , и поэтому, пользуясь выражениями для функций  $E$  и  $K$  при  $k \approx 1$  [21]

$$\left. \begin{aligned} E(k) &= 1 + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} - \frac{1}{2} \right) (1-k^2) + \dots; \\ K(k) &= \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{4} \left( \ln \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} - 1 \right) (1-k^2) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

получим следующие выражения для магнитных поверхностей:

$$rA_{\varphi} \simeq \frac{2Ja}{c} \left( \ln \frac{8a}{\varrho} - 2 \right) = \text{const}; \quad \varrho^2 = (r-a)^2 + z^2. \quad (4.3)$$

Как и следовало ожидать, в этом приближении магнитные поверхности представляются в нормальном сечении окружностями  $\varrho = \text{const}$ , центром которых является кольцевой ток. На больших расстояниях поле кольца приближается к полю диполя с моментом  $M = \frac{J}{c} \pi a^2$ , а его магнитные поверхности описываются выражением

$$rA_{\varphi} = M \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \text{const}, \quad (4.4)$$

которое получается из формул (3.26) и (4.1) подстановкой вместо  $E$  и  $K$  их разложений при малых  $k$  [21]:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 - \dots \right); \\ K &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Отсюда следует также, что поле вблизи оси кольца  $r \ll a$  описывается потенциалом

$$A_{\varphi} = M \frac{r}{[(a+r)^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (4.6)$$

На рис. 19 изображены силовые линии поля кольца с током, возмущенного однородным полем, направленным вдоль оси  $z$ . Если задать однородное поле компонентой векторного потенциала

$$A_{\varphi}^0 = \frac{1}{2} B_0 r, \quad (4.7)$$

то уравнение этих магнитных поверхностей будет  $r(A_{\varphi} + A_{\varphi}^0) = \text{const}$ .

Если же на поле кольца наложить поле прямой нити с током, текущим вдоль оси  $z$ , то уравнение магнитных поверхностей (3.26) не изменится, поскольку поле прямого тока описывается  $z$ -компонентой векторного потенциала

$$A_z = -\frac{2J}{c} \ln r, \quad (4.8)$$

не входящей в уравнение (3.26) магнитных поверхностей (см. рис. 2).

Выше мы рассматривали только поле бесконечно тонкого кольца с током. Однако в ряде случаев представляет интерес поле тора кругового сечения с поверхностным током  $i$ . Соответствующая краевая задача сводится к решению уравнения (2.5) с граничным условием на поверхности  $n\mathbf{v} = 0$ . Она была решена Фоком [22], который получил следующие выражения для плотности тока на поверхности тора со средним радиусом  $R$  и радиусом сечения  $a$

$$i = \text{const} \left( 1 - \frac{\cos \omega}{\text{ch } \vartheta} \right)^{3/2} \left\{ \frac{1}{f_0(\vartheta)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \frac{1}{f_n(\vartheta)} \cos n\omega \right\}.$$

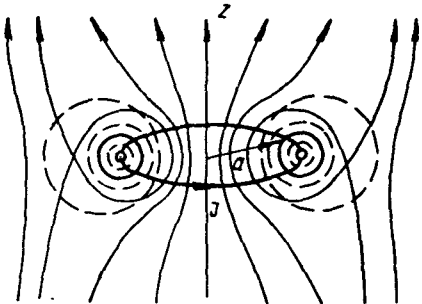


Рис. 19

Здесь

$$f_n(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} \frac{(1 - e^{-2\vartheta})^2}{e^{(n-1/2)\vartheta}} [f_n^{(2)} - f_n^{(1)}];$$

$$f_n^{(1)}(\vartheta) = \frac{2n}{n+1} \left\{ e^{2\vartheta} + \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2}{1} e^{4\vartheta} + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)} \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} e^{6\vartheta} + \dots \right\}; \quad (4.9)$$

$$f_n^{(2)}(\vartheta) = (\vartheta + 2 \ln 2 - a_0 - a_n) + \frac{2n+3}{2n+2} \frac{3}{2} e^{-2\vartheta} (\vartheta + 2 \ln 2 - a_1 - a_{n+1}) + \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+2)(2n+4)} \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^{-4\vartheta} (\vartheta + 2 \ln 2 - a_2 - a_{n+2}) + \dots;$$

$$\text{ch } \vartheta = \frac{R}{a}; \quad \cos \omega = \frac{a + R \cos \Phi}{R + a \cos \Phi};$$

$\Phi$  — полярный угол в сечении тора, а числа  $a_n$  определяются следующим образом:

$$a_0 = 1; \quad a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}. \quad (4.10)$$

## 2. Поле двух колец с током

Системы с магнитным полем, эквивалентным полю двух колец с токами, текущими в одном направлении, используются для пробочных ловушек, которые удерживают частицы с относительно малой продольной составляющей скорости вследствие отражения частиц от областей с большой напряженностью поля.

Если же токи в витках имеют противоположные направления, то мы получаем магнитное поле, возрастающее от центра системы во все стороны. Такие поля используются для удержания плазмы и носят название системы со встречными полями. Поля этих ловушек определяются выписанными выше формулами.

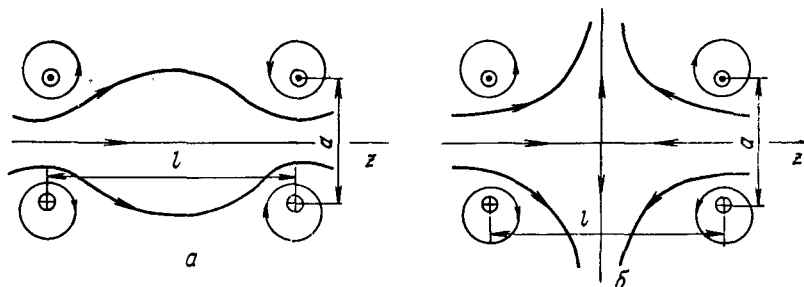


Рис. 20

Действительно, выбирая начало координат в точке, равноудаленной от центров обоих колец, получим векторный потенциал в виде

$$A_{\varphi} = \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{k_{+}} - \frac{k_{+}}{2} \right) K(k_{+}) - \frac{1}{k_{+}} E(k_{+}) \right] \pm \left[ \left( \frac{1}{k_{-}} - \frac{k_{-}}{2} \right) K(k_{-}) - \frac{1}{k_{-}} E(k_{-}) \right] \right\}, \quad (4.11)$$

где

$$k_{\pm}^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + (l \pm z)^2}, \quad (4.12)$$

а  $l$  — расстояние центров колец от начала координат (рис. 20). Знаки  $\pm$  между квадратными скобками соответствуют токам  $J$ , текущим в одну или в противоположные стороны.

Для определения поля вблизи оси  $z$  можно воспользоваться формулой

$$A_{\varphi} = \frac{r}{2} b(z) - \frac{r^3}{16} b''(z) + \dots \equiv J_1 \left( r \frac{d}{dz} \right) \Phi(z), \quad (4.13)$$

где  $b(z) = \Phi'(z)$  — поле на оси  $z$ ;  $J_1(x)$  — бесселева функция первого порядка. Формула (4.13) дает выражение для векторного потенциала произвольного безвихревого магнитного поля



с известной напряженностью  $b(z)$  на оси. Согласно выражению (4.6), поле на оси  $z$ , создаваемое одним кольцевым током, равно

$$b(z) = \frac{2M}{(a+z^2)^{3/2}}, \quad (4.14)$$

причем последнее выражение является точным. Соответственно для поля двух витков получаем

$$b^\pm(z) = 2M \{ [a^2 + (l+z)^2]^{-3/2} \pm [a^2 + (l-z)^2]^{-3/2} \}. \quad (4.15)$$

При  $z \ll \sqrt{a^2 + l^2}$  поле на оси  $z$  определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} b^+(z) &= \frac{4M}{(a^2 + l^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{4l^2 - a^2}{(a^2 + l^2)^2} z^2 \right]; \\ b^-(z) &= -\frac{12Mlz}{(a^2 + l^2)^{5/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

а в окрестности оси  $z$  с учетом первых двух членов разложения (4.13) имеем

$$A_\Phi^+ = \frac{2Mr}{(a^2 + l^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{3}{8} \frac{4l^2 - a^2}{(a^2 + l^2)^2} (4z^2 - r^2) \right]; \quad (4.17)$$

$$A_\Phi^- = -\frac{6Ml}{(a^2 + l^2)^{5/2}} rz. \quad (4.18)$$

Если  $a < 2l$ , то поле (4.17) в окрестности  $z = 0$  имеет минимум и является моделью поля пробочной ловушки. Поле (4.18) нарастает от начала координат во все стороны и является типичным для систем со встречными полями. Отметим, что магнитные поля (4.17) и (4.18) точно удовлетворяют уравнению  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$ .

### 3. Прямые гофрированные поля

Примеры тороидальных полей с замкнутыми силовыми линиями изображены на рис. 1. Прямые периодические поля, являющиеся предельным случаем тороидальных полей, мы будем относить к полям с замкнутыми силовыми линиями, если поперечные координаты силовой линии в точках, отстоящих одна от другой на расстоянии периода, совпадают.

Приведем два примера прямых гофрированных полей с замкнутыми силовыми линиями.

а. Простейшим является прямое аксиально-симметричное поле, созданное системой бесконечно тонких колец с током (рис. 21). Если обозначить радиус колец через  $a$ , то отличная от нуля компонента векторного потенциала  $A_\Phi$  такого поля будет представлять собой бесконечную сумму выражений (4.1). Эту сумму удобно представить в виде рядов Фурье по координате  $z$  (см. задачу в конце § 4).

$$A_\Phi = \frac{2Jk}{c} \left\{ \frac{r}{2} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} K_1(nka) I_1(nkr) \cos nkz \right\}; \quad r < a; \quad (4.19a)$$

$$A_\Phi = \frac{4Jka}{c} \sum_{n=1}^{\infty} I_1(nka) K_1(nkr) \cos nkz; \quad r > a. \quad (4.19b)$$

Здесь и далее  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$  — модифицированные функции Бесселя.

Используя соотношения (2.3) и (2.8), можно от векторного потенциала (4.19) перейти к скалярному. Он равен:

$$\Phi = \frac{2Jk}{c} \left\{ z + 2a \sum_{n=1}^{\infty} K_1(nka) I_0(nkr) \sin nkz \right\}; \quad r < a; \quad (4.20a)$$

$$\Phi = \frac{4Jka}{c} \sum_{n=1}^{\infty} I_1(nka) K_0(nkr) \sin nkz; \quad r > a. \quad (4.20b)$$

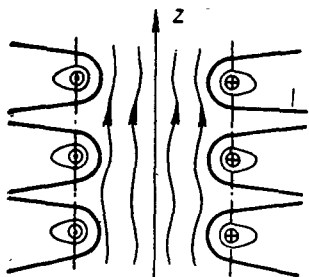


Рис. 21

Здесь  $L = \frac{2\pi}{k}$  — расстояние между кольцами, определяющими период поля, а  $\frac{2Jk}{c} = B_0$  — напряженность постоянной составляющей поля. Уравнения силовых линий такого поля [см. (3.26)] имеют вид

$$\varphi = \text{const}; \quad rA_\varphi(r, z) = \text{const}. \quad (4.21)$$

Последнее соотношение выражает сохранение потока внутри аксиально-симметричной магнитной поверхности\*.

На рис. 21 жирными линиями изображена сепаратриса, отделяющая собственно прямое поле, «принадлежащее» всей системе проводников, от поля, силовые линии которого «принадлежат» одиночным проводникам. В данном случае сепаратриса состоит из системы поверхностей, уходящих в бесконечность.

Вблизи оси гофрированное поле может быть аппроксимировано однородным полем  $B_0$  и одной гармоникой «переменного» поля:

$$A_\varphi = B_0 \frac{r}{2} - \frac{b_0}{k} I_1(kr) \cos kz; \quad (4.22)$$

$$\Phi = B_0 z - \frac{b_0}{k} I_0(kr) \sin kz. \quad (4.23)$$

Силовые линии поля (4.22) изображены на рис. 22 для  $B_0 > b_0$  и  $B_0 < b_0$ . В рассматриваемом случае сепаратриса имеет острые ребра, где напряженность поля обращается в нуль\*\*. Поле (4.22) может быть создано с помощью азимутальных токов, текущих по бесконечно тонкой цилиндрической оболочке радиуса  $a$ , плотность которых синусоидально зависит от  $z$ .

Рассмотрим изменение удельного объема силовых линий безвихревого гофрированного поля при удалении от оси  $z$ .

\* Действительно, в силу теоремы Стокса  $\int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} dl = 2\pi r A_\varphi$ .

\*\* Ниже на примере винтового поля мы увидим, что обращение поля в нуль на ребрах сепаратрисы не является обязательным.

В настоящее время даже для аксиально-симметричного поля общее доказательство возрастания удельного объема силовых линий безвихревого поля при приближении к сепаратрисе неизвестно, хотя это и не вызывает сомнения. Поэтому мы ограничимся исследованием области, близкой к оси  $z$ , в которой произвольное аксиально-симметричное магнитное поле может быть описано двумя членами разложения (4.13) векторного потенциала  $A_\varphi$ :

$$A_\varphi = \frac{r}{2} b(z) - \frac{r^3}{16} b''(z) + \dots \quad (4.24)$$

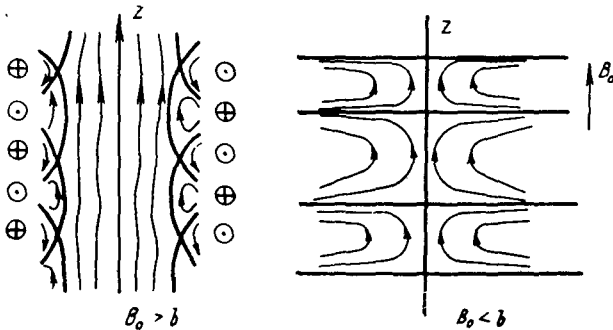


Рис. 22

В этом приближении

$$\oint \frac{dl}{B} = \int_0^L \frac{dz}{B_z} \simeq \int_0^L \frac{dz}{b - \frac{r^2}{4} b''} \simeq \int_0^L \frac{dz}{b} + \frac{1}{4} \int_0^L \frac{r^2 b''}{b^2} dz, \quad (4.25)$$

где интеграл берется по периоду  $L$  изменения поля вдоль  $z$ . Величина  $r^2$ , входящая во второе слагаемое выражения (4.25), может быть взята в первом приближении равной  $r^2 = \frac{r_0^2 b(0)}{b(z)}$ , так как уравнением силовой линии является  $rA_\varphi = \text{const}$ . Подставляя  $r^2$  в выражение (4.25) и интегрируя по частям, получим

$$\int \frac{dl}{B} \simeq \int_0^L \frac{dz}{b(z)} + \frac{3r_0^2 b(0)}{4} \int_0^L \frac{b'^2}{b^4} dz. \quad (4.26)$$

Последнее соотношение показывает, что удельный объем в рассматриваемом случае является возрастающей функцией  $r$ .

В частном случае поля (4.22), т. е. поля, описываемого одной гармоникой, нетрудно написать в явном виде точное выражение для удельного объема. Действительно, используя уравнение силовой линии для поля (4.22)

$$r^2 - r_0^2 = \frac{2b}{k B_0} r I_1(kr) \cos kz,$$

где  $r_0 = r$  при  $kz = \frac{\pi}{2}$ , и исключая с его помощью зависимость от  $z$  в компоненте

$$B_r = bI_1(kr) \sin kz,$$

получим

$$U = \int_0^L \frac{dl}{B} = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{B_r} = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{bI_1(kr) \sqrt{1 - \frac{(r^2 - r_0^2)^2 k^2 B^2}{(rI_1)^2 4b^2}}}. \quad (4.27)$$

Здесь  $r_m$  и  $r_M$  — значения  $r$ , при которых корень под интегралом обращается в нуль.

Полученный интеграл, однако, может быть определен только численно.

б. В качестве второго примера прямого поля с замкнутыми силовыми линиями рассмотрим прямое волнистое поле (скэллопс). Подобное поле может быть создано двумя сдвинутыми одна относительно другой на расстояние  $l$  системами колец радиуса  $a$ , находящихся на расстоянии  $L$  (рис. 23). Используя выражения (4.20), скалярный потенциал такого поля можно записать в виде

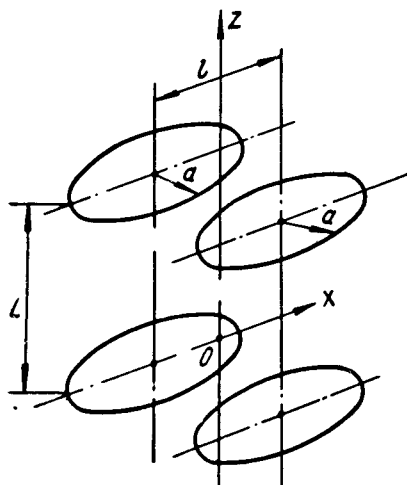


Рис. 23

$$\begin{aligned} \Phi &= B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} [I_0(nkr_1) \sin nkz + I_0(nkr_2) \sin n(kz - \pi)] = \\ &= B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} [I_0(nkr_1) + (-1)^n I_0(nkr_2)] \sin nkz, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$r_1^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 - lr \cos \varphi; \quad r_2^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 + lr \cos \varphi. \quad (4.29)$$

Считая  $l$  малым и подставив выражения (4.29) в формулу (4.28), разложим полученное выражение по степеням  $l$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} [I_0(nkr)(1 + (-1)^n) - \\ &\quad - \frac{nk l}{2} \cos \varphi (1 - (-1)^n) I_1(nkr)] \sin nkz. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Вблизи оси  $z$  это поле может быть аппроксимировано однородным полем и полем двух гармоник:

$$\Phi = B_0 z - \frac{1}{2} b_1 k l \cos \varphi I_1(kr) \sin kz + b_0 J_0(2kr) \sin 2kz. \quad (4.31)$$

Здесь наиболее характерной является гармоника, содержащая  $I_1(kr)$ , которая дает не обращающуюся в нуль на оси  $r=0$  составляющую поперечного поля  $B_x$ , что и вызывает поперечные колебания силовых линий. На рис. 24 в плоскости  $xz$  изображены сепаратриса и силовые линии поля этой гармоники при наложении на него продольного поля  $B_0$ :

$$\Phi = B_0 z + \frac{B_1}{k} I_1(kr) \cos \varphi \sin kz. \quad (4.32)$$

Ребра сепаратрисы определяются соотношениями

$$kz = m\pi; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$I_1(kr) \cos \varphi = -\frac{B_0}{B_1}, \quad (4.33)$$

и напряженность поля на них обращается в нуль. Поскольку поле (4.31) не обладает симметрией, его силовые линии можно найти только приближенно, например методом усреднения, если  $\frac{B_1}{B_0} \ll 1$ . Учитывая, что в данном случае  $\psi = 0$ , мы можем уравнения силовых линий (3.9) записать в виде

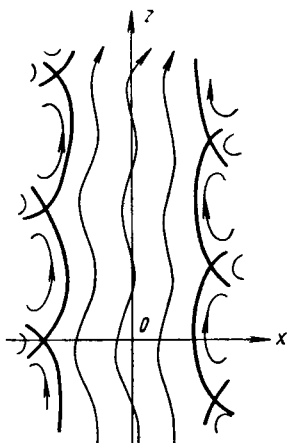


Рис. 24

$$r = \bar{r} + \frac{\hat{B}_r}{B_0} + \dots; \quad \varphi = \bar{\varphi} + \frac{\hat{B}_\varphi}{r B_0} + \dots \quad (4.34)$$

В § 7 исследовано изгибание рассмотренных выше полей в тор достаточно большого радиуса.

**Задача.** Рассчитать магнитное поле соленоида, состоящего из равноудаленных кольцевых токов.

**Решение.** Азимутальный ток, текущий по поверхности круглого цилиндра радиуса  $a$  и распределенный по косинусу  $i_\varphi = \cos nkz$ , создает магнитное поле, описываемое внутри и вне цилиндра одной гармоникой скалярного потенциала, удовлетворяющей уравнению Лапласа и условиям конечности соответственно при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ :

$$\Phi_i = a_i I_0(nkr) \sin nkz; \quad \Phi_e = a_e K_0(nkr) \sin nkz. \quad (4.35)$$

Коэффициенты  $a_i$  и  $a_e$  определяются из граничных условий при  $r = a$ :

$$B_r^i - B_r^e = 0; \quad B_z^i - B_z^e = \frac{4\pi}{c} i_\varphi.$$

Используя формулу  $I_0'(x) K_0(x) - K_0'(x) I_0(x) = \frac{1}{x}$ , найдем

$$a_i = \frac{4\pi a}{c} K_0'(nka); \quad a_e = -\frac{4\pi a}{c} I_0'(nka). \quad (4.36)$$

Для получения потенциала системы колец достаточно разложить плотность тока в ряд Фурье:

$$i_{\varphi} = J\delta(z) = \frac{Jk}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n kz \right\}; \quad \delta(z+L) = \delta(z) \quad (4.36')$$

и сложить соответствующие гармоники потенциалов. Учитывая, что однородный азимутальный ток создает только однородное продольное поле внутри цилиндра, получаем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \frac{2Jk}{c} \left\{ z + 2a \sum_{n=1}^{\infty} K'_0(nka) I_0(nkr) \sin n kz \right\}; \\ \Phi_e &= \frac{4Jka}{c} \sum_{n=1}^{\infty} I'_0(nka) K_0(nkr) \sin n kz. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Магнитное поле системы колец с токами часто удобнее описывать с помощью векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , имеющего одну компоненту  $A_{\varphi}$ . Соответствующие выражения для  $A_{\varphi}$  легко получаются из выражений (4.37), если учесть, что

$$\left. \begin{aligned} I'_0(x) &= I_1(x); \quad K'_0(x) = -K_1(x); \\ A_{\varphi}^i &= \frac{2Jk}{c} \left\{ \frac{r}{2} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} K_1(nka) I_1(nkr) \cos n kz \right\}; \\ A_{\varphi}^e &= \frac{4Jka}{c} \sum_{n=1}^{\infty} I_1(nka) K_1(nkr) \cos n kz. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

## § 5. Прямое поле с винтовой симметрией

### 1. Магнитные поверхности винтового поля

Примером прямого безвихревого поля с незамкнутыми силовыми линиями может служить магнитное поле, создаваемое винтовой токовой обмоткой [2] с конечным шагом  $L$  (рис. 25). Такое поле обладает винтовой симметрией и в цилиндрической системе координат зависит только от  $r$  и  $\theta = \varphi - \alpha z$ , где  $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ .

Безвихревые винтовые поля удобно описывать с помощью скалярного потенциала, разложенного в ряд по гармоникам, удовлетворяющим уравнению Лапласа:

$$\Phi = B_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(nkr) \sin n\theta. \quad (5.1)$$

Вследствие симметрии уравнение силовых линий имеет интеграл (3.2в). Подставляя в уравнения (3.1а) компоненты поля, выраженные через  $\Phi$ , и полагая  $A_z$  равным нулю\*, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_r}{\partial z}.$$

\* Последнее возможно, поскольку к  $\mathbf{A}$  мы можем добавить градиент произвольной функции  $F$ , удовлетворяющей уравнению  $\Delta F = 0$ .

Отсюда следует, что поле (5. 1) описывается векторным потенциалом с компонентами

$$\left. \begin{aligned} A_r &= -\frac{1}{\alpha^2 r} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(nar) \sin n\theta; \\ A_\varphi &= B_0 \frac{r}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} b_n I'_n(nar) \cos n\theta; \quad A_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5. 2)$$

и уравнением его магнитных поверхностей является уравнение  $\Psi = \alpha r A_\varphi = \text{const}$ , т. е. [3]

$$\Psi(r, \theta) = B_0 \frac{\alpha r^2}{2} - r \sum_{n=1}^{\infty} b_n I'_n(nar) \cos n\theta = \text{const} \quad (5. 3)$$

Рассматривая ранее характеристики тороидального поля, мы ввели продольный и азимутальный магнитные потоки  $\Phi$  и  $\chi$  внутри магнитной поверхности. В случае прямого винтового поля эти потоки равны:

$$\Phi = \int B_z(r, \theta) r dr d\varphi; \quad (5. 4)$$

$$\chi = \int B_\varphi(r, \theta) dr dz = -\frac{1}{\alpha} \int B_\varphi(r, \theta) dr d\varphi \quad (5. 5)$$

и связаны с  $\Psi$  соотношением

$$\Phi + \chi = 2\pi\Psi. \quad (5. 6)$$

Действительно, из уравнений  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и (3. 2в) следует, что

$$\alpha r B_z - B_\varphi = \alpha \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial r} = \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (5. 7)$$

Складывая выражения (5. 4) и (5. 5) и подставляя в полученную сумму формулу (5. 7), получим соотношение (5. 6). Таким образом, если в аксиально-симметричном поле магнитная поверхность определяется постоянством продольного потока  $\Phi = \text{const}$ , в плоском поле — сохранением азимутального потока [см. (3. 2а, б)]  $\chi = \text{const}$ , то винтовая магнитная поверхность определяется сохранением их суммы  $\Phi + \chi$ .

Рассмотрим подробнее суммарное поле  $n$ -й гармоники и однородного поля  $\mathbf{B}_0$ , направленного вдоль  $z$ .

Такое поле называется  $n$ -заходным, поскольку для его создания требуется  $n$  пар винтовых проводников с чередующимся направлением тока\*.

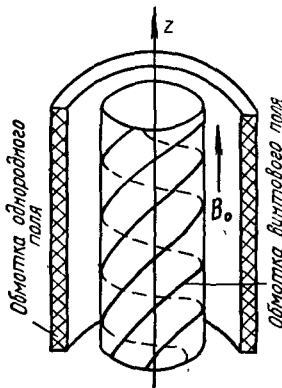


Рис. 25

\* Разумеется, поле  $n$  тонких проводников содержит бесконечное множество гармоник (см. задачу к этому параграфу), однако вблизи оси поле обычно можно аппроксимировать одной гармоникой.

Скалярный потенциал и уравнения магнитных поверхностей в этом случае имеют вид:

$$\Phi = B_0 z + \frac{b}{\alpha} I_n(n\rho) \sin n(\varphi - \alpha z), \quad \rho = \alpha r; \quad (5.8a)$$

$$\Psi = \frac{B_0}{2\alpha} \left\{ \rho^2 - \frac{2b}{B_0} \rho I'_n(n\rho) \cos n(\varphi - \alpha z) \right\} = \frac{B_0}{2\alpha} \rho_0^2. \quad (5.8b)$$

Здесь  $\rho_0$  — «средний» радиус магнитной поверхности. Для того чтобы получить представление о характере сечений магнитных поверхностей плоскостью  $z = 0$ , рассмотрим уравнение (5.8б) при малых и больших  $\rho$ . Если  $\rho \rightarrow 0$ , то

$$I_n(n\rho) \simeq \frac{1}{n!} \left( \frac{n\rho}{2} \right)^n \quad (5.9)$$

и уравнение (5.8б) приводится к виду

$$\begin{aligned} \rho^2 - \gamma \rho^n \cos n\varphi &= \text{const}; \\ \gamma &= \frac{2b}{B_0} \frac{1}{2(n-1)!} \left( \frac{n}{2} \right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Отсюда видно, что следует различать три случая:  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n \geq 3$ . Если  $n = 1$ , то при  $z = 0$

$$r^2 - \frac{\gamma}{\alpha} r \cos \varphi = \left( x - \frac{\gamma}{2\alpha} \right)^2 + y^2 - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2} = \text{const}, \quad (5.11)$$

т. е. в окрестности начала координат сечения магнитных поверхностей представляют собой смещенные окружности (рис. 26, а).

Однако этот вывод справедлив лишь при  $\frac{b}{B_0} \ll 1$ , поскольку в противном случае центр окружности перемещается в область больших  $x$ , где аппроксимация (5.9) недостаточна.

При  $n = 2$  уравнение (5.10) сводится к

$$r^2 \left( 1 - \frac{b}{B_0} \cos 2\varphi \right) = \text{const}. \quad (5.12)$$

Отсюда видно, что если  $\frac{b}{B_0} < 1$ , то начало координат является эллиптической точкой (см. рис. 26, б), тогда как при  $\frac{b}{B_0} > 1$  начало координат является гиперболической точкой (см. рис. 26, в) с асимптотами, проходящими под углом  $\varphi_A$ , определяемым из равенства

$$\cos 2\varphi_A = \frac{B_0}{b}. \quad (5.13)$$

Наконец, при  $n \geq 3$  уравнение (5.10) можно переписать в виде

$$r^2 (1 - \gamma (\alpha r)^{n-2} \cos n\varphi) = \text{const}, \quad (5.14)$$

и, как нетрудно видеть, при любых  $\gamma$  и достаточно малых  $r$  сечение магнитных поверхностей имеет вид возмущенных окружностей, охватывающих начало координат (см. рис. 26, г).



В другом крайнем случае, когда  $r \rightarrow \infty$  [21],

$$I'_n(qn) \simeq \frac{e^{qn}}{\sqrt{2\pi qn}} \rightarrow \infty, \quad (5.15)$$

и, следовательно, в уравнении (5. 86) можно пренебречь членом с  $B_0$ :

$$qI'_n(qn) \cos n(\varphi - \alpha z) = \text{const}. \quad (5.16)$$

Выражение (5. 16) характеризует магнитные поверхности при  $B_0 = 0$ , т. е. магнитные поверхности одной винтовой гармонике без продольного однородного поля.

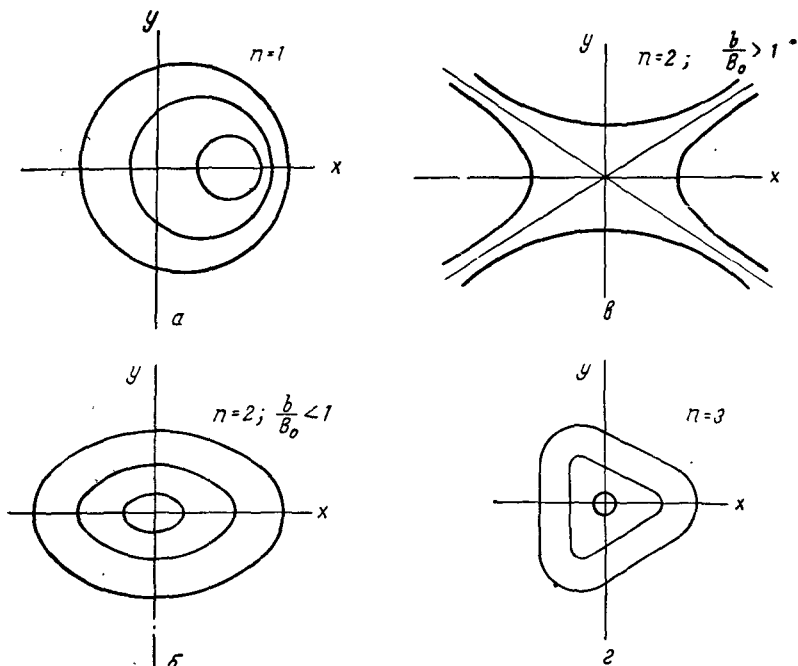


Рис. 26

Очевидно, линии  $q = q(\varphi)$  при  $z = 0$ , определяемые уравнением (5. 16), имеют асимптоты в виде прямых, проходящих под углами  $\varphi_A$ , для которых

$$\cos n\varphi_A = 0. \quad (5.17)$$

Сечения магнитных поверхностей (5. 16) плоскостью  $z = 0$  при разных  $n$  изображены на рис. 27, где схематически показаны также токи, создающие эти поля\*, и области вблизи начала

\* Строго говоря, эти токи нужно было разместить на окружности  $R = a = \text{const}$  с плотностью  $\sim \sin n\varphi$ .

координат, которые искажаются при  $B_0 \neq 0$  так, как было указано выше. Переход замкнутых при  $B_0 \neq 0$  магнитных поверхностей в окрестности начала координат \* к полю в бесконечности, разбитому прямыми линиями на  $2n$  групп, происходит на сепаратрисе.

Из сказанного очевидно, что на сепаратрисе должны быть угловые точки, куда упираются асимптоты, имеющиеся при

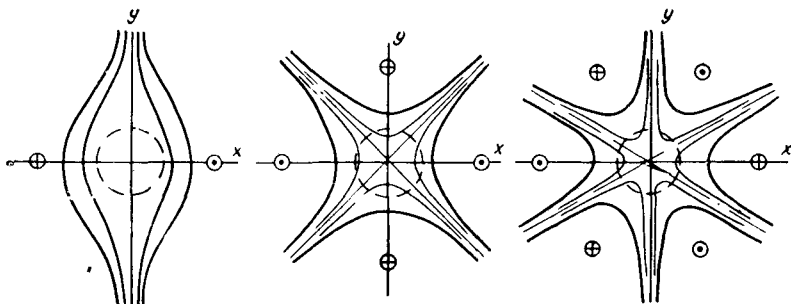


Рис. 27

$\varrho \rightarrow \infty$ . Координаты особых точек уравнения (5. 86) при  $z = 0$  определяются из условий:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0. \quad (5. 18)$$

Используя уравнение для бesselевой функции  $I_n(n\varrho)$

$$I_n'' + \frac{1}{n\varrho} I_n' - \left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right) I_n = 0, \quad (5. 19)$$

из условий (5. 18) получим:

$$\sin n\varphi = 0; \quad (5. 20)$$

$$\varrho \left[1 - \frac{bn}{B_0} \left(1 + \frac{1}{\varrho^2}\right) I_n(n\varrho) \cos n\varphi\right] = 0. \quad (5. 21)$$

Отсюда следует:

1) при  $n > 1$  начало координат является особой точкой эллиптического типа и ось  $z$  представляет собой магнитную ось;

2) при  $n > 1$  число особых точек вне оси равно  $n$ ;

3) расстояние  $\varrho_{mc}$  от начала координат до особой точки связано с  $\frac{b}{B_0}$  соотношением

$$\frac{b}{B_0} = \frac{\varrho_{mc}^2}{n \left(1 + \varrho_{mc}^2\right) I_n(n\varrho_{mc})}. \quad (5. 22)$$

\* При  $n = 1; 2$  для этого требуется еще, чтобы  $\frac{b}{B_0}$  было невелико.

График этой зависимости при разных  $n$  приведен на рис. 28, из которого видно, что если  $n > 2$ , то при любых  $\frac{b}{B_0}$  существует сепаратриса, тогда как при  $n = 2$  она имеется лишь при  $\frac{b}{B_0} < 1$ . Из хода кривой для  $n = 1$  следует, что если  $\frac{b}{B_0} > 0,9$ , то сепаратрисы также не существует, но если  $\frac{b}{B_0} < 0,9$ , то имеются

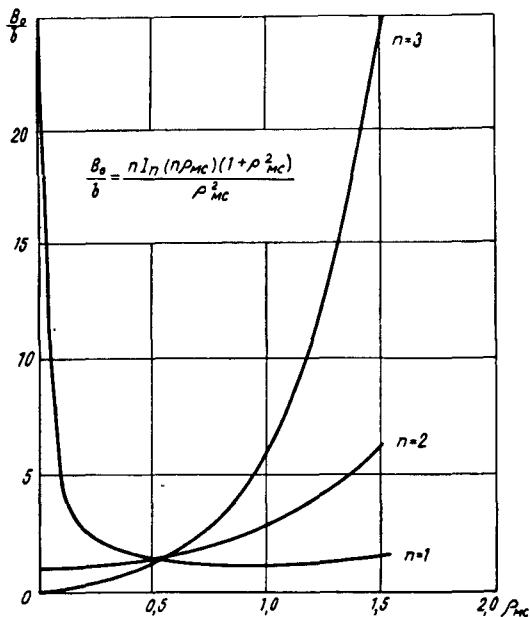


Рис. 28

две особые точки  $q_1$  и  $q_2$ . Нетрудно видеть, что первая точка эллиптическая, а вторая гиперболическая и является следом ребра сепаратрисы.

Теперь можно схематически изобразить сечение магнитных поверхностей при разных  $n$  и  $\frac{b}{B_0}$  (рис. 29). Графики, полученные с помощью точного расчета при определенных  $\frac{b}{B_0}$ , приведены на рис. 30.

До сих пор мы рассматривали магнитные поверхности поля, содержащего одну гармонику. Поля, содержащие две гармоники и более, могут иметь очень сложную структуру.

В качестве примера рассмотрим поле, содержащее две гармоники, одна из которых является гармоникой двухзаходного поля:

$$\Phi = B_0 z + b_n I_n(nQ) \sin n(\varphi - \alpha z) + b_2 I_2(2Q) \sin 2(\varphi - \alpha z).$$

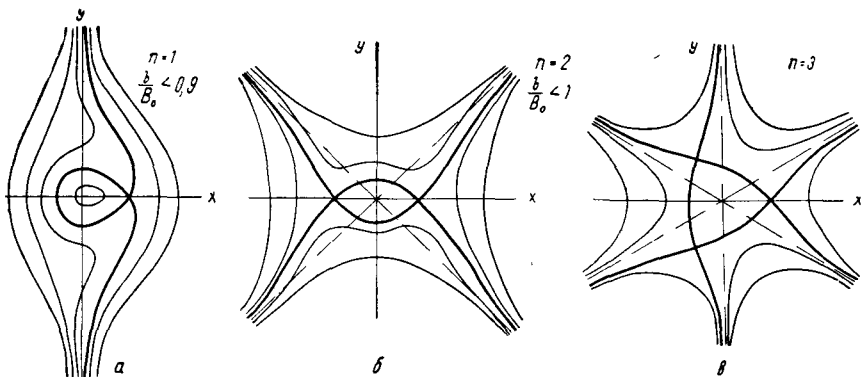


Рис. 29

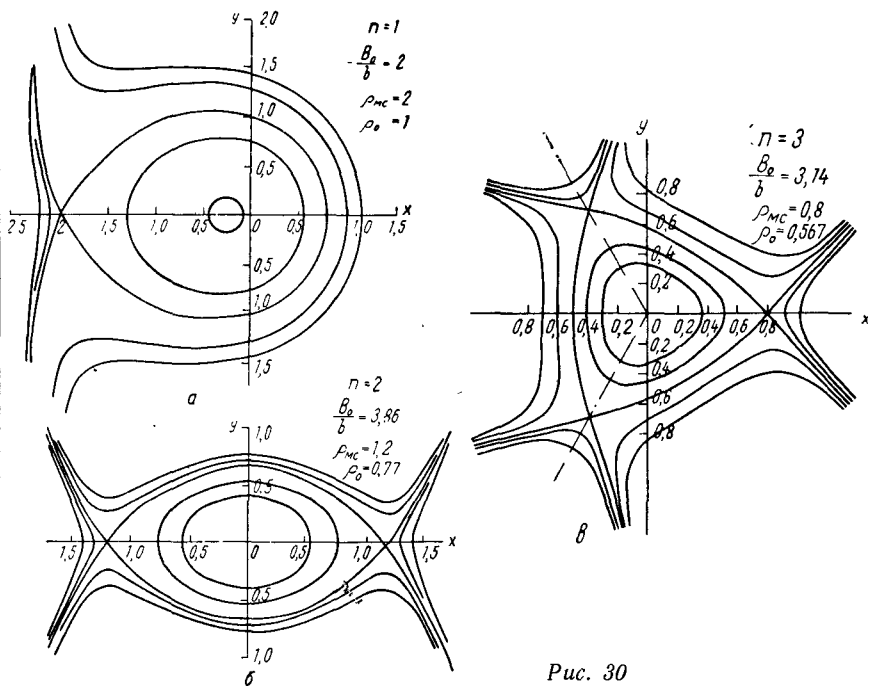


Рис. 30

В этом случае уравнение магнитных поверхностей  $\Psi = \text{const}$  вблизи оси  $z$  представляется выражением

$$\varrho^2 + a \left( \varrho^2 + \frac{2}{3} \varrho^4 \right) \cos 2(\varphi - az) + q\varrho^n \cos n(\varphi - az) = \text{const}.$$

При  $n = 3$ ,  $q > 0$ ,  $a < 0$ ,  $1 < |a| < 3$  сечение магнитных поверхностей показано на рис. 31, причем все изображение вращается вокруг оси  $z$  с шагом  $L =$

$$= \frac{2\pi}{a}. \text{ Координата центра } O$$

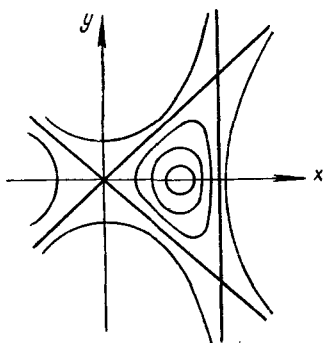


Рис. 31

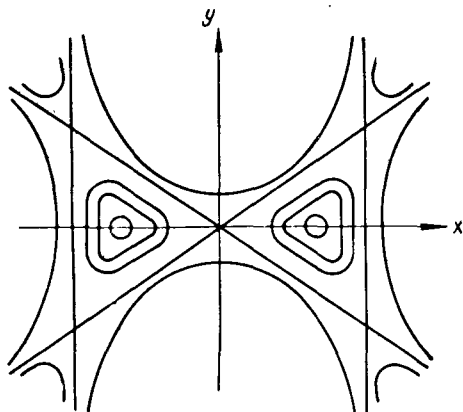


Рис. 32

винтовых магнитных трубок есть  $\varrho_k = \frac{-2(1+a)}{3q}$ . Если  $n = 4$ , то при  $q \gg 1$ ,  $1 < |a| < 2$  и  $a < 0$  сечение магнитных поверхностей имеет вид, представленный на рис. 32. Это изображение также вращается вокруг оси  $z$  с шагом  $L$ . В этом случае мы имеем две системы магнитных поверхностей в виде винтовых трубок, обвивающих одна другую. Центры этих трубок находятся на расстоянии  $\varrho_k = \sqrt{\frac{|a|-1}{2q}}$  от оси  $z$

## 2. Усредненные магнитные поверхности и силовые линии

Знание магнитных поверхностей еще не определяет однозначно поведения магнитной силовой линии. Для этого нужно найти второй интеграл системы (2. 11).

Используя уравнение магнитных поверхностей, мы можем выразить его в квадратурах (см. ниже), однако получающиеся формулы оказываются очень громоздкими. Поэтому приходится прибегать к приближенным методам. Особенно эффективным оказывается метод усреднения, справедливый при  $r \ll r_c$ , где  $r_c$  — характерный радиус сепаратрисы (практически он пригоден при  $r \approx \frac{1}{2} r_c$ ).

Уравнение магнитных поверхностей в рамках метода усреднения дается формулой (3. 7)

$$\psi = -\frac{1}{B_0} \overline{\widehat{B}_r B_\varphi}. \quad (5.23)$$

Здесь учтено, что  $A_z = 0$ .

Подставляя сюда компоненты  $B_r$  и  $B_\varphi$  произвольного безвихревого винтового поля (5. 1)

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \sum b_n n \frac{\partial}{\partial \varrho} I_n(n\varrho) \sin n(\varphi - \alpha z); \\ B_\varphi &= \sum b_n n \frac{1}{\varrho} I_n(n\varrho) \cos n(\varphi - \alpha z), \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

получим

$$\psi = -\frac{1}{4B_0 \alpha} \sum b_n^2 \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d}{d\varrho} I_n^2(n\varrho), \quad (5.25)$$

и, следовательно, усредненные магнитные поверхности имеют вид окружностей  $r = \text{const}$ .

Используя соотношение (3. 10), находим выражение для угла прокручивания за период

$$2\pi\omega = 2\pi \sum \frac{b_n^2}{4B_0^2} \left( \frac{d}{\varrho d\varrho} \right)^2 I_n^2(n\varrho). \quad (5.26)$$

Уравнения силовой линии с точностью до членов  $\sim b_n$  даются формулами (3. 9) и в случае поля (5. 1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 + \frac{1}{B_0} \sum b_n I_n'(n\varrho) \cos n\theta + O_r(b_n^2); \\ \varphi &= 2\pi\omega \frac{z}{L} - \frac{1}{B_0 \varrho_0^2} \sum b_n I_n(n\varrho) \sin n\theta + O_\varphi(b_n^2), \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

где  $\theta = (\omega - 1) \alpha z$ , а  $O_r(b_n^2)$  и  $O_\varphi(b_n^2)$  — члены порядка  $b_n^2$ , среднее значение которых по  $z$  равно нулю.

Для  $n$ -й гармоники выражение (5. 26) для  $\omega$  в окрестности оси можно записать в более обозримом виде, используя разложение  $I_n(n\varrho)$ :

$$\omega = \left( \frac{b_n}{B_0} \right)^2 \left( \frac{2}{n!} \left( \frac{n}{2} \right)^{n+1} \right)^2 \left\{ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \varrho^{2n-4} + \frac{n}{2} \varrho^{2n-2} + \dots \right\}. \quad (5.28)$$

Отсюда видно, что при  $n = 1$  и  $n = 2$  угол прокручивания при  $r = 0$  не равен нулю, тогда как при  $n > 2$  он равен нулю при  $r = 0$ .

Ход силовой линии отдельной гармоники можно представить весьма наглядным образом, если ввести отклонения

$$\left. \begin{aligned} x &= r - r_0; \\ y &= r_0 (\varphi - \alpha\omega z). \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Как следует из выражений (5. 27), отклонения удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5. 30)$$

где

$$a = \frac{b_n I'_n(nQ)}{\alpha B_0}; \quad b = \frac{b_n I_n(nQ)}{B_0 \alpha Q_0}.$$

Таким образом, силовая линия магнитного поля одной винтовой гармоники представляет собой спираль с шагом  $\lambda = \frac{L}{n}$  эллиптического сечения, навитую на ось, которая в свою очередь является винтовой линией с шагом  $\Lambda = \frac{L}{\omega}$ , навитой на круговой цилиндр радиуса  $r_0$  (рис. 33).

Используя приближенные уравнения для силовых линий (5. 27), вычислим основные характеристики магнитных поверхностей прямого винтового поля.

1. Объем магнитной поверхности в пределах одного шага с точностью до членов  $\sim b_n^2$  включительно равен

$$V = L \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2(\varphi)}{2} = \frac{L}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left( r_0 + \frac{1}{\alpha B_0} \sum b_n I'_n \cos n\theta + \dots \right)^2 = \pi L \left( r_0^2 + \frac{1}{2\alpha^2 B_0^2} \sum b_n^2 I_n'^2 \right). \quad (5. 31)$$



Рис. 33

2. Продольный магнитный поток внутри магнитной поверхности находится следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} B_z r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr (B_0 - \sum n b_n I_n \cos n\theta) = \\ &= B_0 \frac{V}{L} - \int_0^{2\pi} d\varphi \sum Y_n(r(\varphi)) n b_n \cos n\theta, \end{aligned} \quad (5. 32)$$

где

$$Y_n(r) = \int_0^r I_n(r) r dr.$$

Подставляя сюда выражения (5. 27), получим

$$Y_n(r) = Y_n(r_0) + r_0 I_n \sum \frac{b_n}{\alpha B_0} I'_n \cos n\theta,$$

и, следовательно,

$$\Phi = B_0 \frac{V}{L} - \pi \sum \frac{n b_n^2}{\alpha B_0} r I_n I'_n. \quad (5. 33)$$

Если  $n > 1$ , то магнитная ось прямая, и аналогично предыдущему можно найти азимутальный магнитный поток

$$\begin{aligned} \chi &= \int_0^L dz \int_0^{r(z)} B_\varphi dr \Big|_{\varphi=\text{const}} = \int_0^L dz \int_0^{r(z)} dz \sum n \frac{b_n}{Q} I_n(nQ) \cos n\theta = \\ &= \frac{L}{2} \sum \frac{nb_n^2}{aB_0} I_n I_n'. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Используя полученные формулы, находим удельный объем:

$$U = \frac{dV}{d\Phi} = \frac{L}{B_0 \left( 1 - \sum \frac{nb_n^2}{B_0^2} \frac{dI_n I_n'}{dQ^2} \right)}. \quad (5.35)$$

Отсюда видно, что удельный объем магнитных поверхностей при удалении от оси поля непрерывно возрастает. Подобное же возрастание удельного объема к периферии мы наблюдали раньше на примере гофрированного поля.

Наконец, продифференцировав  $\chi$  по  $\Phi$ , мы получим в полном соответствии с соотношением (2.19) выражение для  $\omega$ , совпадающее с выражением (5.26), найденным ранее другим методом.

### 3. Точное выражение для угла прокручивания

В заключение параграфа рассмотрим поведение силовых линий вблизи сепаратрисы, где метод усреднения непригоден. Для этого получим еще один точный интеграл (первым интегралом является уравнение магнитных поверхностей) системы уравнений силовых линий для  $n$ -заходного поля (5.8а), взяв за основу одно из уравнений силовой линии

$$\frac{rd\varphi}{dr} = \frac{B_\varphi}{B_r}. \quad (5.36)$$

Подставляя сюда значения  $B_\varphi$  и  $B_r$ , найденные с помощью потенциала (5.1), получим

$$\frac{rd\varphi}{dr} = \frac{I_n \cos n(\varphi - az)}{a r I_n' \sin n(\varphi - az)}. \quad (5.37)$$

Уравнение магнитных поверхностей (5.8б) дает следующие выражения:

$$\cos n(\varphi - az) = \frac{Q^2 - Q_0^2}{\frac{2b}{B_0} Q I_n'(nQ)}; \quad (5.38a)$$

$$\sin n(\varphi - az) = \sqrt{1 - \left( \frac{Q^2 - Q_0^2}{\frac{2b}{B_0} Q I_n'(nQ)} \right)^2}. \quad (5.38b)$$



Подставляя выражения (5.38) в уравнения (5.37), находим искомый интеграл

$$\varphi = \int \frac{(\varrho^2 - \varrho_0^2) I_n(n\varrho) d\varrho}{\varrho^2 I_n'(n\varrho) \sqrt{\left(\frac{2b}{B_0} \varrho I_n'(n\varrho)\right)^2 - (\varrho^2 - \varrho_0^2)^2}}. \quad (5.39)$$

С помощью этого интеграла можно получить точное значение  $\omega = \omega(\varrho_0)$ , т. е. выражение для скорости прокручивания силовых линий, лежащих на магнитной поверхности со средним радиусом  $r_0$ . Действительно, если мы проинтегрируем выражение (5.39) в пределах от  $\varrho_{\text{мин}}$  до  $\varrho_{\text{макс}}$ , определяемых из условий  $\cos n\theta = -1$  и  $\cos n\theta = +1$ , то получим изменение  $\delta\varphi$  при

изменении  $\theta$  на  $-\frac{\pi}{n}$ .

При этом изменении  $\delta z$  определяется равенством

$$\delta\varphi - \alpha\delta z = -\frac{\pi}{n}. \quad (5.40)$$

Если учесть, что  $2\pi\omega$  — угол поворота за период

$$2\pi\omega = \frac{\delta\varphi}{\delta z} L,$$

$$\omega = \frac{n\delta\varphi}{\pi + n\delta\varphi}. \quad (5.41)$$

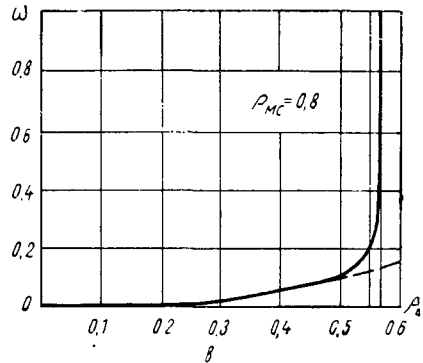
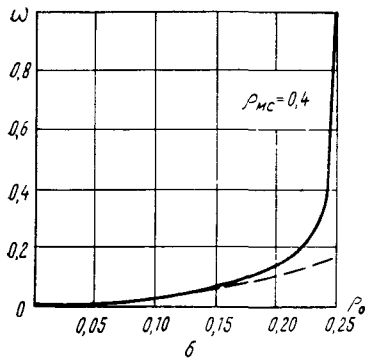
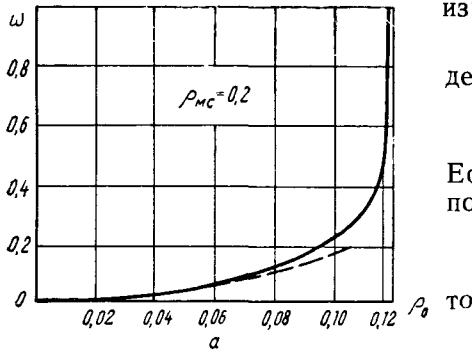


Рис. 34

Когда

$$\delta\varphi \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \frac{n\delta\varphi}{\pi}.$$

Для сравнения значений  $\omega$ , вытекающих из точных формул (5.39) и (5.41), со значениями, даваемыми формулой (5.26), был найден численно интеграл (5.39) при разных значениях  $\frac{b}{B_0}$ . Результаты расчетов приведены на графиках рис. 34. Там же

штриховой линией изображены значения, даваемые формулой (5. 26). Видно, что вплоть до  $Q_0 \lesssim \frac{1}{2} Q_{0c}$  совпадение значений  $\omega$ , полученных разными способами, очень хорошее.

Исследуем теперь поведение силовых линий вблизи ребра сепаратрисы. Прежде всего убедимся, что ребро сепаратрисы является силовой линией, т. е. что ребра сепаратрисы

$$r_e = \text{const}, \quad \varphi - \alpha z = 0 \quad (5. 42)$$

удовлетворяют уравнениям силовых линий

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z}; \quad \frac{rd\varphi}{dz} = \frac{B_\varphi}{B_z}. \quad (5. 43)$$

Из формул (5. 42) и (5. 43) следует, что

$$B_r(r_c, 0) = 0; \quad \alpha r = \frac{B_\varphi(r_c, 0)}{B_z(r_c, 0)}. \quad (5. 44)$$

Но эти соотношения эквивалентны условиям (5. 18), если учесть формулу (5. 7), что и доказывает наше утверждение.

Для того чтобы рассчитать поведение силовых линий вблизи ребра  $r_c$ ,  $\theta = 0$ , разложим уравнение (5. 37) по степеням  $\theta$  и  $\xi = Q - Q_c$  и ограничимся первыми не исчезающими членами:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{I_n(nQ_c)}{Q_c^2 I'_n(Q_c n) n\theta} = \frac{N(Q_c)}{\theta}. \quad (5. 45)$$

С другой стороны, разлагая уравнение магнитной поверхности по степеням  $\xi$  и  $\theta$  и учитывая условия (5. 18), получим

$$\Psi(r_c, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(r_c, 0)}{\partial \theta^2} \theta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(r_c, 0)}{\partial \xi^2} \xi^2 = \text{const}. \quad (5. 46)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(r_c, 0)}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{2} \frac{B_0}{2a} \left( \frac{2b}{B_0} Q_c I'_n(nQ_c) n^2 \right) = + \frac{1}{a^2}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi(r_c, 0)}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{2} \frac{B_0}{2a} \left( 2 - \frac{2b}{B_0} \frac{\partial^2}{\partial Q_c^2} Q_c I'_n \right) = - \frac{1}{b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5. 47)$$

Отрицательность последнего выражения на ребре сепаратрисы следует из соотношения (5. 22).

Из формул (5. 47) и (5. 46) вытекает

$$\frac{\xi^2}{b^2} - \frac{\theta^2}{a^2} = \text{const}. \quad (5. 48)$$

Если силовая линия лежит на сепаратрисе, то правая часть уравнения (5. 48) равна нулю и

$$\theta = \pm \frac{a}{b} \xi. \quad (5. 49)$$

Подставляя выражение (5.49) в уравнение (5.45), получим

$$\xi = \text{const} \cdot \exp\left(\pm \frac{a}{bN} \varphi\right) = \text{const} \cdot \exp\left(\pm \frac{a}{bN} az\right). \quad (5.50)$$

Отсюда видно, что при  $z \rightarrow \infty$  величина  $\xi = \varrho - \varrho_c$  стремится к нулю или к бесконечности. Это означает, что если при  $z \rightarrow +\infty$  силовая линия прижимается к ребру, то при  $z \rightarrow -\infty$  она отходит от ребра (рис. 35).

**Задача.** Найти магнитное поле  $n$ -заходной винтовой спирали из проводников, навитых на круглый цилиндр.

**Решение.** Рассмотрим сначала поле одной гармоники тока, текущего по поверхности цилиндра в направлении винтовой линии  $\varphi - az = \text{const}$ . Поверхностная плотность тока имеет компоненты

$$i_z = i_n \cos n(\varphi - az); \quad i_\varphi = i_n \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos n(\varphi - az), \quad (5.51)$$

где  $\gamma$  угол, образованный винтовой линией с осью  $z$ . Если радиус цилиндра есть  $a$ , то  $\operatorname{tg} \gamma = aa$ . Внутреннее и внешнее поля описываются скалярными потенциалами

$$\Phi_i = a_n^i I_n(nar) \sin n\theta; \quad \Phi_e = a_n^e K_n(nar) \sin n\theta. \quad (5.52)$$

Коэффициенты  $a_n^i$  и  $a_n^e$  определяются из граничных условий

$$B_r^i - B_r^e = 0; \quad B_\varphi^i - B_\varphi^e = -\frac{4\pi}{c} i_z; \quad B_z^i - B_z^e = \frac{4\pi}{c} i_\varphi, \quad (5.53)$$



Рис. 35

откуда, используя известную формулу для вронкиана  $I'(x) K_n(x) - K_n'(x) I_n(x) = \frac{1}{x}$ , получаем

$$a_n^i = \frac{4\pi a a^2 i_n}{c} K_n'(naa); \quad a_n^e = -\frac{4\pi a a^2 i_n}{c} I_n'(naa). \quad (5.54)$$

Из найденных гармоник винтового поля построим теперь поле тонкого винтового проводника с током  $J$ . Поверхностная плотность тока имеет в этом случае составляющие

$$i_z = \frac{J}{a} \delta(\varphi - az) = \frac{J}{2\pi a} \left\{ 1 + 2a \sum_{N=1}^{\infty} \cos N(\varphi - az) \right\}; \quad (5.55)$$

$$i_\varphi = \frac{J}{a} aa \delta(\varphi - az) = \frac{Ja}{2\pi} \left\{ 1 + 2a \sum_{N=1}^{\infty} \cos N(\varphi - az) \right\}. \quad (5.56)$$

Нулевые гармоники этих разложений соответствуют однородным токам, текущим в продольном и азимутальном направлениях. Они создают поля, согласно условиям (5.53), равные

$$B_{z0}^i = \frac{2}{c} \frac{J}{a} aa; \quad B_{\varphi 0}^e = \frac{2}{c} \frac{J}{a}.$$

Остальные гармоники поля находим, суммируя выражения (5.52). В результате получаем следующие формулы для скалярных потенциалов внутреннего и внешнего поля спирали:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \frac{2Ja}{c} \left\{ z + 2a \sum_{N=1}^{\infty} K'_N(Naa) I_N(Nar) \sin N(\varphi - az) \right\}; \\ \Phi_e &= \frac{2Ja}{c} \left\{ \frac{\varphi}{a} + 2a \sum_{N=1}^{\infty} I'_N(Naa) K_N(Nar) \sin N(\varphi - az) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Найдем теперь поле  $n$ -заходной токовой спирали, образованной  $2n$ -винтовыми проводниками с чередующимися направлениями токов. Потенциалы такого поля можно получить сложением потенциалов (5.57) отдельных проводников. Используя формулу суммирования синусов

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \sin N \left[ \left( \varphi - \frac{m\pi}{n} \right) - az \right] (-1)^m = \begin{cases} 2n \sin N(\varphi - az), \\ 0 \end{cases} \quad (5.58)$$

где верхнее значение имеет место, когда  $N = (2p + 1)n$  при целом  $p$ , а нижнее — во всех других случаях, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= \frac{8Jana}{c} \sum_{p=0}^{\infty} K'_N(Naa) I_N(Nar) \sin N(\varphi - az); \\ \Phi_e &= \frac{8Jana}{c} \sum_{p=0}^{\infty} I'_N(Naa) K_N(Nar) \sin N(\varphi - az); \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

$$N = (2p + 1)n.$$

Таким образом,  $n$ -заходное винтовое поле складывается из гармоник с нечетными  $N$ , кратных числу заходов  $n$ .

## § 6. Устойчивость магнитного поля

### 1. Определение устойчивости поля

Если на поле  $\mathbf{B}_0$  наложить малое возмущение  $\mathbf{b}$ , то структура поля в той или иной степени изменится. Если ловушка нетороидальная, т. е. не содержит силовых линий, все время остающихся в области, занятой плазмой (рис. 36), то возмущения силовых линий остаются малыми при малой амплитуде возмущающего поля.

Действительно, уравнение силовых линий можно записать в виде

$$\frac{dr}{dl} = \frac{\mathbf{b}}{B}, \quad (6.1)$$

где  $B = |\mathbf{B}|$ , а  $dl$  — элемент дуги силовой линии. Если  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ , то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi$$

и в первом приближении получим

$$\frac{d\xi}{dl} = \frac{\mathbf{b}(r_0)}{B_0}, \quad (6.2)$$

откуда [23]

$$\xi = \int \frac{b}{B_0} dl. \quad (6.3)$$

Поскольку в пределах нетороидальной ловушки (см. рис. 36) длина силовой линии конечна,

$$\int_A^B dl = L,$$

постольку и смещение удовлетворяет неравенству

$$|\xi| \leq \frac{b_{\max}}{B_{0 \min}} L,$$

т. е. может быть сколь угодно малым. Исключение составляют лишь те силовые линии, которые проходят вблизи точек нулевого поля  $B_0 = 0$ , но при достаточно малом  $b$  роль этих силовых линий в общей картине поля будет мала.

Совсем иначе ведут себя тороидальные поля. Здесь силовая линия неограниченно долго «движется» внутри тороидальной области, и поэтому даже малые возмущения могут увести силовую линию в бесконечность или вызвать качественную перестройку всей системы магнитных поверхностей. В этом проще всего убедиться на примере полей с замкнутыми силовыми линиями. Действительно, наложив, например, на гофрированное тороидальное поле (см. рис. 1, 2) или на поле прямой нити сколь угодно малое практически произвольно направленное однородное поле, мы превратим замкнутые силовые линии в спирали, неограниченно удаляющиеся от первоначальной плоскости. Таким образом, эти поля следует считать неустойчивыми.

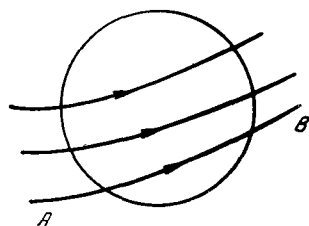


Рис. 36

По иному реагирует на возмущения поле кольца с током. Если на него наложить однородное поле, перпендикулярное плоскости кольца, произойдет лишь небольшая деформация силовых линий (см. рис. 19). Если же мы возмутим магнитное поле кольца полем прямой нити, пропущенной вдоль оси кольца (см. рис. 2), то силовые линии превратятся в спирали, лежащие на тороидальных магнитных поверхностях, но в бесконечность не уйдут.

В этом смысле поле кольца оказывается устойчивым по отношению к рассматриваемым возмущениям. Есть основания думать, что поле кольца устойчиво и по отношению к любым другим малым возмущениям и, как следует из приведенных примеров, эта устойчивость связана с тем, что силовые линии прокручиваются вокруг кольца с током.

Ниже мы увидим, что при возмущении силовые линии могут не уходить в бесконечность, но, несмотря на это, изменение геометрии магнитных поверхностей может быть весьма существенным.

Это заставляет нас при определении устойчивости прежде всего следить за отклонением силовой линии, а не за изменением топологии магнитных поверхностей.

Поэтому мы дадим следующее определение устойчивости поля: поле устойчиво, если любые малые возмущения не уведут силовую линию далеко от ее первоначального положения или от ее первоначальной магнитной поверхности. Здесь под магнитными поверхностями понимаются как точные, так и адиабатические поверхности (см. § 3).

В заключение отметим, что большой интерес представляет вопрос о соотношении устойчивости поля и устойчивости равновесных плазменных конфигураций в данном поле. По всей видимости при весьма слабых ограничениях из устойчивости тороидального поля следует устойчивость в гидродинамическом приближении идеально проводящей плазмы с достаточно малым давлением  $p \ll \frac{B^2}{8\pi}$ , и наоборот.

## 2. Устойчивость прямого поля в адиабатическом приближении

Исследуем сначала устойчивость прямого магнитного поля с помощью метода усреднения. Усредненные по  $z$  магнитные поверхности такого поля определяются уравнением

$$\psi(r, \varphi) = \overline{A_z} + \frac{\widehat{b_r b_\varphi}}{B_0} = \text{const.} \quad (6.4)$$

Пусть невозмущенное поле содержит большую продольную составляющую  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(r)$  и малое по сравнению с ней поле  $\mathbf{b}_0$ . Если возмущающее поле  $\mathbf{b}_1$  мало по сравнению с  $\mathbf{b}_0$ , то уравнение (6.4) примет вид

$$\psi = \overline{A_{0z}} + \frac{\widehat{b_{0r} b_{0\varphi}}}{B_0} + \overline{A_{1z}} + \frac{\widehat{b_{1r} b_{0\varphi}} + \widehat{b_{0r} b_{1\varphi}}}{B_0} = \text{const.} \quad (6.5)$$

Если усредненные магнитные поверхности основного поля зависят только от  $r$ , то, пользуясь соотношением (3.10), можно уравнение (6.5) записать в виде

$$\psi = - \int_0^r B_0 \overline{\alpha_0}(r) r dr + \overline{A_{1z}} + \frac{1}{B_0} \left[ \widehat{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1} \right]_z = \text{const.}, \quad (6.6)$$

где  $\overline{\alpha_0}(r) = \frac{d\overline{\varphi_0}}{dz} = \alpha\omega_0$  — средняя скорость прокручивания силовой линии основного поля вокруг оси  $z$ . Продольная компонента векторного потенциала возмущающего поля определяется соотношениями

$$\overline{B_{1\varphi}} = - \frac{\partial \overline{A_{1z}}}{\partial r}; \quad \overline{B_{1r}} = \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{A_{1z}}}{\partial \varphi}. \quad (6.7)$$

Из однозначности поля вытекает, что  $B_{1r}$  — периодическая функция  $\varphi$ , и если  $B_{1r}$  не содержит постоянной составляющей, то  $A_{1z}$  также является малой периодической функцией  $\varphi$ . Равенство же нулю среднего по  $\varphi$  значения  $B_{1r}$  следует из равенства нулю магнитного потока через цилиндрическую поверхность\*.

Таким образом, последние два члена в уравнении (6. 6) малы, и если сечение невозмущенной магнитной поверхности было окружностью радиуса  $r_0$ , то сечение возмущенной магнитной поверхности описывается уравнением  $r = r_0 + \Delta r$ , где  $\Delta r$  мало по сравнению с  $r_0$  и на основании уравнения (6. 6) равно

$$\Delta r = \frac{\overline{A_{1z}}}{B_0 a r_0 \omega_0} + \frac{[\overline{b_0 b_1}]_z}{B_0^2 a r_0 \omega_0}. \quad (6. 8)$$

Отсюда следует, что при отличном от нуля угле прокручиваний силовых линий  $\Delta r \rightarrow 0$  при  $b_1 \rightarrow 0$ . В том случае, когда  $\omega_0(r)$  на каком-нибудь радиусе обращается в нуль, а  $\omega'_0(r)$  на этом радиусе не равна нулю, из формулы (6. 6) аналогично получим, что устойчивость поля в окрестности этого радиуса определяется величиной первой производной  $\omega'_0(r)$  и смещение  $\Delta r$  будет пропорционально  $\sqrt{\frac{b_1}{\omega_0}}$  и т. д.

Из формулы (6. 8) вытекает, в частности, и устойчивость прямого винтового поля, средний угол прокручивания которого определяется выражением (5. 26). Рассмотрим теперь три конкретных примера возмущений магнитного поля, в которых существенно меняется характер магнитных поверхностей, но силовые линии не уходят в бесконечность.

а. Пусть винтовое поле возмущается однородным полем, перпендикулярным к оси  $z$  и направленным, например, вдоль оси  $x$ . Такое поле описывается векторным потенциалом

$$A_{1z} = B_1 r \sin \varphi. \quad (6. 9)$$

Подставляя его в уравнение (6. 6), получаем

$$B_1 r \sin \varphi - B_0 \int_0^r \bar{a}_0(r) r dr = \text{const}. \quad (6. 10)$$

Для однозаходного и двухзаходного винтового магнитного поля ( $n = 1; 2$ ) величина  $\omega_0(r)$  в окрестности оси  $z$  постоянна (см. § 5), и из уравнения (6. 10) следует, что магнитные поверхности, оставаясь цилиндрическими, смещаются вдоль оси  $y$ , т. е. в направлении, перпендикулярном как к основному, так и к возмущающему полю

$$x^2 + \left( y - \frac{B_1}{\omega_0 a B_0} \right)^2 = \text{const}. \quad (6. 11)$$

\* Постоянная составляющая  $B_r \sim \frac{1}{r}$  приводит к бесконечному нулю на оси  $r = 0$ .

Если  $n \geq 3$ , то магнитные поверхности также остаются замкнутыми и смещаются вдоль оси  $y$ , но их сечения имеют более сложный вид.

б. В качестве второго примера рассмотрим возмущения  $n$ -заходного винтового поля гофрированным полем. Результирующее поле может быть описано скалярным потенциалом

$$\begin{aligned} \Phi = B_0 z + \frac{b_n}{a} I_n(nar) \sin n(\varphi - \alpha z) + \\ + \frac{b_0}{a} I_0(mar) \sin maz. \end{aligned} \quad (6.12)$$

В этом случае  $A_z$  равно нулю и уравнением усредненных магнитных поверхностей является

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\widehat{B_r B_\varphi}}{B_0} = -\frac{nb_n I_n(nar)}{2\alpha^2 r B_0} \{ b_n I'_n(nar) + \\ + \delta_{mn} b_0 I'_0(mar) \cos m\varphi \} = \text{const}; \end{aligned} \quad (6.13a)$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Здесь первый член равен невозмущенному значению  $\psi_0(r)$ , а второй учитывает возмущение, которое в среднем отлично от нуля только при  $n = m$ , т. е. при своеобразном резонансе полей. В случае резонанса, разлагая бесселевы функции в ряд в окрестности оси  $z$ , можно представить уравнение (6.13a) в виде

$$\begin{aligned} b_n Q^{2n-2} \left( 1 + \frac{nQ^2}{2} \right) + \frac{2^{n-1} (n-1)!}{n^{n-2}} b_0 Q^n \left( 1 + \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{n^2 Q^2}{4} \right) \cos n\varphi = \\ = \text{const}, \end{aligned} \quad (6.13б)$$

где за единицу принята длина  $\frac{L}{2\pi} = \frac{1}{\alpha}$ .

Из уравнения (6.13б) вытекает, что возмущение однозаходного поля ( $n = 1$ ) приводит лишь к смещению магнитных поверхностей на расстояние  $\frac{b_0}{b_1}$ . В случае  $n = 2$  при  $\frac{3}{5} b_2 > b_0 > \frac{b_2}{2}$  в окрестности  $r = 0$  появляется двухлепестковая розетка (рис. 37, а). При  $n \geq 3$  и любых  $b_0$  в окрестности оси  $z$  появляется невращающаяся  $n$ -лепестковая розетка (см. рис. 37, б, в), размеры которой пропорциональны амплитуде возмущающего поля  $b_0$ .

в. Аналогичные розетки получаются и при возмущении винтового поля мультипольным полем, которое может быть создано проводниками с током чередующегося направления, параллель-



ными оси  $z$  и расположенными вокруг этой оси. Такое поле описывается скалярным потенциалом

$$\Phi = B_0 z + b_n I_n(nQ) \cos n(\varphi - z) + b Q^m \cos m\varphi, \quad (6.14a)$$

а его усредненные магнитные поверхности определяются формулой

$$\psi = -\frac{nb_n^2}{2B_0 r} I_n(nQ) I_n'(nQ) + b_1 Q^m \sin m\varphi = \text{const},$$

разложение которой в окрестности оси  $z$  имеет вид

$$b_1 Q^m \sin m\varphi - \frac{nb_n^2}{B_0} \frac{(nQ)^{2n-2}}{2^{2n+1}(n-1)!^2} \left(1 + \frac{nQ^2}{2}\right) = \text{const}. \quad (6.14б)$$

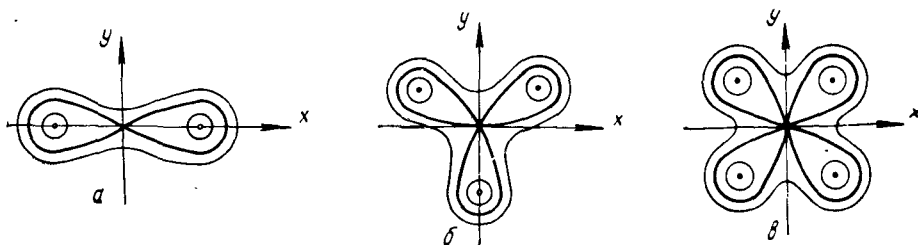


Рис. 37

Ограничиваясь случаем трехзаходного стелларатора ( $n = 3$ ), получаем

$$Q^m \sin m\varphi - \gamma Q^4 \left(1 + \frac{3}{2} Q^2\right) = \text{const}, \quad (6.14в)$$

где  $\gamma = \frac{3^5 b_n^2}{2^9 b_1 B_0}$ . Из уравнения (6.14в) следует, что для  $m = 2$  и 3 при любом сколь угодно малом возмущении около  $r = 0$  появляются двух- и трехлепестковые розетки. Если  $m = 4$ , то существует критическое значение величины возмущения  $b_{\text{кр}}$ , определяемое соотношением

$$b_{\text{кр}} = \frac{3^5 b_n^2}{2^9 B_0}.$$

При  $b_1 < b_{\text{кр}}$  в окрестности  $r = 0$  розетка отсутствует. Она появляется, когда  $b_1 > b_{\text{кр}}$  (см. рис. 37, в). Если же  $m > 4$ , то розетка в окрестности  $r = 0$  не появляется ни при каком  $b_1$ .

г. Интересные конфигурации магнитных поверхностей могут быть получены при рассмотрении безвихревого магнитного поля, периодического как по  $z$ , так и по  $x$ . Пусть, например, магнитное поле задается скалярным потенциалом [10]

$$\Phi = B_0 z + b (\sin \lambda_1 x \operatorname{sh} \lambda_2 y \sin z + \cos \lambda_1 x \operatorname{ch} \lambda_2 y \cos z), \quad (6.15)$$

где  $\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = 1$ . Такое поле удовлетворяет уравнению Лапласа и, как нетрудно убедиться, может быть описано векторным

потенциалом без компоненты  $A_z$ . Поэтому при  $\frac{b}{B_0} \ll 1$  усредненными магнитными поверхностями для поля (6. 15) согласно формуле (3. 20) будут

$$\psi = \frac{\overline{B_x \hat{B}_y}}{B_0} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2 B_0} (\text{sh}^2 \lambda_2 y - \sin^2 \lambda_1 x) = \text{const.}$$

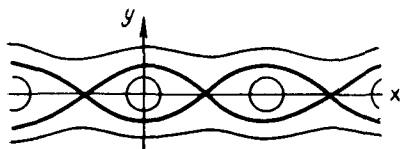


Рис. 38

Эти поверхности имеют вид цепочек и изображены на рис. 38\*.

### 3. Усредненные магнитные поверхности слабо неперриодического магнитного поля

Метод усреднения магнитных поверхностей, рассмотренный в § 3, легко распространяется на случай, когда магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon x_3) \quad (6. 16)$$

является периодической функцией третьего аргумента  $x_3$  и, кроме того, зависит еще от  $\varepsilon x_3$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр порядка отношения поперечного поля к продольному. Формула усреднения (3. 15) сохраняет свой вид и при наличии добавочного аргумента  $\varepsilon x_3$ . При выводе формулы (3. 19) усредненных магнитных поверхностей для преобразования членов  $\sim \varepsilon^2$  использовалось только уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Так как с принятой точностью производная по  $x_3$  в этом уравнении может быть взята по третьему аргументу  $\mathbf{B}$  [см. (6. 16)], то и уравнения магнитных поверхностей (3. 19) для рассматриваемого поля (6. 16) сохраняют свою форму.

**Вращающаяся розетка.** В качестве примера рассмотрим усредненные магнитные поверхности прямого поля, описываемого скалярным потенциалом

$$\Phi = B_0 z + b I_n(nQ) \cos n(\varphi - z) + b_1 I_0(\gamma n Q) \cos \gamma n z, \quad (6. 17)$$

где  $\gamma = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Это поле представляет собой  $n$ -заходное прямое винтовое поле, к которому добавлено гофрированное поле с периодом, немного отличающимся от периода винтового поля. Усредненные магнитные поверхности согласно формуле (3. 7) описываются уравнением

$$\psi = -\frac{nb I_n(nQ)}{2QB_0} \{b I'_n(nQ) + b_1 \gamma I'_0(\gamma n Q) \cos n(\varphi + \varepsilon z)\} = \text{const.}, \quad (6. 18)$$

отличающимся при  $m = n$  от уравнения (6. 13а) заменой аргумента  $\varphi$  на  $\varphi + \varepsilon z$ .

\* Пример поля, образующего магнитные поверхности, изображенные на рис. 38, впервые приведен в работе [4].

Следовательно, розетки, появляющиеся от воздействия гофрированного поля на стеллараторное, начинают медленно проворачиваться, если периоды стеллараторного и гофрированного полей не совпадают.

#### 4. Устойчивость магнитного поля токового шнура

Общий вывод, который можно сделать в результате рассмотрения устойчивости поля с помощью метода усреднения для квази-прямого поля, сводится к тому, что достаточно малые возмущения не уведут силовые линии в бесконечность, поскольку силовые линии невозмущенного поля прокручиваются вокруг некоторой оси. Следует, однако, подчеркнуть, что этот вывод относится только к таким конфигурациям полей, к которым применима формула (6.4) для усредненных магнитных поверхностей, а именно: возмущающие поля должны быть малыми по сравнению с продольным полем, а их период — величиной меньшей или порядка наименьшего масштаба поля.

Как мы увидим ниже, в случае, когда не выполнено последнее условие, устойчивость магнитных поверхностей определяется не углом прокручивания, а его производной, т. е. сдвигом силовых линий на соседних магнитных поверхностях (рис. 39).

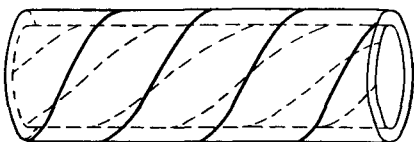


Рис. 39

а. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим влияние винтовых возмущений на силовые линии магнитного поля, созданного цилиндрическим током  $j = j_z(r)$ , текущим вдоль магнитного поля  $B = B_z(r)$ . Невозмущенные магнитные поверхности в этом случае представляют собой систему вложенных концентрических цилиндров, а силовые линии являются винтовыми линиями с шагом  $L_\mu = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi \frac{rB_z}{B_\varphi}$ , навитыми на эти цилиндры. Невозмущенное поле описывается  $A_\varphi(r)$  и  $A_z(r)$  компонентами векторного потенциала

$$B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi; \quad B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (6.19)$$

Для определенности возмущающее винтовое поле возьмем безвихревым. Тогда

$$A_{1\varphi} = -\frac{b_1}{a} I'_n(nar) \cos n\theta; \quad \theta \equiv \varphi - az. \quad (6.20)$$

Рассматриваемое поле обладает винтовой симметрией, и поэтому задача нахождения его магнитных поверхностей решается точно. Интеграл силовых линий (3.2в) имеет вид

$$\psi(r, \theta) = A_z + ar A_\varphi - r b_1 I'_n(nar) \cos n\theta = \text{const}. \quad (6.21)$$

Если ток и продольное магнитное поле однородны, т. е.  $B_\varphi = B_{\varphi a} \frac{r}{a}$ ;  $B_z = B_0 = \text{const}$ , то вместо уравнения (6. 21) получим

$$\psi = \frac{B_0}{2} (\alpha - \mu) r^2 - r b_1 I'_n(nar) \cos n\theta = \text{const.} \quad (6. 22)$$

Отсюда следует, что при совпадении шага винта возмущающего поля  $L = \frac{2\pi}{\alpha}$  с шагом винта силовых линий невозмущенного поля  $L_\mu = \frac{2\pi}{\mu} = \text{const}$  структура вложенных магнитных поверхностей разрушается при сколь угодно малой амплитуде возмущения, в результате чего получаем картину поля, изображенную на рис. 27. Разрушение поверхностей связано с одинаковостью шага винта невозмущенного поля на всех цилиндрах  $r = \text{const}$ . Если же шаг винта возмущения совпадает с шагом силовой линии на каком-либо радиусе  $r_s$  (т. е.  $\mu(r_s) = \alpha$ ) и в окрестности этого радиуса существует сдвиг силовой линии ( $\mu'(r_s) \neq 0$ ), то, разлагая уравнение (6. 21) вблизи  $r = r_s$ , получим

$$\psi = -\mu' r_s B_z \frac{(r - r_s)^2}{2} - r b_1 I'_n(nar) \cos n\theta = \text{const.} \quad (6. 23)$$

Таким образом, при наличии в окрестности  $r_s$  сдвига силовых линий возмущение магнитных поверхностей для малых  $b_1$  конечно и обратно пропорционально производной  $\mu'(r_s)$ .

Метод усреднения квазипрямого поля для резонансного случая  $\alpha = \mu$  не применим, поскольку  $B_\varphi$ , рассматриваемое в этом методе как возмущение прямого поля  $B_z$ , должно быть малой величиной ( $\sim \varepsilon$ ), а для резонанса нам необходимо наложить возмущающее поле (6. 20) с большим периодом ( $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ ).

б. Выше была показана устойчивость поля тока при  $\mu' \neq 0$  относительно винтовых возмущений. Рассмотрим теперь устойчивость поля цилиндрического тока относительно произвольных малых возмущений магнитного поля. Будем исходить при этом из формулы (3. 22)

$$\psi(r, \theta) = \bar{A}_z + ar\bar{A}_\varphi - \frac{r}{B_{\varphi 0}} \widehat{B}_r (B_\varphi - arB_z) = \text{const}, \quad (6. 24)$$

описывающей усредненные по азимуту  $\varphi$  магнитные поверхности поля с большой винтовой составляющей. Цилиндрические компоненты поля  $B_r$ ,  $B_\varphi$  и  $B_z$  (ось  $z$  является осью тока) будем считать зависящими от  $\theta = \varphi - az$ ,  $r$  и  $\varphi$ , причем усреднение и операция  $\wedge$  в уравнении (6. 24) производятся по  $\varphi$  при фиксированных  $r$  и  $\theta$ , а  $B_{\varphi 0}$ ,  $\bar{A}_z$  и  $\bar{A}_\varphi$  зависят только от  $r$  и  $\theta$ .

Рассмотрим поле в окрестности некоторой винтовой силовой линии с шагом  $L_\mu = \frac{2\pi}{\mu}$  и положим  $\alpha = \mu$ . Поле тока вблизи этой силовой линии можно представить как поле однородного

тока, имеющего винтовые силовые линии с постоянным шагом  $L = \frac{2\pi}{a}$  и малую добавку, обусловленную неоднородностью тока. Пусть, кроме того, имеется произвольное малое возмущающее поле  $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$ . Так как в силу однозначности  $\mathbf{b}$  является периодической функцией  $\varphi$  и размерный период поля вдоль  $\varphi$ , равный  $2\pi r_m$ , сравним с наименьшим характерным масштабом поля, равным  $r_m$ , к данному случаю применима формула (6. 24).

Продольная компонента векторного потенциала  $A_z(r) + arA_\varphi(r)$  связана с поперечной составляющей поля  $B_\varphi(r) - arB_z(r)$  соотношением

$$B_\varphi - arB_z = -\frac{\partial}{\partial r}(A_z + arA_\varphi); \quad B_r = 0. \quad (6. 25)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для усредненных компонент возмущающего магнитного поля:

$$\bar{b}_\varphi - ar\bar{b}_z = -\frac{\partial}{\partial r}(\bar{a}_z + ar\bar{a}_\varphi); \quad (6. 26)$$

$$\bar{b}_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(\bar{a}_z + ar\bar{a}_\varphi). \quad (6. 27)$$

Разлагая невозмущенное поле по  $r$  в окрестности рассматриваемой цилиндрической магнитной поверхности  $r = r_s$  (на которой  $\mu = \frac{B_\varphi}{rB_z} = \alpha$ ) и учитывая соотношение (6. 25), запишем уравнение (6. 24) в виде

$$\psi = -rB_z\mu' \frac{(r-r_s)^2}{2} + \bar{a}_z + ar\bar{a}_\varphi - \frac{r}{B_\varphi} \widehat{b}_r(b_\varphi - arb_z) = \text{const.}$$

По аналогии с предыдущим из этого выражения следует, что при  $\mu' \neq 0$  возмущения магнитных поверхностей малы при достаточно малых  $\mathbf{b}$ , коль скоро величина  $a_z + ar a_\varphi$  мала и не содержит члена, линейного по  $\theta$ . Поскольку нас в основном интересуют тороидальные поля, то, не ограничивая общности, можно считать  $\mathbf{b}$  периодической функцией  $z$  и, следовательно, периодической функцией  $\theta$ . Продольная компонента векторного потенциала  $\bar{a}_z + ar\bar{a}_\varphi$ , найденная из формул (6. 21)—(6. 27), будет периодической функцией  $\theta$ , не содержащей линейного по  $\theta$  члена, если среднее по  $\theta$  значение  $b_r$  равно нулю. Но это условие уже выполнено в силу равенства нулю потока  $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$  через тороидальную поверхность, окружающую кольцевой токовый шнур.

Таким образом, на примере плазменного шнура с током мы показали устойчивость винтовых магнитных силовых линий при  $\mu' \neq 0$ . Можно думать, что и любое тороидальное магнитное поле тоже будет устойчиво, если существует сдвиг силовых линий. Попытка доказательства этого утверждения в общем случае была предпринята Скорняковым [23].

## 5. О типичной структуре несимметричного тороидального магнитного поля

При рассмотрении симметричных полей, описываемых несколькими гармониками, и возмущенных несимметричных полей, исследованных с помощью метода усреднения, было показано, что магнитное поле может иметь весьма сложную структуру. Остановимся теперь на некоторых общих свойствах несимметричного тороидального магнитного поля, не делая упрощающих предположений и исходя из точных уравнений силовых линий.

Для этой цели рассмотрим силовую линию, замыкающуюся после  $N$  обходов тора\*. Уравнение этой линии будем считать известным:  $x = x_0(z)$ ,  $y = y_0(z)$  и предположим, что система уравнений (2. 11) может быть линеаризована в окрестности этой силовой линии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dz} &= a_1(z)\xi + b_1(z)\eta; \\ \frac{d\eta}{dz} &= a_2(z)\xi + b_2(z)\eta. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Здесь  $\xi = x - x_0$  и  $\eta = y - y_0$  — координаты, отсчитываемые перпендикулярно к направлению рассматриваемой силовой линии, а  $a_i(z)$  и  $b_i(z)$  — периодические функции с периодом  $NL$ , где  $L$  — период тора. В § 3 п. 3 было отмечено, что перемещение точки в изображающей плоскости характеризуется матрицей  $(\alpha_{ik})$ , собственные значения которой  $\lambda_1, \lambda_2$  связаны соотношением

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (6.29)$$

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — вещественны и различны, то неподвижная точка является гиперболической, причем в зависимости от знака  $\lambda$  неподвижная точка может быть двух родов. Если  $\lambda > 0$ , то в окрестности неподвижной точки движение изображающей точки происходит по одной ветви гиперболы. Если же  $\lambda < 0$ , то движение происходит по двум ветвям гиперболы с перескоком с одной ветви на другую (см. рис. 17).

Если  $\lambda_{1,2}$  — комплексны, то изображающая точка нашей замкнутой силовой линии будет эллиптической и в ее окрестности точки движутся по эллипсам (см. рис. 16). Наконец, если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ , мы имеем вырожденный случай, и в окрестности неподвижной точки происходит сдвиг с инверсией или без инверсии (см. рис. 18).

Таким образом, структура поля вблизи замкнутых силовых линий, в окрестности которых могут быть линеаризованы уравнения (2. 11), известна.

\* Если в качестве примера взять поле с одной магнитной осью и  $\omega = \omega(\nu)$ , то через  $N$  обходов линии будут замыкаться на всех тех поверхностях, у которых  $\omega = \frac{m}{N}$  ( $m$  и  $N$  целые числа).

Линии, замыкающиеся после  $N$  обходов, мы будем называть магнитными осями порядка  $\frac{1}{N}$ .

В полях, впервые рассмотренных Таммом и Спитцером, имеется одна ось, окруженная системой вложенных магнитных поверхностей. В этом случае в изображающей плоскости невырожденным является лишь след этой оси (эллиптическая точка), тогда как все остальные замыкающиеся силовые линии вырождены, поскольку силовые линии, лежащие на соседних магнитных поверхностях, могут только сдвигаться одна относительно другой.

По всей вероятности, точные магнитные поверхности мы имеем лишь в случае симметричных полей, тогда как при возмущении симметричного поля полями, не обладающими нужной симметрией, вырождение снимается, т. е. появляются эллиптические и гиперболические точки.

Поскольку магнитными осями порядка  $\frac{1}{N}$  являются силовые линии, лежащие на поверхностях с  $\omega = \frac{m}{N}$ , то множество магнитных поверхностей, содержащих магнитные оси, будет всюду плотным. Однако практически наибольшее значение имеют оси низших порядков (таких, как  $1$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$  . . .), так как около них можно ожидать наиболее широких зон влияния.

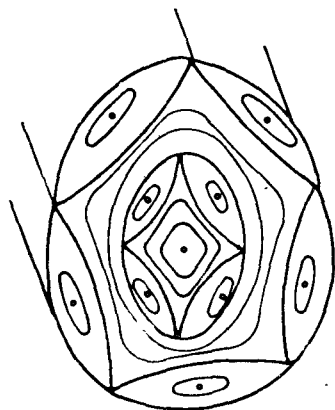


Рис. 40

В результате снятия вырождения у поля должна возникать волокнистая структура, образованная зонами влияния замкнутых силовых линий.

Простейшая мыслимая структура, очевидно, имеет вид, изображенный на рис. 40. Здесь каждый слой имеет свой период  $NL$ , где  $L$  — период тора, а  $N$  целое число, изменяющееся от слоя к слою.

Особый интерес представляет структура сепаратрисы при наличии возмущений. Как мы видели на примере симметричных полей, а также полей с адиабатическими магнитными поверхностями, сепаратриса характеризуется в изображающей плоскости наличием гиперболических неподвижных точек и состоит из силовых линий, асимптотически прижимающихся к ее ребрам. В работе [10] было показано, что поведение линий, образующих сепаратрису, аналитически зависит от амплитуды возмущения, если возмущение достаточно мало. Это позволяет использовать для расчета сепаратрисы метод возмущений [11]. Однако конкретные расчеты с помощью этого метода оказываются весьма трудоемкими, и мы ограничимся лишь качественной картиной.

Рассмотрим для примера симметричное двухзаходное поле, сечение магнитных поверхностей которого изображено на рис. 30. Для удобства нарисуем сепаратрису этого поля в трех измерениях, взяв в качестве координат  $r$ ,  $\theta = \varphi - \alpha z$  и  $z$ . При таком выборе координат вращение исключается.

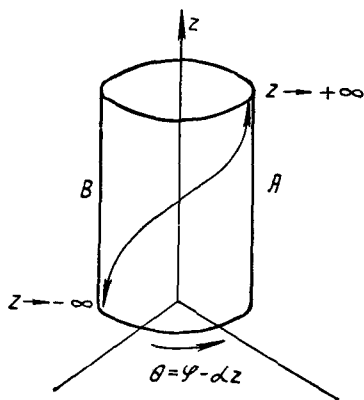


Рис. 41

Как видно на рис. 41, силовая линия  $\Gamma$ , лежащая на сепаратресе, при  $z \rightarrow +\infty$  прижимается к ребру  $A$ , а при  $z \rightarrow -\infty$  — к ребру  $B$ . Здесь, как показано в работе [10], имеется вырождение, обязанное симметрии и состоящее в том, что одна и та же линия прижимается к обоим ребрам.

Если наложить малое возмущение, то ребра несколько деформируются. Однако существенным теперь является то, что совокупность линий  $S_B^-$ , прижимающихся при  $z \rightarrow -\infty$

к ребру  $B$ , будет отлична от совокупности линий  $S_A^+$ , прижимающихся при  $z \rightarrow +\infty$  к ребру  $A$ . В силу такого расщепления

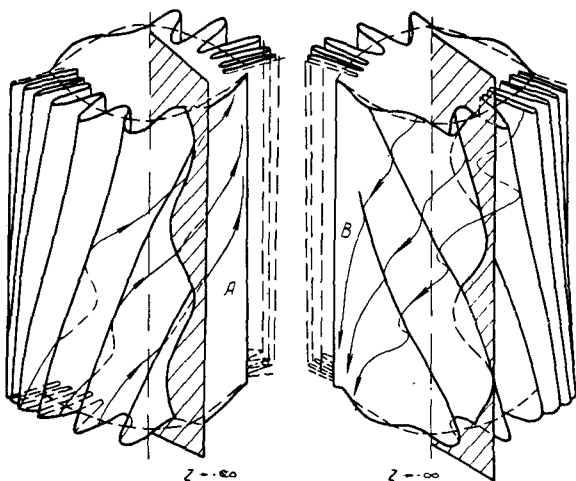


Рис. 42

сепаратрисы возникают щели, через которые во внутренний объем тороидального поля будут входить силовые линии и выходить из него.

Характер поверхностей  $S_B^-$  и  $S_A^+$  может быть различным, но наиболее типичными, по всей вероятности, являются весьма сложные поверхности, куски которых показаны на рис. 42. Из сечения этих поверхностей плоскостями  $\theta = \text{const}$  и  $z = \text{const}$



видно, что сепаратриса, идущая к ребру  $A$ , размыкается в окрестности ребра  $B$  и, наоборот, сепаратриса, идущая к ребру  $B$ , замыкается в окрестности ребра  $A$ . В любом сечении (например,  $\theta = \text{const}$ ) совокупность двух возмущенных сепаратрис даст цепочку из пересекающихся следов (рис. 43). Очевидно, через одни ячейки этой цепочки поток силовых линий при  $z \rightarrow +\infty$  втекает во внутренний объем, а при  $z \rightarrow -\infty$  вытекает. Для других ячеек картина обратная.

Следует, однако, подчеркнуть, что расщепление магнитных поверхностей, как правило, экспоненциально мало и для полей, достаточно близких к симметричным, им можно пренебречь.

Изложенные выше общие соображения о структуре поля и сепаратрисы можно проиллюстрировать на примере трехзаконного винтового поля, возмущенного гофрированным полем. Этот пример был рассмотрен ранее с помощью метода усреднения, который привел к выводу о существовании адиабатических магнитных поверхностей в виде трехлепестковой розетки. Для того чтобы обнаружить расщепление магнитных поверхностей, необходимо было прибегнуть к точным методам расчета. Однако ввиду отсутствия эффективных аналитических методов расчета этот пример был подробно проанализирован с помощью электронной вычислительной машины [6—8]. Его изучение началось до появления каких-либо четких представлений о структуре возмущенных магнитных поверхностей и сыграло большую роль в их формировании.

Для счета были взяты: период поля  $(2/3)\pi$ , постоянное продольное поле, равное единице, и амплитуда трехзаконного поля, равная трем:

$$\Phi = z + 3I_3(3r) \sin 3(\varphi - z) + b_0 I_0(3r) \sin 3z. \quad (6.30)$$

При возрастании  $h_0$ , как и следовало ожидать, появляется трилистник все возрастающих размеров, тогда как внешняя сепаратриса непрерывно уменьшается. На рис. 44 крестиком на оси  $x$  отмечены точки, за которыми силовая линия начинала неограниченно удаляться от начала координат.

Чтобы обнаружить разрушение магнитных поверхностей внутри лепестка, было прежде всего исследовано поведение силовых линий, выходящих из точек оси  $x$ .

Оказалось, что при достаточно большом  $b_0$  (больше 0,1) силовая линия, вышедшая из точки  $x_0$  после обхода центра лепестка и возвращения в окрестность оси  $x$  (обычно, точно на ось  $x$  точка

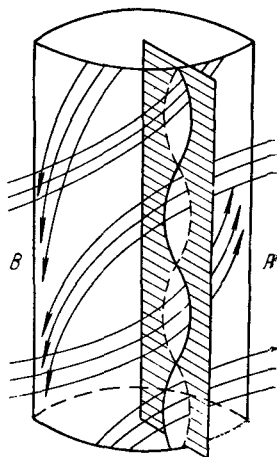


Рис. 43

не попадает) попадает в точку  $x_1$ , находящуюся от точки  $x_0$  на некотором расстоянии  $\delta = x_1 - x_0$  (рис. 45, а).

Если построить зависимость  $\delta = \delta(x_0) \equiv \delta(x)$ , то получается знакопеременная функция, изображенная на рис. 45, б. На кривой обращает на себя внимание следующее.

1. Существует бесконечное множество точек, у которых  $\delta = 0$ . Проверка показала, что у таких точек смещения по  $y$  также равны нулю и, следовательно, эти точки соответствуют замкнутым силовым линиям. Число периодов (по  $z$ ), необходимых для возвращения в начальное положение, у двух соседних точек отличается на единицу. Исключение составляет центр лепестка, где в непосредственной близости  $\omega \approx \frac{1}{12}$ .

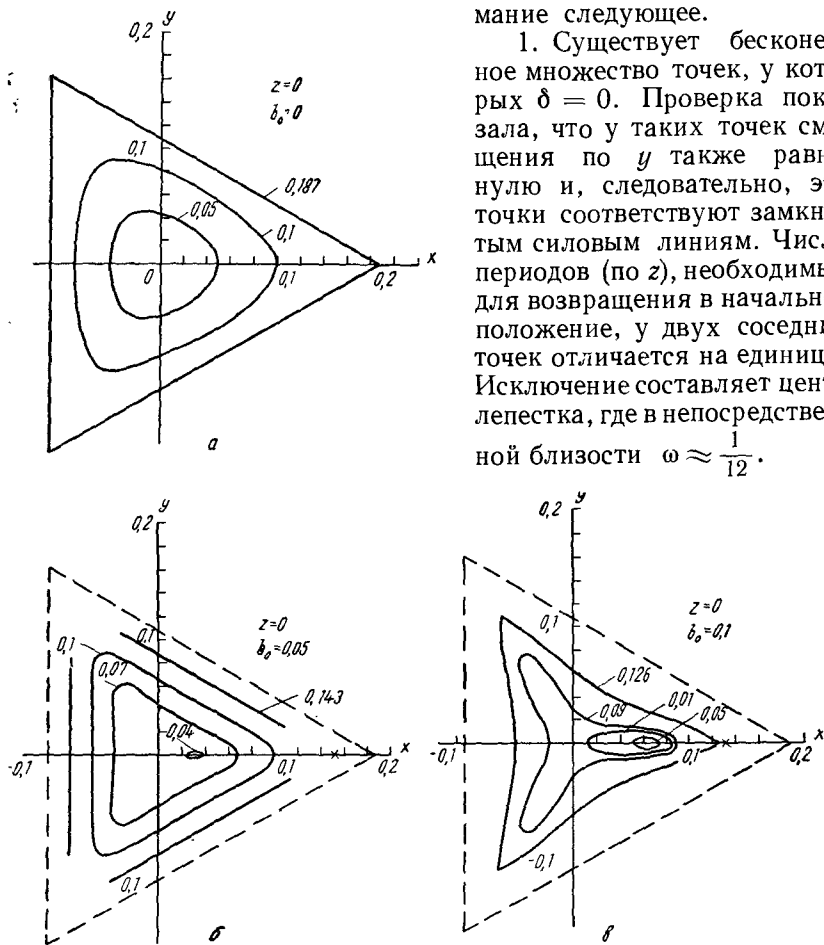


Рис. 44

2. Амплитуда колебаний затухает при  $x \rightarrow x_0$ , где  $x_0$  — координата центра лепестка, и возрастает к началу координат, причем при  $x_0 < x_0^*$  на оси  $x$  появляются интервалы (они заштрихованы на рис. 45, в), выходя из которых силовая линия покидает область лепестка (рис. 45, б).

3. Нетрудно видеть, что неподвижные точки, в которых  $\delta$  от отрицательных значений переходит к положительным, оказы-

ваются неустойчивыми в том смысле, что любая точка, достаточно близкая к неподвижной точке, непрерывно от нее уходит. Сказанное поясняется рис. 46, *a*, на котором показан метод построения последующих положений точки  $x_1, x_2, x_3 \dots$ .

Если в окрестности неподвижной точки  $\delta$  уменьшается, переходя от положительных значений к отрицательным, то неподвижные точки будут устойчивы, когда  $x > x^*$ , и неустойчивы, когда  $x < x^*$  (рис. 46, *b*). Здесь через  $x_0^*$  обозначена координата точки, в которой  $\delta = 0$ , а  $\frac{d\delta}{dx}$  наиболее близко к  $-2$ .

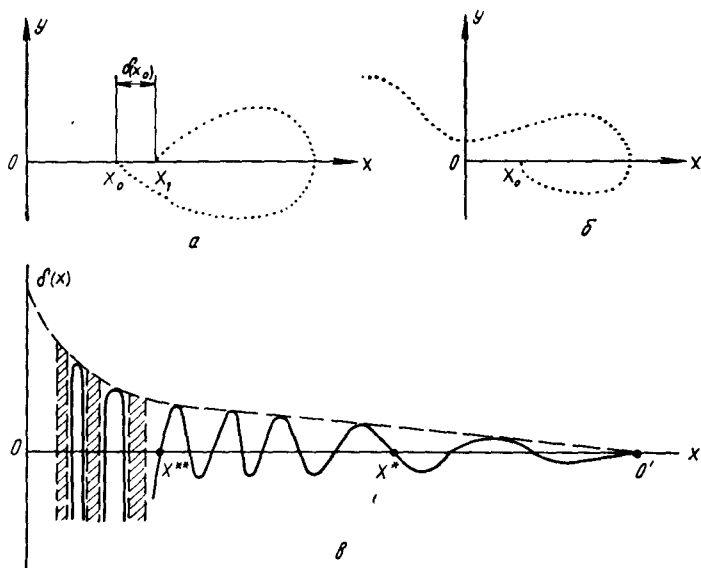


Рис. 45

Изучение поведения силовых линий в окрестности неподвижных точек оси  $x$  показало, что все точки, около которых  $\delta$  возрастает, являются нормальными гиперболическими точками.

Устойчивые точки при  $x > x^*$  оказались эллиптическими, а структура шнура при  $x > x^*$  — такой, как она изображена на рис. 47. Действительно, так как периодическая точка, лежащая на оси  $x$ , переходит сама в себя через  $N$  периодов (что соответствует  $N$  обходам тора), то в плоскости  $xy$  она порождает семейство из  $N$  точек, каждая из которых переходит в соседнюю после одного обхода. Если точка, лежащая на оси  $x$ , была эллиптической, то все  $N$  точек также будут эллиптическими. Далее выяснилось, что эти точки чередуются с  $N$  точками другого рода, т. е. в данном случае с гиперболическими, в результате чего и возникает указанная волокнистая структура.

При  $x \rightarrow x^*$  характер ячеек деформируется так, как показано на рис. 48, и при переходе через  $x^*$  эллиптическая точка

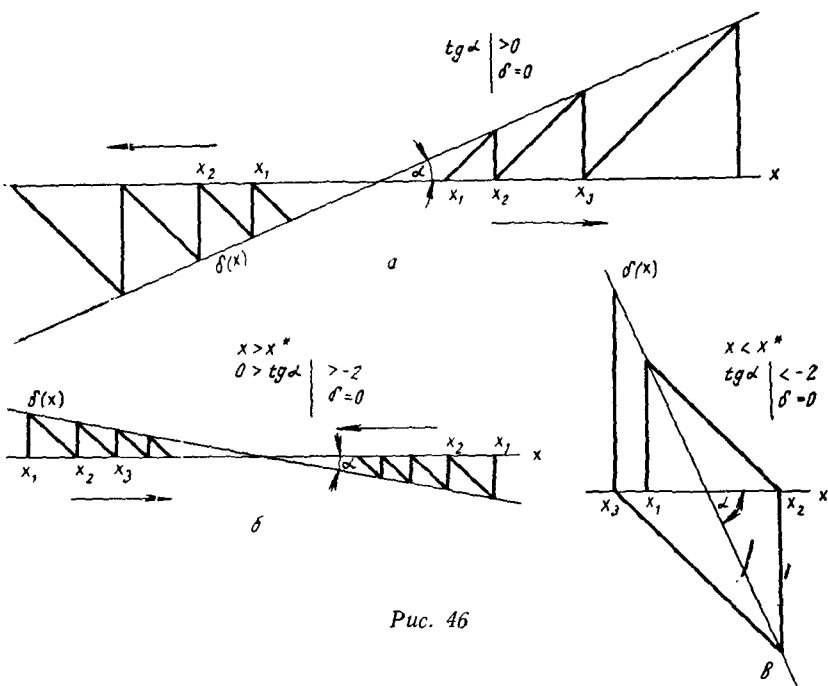


Рис. 46

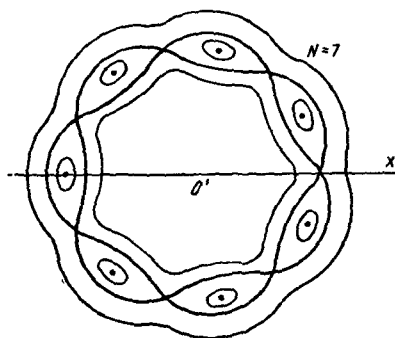


Рис. 47



Рис. 48

превращается в гиперболическую с инверсией, асимптоты которой, имеющие весьма сложный вид, частично изображены сплошными линиями на рис. 49, где пунктирными линиями показаны также асимптоты соседних гиперболических точек  $O_1$ ,  $O_2$  без инверсии.

Прорисовка структуры при  $x < x^{**}$  пока не закончена, однако из рис. 45, б видно, что она согласуется с изложенной выше картиной разрушения сепаратрисы, в соответствии с которой граница лепестка при  $z \rightarrow +\infty$  должна иметь в плоскости  $z = 0$  вид, показанный на рис. 50.

Для практических целей важно знать, насколько сильно указанное разрушение магнитных поверхностей зависит от амплитуды возмущения. Оказывается, что в рассматриваемом примере требуются весьма большие возмущения, чтобы разрушение поверхностей стало ощутимым.

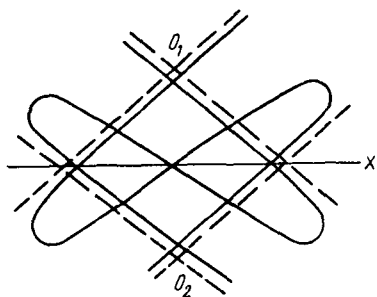


Рис. 49

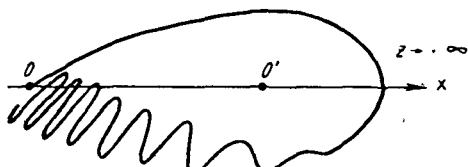


Рис. 50

В области лепестков (учитывая, что  $b_3 = 3$ , а  $b_0 \sim 0,125$ ) бесселевы функции можно заменить первыми членами разложения и получить значения для компонент напряженности винтового поля

$$B_r \simeq 5r^2 \sin 3\theta; \quad B_\varphi \simeq 5r^2 \cos 3\theta; \quad B_z \simeq -5r^2 \cos 3\theta$$

и гофрированного поля

$$B_r \simeq 0,5r \sin 3z; \quad B_\varphi = 0; \quad B_z \simeq 0,4 \cos 3z.$$

Отсюда видно, что в пределах лепестка  $r < 0,11$  поперечные компоненты винтового и гофрированного полей сравнимы, а продольная компонента возмущения даже больше продольной компоненты винтового поля.

При трех значениях  $b_0 = 0,120; 0,125; 0,130$  были определены центр лепестка  $x_0'$ , критические координаты  $x^*$  и  $x^{**}$  и соответствующие им номера  $N^*$  и  $N^{**}$ , а также максимальные амплитуды смещения  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$  в окрестности  $x^*$  и  $x^{**}$ . Все эти данные приведены в таблице, из которой следует, что даже при таких сильных возмущениях величины  $\frac{\delta^*}{x_0'}$  и  $\frac{\delta^{**}}{x_0'}$  остаются сравнительно малыми. Из таблицы видно также, что при возрастании  $b_0$  координаты  $x^*$  и  $x^{**}$  вместе с  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$  экспоненциально возрастают,

тогда как поле и параметры лепестка (например,  $x_0'$ ) изменяются мало. Экстраполируя данные таблицы, можно оценить то значение  $b_0$ , при котором поле должно полностью «рассыпаться». Очевидно, это произойдет тогда, когда  $x^{**}$  станет порядка  $x_0'$  или  $\delta^*$  сравняется с  $x_0'$ . В обоих случаях мы получаем одно и то же значение  $b_0 \sim 0,140$ . И действительно, попытка провести счет при данном  $b_0$  дала несколько хаотических точек, быстро удаляющихся от оси.

$b_0$	$x_0'$	$x^*$	$x^{**}$	$\delta^*$	$\delta^{**}$	$N^*$	$N^{**}$	$\delta_{0,0205}$
0,120	0,074	0,018	0,0067	0,00032	0,0018	36	95	0,00025
0,125	0,076	0,024	0,0106	0,00063	0,0028	26	57	0,00091
0,130	0,079	0,034	0,0156	0,00083	0,0042	18	37	0,00270

Таким образом, после того как возмущающее поле сравнивается по порядку с основным, дальнейшее возрастание возмущения приводит к быстрому разрушению магнитных поверхностей при относительно незначительном изменении напряженности поля.

Экспоненциальный характер разрушения поверхностей в разобранный пример, разумеется, не исключает в других случаях более сильного влияния возмущения при малых амплитудах. Выяснение этого обстоятельства требует развития эффективных аналитических методов расчета, а также накопления более обширного материала с помощью численного счета.

В заключение отметим, что если бы мы рассматривали поля, созданные внутри идеально проводящей достаточно произвольной «мятой» трубы, то торондальное поле имело бы вблизи стенок структуру, близкую к магнитным поверхностям, тогда как в объеме картина в общих чертах была бы подобна описанной выше.

## § 7. Изгибание магнитного поля

Одним из видов возмущения симметричных полей является их изгибание. Здесь мы рассмотрим изгибание полей в тор большого радиуса, а также изгибание вдоль линии с кручением.

### 1. Изгибание магнитного поля в тор

Если средний радиус тора  $R$  велик по сравнению с радиусом его поперечного сечения, нетрудно получить аналитические формулы для рассмотренных выше типов магнитных полей, свернутых в тор. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  уравнение Лапласа для магнитного потенциала  $\Phi$  записывается как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (7.1)$$

Заменой искомой функции

$$\Phi = \sqrt{\frac{R}{r}} \Phi_1 \quad (7.2)$$

оно приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\Phi_1}{4} \right) = 0. \quad (7.3)$$

Введем в плоскости  $rz$  полярные координаты  $\varrho$  и  $\chi$ , связанные с круговой осью  $r = R$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= r - R = \varrho \cos \chi; \\ z &= \varrho \sin \chi. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Тогда с точностью до членов порядка  $\frac{\varrho}{R}$  из уравнения (7.3) получим

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (R\varphi)^2} = -\frac{2\varrho \cos \chi}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (R\varphi)^2}. \quad (7.5)$$

При  $\frac{\varrho}{R} \rightarrow 0$  уравнение (7.5) переходит в уравнение Лапласа для прямого поля. Его правая часть является малой величиной и дает поправку, связанную с торoidalностью. Мы будем решать это уравнение методом последовательных приближений, полагая, что в нулевом приближении поле описывается одной гармоникой. Далее будем рассматривать только периодические по  $\varphi$  поля, считая, что квазиоднородное поле  $B_0 \sim \frac{1}{r}$  должно быть добавлено к ним отдельно.

**а. Винтовое торoidalное поле.** Основная гармоника  $n$ -заходного прямого винтового поля в выбранных нами координатах представляется формулой

$$\Phi_0 = I_n \left( \frac{m\varrho}{R} \right) \sin(n\chi - m\varphi), \quad m = ln. \quad (7.6)$$

Здесь  $l$  должно быть целым числом из условия периодичности по  $\varphi$ . Подставляя это выражение в правую часть уравнения (7.5), найдем решение в первом приближении по  $\varrho/R$ :

$$\Phi_1 = \Phi_0 + f_+(\varrho) \sin[(n+1)\chi - m\varphi] + f_-(\varrho) \sin[(n-1)\chi - m\varphi], \quad (7.7)$$

где функции  $f_+$  и  $f_-$  удовлетворяют уравнению Бесселя с правой частью:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \frac{df_{\pm}}{d\varrho} - \frac{(n \pm 1)^2}{\varrho^2} f_{\pm} - \frac{m^2}{R^2} f_{\pm} = -\frac{m^2}{R^3} \varrho I_n \left( \frac{m\varrho}{R} \right). \quad (7.8)$$

Частное решение уравнения (7.8) представляется рядом по степеням аргумента  $\varrho$ ,

$$f_{\pm}(\varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\pm} \left( \frac{m\varrho}{2R} \right)^{n+2k+3}, \quad (7.9)$$

коэффициенты которого связаны рекуррентными соотношениями

$$[(n+3)^2 - (n \pm 1)^2] a_0^{\pm} = -\frac{8}{mn!};$$

$$[(n+2k+3)^2 - (n \pm 1)^2] a_k^{\pm} = 4a_{k-1}^{\pm} - \frac{8}{m(n+k)!k!}. \quad (7.10)$$

Выбранное частное решение стремится к нулю при  $\varrho \rightarrow 0$ , как  $\varrho^{n+3}$ . Общее решение уравнения (7.8) должно содержать еще и решение его однородной части. Однако функция (7.9) дает нам поле винтовой тороидальной гармоники, в известном смысле наиболее близкое к полю прямой винтовой гармоники, и такая модель поля может быть использована для различных физических исследований.

**б. Гофрированное тороидальное поле.** Гармоника прямого гофрированного поля представляется скалярным потенциалом

$$\Phi_0 = I_0 \left( \frac{m\varrho}{R} \right) \sin m\varphi, \quad (7.11)$$

соответствующим потенциалу винтового поля (7.6) при  $n = 0$ . Следовательно, из формул предыдущего пункта находим

$$\Phi_1 = \Phi_0 + 2f_0(\varrho) \sin m\varphi \cos \chi. \quad (7.12)$$

Функция  $f_0$  определяется рядом

$$f_0(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{m\varrho}{2R} \right)^{2k+3}, \quad (7.13)$$

где

$$a_0 = -\frac{1}{m}; [(2k+3)^2 - 1] a_k = 4a_{k-1} - \frac{8}{m(k!)^2}. \quad (7.14)$$

**в. «Волнистое поле».** Одну гармонику такого поля (скэл-лопса) мы получим, если примем за основу прямое поле, описываемое потенциалом (4.31):

$$\Phi_0 = b_0 I_0 \left( \frac{2m\varrho}{R} \right) \sin 2m\varphi + b_1 I_1 \left( \frac{m\varrho}{R} \right) \sin m\varphi \cos \chi. \quad (7.15)$$

Это поле представляется также через винтовые гармоники (7.6) с  $n = 0$  и  $n = 1$ , а его тороидальная гармоника без труда получается из формул п. «а».



**а. Винтовое поле.** Если пренебречь поправочными членами  $\sim \varrho^{n+3}$  в формуле (7. 7), то скалярный потенциал гармоника (7. 7) тороидального  $n$ -заходного винтового поля запишется в виде

$$\Phi = \sqrt{\frac{R}{r}} I_n \left( \frac{m\varrho}{R} \right) \sin(n\chi - m\varphi). \quad (7. 16)$$

Усредненные магнитные поверхности такого поля определяются выражением (3. 12) или, поскольку  $\bar{A}_\varphi = 0$ , а  $B_{\varphi 0} \sim \frac{1}{r}$ , соотношением

$$r^3 \overline{B_z \widehat{B}_r} = \text{const}, \quad (7. 17)$$

где операция  $\widehat{\phantom{x}}$  и усреднение производятся по аргументу  $\varphi$ . Подставляя сюда вместо компонент поля их выражения через  $\Phi$ ,

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \cos \chi - \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \frac{\sin \chi}{\varrho}; \\ B_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \sin \chi + \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \frac{\cos \chi}{\varrho}, \end{aligned} \right\} \quad (7. 18)$$

и производя усреднение, получим с точностью до членов порядка  $\varrho/R$

$$\frac{m}{R} \frac{I_n I_n'}{\varrho} + \frac{\cos \chi}{R} \left( \frac{2m}{R} I_n I_n' - \frac{I_n^2}{2\varrho} \right) = \text{const}. \quad (7. 19)$$

Сечения усредненных магнитных поверхностей представляют собой окружности, смещенные относительно круговой оси  $r = R$  к оси тора  $z$  на величину  $\Delta \sim \frac{1}{R}$ . Действительно, полагая  $\varrho = \varrho_0 + \Delta \cos \chi$ , где  $\Delta \sim \frac{1}{R}$ , из уравнения (7. 19) находим

$$\Delta = -\frac{1}{R} \frac{\frac{2m}{R} I_n I_n' - I_n^2/2\varrho_0}{\frac{m}{R} \frac{d}{d\varrho_0} (I_n I_n'/\varrho_0)}. \quad (7. 20)$$

Здесь  $I_n = I_n \left( \frac{m\varrho_0}{R} \right)$ , а штрих означает дифференцирование по аргументу. В знаменателе стоит величина, пропорциональная углу прокручивания силовых линий [см. (5. 26)]. Разлагая  $I_n \left( \frac{m\varrho_0}{R} \right)$  в ряд по аргументу, получим

$$\Delta \simeq -\frac{\varrho_0^2}{R} \frac{1 - \frac{1}{4n}}{n - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{m\varrho_0}{R} \right)^2}. \quad (7. 21)$$

Формула (7. 21) применима, очевидно, при малых  $\Delta$ . Для однозаходного поля ( $n = 1$ ) смещение получается сравнительно большим вследствие того, что в этом случае мал угол прокручивания [см. (5. 26)].

б. **О силовых линиях гофрированного тороидального поля.** Если не учитывать поправки  $\sim \varrho^3$ , то скалярный потенциал рассмотренной выше гармонике тороидального гофрированного поля можно записать в виде

$$\Phi = B_0 R \varphi + \sqrt{\frac{R}{r}} b_0 I_0 \left( \frac{m \varrho}{R} \right) \sin m \varphi. \quad (7. 22)$$

Уравнения силовых линий такого поля, если пренебречь членами  $\sim \frac{b_0^2}{B_0^2}$ , имеют вид

$$\frac{d\varrho}{dR\varphi} = \frac{1}{B_0} \left\{ \frac{m}{R} I_0' - \frac{\cos \chi}{R} \left( \frac{m \varrho}{R} I_0' + I_0 \right) \right\} \sin m \varphi; \quad (7. 23)$$

$$\frac{d\chi}{dR\varphi} = \frac{1}{B_0} \frac{I_0 \sin \chi}{\varrho R} \sin m \varphi.$$

Поскольку средние значения правых частей уравнений (7. 23) равны нулю, то приближенные решения этих уравнений примут вид

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{R}{m B_0} \left\{ \frac{m}{R} I_0' - \frac{\cos \chi}{R} \left( \frac{m \varrho_0}{R} I_0' + I_0 \right) \right\} \cos m \varphi; \quad (7. 24)$$

$$\chi = \chi_0 + \frac{\sin \chi_0}{m \varrho_0} \frac{I_0}{B_0} \cos m \varphi,$$

где аргументом функции  $I_0$  является  $\frac{m \varrho_0}{R}$ . Члены, пропорциональные  $\cos \chi$  и  $\sin \chi$ , своим появлением обязаны наличию тороидальности поля. Выражения (7. 24) показывают, что силовые линии колеблются около окружности  $\varrho = \varrho_0$ ,  $\chi = \chi_0$ . Изгибание поля в тор приводит только к изменению амплитуды этих колебаний и зависимости ее от «азимута»  $\chi$ .

К аналогичным возмущениям силовых линий приводит и искривление волнистого поля.

### 3. Магнитные поля с осью двоякой кривизны

Среди магнитных полей с незамкнутыми силовыми линиями важным классом являются поля, магнитная ось которых представляет собой пространственную кривую двоякой кривизны. Одним из таких полей фактически является однозаходное поле (см. рис. 30). Здесь мы рассмотрим общий подход к исследованию таких полей, удовлетворяющих условию  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ . Для этого вблизи рассматриваемой магнитной оси введем систему координат, в которой положение точки определяется длиной дуги между

некоторой фиксированной точкой  $O$  на этой оси и точкой пересечения плоскости, перпендикулярной к оси и проходящей через рассматриваемую точку. Эту дугу, обозначенную через  $s$ , примем за одну из координат точки. В качестве двух других координат  $x$  и  $y$  возьмем декартовы координаты точки на данной плоскости, а в качестве осей — направления нормали и бинормали к кривой. Элемент дуги в этих координатах будет равен (рис. 51)

$$dl^2 = [d(\mathbf{r}_0(s) + x\mathbf{n}_0(s) + y\mathbf{b}_0(s))]^2 = g_{ik} dx_i dx_k. \quad (7.25)$$

Используя формулы Френе

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} = \mathbf{t}^\circ; \quad \frac{d\mathbf{t}^\circ}{ds} = -\frac{\mathbf{n}^\circ}{R}; \quad \frac{d\mathbf{n}^\circ}{ds} = -\frac{\mathbf{t}^\circ}{R} - \frac{\mathbf{b}^\circ}{K}; \quad \frac{d\mathbf{b}^\circ}{ds} = \frac{\mathbf{n}^\circ}{K}, \quad (7.26)$$

нетрудно получить выражение метрического тензора для выбранной системы координат. Он равен

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{y}{K} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{K} \\ \frac{y}{K} - \frac{x}{K} \left(1 - \frac{x}{R}\right)^2 + \frac{x^2 + y^2}{K^2} & & \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

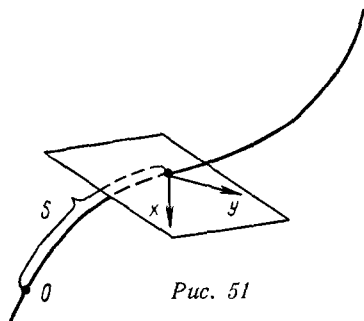


Рис. 51

Если компоненты этого тензора подставить в уравнение Лапласа, написанные в произвольной системе координат,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = 0, \quad (7.28)$$

то получим уравнение для скалярного потенциала в окрестности данной оси. Подставляя сюда компоненты тензора (7.27), отбрасывая члены  $\sim \frac{1}{R^2}$ ,  $\frac{1}{RK}$ ,  $\frac{1}{K^2}$  и считая, что  $\frac{dR}{ds}$ ,  $\frac{dK}{ds} \lesssim 1$ , получим для  $\Phi$  уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{2x}{R}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \\ + \frac{2x}{K} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial s} - \frac{2y}{K} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial s} = 0. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\Phi = B_0 s \quad (7.30)$$

является решением данного уравнения. Подставляя в уравнение силовой линии

$$\frac{ds}{B^s} = \frac{dx}{B^x} = \frac{dy}{B^y} \quad (7.31)$$

контрвариантные компоненты вектора напряженности  $\mathbf{B}$

$$B^i = g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (7.32)$$

с точностью до членов высшего порядка малости, получаем интеграл

$$\left. \begin{aligned} \varrho^2 = x^2 + y^2 = \text{const}; \\ \varphi = \int \frac{ds}{K}, \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

где  $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$ . Угол  $\varphi$  и характеризует угол прокручивания силовых линий  $\mathbf{B}$  вокруг рассматриваемой магнитной оси. В этом приближении он не зависит от  $\varrho$  и не обращается в нуль при  $\varrho = 0$ . Таким свойством, как мы видели выше, обладает и однозаходное винтовое поле. Следует отметить, что угол прокручивания имеет здесь четкий смысл только в том случае, когда интеграл берется по периоду поля или по всей системе. Последнее связано с тем, что угол  $\varphi$  отсчитывается от нормали, которая сама вращается, но после прохождения периода возвращается к исходному положению. Наиболее известным полем рассмотренного типа является поле стелларатора в виде «восьмерки» (см. рис. 1, б). Используя геометрический смысл бинормали как вектора, перпендикулярного к векторам  $\mathbf{t}^\circ$  и  $\mathbf{n}^\circ$ , а также формулу  $\frac{d\mathbf{b}^0}{ds} = -\frac{\mathbf{n}^0}{K}$ , нетрудно заключить, что угол прокручивания  $2\pi\omega$  связан с углом  $\alpha$  (см. рис. 1, б) соотношением

$$2\pi\omega = 4\alpha. \quad (7.34)$$

Простой вывод этой формулы, основанный на прослеживании хода одной силовой линии, дан Спитцером [2].

Рассмотрим теперь задачу об изгибании винтового стеллараторного поля вдоль оси с малыми кривизной и кручением. Если ввести аналогично п. 1 этого параграфа новую функцию  $\Phi_1$ , выраженную через скалярный потенциал  $\Phi$  соотношением

$$\Phi_1 = \left(1 - \frac{x}{2R}\right) \Phi, \quad (7.35)$$

то в полярных координатах  $\varrho$ ,  $\varphi$ ,  $s$  уравнение (7.29) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s^2} + \frac{2}{K} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s \partial \varphi} + \\ + \frac{2\varrho \cos \varphi}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Пренебрегая членом, содержащим  $\frac{1}{R}$ , решение уравнения (7.56) получим в виде

$$\Phi_0 = I_0 \left( n\alpha\varrho \sqrt{1 - \frac{2}{\alpha K}} \right) \sin n(\varphi - \alpha s).$$

Уравнение (7. 36) с учетом последнего члена может быть решено аналогично тому, как это делалось в п. 1. Таким образом, в первом приближении по  $\frac{1}{R}$  и  $\frac{1}{K}$  получим

$$\Phi_1 = I_n (n\alpha Q) \sin (n\varphi - \alpha ns) - \frac{nQ}{K} I'_n (n\alpha Q) \sin (n\varphi - \alpha ns) - \\ - f_+ (Q) \sin [(n + 1) \varphi - \alpha ns] - f_- (Q) \sin [(n - 1) \varphi - \alpha ns].$$

Здесь  $f_{\pm}$  — функции, определяемые рядами (7. 19) — (7. 20), куда вместо  $\frac{mQ}{2R}$  следует подставить  $\frac{n\alpha Q}{2}$ .

Поскольку в уравнении (7. 36) пропорциональный  $1/K$  член содержит дифференцирование по  $\varphi$ , то кручение в первом приближении не влияет на изгибание аксиально-симметричного гофрированного поля. Учет же кривизны приводит, очевидно, к выражениям (7. 12) — (7. 14), которые были получены при изгибании гофрированного поля в тор радиуса  $R$ .

## § 8. Поле вблизи данной магнитной поверхности

### 1. Постановка задачи

Во многих случаях, в частности при рассмотрении равновесия плазменных шнуров, встает следующая задача: дана некоторая магнитная поверхность  $\Sigma^*$  с известным на ней значением напряженности поля  $\mathbf{V}$ . Требуется найти с внешней стороны  $\Sigma^{**}$  безвихревое магнитное поле, которое на поверхности  $\Sigma$  совпадает с заданным полем. Эта задача в известном смысле является обобщением задачи § 7, где мы определили магнитное поле вблизи одной силовой линии — магнитной оси, которую можно рассматривать как бесконечно тонкую трубчатую поверхность. Если одна силовая линия и напряженность поля на ней могут быть заданы произвольно, то задать произвольно магнитную поверхность вместе с полем на ней, вообще говоря, нельзя, если мы хотим найти безвихревое продолжение поля магнитной поверхности во внешней части пространства. В данном случае заданное поле должно удовлетворять условию

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{V} |_{\Sigma} = 0. \quad (8. 1)$$

По своему характеру сформулированная задача является задачей Коши, так как на  $\Sigma$  задаются фактически скалярный потенциал и его нормальная производная:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 |_{\Sigma}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 |_{\Sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (8. 2)$$

\* Под магнитной поверхностью мы будем понимать здесь любую поверхность, состоящую из магнитных силовых линий.

\*\* Внешняя сторона определяется направлением нормали.

Задача Коши для уравнения эллиптического типа, в данном случае для уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad (8.3)$$

является некорректной, так как малые вариации в граничных условиях (8.2) приводят ко все возрастающим вариациям при удалении от  $\Sigma$ . По этой причине разумно искать решение поставленной задачи только вблизи данной поверхности, например в виде рядов по степеням удаления  $\omega$  от поверхности. Полученные таким образом ряды будут сходиться до значений  $\omega < R_\Sigma$ , где  $R_\Sigma$  — характерный радиус кривизны рассматриваемого участка поверхности. Для конкретного построения указанных рядов в случае гладкой поверхности удобно ввести специальную систему координат, выбрав в качестве одной из координат расстояние  $\omega$ , отсчитываемое по нормали к поверхности. Две другие координаты могут быть любыми при условии, что обе они лежат на  $\Sigma$ . В этом случае уравнение (8.3), записанное в форме (7.28), можно разрешить относительно второй производной по  $\omega$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} = b_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + a_{ik} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (8.4)$$

Разложив в этом уравнении  $b_i$  и  $a_{ik}$  по степеням  $\omega$ , подставляя сюда  $\Phi$  в виде ряда

$$\Phi = \Phi_0 + \omega \Phi_1 + \omega^2 \Phi_2 + \dots \quad (8.5)$$

и учитывая граничные условия (8.2), получим искомое поле.

Если система обладает симметрией, то магнитное поле удобнее описывать не скалярным потенциалом, а одной из функций потока (3.2), которые, как нетрудно убедиться, удовлетворяют соответственно уравнениям (см. приложение)

$$\psi = A_z; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0; \quad (8.6)$$

$$\psi = r A_\varphi; \quad r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad (8.7)$$

$$\psi = A_z + r A_\varphi; \quad r \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{1 + \alpha^2 r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{2\alpha r^2 B_0}{(1 + \alpha^2 r^2)^2} = 0. \quad (8.8)$$

Здесь  $\theta = \varphi - \alpha z$ ;  $B_0 = B_z + \alpha r B_\varphi = \text{const}$ , причем уравнение (8.6) соответствует трансляционной, (8.7) — аксиальной, а (8.8) — винтовой симметрии поля.

Уравнения (8.6) — (8.8) могут быть решены аналогично уравнению (8.3). Однако нахождение функций  $\psi$  дает нам больше, чем определение потенциала  $\Phi$ , так как, приравнявая их постоянной, мы сразу находим магнитные поверхности. Если же система не обладает симметрией, то уравнение магнитных поверхностей удается найти только с точностью до линейных членов по  $\omega$

(см. п. 3). В тех случаях, когда поверхность  $\Sigma$  имеет острые ребра или особые точки, определение поля вблизи этих особенностей требует специального рассмотрения (см. § 9).

## 2. Поле вблизи симметричных магнитных поверхностей

Расчет поля и магнитных поверхностей наиболее просто выполняется при наличии трансляционной и аксиальной симметрии. Поскольку случай аксиальной симметрии является более общим, мы остановимся на нем подробнее.

В соответствии со сказанным выше введем специальную координатную систему, взяв в качестве координат расстояние  $w$  по нормали к поверхности, азимутальный угол  $\varphi$  и дугу  $s$  соответствующего меридионального сечения, отсчитываемую от некоторой окружности радиуса  $r_0$ , лежащей на рассматриваемой поверхности  $\Sigma$ . Если уравнение поверхности  $\Sigma$  есть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\varphi, s)$ , то положение точки в пространстве определяется радиусом-вектором (рис. 52)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\varphi, s) + w\mathbf{n}^0(\varphi, s).$$

Поскольку

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} = \mathbf{t}^0; \quad \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \varphi} = r\boldsymbol{\varphi}^0; \quad \frac{\partial \mathbf{n}^0}{\partial s} = \frac{\mathbf{t}^0}{R};$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}^0}{\partial \varphi} = \cos \theta \boldsymbol{\varphi}^0,$$

где  $\mathbf{n}^0$ ,  $\mathbf{t}^0$  и  $\boldsymbol{\varphi}^0$  — единичные векторы, то нетрудно видеть, что элемент длины при таком выборе системы координат имеет вид\*

$$dl^2 = [r(s) + w \cos \theta(s)]^2 d\varphi^2 + \left[1 + \frac{w}{R(s)}\right]^2 ds^2 + dw^2. \quad (8.9)$$

Здесь  $r = r(s)$  — уравнение меридионального сечения;  $R(s)$  — радиус кривизны этого сечения, а  $\theta(s)$  — угол между нормалью к сечению и плоскостью  $z = 0$ .

Магнитное поле, лежащее на поверхности  $\Sigma$  при аксиальной симметрии и при выполнении условия (8.1), может быть представлено в виде

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}^0 B_0 \frac{a}{r} + \mathbf{B}_1, \quad (8.10)$$

где  $\mathbf{B}_1$  — поле, лежащее в меридиональном сечении. Первый член выражения (8.10) описывает тороидальное магнитное поле, которое пропорционально  $1/r$  и автоматически продолжается во внешнюю по отношению к  $\Sigma$  область. Составляющая поля  $\mathbf{B}_1$  может

\* См. тензор (7.27).

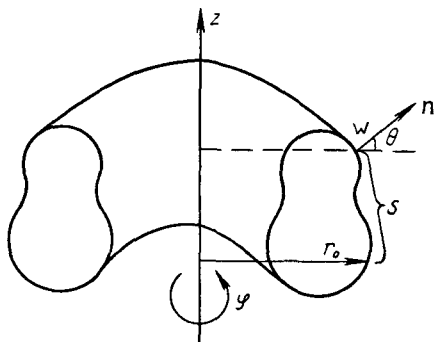


Рис. 52

быть описана функцией  $\psi = rA_\varphi$ , удовлетворяющей уравнению (8. 7) и граничным условиям

$$\psi|_\Sigma = \psi_0 = \text{const}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\omega}\Big|_\Sigma = rB_{s0}. \quad (8. 11)$$

В выбранной ортогональной системе координат уравнение (8. 7) записывается в виде (см. приложение)

$$\frac{\partial}{\partial\omega} \left( \frac{h_s}{h_\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{h_s h_\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial s} \right) = 0, \quad (8. 12)$$

где  $h_s = 1 + \frac{\omega}{r}$ ;  $h_\varphi = r + \omega \cos \theta$ ;  $h_\omega = 1$  — коэффициенты Ламе. Соответственно компоненты поля выражаются формулами

$$B_s = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial\omega}; \quad B_\omega = -\frac{1}{h_s} \frac{\partial\psi}{\partial s} \quad (8. 13)$$

и решение уравнения (8. 12) представляется следующим рядом по  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \psi = & \psi_0 + rB_{s0}\omega - \frac{rB_{s0}}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos \theta}{r} \right) \omega^2 + \\ & + \left[ \frac{rB_{s0}}{3R} \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos \theta}{r} \right) - \frac{r}{6} \left( \frac{1}{r} (rB_{s0})' \right)' \right] \omega^3 + \dots \end{aligned} \quad (8. 14)$$

Здесь все коэффициенты при степенях  $\omega$  являются функциями координаты  $s$  на поверхности  $\Sigma$ , а штрих означает производную по  $s$ . Постоянная  $\psi_0$  — значение  $\psi$  на поверхности  $\Sigma$  — без ограничения общности может быть положена равной нулю.

Приравнивая найденное значение  $\psi$  постоянной, получим уравнения магнитных поверхностей, близких к  $\Sigma$ . С точностью до линейных по  $\omega$  членов уравнение этих поверхностей имеет вид

$$\psi = rB_{s0}\omega = \text{const}. \quad (8. 15)$$

Уравнение (8. 15) выражает собой сохранение магнитного потока между рассматриваемыми поверхностями и не зависит от того, является ли поле вне  $\Sigma$  безвихревым или нет. Единственное ограничение, налагаемое на применимость уравнения (8. 15) при наличии токов вне  $\Sigma$ , состоит в том, что вблизи  $\Sigma$  плотность тока должна быть конечной.

Если заданная магнитная поверхность обладает не аксиальной, а трансляционной симметрией, т. е. не зависит от одной из декартовых координат, например  $z$ , то вместо  $\psi = rA_\varphi$  нужно взять компоненту векторного потенциала  $\psi A_z$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta\psi = 0; \quad B_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$



Поступая аналогично предыдущему, получим для  $\psi$  ряд

$$\psi = \psi_0 + B_{s0}\omega - \frac{B_{s0}}{2R}\omega^2 + \left( \frac{B_{s0}}{3R^2} - \frac{B_{s0}''}{6} \right)\omega^3 + \dots, \quad (8.16)$$

где  $R = R(s)$  — радиус кривизны сечения  $\Sigma$  плоскостью  $z = \text{const}$ , а  $B_{s0} = B_{s0}(s)$  — длина дуги этого сечения, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки.

Этот результат можно получить и непосредственно из ряда (8.14), устремляя  $r$  к бесконечности.

В том случае, когда поле обладает винтовой симметрией, система координат оказывается неортогональной и выражение для  $\psi = A_z + \alpha r A_\varphi$  получается громоздким. Если же ограничиться только линейными членами по  $\omega$ , то получим

$$\psi = \psi_0 + \omega \sqrt{1 + \alpha^2 r^2} B_\perp, \quad (8.17)$$

где  $B_\perp$  — компонента поля, перпендикулярная к линиям  $\varphi - \alpha z = \text{const}$  и лежащая на исходной поверхности  $\Sigma$ , обладающей винтовой симметрией.

### 3. Магнитные поверхности вблизи несимметричной магнитной поверхности

В п. 1 указан метод расчета магнитного поля вблизи произвольной достаточно гладкой магнитной поверхности  $\Sigma$ . Выше отмечалось, что при наличии симметрии положение магнитных поверхностей, близких к  $\Sigma$ , с точностью до линейных членов по  $\omega$  определяется только сохранением потока. Поэтому можно думать, что и в общем случае несимметричных поверхностей близкие к  $\Sigma$  поверхности определяются только условием  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Действительно, введем координатную сетку  $x_1, x_2, x_3$  таким образом, чтобы линии  $x_1$  и  $x_2$  лежали на заданной магнитной поверхности  $\Sigma$ , а линия  $x_3 = \omega$ , как и раньше, была расстоянием, отсчитываемым по нормали к этой поверхности.

Уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  в криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (\sqrt{g} B^3) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\sqrt{g} B^1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sqrt{g} B^2) = 0, \quad (8.18)$$

где  $B^i$  — контрвариантные компоненты  $\mathbf{B}$ , а  $g$  — определитель метрического тензора. Учитывая, что  $B^3|_\Sigma = 0$ , в первом приближении по  $\omega$  получаем

$$\sqrt{g} B^3 = -\omega \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\sqrt{g} B^1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sqrt{g} B^2) \right\}. \quad (8.19)$$

В этом приближении система уравнений, определяющая силовую линию

$$\frac{d\omega}{B^3} = \frac{dx_1}{B^1} = \frac{dx_2}{B^2}, \quad (8.20)$$

может быть представлена в виде двух уравнений \*:

$$\sqrt{g} B^2 dx_1 - \sqrt{g} B^1 dx_2 = 0; \quad (8.21a)$$

$$\frac{d\omega}{B^3} = \frac{dx_1}{B^1}. \quad (8.21б)$$

Первое из уравнений при  $\omega = 0$  описывает силовые линии на поверхности  $\Sigma$ . Если известен интеграл этого уравнения

$$F(x_1, x_2) = \text{const}, \quad (8.22)$$

то

$$\sqrt{g} B^1 = T \frac{\partial F}{\partial x_2}; \quad \sqrt{g} B^2 = -T \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad (8.23)$$

где  $1/T$  — интегрирующий множитель уравнения (8.21a).

Знание интегрирующего множителя уравнения (8.21a) позволяет решить и уравнение (8.21б), если вместо  $B^1$  подставить его значение при  $\omega = 0$ , а вместо  $B^3$  — его выражение (8.19).

Действительно, делая указанные подстановки и учитывая формулы (8.23), получим

$$-\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dx_1}{\sqrt{g} B^1} \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \frac{dT(x_1, x_2)}{T}. \quad (8.24)$$

Отсюда следует, что

$$\omega T(x_1, x_2) = \text{const}. \quad (8.25)$$

Система интегралов (8.22) и (8.25) описывает с точностью до линейных по  $\omega$  членов поведение силовых линий вблизи заданной магнитной поверхности.

Интегрирующий множитель  $\frac{1}{T}$  определяется с точностью до множителя  $f(F)$ , где  $F$  — интеграл (8.22), а  $f$  — произвольная функция. Если силовая линия (8.22) эргодически заполняет  $\Sigma$ , то, двигаясь вдоль этой силовой линии, однозначно построить близкую к  $\Sigma$  магнитную поверхность можно только в том случае, если  $T = T(x_1, x_2)$  — однозначная функция координат вдоль силовой линии  $F(x_1, x_2) = \text{const}$ .

Из уравнения (8.25) в случае симметрии вытекают выражения (8.14), (8.15) и (8.17). Действительно, пусть поле не зависит от координаты  $x_2$ . Тогда можно взять такое  $T$ , чтобы  $\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0^{**}$ . Дифференцируя выражение (8.23) по  $x_2$ , получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0. \quad (8.26)$$

\* Здесь  $\sqrt{g}$  введен для упрощения окончательного выражения магнитных поверхностей.

\*\* В то время как  $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ , вообще говоря, не равно нулю, поскольку поле может иметь составляющую  $B^1$ .

Отсюда следует, что  $\frac{\partial F}{\partial x_2} = \text{const}$ , и так как согласно первому уравнению (8. 23)  $T = \text{const} \sqrt{g} B^1$ , то из уравнения (8. 25) окончательно получаем

$$\omega \sqrt{g} B^1 = \text{const}. \quad (8. 27)$$

Для полей, обладающих трансляционной, аксиальной и винтовой симметрией, отсюда вытекают формулы (8. 14), (8. 15) и (8. 17).

В качестве примера построения несимметричных магнитных поверхностей рассмотрим случай плоской поверхности  $\Sigma$ . Если ввести декартовы координаты с осью  $z$ , перпендикулярной к плоскости  $\Sigma$ , то  $g = 1$ . В частном случае, когда компоненты магнитного поля на этой плоскости зависят только от «своей» координаты:  $B_x = B_x(x)$ ;  $B_y = B_y(y)$  из уравнения (8. 21а) вытекает, что  $T = B_x B_y$ , и, следовательно, согласно соотношению (8. 24), получаем уравнение магнитных поверхностей в виде

$$z B_x B_y = \text{const}. \quad (8. 28)$$

Конкретным примером такого поля может служить поле, описываемое скалярным потенциалом

$$\begin{aligned} \Phi = B_1 x + B_2 y + \frac{b_1}{k_1} \text{ch } k_1 z \sin k_1 x + \\ + \frac{b_2}{k_2} \text{ch } k_2 z \sin k_2 y, \end{aligned} \quad (8. 29)$$

которое можно создать вблизи средней плоскости  $z = 0$  системой двух токовых решеток, расположенных в плоскостях  $z = \pm d$ . Из выражения (8. 28) в этом случае получаем следующее уравнение магнитных поверхностей, близких к плоскости  $z = 0$  ( $kz \ll 1$ ):

$$z (B_1 + b_1 \cos k_1 x) (B_2 + b_2 \cos k_2 y) = \text{const}.$$

Эти поверхности, периодические по обеим координатам  $x$  и  $y$ , имеют вид стеганого одеяла.

### § 9. Магнитное поле в окрестности особых точек и линий

В рассмотренных выше случаях мы предполагали, что силовые линии не пересекаются и не расщепляются на две или большее число силовых линий. Иными словами, направление силовой линии в каждой точке считалось однозначным. Однако на примере сепаратрисы гофрированного поля мы видели, что существуют также и пересекающиеся силовые линии (см. рис. 22). Точки пересечения или расщепления силовых линий (см. ниже) являются особыми точками уравнения силовых линий (2. 11). Если поле регулярно в окрестности особой точки, т. е. однозначно и непрерывно, то напряженность поля в ней должна обращаться в нуль.

Если же такая точка находится на поверхности идеально проводящего тела (плазмы), обтекаемого магнитным полем, то обращение поля в нуль не обязательно. На рис. 53 изображена так называемая остроугольная равновесная конфигурация плазмы, имеющая особые точки  $O$  и особую линию  $\Gamma$ , где происходит расщепление силовых линий поля без обращения его в нуль. Последнее связано с тем, что в окрестности этих точек поле нерегулярно.

### 1. Регулярные особые точки

Рассмотрим сначала регулярные особые точки. В окрестности такой точки безвихревого поля разложение скалярного потенциала начинается с членов, квадратичных по удалению от точки. Повто-

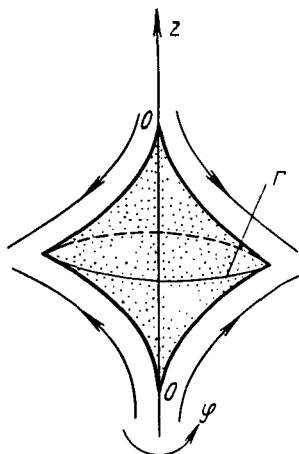


Рис. 53

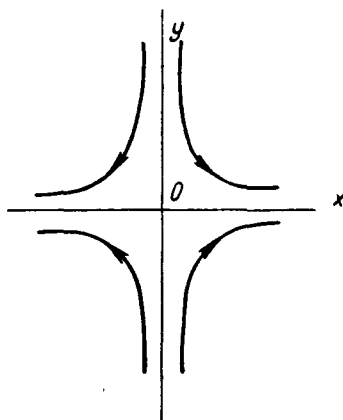


Рис. 54

ротом системы координат всегда можно привести квадратичные члены разложения  $\Phi$  к каноническому виду

$$\Phi = \alpha x^2 + \beta y^2 - (\alpha + \beta) z^2. \quad (9.1)$$

Если один из коэффициентов равен нулю, например  $\alpha + \beta$ , то мы имеем плоскую задачу

$$\Phi = \alpha (x^2 - y^2). \quad (9.2)$$

Уравнение силовых линий определяется в этом случае интегралами

$$xy = \text{const}; \quad z = \text{const}, \quad (9.3)$$

а магнитные поверхности представляют собой гиперболические цилиндры, ортогональные к эквипотенциалам  $\Phi = \text{const}$ . Ось  $z$  является особой линией, на которой силовые линии пересекаются под прямым углом (рис. 54).

Если все коэффициенты выражения (9.1) отличны от нуля, то эквипотенциальными поверхностями  $\Phi = \text{const}$  будут гиперболоиды, а силовые линии — ортогональными к ним линиями.

Типичную картину таких силовых линий мы получим, положив  $\alpha = \beta$ . При этом поле аксиально симметрично

$$\Phi = \alpha (x^2 + y) - 2\alpha z^2, \quad (9.4)$$

а эквипотенциальные поверхности являются одноосными гиперболами. Уравнение силовых линий имеет интегралы

$$\frac{x}{y} = \text{const}; \quad (x^2 + y^2)z = \text{const}. \quad (9.5)$$

Соответствующая магнитная конфигурация изображена на рис. 55.

В общем случае, когда  $\alpha \neq \beta$ , эквипотенциальные поверхности  $\Phi = \text{const}$  являются трехосными гиперболами и соответствующая картина силовых линий получается «сплющиванием» рассмотренной выше конфигурации. Отметим, что во всех этих случаях силовые линии пересекаются под прямым углом.

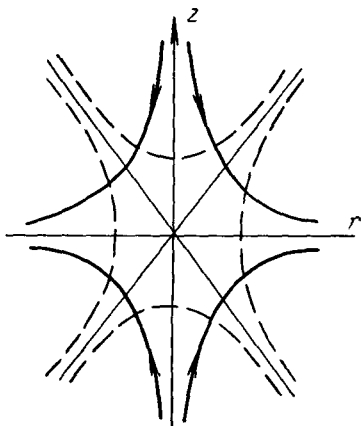


Рис. 55

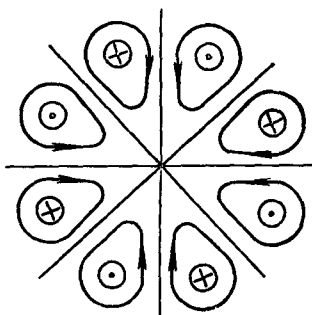


Рис. 56

Если же все коэффициенты при квадратичных членах и потенциале (9.1) обращаются в нуль, то особая точка имеет более сложную структуру. Примером такого поля может служить поле системы прямых проводников, расположенных на поверхности круглого цилиндра. Векторный потенциал имеет одну компоненту

$$A_z = br^n \sin n\varphi. \quad (9.6)$$

Силовые линии этого поля  $A_z = \text{const}$  изображены на рис. 56.

## 2. Нерегулярные особые точки

Равновесная плазменная конфигурация, изображенная на рис. 53, характерна тем, что магнитное поле в области, занятой плазмой, равно нулю. Условием равновесия такой конфигурации является равенство на границе плазмы газового и магнитного давлений. Поэтому задача расчета поля вблизи поверхности плазмы сводится к нахождению поля с  $B^2 = \text{const}$  на поверхности.

Вдали от особых точек соответствующая задача может быть решена методом, изложенным выше, тогда как поле в окрестности особых точек требует особого рассмотрения.

Начнем с расчета поля вблизи особой линии  $\Gamma$  (рис. 57). Очевидно, что в окрестности этой линии поле можно рассматривать как плоское. Благодаря этому можно ввести комплексный потенциал для описания безвихревого поля вне плазмы:

$$W(\zeta) = \Phi + iA_z; \quad \zeta = x + iy. \quad (9.7)$$

Компоненты поля выражаются через  $A_z$  и  $\Phi$  известными формулами

$$B_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad \text{и} \quad B_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

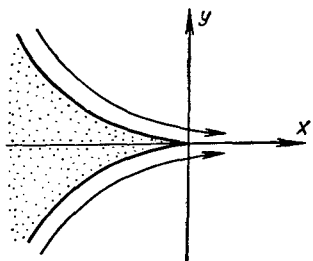


Рис. 57

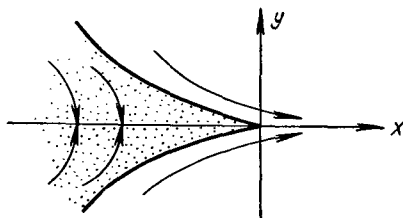


Рис. 58

Поскольку при  $\zeta = 0$  происходит расщепление силовых линий, то разложение потенциала в окрестности этой точки должно наряду с целыми степенями, описывающими регулярную часть поля, содержать дробные степени  $\zeta$ , для которых точка  $\zeta = 0$  является точкой ветвления:

$$W(\zeta) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + b \zeta^p. \quad (9.8)$$

Так как потенциал должен быть однозначной функцией координат в функции от  $\zeta$ , то на плоскости  $\zeta$  необходимо сделать разрез вдоль отрицательной части оси  $x$  (рис. 58). Из требования конечности  $\mathbf{V}$  при  $\zeta = 0$  следует, что  $p > 1$ . При  $\zeta \rightarrow 0$  модуль напряженности должен стремиться к напряженности поля  $B = B_0 = \text{const}$  на поверхности плазмы, поэтому  $a_1 = B_0$ . Подставляя в разложение (9.8) величины

$$\zeta = r e^{i\varphi}; \quad a_2 = a e^{i\theta}; \quad b = \beta e^{i\chi}$$

и беря мнимую часть  $W$ , мы получаем уравнение силовых линий

$$A_z = B_0 r \sin \varphi + \alpha r^2 \sin(2\varphi + \theta) + \beta r^p \sin(p\varphi + \chi) + \dots = \text{const}, \quad (9.9)$$

причем  $\varphi$  в связи со сказанным выше изменяется в пределах  $(-\pi, \pi)$ . Силовой линии, идущей при  $x > 0$  вдоль оси  $x$  и расщепляющейся на две при  $x < 0$ , соответствует константа в уравнении

(9. 9), равная нулю. При  $\varphi = 0$  и  $\text{const} = 0$  уравнение (9. 9) удовлетворяется тождественно только при  $\theta = \chi = 0$ . В окрестности  $\varphi = \pm\pi$  уравнение (9. 9) может быть записано в виде

$$\varepsilon (B_0 - 2ar) + \beta r^{p-1} \sin p\pi + \dots = 0; \quad \varphi \equiv \pm (\pi - \varepsilon). \quad (9.10)$$

Значение показателя  $p$  определяется граничным условием  $B^2|_{\Sigma} = B_0^2$ . Подставляя в него значения  $B_r$  и  $B_\varphi$ , найденные из уравнения (9. 9), получим при малых  $\varepsilon$

$$p^2\beta^2r^{2(p-1)} + 4a^2r^2 - 4B_0ar + 2B_0p\beta r^{p-1} [\cos \pi (p-1) + \\ + \varepsilon \sin \pi (p-1)] + 4ap\beta r^p [\cos \pi (p-2) + \\ + \varepsilon \sin \pi (2-p)] = 0. \quad (9.11)$$

Для  $r$  и  $\varepsilon$ , связанных соотношением (9. 10), это равенство должно удовлетворяться тождественно. Если  $p < 2$ , то в этом выражении основным является член, содержащий  $r^{p-1}$ , а при  $p > 2$  — член, линейный по  $r$ . Легко видеть, что эти члены исчезают лишь при  $p = 3/2$  и  $\beta^2 = 16B_0a$ . Для обращения в нуль членов более высокого порядка малости необходимо в разложении (9. 8) учесть величины следующего порядка малости. При  $p = 3/2$  уравнение граничной поверхности в декартовых координатах описывается уравнением

$$y = \pm \text{const} (-x)^{3/2}. \quad (9.12)$$

Таким образом, окончательное выражение для потенциала  $A_z$ , соответствующего полю, удовлетворяющему условию  $B^2|_{\Sigma} = \text{const}$ , имеет вид

$$A_z = B_0r \sin \varphi + \frac{\beta^2 r^2}{16B_0} \sin 2\varphi + \beta r^{3/2} \sin \frac{3}{2}\varphi + \dots \quad (9.13)$$

Отсюда следует, что уравнение силовых линий  $A_z = \text{const}$  в окрестности особой точки зависит только от одного параметра  $B_0/\beta$ , который имеет размерность длины и равен по порядку величины расстоянию, на котором силовые линии при  $x < 0$  расходятся на угол порядка единицы.

Нетрудно убедиться, что невыписанные члены разложения (9. 13) определяются неоднозначно, что соответствует возможности варьировать характер граничной поверхности вдали от особой линии.

Особую область поля, подобную изображенной на рис. 57, можно получить не только при  $p = 3/2$ , а при любом полуцелом  $p > 1$ . В этом случае «острие» будет еще более «тонким» ( $y \sim x^p$ ).

Интересно отметить ход силовых линий, определяемых уравнением (9. 9), внутри  $\Sigma$ . Рис. 58 показывает, что отрицательная часть оси  $x$  является линией разреза неоднозначной функции (9. 8).

Рассмотрим теперь поле в окрестности особой точки  $O$  (рис. 59). В этой точке силовая линия, идущая вдоль оси  $z$ , расщепляется в коническую поверхность. Если ввести сферическую систему

координат с центром в точке  $O$ , то уравнение для  $\psi = rA_\varphi$  запишется в виде (см. приложение)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\varrho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0. \quad (9.14)$$

Решение этого уравнения, регулярное при  $\theta = \Gamma$ , может быть представлено суммой гармоник

$$\psi_p = \varrho^{p+1} \sin \theta P_p^1(\cos \theta), \quad (9.15)$$

где  $P_p^1$  — присоединенная функция Лежандра, связанная с функцией Лежандра  $P_p$  соотношением  $P_p^1(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_p(\cos \theta)$ .

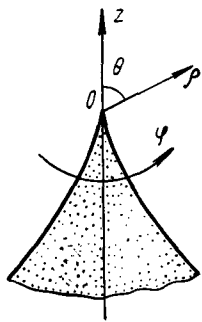


Рис. 59

Если  $p$  — целое число, то функция  $P_p^1$  является полиномом от  $\cos \theta$  и, следовательно, конечной и однозначной при всех  $\theta$ . Поскольку поле при  $\theta = \pi$  должно иметь особенность, то у одной из гармоник в разложении поля  $p$  должно быть нецелым.

Можно убедиться, что частным решением уравнения (9.14), удовлетворяющим условию  $B^2 = \text{const}$  на поверхности  $\psi = 0$ , проходящей через точку  $O$  (см. рис. 59), является решение

$$\psi = \frac{B_0}{2} \varrho^2 \sin^2 \theta - b \sin \theta \frac{d}{d\rho} \varrho^{p+1} P_p^1(\cos \theta)_{p=2} + \dots \quad (9.16)$$

Здесь первый член описывает однородное поле, а второй — нерегулярную при  $\theta = \pi$  добавку, появление которой связано с наличием острия.

Используя в окрестности  $\theta = \pi$  разложение  $P_p(\cos \theta)$  по степеням  $\varepsilon = \pi - \theta$

$$P_p = \frac{2}{\pi} \cos \pi \left( p + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \frac{p(p+1)}{4} \varepsilon^2 \right] \ln \varepsilon + \dots,$$

можно показать, что при  $p = 2$  уравнение магнитной поверхности  $\psi = 0$  сводится к

$$\varrho = -\frac{B_0}{4b} \varepsilon^2. \quad (9.17)$$

В цилиндрической системе координат это уравнение принимает вид

$$r = \text{const} (-z)^{3/2}, \quad (9.18)$$

аналогичный уравнению (9.12).



**УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
В ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ  
КООРДИНАТ**

Если магнитное поле  $\mathbf{B}$  не зависит от одной из криволинейных координат  $x_3$ , то можно найти магнитные поверхности  $\psi(x_1, x_2) = \text{const}$ , обладающие той же симметрией. В случае  $\frac{\partial g}{\partial x_3} = 0$  и  $\frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0$  уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\sqrt{g} B^1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\sqrt{g} B^2) = 0, \quad (1)$$

где  $B^i$  — контрвариантные компоненты поля;  $g = |g_{ik}|$ ;  $g_{ik}$  — коэффициенты метрического тензора,  $(dr)^2 = g_{ik} dx_i dx_k$ . Это уравнение удовлетворяется, если ввести функцию  $\psi$  так, что

$$\sqrt{g} B^1 = \frac{d\psi}{dx_2}; \quad \sqrt{g} B^2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \quad (2)$$

Уравнение для  $\psi$  получим из условия  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , откуда

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial B_3}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1} = 0, \quad (3)$$

где  $B_i$  — ковариантные компоненты поля. Из первых двух равенств (3) вытекает, что

$$B_3 = \text{const}. \quad (4)$$

Используя известные формулы векторного анализа  $B_i = g_{ik} B^k$  и подставляя выражение (2) в последнее из равенств (3), получим искомое уравнение для  $\psi$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\sqrt{g} g^{ik}}{g_{33}} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \right) = B_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right\}. \quad (5)$$

Здесь  $g^{ik} = G^{ik}/g$ , а  $G^{ik}$  — миноры  $|g_{ik}|$ .

В частном случае ортогональных криволинейных координат  $g_{ik} = g^{ik} = 0$  при  $i \neq k$ ,  $g_{ii} = h_i^2$ ,  $g^{ii} = \frac{1}{h_i^2}$ , где  $h_i$  — коэффициенты Ламе. Физические компоненты вектора  $\mathbf{B}$  есть  $B_{(i)} = B_i / \sqrt{g_{ii}} = B_i / h_i$ , и мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) &= 0; \\ h_2 h_3 B_{(1)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \quad h_1 h_3 B_{(2)} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}; \quad h_3 B_{(3)} = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В заключение рассмотрим уравнение (5) для общего случая винтовой симметрии в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ . Введем координаты  $x_1 = r, x_2 =$

$= \varphi - \alpha z = \theta$ ,  $x_3 = z$ , где  $\alpha = \frac{2\pi}{L}$ ,  $L$  — шаг винта. Тогда отличные от нуля компоненты  $g_{ik}$  и  $g^{ik}$  будут равны:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = 1 + \alpha^2 r^2; \quad g_{23} = g_{32} = \alpha r^2; \\ g^{11} = 1; \quad g^{22} = \frac{1 + \alpha^2 r^2}{r^2}; \quad g^{33} = 1; \quad g^{23} = g^{32} = -\alpha; \quad g = r^2. \end{aligned} \right\} (7)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (5) и (2), получим уравнение для  $\psi$  в виде

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{2\alpha r^2 B_0^2}{(1 + \alpha^2 r^2)^2}; \quad (8)$$

$$r B_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad B_\varphi - \alpha r B_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad B_z + \alpha r B_\varphi = B_0 = \text{const.}$$

Нетрудно убедиться, что введенная здесь функция  $\psi(x_1, x_2)$  совпадает с  $A_z$  для случая трансляционной симметрии, с  $rA_\varphi$  — для аксиальной симметрии и с  $A_z + \alpha rA_\varphi$  — для винтовой симметрии. Подстановка выражений (2) в уравнение силовых линий  $\frac{dx_1}{B^1} = \frac{dx_2}{B^2} = \frac{dx_3}{B^3}$  показывает, что  $\psi = \text{const}$ , является интегралом этого уравнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., Гостехиздат, 1946.
2. Спитцер Л. Исследования на стеллараторе. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1 — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959.
3. Морозов А. И. и Соловьев Л. С. «Ж. техн. физ.», 30, 271 (1960).
4. Кораблев Л. В., Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Ж. техн. физ.», 31, 1153 (1961).
5. Коврижных Л. М. «Ж. техн. физ.», 32, 526 (1962).
6. Гельфанд И. М., Граев М. И., Зуева Н. М., Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Ж. техн. физ.», 31, 1164 (1961).
7. Гельфанд И. М., Граев М. И., Зуева Н. М., Михайлова М. С., Морозов А. И. «Докл. АН СССР», 148, 1286 (1963).
8. Зуева Н. М., Михайлова М. С., Морозов А. И. «Докл. АН СССР», 153, № 5 (1963).
9. Морозов А. И., Соловьев Л. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, вып. 10 (1963).
10. Мельников В. К. «Докл. АН СССР», 144, 747 (1962).
11. Мельников В. К. «Докл. АН СССР», 148, 1257 (1963).
12. Rosenbluth M., Longmire C. App. of Phys., 1, 120 (1957).
13. Кадомцев Б. Б. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 353.
14. Джонсон, Оберман, Кулсруд, Фримен. Некоторые устойчивые магнитогидродинамические равновесные конфигурации. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1 — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959.
15. Кадомцев Б. Б. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 16.
16. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 37, 1646 (1961).

17. Крускал и Кулсруд. Равновесие удерживаемой магнитным полем плазмы в тороиде. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1 — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959.
  18. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Гостехиздат, 1955.
  19. Бурштейн Э. Л. и Соловьев Л. С. «Научные труды Радиои-нститута АН СССР», 2, № 2 (1960).
  20. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
  21. Рыжик И. М. и Гродштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Гостехиздат, 1951.
  22. Фок В. А. Phys. Z. Sow., 1, 215 (1932).
  23. Скорняков Г. В. «Ж. техн. физ.», 32, 261 (1962).
  24. Скорняков Г. В. «Ж. техн. физ.», 33, 777 (1962).
  25. Долбни Н. И. «Ж. прикл. матем. и теор. физ.», № 2, 104 (1962).
  26. Northrop G., Teller E. Phys. Rev., 117, 215 (1960).
  27. Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
  28. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1958.
-

## РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*В. Д. Шафранов*

### § 1. Общие замечания

Одной из важнейших задач, возникающих в проблеме управляемых термоядерных реакций, является выяснение условий, при которых плазма может удерживаться магнитным полем от соприкосновения со стенками сосуда, в котором она находится [1—6]. В теории проблему удержания плазмы можно разделить на две части: равновесие плазмы и ее устойчивость.

Теория равновесия выясняет условия, при которых давление плазмы в каждой точке может быть уравновешено электромагнитной силой, но не дает ответа на вопрос о том, какие из теоретически возможных равновесий являются истинными, устойчивыми и, следовательно, могли бы быть осуществимыми в эксперименте. Для решения этого вопроса необходимо еще выяснить, не приводят ли случайные бесконечно малые возмущения к коренной перестройке теоретически мыслимой равновесной конфигурации плазмы, т. е. решить задачу о макроскопической устойчивости плазмы. Теории устойчивости посвящена работа Кадомцева, помещенная в этом же выпуске. В настоящей работе рассматриваются только такие свойства равновесных конфигураций, которые вытекают из уравнений равновесия.

Идеальным случаем удержания плазмы было бы удержание в течение времени, значительно превышающего среднее время между кулоновскими столкновениями электронов и ионов. В этом случае давление плазмы — скаляр и условия равновесия выражаются следующими уравнениями магнитостатики:

$$-\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] = 0; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) есть уравнение движения, в котором опущен инерционный член. Уравнения (1.2) и (1.3) — уравнения Макс-

велла, причем в уравнении (1.2) опущен ток смещения. Следовательно, система уравнений (1.1) — (1.3) применима для описания плазмы, которая находится в квазистационарном электромагнитном поле и в которой допустимы сравнительно медленные (диффузионные и дрейфовые) движения со скоростями, меньшими инерционных скоростей  $(v \ll \sqrt{\frac{T}{M}}; \sqrt{\frac{B^2}{4\pi Mn}})$ .

Простейшей равновесной конфигурацией, в которой давление плазмы воспринимается не стенками сосуда, а магнитным полем, является цилиндрический плазменный шнур. В такой конфигурации возможны два различных способа уравнивания давления плазмы, которые являются прототипами двух различных направлений в современных экспериментальных исследованиях по длительному удержанию плазмы. Первый способ — удержание внешним магнитным полем; здесь необходимая для равновесия конфигурация магнитного поля имеется заранее (без плазмы). Второй способ — удержание током; это тот случай, когда необходимая конфигурация создается лишь при возбуждении в плазме электрического тока. Общее условие равновесия цилиндрического плазменного шнура можно записать в виде (см. работы [7] и [38])

$$\bar{p} + \frac{\bar{B}_i^2}{8\pi} = \frac{B_e^2 + B_a^2}{8\pi} + p_a. \quad (1.4)$$

Здесь  $B_a = 2J/ca$  — ток в шнуре;  $a$  — расстояние от оси цилиндра;  $B_i$  и  $B_e$  — внутреннее и внешнее продольные магнитные поля. Черта сверху означает усреднение по сечению радиуса  $a$ . Для изоляции плазмы необходимо  $B_e^2 + B_a^2 > 8\pi\bar{p}$ . При  $B_e = 0$  мы имеем дело с удержанием током, при  $B_a = 0$  — с удержанием внешним магнитным полем.

Цилиндрический шнур, однако, не является замкнутой системой, поскольку в нем неизбежен контакт плазмы со стенками на торцах. Поэтому необходимо рассматривать не цилиндрические, а замкнутые тороидальные плазменные конфигурации [8—10, 12, 19].

Простейшим примером тороидальной конфигурации является тонкий кольцевой плазменный шнур. Переход к кольцевому шнуру от цилиндрического не является тривиальным. В кольцевом осесимметричном шнуре невозможен первый способ удержания (т. е. удержание плазмы одним продольным полем). При втором способе удержания плазмы становится необходимым дополнительное магнитное поле, связанное с токами во внешних проводниках.

Невозможность удержания плазмы одним только продольным магнитным полем проще всего видна на идеализированном примере, когда магнитное поле внутри плазмы  $B_i = 0$  и давление  $p = \text{const}$ , снаружи  $B_e \neq 0$ . При этом, очевидно, по «поверхности» плазмы должен течь азимутальный ток с поверхностной плотностью (рис. 1).

$$i = \frac{c}{4\pi} B_e. \quad (1.5)$$

Поскольку суммарный ток  $I$ , протекающий через любую образующую тора — окружность с радиусом  $r$ , есть величина постоянная, то плотность тока  $i$  и магнитное поле  $B_e$  являются функцией  $r$ :

$$i = \frac{I}{2\pi r}; \quad B_e = \frac{2I}{cr}. \quad (1.6)$$

Следовательно, магнитное давление  $B_e^2/8\pi$  не может уравновесить давление плазмы  $p = \text{const}$  в тороидальном осесимметричном

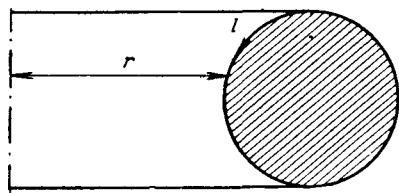


Рис. 1

шнуре. Условие  $B_e^2/8\pi = \text{const}$  может быть выполнено лишь на неосесимметричной «жеваной» поверхности, некоторое представление о которой можно получить, рассмотрев простейший случай, когда линии тока лежат в плоскостях, перпендикулярных плоскости тора [23]. В этом случае, очевидно, длина внутренней и внешней

образующих тора должна быть одинакова (рис. 2).

Необходимость внешнего магнитного поля при «токовом» удержании кольцевого плазменного шнура также легко понять на идеализированном примере плазмы с поверхностным током.

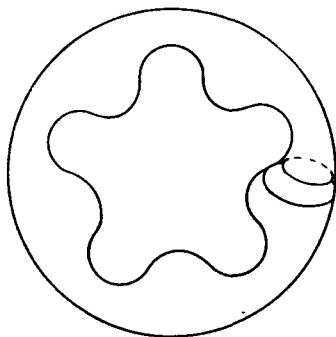


Рис. 2

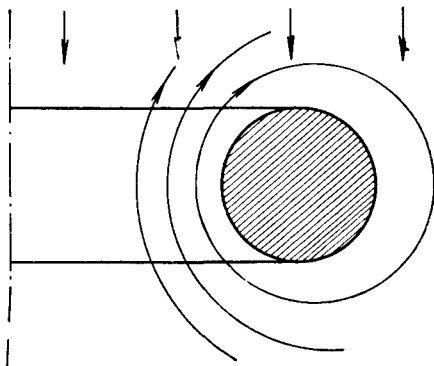


Рис. 3

Рассмотрим сначала идеальный проводник, по поверхности которого течет продольный ток при отсутствии посторонних внешних токов. Поскольку весь магнитный поток должен пройти через кольцо, то ясно, что с внутренней стороны проводника силовые линии расположены более густо, вследствие чего давление магнитного поля на поверхности проводника неодинаково (рис. 3). Но для уравнивания плазмы необходимо иметь на поверхности  $B^2 = \text{const}$ . Этого можно добиться добавлением внешнего магнитного поля, перпендикулярного к плоскости тора и совпадающего по знаку с полем тока на наружной стороне тора.

Для получения представления о более сложных равновесных конфигурациях необходимо рассмотреть некоторые общие свойства конфигураций, вытекающие из уравнений (1. 1) — (1. 3).

## § 2. Теорема вириала

Условие равновесия плазмы можно записать в виде равенства нулю дивергенции некоторого тензора  $T_{ik}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} = 0. \quad (2. 1)$$

Это уравнение получается из уравнения (1. 1) при подстановке в него плотности тока из формулы (1. 2). Соответствующий тензор

$$T_{ik} = P_{\perp} \left( \delta_{ik} - \frac{B_i B_k}{B^2} \right) + P_{\parallel} \frac{B_i B_k}{B^2}, \quad (2. 2)$$

где

$$P_{\perp} = p + \frac{B^2}{8\pi}; \quad (2. 3)$$

$$P_{\parallel} = p - \frac{B^2}{8\pi}. \quad (2. 4)$$

Из структуры тензора  $T_{ik}$  (2. 2) следует, что  $P_{\perp}$  есть давление поперек, а  $P_{\parallel}$  — вдоль магнитных силовых линий. Из выражений (2. 3) и (2. 4) видно, что магнитное поле в поперечном направлении оказывает давление, а в продольном — создает натяжение (минус в выражении (2. 4)!). Поэтому может возникнуть вопрос: нельзя ли создать такую конфигурацию магнитного поля, в которой равновесие осуществляется без внешних токов, натяжением магнитных силовых линий внутри равновесной конфигурации. Отрицательный ответ на этот вопрос легко получить, если рассмотреть некоторое интегральное соотношение, являющееся следствием уравнения равновесия (2. 1) и известное под названием теоремы вириала.

Для получения этого соотношения используем тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_k T_{ik}) = T_{ik} \delta_{ik} + x_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}. \quad (2. 5)$$

Согласно уравнению (2. 1), второй член в правой части выражения (2. 5) при равновесии обращается в нуль. Интегрируя оставшееся равенство по объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ , получаем соотношение

$$\int_V T_{ii} dV = \oint_S T_{ik} x_k dS_i. \quad (2. 6)$$

Для тензора (2. 2) имеем

$$\int (2P_{\perp} + P_{\parallel}) dV = \oint \left\{ P_{\perp} (\mathbf{r} d\mathbf{S}) + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \frac{(\mathbf{Br})(\mathbf{r} d\mathbf{S})}{B^2} \right\} \quad (2. 7)$$

или, с учетом выражений (2. 3) и (2. 4),

$$\int \left( 3p + \frac{B^2}{8\pi} \right) dV = \oint \left\{ \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{r} dS - \frac{(\mathbf{B}\mathbf{r})(\mathbf{B} dS)}{4\pi} \right\}. \quad (2. 8)$$

Применим это соотношение к плазме, занимающей некоторый ограниченный объем, вне которого давление  $p = 0$ . Если внутри и вне плазмы нет жестких проводников с током, то при устремлении поверхности интегрирования в бесконечность поверхностный интеграл обращается в нуль (так как вдали от плазмы  $B \sim 1/r^3$ ). Таким образом равенство (2. 8) оказывается невозможным.

Следовательно, любая ограниченная равновесная конфигурация плазмы с магнитным полем может существовать лишь при наличии закрепленных проводников с током (в этом случае правая часть в выражении (2. 8) сведется к интегралу по поверхности этих проводников).

Заметим, что из теоремы вириала можно сделать некоторые заключения и об условиях равновесия магнитных полей внутри проводящей жидкости. Вопрос об условиях существования магнитных полей ограниченной протяженности в проводящей жидкости представляет интерес для астрофизики (например, в связи с теорией солнечных пятен). Из теоремы вириала вытекает, что такие поля могут удержаться в равновесии лишь в том случае, если давление  $p_e$  вне области, занятой полем, превышает среднее давление  $p$  внутри этой области. Отсюда, в частности, следует и невозможность конфигураций магнитного поля, в которых плотность тока  $\mathbf{j}$  всюду параллельна вектору  $\mathbf{B}$ , так что  $\frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{B}] = 0$ . Такое «бессилковое» магнитное поле (часто фигурирующее в астрофизической литературе) может осуществиться лишь в части пространства, занятого магнитным полем.

Теорема вириала, записанная в общей форме (2. 6), может быть применена и к конфигурациям, в которых существенную роль могут играть электрические или гравитационные поля, а также движение массы жидкости. Впервые эта теорема была использована в магнитной гидродинамике Чандрасекаром и Ферми для установления необходимого критерия динамической устойчивости космических гравитирующих масс, содержащих магнитные поля.

### § 3. Некоторые свойства равновесных конфигураций

Из уравнения равновесия (1. 1) вытекает ряд следствий, позволяющих получить некоторые общие представления о равновесных конфигурациях. Умножая уравнение (1. 1) скалярно на  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$ , получаем

$$\mathbf{B}\nabla p = 0; \quad (3. 1)$$

$$\mathbf{j}\nabla p = 0. \quad (3. 2)$$

Уравнение (3. 1) показывает, что магнитные силовые линии в равновесной конфигурации расположены на поверхности  $p = \text{const}$ .



Для удержания плазмы необходимо поэтому, чтобы силовые линии магнитного поля не выходили из объема, занимаемого плазмой. Плазма, помещенная в магнитное поле, будет, согласно уравнению (3. 1), растекаться вдоль магнитных силовых линий. Если силовая линия заполняет непрерывно целую тороидальную поверхность, называемую магнитной (см. работу «Геометрия магнитного поля» в настоящем выпуске), то давление плазмы на этой поверхности окажется постоянным. Такое поле, следовательно, может служить магнитной ловушкой для плазмы.

Условие (3. 1) не позволяет, однако, установить, как будет располагаться плазма в магнитном поле с замкнутыми силовыми линиями. В этом вырожденном случае нельзя однозначно выделить магнитные поверхности. Так, например, в поле прямого тока любая поверхность вращения несет на себе силовые линии и в этом смысле является магнитной. Целесообразно поэтому условиться называть магнитными такие поверхности, которые при наличии плазмы совпадают с поверхностями  $p = \text{const}$ .

Для выделения таких поверхностей в магнитном поле с замкнутыми силовыми линиями рассмотрим другие следствия уравнений равновесия.

Согласно уравнению (3. 2), ток в равновесной конфигурации течет между магнитными поверхностями. Поэтому если между двумя соседними поверхностями  $p = \text{const}$  и  $p + dp = \text{const}$  провести систему непересекающихся замкнутых перегородок, то через каждую такую перегородку будет протекать один и тот же ток  $dJ = \text{const}$ . Чтобы выразить это условие математически, введем криволинейную систему координат с элементами координатных дуг  $dl_1, dl_2, dl_3$ , направив  $dl_1$  по нормали к поверхности  $p = \text{const}$

$$dl_1 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|^2} dp, \quad (3. 3)$$

а  $dl_2$  и  $dl_3$  — вдоль двух независимых контуров, которые можно провести на тороидальной поверхности. Для определенности будем считать, что контур  $l_2$  проведен по направлению большого обхода тора (в направлении магнитной оси), а контур  $l_3$  — по направлению малого обхода (вокруг магнитной оси, рис. 4).

Найдем суммарный ток  $dJ_3$ , протекающий через перегородку, расположенную на контуре  $l_2$ . Элемент поверхности этой перегородки равен  $\delta S_3 = [dl_1 dl_2]$ , так что

$$dJ_3 = \oint_{l_2} \mathbf{j} [dl_1 dl_2]. \quad (3. 4)$$

Умножая уравнение (1. 1) векторно на  $\mathbf{B}$ , найдем выражение для плотности тока в равновесной конфигурации

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + \mathbf{j}_\parallel = c \frac{[\mathbf{B} \nabla p]}{B^2} + h \mathbf{B}, \quad (3. 5)$$

где  $h$  — произвольная функция (она должна быть выбрана из условия  $\text{div } \mathbf{j} = 0^*$ ). Замечая, что, согласно уравнению (3. 1) и выражению (3. 3),  $\mathbf{V}d\mathbf{l}_1 = 0$ , на основании известного векторного тождества получим

$$[\mathbf{V}\nabla p][d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2] = (\mathbf{V} d\mathbf{l}_1)(\nabla p d\mathbf{l}_2) - (\mathbf{V} d\mathbf{l}_2)(\nabla p d\mathbf{l}_1) = -dp(\mathbf{V} d\mathbf{l}_2). \quad (3.6)$$

Таким образом, выражение (3. 4) для тока  $dJ_3$  принимает вид

$$dJ_3 = -c dp \oint_{l_2} \frac{\mathbf{B} d\mathbf{l}_2}{B^2} + \oint_{l_2} h \mathbf{B} [d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2]. \quad (3.7)$$

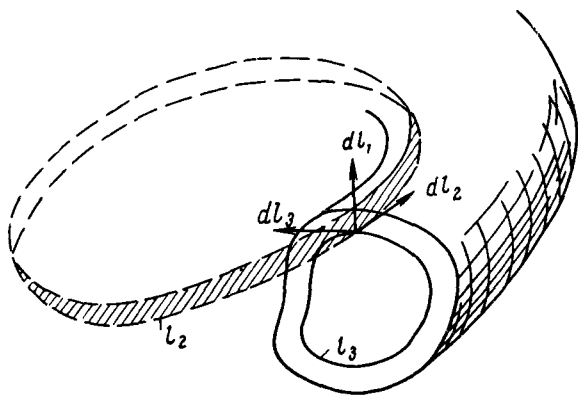


Рис. 4

Пусть теперь контур  $l_2$  совпадает с магнитной силовой линией:  $d\mathbf{l}_2 = \frac{\mathbf{B}}{B} dl$ . Тогда второй член справа исчезает. Если силовая линия замыкается при одном обходе по тору (одно пересечение с контуром  $l_3$ ), то выражение (3. 6) определяет полный ток, протекающий между соседними поверхностями по нормали к силовой линии:

$$dJ_n = -c dp \oint \frac{dl}{B}. \quad (3.8)$$

Поскольку величина этого тока не зависит от выбора контура, то отсюда следует, что на магнитной поверхности для каждой силовой линии имеет постоянное значение интеграл

$$U = \oint \frac{dl}{B}. \quad (3.9)$$

\* Уравнение для  $h$ , вытекающее из этого условия, имеет вид  $\mathbf{V}\nabla h = -B^2 \times (\mathbf{j}_\perp \nabla) \frac{1}{B^2}$ .

Иначе говоря, магнитная поверхность в поле с замкнутыми силовыми линиями образуется совокупностью силовых линий с одним и тем же значением  $U$ . Это условие впервые было получено Б. Б. Кадомцевым.

Рассмотрим в качестве иллюстрации поле прямого тока. В этом случае  $B = \frac{2J}{cr}$  и  $U = \frac{\pi c}{2J} r^2$ . Следовательно, магнитные поверхности суть цилиндрические поверхности  $r = \text{const}$ .

Условия постоянства  $U$  можно распространить и на поверхности с незамкнутыми силовыми линиями, если для  $U$  ввести другое, более общее определение. Если силовая линия замыкается после

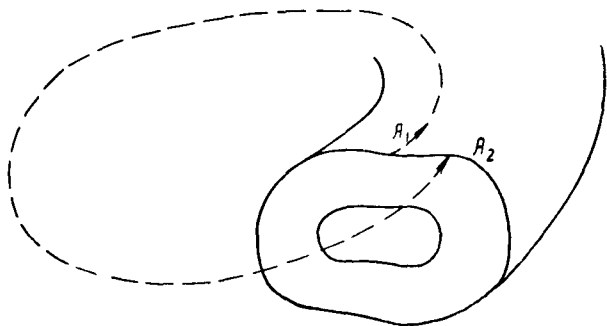


Рис. 5

$m$ -кратного обхода по тору, то ее, очевидно, можно разделить на  $m$  частей, вдоль которых интеграл  $U = \int \frac{dl}{B}$  сохраняет постоянное значение. Рассматривая магнитную поверхность, образованную незамкнутой силовой линией, как предел магнитной поверхности с замкнутыми силовыми линиями при  $m \rightarrow \infty$ , нетрудно установить, что на этой поверхности можно провести такой контур (предел контура, соединяющего точки деления замкнутой силовой линии на  $m$  частей), что интеграл  $U = \int \frac{dl}{B}$ , взятый от любой точки этого контура до первого пересечения с ним (обозначим эти точки через  $A_1, A_2$ , рис. 5), будет иметь постоянное значение [34]

$$U = \int_{A_1}^{A_2} \frac{dl}{B} = \text{const.} \quad (3.10)$$

Аналогично выводу условия постоянства тока, протекающего между соседними поверхностями, можно получить условие постоянства магнитного потока  $d\Psi$ , проходящего через систему непересекающихся замкнутых перегородок между соседними магнитными поверхностями. В случае замкнутых линий тока, проводя такую перегородку по линии тока по аналогии с выраже-

нием (3. 8), получим следующее выражение для потока поля, нормального к линии тока:

$$d\Psi_n = cdp \oint \frac{dl}{j}. \quad (3. 11)$$

По аналогии с выражением (3. 9) можно получить условие

$$U_J = \int_{C_1}^{C_2} \frac{dl}{j} = \text{const}, \quad (3. 12)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — точки пересечения линии тока с контуром, который можно провести соответствующим образом на любой магнитной поверхности.

Для иллюстрации этого условия рассмотрим осесимметричный случай  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Пусть, кроме того, отлична от нуля лишь  $\varphi$ -компонента плотности тока ( $\mathbf{j} = j_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ ). В этом случае  $U_J = = 2\pi r/j_\varphi$ , т. е. в равновесной конфигурации плотность тока должна иметь вид  $j_\varphi = A(p)r$ , где, согласно выражению (3. 11),  $A(p) = = 2\pi c dp/d\Psi_n$ . Эта формула является частным случаем формулы для  $\varphi$ -компоненты плотности тока в осесимметричных равновесных конфигурациях (см. § 5).

Рассмотрим теперь циркуляции векторов  $\mathbf{B}$  и векторного потенциала магнитного поля  $\mathbf{A}$  ( $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ) по замкнутым контурам  $l_2$  и  $l_3$ . Согласно уравнению (1. 2) и определению вектора  $\mathbf{A}$ , на основании теоремы Стокса (учитывая, что обход  $l_3$  составляет с направлением  $l_2$  левовинтовую систему) имеем (см. рис. 4)

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}_3 = -\frac{4\pi}{c} J_2; \quad (3. 13)$$

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}_3 = -\Psi_2, \quad (3. 14)$$

где  $J_2$  и  $\Psi_2$  — полный ток и полный поток, пронизывающие контур  $l_3$ , проходящий вокруг магнитной оси. Поскольку  $J_2$  и  $\Psi_2$  не зависят от выбора контура  $l_3$  на данной магнитной поверхности, то и соответствующие циркуляции векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  не зависят от этого выбора. Это обстоятельство можно учесть, записав подинтегральные выражения в равенствах (3. 13) и (3. 14) в следующем виде:

$$\mathbf{B} d\mathbf{l}_3 = d\mathbf{v} - \frac{2J_2(p)}{c} d\omega; \quad (3. 15)$$

$$\mathbf{A} d\mathbf{l}_3 = d\chi - \Psi_2(p) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3. 16)$$

Здесь  $v$  и  $\chi$  — однозначные функции, а  $\omega$  — многозначная координата (аналог азимутального угла), увеличивающаяся на  $2\pi$  при каждом обходе контура  $l_3$ .

Циркуляцию векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  по контуру  $l_2$  обозначим следующим образом:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}_2 = \frac{4\pi}{c} I; \quad (3.17)$$

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}_2 = \Psi. \quad (3.18)$$

Ток  $I$  и поток  $\Psi$  в отличие от  $J_3$  и  $\Psi_3$  являются внешними относительно рассматриваемой магнитной поверхности (в частности, они включают в себя токи и потоки во внешних проводниках и магнитных сердечниках). Положительное направление  $I$  и  $\Psi$  противоположно положительному направлению  $J_3$  и  $\Psi_3$  внутри контур-магнитной оси. Обозначим через  $I_0$  и  $\Psi_0$  полный ток и полный поток, пронизывающие контур-магнитную ось. Тогда внешние ток и поток выразятся через внутренние следующим образом:

$$I = I_0 + J_3; \quad (3.19)$$

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_3. \quad (3.20)$$

Как  $J_3$ ,  $\Psi_3$ , так и  $I$  и  $\Psi$ , а следовательно, и циркуляции векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  не зависят от выбора контура  $l_2$  на данной магнитной поверхности. Подынтегральные выражения в формулах (3.17) и (3.18) можно по аналогии с выражениями (3.15) и (3.16) записать в виде

$$\mathbf{B} d\mathbf{l}_2 = dv + \frac{2I(p)}{c} d\varphi; \quad (3.21)$$

$$\mathbf{A} d\mathbf{l}_2 = d\chi + \Psi(p) \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad (3.22)$$

где  $\varphi$  — многозначная координата, увеличивающаяся на  $2\pi$  при обходе по контуру  $l_2$ .

Рассмотренные выше величины  $J_2$ ,  $\Psi_2$ ,  $J_3$ ,  $\Psi_3$ ,  $I$ ,  $\Psi$ ,  $\rho$ ,  $U$ ,  $U_J$  постоянны на каждой магнитной поверхности и являются функциями одна другой. По терминологии Крускала и Кулсруда [21], они являются «поверхностными» величинами. В любой равновесной конфигурации поверхностные величины связаны между собой определенным образом. Однако эта связь сохраняется неизменной лишь при условии идеальной проводимости плазмы. Реально это означает, что связь между поверхностными величинами можно считать неизменной лишь в течение промежутка времени, значительно меньшего характерного времени диссипации, роль которого, как правило, играет скин-время плазмы  $s = \frac{\pi\sigma a^2}{c^2}$ , где  $a$  — характерный поперечный размер тороидальной конфигурации. Если рассматриваются более длительные промежутки времени ( $t \geq s$ ), то необходимо учитывать изменение зависимости между поверхностными величинами во времени. В стационарных условиях, когда диссипативные процессы в каждом элементе объема подобраны так, что давление плазмы и магнитное поле в конфигурации не

меняются во времени, эта зависимость вполне определена (при данном механизме диссипации), но, как правило, чрезвычайно сложна.

#### § 4. Другая форма уравнения равновесия

Во введенной в § 3 системе координат векторное уравнение равновесия (1. 1) сводится к одному скалярному уравнению, являющемуся проекцией уравнения (1. 1) на нормаль к магнитной поверхности. Для получения скалярного уравнения умножим уравнение (1. 1) скалярно на  $d\mathbf{l}_1\delta V$ , где  $\delta V$  — элемент объема, ограниченный бесконечно близкими координатными поверхностями. Очевидно, можно написать, что

$$d\mathbf{l}_1\delta V = [\delta S_2\delta S_3], \quad (4. 1)$$

где  $\delta S_2$  и  $\delta S_3$  — элементы координатных поверхностей

$$\delta S_2 = [d\mathbf{l}_3d\mathbf{l}_1]; \quad \delta S_3 = [d\mathbf{l}_1d\mathbf{l}_2], \quad (4. 2)$$

Учитывая теперь соотношения

$$\nabla p d\mathbf{l}_1 = dp; \quad (4. 3)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{j}\mathbf{B}][\delta S_2\delta S_3] &= (\mathbf{j}\delta S_2)(\mathbf{B}\delta S_3) - (\mathbf{j}\delta S_3)(\mathbf{B}\delta S_2) = \\ &= \delta J_2\delta\Psi_3 - \delta J_3\delta\Psi_2, \end{aligned} \quad (4. 4)$$

вместо уравнения (1. 1) получим

$$dp\delta V = \frac{1}{c}(\delta J_2\delta\Psi_3 - \delta J_3\delta\Psi_2). \quad (4. 5)$$

При интегрировании этого уравнения по объему  $dV$  слоя, расположенного между поверхностями  $p = \text{const}$  и  $p + dp = \text{const}$ , можно получить уравнение [21]

$$dpdV = \frac{1}{c}(dJ_2d\Psi_3 - dJ_3d\Psi_2), \quad (4. 6)$$

где  $dJ_2$  и  $d\Psi_2$  — полный ток и полный магнитный поток, проходящие через замкнутую перегородку  $dS_2$ , расположенную на контуре  $l_3$ , а  $dJ_3$  и  $d\Psi_3$  — полный ток и полный магнитный поток, проходящие через перегородку  $dS_3$  на контуре  $l_2$ .

Рассмотрим некоторые применения формулы (4. 5)

Если контур  $l_2$  выбрать вдоль замкнутой силовой линии, то в этом случае  $\delta\Psi_3 = 0$ ,  $\delta J_3 \equiv \delta J_n$  (индекс  $n$  означает нормаль к силовой линии) и формула (4. 5) примет вид

$$dpdV = -\frac{1}{c}\delta J_n\delta\Psi. \quad (4. 7)$$

Отсюда нетрудно получить выведенную в § 3 формулу (3. 8) для тока, протекающего между магнитными поверхностями. С этой целью проинтегрируем выражение (4. 7) по длине силовой линии:

$$dp \int_{l_2} d\mathbf{l}_2\delta S_2 = -\frac{1}{c} \int_{l_2} \delta J_n\delta\Psi. \quad (4. 8)$$

Учитывая, что  $dl_2 = \frac{B}{B} dl$  и что вдоль пути интегрирования  $\delta\Psi = \mathbf{B} \delta \mathbf{S}_2 = \text{const}$ , из выражения (4. 8) по сокращении на  $\delta\Psi$  получим формулу, совпадающую с формулой (3. 8):

$$dp \oint \frac{dl}{B} = -\frac{1}{c} \int_{l_2} \delta J_n = -\frac{1}{c} dJ_n. \quad (4. 9)$$

Из сравнения этой формулы с выражением (4. 7) видно, что величина  $U = \oint \frac{dl}{B}$  представляет собой «удельный объем» магнитного поля (см. работу «Геометрия магнитного поля» в настоящем выпуске):

$$U = \frac{\delta V}{\delta\Psi}. \quad (4. 10)$$

Этот удельный объем играет большую роль в теории гидродинамической устойчивости плазмы (см. ниже работу «Гидромагнитная устойчивость плазмы»).

Если контур  $l_3$  выбрать вдоль замкнутой линии тока, то из уравнения (4. 5) совершенно аналогично можно получить формулы, содержащие «удельный объем тока».

Применим теперь формулу (4. 5) к осесимметричным конфигурациям  $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ . В качестве контура  $l_3$  в этом случае удобно взять меридиональное сечение тороидальной поверхности, а в качестве контура  $l_2$  — окружности, ортогональные к  $l_3$ , так что  $j_2 \equiv j_\varphi$ ,  $B_2 \equiv B_\varphi$ . Вместо  $J_3$  и  $\Psi_3$  удобно ввести внешние меридиональные ток  $I$  и поток  $\Psi$  в соответствии с формулами (3. 17) — (3. 20). Согласно формулам (3. 17) и (3. 18),  $I$  и  $\Psi$  непосредственно связаны с  $\varphi$ -компонентой магнитного поля и векторного потенциала, а именно:

$$B_\varphi = \frac{2I}{cr}; \quad A_\varphi = \frac{\Psi}{2\pi r}. \quad (4. 11)$$

Из уравнений  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  и  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  вытекает также связь меридиональной плотности тока и магнитного поля с  $I$  и  $\Psi$ :

$$j_3 = \frac{1}{2\pi r} [\nabla I e_\varphi]; \quad B_3 = \frac{1}{2\pi r} [\nabla \Psi e_\varphi]. \quad (4. 12)$$

Поскольку  $p$ ,  $I$  и  $\Psi$  являются поверхностными величинами, то можно записать:

$$p = p(\Psi); \quad I = I(\Psi). \quad (4. 13)$$

Входящие в уравнение равновесия (4. 5) величины с учетом осевой симметрии выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} \delta J_2 &= j_\varphi \delta S_2; & \delta \Psi_2 &= B_\varphi \delta S_2; \\ \delta \Psi_3 &= d\Psi \frac{d\varphi}{2\pi}; & \delta J_3 &= dI \frac{d\varphi}{2\pi}; \\ \delta V &= r \delta S_2 d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4. 14)$$

Подставляя формулы (4. 14) в уравнение (4. 5) и сокращая на  $\delta S_2 d\varphi/2\pi$ , найдем [10]

$$j_\varphi = A(\Psi)r + B(\Psi)\frac{1}{r}, \quad (4. 15)$$

где

$$A(\Psi) = 2\pi c \frac{dp(\Psi)}{d\Psi}; \quad (4. 16)$$

$$B(\Psi) = \frac{1}{c} \frac{dI^2(\Psi)}{d\Psi}. \quad (4. 17)$$

Из формулы (4. 15) непосредственно следует вывод о невозможности осесимметричной равновесной конфигурации без продольного тока. Действительно, полагая  $j_\varphi = 0$ , получаем  $B(\Psi)/A(\Psi) = -r^2$ . Отсюда следует, что  $\Psi$  есть функция только  $r$ , но не  $z$ , т. е. при  $j_\varphi = 0$  равновесная конфигурация может быть только однородным цилиндром.

Уравнение для функции  $\Psi$ , через которую в конечном итоге выражаются все остальные величины, получается из уравнения для векторного потенциала  $(\Delta A)_\varphi = -\frac{4\pi}{c} j_\varphi$ . В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{8\pi^2}{c} r j_\varphi = -\frac{8\pi^2}{c} \{A(\Psi)r^2 + B(\Psi)\}. \quad (4. 18)$$

Задавая конкретную зависимость  $A(\Psi)$  и  $B(\Psi)$ , можно, в принципе, решить это уравнение и затем по формулам (4. 16), (4. 17) и (4. 11), (4. 12) рассчитать распределение давления, тока и магнитного поля в равновесной конфигурации. Примеры решения этого уравнения для случая, когда  $A$  и  $B$  линейно зависят от  $\Psi$ , имеются в работах [10, 18, 27, 28, 30].

Чтобы составить представление о конфигурации магнитного поля при осевой симметрии, рассмотрим простейший случай  $A = \text{const}$ ,  $B = 0$ . В этом случае имеется решение

$$p = \frac{\Psi_0}{2\pi^2 R^4} (1 + \alpha^2) \Psi + \text{const};$$

$$\Psi = \Psi_0 \frac{r^2}{R^4} (2R^2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2). \quad (4. 19)$$

Примерный ход силовых линий изображен на рис. 6. Любую поверхность  $\Psi = \text{const}$  можно принять за поверхность, на которой  $p = 0$ , т. е. за границу плазмы. Как следует из решения, при  $\Psi/\Psi_0 > 0$  получаются ограниченные тороидальные конфигурации (форма сечения которых зависит от параметра  $\alpha$ ; например, при  $\alpha = 1$  поверхности  $\Psi = \text{const}$ , расположенные вблизи магнитной оси, имеют круговые сечения). Снаружи от поверхности с  $p = 0$  магнитное поле, необходимое для равновесия, определяется уравнением (4. 18) при  $A = B = 0$ .



Уравнения равновесия приводятся к одному уравнению, содержащему произвольные функции [аналогично уравнению (4. 18)], также и в случае винтовой симметрии, когда все величины вдоль винтовой линии, намотанной на цилиндр радиуса  $r$ , не меняются, но зависят от выбора винта на этом цилиндре, а также от  $r$ . Топология магнитных полей в равновесных конфигурациях с винтовой симметрией такая же, как и в случае вакуумных полей с той же симметрией (см. работы «Геометрия магнитного поля» и [29]).

### § 5. Вариационный принцип

Условия равновесия могут быть получены из вариационного принципа, т. е. из требования, чтобы вариация некоторого функционала  $Q$  обращалась в нуль. Функционал  $Q$  должен быть выбран так, чтобы при бесконечно малом виртуальном смещении  $\xi$  элементов плазмы его вариация имела вид

$$\delta Q = \int \xi \left\{ -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] \right\} dV. \quad (5. 1)$$

Обозначим через  $\delta Q^B$  и  $\delta Q^p$  магнитную и газодинамическую части этой вариации:

$$\delta Q^B = \frac{1}{c} \int \xi [\mathbf{j}\mathbf{B}] dV; \quad (5. 2)$$

$$\delta Q^p = - \int \xi \nabla p dV. \quad (5. 3)$$

Из электродинамики известно, что вариация (5. 2) может быть получена, если варьируется:

А) функционал — магнитная энергия, взятая с минусом,

$$Q^B = - \int \frac{B^2}{8\pi} dV, \quad (5. 4)$$

при условии неизменности магнитных потоков; в дифференциальной форме это условие выражается хорошо известным уравнением

$$[\delta \mathbf{B} = \text{rot} [\xi \mathbf{B}]]; \quad (5. 5)$$

Б) функционал — магнитная энергия,

$$Q^B = \int \frac{B^2}{8\pi} dV, \quad (5. 6)$$

при условии неизменности токов; в дифференциальной форме это условие записывается по аналогии с уравнением (5. 5):

$$\delta \mathbf{j} = \text{rot} [\xi \mathbf{j}]. \quad (5. 7)$$

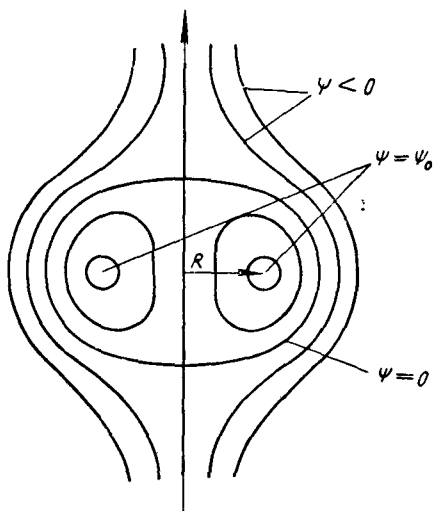


Рис. 6

Действительно, варьируя выражение (5. 4), имеем

$$\delta Q^B = - \int \frac{\mathbf{B} \delta \mathbf{B}}{4\pi} dV. \quad (5. 8)$$

Подставляя сюда  $\delta \mathbf{B}$  из уравнения (5. 5), на основании тождества  $\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} + \operatorname{div} [\mathbf{a}\mathbf{b}]$  получим

$$\delta Q^B = - \frac{1}{4\pi} \int \{ [\xi \mathbf{B}] \operatorname{rot} \mathbf{B} + \operatorname{div} [[\xi \mathbf{B}] \mathbf{B}] \} dV. \quad (5. 9)$$

Второй член справа по теореме Гаусса приводится к поверхностному интегралу. Для упрощения вывода будем считать, что плазма простирается до поверхности идеальных проводников или до бесконечности (это предположение не ограничивает общности результата). Тогда поверхностный интеграл обратится в нуль. Переставляя сомножители в смешанном произведении векторов в оставшемся подинтегральном выражении, получаем

$$\delta Q^B = \frac{1}{4\pi} \int \xi [\operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}] dV, \quad (5. 10)$$

что, очевидно, совпадает с выражением (5. 2).

Покажем теперь, как вариация (5. 2) получается из формул (5. 6) — (5. 7). Вариация функционала (5. 6) имеет вид

$$\delta Q^B = \int \frac{\mathbf{B} \delta \mathbf{B}}{4\pi} dV. \quad (5. 11)$$

Вариация  $\delta \mathbf{B}$  связана с вариацией  $\delta \mathbf{j}$  (5. 7) уравнением (1. 2):  $\operatorname{rot} \delta \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \delta \mathbf{j}$ . Отсюда находим:

$$\delta \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} [\xi \mathbf{j}] + \nabla \varphi, \quad (5. 12)$$

так что

$$\delta Q^B = \int \left\{ \frac{1}{c} \xi [\mathbf{j} \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{B} \varphi \right\} dV. \quad (5. 13)$$

Здесь второй член справа также приводится к поверхностному интегралу и исчезает. Остающееся выражение совпадает с выражением (5. 2).

Вариация  $\delta Q^p$  (5. 3) получается, если варьируется взятая с минусом энергия плазмы

$$Q^p = - \int \frac{p}{\gamma - 1} dV \quad (5. 14)$$

при условии неизменности энтропии каждого «жидкого» элемента объема плазмы и сохранения полного числа частиц в нем. В дифференциальной форме это условие имеет вид

$$\delta p = - \xi \nabla p - \gamma p \operatorname{div} \xi. \quad (5. 15)$$

Поскольку показатель адиабаты  $\gamma$  не входит в окончательный результат, то его, очевидно, можно выбирать совершенно произвольно. В зависимости от выбора  $\gamma$  возможны, например, следующие случаи:

$$\text{а) } \gamma = 0; \quad Q^p = \int p dV. \quad (5. 16)$$

При  $\gamma = 0$  остается неизменным давление каждого жидкого элемента объема  $dp = 0$  или

$$\delta p = -\xi \nabla p; \quad (5. 17)$$

б)  $\gamma = 1$  (условие изотермичности);

$$Q^p = -\int p \ln p dV; \quad (5. 18)$$

$$\delta p = -\operatorname{div} p \xi. \quad (5. 19)$$

Доказательство правильности выбора этих функционалов весьма простое. Рассмотрим, например, случай «б». Варьируя выражение (5. 18) с учетом условия (5. 19) и при условии обращения в нуль на границе объема давления плазмы  $p$  или нормальной компоненты смещения  $\xi$ , находим

$$\begin{aligned} \delta Q^p &= \int (\ln p + 1) \operatorname{div} (p \xi) dV = \\ &= \int \left\{ \operatorname{div} \left[ \xi p \ln \frac{p}{e} \right] - \xi \nabla p \right\} dV = - \int \xi \nabla p dV. \end{aligned} \quad (5. 20)$$

Итак, в качестве общего функционала  $Q$  можно брать любую комбинацию функционалов  $Q^B$  и  $Q^p$ , определяемых выражениями (5. 4), (5. 6) и (5. 14), (5. 16), (5. 18), при соответствующих дополнительных условиях.

Наряду с первой вариацией функционала  $\delta Q = \int \xi \mathbf{F} dV$ , определяющей силу  $\mathbf{F} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}]$ , действующую на произвольный элемент объема плазмы, можно рассматривать вторую вариацию функционала  $\delta^2 Q$ , которая при условии  $\delta Q = 0$  (т. е. для равновесной конфигурации) определяет силу, появляющуюся при отклонении элемента объема от положения равновесия. По знаку этой силы можно определить, является ли равновесие устойчивым или неустойчивым. Вычисление второй вариации с целью исследования устойчивости должно производиться с учетом тех реальных физических условий, при которых возможны рассматриваемые отклонения (тогда как дополнительные условия, используемые при вычислении первой вариации  $\delta Q$ , могут не иметь ничего общего с реальными условиями). Если физические условия, которые используются для вычисления  $\delta^2 Q$ , совпадают с теми дополнительными условиями, которые используются при вычислении  $\delta Q$ , то соответствующий функционал  $Q$ , взятый с минусом, имеет смысл потенциальной энергии  $W = -Q$ , так как в этом случае

сила  $\mathbf{F}$  и ее вариация  $\delta\mathbf{F}$  (при условии  $\mathbf{F} = 0$ ) связаны с  $W$  как с потенциальной энергией:

$$\delta W = - \int \mathbf{F} \xi dV; \quad \delta^2 W = - \int \delta \mathbf{F} \xi dV. \quad (5. 21)$$

Обычно при исследовании гидромагнитной устойчивости плазму можно считать идеально проводящей и адиабатичной (для возмущений!). Этим условиям соответствует выбор функционалов  $Q^B$  и  $Q^p$ , выраженных формулами (5. 4) и (5. 14). При этом роль потенциальной энергии играет полная энергия плазмы и магнитного поля:

$$W = - Q = \int \left( \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{8\pi} \right) dV. \quad (5. 22)$$

Для конкретных расчетов равновесных конфигураций удобным является выбор функционала  $Q$  из комбинации «Б» и «а»:

$$Q = \int \left( \frac{B^2}{8\pi} + p \right) dV. \quad (5. 23)$$

Здесь варьирование должно производиться при условии неизменности токов и давления в каждом «жидком» элементе объема.

В случае тороидальных конфигураций условия постоянства потоков (или токов), используемые при варьировании функционалов  $Q^B$ , соответствуют заданию для каждой магнитной поверхности двух независимых потоков  $\Psi_2, \Psi_3$  (или токов  $J_2, J_3$ ) внутри данной поверхности, проходящих через перегородки, проведенные на независимых контурах  $l_2$  и  $l_3$ . Соответствующие доказательства вариационного принципа даны Крускалом и Кулсрудом [21] и Градом и Рубиным [22]. Явное выражение магнитной энергии  $W^B = \int \frac{B^2}{8\pi} dV$ , входящей в функционал  $Q^B$ , может быть записано в следующем виде:

$$W^B = \frac{1}{2c} \int \{ (I_0 + J_3) d\Psi_2 - J_2 d\Psi_3 \} \quad (5. 24)$$

или

$$W^B = \frac{1}{2c} \int \{ (\Psi_0 + \Psi_3) dJ_2 - \Psi_2 dJ_3 \} + \frac{1}{2c} \sum J_e \Psi_e. \quad (5. 25)$$

Здесь  $J_e$  и  $\Psi_e$  — токи и потоки во внешних контурах. Для доказательства соотношения (5. 24) заметим, что плотность магнитной энергии, заключенная между двумя соседними магнитными поверхностями, может быть записана так:

$$dW^B = \int_{l_2, l_3} B^2 \delta V = \int_{l_2, l_3} \{ (\mathbf{B} \delta \mathbf{S}_2) (\mathbf{B} d l_2) + (\mathbf{B} \delta \mathbf{S}_3) (\mathbf{B} d l_3) \}. \quad (5. 26)$$

С помощью соотношений (3. 15) и (3. 21) элементарно производится интегрирование по магнитной поверхности, приводящее к подинтегральному выражению в формуле (5. 24). Для доказа-

тельства соотношения (5. 25) удобно исходить из выражения магнитной энергии через векторный потенциал  $W^B = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV$ . Для объема между двумя магнитными поверхностями имеем

$$\int_{I_2, I_3} \mathbf{j} \mathbf{A} \delta V = \int_{I_2, I_3} \{(\mathbf{j} \delta S_2)(\mathbf{A} d I_2) + (\mathbf{j} \delta S_3)(\mathbf{A} d I_3)\}. \quad (5. 27)$$

Выполняя с помощью соотношений (3. 16) и (3. 22) интегрирование по магнитной поверхности, получим подынтегральное выражение в формуле (5. 25). Интегрирование по объему внешних проводников производится обычным образом и дает сумму, входящую в формулу (5. 25).

В качестве примера применения вариационного принципа выведем условия равновесия тонкого тороидального плазменного шнура (при наличии продольного магнитного поля) по малому и большому радиусам тора  $a, R$  ( $a \ll R$ ). Используем функционал (5. 23), который удобно разбить на три части:

$$Q = Q_2^B + Q_3^B + Q^P. \quad (5. 28)$$

Здесь  $Q_2^B$  — магнитная энергия, связанная с меридиональным, а  $Q_3^B$  — с продольными магнитными полями:

$$Q_2^B = \frac{L_2 J_2^2}{2c^2} + \frac{M_2 J_2 J_{2e}}{c^2} + \frac{L_{2e} J_{2e}^2}{2c^2}; \quad (5. 29)$$

$$Q_3^B = \frac{L_3 J_3^2}{2c^2} + \frac{M_3 J_3 J_{3e}}{c^2} + \frac{L_{3e} J_{3e}^2}{2c^2}; \quad (5. 30)$$

$L_2$  самоиндукция кольцевого тока

$$L_2 = 4\pi R \left( \ln \frac{8R}{a} - 2 + \frac{l_i}{2} \right) \quad (5. 31)$$

( $l_i$  — внутренняя индуктивность распределенного тока, отнесенная к единице длины шнура);  $J_{2e}, L_{2e}$  — ток и индуктивность первичного (внешнего) контура;  $\Psi = \frac{1}{c} M J_{2e}$  — внешний поток, проходящий через отверстие тора, который при условии  $a \ll R$  можно записать так:

$$\Psi = \int_0^R B_z 2\pi r dr. \quad (5. 32)$$

Отсюда, в частности вытекает:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial R} = 2\pi R B_z(R); \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a} = 0. \quad (5. 33)$$

Меридиональный ток  $J_3$  в плазменном шнуре создает магнитное поле, равное разности общего внутреннего продольного поля  $B_i$  и внешнего поля  $B_e$ , так что по определению

$$\frac{L_3 J_3^2}{2c^2} = \frac{(\bar{B}_i - B_e)^2}{8\pi} V; \quad (5.34)$$

$$\frac{M_3 J_3 J_{ze}}{c^2} = \frac{(\bar{B}_i - B_e) B_e}{4\pi} V. \quad (5.35)$$

Черта в формулах (5.34) и (5.35) означает усреднение по объему плазменного шнура  $V$ , которое при условии  $a \ll R$  эквивалентно усреднению по сечению шнура. Объем плазменного шнура равен

$$V = 2\pi^2 R a^2. \quad (5.36)$$

Функционал  $Q^p$ , варьирование которого должно производиться при неизменном давлении, удобно записать в виде

$$Q^p = \bar{p}V, \quad (5.37)$$

где  $\bar{p}$  — усредненное по объему (по сечению) давление.

Коэффициенты самоиндукции и взаимоиндукции  $L_3$  и  $M_3$  в идеализированном случае поверхностного тока в плазменном шнуре определяются формулой  $L_3 = M_3 = 4\pi (R - \sqrt{R^2 - a^2})$ . При условии  $a \ll R$  они совпадают с соответствующими коэффициентами для прямых одновитковых соленоидов  $L_3 = M_3 = \frac{2\pi a^2}{R}$ .

В общем случае распределенного тока эти коэффициенты зависят от распределения магнитного поля по сечению плазменного шнура. Однако для дальнейших расчетов знания их точного значения не потребуется. Достаточно учесть лишь зависимость этих коэффициентов от  $a$  и  $R$ :  $L_3 \sim M_3 \sim \frac{a^2}{R}$ . С учетом этой зависимости имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial a} &= \frac{2L_3}{a}; & \frac{\partial M_3}{\partial a} &= \frac{2M_3}{a}; \\ \frac{\partial L_3}{\partial R} &= -\frac{L_3}{R}; & \frac{\partial M_3}{\partial R} &= -\frac{M_3}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Поэтому вариация  $Q$  по  $a$  и  $R$  может быть выражена с учетом связей (5.38) и (5.34), (5.35) через усредненные по сечению магнитные поля.

Вычисляя теперь производные  $\frac{\partial Q}{\partial a}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial R}$  при постоянных токах и постоянном давлении, находим силы, действующие соответственно по малому и большому радиусам тора:

$$F_a = \frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{2V}{a} \left\{ -\frac{B_a^2}{8\pi} + \frac{\bar{B}_i^2 - B_e^2}{8\pi} + \bar{p} \right\}; \quad (5.39)$$

$$R = \frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{V}{R} \left\{ \frac{B_a^2}{4\pi} \left( \ln \frac{8R}{a} - 1 + \frac{l_i}{2} \right) + \bar{p} + \frac{B_e^2 - \bar{B}_i^2}{8\pi} + \frac{B_z B_a R}{2\pi a} \right\}, \quad (5.40)$$

где

$$B_a = 2J_2/ca.$$

Условие  $F_a = 0$  приводит к уравнению баланса давлений, такому же, как и в прямом шнуре:

$$\bar{p} = \frac{B_a^2}{8\pi} + \frac{B_e^2 - \bar{B}_i^2}{8\pi}. \quad (5.41)$$

Условие  $F_R = 0$  определяет внешнее поле (перпендикулярное плоскости тора), необходимое для удержания плазменного шнура в равновесии,

$$B_z = -\frac{a}{2R} B_a \left\{ \ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2} + \frac{8\pi\bar{p}}{B_a^2} \right\}. \quad (5.42)$$

Здесь входившая в формулу (5.40) разность  $B_e^2 - \bar{B}_i^2$  уже исключена с помощью уравнения баланса давлений (5.41).

Заметим, что если давление вне тора равно  $p_e$  (а не нулю), то в выражениях (5.41) и (5.42) вместо  $\bar{p}$  войдет разность  $\bar{p} - p_e$ . Если  $p_e > \bar{p}$ , то равновесие возможно и без внешнего поля (т. е. при  $B_z = B_e = 0$ ). Условия равновесия принимают вид [36]

$$B_a^2 = \frac{8\pi(p_e - \bar{p})}{\ln \frac{8R}{a} - \frac{3}{2} + \frac{l_i}{2}}; \quad (5.43)$$

$$\bar{B}_i^2 = B_a^2 \left( \ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i - 1}{2} \right). \quad (5.44)$$

Этими формулами определяется магнитное поле, находящееся в равновесии внутри проводящей среды, наподобие магнитного поля в солнечных пятнах. Если принять гипотезу о том, что солнечные пятна являются поперечным «срезом» кольца с магнитным полем, всплывшего на поверхность из недр Солнца, то условие (5.44) определяет связь продольного магнитного поля в пятне с поперечным.

Можно показать, что непосредственное решение дифференциальных уравнений (1.1) — (1.3), описывающих равновесие, приводит точно к тем же формулам (5.42) — (5.44).

## § 6. Равновесие в некоторых конкретных системах

Задача получения высокотемпературной плазмы требует создания условий, при которых был бы невозможен контакт плазмы со стенками сосуда, диафрагмами, измерительными приборами и т. п. Идеальным с точки зрения удержания плазмы мог быть тот случай, когда магнитное поле с находящейся в нем плазмой окружено сплошным идеально проводящим кожухом. Поверхность кожуха автоматически совпадала бы с магнитной поверхностью равновесной конфигурации, на которой давление плазмы равно нулю (т. е. практически пренебрежимо мало по сравнению со средним

давлением). Однако наличие в кожухе щелей, необходимых для введения в рабочий объем электрических и магнитных полей, заставляет для улучшения вакуумных условий делать дополнительную вакуумную камеру. Тем самым плазма оказывается удаленной от проводящего кожуха, ее граница получает возможность перемещаться; при соприкосновении со стенками камеры плазма, по всей вероятности, должна «счищаться» со всех магнитных поверхностей, пересекающих стенку. Поэтому практически важным является вопрос о равновесном положении плазмы в различных системах, предназначенных для удержания высокотемпературной плазмы.

Рассмотрим равновесие в тороидальных системах типа Токамак, Зета и других, основанных на токовом удержании. В таких системах равновесие возможно и при осевой симметрии, что существенно упрощает расчет.

В случае малой кривизны тора условия равновесия можно получить, не находя распределения полей внутри плазменного шнура, если между плазмой и кожухом имеется область низкой проводимости, где плотность электрического тока можно полагать равной нулю. При наличии такой области можно ввести понятие «поверхности плазмы», определив ее как магнитную поверхность, на которой плотность тока равна нулю (такое определение неоднозначно, однако полученные ниже результаты будут инвариантны относительно выбора поверхности плазмы). Если известно магнитное поле на этой поверхности, то с помощью уравнений Максвелла можно найти магнитное поле между плазмой и кожухом, который должен совпадать с одной из магнитных поверхностей; тем самым положение плазменного шнура относительно кожуха будет определено. Чтобы найти распределение магнитного поля на магнитной поверхности, воспользуемся интегральными соотношениями. Одним из таких соотношений является теорема вириала, примененная к объему, ограниченному рассматриваемой магнитной поверхностью. Учитывая, что на магнитной поверхности  $\mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ , из выражения (2. 8) получаем:

$$\int \left( 3p + \frac{B^2}{8\pi} \right) dV = \int \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{r} dS. \quad (6. 1)$$

Другим интегральным соотношением является уравнение равновесия в интегральной форме

$$\int \left\{ \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) dS - \frac{\mathbf{B} (\mathbf{B} d\mathbf{S})}{4\pi} \right\} = 0, \quad (6. 2)$$

примененное к объему, заключенному внутри данной магнитной поверхности между бесконечно близкими меридиональными поверхностями  $\varphi = \text{const}$  и  $\varphi + d\varphi = \text{const}$ . Проекция этого уравнения на экваториальную плоскость имеет вид

$$\int \left( p + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_\varphi^2}{8\pi} \right) dS_\varphi = \int \left( p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{e}_r dS, \quad (6. 3)$$



где  $dS_\varphi$  — элемент поверхности меридионального сечения. Введем в этом сечении полярные координаты  $\omega, \varrho$ , связанные с цилиндрическими  $r, z$  соотношениями

$$r = R + \varrho \cos \omega; \quad z = \varrho \sin \omega. \quad (6.4)$$

Предположим, что  $\varrho \ll R$  и ограничимся первым приближением разложения по  $\varrho/R$ . Если сечение кожуха имеет форму круга, то в этом приближении магнитные поверхности равновесной конфигурации образуют систему вложенных торов с круглыми (неконцентрическими) сечениями. Начало полярной системы координат выберем в центре сечения рассматриваемой магнитной поверхности, так что  $R$  — это расстояние от оси симметрии до этого центра. Радиус сечения обозначим через  $a$ . Тогда

$$\begin{aligned} dS_\varphi &= \varrho d\varrho d\omega; \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_S = (R + \varrho \cos \omega) \varrho \cos \omega d\omega d\varphi; \\ dV &= (R + \varrho \cos \omega) \varrho d\varrho d\omega d\varphi; \\ r dS &= (R + \varrho \cos \omega) (R \cos \omega + \varrho) \varrho d\omega d\varphi. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Распределение продольного магнитного поля на магнитной поверхности в соответствии с формулой (4.11)

$$B_\varphi = \frac{2I(\rho_a)}{cr} \approx \frac{2I(\rho_a)}{cR} \left( 1 - \frac{\varrho}{R} \cos \omega \right) = B_e(a) \left( 1 - \frac{\varrho}{R} \cos \omega \right). \quad (6.6)$$

Здесь  $B_e(a)$  — значение продольного поля при  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Искомое азимутальное поле запишем в виде

$$B_\omega = B_a \left( 1 + \frac{a}{R} \Lambda \cos \omega \right), \quad (6.7)$$

где  $B_a = 2J/ca$ . Входящий в соотношения (6.1) и (6.3) квадрат радиального поля  $B_\varrho^2$  (в качестве составляющей полного квадрата магнитного поля  $B^2$ ) — величина второго порядка малости и потому опускается. Подставляя теперь выражения (6.5) — (6.7) в соотношения (6.1) и (6.3), получаем два условия:

$$3(\bar{p} - p_a) = 3 \frac{B_a^2}{8\pi} + \frac{B_e^2 - \bar{B}_i^2}{8\pi} - \frac{\bar{B}_\omega^2}{8\pi} + 2\Lambda \frac{B_a^2}{8\pi}; \quad (6.8)$$

$$\bar{p} - p_a = \frac{B_a^2}{8\pi} - \frac{B_e^2 - \bar{B}_i^2}{8\pi} - \frac{\bar{B}_\omega^2}{8\pi} + 2\Lambda \frac{B_a^2}{8\pi}. \quad (6.9)$$

Здесь  $B_i$  — внутреннее продольное, а  $B_\omega$  — азимутальное поле; черта сверху означает усреднение по сечению шнура.

Вычитая условие (6.9) из условия (6.8), получаем уравнение баланса давлений

$$\bar{p} - p_a + \frac{\bar{B}_i^2 - B_e^2}{8\pi} = \frac{B_a^2}{8\pi}. \quad (6.10)$$

Исключая теперь с помощью этого соотношения разность  $B_e^2 - \bar{B}_i^2$  из условия (6. 8) или (6. 9), находим величину  $\Lambda$ , характеризующую распределение азимутального магнитного поля вдоль магнитной поверхности:

$$\Lambda(a) = \frac{8\pi(\bar{p} - \rho_a)}{B_a^2} + \frac{l_i}{2} - 1, \quad (6. 11)$$

где  $l_i = \frac{\bar{B}_\omega^2}{B_a^2}$  — внутренняя индуктивность (на единицу длины) продольного тока. Формулы (6. 7), (6. 11) применимы к любой магнитной поверхности рассматриваемой конфигурации. Ниже они применяются к поверхности плазмы, т. е. к такой магнитной поверхности, вне которой плотность тока равна нулю и магнитное поле определяется уравнениями  $B = \nabla\Phi$ ,  $\nabla^2\Phi = 0$ . Решаются эти уравнения весьма просто. В первом приближении по  $q/R$  вакуумное магнитное поле, удовлетворяющее условию непрерывности на поверхности плазмы, определяется формулами

$$B_\omega = B_a \frac{a}{q} + B_a \frac{a}{2R} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{q^2}\right) \left(\Lambda + \frac{1}{2}\right) + \ln \frac{q}{a} - 1 \right] \cos \omega; \quad (6. 12)$$

$$B_q = \frac{a}{2R} B_a \left[ \left(1 - \frac{a^2}{q^2}\right) \left(\Lambda + \frac{1}{2}\right) + \ln \frac{q}{a} \right] \sin \omega. \quad (6. 13)$$

Пусть  $b$  — радиус сечения идеально проводящего кожуха,  $\Delta$  — расстояние между центрами сечений кожуха и поверхности плазмы. Тогда уравнение поверхности кожуха и нормаль  $\mathbf{n}$  к ней выражаются формулами (предполагаем  $\Delta \ll b$ )

$$\mathbf{q} = b - \Delta \cos \omega; \quad \mathbf{n} = \left\{ 1, 0, -\frac{\Delta}{b} \sin \omega \right\}. \quad (6. 14)$$

Величина смещения  $\Delta$  плазменного шнура относительно кожуха определяется из условия обращения в нуль нормальной компоненты магнитного поля на кожухе  $B_q^{(1)} - B_\omega^0 \frac{\Delta}{b} \sin \omega = 0$ , откуда  $\Delta = \frac{b^2}{2R} \left\{ \ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \right\}$ . Если в объеме имеется внешнее поле  $B_0$ , перпендикулярное к плоскости тора, то эффективным граничным условием на поверхности кожуха будет

$$B_q^{(1)} - B_\omega^0 \frac{\Delta}{b} \sin \omega = B_0 \sin \omega. \quad (6. 15)$$

Отсюда для величины смещения получаем [36]

$$\frac{\Delta}{b} = \frac{b}{2R} \left\{ \ln \frac{b}{a} + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left(\frac{8\pi\bar{p}}{B_a^2} + \frac{l_i}{2} - \frac{1}{2}\right) \right\} - \frac{B_0}{B_b}, \quad (6. 16)$$

где  $B_b = 2J/cb$ . Отношение  $B_0/B_b$ , согласно принятой системе отсчета, положительно, когда направление внешнего поля  $B_0$

совпадает с направлением поля, создаваемого током  $J$  на внешней стороне плазменного шнура.

Использованное при выводе формулы (6. 16) предположение об идеальной проводимости кожуха справедливо, когда глубина проникновения магнитного поля за время процесса  $t$  в стенки кожуха мала по сравнению с их толщиной  $d$  (которая предполагается малой:  $d \ll b$ ), т. е.

$$\frac{c^2 t}{4\pi\sigma_{\kappa}} \ll d^2 \quad (6. 17)$$

( $\sigma_{\kappa}$  — электропроводность кожуха). При условии, противоположном условию (6. 17), шнур с током будет двигаться наружу со скоростью  $v$ , такой, чтобы индуцируемые в кожухе токи создавали необходимое для удержания поле (5. 42). Поверхностная плотность индуцируемых при движении шнура токов равна  $i_{\varphi} = i \cos \omega = \frac{1}{c} \sigma_{\kappa} v_{\varphi} B_b d = \frac{\sigma_{\kappa}}{c} v B_b d \cos \omega$ . Этот ток вызывает магнитное поле  $B_z = \frac{2\pi}{c} i$ . Отсюда с учетом условия равновесия (5. 42) определяем характерную скорость движения  $v$  и масштаб времени удержания:

$$t_{уд} = \frac{b}{v} = \frac{4\pi\sigma_{\kappa} R d}{c^2} \left( \ln \frac{8R}{a} + \frac{8\pi p}{B_a^2} + \frac{l_l}{2} - \frac{3}{2} \right). \quad (6. 18)$$

Из формулы (6. 16) видно, что при изменении давления плазмы, силы тока и распределения тока по сечению меняется и величина смещения плазменного шнура, что является одним из серьезных недостатков тороидальной системы с токовым удержанием. Избежать этого недостатка можно было бы при автоматическом регулировании величины внешнего поля  $B_0$ .

Распределение магнитного поля внутри плазменного шнура зависит от распределения плотности тока, которое определяется в конечном итоге диссипативными процессами в плазме и, как правило, меняется во времени. Если распределение величин, характеризующих равновесие в нулевом приближении (т. е. в цилиндрическом плазменном шнуре), известно, то тороидальные поправки к давлению плазмы, магнитному полю и плотности тока находятся сравнительно просто. Используем систему координат  $\varrho, \varphi, \omega$ , в которой  $\varrho$  отсчитывается от окружности радиуса  $R$ , причем на этой окружности  $B_{\omega} = 0$  (магнитная ось). В этой системе координат уравнение магнитной поверхности с радиусом сечения  $\varrho_0$  будет

$$\varrho = \varrho_0 - \Delta(\varrho_0) \cos \omega. \quad (6. 19)$$

Пусть  $B_{\omega}^{(1)}(\varrho, \omega)$  — тороидальная поправка к азимутальному полю в этой системе координат. Тогда тороидальная поправка к азимутальному полю на магнитной поверхности

$$\delta B_{\omega} = B_{\omega}^{(1)} + \delta\varrho \frac{dB_{\omega}^0}{d\varrho} = B_{\omega}^{(1)}(\varrho_0, \omega) - \Delta(\varrho_0) \cos \omega \frac{dB_{\omega}^0}{d\varrho}. \quad (6. 20)$$

Но из выражения (6. 7) следует, что  $\delta B_{\omega}(\varrho_0, \omega) = B_{\omega}^0(\varrho_0) \frac{\varrho_0}{R} \times \times \Lambda(\varrho_0) \cos \omega$ . Следовательно,

$$B_{\omega}^{(1)}(\varrho, \omega) = \left[ B_{\omega}^0(\varrho) \frac{\varrho}{R} \Lambda(\varrho) + \Delta(\varrho) \frac{dB_{\omega}^0(\varrho)}{d\varrho} \right] \cos \omega \quad (6. 21)$$

Поскольку  $\Psi$  и  $p$  — поверхностные величины, то для них  $\delta\Psi = \delta p = 0$ , поэтому

$$\Psi^{(1)}(\varrho, \omega) = \Delta(\varrho) \frac{d\Psi^0}{d\varrho} \cos \omega = 2\pi R B_{\omega}^0(\varrho) \Delta(\varrho) \cos \omega; \quad (6. 22)$$

$$p^{(1)}(\varrho, \omega) = \Delta(\varrho) \frac{dp^0}{d\varrho} \cos \omega. \quad (6. 23)$$

Зная  $\Psi = \Psi^0 + \Psi^{(1)}$ , можно найти  $B_{\varrho}^{(1)}$ :

$$B_{\varrho}^{(1)}(\varrho, \omega) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\varrho \partial \omega} = \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho} B_{\omega}^0(\varrho) \sin \omega. \quad (6. 24)$$

Компоненты плотности поперечного тока выражаются совершенно аналогично компонентам  $B_{\varrho}^{(1)}$  и  $B_{\omega}^{(1)}$  поперечного магнитного поля, поэтому тороидальные поправки можно написать сразу по аналогии с выражениями (6. 24) и (6. 21):

$$j_{\varrho}^{(1)}(\varrho, \omega) = \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho} j_{\omega}^0(\varrho) \sin \omega; \quad (6. 25)$$

$$j_{\omega}^{(1)}(\varrho, \omega) = \left[ j_{\omega}^0(\varrho) \frac{\varrho}{R} \Lambda(\varrho) + \Delta(\varrho) \frac{dj_{\omega}^0(\varrho)}{d\varrho} \right] \cos \omega. \quad (6. 26)$$

Чтобы получить поправки к продольным компонентам плотности тока и магнитного поля, запишем сначала выражения для поправок на магнитной поверхности. Из выражения (6. 6) для продольного поля следует

$$\delta B_{\varphi}(\varrho, \omega) = -B_{\varphi}^0(\varrho) \frac{\varrho}{R} \cos \omega.$$

Тороидальная поправка к плотности продольного тока легко получится из выражения (4. 15), если переписать его в виде

$$j_{\varphi} = \frac{R^2 A(\Psi) + B(\Psi)}{r} + A(\Psi) \left( r - \frac{R^2}{r} \right). \quad (6. 27)$$

Первое слагаемое здесь в рассматриваемом приближении можно записать как  $j_{\varphi}^0(\varrho) \left( 1 - \frac{\varrho}{R} \cos \omega \right)$ , а второе — в виде

$$2\pi c \frac{dp}{d\Psi} 2\varrho \cos \omega = \frac{2c\varrho}{RB_{\omega}^0(\varrho)} \frac{dp^0(\varrho)}{d\varrho}.$$

Таким образом,

$$\delta j_{\varphi}(\varrho, \omega) = \frac{\varrho}{R} \left[ \frac{2c}{B_{\omega}^0(\varrho)} \frac{dp^0(\varrho)}{d\varrho} - j_{\varphi}^0(\varrho) \right] \cos \omega. \quad (6.28)$$

По известным  $\delta B_{\varphi}$  и  $\delta j_{\varphi}$  поправки  $B_{\varphi}^{(1)}$  и  $j_{\varphi}^{(1)}$  определяются из формул, аналогичных формуле (6.21):

$$B_{\varphi}^{(1)}(\varrho, \omega) = \left[ -B_{\varphi}^0(\varrho) \frac{\varrho}{R} + \Delta \varrho \frac{dB_{\varphi}^0(\varrho)}{d\varrho} \right] \cos \omega; \quad (6.29)$$

$$j_{\varphi}^{(1)}(\varrho, \omega) = \left\{ \left[ \frac{2c}{B_{\omega}^0(\varrho)} \frac{dp^0(\varrho)}{d\varrho} - j_{\varphi}^0(\varrho) \right] \frac{\varrho}{R} + \right. \\ \left. + \Delta(\varrho) \frac{dj_{\varphi}^0(\varrho)}{d\varrho} \right\} \cos \omega. \quad (6.30)$$

Таким образом, все тороидальные поправки выражаются непосредственно через смещение  $\Delta(\varrho)$ . В свою очередь это смещение можно выразить с помощью введенного выше коэффициента асимметрии азимутального магнитного поля  $\Lambda(\varrho)$ . Чтобы получить формулу для смещения, выразим поправку  $B_{\omega}^{(1)}(\varrho, \omega)$  по формуле (4.12):

$$B_{\omega}^{(1)}(\varrho, \omega) = \left\{ -\frac{\varrho}{R} B_{\omega}^0(\varrho) + \frac{d}{d\varrho} [B_{\omega}^0(\varrho) \Delta(\varrho)] \right\} \cos \omega. \quad (6.31)$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (6.21), находим уравнение для  $\Delta(\varrho)$ , из которого следует, что

$$\Delta(\varrho) = \int_0^{\varrho} \frac{\varrho'}{R} [\Lambda(\varrho') + 1] d\varrho'.$$

Для определения расстояния между центрами сечений двух магнитных поверхностей отсюда получится формула

$$\Delta(b, a) = \int_a^b \frac{\varrho}{R} [\Lambda(\varrho) + 1] d\varrho, \quad (6.32)$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы выбранных сечений. По этой формуле нетрудно найти выражение для смещения вакуумных поверхностей (6.16).

Применим полученные формулы к простейшему случаю, когда в нулевом приближении плотность продольного тока однородна по сечению, а давление имеет параболическое распределение  $p^0(\varrho) = p_0 \left( 1 - \frac{\varrho^2}{a^2} \right)$ . В этом случае, как нетрудно видеть,

$$\frac{8\pi [p_0(\varrho) - p_0(\varrho)]}{B_{\omega}^{02}(\varrho) \varrho^2} = \eta = \text{const}; \quad l_i = \frac{1}{2},$$

так что  $\Lambda = \eta - \frac{3}{4}$  и

$$\Delta(\varrho) = \frac{\varrho^2}{2R} \left( \eta + \frac{1}{4} \right). \quad (6.33)$$

Из формул (6.21), (6.23) и (6.24) находим:

$$B_{\varrho}^{(1)}(\varrho, \omega) = \frac{a}{2R} B_{\omega}^0(a) \left( \eta + \frac{1}{4} \right) \frac{\varrho}{a} \sin \omega; \quad (6.34)$$

$$B_{\omega}^{(1)}(\varrho, \omega) = \frac{a}{R} B_{\omega}^0(a) \left[ \frac{3}{2} \left( \eta + \frac{1}{4} \right) - 1 \right] \frac{\varrho^2}{a^2} \cos \omega; \quad (6.35)$$

$$p^{(1)}(\varrho, \omega) = -p_0 \frac{a}{R} \left( \eta + \frac{1}{4} \right) \frac{\varrho^3}{a^3} \cos \omega. \quad (6.36)$$

Заметим, что приведенными формулами описывается стационарное состояние плазменного шнура при  $B_{\varphi}^0 \gg B_{\omega}^0$ , если продольная и поперечная электропроводности  $\sigma_{\parallel}$  и  $\sigma_{\perp}$  однородны по сечению шнура. В этом случае  $\eta = \sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel}$ .

Другим заслуживающим внимания случаем является так называемое приближение продольной проводимости, когда закон Ома принимается в виде [39]

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{E}\mathbf{B})}{B^2}. \quad (6.37)$$

При такой связи тока с электрическим полем  $\mathbf{E}$  стационарное распределение магнитного поля хорошо согласуется с экспериментально измеренным распределением в установках с умеренным продольным магнитным полем. Уравнения Максвелла для величин нулевого приближения при  $\sigma_{\parallel} = \text{const}$  записываются в виде

$$\frac{1}{x} \frac{d(xu)}{dx} = \frac{v^2}{u^2 + v^2}; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{uv}{u^2 + v^2}, \quad (6.38)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v &= B_{\varphi}^0(\varrho)/B_{\varphi}^0(0); & u &= B_{\omega}^0(\varrho)/B_{\varphi}^0(0); & x &= \varrho/a_1; \\ a_1 &= \frac{B_{\varphi}^0(0)c}{4\pi\sigma_{\parallel}E_0}; & E_{\varphi}^0 &= E_0 = \text{const}; & E_{\omega}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Решение с учетом тороидальных поправок будет:

$$B_{\varrho}(\varrho, \omega) = B_{\varphi}^0(0) \frac{a_1^2}{R\varrho} \Delta_1 \left( \frac{\varrho}{a_1} \right) u \left( \frac{\varrho}{a_1} \right) \sin \omega; \quad (6.40)$$

$$B_{\omega}(\varrho, \omega) = B_{\varphi}^0(0) \left[ u \left( \frac{\varrho}{a_1} \right) + \frac{a_1}{R} u_1 \left( \frac{\varrho}{a_1} \right) \cos \omega \right]; \quad (6.41)$$

$$B_{\varphi}(\varrho, \omega) = B_{\varphi}^0(0) \left[ v \left( \frac{\varrho}{a_1} \right) + \frac{a_1}{R} v_1 \left( \frac{\varrho}{a_1} \right) \cos \omega \right], \quad (6.42)$$

где

$$\Delta_1(x) = \int_0^x x' [\Lambda(x') + 1] dx'; \quad (6.43)$$

$$\Lambda(x) = \frac{\int_0^x u^2(x') x' dx'}{u^2(x) x^2} - 1; \quad (6.44)$$

$$u_1(x) = xu(x) \Lambda(x) + \Delta_1(x) \frac{du(x)}{dx}; \quad (6.45)$$

$$v_1(x) = -xv(x) + \Delta_1(x) \frac{dv(x)}{dx}. \quad (6.46)$$

Функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $\Delta_1(x)$ ,  $u_1(x)$  и  $v_1(x)$ , полученные численным интегрированием, изображены на рис. 7 и 8. Давление плазмы в рассматриваемом случае бессиловой конфигурации ( $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$ ) равно нулю.

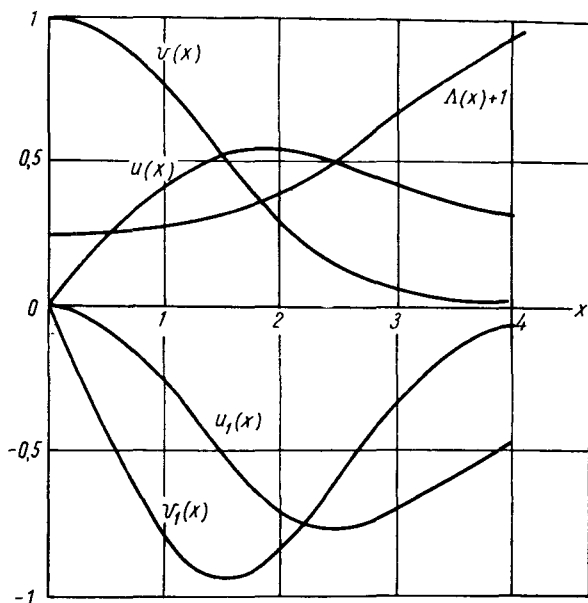


Рис. 7

Соответствующий приведенному выше расчет равновесия плазмы в системах с магнитным удержанием (типа стелларатора или систем с гофрированными полями), когда магнитными поверхностями обладают уже вакуумные поля без плазмы, довольно громоздок из-за сложной геометрии этих полей. Поэтому ограничимся лишь приведением результатов расчета равновесия в стеллараторе, выполненного Грином и Джонсоном [33] для «трехзаконного» тороидального магнитного поля, в предположении, что давление плазмы есть линейная функция  $\Psi$ -магнитного потока

по большому обходу. Результаты расчета воспроизводятся на рис. 9, 10 и 11\*, где изображаются поверхности  $\Psi = \text{const}$  для

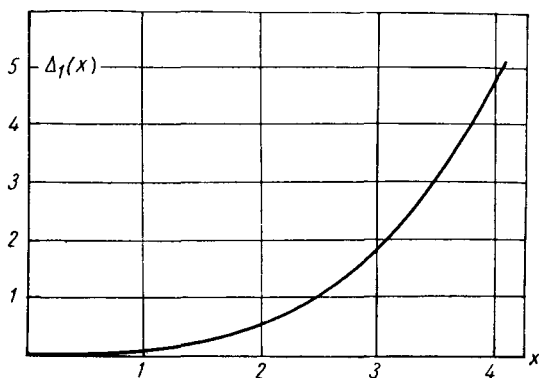


Рис. 8

значений  $\Psi$ :  $(\Psi_{\text{макс}} - \Psi)/(\Psi_{\text{макс}} - \Psi_{\text{мин}}) = 0,40\%, 70\%, 90\%, 95\%$  и  $100\%$ . За единицу длины принят период мультипольного поля. Радиус тора в этих единицах взят равным 20, диаметр сечения

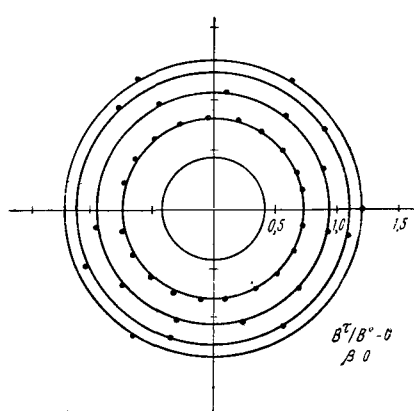


Рис. 9

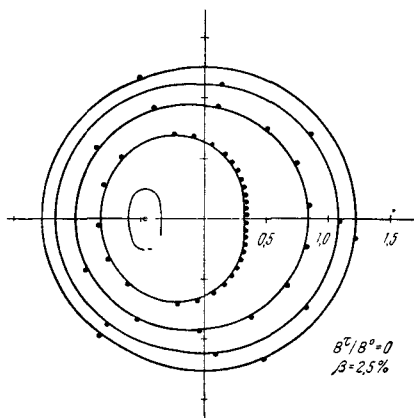


Рис. 10

ограничивающей поверхности — 2,5. Точками отмечен след силовой линии через равные промежутки по продольной координате.

На рис. 9 изображены сечения магнитных поверхностей вакуумного поля, на рис. 10 — магнитных поверхностей при наличии плазмы, давление которой составляет  $\beta = 2,5\%$  от давления магнитного поля. Как видно, искажение поверхностей при добавлении плазмы получается весьма значительным.

Избежать искажения вакуумных магнитных полей можно следующим образом. Если добавить однородное магнитное поле  $B_z$

\* Внутренняя сторона тора на этих рисунках находится справа.



(перпендикулярное к плоскости тора) достаточно большой величины, направление которого совпадает с направлением прокручивания силовой линии основного поля  $B_0$  с внутренней стороны тора, то магнитные поверхности вакуумного поля сильно сместятся к внутренней стороне тора. Наличие плазмы со сравнительно небольшим давлением не приводит при этом к заметному искажению поверхностей. На рис. 11 изображено сечение магнитных поверхностей, когда добавочное однородное поле составляет 5% от основного. При этом плазма с  $\beta = 2,5\%$  еще не искажает заметно магнитные поверхности. Этот результат может быть пояснен примером системы с токовым удержанием: если последний член в формуле (6. 16) достаточно велик, то на фоне смещения, вызываемого внешним полем  $\Delta_b = -b \frac{B_0}{B_b}$ , смещение, связанное с давлением  $\Delta_p = \frac{b^2}{2R} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{8\pi\bar{p}}{B_a^2}$ , может оказаться несущественным.

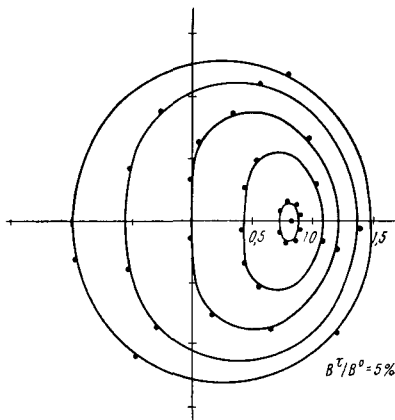


Рис. 11

Если в уравнениях равновесия (1. 1) — (1. 3) сделать замену

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{v}, \quad \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \rightarrow \Omega, \quad p \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{p}{Q} + \frac{v^2}{2} \right), \quad (7. 1)$$

то получим уравнения, описывающие стационарное течение несжимаемой жидкости. Отсюда вытекает, что если ротор скорости распределен в пространстве так же, как плотность тока в равновесной магнитогиродинамической конфигурации, то линии тока гидродинамического течения имеют в точности ту же форму, что и магнитные силовые линии данной равновесной конфигурации. Таким образом, каждая равновесная конфигурация имеет аналог в виде некоторого стационарного течения несжимаемой жидкости. С этой точки зрения представляет интерес равновесие кольцевого тока (без продольного магнитного поля) в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости кольца. При однородном распределении тока по сечению кольца величина этого удерживающего поля в соответствии с формулами (5. 42) и (5. 41) (при  $B_e = B_i$  и  $l_i = 1/2$ ) равна

$$B_z = -\frac{J}{cR} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right). \quad (7. 2)$$

Согласно указанной аналогии, по этой формуле можно определить скорость потока, поддерживающего в равновесии кольцевой вихрь тех же размеров, что и кольцевой ток, если сделать замену  $J \rightarrow \frac{c}{4\pi} \kappa$ , где  $\kappa = \int \Omega dS$  — напряжение вихря (аналог тока). Отсюда легко находится и скорость вихревого кольца в неподвижном газе, которая, очевидно, равна скорости потока, взятой с обратным знаком [10]

$$v = \frac{\kappa}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right). \quad (7.3)$$

### § 8. Диффузия и дрейфы в равновесной конфигурации

Равновесие, описываемое уравнениями магнитной гидростатики (1. 1) — (1. 3), является приближенным, так как эти уравнения оказываются несовместимыми с законом Ома для плазмы, если гидродинамическая скорость плазмы равна нулю. А это означает, что в равновесной конфигурации имеются дрейфовые и диффузионные движения плазмы, скорость которых, однако, мала по сравнению с тепловой скоростью, чем и оправдывается опускание инерционных членов в уравнении равновесия (1. 1).

Обобщенный закон Ома в случае двухкомпонентной (водородоподобной) плазмы [38] выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{j}_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{en} \nabla p_i + \frac{0,7}{e} \nabla_{\parallel} T_e + \\ + \frac{3}{2} \frac{cn}{B^2 \sigma_{\perp}} [\mathbf{B} \nabla T_e]. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь  $\mathbf{j}_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\mathbf{j})}{B^2}$ ;  $\mathbf{j}_{\perp} = \mathbf{j} - \mathbf{j}_{\parallel}$ ;  $\nabla_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla)}{B^2}$ ;  $n$  — плотность плазмы (число зарядов одного знака в единице объема);  $p_i = nT_i$  — давление ионов;  $T_e$  и  $T_i$  — температура электронов и ионов;  $\sigma_{\perp} = \sigma_1 T_e^{3/2}$  и  $\sigma_{\parallel}$  — поперечная и продольная проводимости плазмы (для водородной плазмы  $\sigma_{\parallel} \approx 2\sigma_{\perp}$ );  $e$  — заряд электрона по модулю.

Спроектируем формулу (8. 1) на вектор  $\mathbf{B}$  и на плоскость, перпендикулярную к  $\mathbf{B}$ . Умножая формулу (8. 1) скалярно и векторно на  $\mathbf{B}$ , получим

$$(\mathbf{B}\mathbf{j}) = \sigma_{\parallel} (\mathbf{B}\mathbf{E}'); \quad (8.2)$$

$$\mathbf{v} = c \frac{[\mathbf{E}'\mathbf{B}]}{B^2} - \frac{c}{\sigma_{\perp}} \cdot \frac{[\mathbf{j}\mathbf{B}]}{B^2} + \frac{3}{2} \frac{c^2 n}{\sigma_{\perp} B^2} \nabla_{\perp} T_e + \alpha \mathbf{B}, \quad (8.3)$$

где

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{en} \nabla p_i + \frac{0,7}{e} \nabla_{\parallel} T_e. \quad (8.4)$$

Первый член в выражении для скорости (8. 3) представляет скорость дрейфа плазмы

$$v_{др} = c \frac{[\mathbf{E}'\mathbf{B}]}{B^2}. \quad (8. 5)$$

Второй член в выражении (8. 3) определяет скорость диффузии плазмы поперек магнитного поля. С помощью уравнения равновесия (1. 1) он может быть записан так

$$v_{диф} = -\frac{c}{\sigma_{\perp}} \cdot \frac{[\mathbf{j}\mathbf{B}]}{B^2} = -\frac{c^2}{\sigma_{\perp} B^2} \nabla p. \quad (8. 6)$$

Третий член определяет скорость термодиффузии плазмы поперек магнитного поля. При одинаковом направлении  $\nabla p$  и  $\nabla T_e$  эта скорость противоположна скорости диффузии. Последний член в соотношении (8. 3) выражает скорость вдоль магнитного поля;  $\alpha$  — произвольная функция, значение которой должно определяться из уравнения непрерывности.

Для полного решения задачи о движении плазмы в равновесной конфигурации необходимо еще учесть уравнения баланса тепла для электронов и ионов, из которых должны быть определены температуры  $T_e$  и  $T_i$ . Мы, однако, для простоты рассмотрения не будем пользоваться этими уравнениями, а будем считать температуры  $T_e$  и  $T_i$  заданными. Естественно при этом принять, что  $T_e = T_e(p)$ ,  $T_i = T_i(p)$ , соответственно  $\sigma = \sigma(p)$ ,  $n = n(p)$  (так как на магнитной поверхности температура хорошо выравнивается дрейфовым и нормальным «незамагнитченным» потоками тепла). В этом случае последнее слагаемое в формуле (8. 1) можно записать в виде (поскольку, согласно выражению (3. 5),  $\mathbf{j}_{\perp} = c \frac{[\mathbf{B}\nabla p]}{B^2}$ )

$$\frac{3}{2} \frac{cn}{B^2 \sigma_{\perp}} [\mathbf{B}\nabla p] \frac{dT_e}{dp} = \frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dp} \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}}. \quad (8. 7)$$

Для скорости термодиффузии получаем

$$v_{т. диф} = -\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dp} v_{диф}. \quad (8. 8)$$

Рассмотрим сначала стационарный случай, когда все величины в данной точке равновесной тороидальной конфигурации не меняются во времени. При этом напряжение на обходе тора также должно сохранять постоянное значение

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}_2 = -\frac{1}{c} \frac{d\Psi_0}{dt} = \text{const} = \mathcal{E}_0. \quad (8. 9)$$

Пусть сначала  $\mathcal{E}_0 = 0$  (система с магнитным удержанием, так как из  $\mathcal{E}_0 = 0$  автоматически следует, что продольный ток  $J_2 = 0^*$ ). Учитывая зависимость  $p_i(p)$  и  $n(p)$ , можно записать

$$E' = -\nabla\varphi, \quad (8.10)$$

где  $\varphi$  — однозначный потенциал. В цилиндрическом плазменном шнуре, удерживаемом в равновесии продольным магнитным полем, по условиям симметрии эквипотенциали совпадают с магнитными поверхностями; следовательно, дрейф может быть направлен только в азимутальном направлении. Скорость этого дрейфа, характеризующего вращение плазменного шнура, в рамках рассматриваемых уравнений может быть произвольной (она зависит от способа создания плазмы). Если вращение отсутствует, то  $E' = 0$ . В тороидальных же системах всегда  $E' \neq 0$ . Действительно, равновесие в тороидальных системах с магнитным удержанием (типа стелларатора) невозможно без продольного тока (уравнения равновесия (1.1) — (1.3) несовместимы при условии  $j_{\parallel} = 0$ ). Поэтому, как следует из уравнения (8.2),  $\mathbf{V} \nabla\varphi \neq 0$ , т. е. эквипотенциали не совпадают с магнитными поверхностями. Следовательно, линии дрейфа в тороидальных конфигурациях пересекают магнитные поверхности. Чтобы выяснить, к каким потерям плазмы из объема приводят эти дрейфы, необходимо взять интеграл от потока плазмы с дрейфовой скоростью (8.5) по замкнутой магнитной поверхности. Элемент магнитной поверхности в равновесной конфигурации можно записать в виде

$$d\mathbf{S} = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|} dS = -\frac{\nabla p}{dp} \delta V = -\frac{\delta V}{dp} \cdot \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (8.11)$$

Раскрывая произведение  $[\mathbf{E}'\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{j}\mathbf{B}]$  [см. выражение (3.6)] и пользуясь соотношением (8.2), находим

$$\int n \mathbf{v}_{др} d\mathbf{S} = \frac{n(p)}{dp} \left\{ -\int (\mathbf{j}\mathbf{E}') \delta V + \int \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} \delta V \right\}, \quad (8.12)$$

где интегрирование производится по объему слоя, расположенного между поверхностями  $p = \text{const}$  и  $p + dp = \text{const}$ . Первый интеграл с учетом условия потенциальности электрического поля (8.10) и условия  $\text{div} \mathbf{j} = 0$  (являющегося следствием уравнения  $\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ ) преобразуется к поверхностному и, поскольку нормаль-

\* Действительно, интегрируя уравнение (8.2) по объему слоя, заключенного между соседними магнитными поверхностями, по аналогии с выражениями (5.24) и (5.25) найдем

$$\mathcal{E}_0 d\Psi_2 = \frac{4\pi}{\sigma_{\parallel}} \{ (I_0 + J_3) dJ_2 - J_2 dJ_3 \}.$$

При  $\mathcal{E}_0 = 0$  отсюда следует, что  $J_2 = \text{const} (I_0 + J_3)$ . На магнитной оси  $J_2 = J_3 = 0$ . Отсюда  $\text{const} = 0$  и, следовательно, всюду  $J_2 = 0$  [21].

ная компонента тока равна нулю ( $\mathbf{j} \nabla p = 0$ ), исчезает. Таким образом,

$$\int n \mathbf{v}_{др} d\mathbf{S} = \frac{n(p)}{dp} \int \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} \delta V. \quad (8.13)$$

Как нетрудно видеть из выражений (8. 6) и (8. 11), диффузионные потери можно записать в аналогичном виде:

$$\int n \mathbf{v}_{диф} d\mathbf{S} = \frac{n(p)}{dp} \int \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} \delta V. \quad (8.14)$$

Из сравнения формул (8. 13) и (8. 14) видно, что при  $j_{\parallel} \sim j_{\perp}$  наличие дрейфов приводит лишь к изменению численного коэффициента в диффузионных потерях плазмы\*.

Поток плазмы, связанный с термодиффузией, согласно выражению (8. 8), отличается от диффузионного лишь множителем  $-\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dp}$ . Таким образом, для суммарного потока плазмы, проходящего через магнитную поверхность  $p = \text{const}$ , получаем следующее выражение:

$$\int n \mathbf{v} d\mathbf{S} = n(p) \left\{ \frac{dQ_{\parallel}}{dp} + \frac{dQ_{\perp}}{dp} \left( 1 - \frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dp} \right) \right\}. \quad (8.15)$$

Здесь через  $dQ_{\parallel}$  и  $dQ_{\perp}$  обозначены энергия, диссипируемая продольным и поперечным токами в единицу времени в слое, расположенном между поверхностями  $p = \text{const}$  и  $p + dp = \text{const}$ :

$$dQ_{\parallel} = \int \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} \delta V; \quad dQ_{\perp} = \int \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} \delta V. \quad (8.16)$$

Выясним в качественном отношении, при каких условиях термодиффузия может полностью скомпенсировать потери плазмы. С этой целью примем, что  $T_i/T_e = t = \text{const}$ ;  $dQ_{\parallel}/dQ_{\perp} = q = \text{const}$ .

Тогда поток плазмы (8. 15) обратится в нуль при  $T_e = \text{const}_1 \times \times p^{\frac{2}{3}(t+1)(q+1)}$ . При этом  $n = \text{const}_2 p^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}(t+1)q}$ . Решение, соответствующее значениям  $t = 1$  и  $q = 0$ , рассматривалось в первых работах по магнитному термоядерному реактору [1, 2] для случая цилиндрического столба плазмы. В этом решении плотность плазмы растёт к границе. Если же  $t < \frac{1-2q}{4}$  (т. е. температура ионов составляет менее одной четверти от электронной), то

\* Оценку отношения  $j_{\parallel}/j_{\perp}$  можно получить из условия  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Для стелларатора в форме восьмёрки, например,  $\text{div } \mathbf{j}_{\parallel} \sim \frac{j_{\parallel}}{R}$ , где  $R$  — длина трубки. Дивергенция поперечного тока связана с кривизной силовых линий и по порядку величины  $\text{div } \mathbf{j}_{\perp} \sim \frac{j_{\perp}}{R}$ . Отсюда вытекает, что  $j_{\parallel} \sim j_{\perp}$  [19].

возможна равновесная стационарная конфигурация без потерь плазмы (если только выполняется условие  $q < \frac{1}{2}$ ).

Пусть теперь  $\mathcal{E}_0 \neq 0$ . Выражение для скорости, нормальной к магнитной поверхности, удобно получить непосредственно из формулы (8. 1). Умножая эту формулу скалярно на  $\mathbf{j}$  и учитывая, что  $\frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \mathbf{j} = -\mathbf{v} \nabla p$ , находим

$$-\mathbf{v} \nabla p = -\mathbf{jE} + \frac{j_{\parallel}^2}{\sigma_{\parallel}} + \frac{j_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}} - \frac{3}{2} \frac{c^2 n}{B^2 \sigma_{\perp}} (\nabla T_e \nabla p) \quad (8. 17)$$

и, следовательно,

$$\int n \mathbf{v} d\mathbf{S} = n(p) \left\{ -\mathcal{E}_0 \frac{dJ_2}{dp} + \frac{dQ_{\parallel}}{dp} + \frac{dQ_{\perp}}{dp} \left( 1 - \frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dp} \right) \right\}. \quad (8. 18)$$

Интегрирование в первом члене правой части выполнено здесь так же, как и при получении выражений (5. 24) и (5. 25).

Из этой формулы видно также, что дрейф плазмы в приложенном к ней электрическом поле (первый член) и термодиффузия (последний член) могут, в принципе, скомпенсировать потери плазмы в конфигурации, определяемые вторым и третьим членами.

В качестве примера стационарного решения при  $\mathcal{E}_0 \neq 0$  рассмотрим случай, когда закон Ома имеет вид  $\mathbf{j} = \sigma \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right\}$

(т. е. считаем  $\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp}$  и пренебрегаем термодиффузией). Для тонкого тороидального плазменного шнура решение находится разложением по кривизне тора  $1/R$ . За нулевое приближение принимается распределение, относящееся к цилиндрическому шнуру:  $n = n_0(\varrho)$ ;  $B_{\omega} = B_{\omega}^0(\varrho)$ ;  $B_{\varphi}^0 = B_0$ . Скорости дрейфа, возникающие в торе, в координатах  $\varrho$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$  (см. § 6) имеют вид ( $E_0 \equiv \mathcal{E}_0/2\pi R$ ):

$$\left. \begin{aligned} v_{\varrho} &= \frac{2cE_0}{B_{\omega}^0(\varrho)} \frac{\varrho}{R} \cos \omega; \\ v_{\omega} &= -\frac{2cE_0}{Rn_0(\varrho)} \frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{\varrho^2 n_0(\varrho)}{B_{\omega}^0(\varrho)} \right] \sin \omega; \\ v_{\varphi} &= -\frac{2cE_0 B_0}{R} \frac{\varrho^2}{B_{\omega}^{02}(\varrho) n_0(\varrho)} \frac{dn_0}{d\varrho} \sin \omega. \end{aligned} \right\} \quad (8. 19)$$

При этом суммарный поток плазмы, проходящий через магнитную поверхность, равен нулю. Уравнение линий тока в плоскости  $\varphi = \text{const}$  имеет вид:

$$\frac{\varrho^2 n_0(\varrho)}{B_{\omega}^0(\varrho)} \sin \omega = \text{const}. \quad (8. 20)$$

На рис. 12 стрелками показано направление движения частиц плазмы.

Заметим, что если по какой-либо причине компенсация диффузии не осуществляется (например, из-за возможной неустойчивости данного режима), то стационарное состояние может быть осуществлено при введении источников плазмы, компенсирующих ее потери.

Найдем теперь выражение для потока плазмы в нестационарных условиях. В этом случае, как уже отмечалось в § 3, функциональная зависимость между поверхностными величинами меняется во времени. Поверхности  $\Psi_2 = \text{const}$ ,  $\Psi_3 = \text{const}$ ,  $J_2 = \text{const}$  и т.д. движутся в пространстве (меняются их форма и объем, который они ограничивают) и притом с разными скоростями. Поэтому, говоря о потоке плазмы, проходящем через одну из указанных поверхностей, необходимо уточнить, о какой именно поверхности идет речь. Пусть  $S$  — некоторая поверхностная величина (в качестве  $S$  может быть использована любая из указанных в § 3 поверхностных величин, например объем, ограниченный магнитной поверхностью, и др.). Определим поток плазмы, проходящий через поверхность  $S = \text{const}$  ( $\frac{dS}{dt} = 0$ ).

Примем  $S$  и  $t$  за независимые переменные, через которые выражаются все остальные поверхностные величины. Согласно закону электромагнитной индукции, для циркуляций электрического поля по контурам  $l_2$  и  $l_3$ , расположенным на движущейся поверхности  $S = \text{const}$ , имеем

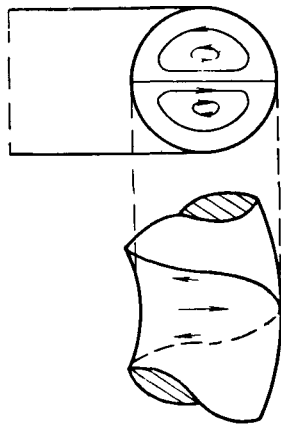


Рис. 12

Отсюда по аналогии с выражениями (3. 16) и (3. 22) можно написать

$$\left. \begin{aligned} \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}_2 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi(S, t)}{\partial t}; \\ \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}_3 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_2(S, t)}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (8. 21)$$

Отсюда по аналогии с выражениями (3. 16) и (3. 22) можно написать

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} d\mathbf{l}_2 &= d\mu - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi(S, t)}{\partial t} \frac{d\varphi}{2\pi}; \\ \mathbf{E} d\mathbf{l}_3 &= d\mu + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_2(S, t)}{\partial t} \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (8. 22)$$

где  $\mu$  — однозначная функция. Используя эти соотношения, нетрудно по аналогии с выражениями (5. 24) и (5. 25) получить

$$\int_{dV} \mathbf{j} \mathbf{E} \delta V = \frac{1}{c} \left\{ dJ_2 \frac{\partial \Psi(S, t)}{\partial t} - dJ_3 \frac{\partial \Psi_2(S, t)}{\partial t} \right\}, \quad (8. 23)$$

где  $dV$ ,  $dJ_2$  и  $dJ_3$  — объем и токи между соседними поверхностями  $S = \text{const}$ ,  $S + dS = \text{const}$ . Для потока плазмы, проходящего через движущуюся поверхность  $S = \text{const}$ , из формул (8. 17), (8. 11) и (8. 23) получаем

$$\int n \mathbf{v} dS = \frac{n(S)}{\partial p / \partial S} \left\{ \frac{1}{c} \left( \frac{\partial J_2}{\partial S} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial J_3}{\partial S} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right) + \frac{\partial Q_{\parallel}}{\partial S} + \frac{\partial Q_{\perp}}{\partial S} \left[ 1 - \frac{3}{2} n(S) \frac{\partial T_e / \partial S}{\partial p / \partial S} \right] \right\}. \quad (8. 24)$$

Из уравнения (8. 2), проинтегрированного по объему  $dV$ , заключенному между поверхностями  $S = \text{const}$  и  $S + ds = \text{const}$ , можно получить

$$\frac{\partial J_2}{\partial S} I - \frac{\partial J_3}{\partial S} J_2 = - \frac{\sigma_{\parallel}(S)}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \Psi_2}{\partial S} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial S} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right\}. \quad (8. 25)$$

Следует отметить, что закон Ома (8. 1) и полученные из него выводы имеют более ограниченную область применимости, чем уравнение равновесия. Так, например, колебания плазмы, в которых амплитуда колебаний магнитного поля  $\delta B \ll B$ , на уравнение равновесия (1. 1) влияют несущественно, тогда как закон Ома они могут сильно исказить. В самом деле, колебания существенно повлияют на закон Ома, когда квадратичный член  $\frac{\sigma_{\perp}}{c} [\delta v \delta B]$  сравним по величине с невозмущенной плотностью тока  $j_{\perp}$ . Отсюда для скорости плазмы в таких колебаниях получаем оценку

$$\delta v \approx \frac{c}{\sigma_{\perp}} \frac{j_{\perp}}{\delta B} \approx \frac{c}{\sigma_{\perp}} \frac{j_{\perp} B}{\delta B B} = v_{\text{диф}} \frac{B}{\delta B}. \quad (8. 26)$$

Благодаря малости диффузионной скорости скорость колебаний может быть еще значительно меньше тепловой даже при  $B \gg \delta B$ . Это и дает возможность пользоваться уравнениями равновесия, в то время как «ламинарный» закон Ома становится уже неприменимым [39].

## § 9. О равновесии плазмы с неизотропным давлением

В проведенном выше исследовании условий равновесия существенно использовалось предположение об изотропности давления плазмы. Давление плазмы естественно принимать изотропным, если речь идет о достаточно длительном удержании плазмы. В разреженной высокотемпературной плазме может представлять интерес удержание плазмы и в течение времени, малого по сравнению со временем между кулоновскими столкновениями частиц. Закон движения зарядов вдоль и поперек магнитного поля различен. Поэтому, если время установления максвелловского распределения велико по сравнению со временем существования плазмы, то



можно говорить о двух давлениях плазмы — продольном  $p_{\parallel}$  и поперечном  $p_{\perp}$ . В этом случае компоненты тензора  $T_{ik}$  (2. 2) имеют вид

$$P_{\perp} = p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi}; \quad P_{\parallel} = p_{\parallel} - \frac{B^2}{8\pi}. \quad (9. 1)$$

Уравнение равновесия (2. 1)  $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$  можно записать в векторной форме. Проекция этого уравнения на направление магнитного поля и на перпендикулярное к нему имеют следующий вид:

$$-\nabla_{\parallel} p_{\parallel} - \frac{4\pi(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B^2} \nabla_{\parallel} \frac{B^2}{8\pi} = 0; \quad (9. 2)$$

$$-\nabla_{\perp} p_{\perp} + \frac{4\pi(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B^2} \nabla_{\perp} \frac{B^2}{8\pi} + \left\{ 1 + \frac{4\pi(p_{\perp} - p_{\parallel})}{B^2} \right\} \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] = 0. \quad (9. 3)$$

Из уравнения (9. 2) видно, что при  $p_{\perp} \neq p_{\parallel}$  появляется сила, действующая вдоль магнитных силовых линий там, где имеется градиент напряженности магнитного поля. Поэтому для удержания неизотропной плазмы нет необходимости в создании конфигурации с тороидальными магнитными поверхностями.

Если переходный слой между плазмой и вакуумом достаточно тонкий, так что его можно принять за поверхность, на которой терпят разрыв физические величины, то необходимо использовать граничные условия — непрерывность нормальной компоненты магнитного поля  $\mathbf{Bn}$  и вектора  $T_{ik}n_k$  (где  $n$  — нормаль к поверхности). Это последнее условие, переписанное в проекциях на вектор  $n$  и на плоскость, перпендикулярную  $n$ , имеет вид (считаем, что вне плазмы — вакуум):

$$p_{\perp} = \frac{B_e^2 - B_i^2}{8\pi} + (p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{(\mathbf{Bn})^2}{B_i^2}; \quad (9. 4)$$

$$(\mathbf{Bn}) \frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B_i^2} [\mathbf{nB}_i] = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{B}_e - \mathbf{B}_i] (\mathbf{Bn}). \quad (9. 5)$$

Здесь  $B_i$ ,  $B_e$  — внутреннее и внешнее поля на поверхности плазмы. Во втором условии сокращение на  $\mathbf{Bn}$  не сделано, чтобы сохранить возможность перехода и к случаю изотропного давления, когда  $\mathbf{Bn} = 0$ .

Приведем пример конфигурации без тороидальных поверхностей с простой геометрией и простым распределением величин. Пусть плазма находится внутри сферы радиуса  $a$  и магнитное поле внутри сферы однородно, а снаружи является суммой дипольного и однородного полей. Тогда распределение давления и магнитного

поля в такой конфигурации имеет вид (в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ ):

$$\begin{aligned}
 & r < a \\
 & B_r = B_i \cos \theta; \\
 & B_\theta = -B_i \sin \theta; \\
 & p_{\parallel} = \frac{9}{32\pi} (B_e - B_i)^2 \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta; \\
 & p_{\perp} = \frac{9}{32\pi} (B_e - B_i)^2 \times \\
 & \quad \times \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \cos \theta \right) + \\
 & \quad + \frac{3}{4\pi} B_i (B_e - B_i).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r > a \\
 & B_r = B_e \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{B_i}{B_e} \right) \frac{a^3}{r^3} \right\} \cos \theta; \\
 & B_\theta = -B_e \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{B_i}{B_e} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \frac{a^3}{2r^3} \right\} \sin \theta; \\
 & p_{\parallel} = 0; \\
 & p_{\perp} = 0.
 \end{aligned}$$

Конфигурация магнитного поля изображена на рис. 13.

Этот пример показывает, что магнитные поля, необходимые для удержания плазмы с анизотропным давлением, по своей топологии весьма просты. Удержание вдоль магнитного поля осуществляется сгущением магнитных силовых линий (магнитные пробки или магнитные зеркала). Центр тяжести проблемы удержания переносится не на условия равновесия, а на кинетику зарядов в магнитном поле, которая определяет реальное соотношение между  $p_{\perp}$  и  $p_{\parallel}$  и распределение давлений в конфигурации.

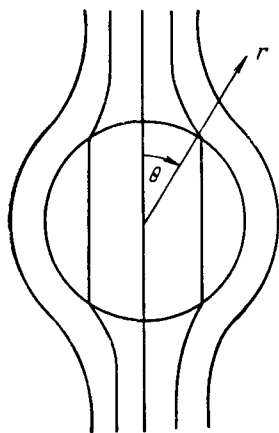


Рис. 13

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е. Теория магнитного термоядерного реактора. Ч. I и III. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3, 31.
2. Сахаров А. Д. Теория магнитного термоядерного реактора. Ч. II. Там же, т. I, стр. 20.
3. Будкер Г. И. Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном магнитном термоядерном реакторе. Там же, т. I, стр. 66.
4. Леонтович М. А. О силах, действующих на прямолинейный ток, находящийся внутри проводящей цилиндрической трубы. Там же, т. I, стр. 110.
5. Брагинский С. И. Стягивание плазмы под действием собственного магнитного поля. Там же, т. I, стр. 115.
6. Брагинский С. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 33, 645 (1957).

7. Брагинский С. И. и Шафранов В. Д. Плазменный шнур при наличии продольного магнитного поля. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. II. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 26.
8. Будкер Г. И. Некоторые вопросы, связанные с пространственной устойчивостью кольцевого тока в плазме. Там же, т. III, стр. 32.
9. Осовец С. М. Плазменный виток в электромагнитном поле. Там же, т. II, стр. 238.
10. Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **33**, 710 (1957).
11. Брагинский С. И. и Кадомцев Б. Б. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 300.
12. Кадомцев Б. Б. Магнитные ловушки с гофрированным полем. Там же, т. III, стр. 285.
13. Кадомцев Б. Б. О гидродинамике плазмы низкого давления. Там же, т. IV, стр. 16.
14. Кадомцев Б. Б. Магнитные ловушки для плазмы. Там же, т. IV, стр. 353.
15. Кадомцев Б. Б. и Брагинский С. И. Стабилизация плазмы с помощью неоднородных магнитных полей. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Докл. советских ученых. Т. 2 — Ядерная физика. М., Атомиздат, 1959, стр. 175.
16. Брагинский С. И. и Шафранов В. Д. К теории высокотемпературного плазменного шнура. Там же, стр. 221.
17. Бирман Л., Хайн К., Йоргенс К., Люст Р. Аксиально-симметричные решения магнитогидростатического уравнения с поверхностными токами. В кн. «Управляемые термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1960, стр. 151.
18. Люст Р., Шлютер А. Равновесные магнитогидродинамические системы, обладающие аксиальной симметрией. Там же, стр. 204.
19. Спитцер Л. Исследования на стеллараторе. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. I — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 505.
20. Джонсон, Оберман, Кулсруд, Фримен. Некоторые устойчивые магнитогидродинамические равновесные конфигурации. Там же, стр. 193.
21. Крускал и Кулсруд. Равновесие удерживаемой магнитным полем плазмы в тороиде. Там же, стр. 221.
22. Град и Рубин. Магнитогидродинамическое равновесие и бессильные поля. Там же, стр. 131.
23. Meyer F. und Schmidt H. Z. Naturforsch., **13a**, 1016 (1958).
24. Kirpenhan R. Там же, стр. 260.
25. Jorgens K. Там же, стр. 493.
26. Newcomb W. A. Phys. Fluids, **2**, 362 (1959).
27. Laing E. W., Roberts S. J. and Whipple R. T. R. J. Nucl. Energy, **1C**, 49 (1959).
28. Шафранов В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, 1088 (1959).
29. Кадомцев Б. Б. Там же, стр. 1352.
30. Ваидакуров Ю. В. «Ж. техн. физ.», **29**, 1312 (1959).
31. Ваидакуров Ю. В. «Ж. техн. физ.», **30**, 134 (1960); там же, **31**, 907 (1961).
32. Шафранов В. Д. «Ж. техн. физ.», **33**, 137 (1963).
33. Green J. M. and Johnson J. L. Phys. Fluids, **4**, 875 (1961).
34. Hamada S. «Ядерный синтез», **1—2**, 23 (1962).
35. Green J. M. and Johnson J. L. Phys. Fluids, **5**, 510 (1962).
36. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», **13**, 521 (1962).
37. Скорняков Г. В. «Ж. техн. физ.», **32**, 261 и 777 (1962).
38. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
39. Кадомцев Б. Б. «Ядерный синтез», **1**, 286 (1961).

## ГИДРОМАГНИТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ

*Б. Б. Кадоц ев*

### Введение

Неустойчивости в плазме условно можно разделить на две большие группы — гидродинамические и кинетические. К гидродинамическим мы относим такие неустойчивости, которые связаны с перемещением макроскопических участков плазмы. При теоретическом исследовании таких неустойчивостей можно пользоваться уравнениями гидродинамики, т. е. можно приближенно считать, что все заряженные частицы, заключенные в некотором макроскопическом объеме, совершают одно и то же среднее движение.

Кинетическими неустойчивостями условимся называть такие, для которых оказывается существенным различие в движении разных групп частиц, находящихся в одном и том же объеме. Типичным примером такой неустойчивости является пучковая неустойчивость, возникающая в результате взаимодействия частиц пучка с электронами и ионами плазмы. Кинетические неустойчивости, как правило, связаны с высокочастотными колебаниями с короткими длинами волн, и в этом смысле они являются как бы «микроскопическими» по отношению к крупномасштабному и более медленному гидродинамическому движению.

Гидродинамическая неустойчивость непосредственно связана с перемещением плазмы в пространстве, и поэтому она особенно важна для таких явлений, в которых основным является макроскопическое движение. Истоки теории гидродинамической или, вернее, гидромагнитной, устойчивости ведут, с одной стороны, к астрофизике (см., например, работу [8]), а с другой — к проблеме управляемой термоядерной реакции.

В работе Леонтовича [1], являющейся одной из первых в этом направлении, рассмотрено стабилизирующее действие на ток проводящего кожуха, а в работе Леонтовича и Шафранова [2] поставлен и рассмотрен вопрос о стабилизации тока с помощью продольного магнитного поля. Более подробное рассмотрение этих вопросов проведено в последующих работах Шафранова [4, 6].

С проблемой удержания плазмы магнитным полем связана также работа Крускала и Шварцшильда [7]. В дальнейшем воп-

росу устойчивости идеальной плазмы в магнитном поле было посвящено значительное количество работ, и в настоящее время он получил довольно полное освещение.

Настоящая работа имеет целью систематическое изложение основных вопросов гидромагнитной устойчивости идеально проводящей плазмы (за исключением § 11 и 12, в которых учитывается конечная проводимость). В соответствии с этим за основу исследования взяты уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики. Дрейфовые неустойчивости, исследование которых следует проводить на основе гидродинамики двух жидкостей (электронной и ионной), а тем более кинетические неустойчивости, для которых существенно распределение частиц по скоростям, в настоящей работе не рассматриваются (эти вопросы были кратко рассмотрены в обзоре Веденова, Велихова и Сагдеева [33]). Кроме того, здесь исследуются только равновесные системы, т. е. предполагается, что в исходном состоянии плазма покоится.

В § 1 выводятся уравнения малых колебаний неоднородной плазмы. Рассмотрению энергетического принципа посвящен § 2. Наиболее полно этот принцип сформулирован в работе Бернштейна, Фримена, Крускала и Кулсруда [15], хотя частично он использовался и ранее [12—14]. Согласно энергетическому принципу, для исследования гидромагнитной устойчивости идеальной плазмы достаточно рассмотреть лишь потенциальную энергию малых колебаний, которая дается формулой (2.7).

В § 3 показано, что выпуклая граница плазмы без замороженного магнитного поля неустойчива, а вогнутая устойчива. В § 4—6 рассматривается конвективная неустойчивость плазмы (Лонгмайр и Розенблют [16], Кадомцев [17]).

В § 7 рассматривается устойчивость пинча с продольным током и, в частности, устанавливается условие устойчивости Шафранова—Крускала по отношению к извиванию. Физический смысл такой «винтовой» неустойчивости разбирается в § 9. В § 8 рассматривается устойчивость шнура с распределенным током, в частности, выводится условие отсутствия конвективной неустойчивости (условие Сайдема [19]) и рассматривается устойчивость тонкого скин-слоя (по Розенблюту). В § 10 обсуждается вопрос об устойчивости тороидальных систем.

Устойчивость плазмы с конечной проводимостью в настоящее время изучена хуже. Поэтому здесь разбираются только два примера, когда отказ от условия идеальной проводимости приводит к появлению новых неустойчивостей. В § 11 рассматривается токово-конвективная неустойчивость, имеющая место в шнуре с током при условии, что проводимость плазмы меняется в пространстве. В § 12 рассматривается перегревная неустойчивость, которая развивается в обычно встречающихся условиях, когда проводимость плазмы зависит от температуры. Механизм перегривной неустойчивости, которая может быть существенной для анизотропии проводимости вдоль и поперек магнитного поля, был

предложен Леонтовичем и рассмотрен затем Шафрановым и Брагинским.

В данной работе устойчивость исследуется только в линейном приближении, т. е. фактически по отношению к бесконечно малым возмущениям. Если стать на точку зрения, что абсолютно устойчивое состояние плазмы является исключением из обычных условий неустойчивой плазмы, то значительно больший интерес представляет вопрос о том, к каким последствиям приводит неустойчивость плазмы. В настоящее время этот вопрос, связанный с учетом различного рода нелинейностей, усиленно разрабатывается, но его рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

### § 1. Уравнение малых колебаний

Математически задача об устойчивости сводится к исследованию малых колебаний вблизи равновесного состояния. Для колебаний с малой амплитудой можно воспользоваться линеаризованными уравнениями движения. Пусть  $q$ ,  $p$ ,  $\mathbf{v}$  представляют собой малые отклонения плотности, давления и магнитного поля от равновесных значений  $q_0$ ,  $p_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ . Тогда линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики можно записать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} (q_0 \mathbf{v}) = 0; \quad (1.1)$$

$$q_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}_0, \mathbf{v}] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{B}_0]; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость плазмы,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Вместо скорости  $\mathbf{v}$  удобно ввести смещение плазмы из положения равновесия  $\xi$ , так что  $\mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ . При этом уравнения (1.1), (1.3) и (1.4) могут быть проинтегрированы по времени, и  $q$ ,  $p$  и  $\mathbf{B}$  выражаются явно через  $\xi$ :

$$q = -\operatorname{div} (q_0 \xi); \quad p = -\xi \nabla p_0 - \gamma p_0 \operatorname{div} \xi; \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0]. \quad (1.5)$$

После подстановки этих выражений в уравнение (1.2) получается одно дифференциальное уравнение второго порядка для  $\xi$ :

$$q_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \nabla (\xi \nabla p_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \xi) + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}_0, \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0]] + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0], \mathbf{B}_0]. \quad (1.6)$$

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями. Плазма в лабораторных условиях обычно может быть представлена окружающей проводящим кожухом, на поверхности которого тангенциальная компонента электрического поля  $E_t$  обращается

в нуль (за исключением, быть может, некоторых щелевых разрезов на этом кожухе). Отсюда следует, что на таком кожухе должна обращаться в нуль нормальная компонента магнитного поля  $B_n$ . Если плазма соприкасается с неподвижными проводниками, в частности, с кожухом, то из условия  $E_t = 0$  следует условие  $[\xi \mathbf{B}_0]_t = 0$  на поверхности проводников. В общем случае оно означает, что смещение  $\xi$  должно обращаться в нуль в месте контакта. Однако в более частном, но чаще встречающемся случае, когда  $\mathbf{V}_0$  тангенциально поверхности проводника, это условие сводится к более простому  $\xi_n = 0$ .

С точки зрения термоизоляции высокотемпературной плазмы особый интерес представляют такие равновесные состояния плазмы, в которых плазма не соприкасается с внешними проводниками, а отделена от них некоторой вакуумной областью (с пренебрежимо малой плотностью). Этот случай является, очевидно, и более общим. Поэтому следует особо рассмотреть, как должны быть поставлены краевые условия на границе объема, занятого плазмой.

Пусть  $S_0$  есть равновесная граница между плазмой и вакуумом. Для общности предположим, что на границе плазмы может течь поверхностный ток, следовательно, при переходе через нее давление плазмы и магнитное поле могут испытывать конечные скачки. Поскольку такая граница является по существу математической идеализацией очень тонкого переходного слоя, который в равновесном состоянии представляет собой набор поверхностей постоянного давления, то и равновесная граница  $S_0$  является поверхностью постоянного давления. Поэтому нормальная компонента магнитного поля на  $S_0$  равна нулю. Кроме того, из уравнения равновесия

$$\nabla p_0 = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0] \quad (1.7)$$

следует, что полное давление  $p_0 + \frac{B_0^2}{8\pi}$  есть также непрерывная величина поперек поверхности, т. е.  $p_0 + \frac{B_{0i}^2}{8\pi} = \frac{B_{0e}^2}{8\pi}$ , где  $B_{0i}$  — поле внутри, а  $B_{0e}$  — снаружи от плазмы.

Аналогичное условие баланса давлений соблюдается и на смещенной поверхности, так как в противном случае ускорение границы было бы бесконечно большим. Оно имеет вид

$$p_0 + p + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{B}_i)^2 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B}_{0e} + \mathbf{B}_e)^2. \quad (1.8)$$

Здесь все величины берутся на смещенной границе, т. е. в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi_n \mathbf{n}_0$ , где  $\mathbf{r}_0$  — точка на поверхности  $S_0$ ,  $\mathbf{n}_0$  — нормаль к  $S_0$  в этой точке,  $\xi_n = (\mathbf{n}_0 \xi)$ . Разлагая выражение (1.8) в ряд по

малым величинам и ограничиваясь линейным приближением, получим одно из граничных условий:

$$-\gamma\rho_0 \operatorname{div} \xi + \frac{\mathbf{B}_{0t}\mathbf{B}_t}{4\pi} = \frac{\mathbf{B}_{0e}\mathbf{B}_e}{4\pi} + \frac{\xi_n}{8\pi} \left( \frac{\partial \mathbf{B}_{0e}^2}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{B}_{0t}^2}{\partial n} \right), \quad (1.9)$$

где значения всех величин берутся в произвольной точке равновесной границы  $S_0$ .

Второе граничное условие является следствием идеальной проводимости плазмы, т. е. вмороженности силовых линий. Ввиду того что проводимость плазмы по предположению бесконечна, электрическое поле  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_{0t}]$  в системе координат, связанной с жидкостью, тождественно равно нулю. А в силу непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля  $E_t^*$  снаружи от плазмы она также будет равна нулю:

$$E_t + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_{0e}]_t = 0. \quad (1.10)$$

Поскольку оба слагаемые здесь являются малыми величинами первого порядка, то это условие можно считать выполненным на невозмущенной границе и тогда его можно записать в виде:

$$[\mathbf{n}_0\mathbf{E}] = \frac{1}{c} v_n \mathbf{B}_{0e}. \quad (1.11)$$

Учитывая, что согласно уравнению Максвелла  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$  нормальная компонента магнитного поля выражается только через тангенциальные компоненты электрического поля, условие (1.10) можно записать еще в виде:

$$(\mathbf{n}_0\mathbf{B}_e) = \mathbf{n}_0 \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_{0e}]. \quad (1.12)$$

Снаружи от плазмы, в вакууме, электрическое и магнитное поля можно описывать при помощи векторного потенциала, полагая  $\mathbf{E}_e = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ;  $\mathbf{B}_e = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , причем на  $\mathbf{A}$  налагается условие калибровки  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . В силу отсутствия токов в этой области  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (1.13)$$

Граничное условие (1.12) можно, очевидно, записать и так:

$$[\mathbf{n}_0\mathbf{A}] = -\xi_n \mathbf{B}_{0e}. \quad (1.14)$$

Кроме того, потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет условию

$$[\mathbf{n}\mathbf{A}] = 0 \quad (1.15)$$

на металлическом кожухе.

Таким образом, задача о малых колебаниях плазмы вблизи равновесного состояния сводится к решению уравнений (1.6) и



(1.13) с граничными условиями (1.9) и (1.14) на свободной границе плазмы и с граничным условием (1.15) — на проводящем кожухе.

Вследствие линейности уравнений зависимость всех функций от времени можно выбрать в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Тогда после отделения временного множителя все соотношения останутся неизменными, и лишь в левой части уравнения (1.6) будет стоять  $-\epsilon_0 \omega^2 \xi$ . При этом задача об устойчивости сводится к задаче на собственные значения.

В § 2 будет показано, что в рассматриваемом здесь случае идеальной плазмы квадрат частоты  $\omega^2$  собственных колебаний является величиной действительной. Поэтому, если все собственные значения  $\omega_i^2$  положительны, то соответствующее равновесное состояние устойчиво. В противном случае, когда хотя бы одно из собственных значений  $\omega_i^2$  отрицательно, соответствующее возмущение будет экспоненциально нарастать со временем и, следовательно, равновесие является неустойчивым.

## § 2. Энергетический принцип

Задача об устойчивости в том виде, как она сформулирована в предыдущем параграфе, предполагает предварительное решение задачи о собственных колебаниях. В некоторых случаях с простейшей геометрией задача на собственные значения решается до конца, и это решение дает исчерпывающую информацию о низкочастотных колебаниях плазмы и, в частности, о ее устойчивости. Однако в более сложных геометрических условиях решение такой задачи связано со значительными математическими трудностями. Поэтому желательно иметь возможность судить об устойчивости или неустойчивости системы, не находя собственных частот. Именно этой цели и служит энергетический принцип, заключающийся в исследовании потенциальной энергии малых колебаний.

Прежде чем сформулировать его, покажем, что уравнение малых колебаний (1.6) является самосопряженным. Для этого запишем его в виде  $\epsilon_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\hat{K}\xi = F(\xi)$ , где  $\hat{K}$  — оператор, явное выражение которого дается правой частью уравнения (1.6). Физически  $F(\xi)$  можно интерпретировать как силу, а  $\hat{K}$  — как «коэффициент упругости» при малых смещениях плазмы из положения равновесия.

Нам достаточно доказать лишь самосопряженность оператора  $\hat{K}$ . Введем в рассмотрение некоторое вспомогательное смещение  $\eta$  и векторный потенциал  $\mathbf{Q}$ , удовлетворяющий совместно с  $\eta$  тем же граничным условиям, что и  $\mathbf{A}$  совместно с  $\xi$ , а именно:

$$[\mathbf{n}\mathbf{Q}] = \eta_n \mathbf{B}_{0e} \quad (2.1)$$

на границе плазмы и

$$[\mathbf{n}\mathbf{Q}] = 0 \quad (2.2)$$

на проводящем кожухе.

Для доказательства самосопряженности нужно показать, что  $\int \eta \widehat{K} \xi dr = \int \xi \widehat{K} \eta dr$  для любых  $\xi$  и  $\eta$ ;  $\eta$  и  $\xi$  — удовлетворяющих граничным условиям (1. 14), (1. 15), (2. 1) и (2. 2). Умножим  $\widehat{K} \xi$  на  $\eta$  и проинтегрируем по объему  $V_i$ , занятому плазмой. После интегрирования по частям получим

$$\int_{V_i} \eta \widehat{K} \xi dr = \int_{V_i} \left\{ \gamma p_0 \operatorname{div} \eta \operatorname{div} \xi + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} [\eta \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] + \xi \nabla p_0 \operatorname{div} \eta - \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} [\eta \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] \right\} dr + \oint_{S_0} \left( p + \frac{\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0}{4\pi} \right) \eta_n dS. \quad (2. 3)$$

Покажем, что в объемном интеграле в правой части выражения (2.3)  $\eta$  и  $\xi$  входят совершенно симметрично. Для первых двух слагаемых подынтегрального выражения это вполне очевидно, поэтому нужно рассмотреть только два последних. В эти слагаемые составляющая смещения вдоль магнитного поля  $\xi_{\parallel}$  не входит. Покажем, что  $\eta_{\parallel}$  тоже в них не входит. Действительно, полагая  $\eta = \eta_{\parallel} = \alpha \mathbf{B}_0$  и пользуясь условием равновесия (1. 7), получаем

$$\xi \nabla p_0 \operatorname{div} \eta_{\parallel} - \frac{1}{4\pi} [\eta_{\parallel} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] = \xi \nabla (\mathbf{B}_0 \nabla \alpha) + \\ + \alpha \nabla p_0 \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] = \operatorname{div} (\eta_{\parallel} \cdot \xi \nabla p_0).$$

Следовательно, соответствующий интеграл может быть преобразован в интеграл по поверхности  $S_0$ , который исчезает в силу  $n_0 \eta_{\parallel} = 0$ .

Допустим теперь, что  $\nabla p_0$  в нуль тождественно не обращается. Тогда ток не совпадает по направлению с магнитным полем, и  $\xi$  и  $\eta$  можно разложить по векторам  $\mathbf{B}_0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{e} = \nabla p_0 / |\nabla p_0|$ . Но поскольку составляющая смещения вдоль поля из последних двух слагаемых объемного интеграла (2. 3) выпадает, то можно принять

$$\xi = \xi_1 \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \xi_2 \mathbf{e} \quad \text{и} \quad \eta = \eta_1 \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 + \eta_2 \mathbf{e}.$$

Пользуясь таким представлением  $\xi$  и  $\eta$  и условием равновесия, получаем

$$- \frac{1}{4\pi} [\eta \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] = - \frac{\eta_2}{4\pi} [\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} \{ 4\pi \xi_1 \nabla p_0 + \xi_2 [\mathbf{e} \mathbf{B}_0] \} = \\ = \eta \nabla p_0 (\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \nabla \xi_1) + \eta \nabla p_0 \operatorname{div} (\mathbf{e} \xi_2) + \eta_2 \xi_2 \frac{1}{4\pi} [\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \{ (\mathbf{e} \nabla) \mathbf{B}_0 - \\ - (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{e} \}.$$

Таким образом, рассматриваемая нами сумма приводится к виду, совершенно симметричному относительно  $\eta$  и  $\xi$ :

$$\xi \nabla p_0 \operatorname{div} \eta - \frac{1}{4\pi} [\eta \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] = \xi_{\perp} \nabla p_0 \operatorname{div} \eta_{\perp} + \eta_{\perp} \nabla p_0 \operatorname{div} \xi_{\perp} + \\ + (\eta \mathbf{e}) (\xi \mathbf{e}) \frac{1}{4\pi} (\mathbf{e} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0) \{ (\mathbf{e} \nabla) \mathbf{B}_0 - (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{e} \}. \quad (2. 4)$$

Теперь в выражении (2.3) нужно преобразовать к симметричному виду интеграл по поверхности. Учитывая граничные условия (2.1) и (2.2) для  $\mathbf{Q}$ , с помощью интегрирования по частям получаем

$$\oint_{S_0} \eta_n (\mathbf{B}_{0e} \operatorname{rot} \mathbf{A}) dS = \int_{V_e} \{ \operatorname{rot} \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \} dr, \quad (2.5)$$

где интеграл в правой части берется по объему вне плазмы.

Пользуясь этим соотношением и добавляя в выражение (2.3) взаимно уничтожающиеся слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} \eta \hat{\mathbf{K}} \xi dr + \frac{1}{4\pi} \int_{V_e} \mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} dr - \oint_{S_0} \left\{ -\gamma p_0 \operatorname{div} \xi + \frac{\mathbf{B}_{0i} \mathbf{B}_i}{4\pi} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi} \xi_n \left( \frac{\partial B_{0e}^2}{\partial n} - \frac{\partial B_{0i}^2}{\partial n} \right) - \frac{\mathbf{B}_{0e} \operatorname{rot} \mathbf{A}}{4\pi} \right\} \eta_n dS = \int_{V_i} \left\{ \gamma p_0 \operatorname{div} \eta \operatorname{div} \xi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} [\eta \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] + \xi \nabla p_0 \operatorname{div} \eta - \frac{1}{4\pi} [\eta \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] \right\} dr + \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{V_e} \operatorname{rot} \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{Q} dr + \oint_{S_0} \eta_n \xi_n \left( \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_{0e}^2}{\partial n} - \frac{\partial p_0}{\partial n} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_{0i}^2}{\partial n} \right) dS. \right. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если учесть теперь граничное условие (1.8), выражающее собой равенство давлений на смещенной границе, и условие (1.13) отсутствия тока в вакууме, то в левой части выражения (2.6) останется только первый интеграл. Но это означает, что интеграл  $\int \eta \hat{\mathbf{K}} \xi dr$  может быть представлен в виде правой части выражения (2.6), полностью симметричной относительно пары векторов  $\xi$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\eta$ ,  $\mathbf{Q}$ , т. е. оператор  $\hat{\mathbf{K}}$  является самосопряженным.

Самосопряженность уравнения малых колебаний означает, что его можно получить из вариационного принципа наименьшего действия  $\delta \{ \int L dt \} = 0$ , где  $L$  есть функция Лагранжа, равная разности кинетической энергии  $T = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_0 \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr$  и потенциальной

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \int_{V_i} \left\{ \gamma p_0 (\operatorname{div} \xi)^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0])^2 + \xi \nabla p_0 \operatorname{div} \xi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} [\xi \operatorname{rot} \mathbf{B}_0] \operatorname{rot} [\xi \mathbf{B}_0] \right\} dr + \frac{1}{8\pi} \int_{V_e} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 dr - \frac{1}{2} \oint_{S_0} \left( \frac{\partial p_0}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_{0i}^2}{\partial n} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_{0e}^2}{\partial n} \right) \xi_n^2 dS. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Действительно, если проварьировать потенциальную энергию (2.7) по  $\xi$  и  $\mathbf{A}$  при дополнительных условиях «вмороженности»

$[n_0 \delta \mathbf{A}]_{S_0} = (n_0 \delta \xi) \mathbf{B}_{0e}$ ,  $[n \delta \mathbf{A}]_{S_e} = 0$ , то мы получим выражение, совпадающее с левой частью выражения (2.6) при  $\eta = \delta \xi$  и  $\mathbf{Q} = \delta \mathbf{A}$ . А вариация интеграла по времени от кинетической энергии равна  $\delta \int T dt = - \iint \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi dr dt$ . Полагая  $\delta \int L dt = 0$  и учитывая произвольность вариаций  $\delta \xi$  и  $\delta \mathbf{A}$ , получаем уравнения (1.6), (1.13) и граничное условие (1.7).

В силу общих теорем механики мы можем заключить отсюда, что для устойчивости плазмы необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия малых колебаний (2.7) была положительной для любого смещения  $\xi$  и потенциала  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющего граничным условиям (1.14) и (1.15). Или, другими словами, должно быть положительным минимальное значение  $W$ .

Заметим, что энергетический принцип позволяет также приближенно находить частоты собственных колебаний (с помощью прямых вариационных методов). Действительно, если зависимость от времени всех величин выбрать в виде  $\exp(-i\omega t)$ , то уравнение малых колебаний приводится к виду  $\omega^2 \rho_0 \xi = \hat{K} \xi$ , которое может быть получено из вариационного принципа  $\delta(\omega^2) = 0$ , где

$$\omega^2 = \frac{\int \xi \hat{K} \xi dr}{\int \rho_0 \xi^2 dr}. \quad (2.8)$$

Из последнего выражения, в частности, следует, что  $\omega^2$  является действительной величиной.

Пользоваться энергетическим принципом удобно в тех случаях, когда нужно получить какие-либо общие сведения об устойчивости равновесных систем. Для сравнительно простых конфигураций разумнее решать уравнение малых колебаний, так как тем самым дается не только ответ об устойчивости или неустойчивости системы, но и полная информация о всех колебаниях, знание которых может представлять самостоятельный интерес. Ввиду этого в последующем изложении используется и энергетический принцип, и метод собственных колебаний.

### § 3. Устойчивость границы плазма — магнитное поле

Рассмотрим простейший случай, когда внутри плазмы магнитное поле отсутствует и, следовательно, все токи текут по поверхности. При этом выражение для потенциальной энергии значительно упрощается, а именно:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_i} \gamma \rho_0 (\operatorname{div} \xi)^2 dr + \frac{1}{8\pi} \int_{V_e} (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 dr + \frac{1}{16\pi} \int_{S_0} \frac{\partial B_0^2}{\partial n} \xi_n^2 dS. \quad (3.1)$$

Если  $\frac{\partial B_0^2}{\partial n} > 0$ , т. е. магнитное поле всюду нарастает от границы плазмы наружу, то потенциальная энергия положительна

и плазма устойчива. Рассмотрим обратный случай, когда  $\frac{\partial B_0^2}{\partial n} < 0$  на некотором участке поверхности  $S_0$ . Покажем, что при этом всегда можно найти возмущение, для которого потенциальная энергия отрицательна. Для простоты ограничимся возмущениями с очень короткой длиной волны. Для таких возмущений границу приближенно можно считать плоской. Введем локальную систему координат с осью  $x$ , направленной по нормали к поверхности, и осью  $z$  вдоль магнитного поля. Выберем для  $\xi_n = \xi_x$  простейшую зависимость от  $y$  и  $z$ , а именно:  $\xi_x = \xi_0 \exp(ik_y y + ik_z z)$ . Потенциал  $\mathbf{A}$  можно искать в виде  $\mathbf{A}_0 \exp(ikr)$ , где  $\mathbf{A}_0 = \text{const}$ . Минимизация выражения (3.1) по  $\mathbf{A}$  дает  $\text{rot rot } \mathbf{A} = 0$ , т. е.

$$k^2 \mathbf{A}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{A}_0 \mathbf{k}) = 0. \quad (3.2)$$

Из граничного условия (1.14) получаем:  $A_{0z} = 0$ ,  $A_{0y} = -\xi_n B_0$ .

Поскольку магнитное поле  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = i[\mathbf{kA}]$  определяется только поперечной компонентой  $\mathbf{A}$ , то без ограничения общности можно положить  $\mathbf{kA}_0 = 0$ , и тогда из соотношения (3.2) следует:  $k^2 = 0$ , т. е.  $k_x = -i\sqrt{k_y^2 + k_z^2} = -ik$ . Учитывая, что  $A_x k_x + A_y k_y = 0$ , находим

$$|\text{rot } \mathbf{A}|^2 = 2k_z^2 B_0^2 \xi_0^2 e^{-2\kappa z}.$$

Далее, так как рассматриваемое возмущение не изменяет количества вещества внутри поверхности  $S_0$ , т. е.  $\int_{S_0} \xi_n dS = 0$ , то  $\xi$  можно так продолжить внутрь плазмы, чтобы  $\text{div } \xi = 0$ , т. е. смещение было бы «несжимаемым». Тогда первый интеграл в выражении (3.1) исчезнет, а остальные два приводят к следующей величине энергии на единицу поверхности  $W_S$ :

$$W_S = \left[ \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{k_z^2 B_0^2}{\kappa} + \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{\partial B_0^2}{\partial n} \right] \xi_0^2. \quad (3.3)$$

Отсюда видно, что при  $\frac{\partial B_0^2}{\partial n} < 0$  потенциальная энергия становится отрицательной для возмущений с  $k_z^2/\kappa \rightarrow 0$ , т. е. с большой длиной волны вдоль силовых линий.

Волна такого возмущения имеет вид «языка», ориентированного вдоль силовых линий (рис. 1). Такой «язык» очень слабо возмущает магнитное поле: он как бы просовывается между силовыми линиями, лишь немного раздвигая их. Если  $\frac{\partial B_0^2}{\partial n} < 0$ , то «кончик языка» попадает в область, где магнитное давление меньше  $p_0$ , и эта разность давлений приведет к дальнейшему натеканию плазмы в «язык», а следовательно, к ускоренному его вытягиванию.

Заметим, что аналогичная неустойчивость может быть и в том случае, когда  $\frac{\partial B_0^2}{\partial n} = 0$ , но плазма находится в поле тяжести, направленной в сторону магнитного поля. При этом давление магнитного поля всюду одинаково, поэтому сила тяжести «языка»

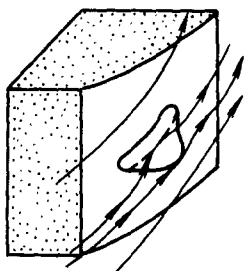


Рис. 1

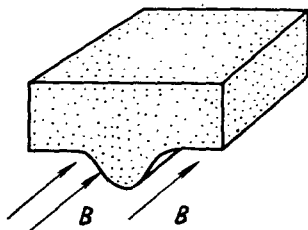


Рис. 2

ничем не компенсируется, и он с ускорением вытекает вниз (рис. 2). Такая неустойчивость, как мы видим, сходна с исследованной Тейлором и Релеем неустойчивостью тяжелой жидкости, поддерживаемой снизу легкой. Правда, эта аналогия не совсем полная.

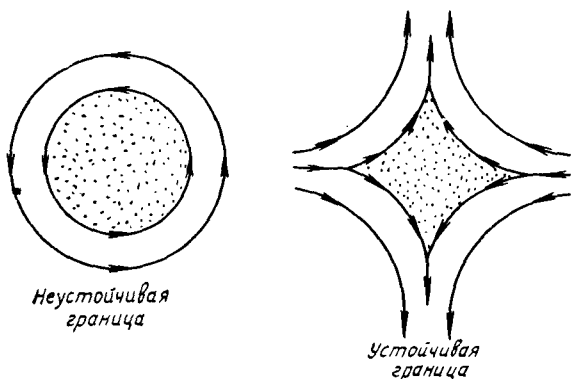


Рис. 3

Она относится только к возмущениям, вытянутым вдоль силовых линий. Возмущения, у которых  $k_z/k$  не является малой величиной, сильно деформируют магнитное поле, искривляя силовые линии, и не приводят к неустойчивости. Примером такого возмущения может служить «язык», ориентированный поперек силовых линий.

Обычная неустойчивость Тейлора — Релея является по сути дела предельным случаем конвективной неустойчивости неоднородной (или неравномерно нагретой) жидкости в поле тяжести. Точно так же неустойчивость границы плазмы с полем представляет

собой предельный случай конвективной неустойчивости плазмы (см. § 5). Поэтому рассмотренные выше возмущения языкообразного вида, являющиеся почти постоянными вдоль силовых линий, мы будем называть конвективными.

Итак, граница плазмы с полем устойчива только в случае вогнутых силовых линий, когда магнитное поле нарастает в сторону от плазмы. Если силовые линии выпуклые, то граница неустойчива по отношению к конвективным возмущениям (рис. 3). Эта неустойчивость приводит к «рифлению» поверхности плазмы вдоль силовых линий и в конечном счете к выталкиванию плазмы в сторону более слабого магнитного поля. Поскольку при этом происходит взаимозамещение плазмы и магнитного поля, то конвективные возмущения называют еще перестановочными.

#### § 4. Пинч без продольного поля

Теперь на примере пинча, т. е. плазменного столба, удерживаемого текущим вдоль него током, рассмотрим устойчивость плазмы во внутренней области. Предположим, что плазма занимает весь объем вплоть до проводящих стенок.

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии. Тогда уравнение равновесия в отсутствие продольного магнитного поля можно записать в виде

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B}{4\pi r} \frac{d}{dr} (rB) \quad (4.1)$$

(для простоты здесь опущен нулевой индекс у равновесных величин).

Рассмотрим сначала возмущения, не зависящие от азимута  $\varphi$ . Для таких конвективных возмущений потенциальная энергия равна:

$$W = \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right]^2 + \frac{1}{4\pi} \left[ B \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (B\xi_r) \right]^2 + \xi_r \frac{dp}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] + \xi_r \frac{dp}{dr} \left[ \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial r} (B\xi_r) \right] \right\} dr. \quad (4.2)$$

Подынтегральное выражение, как нетрудно видеть, представляет собой квадратичную форму только от двух переменных:  $\xi_r$  и  $\text{div } \xi$ , которые можно считать независимыми в силу независимости  $\xi_r$  и  $\xi_z$ .

Как известно, квадратичная форма  $\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$  от нескольких переменных  $x_i$  является положительно определенной, если положительны все главные миноры матрицы  $a_{ij}$ . Применяя этот критерий к выражению (4.2), можно получить условие устойчивости.

Производя несложные выкладки, это условие можно привести к виду

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta}, \quad (4.3)$$

где  $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$  — отношение давления плазмы к давлению магнитного поля.

Условие (4.3) должно быть выполнено во всех точках  $r$ . Действительно, пусть это условие оказывается нарушенным вблизи некоторой точки  $r_0$ . Тогда в окрестности этой точки можно выбрать такие  $\xi_r$  и  $\text{div } \xi$ , скажем  $\xi_r = \alpha \text{div } \xi$ ,  $\alpha = \text{const}$ , что подынтегральное выражение будет отрицательным. Построим теперь локальное возмущение, которое быстро спадает до нуля при удалении от точки  $r_0$ , а вблизи этой точки  $\xi_r = \alpha \text{div } \xi$ . Такое возмущение имеет вид перестановки двух силовых трубок. Если, например,  $\alpha > 0$ , то трубка с плазмой при смещении по радиусу немного расширяется, а плазма, вытесняемая этой трубкой к оси, должна немного сжаться. Потенциальная энергия для такого локального возмущения будет определяться только окрестностью точки  $r_0$  и поэтому может быть отрицательной, если условие (4.3) не выполнено. В этом случае будет иметь место конвективная неустойчивость.

Условие (4.3) требует, чтобы давление плазмы не слишком быстро убывало с увеличением  $r$ . Если учесть условие равновесия (4.1), которое можно записать в виде

$$\frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{1}{1 + \beta} \left( \frac{d \ln \beta}{d \ln r} - 2 \right), \quad \text{где} \quad \beta = \frac{8\pi p}{B^2},$$

и заменить в выражении (4.3) знак неравенства на равенство, то мы получим предельное распределение давления, которое еще устойчиво по отношению к аксиально-симметричным возмущениям. В параметрической форме при  $\gamma = 5/3$  оно имеет вид

$$p = p_0 \left( \frac{\beta}{0,8 + \beta} \right)^{5/2}; \quad r = a \frac{0,8 + \beta}{\beta^{1/4}}. \quad (4.4)$$

Здесь  $p_0$  — давление при  $r = 0$ , т. е.  $\beta = \frac{8\pi p}{B^2} \rightarrow \infty$ ,  $a$  — некоторый характерный радиус шнура. Это распределение представлено на рис. 4. Согласно формулам (4.4), давление плазмы не может убывать при удалении от пинча быстрее, чем  $r^{-2\gamma} = r^{-10/3}$ . Если давление спадает более круто, чем по закону (4.4), то шнур неустойчив по отношению к аксиально-симметричным возмущениям. В частности, в предельном случае пинча со сравнительно резкой границей эта неустойчивость проявляется в образовании «шеек» или «перетяжек» на границе шнура (рис. 5). При этом особенно четко выступает перестановочный характер этой неустойчивости.



Образование таких перетяжек можно истолковать как результат сгущения силовых линий около шейки, где магнитное поле больше, чем на остальных участках границы, более удаленных от оси шнура. Вследствие натяжения силовых линий вблизи шейки плазма выдавливается из перетяжки.

Рассмотрим теперь возмущения, зависящие от азимута  $\varphi$ . Так как любое возмущение можно разложить в ряд Фурье и разные гармоники взаимно ортогональны ( $\int \xi_r \xi_k dr = 0$ ), то без ограничения общности зависимость от  $\varphi$  можно выбрать в виде

$$\xi_r = \xi_r(r, z) \sin m\varphi; \quad \xi_\varphi = \xi_\varphi(r, z) \cos m\varphi; \quad \xi_z = \xi_z(r, z) \sin m\varphi.$$

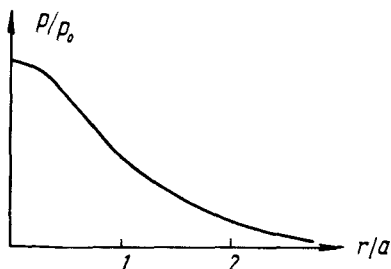


Рис. 4

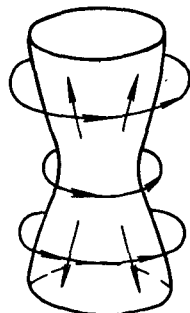


Рис. 5

При этом в подинтегральном выражении (2.7) появятся множители  $\cos^2 m\varphi$  и  $\sin^2 m\varphi$ , дающие при усреднении  $1/2$ . Легко видеть, что компонента смещения вдоль магнитного поля  $\xi_\varphi$  входит только в первое слагаемое подинтегрального выражения (2.7) и при  $m \neq 0$  всегда можно так подобрать  $\xi_\varphi$ , чтобы  $\text{div } \xi = 0$ . Нетрудно проверить, что для таких возмущений потенциальная энергия  $W$  отличается от выражения (4.2) только тем, что в подинтегральном выражении слагаемое  $\gamma\rho (\text{div } \xi)^2$  будет отсутствовать, но зато появится новое слагаемое

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{m^2 B^2}{r^2} (\xi_r^2 + \xi_z^2).$$

В силу трансляционной симметрии по  $z$  зависимость возмущений от  $z$  можно выбрать в виде  $\exp(ikz)$ , и тогда в  $\text{div } \xi_\perp$  компонента  $\xi_z$  будет входить в произведении с  $k$ . Поэтому если  $k$  устремить к бесконечности, оставляя  $k\xi_z$  неизменным, то слагаемое  $m^2 B^2 \xi_z^2 / 4\pi r^2$  исчезнет и мы снова получим квадратичную форму только от двух переменных:  $\xi_r$  и  $\text{div } \xi_\perp$ . Отсюда опять нетрудно получить условие устойчивости. Оно имеет вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < \frac{m^2}{\beta}. \quad (4.5)$$

Поскольку  $\gamma > 1$ , то возмущения с  $m \geq 2$  не приводят к неустойчивости, если выполнено условие (4.3). Однако возмущения

с  $m = 1$  при  $\beta > 2\gamma/3$ , т. е. во внутренней части шнура, дают более жесткое условие устойчивости, чем условие (4.3). Можно сказать, что внутри пинча в первую очередь развивается змейковая ( $m = 1$ ), а на его периферии шейковая неустойчивость ( $m = 0$ ).

Таким образом, с учетом возмущений с  $m = 1$  распределение (4.4) не является устойчивым. Но если вдоль оси шнура расположить проводник с током, то можно добиться, чтобы параметр  $\beta$  был достаточно мал, и тогда трубчатое распределение плазмы, в котором давление не слишком быстро убывает с увеличением радиуса, будет устойчиво.

Условие (4.4) также представляет собой ограничение на крутизну спада давления. У пинча с резкой границей могут развиваться возмущения с любыми  $m$ . При  $m = 1$  возмущение приводит к извиванию шнура, и неустойчивость в этом случае можно рассматривать как следствие сгущения силовых линий на вогнутой

и разрежения на выпуклой стороне искривленного шнура. Для высших  $m$  возмущенный шнур имеет вид многозаходного винта (рис. 6). Такие возмущения приводят к неустойчивости только в том случае, если шаг винта не очень велик (т. е. отношение  $m/ka$  не очень большое).

### § 5. Конвективная неустойчивость плазмы низкого давления

Рассмотрим частный случай плазмы низкого давления ( $\beta \ll 1$ ). При этом условии устойчивости по отношению к возмущениям с  $m \neq 0$  отпадает, а условие (4.3) принимает вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < 2\gamma. \quad (5.1)$$

Таким образом, если  $B_z = 0$  и давление плазмы много меньше давления магнитного поля, то наличие или отсутствие устойчивости определяется только одним условием (5.1). Оказывается, что условие (5.1) является лишь частным случаем более общего условия конвективной устойчивости для произвольного поля с замкнутыми силовыми линиями. Представим себе отдельную замкнутую трубку, образованную силовыми линиями магнитного поля и заполненную плазмой с давлением  $p \ll B^2/8\pi$ . Так как плазма стремится расширяться, то эта трубка выталкивается в сторону увеличения своего объема. Однако движение трубки в сильном магнитном поле не является свободным: всякое заметное ее искривление связано с большим увеличением магнитной энергии

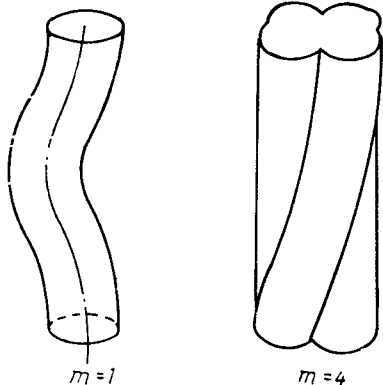


Рис. 6

и поэтому недопустимо. Допустимым является лишь такое перемещение трубки, при котором магнитное поле остается неизменным, т. е. магнитное поле в том месте, куда пришла трубка, должно остаться практически таким же, что и до ее прихода.

Объем силовой трубки равен  $V = \oint s dl$ , где  $s$  — поперечное сечение трубки, а интеграл берется вдоль силовой линии. Но  $sB = \phi$  есть магнитный поток этой трубки, который остается постоянным как вдоль трубки, так и во времени в силу замороженности магнитного потока в идеальную плазму. Поэтому

$$V = \phi \oint \frac{dl}{B}, \text{ и, следовательно, трубка с плазмой стремится}$$

двигаться в сторону увеличения интеграла  $\oint \frac{dl}{B}$ . Можно сказать,

что трубка с плазмой в магнитном поле обладает потенциальной энергией  $pU$ , где  $U = - \oint \frac{dl}{B}$ , и стремится двигаться в сторону

убывания  $U$ . По аналогии с неоднородной жидкостью в поле тяжести отсюда можно заключить, что плазма будет в равновесии только в том случае, если ее давление будет постоянно на поверхности постоянного  $U$ , т. е.  $p = p(U)$ .

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости такого равновесного состояния плазмы. Предположим, что некоторая трубка с плазмой смещается на бесконечно малую величину, раздвигая остальные трубки. Если это смещение конвективного типа, т. е. не искажающее магнитного поля, то относительное изменение объема трубки равно  $\delta V/V = \delta U/U$ , а изменение давления вследствие адиабатического расширения  $dp = -\gamma p \delta U/U$ . Давление же в трубках, окружающих рассматриваемую нами смещенную трубку,

$$\text{равно } p(U + \delta U) = p + \frac{dp}{dU} \delta U. \text{ Если смещение происходит}$$

в сторону возрастания  $U$ , а давление в смещенной трубке оказывается меньше, чем давление окружающей ее плазмы, то трубка будет стремиться всплывать и, следовательно, такое распределение плазмы неустойчиво. Если же, наоборот, давление в трубке

$$\text{окажется больше, т. е. } -\gamma p \frac{\delta U}{U} > \frac{dp}{dU} \delta U, \text{ то трубка будет вытесняться}$$

в сторону равновесия и плазма будет устойчива. Таким образом, в магнитной ловушке с замкнутыми силовыми линиями должно выполняться следующее условие устойчивости:

$$\frac{dp}{dU} < \frac{\gamma p}{|U|}. \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что устойчивыми являются не только такие состояния плазмы, когда давление падает при увеличении  $U$ , но и состояния, в которых давление возрастает вместе с  $U$ , но не слишком быстро. Это условие вполне аналогично условию конвекционной устойчивости неоднородного сжимаемого газа в поле тяжести. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а. **Магнитное поле прямого тока.** Поле прямого тока спадает как  $r^{-1}$ , а длина силовой линии пропорциональна  $r$ , поэтому  $U$  при удалении от проводника спадает как  $-r^2$ . Условие устойчивости (5. 2) совпадает, очевидно, с условием (5. 1).

б. **Точечный диполь.** Магнитное поле точечного диполя также можно рассматривать как магнитную ловушку. Природной ловушкой такого вида является магнитное поле Земли, а существование ионных поясов около Земли непосредственно демонстрирует ее эффективность.

Предположим, что поверхность диполя изолирующая, так что концы силовых линий не вморожены в его поверхность. Такая

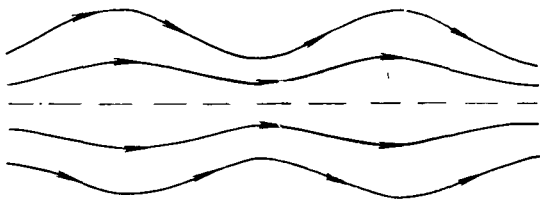


Рис. 7

ситуация, в частности, будет иметь место, если поле создается кольцевым током малых размеров. В этом случае в плазме допустимы конвективные возмущения, и, следовательно, условие устойчивости имеет вид условия (5. 2). Так как магнитное поле диполя падает как  $r^{-3}$ , а длина силовой линии пропорциональна  $r$ , то  $U \sim -r^4$  и условие устойчивости принимает вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < 4\gamma. \quad (5. 3)$$

в. **Гофрированное поле.** Рассмотрим осесимметричное периодическое поле с  $B_\varphi = 0$ . Силовые линии такого гофрированного поля изображены на рис. 7. Каждую «секцию» этого поля можно рассматривать как ловушку с магнитными пробками. Поэтому исследование устойчивости в таком поле может пролить свет на устойчивость плазмы в ловушке с магнитными пробками. Нетрудно видеть, что в гофрированном поле «потенциальная энергия»  $U$  убывает с  $r$  (т. е.  $U$  возрастает по абсолютной величине при удалении от оси системы). Действительно, в силу отсутствия тока в ловушке  $\int B dl = \text{const}$ . Поэтому  $\int \frac{dl}{B} = \int \frac{1}{B^2} B dl$ , т. е.  $|U|$  можно рассматривать как среднее значение от  $\left(\frac{1}{B}\right)^2$ . Но среднее значение от квадрата некоторой величины всегда больше квадрата средней величины, поэтому

$$\int \frac{dl}{B} > \frac{\left(\int dl\right)^2}{\int B dl} = \text{const } l^2,$$

т. е.  $|U|$  возрастает с увеличением длины силовой линии. Как видно из рис. 7, силовые линии, расположенные дальше от оси симметрии, являются более длинными и поэтому  $U = - \int \frac{dl}{B}$  убывает при удалении от оси. Отсюда следует, что всякое распределение плазмы, в котором ее давление обращается в нуль на некоторой силовой линии, является неустойчивым, так как в этих точках  $p = 0$ , а  $\frac{dp}{dU} \neq 0$ . Другими словами, плазма в гофрированном поле, вообще говоря, неустойчива.

Из этого рассмотрения делаем еще один вывод. Ввиду того что всякое увеличение неоднородности магнитного поля с помощью

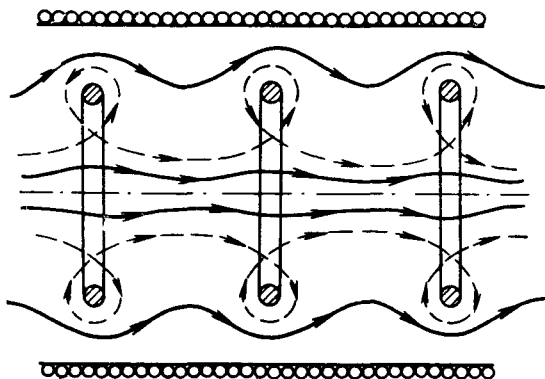


Рис. 8

внешних проводников приводит к удлинению периферийных силовых линий, то плазма имеет тенденцию двигаться в сторону неоднородности магнитного поля, т. е. к внешним обмоткам.

г. **Многосвязные ловушки.** Конвективная неустойчивость плазмы является в конечном счете следствием диамагнетизма плазмы, в силу которого она выталкивается из областей с более сильным магнитным полем. Поэтому с точки зрения устойчивости следует отдать предпочтение таким ловушкам, в которых магнитное поле в среднем нарастает при удалении от области, занятой плазмой.

Одной из ловушек такого вида является периодическая система (рис. 8), состоящая из прямого соленоида и проводящих колец с током, текущим в направлении, противоположном направлению тока в соленоиде. В этой ловушке неоднородность поля создается кольцами, поэтому как трубки с плазмой, расположенные вблизи оси симметрии, так и трубки около соленоида будут с ускорением двигаться в сторону колец. И лишь те трубки, которые располагаются на пунктирных силовых линиях, проходящих через точки, где поле обращается в нуль, будут устойчивы, поскольку на этих линиях  $U$  обращается в минус бесконечность.

Поскольку  $U$  нарастает во все стороны от пунктирных силовых линий, то любое такое распределение плазмы низкого давления, в котором ее давление монотонно убывает при удалении от этих линий, заведомо является устойчивым. Однако такая ловушка обладает тем существенным недостатком, что плазма занимает многосвязную область, окружающую кольца с током, и поэтому возникает трудность удержания колец.

### § 6. Стабилизирующее действие проводящих торцов

Условие устойчивости (5. 2) относится только к системам с замкнутыми силовыми линиями. Но такие системы образуют лишь специальный довольно узкий класс, поскольку в общем случае силовые линии не замыкаются.

Рассмотрим случай, когда силовые линии упираются в проводники с бесконечной проводимостью. Следует иметь в виду, что распределение электронов и ионов по скоростям в таком поле

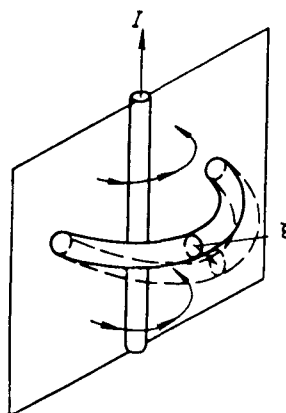


Рис. 9

должно быть сильно анизотропным, так как в противном случае частицы уйдут вдоль силовых линий и рекомбинируют на стенках. Однако для качественных оценок можно считать распределение изотропным и воспользоваться гидродинамическим приближением, но при этом необходимо допустить, что рекомбинация на торцовых электродах отсутствует и давление плазмы постоянно вдоль силовых линий вплоть до стенок. Здесь мы воспользуемся именно такой гидродинамической моделью и предположим, кроме того, что между плазмой и электродами обеспечен хороший электрический контакт, и, следовательно, концы силовых линий можно считать замороженными в проводники.

Начнем опять с простейшего примера, а именно с поля прямого тока. Предположим, что цилиндрически симметричный столб плазмы, расположенный в поле прямого тока, разделен пополам вдоль оси  $z$  идеально проводящей плоскостью (рис. 9). На этой плоскости смещение  $\xi$  равно нулю, и поэтому возмущения с  $m = 0$  недопустимы. Это означает, что всякое возмущение будет приводить к деформации силовых линий. Но все же по-прежнему наиболее опасными являются возмущения перестановочного типа, которые минимально искажают магнитное поле. Приближенно можно считать, что они соответствуют возмущениям с  $m = 1$ , поскольку эти последние удовлетворяют условию  $\xi_{\perp} = 0$  на границе и меньше всего искривляют силовые линии. Так как перетекание плазмы через перегородку запрещено, то при этом уже нельзя добиться обращения в нуль  $\text{div } \xi$ . Поэтому в выражении для потенциальной энергии будут присутствовать оба стабилизи-

рующих слагаемых, и приближенное условие устойчивости можно получить суммированием правых частей неравенств (4.5) и (5.1). Это условие имеет вид

$$-\frac{d \ln p}{d \ln r} < 2\gamma + \frac{1}{\beta}, \quad (6.1)$$

где

$$\beta = \frac{8\pi\rho}{B^2}.$$

Второе слагаемое здесь выражает собой стабилизирующее действие проводящей плоскости. Для возмущений с  $m \geq 2$  можно по-прежнему пользоваться формулой (4.5), поскольку для них уже можно подобрать такое  $\xi_\varphi$ , чтобы  $\operatorname{div} \xi = 0$ .

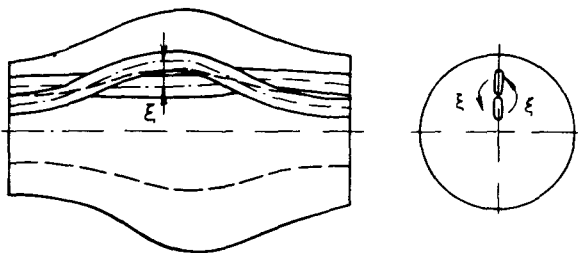


Рис. 10

Аналогичное рассмотрение можно провести и для более реальных систем. Рассмотрим, например, ловушку с магнитными пробками длиной  $L$  (рис. 10). Представим себе возмущение конвективного типа, соответствующее перестановке двух трубок. Эти трубки не могут быть переставлены целиком, поскольку они закреплены на концах. Поэтому магнитное поле несколько искажается, и вследствие натяжения силовых линий возникает некоторая возвращающая сила. Наиболее опасное возмущение должно давать минимальное искажение поля. Поэтому мы рассмотрим перестановку двух трубок, имеющих форму «ленточек»: такие трубки мало изгибаются в азимутальном направлении и поэтому дают минимальное возмущение поля по азимуту.

Относительное изменение объема трубки при конвективном возмущении  $\operatorname{div} \xi \cong \xi \frac{\nabla U}{U}$ , а изменение магнитного поля в результате изгиба линий приближенно равно  $B' \approx B \frac{\partial \xi_r}{dz} \approx \frac{\pi}{L} \xi_r B$ , причем для рассматриваемых нами возмущений оно направлено по радиусу, т. е. вдоль  $\xi$ . Поэтому последнее слагаемое подынтегрального выражения в (2.7) выпадает, и мы получаем приближенно:

$$W \cong \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p \left( \frac{\nabla U}{U} \right)^2 + \frac{\pi^2 B^2}{4\pi L^2} + \frac{\nabla p \nabla U}{U} \right\} \xi^2 d\tau. \quad (6.2)$$

Отсюда получаем условие устойчивости:

$$-\frac{\nabla p \nabla U}{U} < \gamma p \left( \frac{\nabla U}{U} \right)^2 + \frac{\pi B^2}{4L^2}. \quad (6.3)$$

Здесь второе слагаемое как раз и учитывает стабилизирующее действие проводящих торцов.

Например, для ловушки, созданной диполем с проводящей поверхностью, из условия устойчивости (6.3) можно получить

$$-r \frac{dp}{dr} < 4\gamma p + \frac{aB^2}{8\pi}, \quad (6.4)$$

где  $a$  — численный коэффициент порядка единицы. В качестве такой ловушки можно рассматривать магнитное поле Земли, поскольку плотную проводящую ионосферу с хорошей точностью можно считать твердым идеальным проводником.

### § 7. Скинированный пинч с продольным полем

В рассмотренных выше простейших случаях условие устойчивости имело локальный характер. Объясняется это тем, что геометрически или, вернее, топологически рассмотренные системы весьма просты: силовые линии идут в них «параллельно», не удаляясь одна от другой на большие расстояния. Поэтому смещение

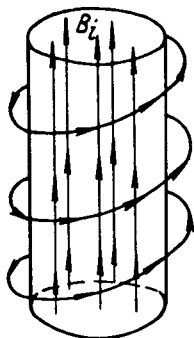


Рис. 11

некоторой трубки в такой системе оказывает влияние только на близлежащие трубки и далеко не распространяется. В общем случае это не так, и поэтому условие устойчивости может не иметь локального вида. Можно высказать даже более сильное утверждение: за исключением частных случаев, устойчивость системы одними лишь локальными условиями определяться не может. Действительно, наиболее опасным является возмущение, для которого  $W$  принимает минимальное значение. Допустим, что среди некоторого класса локальных возмущений мы нашли такое, которое дает минимум  $W$ . Если мы теперь откажемся от локальности и рассмотрим более общий класс возмущений, то сможем достигнуть еще меньших значений  $W$ , и поэтому наиболее опасное возмущение, а следовательно, и условие устойчивости скорее всего не будут локальными.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об устойчивости пинча с продольным магнитным полем. Для простоты предположим, что пинч скинирован, т. е. весь ток течет в тонком поверхностном слое, и, следовательно, давление  $p$ , а также продольные поля  $B_i$  внутри и  $B_{ze}$  снаружи от пинча не зависят от  $r$  (рис. 11). На этом примере мы познакомимся с новым стабилизирующим эффектом — перекрещенностью силовых линий.



В § 4 мы установили, что скинированный шнур без продольного поля неустойчив. Наличие внутреннего продольного поля этот результат существенно изменяет. Действительно, если направление поля внутри плазмы не совпадает с направлением поля снаружи, то «языкообразное» возмущение, ориентированное вдоль наружных силовых линий, сильно искажает внутреннее поле. Поэтому при достаточно сильном вмороженном поле локальные возмущения к неустойчивости не приводят.

Точно так же продольное поле оказывает стабилизирующее действие на длинноволновые возмущения. Представим себе, например, пинч с вмороженным продольным полем ( $B_z \neq 0$ ) и допустим, что  $B_{ze} = 0$ . Если такой пинч искривляется, то силовые линии азимутального поля сгущаются на внутренней и разрежаются на наружной стороне «сгиба». Следовательно, давление поля на внутренней стороне оказывается больше давления на наружной и равнодействующая сила  $F_S$  будет направлена наружу. Натяжение же искривленных линий продольного поля дает силу  $F_B$ , направленную внутрь (рис. 12). Если  $F_B > F_S$ , то шнур по отношению к такому изгибу будет устойчив.

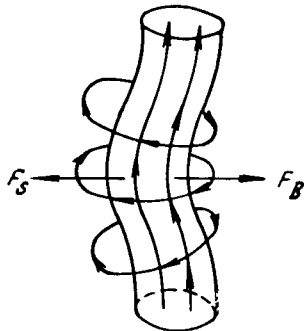


Рис. 12

Рассмотрим этот эффект более подробно. В силу цилиндрической симметрии смещение  $\xi$  можно выбрать в виде  $\xi(r) \exp\{im\varphi + ikz\}$ . Если ограничиться случаем  $k \neq 0$ , то соответствующим выбором  $\xi_z$  всегда можно добиться обращения в нуль  $\text{div } \xi$ , а следовательно, и первого слагаемого в подынтегральном выражении для потенциальной энергии плазмы. Таким образом, с точки зрения устойчивости пинча плазмы можно считать несжимаемой.

Пользуясь этим, рассмотрим модельную задачу, в которой плазма заменена несжимаемой жидкостью той же плотности  $\rho_0$ . Спектр колебаний при такой замене изменяется, но критерий устойчивости остается неизменным.

Ввиду того что геометрия очень проста, уравнение малых колебаний решается здесь до конца. В силу несжимаемости  $\mathbf{V}' = \text{rot} [\xi \mathbf{B}_i] = ikB \xi$ , и уравнение малых колебаний приводится к виду

$$\left( -\omega^2 \rho_0 + \frac{k^2 B_i^2}{4\pi} \right) \xi = -\nabla \tilde{p}, \quad (7.1)$$

где  $\tilde{p} = p + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}'}{4\pi}$ . Отсюда  $\Delta \tilde{p} = 0$  в силу  $\text{div } \xi = 0$ , т. е.

$$\tilde{p}(r) = \tilde{p}(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)}, \quad (7.2)$$

где  $a$  — радиус шнура. Теперь с помощью уравнения (7.1) трудно найти смещение  $\xi_r$  на границе, а именно:

$$\xi_r(a) = \frac{4\pi k}{4\pi Q_0 \omega^2 - B_i^2 k^2} \tilde{p}(a) \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}, \quad (7.3)$$

где  $I_m$  — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Снаружи от шнура  $\text{rot } \mathbf{V}' = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{V}' = 0$ , т. е. можно положить  $\mathbf{V}' = \nabla\psi$ , где  $\Delta\psi = 0$ . Ограниченное на бесконечности решение для  $\psi$  имеет вид  $\psi = CK_m(kr)/K_m(ka)$ , где  $K_m$  — функция Макдональда,  $C$  — const.

Учтем теперь граничные условия равенства давлений и нормальных составляющих магнитного поля на поверхности шнура. Снаружи от плазмы магнитное поле складывается из продольного  $B_{ze}$  и азимутального  $B_\varphi$ . Так как  $B_{ze} = \text{const}$ , а  $B_\varphi \sim 1/r$ , то на границе шнура  $\frac{\partial}{\partial r}(B_{ze}^2 + B_\varphi^2) = -2B_\varphi^2/a$ , и поэтому условие равенства давлений (1.9) принимает вид

$$\tilde{p}(a) = \frac{i}{4\pi} \left( kB_{ze} + \frac{m}{a} B_\varphi \right) C - \frac{B_\varphi^2}{4\pi a} \xi_r(a). \quad (7.4)$$

Условие вмороженности (1.12) для рассматриваемого нами случая цилиндрической симметрии имеет вид

$$i \left( kB_{ze} + \frac{m}{a} B_\varphi \right) \xi_r(a) = Ck \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)}. \quad (7.5)$$

Из условия разрешимости уравнений (7.3) — (7.5) относительно  $C$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\xi_r(a)$  находим дисперсионное уравнение

$$4\pi Q_0 \omega^2 = B_i^2 k^2 - \left( kB_{ze} + \frac{m}{a} B_\varphi \right)^2 \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)} - \frac{B_\varphi^2 k}{a} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}. \quad (7.6)$$

Здесь первый член является результатом натяжений силовых линий магнитного поля внутри шнура. Второе слагаемое, также положительное ввиду  $\frac{K_m}{K'_m} < 0$ , возникает вследствие натяжения силовых линий вне шнура. Оно пропорционально квадрату компоненты волнового вектора вдоль внешнего магнитного поля и исчезает при  $k\mathbf{V} = kB_{ze} + \frac{m}{a} B_\varphi = 0$ , т. е. когда возмущение оказывается постоянным вдоль силовых линий внешнего поля. Как мы установили ранее из наглядных соображений, при таких возмущениях магнитное поле снаружи шнура не искажается и поэтому не может стабилизировать границу. Однако для этих возмущений первый член отличен от нуля, что как раз и является результатом перекрещенности силовых линий.

Наконец, последний член в уравнении (7.6) отрицателен, именно он и может привести к неустойчивости. Если проследить за его происхождением, то можно установить, что этот член возникает из второго слагаемого в соотношении (7.4), т. е. в конечном счете является результатом спадания магнитного поля от границы шнура.

Рассмотрим два частных случая.

а)  $B_{ze} = 0$ .

Если  $B_{ze} = 0$ , то для возмущений с  $m = 0$  имеем

$$\omega^2 = \frac{B_i^2 k^2}{4\pi Q_0} \left\{ 1 - \frac{B_\Phi^2}{B_i^2} \frac{I'_0(ka)}{ka I_0(ka)} \right\}.$$

Максимальное значение  $\frac{I'_0(x)}{x I_0(x)}$  есть  $1/2$ , поэтому такой шнур будет стабилизирован по отношению к перетяжкам, если  $B_i^2 > B_\Phi^2/2$ . Однако по отношению к возмущениям с  $m = 1$  внутреннее поле не дает полной устойчивости. Действительно, для  $m = 1$

$$4\pi Q_0 \omega^2 = B_i^2 k^2 + \frac{B_{0\Phi}^2 k}{a} \frac{I'_1(ka)}{I_1(ka)} \frac{K_0(ka)}{K'_1(ka)}.$$

Для длинных волн при  $ka \rightarrow 0$  это выражение принимает вид

$$\omega^2 = \frac{B_i^2 k^2}{4\pi Q_0} \left\{ 1 - \left( \frac{B_\Phi}{B_i} \right)^2 \ln \frac{1}{ka} \right\},$$

т. е. даже в предельном случае, когда  $B_\Phi = B_i$  и, следовательно,  $p = 0$ , длинноволновые возмущения не стабилизируются. Но такая неустойчивость может быть стабилизирована проводящим кожухом, расположенным достаточно близко к шнуру. На кожухе нормальная компонента поля должна равняться нулю,

т. е.  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0$ . Если учесть это условие, то во втором слагаемом правой части уравнения (7.6) вместо отношения  $\frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)}$

будет стоять

$$\frac{K_m(ka) I'_m(kb) + I_m(ka) K'_m(kb)}{K'_m(ka) I'_m(kb) - I'_m(ka) K'_m(kb)},$$

где  $b$  — радиус кожуха.

Исследование показывает, что такой пинч с замороженным продольным полем может быть устойчив, если  $b < 5a$ .

б)  $B_{ze} \gg B_\Phi$ .

Добавление небольшого продольного поля снаружи от шнура только ухудшает его устойчивость, поскольку при этом второе слагаемое в уравнении (7.6) может быть уменьшено. Поэтому мы сразу рассмотрим второй предельный случай, когда снаружи от

шнура  $B_{ze} \gg B_\Phi$ . При этом к неустойчивости могут привести только длинноволновые возмущения с  $ka \ll 1$ . Будем считать  $m$  положительным. Тогда при малых  $ka$  имеем:  $\frac{I'_m}{I_m} = \frac{m}{ka}$ ,  $\frac{K'_m}{K_m} = -\frac{m}{ka}$ , и выражение (7.6) принимает гораздо более простой вид:

$$4\pi Q_0 \omega^2 = k^2 B_i^2 + \left( k B_{ez} + \frac{m}{a} B_\Phi \right)^2 - \frac{m B_\Phi^2}{a^2}. \quad (7.7)$$

Отсюда нетрудно найти минимальное значение  $\omega_{\text{мин}}^2$ . Оно достигается при  $k \left( B_{ze}^2 + B_i^2 \right) + \frac{m}{a} B_{ze} B_\Phi = 0$  и равно

$$\omega_{\text{мин}}^2 = \frac{B_\Phi^2}{4\pi Q_0 a^2} \left[ \frac{m^2 B_i^2}{B_{ze}^2 + B_i^2} - m \right]. \quad (7.8)$$

Если  $B_i = B_{ze} = B_z$ , то, как видно из выражения (7.8), нарастающим во времени будет только возмущение с  $m = 1$  (винтовая неустойчивость), а по отношению к остальным возмущениям с  $m \geq 2$  шнур устойчив.

Таким образом, при любом сколь угодно большом отношении  $B_z/B_\Phi$  бесконечно длинный шнур неустойчив по отношению к извиванию ( $m = 1$ ). Однако всякий реальный пинч имеет конечную длину, скажем  $L$ , и поэтому  $k$  не может быть меньше  $2\pi/L$ . В случае  $B_i = B_{ze} = B_z$ , как видно из выражения (7.7),  $\omega^2$  положительно при  $|k| < B_\Phi/aB_z$  и, следовательно, шнур конечной длины  $L$  является устойчивым, если

$$\frac{B_\Phi}{B_z} < \frac{2\pi a}{L}. \quad (7.9)$$

Это условие, полученное Шафрановым и Крускалом (одним независимо от другого), является необходимым для устойчивости плазменного шнура в сильном продольном поле. Оно означает, что шаг силовой линии должен быть больше  $L$ .

## § 8. Пинч с распределенным током

Рассмотренный в § 7 пример является чересчур идеализированным. В действительности скин-слой нельзя считать бесконечно тонким не только потому, что в реальных условиях ток распределен по радиусу в довольно широких пределах, но и по той причине, что даже в случае очень тонкого скин-слоя возможны такие возмущения, у которых длина волны сканима с толщиной скин-слоя.

Устойчивость пинча с распределенным током удобно исследовать с помощью энергетического принципа. Допустим, что плазма занимает весь объем вплоть до проводящего кожуха радиуса  $b$ ,

и, следовательно, потенциальная энергия дается только первым интегралом (2.7). В силу цилиндрической симметрии зависимость  $\xi$  от  $z$  и  $\varphi$  можно выбрать в виде  $\exp(ikz + im\varphi)$ . При этом минимизация потенциальной энергии по  $\xi_\varphi$  и  $\xi_z$  проводится алгебраически и дает:

$$\frac{m}{r} \xi_\varphi + k \xi_z = \frac{i}{r} \frac{d}{dr} (r \xi); \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \xi_\varphi B_z - \xi_z B_\varphi = & - \frac{ir}{k^2 r^2 + m^2} \left[ (kr B_\varphi - m B_z) \frac{d\xi}{dr} - \right. \\ & \left. - (kr B_\varphi + m B_z) \frac{\xi}{r} \right], \end{aligned} \quad (8.2)$$

где  $\xi = \xi_r$  — радиальная компонента смещения.

Если подставить эти выражения в выражение (2.7), то после дополнительного интегрирования по частям потенциальную энергию можно выразить только через радиальное смещение  $\xi$  в следующей форме:

$$W = \frac{\pi}{2} \int_0^b \left\{ f \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 + g \xi^2 \right\} dr, \quad (8.3)$$

где

$$f = \frac{r}{4\pi} \frac{(kr B_z + m B_\varphi)^2}{k^2 r^2 + m^2}; \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} g = & \frac{2k^2 r^2}{k^2 r^2 + m^2} \frac{dp}{dr} + \frac{1}{4\pi r} (kr B_z + m B_\varphi)^2 \frac{k^2 r^2 + m^2 - 1}{k^2 r^2 + m^2} + \\ & + \frac{2k^2 r}{4\pi (k^2 r^2 + m^2)^2} (k^2 r^2 B_z^2 - m^2 B_\varphi^2). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Минимизация выражения (8.3) по  $\xi$  приводит к уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dr} \left( f \frac{d\xi}{dr} \right) - g \xi = 0 \quad (8.6)$$

с граничными условиями:  $\xi$  конечно при  $r = 0$  и равно нулю при  $r = b$ .

Таким образом, задача об устойчивости пинча с распределенным током сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (8.6). При этом условие устойчивости можно сформулировать следующим образом: для устойчивости плазменного шнура с распределенным током необходимо и достаточно, чтобы решение уравнения (8.6) имело меньше двух нулей на интервале  $0 < r < b$ .

Действительно, если решать полностью задачу о собственных колебаниях плазмы, то нужно искать экстремум не потенциальной

энергии  $W$ , а функции Лагранжа  $L = T - W$ , так что при  $\omega \neq 0$  в выражение (8.5) для  $g$  нужно включить дополнительный член, положительный при  $\omega^2 < 0$  и отрицательный при  $\omega^2 > 0$ . Предположим теперь, что решение уравнения (8.6) имеет больше двух нулей на интервале  $(0, b)$ . Тогда, добавляя в выражение (8.5) положительную величину, можно раздвинуть нули и один из них перевести в точку  $r = b$ , а второй — в точку  $r = 0$ . Так как перемещение нуля в особую точку  $r = 0$  дает ограниченное при  $r = 0$  решение, то оба граничных условия будут удовлетворены и, следовательно, плазма будет неустойчива ( $\omega^2 < 0$ ). Если же на интервале  $(0, b)$  будет меньше двух нулей, то удовлетворить граничным условиям можно только с помощью отрицательной добавки к выражению (8.5), т. е. при  $\omega^2 > 0$ .

Рассмотрим теперь некоторые следствия этого общего утверждения. Начнем с условия устойчивости по отношению к локальным возмущениям, т. е. с очень большим азимутальным числом  $m$ . Если  $m$  и  $k$  устремить в бесконечность, оставляя конечным их отношение, то  $f$  и все слагаемые в выражении (8.5), за исключением второго, останутся конечными. Второе слагаемое положительно и стремится к бесконечности при  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому при  $m \gg 1$  неустойчивость может возникнуть только в том случае, если это слагаемое окажется очень малым, т. е. вблизи точки  $r = r_0$ , где  $krB_z + mB_\varphi = 0$ . В этой точке шаг винта силовой линии в точности совпадает с шагом возмущения, т. е. возмущение является постоянным вдоль силовой линии. Другими словами, рассматриваемое возмущение является конвективным вблизи точки  $r = r_0$ .

Введем величину  $\mu = B_\varphi / rB_e$ , характеризующую шаг силовой линии, и пусть  $x = r - r_0$  есть расстояние от точки  $r_0$ . Будем считать  $x$  малым, тогда  $f$  и  $g$  можно разложить по  $x$  в ряд и ограничиться первыми членами. Учитывая, что  $krB_z + mB_\varphi = mB_z r\mu'x$ , получаем

$$f = \frac{r^3 B_z^4}{4\pi B^2} (\mu')^2 x^2; \quad g = \frac{2B_\varphi^2}{B^2} p' + \frac{m^2 r B_z^2}{4\pi} (\mu')^2 x^2,$$

и, следовательно, уравнение Эйлера (8.6) принимает вид

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\xi}{dx} + \frac{q}{x^2} \xi = \kappa^2 \xi, \quad (8.7)$$

где

$$q = -\frac{8\pi\mu^2}{r(\mu')^2 B_z^2} p'; \quad \kappa^2 = \frac{m^2 B^2}{r^2 B_z^2}; \quad \mu' = \frac{d\mu}{dr};$$

$$p' = \frac{dp}{dr}.$$

При  $x \ll 1/\kappa \sim r/m$  правой частью в уравнении (8.7) можно пренебречь, и в этой области решение имеет вид степенной функции  $\xi = x^\nu$ , где  $\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - q}$ . Если  $q < 1/4$ , то показатель-

степени  $\nu$  является действительным и рассматриваемое решение не имеет нулей. Наоборот, при  $q > 1/4$  решение может быть представлено как  $\xi = x^{-\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{q - 1/4} \ln x)$  и, следовательно, имеет бесконечно много нулей в окрестности точки  $x = 0$ . Таким образом, как это следует из общего критерия устойчивости, шнур локально устойчив только при  $q < 1/4$  или в развернутой форме при

$$-8\pi r \frac{dp}{dr} < \frac{B_z^2}{4} \left( \frac{d \ln \mu}{d \ln r} \right)^2. \quad (8.8)$$

Это условие конвективной устойчивости шнура с током было получено Сайдемом.

Из условия (8.8) следует, что при  $\mu = \text{const}$  всякое спадающее по радиусу распределение давления является неустойчивым. В частности, абсолютно неустойчив шнур с однородным продольным током при  $B_z = \text{const}$ .

Если  $\mu = \text{const}$ , то шаг силовой линии  $l = \frac{2\pi}{\mu}$  не зависит от радиуса, и поэтому две силовые линии, находящиеся на некотором расстоянии одна от другой по радиусу, могут быть взаимно переставлены без существенного искажения магнитного поля. Таким образом, в этом случае конвективная неустойчивость ничем не запрещена. Но если  $\mu$  меняется с  $r$ , то свободная перестановка трубок уже невозможна. Действительно, рассмотрим, например, две магнитные поверхности  $A$  и  $B$ , находящиеся одна от другой на малом расстоянии. На рис. 13 эти поверхности изображены плоскими, причем таким образом, чтобы точки с одним и тем же азимутальным углом  $\varphi$  лежали одна под другой. Силовые линии на поверхности  $A$  изображены пунктирными, а на поверхности  $B$  — сплошными линиями. Если  $\mu \neq \text{const}$ , то эти линии перекрещиваются: они составляют между собой некоторый угол  $\delta\alpha$ , пропорциональный  $\xi r \mu'$  (более точно  $\delta\alpha = \frac{B_z^2}{B^2} r \mu' \xi$ ). Поэтому перестановка очень длинной трубки, например  $CD$ , с плоскости  $A$  на плоскость  $B$  будет очень сильно искажать магнитное поле вблизи плоскости  $B$ . Возмущение, которое минимально искажает магнитное поле, должно быть таким, чтобы смещенная силовая трубка всюду составляла по возможности наименьший угол с силовыми линиями. Если, например, смещение представляет собой изгиб трубки  $EFG$  с закрепленными концами  $E$  и  $G$ , то смещенная трубка должна иметь вид одного шага винтовой спирали с шагом  $L = \frac{2\pi\xi}{\delta\alpha} = \frac{2\pi B^2}{B_z^2 r \mu'}$  (см. рис. 13).

Таким образом, перекрещенность силовых линий приводит к такому же стабилизирующему эффекту, как и наличие проводя-

щих торцов (см. § 6): она ограничивает длину конвективно перемещаемых трубок величиной  $L \approx \frac{2\pi B^2}{B_z^2 r \mu'}$ .

Допустим теперь, что  $\frac{dp}{dr} = 0$  в некоторой области изменения  $r$ . Тогда в выражении (8.5) для  $g$  следует учесть величины следующего порядка малости по  $x$ , так что приближенно

$$g = -\frac{1}{4\pi} \frac{B_\phi^3 B_z^3}{B^4} 4\mu' x + \frac{m^2 r B_z^2}{4\pi} (\mu')^2 x^2.$$

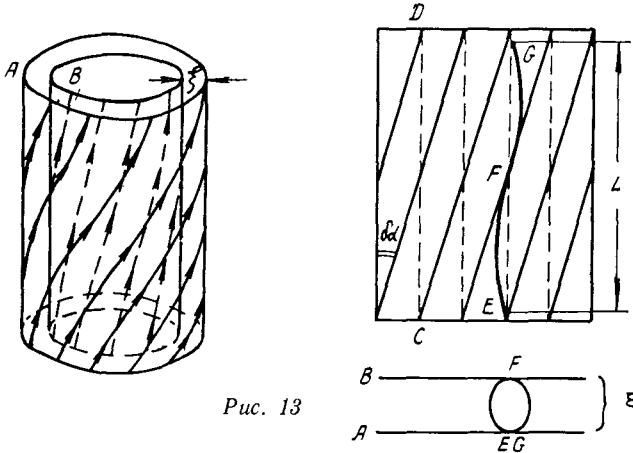


Рис. 13

Уравнение Эйлера при этом принимает вид

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\xi}{dx} \right) + \frac{4\mu}{r^2 \mu'} \frac{B_\phi^2}{B^2} \frac{\xi}{x} = \kappa^2 \xi = \frac{m^2 B^2}{r^2 B_z^2} \xi, \quad (8.9)$$

аналогичный уравнению Шредингера для атома водорода. Отсюда находим условие устойчивости, т. е. отсутствия связанного состояния:

$$\frac{B_\phi^4 B_z^2}{B^6} < \frac{m^2}{4} \left( \frac{d \ln \mu}{d \ln r} \right)^2.$$

Из уравнения (8.9) видно, что при  $\mu'/\mu > 0$  неустойчивость имеет место только снаружи от поверхности  $x = 0$ , а при  $\mu'/\mu < 0$ , наоборот, неустойчив внутрений слой ( $x < 0$ ), т. е. к неустойчивости приводят лишь такие возмущения, шаг которых больше шага силовых линий.

Эта неустойчивость связана с наличием азимутального поля и представляет собой локальный вариант винтовой неустойчивости. Из уравнения (8.9) видно, что к неустойчивости приводят возмущения с достаточно малыми  $m$ , причем наиболее опасной является мода  $m = 1$  (которая, впрочем, уже выпадает из такого локального рассмотрения).



Условие Сайдема является только необходимым, так как оно относится лишь к локальным возмущениям с  $m \gg 1$ . Возмущения с малыми  $m$  не имеют локального характера, и поэтому соответствующее условие устойчивости не может быть локальным.

Рассмотрим сначала возмущения с  $m = 0$ . Из выражения (8. 5) для  $g$  следует, что при этом наиболее опасным является возмущение с  $k \rightarrow 0$ , для которого

$$W_{m=0} = \frac{\pi}{2} \int_0^b \left\{ \frac{rB_z^2}{4\pi} \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 + 2 \frac{dp}{dr} \xi^2 + \frac{B_z^2}{4\pi} \xi^2 \right\} dr.$$

Отсюда видно, что при достаточно малом отношении  $\frac{8\pi p}{B^2}$  шнур устойчив по отношению к перетяжкам ( $m = 0$ ).

Допустим теперь, что  $m \neq 0$ . Поскольку в бесконечном шнуре  $k$  может принимать произвольные значения, то можно положить  $k = qm$ . Тогда  $m$  отовсюду выпадет, кроме второго слагаемого в выражении (8. 5); так как это слагаемое положительно, то отсюда следует, что наиболее опасным является возмущение с  $m = 1$ .

Интегрированием по частям потенциальную энергию (8. 3) можно привести к виду

$$W = \frac{\pi}{2} \int_0^b \left\{ \frac{1}{k^2 r^2 + m^2} \left[ (krB_z + mB_\varphi) \frac{d\xi}{dr} + (krB_z - mB_\varphi) \frac{\xi}{r} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ (krB_z + mB_\varphi)^2 - 2B_\varphi \frac{d}{dr} (rB_\varphi) \right] \frac{\xi^2}{r^2} \right\} r dr.$$

Отсюда следует, что шнур, в котором  $B_\varphi$  спадает с радиусом быстрее, чем  $r^{-1}$ , является устойчивым по отношению к любым возмущениям. Реально такое распределение может быть создано лишь с помощью металлического проводника с током в центре шнура.

Это, собственно говоря, и все, что можно получить из такого общего рассмотрения. Чтобы продвинуться дальше, нужно для каждой конкретной системы решать уравнение Эйлера (8. 6). Таким путем можно найти некоторые устойчивые распределения полей и токов, но этот вопрос является довольно специальным и выходит за рамки настоящей работы. Мы ограничимся здесь лишь рассмотрением более простого случая тонкого скин-слоя.

В § 7 была рассмотрена устойчивость скинированного шнура в приближении, когда толщина скин-слоя считалась исчезающе малой. В действительности скин-слой имеет некоторую конечную толщину  $\delta$ , и предельный переход  $\delta \rightarrow 0$  оказывается совсем не тривиальным.

При  $\delta \ll a$  условие Сайдема выполнено с большим запасом, так как левая часть в выражении (8. 8)  $\sim 1/\delta$ , а правая  $\sim 1/\delta^2$ . Таким образом, локально, т. е. по отношению к возмущениям

с поперечной длиной волны  $\lambda_{\perp} \sim \frac{a}{m} \ll \delta$ , скин-слой устойчив.

Поэтому достаточно рассмотреть возмущения с  $m \ll \frac{a}{\delta}$ . При  $\delta \ll a$  достаточно иметь решения снаружи и внутри шнура, а сам скин-слой можно учесть в виде условия сшивки. Будем считать, что внутри шнура  $B_{\varphi} = 0$ , тогда ограниченное при  $r = 0$  решение уравнения Эйлера для внутренней части будет равно просто

$$\xi = I'_m(kr), \quad (8.10)$$

где  $I_m$  — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Если кожух отсутствует ( $b' = \infty$ ), то решение уравнения (8. 8) снаружи от шнура, где  $p = 0$ , будет равно

$$\xi = \frac{kr}{krB_{ze} + \frac{ma}{r} B_{\varphi}} K'_m(kr), \quad (8.11)$$

где  $K_m$  — функция Макдональда индекса  $m$ .

Внутри скин-слоя при  $m \ll a/\delta$  в выражении для  $g$  можно оставить только первое слагаемое, т. е. приближенно

$$g = \frac{2k^2 a^2}{k^2 a^2 + m^2} \frac{dp}{dr}. \quad (8.12)$$

Рассмотрим сначала такие возмущения, для которых  $f$  не обращается в нуль внутри скин-слоя. Тогда внутри тонкого скин-слоя  $\xi$  можно считать постоянным. Интегрируя уравнение (8. 6) поперек скин-слоя, мы найдем условие сшивки:

$$\left(f \frac{\xi'}{\xi}\right)_e - \left(f \frac{\xi'}{\xi}\right)_i = - \frac{2k^2 a^2}{k^2 a^2 + m^2} p, \quad (8.13)$$

где индексы  $e$  и  $i$  означают, что данная величина берется соответственно снаружи или внутри шнура.

Если в выражение (8. 13) подставить решения (8. 10) и (8. 11) и если при этом левая часть окажется меньше правой, то это будет означать, что решение, удовлетворяющее условию сшивки (8. 13), будет иметь менее двух нулей и, следовательно, шнур будет устойчив. Если же при этом левая часть окажется больше правой, то решение, удовлетворяющее условию (8. 13), будет иметь по крайней мере два нуля на интервале  $0 < r < \infty$  и согласно общему критерию шнур будет неустойчив. Таким образом, условие устойчивости шнура получается путем подстановки в выражение (8. 13) решений (8. 10), (8. 11) и замены знака равенства на знак  $<$ . Это условие имеет вид

$$- \left(kB_e + \frac{m}{a} B_{\varphi}\right)^2 \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} + k^2 B_i^2 \frac{I_m(ka)}{I'_m(ka)} - \frac{k}{a} B_{\varphi}^2 > 0 \quad (8.14)$$

и, как нетрудно видеть, в точности совпадает с уравнением (7. 6).

Допустим теперь, что  $f$  обращается в нуль в некоторой точке  $r = r_s$  внутри скин-слоя. Покажем, прежде всего, что особенность в этой точке является настолько сильной, что решения справа и слева от нее оказываются совершенно независимыми.

Уравнение Эйлера (8.7) вблизи особенности может быть представлено в форме

$$\psi'' + \frac{q}{x^2} \psi = 0,$$

где  $\psi = \xi x$ , т. е. оно имеет вид уравнения Шредингера с потенциалом  $U_1 = -q/x^2$ . Если учесть инерцию ( $\omega \neq 0$ ), то у потенциальной ямы появится «донышко», так что функцию  $U_1$  можно считать постоянной при  $|x| < x_0$ . Четное  $\psi_e$  и нечетное  $\psi_0$  решения в этой области равны соответственно:  $\psi_e = \cos \frac{\sqrt{q} x}{x_0}$ ;  $\psi_0 = \sin \frac{\sqrt{q} x}{x_0}$ . При  $x > x_0$  решение имеет вид  $\psi = Ax^{\nu_1} + Bx^{\nu_2}$ , где  $\nu_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - q}$ ;  $\nu_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - q}$ , так что  $\nu_1 > \nu_2$ . Коэффициенты  $A$  и  $B$  можно найти из условия сшивки логарифмических производных при  $x = x_0$ :

$$\frac{\nu_1 A_e x_0^{\nu_1-1} + \nu_2 B_e x_0^{\nu_2-1}}{A_e x_0^{\nu_1} + B_e x_0^{\nu_2}} = -\frac{\sqrt{q}}{x_0} \operatorname{tg} \sqrt{q};$$

$$\frac{\nu_1 A_0 x_0^{\nu_1-1} + \nu_2 B_0 x_0^{\nu_2-1}}{A_0 x_0^{\nu_1} + B_0 x_0^{\nu_2}} = \frac{\sqrt{q}}{x_0} \operatorname{ctg} \sqrt{q}.$$

Из этих условий получаем:

$$\frac{B_e}{A_e} = -\frac{\nu_1 + \sqrt{q} \operatorname{tg} \sqrt{q}}{\nu_2 + \sqrt{q} \operatorname{tg} \sqrt{q}} x_0^{\nu_1 - \nu_2};$$

$$\frac{B_0}{A_0} = -\frac{\nu_1 - \sqrt{q} \operatorname{ctg} \sqrt{q}}{\nu_2 - \sqrt{q} \operatorname{ctg} \sqrt{q}} x_0^{\nu_1 - \nu_2}.$$

Поскольку  $\nu_1 > \nu_2$ , отсюда следует, что при  $x_0 \rightarrow 0$  величина  $B \rightarrow 0$ , т. е. в пределе  $\omega \rightarrow 0$  и четное и нечетное решения ведут себя как  $\xi = x^\alpha$ , где  $\alpha = -1/2 + \sqrt{1/4 - q}$ . Если взять полусумму и полуразность этих решений, то мы получим, что из двух независимых решений уравнения Эйлера одно равно нулю при  $x < 0$  и ведет себя как  $x^\alpha$  при  $x > 0$ , а второе, наоборот, обращается в нуль при  $x > 0$  и равно  $|x|^\alpha$  при  $x < 0$ . Таким образом, решения по разные стороны от особой точки совершенно не связаны между собой, и поэтому само условие устойчивости расщепляется на два.

Проинтегрируем уравнение (8. 6) один раз по  $r$  от внутренней границы скин-слоя  $r = r_{0i}$  до особой точки. Так как при  $r = r_s$  функция  $f = 0$ , то отсюда получим

$$-\left(f \frac{d\xi}{dr}\right)_i = \int_{r_{0i}}^{r_s} g\xi dr \cong \xi_i \int_{r_{0i}}^{r_s} g dr,$$

где мы вынесли  $\xi$  из-под знака интеграла, поскольку при  $q \ll 1$   $\alpha$  также мало и  $\xi = x^\alpha \approx \text{const}$  почти при всех значениях  $x$ . Учитывая условие равновесия  $8\pi\rho + B_z^2 + B_\varphi^2 = \text{const}$  внутри скин-слоя, с помощью решений (8. 10) и (8. 11) получаем одно из условий устойчивости:

$$B_{zi}^2 \frac{I_m(ka)}{I_m'(ka)} - \frac{ka}{k^2a^2 + m^2} (B_{zs}^2 + B_{\varphi s}^2) > 0, \quad (8. 15)$$

где  $B_{zs}$ ,  $B_{\varphi s}$  — значения полей в особой точке.

Точно так же, путем интегрирования уравнения (8. 6) от  $r_s$  до  $r_{0e}$ , нетрудно получить второе условие:

$$\begin{aligned} -\left(kB_e + \frac{m}{a} B_\varphi\right)^2 \frac{K_m(ka)}{K_m'(ka)} + \frac{k^3a}{k^2a^2 + m^2} (B_{zs}^2 + B_{\varphi s}^2) - \\ - \frac{k}{a} B_{\varphi e}^2 > 0. \end{aligned} \quad (8. 16)$$

Неравенства (8. 15) и (8. 16) в совокупности дают более сильное условие, чем одно условие (8. 14). Это объясняется тем, что на возмущения с особенностью внутри скин-слоя нельзя налагать условие сшивки  $\xi$  по обе стороны от скин-слоя. Поэтому условие (8. 14), полученное в предположении непрерывности  $\xi$ , оказывается более слабым.

Рассмотрим частный случай  $B_z = \text{const}$ ,  $B_\varphi/B_z \ll 1$ . При этом можно считать  $ka \ll m$ , и из условий (8. 15) и (8. 16) получаются более простые условия:

$$1 - \frac{1}{m} \left(1 + \frac{B_{\varphi s}}{B_z^2}\right) > 0; \quad (8. 17)$$

$$\left(kB_z + \frac{m}{a} B_\varphi\right)^2 + \frac{k^2}{m} B_z^2 - \frac{m}{a^2} B_\varphi^2 > 0. \quad (8. 18)$$

Отсюда видно, что внешняя часть скин-слоя неустойчива при всех  $m$ , а внутренняя часть слабо неустойчива лишь при  $m = 1$ . Неустойчивость наружного слоя пинча связана с последним слагаемым в выражении (8. 18), т. е. в конечном счете со спаданием азимутального поля при удалении от границы шнура или, иными словами, со скачком плотности тока. Поэтому такая неустойчивость может быть и в том случае, когда ток распределен по всему шнуру. Так как, согласно выражениям (8. 1) и (8. 2),  $\xi_\varphi/\xi_r$  и  $\xi_z/\xi_r$

вблизи особенности  $r = r_s$  стремятся к бесконечности, то эта неустойчивость выражается в том, что тонкий поверхностный слой шнура стремится собраться в винтовые «жгутики».

Из этого примера видно, что всякого рода особенности в распределении тока требуют специального рассмотрения и выполнения условия Сайдема еще недостаточно для устойчивости таких разрывов.

В заключение параграфа рассмотрим еще один вопрос качественного характера — о разнице между вакуумом и бессиловой плазмой. В последнем примере мы не предполагали, что область снаружи от шнура является вакуумной, а допустили лишь давление плазмы в этой области, равное нулю. Условимся такую плазму называть плазмой нулевого давления. Спрашивается, всегда ли плазма нулевого давления эквивалентна вакууму? Оказывается, что нет. Плазму нулевого давления можно рассматривать как вакуум только в том случае, если в этой области нет особенности, т. е. шаг возмущения нигде не совпадает с шагом силовой линии. В противном случае, если  $f$  обратится в нуль в некоторой точке  $r = r_s$ , то, как мы установили ранее, решение для  $\xi$  в этой точке должно меняться по степенному закону с меньшим показателем степени. Но такое поведение решения соответствует обращению  $\xi$  в нуль в точке, близкой к особой. Поэтому особая точка  $r = r_s$  оказывается эквивалентной металлическому кожуху радиуса  $b = r_s$ , и, следовательно, идеально проводящая плазма нулевого давления снаружи от шнура может оказать стабилизирующее действие на некоторые виды возмущений.

### § 9. Винтовая неустойчивость

Ввиду особой важности возмущения с  $m = 1$ , наиболее опасного с точки зрения устойчивости, целесообразно более подробно рассмотреть физическую природу такой, как мы будем ее называть, винтовой неустойчивости.

Пусть тонкий идеально проводящий шнур радиуса  $a$  с текущим по его поверхности током  $I$  помещен в однородное магнитное поле  $B_z$  (рис. 14). Для простоты допустим, что этот шнур образован несжимаемой жидкостью и что магнитное поле внутри него отсутствует. Предположим, кроме того, что  $B_\varphi = \frac{2I}{ca} \ll B_z$ . Тогда частота колебаний с  $m = 1$ , согласно уравнению (7. 7), будет равна:

$$4\pi Q_0 \omega^2 = \left( k B_z + \frac{1}{a} B_\varphi \right)^2 - \frac{B_\varphi^2}{a^2}. \quad (9. 1)$$

Отсюда видно, что наибольшим инкрементом обладает возмущение с  $k = -\frac{1}{a} \frac{B_\varphi}{B_z}$ . Такое возмущение, пока оно мало, постоянно вдоль силовых линий и не возмущает внешнее поле. Что же произойдет при последующем нарастании возмущения?

На шнур, очевидно, будет действовать ускоряющая сила до тех пор, пока магнитное поле не станет совершенно однородным (рис. 15). Радиус  $r_0$  такой равновесной спирали можно найти из условия сохранения потока, охватываемого идеальным проводником. В исходном состоянии поток, охватываемый проводником, равен  $\Phi_0 = L \frac{2I}{c} \ln \frac{b}{a}$ , где  $b$  — радиус идеально проводящего кожуха;  $L$  — длина всей системы (которую можно представить себе свернутой в тор). Во втором равновесном состоянии этот поток равен  $\Phi_1 = \pi r_0^2 B_z \frac{L}{l}$ , где  $l$  — шаг винтовой линии, который для

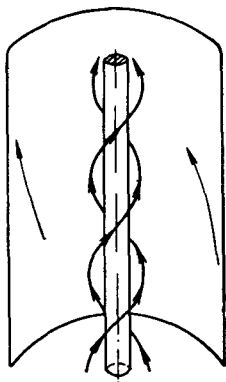


Рис. 14

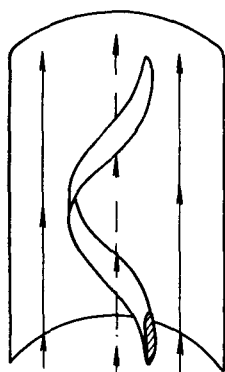


Рис. 15

возмущения с максимальным инкрементом находится из условия  $2\pi/l = k = \frac{1}{a} \frac{B_\phi}{B_z}$ . Приравнивая  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ , находим

$$r_0 = \sqrt{\frac{2Il}{\pi c B_0} \ln \frac{b}{a}} = a \sqrt{2 \ln \frac{b}{a}}. \quad (9.2)$$

Впрочем, это состояние не является вполне равновесным: силовые линии продольного поля будут сплющивать жидкий проводник и превратят его сначала в спиральную ленточку, а затем в тонкостенную цилиндрическую трубку того же радиуса  $r_0$ . В случае прямого шнура это конечное равновесное состояние является, очевидно, нейтрально устойчивым, так как поле всюду однородно. Но в случае тороидальной геометрии равновесие без продольного тока невозможно, и поэтому жидкость будет двигаться к наружной стенке до тех пор, пока не уляжется там в равновесном состоянии.

Рассмотренное нами движение является фактически лишь виртуальным: оно было бы именно таким, если бы шнур был помещен в среду с большой вязкостью. В действительности же, когда шнур достигнет второго равновесного состояния, он будет обладать большой радиальной скоростью, так как вся энергия ази-

мутального поля переходит при этом в кинетическую. Поэтому весь процесс будет носить колебательный характер. Тем не менее остается непреложным тот факт, что винтовая неустойчивость возникает как следствие натяжения силовых линий, стремящихся уничтожить азимутальную компоненту поля. Поскольку этому препятствует бесконечная проводимость шнура, то шнур свивается в винтовую линию.

Во втором равновесном состоянии азимутальное магнитное поле отсутствует, и энергия поля принимает минимально возможное значение. Следует отметить, что такое устойчивое состояние возможно при любом  $l$ , но лишь при  $l \geq \pi B_a / B_\phi$  происходит нарастание возмущений. При меньших  $l$  переход в состояние с минимальной энергией связан с преодолением потенциального барьера, и, следовательно, при малых начальных возмущениях и бесконечной проводимости шнура такой переход невозможен.

Допустим теперь, что внутри шнура имеется замороженное магнитное поле. Как мы видели в § 7, не ограниченный по длине шнур в этом случае также неустойчив, он будет стремиться свернуться в винтовую линию. При этом продольное поле внутри шнура приведет к некоторой силе натяжения, и поэтому равновесный радиус  $r_0$  при таком же шаге винта будет несколько меньше. Кроме того, вследствие замороженного поля азимутальное поле в этом случае не исчезает до конца.

Итак, винтовая неустойчивость возникает как результат натяжения силовых линий магнитного поля, стремящихся превратиться в прямые линии. Наиболее ярко она проявляется на винтовом возмущении с  $m = 1$ , но эта неустойчивость может развиваться и на возмущениях с  $m \geq 2$ . Как мы установили в предыдущем параграфе, это происходит в том случае, когда перекрещенность силовых линий мала, т. е.  $\mu' \approx 0$ .

## § 10. Устойчивость тороидальных систем

С точки зрения удержания высокотемпературной плазмы магнитным полем наибольший интерес безусловно представляют тороидальные системы. Под словом «тороидальная» мы будем подразумевать любую систему, топологически эквивалентную тору: это может быть простой круглый тор, система типа стелларатора в виде восьмерки или стелларатора со стабилизирующими винтовыми обмотками, а также любая более сложная система, которая непрерывным преобразованием может быть превращена в тор.

Разумеется, точное исследование устойчивости плазмы в таких системах связано с огромными математическими трудностями, хотя бы потому, что в силу отсутствия аксиальной симметрии относительно магнитной оси системы моды с различными  $m$  не могут быть разделены и задача уже не сводится к одномерной. Впрочем при современном состоянии вопроса об устойчивости основной интерес представляет не точное исследование того или

иного распределения плазмы для заданной конфигурации магнитного поля, а качественные выводы общего характера о том, какие поля представляют наибольшие преимущества с точки зрения устойчивости, как влияет на устойчивость то или иное изменение конфигурации поля. Такие качественные соображения могут быть получены из вариационного принципа выбором некоторых пробных функций для возмущения, а иногда и просто из наглядных представлений об изменении потенциальной энергии при малых возмущениях.

В тороидальных системах с продольным током неустойчивость плазмы представляет собой в конце концов ту или иную комбинацию рассмотренных уже нами винтовой и конвективной неустойчивостей, поэтому и соответствующие условия устойчивости сходны с теми, которые были получены для цилиндрического шнура.

Рассмотрим сначала обычный круглый тор. Обозначим через  $a$  малый радиус шнура, а через  $R$  его радиус кривизны, т. е. большой радиус тора. Даже в очень крутых по внешнему виду торах величина  $\varepsilon = a/R$  является все же довольно малой  $\sim 1/3$ , поэтому естественно воспользоваться разложением по малому параметру  $\varepsilon$ . В первом приближении по  $\varepsilon$  условия устойчивости остаются неизменными и все различие по сравнению с прямым шнуром заключается в том, что шнур становится ограниченным по длине и поэтому продольное волновое число  $k$  может принимать только дискретные значения:  $k = \frac{2\pi}{L_0} n = n/R$ , где  $L_0 = 2\pi R$  — длина обхода;  $n$  — целое число. Для систем с сильным продольным полем это приводит к условию Шафранова—Крускала (7. 9), т. е. к отсутствию винтовой неустойчивости.

Для систем, у которых магнитная ось не является плоской кривой, а обладает отличным от нуля кручением, это условие несколько модифицируется. В таких системах, простейшим примером которых является стелларатор в виде восьмерки, имеет место вращательное преобразование, т. е. даже без продольного тока силовые линии поворачиваются на некоторый угол  $\alpha$  при полном обходе системы. Это означает, что точки с координатами  $(z + L_0, \varphi)$  и  $(z, \varphi + \alpha)$  представляют собой фактически одну и ту же точку в пространстве. Поэтому фазы возмущения вида  $\exp(ikz + im\varphi)$  в этих точках должны отличаться на величину, кратную  $2\pi$ , а волновое число  $k$  должно удовлетворять соотношению

$$kL_0 - m\alpha = -2\pi n. \quad (10. 1)$$

Пусть  $B_\varphi$  положительно и  $m = 1$ . Тогда, согласно уравнению (7. 7), скинированный шнур будет устойчив при  $-kB_z > > B_\varphi/a$ . Подставляя сюда  $k$  из соотношения (10. 1), получаем условие винтовой устойчивости шнура с током в системе с  $\alpha \neq 0$

$$B_\varphi < \frac{a}{L} B_z (-\alpha + 2\pi n), \quad (10. 2)$$



где  $n$  — целое число, для которого правая часть неравенства (10. 2) принимает минимальное положительное значение. Оказывается, что это условие не ограничено случаем скинированного шнура, а справедливо при любом распределении тока по радиусу.

Из условия (10. 2) вытекает, что при  $\alpha \neq (2q + 1)\pi$ , где  $q$  — целое число, предельные токи по полю ( $B_z/B_\phi > 0$ ) и против поля ( $B_z/B_\phi < 0$ ) оказываются разными. Кроме того, из этого условия следует, что при малом  $\alpha > 0$  предельный ток против поля также мал (при этом  $n = 0$ ).

При  $|\alpha| < \pi$  условие (10. 2) приближенно сохраняет свою форму и в том случае, когда угол вращательного преобразования создается с помощью дополнительных винтовых обмоток. Но при  $|\alpha| > \pi$  это может быть и не так. Например, если стабилизирующая обмотка является трехзаходной, то в случае  $\alpha B_\phi/B_z > 0$ , т. е. когда поворот силовых линий вследствие продольного тока имеет тот же знак, что и в случае стабилизирующих обмоток, шнур оказывается устойчивым по отношению к извиванию при  $\left| \frac{B_\phi}{B_z} \right| \frac{L_0}{a} < |\alpha|$ .

Так обстоит дело с винтовой неустойчивостью шнура ( $m = 1$ ). Возмущения с  $m \gg 1$  могут привести к конвективной неустойчивости. В слабо искривленном гладком шнуре конвективная неустойчивость возникает при нарушении условия Сайдема (8. 8). Если же основное магнитное поле неоднородно (т. е. имеются стабилизирующие винтовые поля), то это условие изменяется. Запишем условие Сайдема в форме, более адекватной ее физическому содержанию:

$$-\frac{2}{R_s} \frac{dp}{dr} < \frac{\pi B^2}{4L^2}. \quad (10. 3)$$

Здесь  $R_s = rB_\phi^2/B^2$  — радиус кривизны силовой линии, а  $L = \frac{2\pi B}{B_z r \mu'}$  — минимально возможная длина волны возмущения вдоль силовой линии. В такой форме это условие вполне аналогично условию (6. 3), так что правая часть неравенства (10. 3) выражает собой стабилизирующее действие перекрещенности силовых линий. При отсутствии продольного тока  $\mu'$  в выражении для  $L$  следует заменить на  $\alpha'/L_0$ , где  $\alpha$  — угол вращательного преобразования, рассчитанный на полную длину обхода  $L_0$ . При этом получается следующее условие конвективной устойчивости плазмы в системе типа стелларатора со стабилизирующими обмотками:

$$-\frac{2}{R_s} \frac{dp}{dr} < \frac{B_z^2}{16\pi} \frac{r^2}{L_0^2} (\alpha')^2. \quad (10. 4)$$

В сильно модулированном поле величина  $2/R_s \sim \frac{U'}{U}$  может быть порядка  $1/r$ ; угол вращательного преобразования на еди-

ницу длины  $\alpha/L_0$  также может быть достаточно большой величиной, и тогда из условия (10.4) следует, что плазма с достаточно малым давлением ( $\beta = 8\pi p/B^2 \ll 1$ ) будет устойчива в таком «перекрученном» магнитном поле ( $\alpha' \neq 0$ ).

## § 11. Токово-конвективная неустойчивость

До сих пор мы всюду предполагали, что проводимость плазмы бесконечна. При конечной, но достаточно большой проводимости все приведенные выше соотношения справедливы только для возмущений с достаточно большими длинами волн и для колебаний с достаточно большими частотами. Но, кроме того, при  $\sigma \neq \infty$  могут появиться новые типы медленных колебаний, а также измениться частоты колебаний с короткими длинами волн. Мы рассмотрим здесь только один пример такой ситуации.

Начнем с самого простого случая. Пусть по тонкому проводнику радиуса  $a$  с плотностью  $\rho_0$  течет ток  $I_0$ , причем проводник помещен в однородное магнитное поле  $B_z$ . При бесконечной проводимости такой проводник неустойчив по отношению к извиванию и будет превращаться в винтовую линию с инкрементом, определяемым соотношением  $\omega^2 \approx -\frac{B_\phi^2}{4\pi a^2 \rho_0}$ . Допустим теперь, что проводимость мала и магнитное поле не заморожено. Тогда при искривлении проводника в винтовую линию на него будет действовать сила Лоренца  $\frac{1}{c} I_\phi B_z$ , где  $I_\phi = k\xi I_0$  — азимутальная составляющая тока;  $\xi$  — радиальное смещение. Отсюда найдем —  $\omega^2 = \frac{kI_0 B}{c\pi a^2 \rho_0} = kaB_\phi B_z (2\pi \rho_0 a^2)^{-1}$ . При  $ka \sim 1$  этот инкремент в  $\sqrt{B_z/B_\phi}$  больше, чем в случае  $\sigma = \infty$ . Другими словами, при  $\sigma = \infty$  шнур неустойчив только по отношению к длинноволновым возмущениям с  $ka \sim B_\phi/B_z \ll 1$ , а при малой проводимости барьер для коротковолновых возмущений снимается, и тогда усиление продольного поля даже увеличивает неустойчивость.

При большой, но конечной проводимости магнитное поле почти заморожено в плазму, и поэтому такая неустойчивость может развиваться только на коротковолновых возмущениях, а движение плазмы при этом имеет вид диффузионного «просачивания» поперек силовых линий. Поскольку в таком медленном движении инерция не играет никакой роли, то заряженные частицы будут двигаться с дрейфовыми скоростями. Будем считать, что давление электронов и ионов мало и магнитное поле однородно. Тогда единственной причиной дрейфа будет электрическое поле, и, следовательно, дрейфовые скорости электронов и ионов будут равны  $\mathbf{v} = c[\mathbf{E}\mathbf{V}] \cdot \mathbf{B}^{-2}$ . Покажем, что при наличии продольного тока и неоднородной проводимости этот дрейф приводит к неустойчивости конвективного типа.

Пусть вдоль однородного поля  $B_z$ , направленного по оси  $z$ , течет ток  $j_0$  настолько слабый, что создаваемое им магнитное поле  $B_\varphi \ll B_z$ . Предположим, что проводимость плазмы в равновесном состоянии  $\sigma_0$  является некоторой медленно меняющейся функцией  $x$ . В полностью ионизованной плазме, где проводимость зависит только от температуры электронов, это изменение может быть обусловлено изменением температуры, а в слабо ионизованной плазме градиент  $\sigma_0$  может быть следствием градиента плотности.

Допустим, что на такое равновесное состояние наложено некоторое малое возмущение. Для коротковолновых возмущений можно воспользоваться квазиклассическим приближением и выбрать зависимость от координат и времени в виде  $\exp(-i\omega t + ikr)$ . Предположим, что продольное магнитное поле очень сильное и частота альфвеновских колебаний  $k_z c_A = k_z B_0 (4\pi c_0)^{-1/2}$  много больше частоты рассматриваемых нами колебаний. Тогда возмущение магнитного поля будет ничтожно малым, и, следовательно, в таких колебаниях электрическое поле является безвихревым:  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ .

Так как поперечные скорости электронов и ионов в рассматриваемом нами приближении совпадают, то поперечная компонента электрического поля отсутствует, а значит, должно быть равно нулю возмущение продольного тока, т. е.

$$-ik_z\varphi\sigma_0 + \sigma E_0 = 0. \quad (11.1)$$

Вследствие дрейфа в поперечном электрическом поле будет происходить перенос плазмы, а вместе с ней и проводимости, так что для возмущения проводимости  $\sigma$  можно написать

$$-i\omega\sigma - i\frac{ck_y}{B_z}\frac{d\sigma_0}{dx}\varphi = -\chi k_z^2\sigma, \quad (11.2)$$

где коэффициент  $\chi$  учитывает «рассасывание» электропроводности вдоль силовых линий: в полностью ионизованной плазме  $\chi$  представляет собой коэффициент температуропроводности, а в слабо ионизованной (но сильно «замагниченной») плазме под  $\chi$  следует понимать  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии. Из уравнений (11.1) и (11.2) находим  $\omega$ :

$$\omega = -i\chi k_z^2 + i\frac{k_y E_0 c}{k_z B_z \sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dx}. \quad (11.3)$$

При достаточно большом  $k_y$  второе слагаемое в выражении (11.3) может стать больше первого, и соответствующее возмущение будет нарастать во времени.

Рассмотрим более подробно причину такой, как мы будем ее называть, токово-конвективной неустойчивости. Пусть  $d\sigma_0/dx < 0$  и плазма немного сместилась из положения равновесия, как показано на рис. 16. Поскольку проводимость слоя  $ABCD$  вследствие

такого смещения несколько повысится, то на его граничных поверхностях выступят заряды: положительный на верхней поверхности и отрицательный на нижней. Эти заряды приводят к появлению некоторого электрического поля с отличной от нуля поперечной компонентой  $E_y$ . При соответствующем знаке  $k_y/k_z$  дрейф в этом поле будет происходить в направлении первоначального смещения и, следовательно, приведет к усилению начального возмущения.

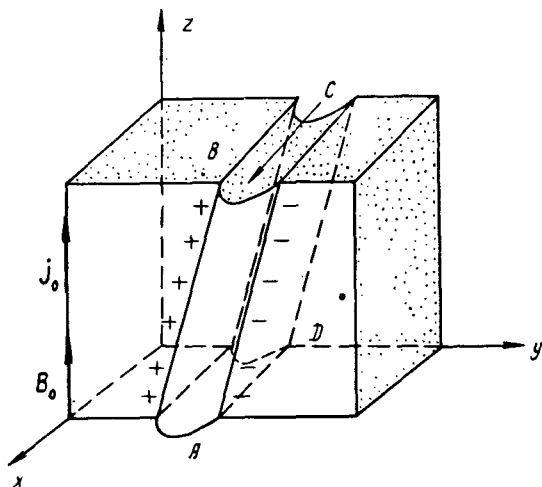


Рис. 16

Из формулы (11. 3) видно, что наибольшим инкрементом обладают возмущения с очень малым  $k_z$ , т. е. эта неустойчивость проявляется в перестановке трубок с плазмой, сильно вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля. Чтобы определить волновое число  $k_z$ , при котором инкремент достигает максимума, необходимо учесть инерционные члены в уравнении движения и законе Ома. Такое рассмотрение для плоского слоя в поле тяжести было проведено в работе [34]. В этой работе показано, что наряду с токово-конвективной неустойчивостью в неоднородной плазме с конечной проводимостью можно выделить неустойчивость типа «локального пинчевания», развивающуюся вследствие тенденции к стягиванию токовых нитей, и неустойчивость конвективного («гравитационного») типа, связанную с тем, что при конечной проводимости снимается условие вмороженности силовых линий, вследствие чего условие конвективной устойчивости становится значительно более жестким. В частности, обратный пинч (т. е. трубчатый разряд, в котором ток возвращается по стержню, расположенному на оси разряда), вполне устойчивый при идеальной проводимости, поскольку в нем  $\frac{d}{dr}(rB_\phi) < 0$ , с учетом

конечной проводимости, как было показано Ребю [35], должен становиться неустойчивым, если плотность тока превышает некоторое критическое значение, тем меньшее, чем меньше толщина разряда. Этот вывод был подтвержден соответствующими экспериментами.

## § 12. Перегревная неустойчивость

Еще один вид неустойчивости, связанной с конечной проводимостью, может встретиться в плазме, разогреваемой джоулевым теплом текущего по ней тока, если электропроводность растет с температурой. Эта неустойчивость состоит в том, что при небольшом перегреве трубки с током ее проводимость, а следовательно, и ток увеличиваются, что приводит к еще большему ее перегреву.

Для простоты рассмотрим следующую идеализированную задачу. Допустим, что вдоль однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , направленного вдоль оси  $z$ , течет ток  $\mathbf{j}_0$  настолько слабый, что создаваемое им магнитное поле пренебрежимо мало. Кроме того, предположим, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля. Тогда уравнение движения для малых колебаний можно записать в виде

$$-i\omega \mathbf{v} = \frac{1}{Mn_0c} [\mathbf{j}\mathbf{B}_0], \quad (12.1)$$

где  $M$  — масса ионов;  $\mathbf{v}$  — их скорость;  $n_0$  — плотность;  $\mathbf{j}$  — плотность тока.

Если считать ионы холодными, то закон Ома можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}_0] + \frac{\mathbf{j}}{\sigma_0} - \frac{\mathbf{j}_0}{\sigma_0} \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0} \frac{T}{T_0}, \quad (12.2)$$

где  $\mathbf{j}$  — возмущение тока;  $T_0$  — равновесная температура электронов;  $T$  — возмущение температуры.

Подставляя выражение для поля (12.2) в уравнение  $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{E}$ , являющееся следствием уравнений Максвелла, и исключая  $\mathbf{v}$  с помощью уравнения (12.1), получим

$$\left( \omega^2 + i\omega \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma_0} - c_A^2 k_z^2 \right) j_z = i\omega \frac{c^2 k_{\perp}^2}{4\pi\sigma_0} j_0 \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0} \frac{T}{T_0}, \quad (12.3)$$

где  $c_A = B_0 (4\pi n_0 M)^{-1/2}$  — альфвеновская скорость;  $k$  — волновое число малых колебаний вида  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ .

Температура  $T$  может быть найдена из уравнения теплового баланса. Допустим, что в равновесном состоянии плазма однородна, а джоулево тепло  $j_0^2/\sigma_0$  полностью уносится излучением  $Q_r(T_0)$ . Тогда, пренебрегая смещением плазмы вдоль  $z$ ,

линеаризованное уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$\left( -i\omega + \chi_{11}k_z^2 + \chi_{\perp}k_{\perp}^2 + \frac{2}{3n_0} \frac{dQ_r}{dT_0} + \frac{2j_0^2}{3n_0T_0\sigma_0} \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0} \right) \frac{T}{T_0} = \\ = \frac{4j_0}{3n_0T_0\sigma_0} j_z, \quad (12.4)$$

где  $\chi$  — температуропроводность (анизотропная).

Из уравнений (12. 3) и (12. 4) находим дисперсионное уравнение для определения частоты малых колебаний  $\omega$ :

$$(\omega^2 + i\omega\nu_s - c_A^2k_z^2) (\omega + i\chi_{11}k_z^2 + i\chi_{\perp}k_{\perp}^2 + i\nu_r + i\nu_q) + \\ + 2\omega\nu_s\nu_q \frac{k_{\perp}^2}{k^2} = 0, \quad (12.5)$$

где

$$\nu_s = \frac{c^2k^2}{4\pi\sigma_0}; \quad \nu_r = \frac{2}{3n_0} \frac{dQ_r}{dT_0}; \quad \nu_q = \frac{2j_0^2}{3n_0T_0\sigma_0} \frac{d \ln \sigma_0}{d \ln T_0}.$$

Если  $\nu_q = 0$ , т. е. проводимость не зависит от температуры, то, согласно уравнению (12. 5), колебания расщепляются на альфвеновские волны и возмущение температуры, затухающее вследствие теплопроводности и излучения (при  $\nu_r > 0$ ). Аналогичное расщепление происходит и при  $\nu_q \neq 0$ , если магнитное поле очень сильное, т. е.  $c_Ak_z$  много больше всех характерных частот. При этом частота  $\omega$  для тепловых возмущений будет равна:

$$\omega = -i\chi_{11}k_z^2 - i\chi_{\perp}k_{\perp}^2 - i\nu_r - i\nu_q. \quad (12.6)$$

Такие возмущения могут нарастать во времени лишь при  $\nu_q < 0$ , т. е. когда проводимость падает с температурой.

Рассмотрим теперь коротковолновые возмущения, для которых  $\nu_s$  значительно больше остальных характерных частот. Переходя к пределу  $\nu_s \rightarrow \infty$ , получим

$$\omega = -i\chi_{11}k_z^2 - i\chi_{\perp}k_{\perp}^2 - i\nu_r + i\nu_q \frac{k_{\perp}^2 - k_z^2}{k^2}. \quad (12.7)$$

Как видим, неустойчивость может быть и при положительном, и при отрицательном  $\nu_q$ . В первом случае неустойчивость проявляется в образовании нитей повышенной проводимости, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля, во втором — в появлении чередующихся слоев повышенной и пониженной проводимости, похожих на страты в тлеющем разряде. Однако, ввиду того что теплопроводность электронов вдоль магнитного поля является очень большой, в полностью ионизованной плазме к неустойчивости могут привести лишь возмущения, сильно вытянутые вдоль магнитного поля ( $k_z \rightarrow 0$ ). В этом случае плазма неустойчива

только при  $v_q > 0$ , что как раз соответствует реальным условиям в полностью ионизованной плазме, проводимость которой пропорциональна температуре электронов в степени  $3/2$ .

Следует отметить, что время развития этой неустойчивости сравнительно велико: оно имеет порядок величины скин-слоя в реальных условиях. С одной стороны, поскольку в сильном магнитном поле длинноволновые возмущения ( $k^2 < 4\pi\sigma_0 c_A k_z c^{-2}$ ) стабилизированы, шнур с током имеет тенденцию разбиться на множество нитей, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля. С другой стороны, время развития неустойчивости одного порядка с временем формирования разряда, и поэтому не исключена возможность, что реально такой процесс проявится просто в виде контрагирования всего разряда в целом, как это происходит, например, при шнуровании обычной дуги.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А. О силах, действующих на прямолинейный ток, находящийся внутри проводящей цилиндрической трубы. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 110.
2. Леонтович М. А., Шафранов В. Д. Об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле. Там же, стр. 207.
3. Трубников Б. А. О неустойчивости цилиндра плазмы. Там же, стр. 289.
4. Шафранов В. Д. Об устойчивости плазменного шнура при наличии продольного магнитного поля и проводящего кожуха. Там же, т. II, стр. 130.
5. Волков Т. Ф. Об устойчивости цилиндра плазмы во внешнем магнитном поле. Там же, т. II, стр. 144.
6. Шафранов В. Д. «Атомная энергия», № 5, 38 (1956).
7. Крускал М., Шварцшильд М. В сб. «Проблемы современной физики». Некоторые типы неустойчивости полностью ионизованной плазмы. № 2. М., Изд-во иностр. лит., 1956, стр. 108.
8. Chandrasekhar S., Fermi E. *Ap. J.*, **118**, 116 (1953).
9. Шафранов В. Д. Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 61.
10. Тейлер Р. Д. В кн. «Управляемые термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1960, стр. 74.
11. Roberts P. *Ap. J.*, **124**, 430 (1956).
12. Lundquist S. *Phys. Rev.*, **83**, 307 (1951).
13. Брагинский С. И., Кадомцев Б. Б. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 300.
14. Хайн К., Люст Р., Шлютер А. Об устойчивости плазмы. В кн. «Управляемые термоядерные реакции». М., Атомиздат, 1960, стр. 165.
15. Бернштейн А., Фримен Е., Крускал М., Кулсруд Р. Энергетический принцип для проблемы гидромагнитной устойчивости. Там же, стр. 226.
16. Розенблют М., Лонгмайр К. В сб. «Проблемы современной физики». № 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958, стр. 99.
17. Кадомцев Б. Б. О гидродинамике плазмы низкого давления. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 16.

18. Розенблют М. Теория самосжатого разряда. Устойчивость и нагрев. В кн. «Груды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Избр. докл. иностр. ученых. Т. I — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959, стр. 55.
  19. Сайдем. Устойчивость самосжатого линейного разряда. Там же, стр. 89.
  20. Беркович, Град и Рубин. Проблемы устойчивости в магнито-гидродинамике. Там же, стр. 109.
  21. Джонсон, Оберман, Кулсруд, Фримен. Некоторые устойчивые магнито-гидродинамические равновесные конфигурации. Там же, стр. 192.
  22. Kruskal M., Johnson J., Gottlieb M., Goldman L. Phys. Fluids, 1, 421 (1958).
  23. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 37, 1096 (1959).
  24. Кадомцев Б. Б. Там же, стр. 1646.
  25. Mercier C. Nucl. Fusion, 1, 47 (1960).
  26. Newcomb W. A. Ann. of Phys., 10, 232 (1960).
  27. Кадомцев Б. Б., Рокотян В. Е. «Докл. АН СССР», 133, 68 (1960).
  28. Велихов Е. П. «Ж. техн. физ.», 31, 180 (1961).
  29. Бреус С. Н. «Ж. техн. физ.», 30, 1030 (1960).
  30. Кадомцев Б. Б., Недоспасов А. В. J. Nucl. Energy, Part C, 1, 230 (1960).
  31. Newcomb W. Phys. Fluids, 4, 391 (1961).
  32. Вандакуров Ю. В. «Ж. техн. физ.», 30, 330, 781 (1960).
  33. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Успехи физ. наук», 73, 701 (1961).
  34. Furth H., Rosenbluth M., Killeen J. Phys. Fluids, 6, 459 (1963).
  35. Rebut P. H. J. Nucl. Energy, Part C, 4, 159 (1962).
  36. Кадомцев Б. Б. «Ядерный синтез», 1, 286 (1961).
-



---

## ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

*А. И. Морозов, Л. С. Соловьев*

### Введение

В работе излагается теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях преимущественно в связи с проблемой электромагнитных ловушек для частиц и плазмы.

Поскольку для удержания заряженных частиц приходится прибегать к полям весьма сложной геометрии, точное интегрирование уравнений движения оказывается почти всегда невозможным. Поэтому в большинстве случаев движение частиц рассматривается с помощью приближенных методов исследования, причем наиболее эффективным в настоящее время оказывается метод усреднения, приводящий (в частности, при малом отношении ларморовского радиуса к масштабу неоднородности поля) к дрейфовым уравнениям. Но и приближенные уравнения в целом ряде задач не интегрируемы, что вызывает необходимость их дальнейшего усреднения, т. е. перехода к так называемому методу продольного инварианта. Метод усреднения используется также и для получения приближенных уравнений движения частиц в быстропеременном электромагнитном поле.

Исследование с помощью приближенных методов позволяет охватить широкий круг задач. Однако вопрос о степени точности приближенных уравнений и, в частности, об эффектах, теряемых при усреднении, пока еще с достаточной полнотой не проанализирован. Это обстоятельство существенно затрудняет исследование абсолютных ловушек (см. § 7), когда выяснение условий неограниченного во времени пребывания частиц в ловушке является весьма важным моментом.

В работе мы не касались вопроса о степени точности усредненных уравнений на бесконечном интервале изменения времени и, в частности, вопроса о точности адиабатического инварианта.

Хочется подчеркнуть, что в настоящее время становится все более очевидной недостаточность дрейфового приближения для исследования широкого класса систем, особенно систем с горячей

плазмой. Для таких установок, как пробочные ловушки с инжекцией, для стеллараторов при высокой температуре плазмы и, для других систем актуальной становится разработка новых качественных и эффективных количественных методов исследования движения заряженных частиц.

## § 1. Уравнения движения и их интегралы

### 1. Уравнения движения

Уравнение движения частицы с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $e$  в электрическом поле  $\mathbf{E}$  и магнитном поле  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} m\mathbf{v} = \left( e\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right); \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость частицы;  $c$  — скорость света.

Если движение частиц рассматривается не в декартовых, а в каких-либо других координатах  $q_i$ , то уравнение (1.1) удобно записать в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad (1.2)$$

при этом функция Лагранжа  $L(q_i, \dot{q}_i)$  в релятивистском случае равна

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{v}\mathbf{A} - e\Phi, \quad (1.3)$$

а в нерелятивистском

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{v}\mathbf{A} - e\Phi. \quad (1.3a)$$

Векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный  $\Phi$  потенциалы электромагнитного поля связаны с напряженностями полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi; \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.4)$$

В ряде случаев уравнения движения частицы проще рассматривать в гамильтоновой форме, в которой система трех уравнений второго порядка (1.2) для координат  $q_i$  заменяется системой шести уравнений первого порядка для трех координат  $q_i$  и трех импульсов  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Здесь  $H(q_i, p_i)$  — гамильтонова функция, связанная с лагранжианом  $L(q_i, \dot{q}_i)$  соотношением

$$H = -L + \sum p_i \dot{q}_i \quad (1.6)$$

и представляющая собой энергию системы, выраженную через координаты и импульсы.

В релятивистском случае гамильтониан, соответствующий лагранжиану (1.3), равен

$$H = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\Phi, \quad (1.7)$$

а в нерелятивистском случае

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi. \quad (1.7a)$$

## 2. Интегралы уравнений движения

Общее решение уравнения (1.1) представляет собой систему шести функций — так называемых интегралов, зависящих от координат, скоростей, времени и шести постоянных  $c_k$ :

$$f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = c_k. \quad (1.8)$$

Эти постоянные определяются, например, положением и скоростью частицы в начальный момент времени. Аналитические выражения для интегралов (1.8) могут быть получены в замкнутом виде только в специальных случаях, в частности когда поля обладают симметрией в пространстве-времени. Интегралы, вытекающие из симметрии, называют законами сохранения. В обычном трехмерном пространстве элементарными видами симметрии являются симметрия относительно параллельного сдвига (трансляционная симметрия) и симметрия поворота (аксиальная симметрия). При наличии симметрии и соответствующем выборе системы координат лагранжиан может быть сделан не зависящим от одной координаты или нескольких.

В случае трансляционной симметрии такой координатой является декартова координата  $z$ , и из уравнений (1.2)—(1.3) следует закон сохранения импульса

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z = \text{const.} \quad (1.9)$$

Если поле обладает аксиальной симметрией, то в цилиндрической системе координат лагранжиан не зависит от азимута  $\varphi$ , и, следовательно, сохраняется момент количества движения

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} r A_\varphi = \text{const.} \quad (1.10)$$

Наиболее общим видом симметрии в трехмерном пространстве является винтовая. В этом случае лагранжиан зависит не от  $\varphi$

и  $z$  в отдельности, а от комбинации  $\varphi - \alpha z$ , в которой  $l = \frac{2\pi}{\alpha} = \text{const}$  — шаг винта; так что

$$\frac{\partial L}{\partial z} + \alpha \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

и, следовательно, согласно уравнениям (1. 2),

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(\dot{z} + \alpha r^2 \dot{\varphi}) + \frac{e}{c} (A_z + \alpha r A_\varphi) = \text{const.} \quad (1. 11)$$

Симметрия поля в четырехмерном пространстве-времени порождает множество новых интегралов. Наиболее интересными являются поля, не зависящие от времени, а также бегущие и вращающиеся, которыми мы и ограничимся.

а. Если поля не зависят от времени, то уравнение (1. 1) имеет интеграл энергии

$$\mathcal{E} = mc^2 + e\Phi = \text{const} \quad (1. 12)$$

или в нерелятивистском случае

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + e\Phi = \text{const.} \quad (1. 13)$$

Действительно, умножая уравнение (1. 1) на  $\mathbf{v}$  и учитывая, что  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  и

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

получим

$$\frac{d}{dt} mc^2 = e\mathbf{E}\mathbf{v} = -e(\mathbf{v}\nabla)\Phi. \quad (1. 14)$$

Поскольку по условию  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$ , то  $(\mathbf{v}\nabla)\Phi = \frac{d\Phi}{dt}$ , и отсюда следует интеграл энергии (1. 12). Разлагая  $m$  по степеням  $v^2/c^2$ , получим выражение (1. 13).

Уравнение (1. 14) показывает, что магнитное поле не совершает работы, поскольку лоренцева сила  $\frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$  направлена перпендикулярно к скорости частицы. Этим же объясняется и то обстоятельство, что магнитное поле не входит в интеграл энергии (1. 12).

Если поле переменное, то энергия частицы изменяется, причем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1. 15)$$

Действительно, вычисляя полную производную от лагранжиана  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  и учитывая уравнения (1. 2), получим (по одинаковым индексам производится суммирование)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

Отсюда и следует уравнение (1. 15), поскольку энергия системы равна

$$\mathcal{E} = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = mc^2 + e\Phi. \quad (1. 16)$$

б. При движении частицы в поле бегущей волны функция Лагранжа содержит  $z$  и  $t$  только в комбинации  $z - vt$ :

$$L = L(x, y, z - vt, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \quad v = \text{const.}$$

Отсюда

$$\frac{\partial L}{\partial t} + v \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

и с помощью уравнений (1. 2) и (1. 15) находим интеграл

$$\mathcal{E} - vp_z = \text{const}, \quad (1. 17a)$$

где обобщенный импульс  $p_z$  определяется формулой (1. 9).

в. В случае вращающегося электромагнитного поля лагранжиан зависит от комбинации  $\varphi - \omega t$ :

$$L = L(r, z, \varphi - \omega t, \dot{r}, \dot{z}, \dot{\varphi}); \quad \omega = \text{const.}$$

И поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \omega \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Подставляя сюда уравнения (1. 2) и (1. 15), получим интеграл

$$\mathcal{E} - \omega p_\varphi = \text{const}, \quad (1. 17b)$$

где  $p_\varphi$  — момент количества движения, определяемый выражением (1. 10).

При движении частицы в поле винтовой волны, зависящей в цилиндрической системе координат от аргументов  $r$  и  $\varphi - \omega t - vz$ , сохраняются оба интеграла — (1. 17a) и (1. 17b).

### 3. Исключение циклических координат

Выше мы показали, что наличие симметрии дает возможность найти многие интегралы, а это в свою очередь позволяет свести задачу о движении частицы в четырехмерном пространстве-времени к задаче о движении частицы в пространстве меньшего числа измерений.

В нерелятивистском случае существует простой метод перехода от рассмотрения движения частицы в обычном трехмерном пространстве к рассмотрению движения в пространстве меньшего числа измерений. Суть его состоит в использовании такой системы координат, в которой зависимость лагранжиана от одной или двух координат  $q^{(c)}$  в силу симметрии исчезает, тогда как зависимость от их производных по времени  $\dot{q}^{(c)}$  остается. (Если лагранжиан не зависит ни от одной из координат, то это случай свободного

движения частиц.) Такие координаты  $q^{(c)}$  называются циклическими и, как показывают уравнения (1.2), соответствующие им импульсы  $p^{(c)}$  сохраняются, т. е. являются интегралами движения.

Сведение системы трех уравнений (1.2), содержащей циклические переменные, к системе с меньшим числом уравнений, не содержащих производных циклических координат по времени, может быть осуществлено заменой в исходных уравнениях скорости  $\dot{q}^{(c)}$  ее значением, найденным из уравнения сохранения импульса  $p^{(c)} = \text{const}$ . Однако более удобно исключить циклические координаты, вводя так называемую функцию Раусса, которая определяется как

$$R = L - \sum \dot{q}^{(c)} p^{(c)}, \quad (1.18)$$

где под знаком суммы содержатся только циклические координаты. При этом  $\dot{q}^{(c)}$  в  $R$  исключаются из интегралов  $p^{(c)} = \text{const}$ . Нетрудно видеть, что введение функции Раусса соответствует переходу к гамильтоновой форме по циклическим переменным и сохранению лагранжевой формы для остальных координат, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp^{(c)}}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial q^{(c)}} = 0; & \frac{dq^{(c)}}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial p^{(c)}}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q_i} &= \frac{\partial R}{\partial q_i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

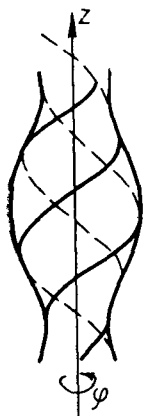


Рис. 1

Рассмотрим в качестве примера движение частицы\* в электромагнитном поле, обладающем аксиальной симметрией (рис. 1). Нетрудно видеть, что произвольное аксиально симметричное магнитное поле может быть описано двумя компонентами векторного потенциала  $A_\varphi$  и  $A_z$ . Следовательно, лагранжиан будет иметь вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \dot{z} A_z + \frac{e}{c} r \dot{\varphi} A_\varphi - e\Phi. \quad (1.20)$$

Здесь  $\Phi(r, z, t)$  — потенциал электростатического поля. Координата  $\varphi$  циклическая, и сохраняющийся импульс определяется формулой (1.10).

Функция Раусса в данном случае равна

$$R = L - \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \dot{z} A_z - e\Phi - u^0, \quad (1.21)$$

где

$$u^0 = \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\varphi}{r} - \frac{e}{c} A_\varphi \right)^2, \quad p_\varphi = \text{const}, \quad (1.22)$$

\* Далее в этом параграфе мы будем рассматривать нерелятивистский случай.

В частности, если  $A_z = 0$ , что соответствует отсутствию компоненты  $B_\varphi$ , задача сводится к расчету движения частицы в потенциальном поле  $u = u^0 + e\Phi$ :

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} &= -\frac{\partial u}{\partial r}, \\ m\ddot{z} &= -\frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Для полей, обладающих симметрией только в четырехмерном пространстве времени, исключение соответствующих циклических координат приводит к весьма громоздким выражениям.

Однако в некоторых случаях упростить задачу можно по-иному. Так, например, если рассматривается движение частицы во вращающемся поле, описываемом лагранжианом

$$\begin{aligned} L = & \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} r\dot{\varphi}A_\varphi(r, \varphi - \omega t, z) + \\ & + \frac{e}{c} \dot{r}A_r(r, \varphi - \omega t, z) + \frac{e}{c} \dot{z}A_z(r, \varphi - \omega t, z) - \\ & - e\Phi(r, \varphi - \omega t, z), \end{aligned} \quad (1.24)$$

то, вводя новую координату  $\xi = \varphi - \omega t$ , можно исключить  $t$  и получить лагранжиан

$$\begin{aligned} L = & \frac{m}{2} [(\dot{\xi} + \omega)^2 r^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2] + \frac{e}{c} r(\dot{\xi} + \omega) A_\varphi + \\ & + \frac{e}{c} \dot{r}A_r + \frac{e}{c} \dot{z}A_z - e\Phi, \end{aligned} \quad (1.24a)$$

зависящий только от пространственных координат. Аналогичная замена может быть произведена и в случае движения частицы в поле бегущей или винтовой волны.

#### 4. Оценка области движения частицы в электромагнитном поле

Если электромагнитное поле переменное и не имеет какой-либо симметрии, то в общем случае нельзя оценить размеров области, в которой может находиться частица.

Если же поля постоянны во времени или обладают симметрией, связанной с перемещением в направлении оси  $t$ , то мы имеем интеграл энергии или какой-либо другой интеграл типа интеграла (1. 17). Наличие такого интеграла позволяет оценить область возможных положений частицы. Так, если имеется интеграл энергии (1. 13), то эта область зависит только от электрического поля и определяется очевидным соотношением

$$e\Phi \leq \mathcal{E} = \frac{mv_0^2}{2} + e\Phi_0. \quad (1.25)$$

Здесь  $v_0$  и  $\Phi_0$  — скорость частицы и потенциал в точке ее нахождения в начальный момент времени.

Если поле, будучи постоянным во времени, обладает к тому же пространственной симметрией, например аксиальной, то в этом случае сохраняется и энергия и момент количества движения. Интеграл энергии теперь может быть написан в виде

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + u = \text{const}, \quad (1.26)$$

где  $u$  выражается формулой (1.22). Отсюда следует оценка области возможных положений частицы:

$$u \leq \mathcal{E}, \quad (1.27)$$

которая уже зависит и от наличия магнитного поля (пример использования этого соотношения дан в п. 5 данного параграфа и в § 3).

Если поле зависит только от одной пространственной координаты  $x$ , то нетрудно получить интеграл энергии в виде

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + G(x) = \text{const}. \quad (1.28)$$

Это позволяет написать общее решение задачи в квадратурах

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(\mathcal{E} - G)}}, \quad (1.29)$$

т. е. область движения частицы определяется однозначно.

Аналогично, если частица движется в аксиально симметричном магнитном поле, описываемом лишь одной компонентой векторного потенциала  $A_\varphi = A_\varphi(r)$ , то из уравнений (1.9), (1.10) и (1.13) получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{2}{m} (\mathcal{E}_\perp - e\Phi) - \frac{1}{m^2} \left( \frac{p_\varphi}{r} - \frac{e}{c} A_\varphi \right)^2; \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{mr} \left( \frac{p_\varphi}{r} - \frac{e}{c} A_\varphi \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

где  $\mathcal{E}_\perp = \mathcal{E} - \frac{m\dot{z}^2}{2}$ . Правые части уравнений (1.30) зависят только от  $r$ , и, следовательно, уравнение траектории также сводится к квадратурам

$$\varphi = \int \dot{\varphi} \frac{dr}{r}; \quad t = \int \frac{dr}{r}. \quad (1.31)$$

Наконец, если напряженности полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  не зависят ни от координат, ни от времени, то решение, как это будет показано в следующем параграфе, легко получается в конечном виде.



### 5. Условия абсолютного удержания частицы в адиабатической ловушке

Учитывая соображения, изложенные в п. 4, рассмотрим движение частицы в постоянном аксиально-симметричном магнитном поле с «пробками» (рис. 2), называемом также «адиабатической ловушкой» [1] (см. п. 5 § 3).

Движение частиц в таком поле описывается системой (1.23) и имеет два закона сохранения — энергии и импульса:

$$\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + \frac{2}{m} u = \text{const}; \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} r A_\varphi = \text{const};$$

$$u = \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\varphi}{r} - \frac{e}{c} A_\varphi \right)^2. \quad (1.32)$$

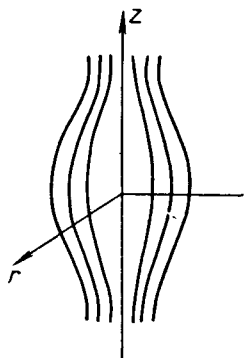


Рис. 2

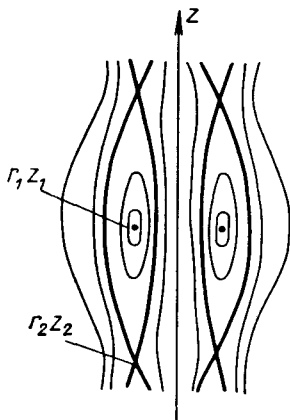


Рис. 3

Если задано поле  $b = b(z)$  на оси системы, то поле в ее окрестности может быть описано компонентой векторного потенциала  $A_\varphi$ :

$$\begin{aligned} A_\varphi(r, z) &= \frac{r}{2} b(z) - \frac{r^3}{16} b''(z) + \dots = \\ &= \left\{ \frac{J_1 \left( r \frac{d}{dz} \right)}{\frac{d}{dz}} \right\} b(z). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Исследование структуры эквипотенциальных поверхностей  $u = \text{const}$  показывает, что они имеют замкнутые поверхности, вложенные одна в другую (рис. 3), только в том случае, когда

$$p_\varphi = -p < 0$$

(нетрудно убедиться, что при этом частица обходит ось  $z$ ). Координаты особых точек этих поверхностей определяются соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1.34)$$

Одна из точек — центр  $(r_1, z_1)$  — находится при  $z_1$ , соответствующем минимуму  $b(z)$ , а вторая — седловая точка  $(r_2, z_2)$  — соответствует максимуму  $b(z)$ . Ограничиваясь первыми членами разложения (1.33), из соотношений (1.34) найдем  $r_1$  и  $r_2$ :

$$r_1^2 = \frac{2cp}{eb_1}; \quad r_2^2 = \frac{2cp}{eb_2}, \quad (1.35)$$

где  $b_1 = b(z_1)$ ;  $b_2 = b(z_2)$ . Если частица инжектируется вне сепаратрисы (под этим названием мы понимаем поверхность, содержащую седловые точки, см. рис. 3), т. е. в области, где эквипотенциали не замкнуты, то она может уйти в бесконечность, причем законы сохранения (1.32) не дают возможности установить какого-либо запрета на этот уход\*. Если же частицы инжектируются внутри сепаратрисы, то те из них, энергия которых удовлетворяет условию

$$\frac{m}{2} (v_r^2 + v_z^2)_0 + u_0 < u_c, \quad (1.36)$$

останутся сколь угодно долго внутри сепаратрисы.

Учитывая, что по своему существу  $u = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2$  и поэтому

$$\frac{m}{2} (v_r^2 + v_z^2) + u = \frac{m}{2} v^2,$$

где  $v$  — полная скорость частицы, мы можем написать следующее достаточное условие удержания частицы внутри сепаратрисы:

$$\frac{m}{2} v^2 < \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\varphi}{r} - \frac{e}{c} A_\varphi \right)_c^2 = \frac{1}{2m} \left( \frac{p_\varphi}{r_2} - \frac{e}{c} A_\varphi(r_2, z_2) \right)^2. \quad (1.37)$$

Подставляя сюда вместо  $A_\varphi$  первый член разложения (1.33) и усиливая неравенство (1.37), получим условие запертия в виде

$$2eb_2 p > m^2 c v^2. \quad (1.38)$$

Если частица инжектируется в точке  $r = r_1, z = z_1$ , то выражение для  $p$ , определяемое законом сохранения (1.32) с учетом первого члена разложения (1.33) и выражения (1.35), дает возможность получить

$$2p = m r_1 |v_{0\varphi}|.$$

Подставляя сюда значение  $r_1$ , получим

$$p = \frac{2m^2 c}{e} \frac{v_{0\varphi}^2}{b_1}. \quad (1.39)$$

\* Тем не менее в некоторых случаях можно показать, что существуют частицы такого типа, сколь угодно долго остающиеся в ловушке [2].

Отсюда, согласно неравенству (1.38), находим достаточное условие абсолютного удержания частицы

$$\frac{v_{0\varphi}^2}{v^2} \geq \frac{b_1}{b_2}. \quad (1.40)$$

Это соотношение является более жестким, чем условие, обязанное сохранению адиабатического инварианта [см. неравенство (3.29)]:

$$\frac{v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{v_{0\varphi}^2 + v_{0r}^2}{v^2} \geq \frac{b_1}{b_2}. \quad (1.41)$$

**Задача 1.** Рассчитать движение частицы внутри равномерно заряженного круглого цилиндра, находящегося в однородном продольном магнитном поле  $\mathbf{B}$ .

**Решение.** Обозначая через  $a$  радиус цилиндра и через  $E_a$  поле при  $r = a$ , имеем

$$A_{\varphi} = B \frac{r}{2}; \quad \Phi = -\frac{E_a}{2a} r^2.$$

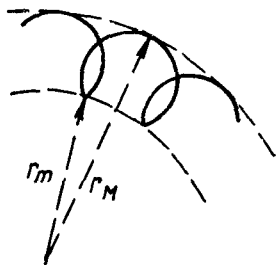


Рис. 4

Траектория частицы в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, имеет вид, изображенный на рис. 4. Приращение азимута за период движения  $T$  от  $r_m$  до  $r_M$  и обратно до  $r_m$  выражается интегралом (1.31)

$$\Delta\varphi_T = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{\left( \frac{p_{\varphi}}{mr^2} - \frac{\omega_B}{2} \right) dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon_{\perp} - e\Phi) - r^2 \left( \frac{p_{\varphi}}{mr^2} - \frac{\omega_B}{2} \right)^2}},$$

а сам период

$$T = 2 \int_{r_m}^{r_M} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon_{\perp} - e\Phi) - r^2 \left( \frac{p_{\varphi}}{mr^2} - \frac{\omega_B}{2} \right)^2}},$$

где

$$\omega_B = \frac{eB}{mc}.$$

Полученные интегралы берутся в пределах от  $r_m$  до  $r_M$ , обращающих в нуль их подкоренные выражения. С использованием подстановок  $r^2 = x$  и  $r^2 = \frac{1}{x}$  они легко сводятся к известному интегралу

$$\int_{x_m}^{x_M} \frac{dx}{\sqrt{(x_M - x)(x - x_m)}} = \pi.$$

В результате получаем

$$\Delta\varphi_T = \pi \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4eE_a}{m\omega_B^2}}} \right\}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_B} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4eE_a}{m\omega_B^2}}}.$$

Средняя скорость движения по азимуту (т. е. скорость азимутального дрейфа) равна  $\Delta\varphi_T/T$ .

**Задача 2\*.** Определить угол дрейфа за один ларморовский оборот при движении частицы в средней плоскости аксиально симметричного магнитного поля, если поле  $B_z$  спадает по закону  $B_z = B_a \frac{a}{r}$ .

**Решение.** Векторный потенциал такого поля равен  $A_\varphi = B_a a = \text{const}$  и интеграл (1. 31), аналогично предыдущей задаче, вычисляется точно. В результате получим

$$\Delta\varphi_T = 2\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{mcv}{eA_\varphi}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

## § 2. Движение заряженной частицы в постоянных однородных полях

Рассмотрим сначала нерелятивистский случай ( $v^2 \ll c^2$ ). При постоянных  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  уравнение движения

$$\left. \begin{aligned} m \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}], \\ \mathbf{F} &= e \mathbf{E} + \mathbf{f}, \end{aligned} \right\} \quad (2. 1)$$

является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Здесь через  $\mathbf{f}$  обозначена произвольная постоянная сила неэлектрического происхождения, например сила тяжести.

Если  $\mathbf{B} = 0$ , то движение частицы представляет собой равномерно ускоренное движение с ускорением  $\frac{\mathbf{F}}{m}$ .

В общем случае, когда  $\mathbf{B} \neq 0$ , уравнение (2. 1) удобно разбить на два, разложив  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  на составляющие, параллельные и перпендикулярные к  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}. \quad (2. 2)$$

Подставляя выражения (2. 2) в уравнение (2. 1), получим

$$m \dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = \mathbf{F}_{\parallel}, \quad (2. 3a)$$

$$m \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \mathbf{F}_{\perp} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}]. \quad (2. 3b)$$

Первое из этих уравнений описывает равномерно ускоренное движение частицы под действием силы  $\mathbf{F}_{\parallel}$ .

Если  $\mathbf{F}_{\parallel} = 0$ , то частица покоится или движется вдоль магнитного поля с постоянной скоростью. Уравнение (2. 3b) описывает движение частицы в плоскости, перпендикулярной к вектору напряженности магнитного поля.

Если  $\mathbf{F}_{\perp} = 0$ , то

$$m \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}]. \quad (2. 4)$$

\* Эта задача предложена Д. В. Сивухиным.

Из этого уравнения вытекает, что действующая на частицу сила все время перпендикулярна к ее скорости. Следовательно, модуль скорости частицы не меняется и частица движется по окружности. Эта окружность называется ларморовской.

Обозначив через  $\omega_B$  вектор угловой скорости, а через  $r$  радиус-вектор частицы, отсчитываемый от центра ларморовской окружности, можно написать

$$\mathbf{v}_\perp = [\omega_B \mathbf{r}]. \quad (2.5)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.4) и учитывая, что  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_\perp$ , получим

$$[\omega_B \mathbf{v}_\perp] = - \left[ \frac{e\mathbf{B}}{mc}, \mathbf{v}_\perp \right].$$

Отсюда следует, что (рис. 5)

$$\omega_B = - \frac{e\mathbf{B}}{mc}. \quad (2.6)$$

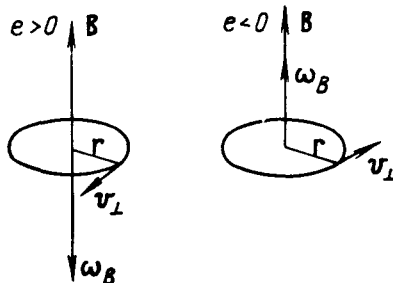


Рис. 5

При этом мы учли, что  $\omega_B$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны к  $\mathbf{v}_\perp$ . Модуль угловой скорости

$$\omega_B = \frac{eB}{mc} \quad (2.7)$$

называется ларморовской или циклотронной частотой. Характерно, что в рассматриваемом нерелятивистском случае эта частота не зависит от скорости.

Направление вращения частицы в магнитном поле, как показывает выражение (2.6), зависит от знака ее заряда. Частица ведет себя как элементарный диамагнетик, поскольку магнитное поле, создаваемое движением частицы по ларморовской окружности, направлено противоположно внешнему полю.

Выражение (2.5) определяет также радиус ларморовской окружности

$$r_\pi = \frac{v_\perp}{\omega_B}. \quad (2.8)$$

Из соотношений (2.7) и (2.8) вытекает следующее выражение магнитного момента «ларморовского кружка»:

$$\mu = \frac{JS}{c} = \frac{1}{c} \frac{ev_\perp}{2\pi r_\pi} \pi r_\pi^2 = \frac{mv_\perp^2}{2B}. \quad (2.9)$$

Пусть теперь  $\mathbf{F}_\perp \neq 0$ . В этом случае уравнение (2.36) может быть сведено к уравнению вида (2.4) для  $\mathbf{v}'$  заменой переменных

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}' + \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F}_\perp \mathbf{B}]}{B^2} \quad (2.10)$$

(при этом используется соотношение  $[\mathbf{B}[\mathbf{B}\mathbf{F}_\perp]] = -B^2\mathbf{F}_\perp$ ).

Физически эта замена означает переход к системе координат, движущейся со скоростью

$$\mathbf{v}_{др} = \frac{c}{e} \frac{[\mathbf{F}_{\perp} \mathbf{B}]}{B^2}, \quad (2.11)$$

называемой скоростью дрейфа, причем  $\mathbf{v}'$  является скоростью частицы в новой системе координат.

Таким образом, результирующее движение частицы в полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  представляет собой вращение по ларморовской окружности

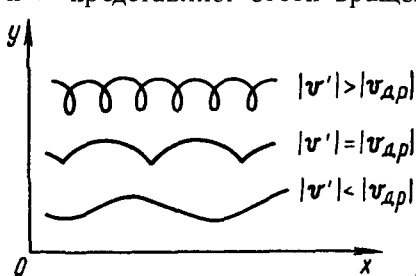


Рис. 6

радиуса  $r_L = \frac{|\mathbf{v}'|}{\omega_B}$  и одновременный дрейф со скоростью  $\mathbf{v}_{др}$  в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{F}_{\perp}$  и  $\mathbf{B}$ .

В зависимости от соотношения  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{v}_{др}$  характер траектории частицы в плоскости  $xOy$  в неподвижной системе координат будет различен (рис. 6).

В частности, если частица в начальный момент покоилась, (2.10),  $|\mathbf{v}_{др}| = |\mathbf{v}'|$ , и частица

высота которой соответственно

то, как следует из выражения движется по циклоиде, шаг и равны

$$L = \frac{2\pi v_{др}}{\omega_B}; \quad l = \frac{2v_{др}}{\omega_B}. \quad (2.12)$$

Если  $\mathbf{F}_{\perp}$  является силой неэлектрического происхождения, например силой тяжести, то направление скорости дрейфа зависит от знака частицы. Если же  $\mathbf{F}_{\perp} = e\mathbf{E}_{\perp}$ , то в этом случае скорость дрейфа

$$\mathbf{v}_{др} = c \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2} \quad (2.13)$$

равна по модулю

$$v_{др} = c \frac{E_{\perp}}{B}$$

и не зависит от массы и заряда частицы.

Следует подчеркнуть, что этот вывод относится только к скорости дрейфа. Истинная же скорость частицы зависит и от массы, и от заряда частицы (рис. 7).

Если  $E_{\perp} \ll B$ , то скорость дрейфа много меньше скорости света и поэтому движение в скрещенных полях (т. е. при  $E_{\parallel} = 0$ ) остается сколь угодно долго нерелятивистским, поскольку в начале оно было нерелятивистским. Следовательно, нерелятивистские

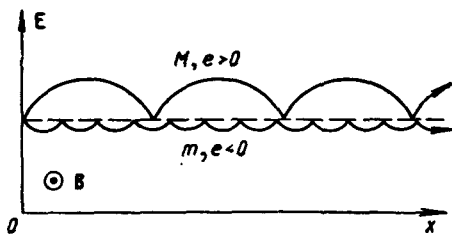


Рис. 7

уравнения движения применимы для бесконечного интервала времени.

Если же  $E_{\perp} \geq B$ , то даже при  $E_{\parallel} = 0$  скорость  $v_{др} \geq c$  и частица со временем приобретает скорость порядка скорости света, что требует уже релятивистского рассмотрения. Однако на небольших временных интервалах приведенное рассмотрение остается в силе при любых  $v_{др}$ , если начальная скорость частицы нерелятивистская.

Объединяя результаты рассмотрения уравнений (2.3) и считая, что  $v_{др} \ll c$ , можно сказать, что общее движение частицы

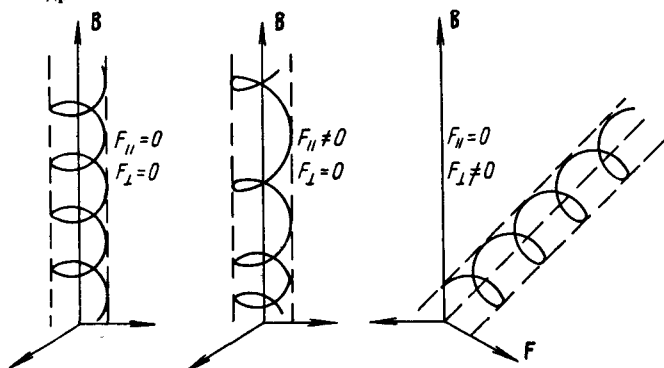


Рис. 8

в постоянных и однородных полях  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \mathbf{f}$  представляет собой сумму движений (рис. 8), состоящую из равноускоренного движения вдоль магнитного поля под действием силы  $F_{\parallel}$ , равномерного дрейфа в плоскости, перпендикулярной к  $\mathbf{B}$ , со скоростью (2.11) и вращения с частотой  $\omega_B = \frac{eB}{mc}$  по окружности радиуса  $\frac{|v'|}{\omega_B} = \frac{|v_{0\perp} - v_{др}|}{\omega_B}$ .

Если начальную скорость частицы обозначить через  $\mathbf{v}_0$ , то скорость в любой другой момент времени может быть определена по формуле

$$\mathbf{v} = \left( \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{a} + \frac{\mathbf{F}}{m} t \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 \frac{\mathbf{F}}{m} \right] + \{ [\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{a}] \sin \omega t - [\boldsymbol{\tau}_0 [\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{a}]] \cos \omega t \}, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор, определяемый начальной скоростью,

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_0 - \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 \frac{\mathbf{F}}{m} \right]; \quad \boldsymbol{\tau}_0 \equiv \frac{\mathbf{B}}{B}; \quad \omega \equiv -\frac{eB}{mc}.$$

Интегрируя выражение (2.14) по времени, можно получить явное выражение для вектора  $\mathbf{r}$  в функции от времени и начальных условий  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$ . Радиус ларморовской окружности определяется формулой  $r_L^2 = \frac{1}{\omega^2} [\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{a}]^2$  и зависит от  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ . Скорость

движения центра ларморовской окружности представляется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 \frac{\mathbf{F}}{m} \right]; \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \left( \boldsymbol{\tau}_0 \frac{\mathbf{F}}{m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.14a)$$

Если магнитное поле медленно меняется как в пространстве, так и во времени, то движение частицы также может быть представлено как вращение вокруг силовой линии  $\mathbf{B}$ , на которое наложено некоторое систематическое перемещение вдоль  $\mathbf{B}$  и «дрейф» поперек  $\mathbf{B}$ . В дрейфовой теории, излагаемой ниже, выводятся уравнения типа (2.14a) для движения так называемого ведущего центра частицы.

Перейдем теперь к релятивистскому случаю ( $v \sim c$ ), когда система уравнений (1.1) может быть приведена к линейной, если вместо независимой переменной  $t$  взять собственное время  $s$ , дифференциал которого

$$ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (2.15)$$

Тогда уравнение (1.1) вместе с уравнением энергии (1.14) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} m_0 \ddot{x} &= eE_x \dot{t} + \frac{e}{c} \dot{y} B + f_x \dot{t}; \\ m_0 \ddot{y} &= eE_y \dot{t} - \frac{e}{c} \dot{x} B + f_y \dot{t}; \\ m_0 \ddot{z} &= eE_z \dot{t} + f_z \dot{t}; \\ m_0 c^2 \dot{t} &= e(E_x \dot{x} + E_y \dot{y} + E_z \dot{z}) + f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Здесь точка означает дифференцирование по  $s$ , через  $m_0$  обозначена масса покоя и за направление оси  $z$  принято направление магнитного поля.

Если  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{f} = 0$ , то система (2.16) будет иметь решение

$$x = r_{\perp} \sin(\omega_0 s + \alpha); \quad y = r_{\perp} \cos(\omega_0 s + \alpha); \quad v^2 = \text{const}, \quad (2.17)$$

где

$$\omega_0 = \frac{eB}{m_0 c}.$$

Переходя к переменной  $t$ , мы видим, что частота вращения релятивистской частицы в магнитном поле равна

$$\omega_B = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{eB}{mc}; \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.18)$$



В другом крайнем случае, когда  $\mathbf{V} = 0$ ,  $\mathbf{f} = 0$  и  $E = E_x$ , мы получаем (ось  $z$  считаем направленной перпендикулярно к полю  $\mathbf{E}$  и к начальной скорости)

$$m_0 \ddot{x} = eEt\dot{t}; \quad m_0 \ddot{y} = 0; \quad m_0 \dot{t} = \frac{eE}{c^2} \dot{x}. \quad (2.19)$$

Отсюда, обозначая через  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $t_0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $s_0$  произвольные постоянные, получим общее решение

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a \operatorname{ch} \frac{eE}{m_0 c} (s + s_0); & y &= y_0 + bs; \\ t &= t_0 + \frac{a}{c} \operatorname{sh} \frac{eE}{m_0 c} (s + s_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Считая, что  $x = y = \dot{x} = \dot{y} = 0$  при  $t = 0$ , получим следующий закон движения вдоль оси  $x$ :

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (ceEt)^2} - \frac{m_0 c^2}{eE}. \quad (2.21)$$

В общем случае, когда  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  отличны от нуля, рассмотрение движения частицы в лабораторной системе отсчета весьма громоздко.

Ранее, в нерелятивистском случае, мы упрощали исследование общего случая переходом к системе отсчета, движущейся со скоростью дрейфа. Эту процедуру естественно использовать и здесь.

В теории поля [3] доказывается, что при произвольных лоренцевых преобразованиях электромагнитного поля сохраняются две величины

$$I_1 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{V}^2; \quad I_2 = (\mathbf{E}\mathbf{V})^2. \quad (2.22)$$

Это позволяет выделить два различных типа электромагнитных полей: поля, у которых второй из инвариантов не равен нулю, и поля, у которых оба инварианта равны нулю. В первом случае соответствующим выбором системы отсчета поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  можно сделать параллельными, во втором — они во всех системах взаимно-перпендикулярны.

В первом случае система (2.16) при  $\mathbf{f} = 0$  разбивается на две независимые подсистемы

$$\left. \begin{aligned} m_0 \ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y} B; & m_0 \ddot{z} &= eE_z \dot{t}; \\ m_0 \ddot{y} &= -\frac{e}{c} \dot{x} B; & m_0 c^2 \dot{t} &= eE_z \dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

решение которых представляет собой совокупность решений (2.17) и (2.20), т. е.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 s; & y &= \frac{a}{\omega_0} \cos \omega_0 s; \\ z &= \frac{B}{E} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\omega_0} \operatorname{ch} \omega_0 \frac{E}{B} s; & ct &= \frac{B}{E} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\omega_0} \operatorname{sh} \omega_0 \frac{E}{B} s. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Для определения постоянных используется равенство  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - c^2 t^2 = -1$ .

Это решение при  $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$  переходит в рассмотренное выше. Если же  $I_1 = I_2 = 0$ , то  $\mathbf{E} = \mathbf{B}$  и система (2.16) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_0 \dot{y}; & \ddot{z} &= 0; \\ \ddot{y} &= \omega_0 (ct - \dot{x}); & ct &= \omega_0 \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Ее решение может быть представлено соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\beta}{6} \sigma^3 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \omega_0^{-2}}{2\beta} \sigma; & y &= \frac{\beta}{2} \sigma^2; \\ z &= \alpha \sigma; & ct &= \frac{\beta}{6} \sigma^3 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega_0^{-2}}{2\beta} \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные постоянные;  $\sigma = \omega_0 s$  — параметр.

В заключение отметим формулу [3], определяющую скорость системы отсчета, в которой поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  параллельны:

$$\frac{v/c}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{E^2 + B^2}. \quad (2.27)$$

Очевидно, эта система определена с точностью до произвольного движения вдоль поля.

### § 3. Движение частиц в дрейфовом приближении

#### 1. Постановка задачи

Точное интегрирование уравнения (1.1) в большинстве практически интересных случаев, когда поля в пространстве и во времени меняются достаточно произвольным образом, в конечном виде невыполнимо. В связи с этим приходится прибегать к приближенным или к численным методам интегрирования. Среди приближенных методов особое место занимает так называемое дрейфовое приближение, позволяющее ясно представить качественную картину движения частицы, а в большом числе случаев довести вычисления до конца.

Дрейфовое приближение справедливо в том случае, когда ларморовский радиус частицы существенно меньше масштаба неодно-

родности поля, а ларморовская частота много больше частоты изменения поля, т. е. дрейфовое приближение — это метод рассмотрения движения частиц в полях, медленно изменяющихся в пространстве и во времени.

Медленное изменение поля позволяет представить движение частицы  $\mathbf{R}(t)$  как вращение  $\mathbf{q}(t)$  с медленно изменяющимися радиусом и частотой вокруг перемещающегося центра  $\mathbf{r}(t)$  ларморовской окружности, называемого ведущим центром (рис. 9):

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{q}(t). \quad (3.1)$$

Уравнения, описывающие усредненное движение ведущего центра и изменение ларморовского радиуса  $|\mathbf{q}|$ , называют дрейфовыми уравнениями.

Математическим аппаратом, позволяющим выделить медленное изменение параметров осциллирующего движения, является метод усреднения [4] (см. приложение I). Для его применения систему уравнений второго порядка следует заменить системой уравнений первого порядка, явно выделив осцил-

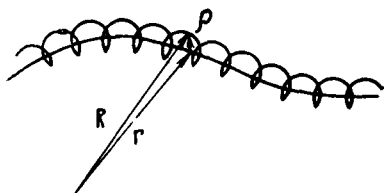


Рис. 9

ляцию\*. Этому и посвящены следующие два пункта параграфа.

Сначала мы рассмотрим тот случай, когда сила  $\mathbf{F} = \frac{e\mathbf{E} + \mathbf{f}}{m}$  мала и скорость дрейфа много меньше скорости частицы

$$v_{др} = \frac{mcF}{eB} \ll v.$$

Затем это ограничение мы снимем.

## 2. Вывод дрейфовых уравнений

Рассмотрим движение релятивистской частицы

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{F} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]; \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{F} = \frac{1}{m}(e\mathbf{E} + \mathbf{f})$  — сила, действующая на единицу релятивистской массы  $m$ . Это уравнение удобно для дальнейшего изложения записать в форме, разрешенной относительно ускорения  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . Вводя обозначение

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e\mathbf{B}}{mc}, \quad (3.3)$$

\* См. также работу Д. В. Сивухина [5], где эта задача решается другим способом.

получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{F} \mathbf{v}) \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}]. \quad (3.4)$$

Для того чтобы применить к уравнению (3.4) метод усреднения, выделим в явном виде быстрое вращение по ларморовской окружности, по которому и производится усреднение. С этой целью введем ортогональную криволинейную систему координат с осями  $\boldsymbol{\tau}_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1$ ,  $\boldsymbol{\tau}_2$ , связанную с магнитным полем  $\mathbf{B}$  в данной точке:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \frac{\mathbf{B}}{B}; \quad [\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2] = \boldsymbol{\tau}_0; \quad [\boldsymbol{\tau}_2 \boldsymbol{\tau}_0] = \boldsymbol{\tau}_1; \quad [\boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_1] = \boldsymbol{\tau}_2. \quad (3.5)$$

Вектор  $\boldsymbol{\tau}_0$  определен, коль скоро известна напряженность магнитного поля как функция координат и времени, а векторы  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  мы не конкретизируем, поскольку из окончательных формул они выпадают.

Вектор скорости частицы представим разложенным по этим осям [ср. формулу (2.14)]:

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta). \quad (3.6)$$

Здесь  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — параллельная и перпендикулярная к  $\mathbf{B}$  составляющие скорости, а  $\theta$  — фаза вращения вокруг  $\mathbf{B}$ . Подставляя выражение (3.6) в уравнение (3.4) и умножая затем полученное таким образом векторное уравнение последовательно на  $\boldsymbol{\tau}_0$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta$  и  $-\boldsymbol{\tau}_1 \sin \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \theta$ , получим уравнения для новых переменных  $r$ ,  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  и  $\theta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta); \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \boldsymbol{\tau}_0 \left\{ \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{F} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right\} + v_{\perp} \dot{\boldsymbol{\tau}}_0 (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta); \\ \frac{dv_{\perp}}{dt} &= (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta) \left\{ \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{F} \mathbf{v}) \mathbf{v} - v_{\parallel} \dot{\boldsymbol{\tau}}_0 \right\}; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{v_{\perp}} (\boldsymbol{\tau}_1 \sin \theta - \boldsymbol{\tau}_2 \cos \theta) \left\{ \mathbf{F} - v_{\parallel} \dot{\boldsymbol{\tau}}_0 - \right. \\ &\quad \left. - v_{\perp} (\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 \cos \theta + \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 \sin \theta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

В уравнениях (3.7) учтено очевидное тождество  $\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\tau}_i \boldsymbol{\tau}_k) = \dot{\boldsymbol{\tau}}_i \boldsymbol{\tau}_k + \boldsymbol{\tau}_i \dot{\boldsymbol{\tau}}_k = 0$ . Точкой обозначена полная производная по времени:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\tau}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial t} + v_{\parallel} (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_i + \\ &\quad + v_{\perp} \{ (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_i \cos \theta + (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_i \sin \theta \}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

После подстановки выражения (3. 8) в уравнения (3. 7) получим систему уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \theta); \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(\mathbf{x}, t) + A(\mathbf{x}, t, \theta), \quad (3. 9)$$

приведенную к стандартной форме для метода усреднения.

Решение системы (3. 9) методом усреднения дает следующее выражение для  $\mathbf{x}$  (см. приложение I):

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(t) + \frac{1}{\omega} \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\xi}, t, \theta) + \dots \quad (3. 10)$$

Здесь  $\boldsymbol{\xi}(t)$  определяет усредненное движение частицы, а второй член, периодичный по  $\theta$ , описывает эффект движения по ларморовской окружности вокруг ведущего центра. Усредненные величины  $\boldsymbol{\xi}_i$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \bar{\mathbf{f}} + \left\{ \overline{(\hat{\mathbf{f}} \nabla_{\boldsymbol{\xi}}) \frac{\mathbf{f}}{\omega}} - \bar{A} \frac{\mathbf{f}}{\omega} \right\}. \quad (3. 11)$$

Величины  $\bar{\mathbf{f}}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  и  $\hat{\mathbf{f}}$  определяются формулами

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f} d\theta; \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}; \quad \hat{\mathbf{f}} = \int_0^{\theta} \tilde{\mathbf{f}} d\theta, \quad (3. 12)$$

причем интегрирование производится при фиксированных  $\boldsymbol{\xi}$  и  $t$ .

Для применения метода усреднения уравнениям (3. 7)—(3. 8) установим следующие порядки величин:

$$\mathbf{r} \sim 1; \quad \mathbf{v} \sim 1; \quad \mathbf{F} \sim 1; \quad \omega \sim \frac{1}{\varepsilon}; \quad \varepsilon \ll 1, \quad (3. 13)$$

т. е. частица со скоростью  $v$  пролетает расстояние  $L \sim 1$  порядка размеров магнитного поля за время  $t \sim 1$ , а один оборот по ларморовской окружности радиуса  $r_L = \frac{v_L}{\omega} \sim \varepsilon$  совершается за время  $t \sim \varepsilon$ . Малым параметром  $\varepsilon$  является отношение ларморовского радиуса  $r_L$  к размеру поля  $L$ . При сделанных предположениях усредненные (дрейфовые) уравнения справедливы для большого числа ( $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ ) пролетов частицы через систему  $L$ . Для сравнения различных членов, входящих в уравнения движения, можно считать, что все величины порядка единицы, кроме  $B \sim \frac{1}{\varepsilon}$ . Существенно отметить, что при этом предполагается  $E \ll \frac{v}{c} B$ .

Применяемый здесь метод усреднения справедлив при такой скорости изменения магнитного поля, что  $\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t} \sim \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \sim 1$ . Однако принятое нами ограничение для электрического поля накладывает более жесткие условия на скорость изменения во времени магнитного поля. Действительно, поскольку справедливо

уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , (3. 14)

то, учитывая принятые порядки величин, заключаем, что для того, чтобы левая часть равенства (3. 14) была  $\sim 1$ , необходимо чтобы и  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  была  $\sim 1$ . Но так как  $B \sim \frac{1}{\varepsilon}$ , это условие выполняется, когда магнитное поле меняется медленно  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\varepsilon t)$  или когда переменная во времени часть поля является величиной  $\sim 1$ .

Подставляя правые части уравнений (3. 7) в уравнения (3. 11), после громоздких, но в общем простых вычислений, которые подробно изложены в приложении II, получим следующие окончательные формулы для усредненных величин  $\mathbf{r}$ ,  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 \times \left( \mathbf{F} - v_{\parallel}^2 \mathbf{T} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla \omega \right) \right]; \quad (3. 15a)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = m \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F}; \quad (3. 15б)$$

$$\frac{dJ_{\perp}}{dt} = -\frac{emv_{\perp}^2}{m_0^2 \omega^2} \left( \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \right). \quad (3. 15в)$$

Здесь  $\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}}}$  — усредненная энергия;  $J_{\perp} = -\frac{emv_{\perp}^2}{m_0^2 \omega}$  — так называемый поперечный адиабатический инвариант, а  $\mathbf{T} = (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 = \frac{\mathbf{n}}{R}$  — вектор кривизны силовой линии ( $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали, а  $R$  — радиус кривизны).

Заметим, что закон сохранения энергии в обычной форме  $\frac{d\varepsilon}{dt} = m \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  не обязан выполняться для усредненного движения, так как часть энергии идет на изменение скорости вращения частицы по ларморовской окружности. Напомним, что сила  $m \mathbf{F} = e \mathbf{E} + \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{f}$  — сила неэлектромагнитного происхождения. При условии  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$  имеем закон сохранения поперечного адиабатического инварианта  $J_{\perp}$ . Действительно, согласно уравнению (3. 14), в этом случае  $\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial \omega}{\partial t}$ , и вместо уравнений (3. 15) можно написать уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 \times \left( \mathbf{F} - v_{\parallel}^2 \mathbf{T} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla \omega \right) \right]; \quad (3. 16a)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = m \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}; \quad (3. 16б)$$

$$\frac{dJ_{\perp}}{dt} = 0, \quad (3. 16в)$$

где  $\omega = -\omega_B = -\frac{eB}{mc}$ .

### 3. Интерпретация дрейфовых уравнений

Уравнения (3. 16) составляют полную систему так называемых дрейфовых уравнений, описывающую среднее движение частицы в сильном магнитном поле под действием силы  $m\mathbf{F}$  (при условии  $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ ). Эти уравнения более точно соответствуют не движению самой частицы, а движению ларморовского кружка. Они имеют двойственный характер в том смысле, что  $\mathbf{r}$  является радиусом-вектором ведущего центра, и величины  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{F}$  есть функции  $\mathbf{r}$ , в то время как  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  являются характеристиками самой частицы и определяются ее положением.

Уравнения (3. 16) интерпретируются следующим образом. В выражении (3. 16а) первый член в правой части описывает дви-

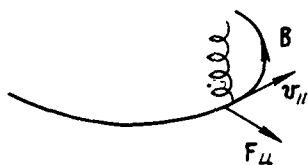


Рис. 10

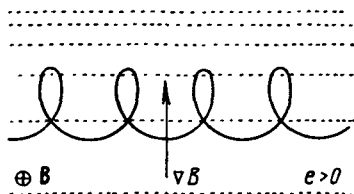


Рис. 11

жение вдоль магнитной силовой линии, а три члена, входящие в векторное произведение, описывают дрейф поперек силовых линий магнитного поля. Первый из них соответствует дрейфу под действием силы  $m\mathbf{F}$  и полностью совпадает с аналогичным членом в уравнении, описывающем дрейф в постоянных и однородных полях (см. § 2). Второй член дает так называемый центробежный дрейф. Здесь центробежная сила  $F_{\perp} = mv_{\parallel}^2 \frac{n}{R}$  играет ту же роль, что в предыдущем члене сила  $m\mathbf{F}$  (рис. 10). Далее, кривизна ларморовской окружности может быть с одной стороны больше, чем с другой, также и из-за того, что магнитное поле по абсолютной величине неоднородно. В результате возникает магнитный дрейф (см. рис. 11 и задачу 2 к § 1), который описывается последним членом в уравнении (3. 16а).

Величина  $J_{\perp}$  с точностью до членов  $\sim \frac{r_{\perp}}{L}$  равна  $\oint p dq$  в системе, где ведущий центр покоится, и, следовательно, является адиабатическим инвариантом.

Если частицу, вращающуюся по ларморовской окружности, рассматривать как элементарный круговой ток  $J = \frac{e\omega}{2\pi}$ , то вели-

чина  $\mu = \frac{1}{c} JS = \frac{ev_{\perp}^2}{2\omega c} = \frac{m_0^2 J_{\perp}}{em}$  представляет собой магнитный момент этого тока, и сохранение  $J_{\perp}$  означает сохранение величины  $m\mu$ . Кроме того, сохранение  $J_{\perp}$  можно интерпретировать как

закон сохранения магнитного потока, проходящего через лармовскую окружность и равного  $\pi r_L^2 B$ .

Добавочный к обычному закону сохранения энергии член в  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  объясняется тем, что при изменении во времени магнитного поля изменяется энергия поперечного движения частицы по лармовской окружности. Действительно, учитывая сохранение поперечного инварианта  $\frac{mv_{\perp}^2}{\omega} = \text{const}$ , для приращения энергии

поперечного движения получим  $d\left(\frac{mv_{\perp}^2}{2}\right) = \frac{mv_{\perp}}{2\omega} d\omega$ .

Выпишем теперь дрейфовые уравнения движения частиц в электромагнитном поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , полагая  $\mathbf{f} = 0$ . Выражая  $\boldsymbol{\tau}_0$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{T}$  непосредственно через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \frac{mcv_{\parallel}^2}{eB^4} [\mathbf{B}, (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}] + \\ + \frac{mcv_{\perp}^2}{2eB^3} [\mathbf{B}\nabla B]; \end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (3.17b)$$

$$\frac{dJ_{\perp}}{dt} = 0. \quad (3.17b)$$

Здесь  $\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}}}$ ;  $J_{\perp} = \frac{m^2 v_{\perp}^2}{m_0^2 B}$ . Для получения со-

ответствующих нерелятивистских уравнений достаточно заменить  $\mathcal{E}$  на  $\mathcal{E} = \frac{m}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)$  и считать везде массу  $m$  равной массе покоя  $m_0$ . Скорость электрического дрейфа отличается от других дрейфовых скоростей (центробежного и магнитного дрейфа) тем, что она не зависит ни от заряда, ни от массы частицы и направлена вдоль вектора потока энергии  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ .

При условии  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$  уравнение (3.17a) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \frac{mc(2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{2eB^3} [\mathbf{B}\nabla B]. \quad (3.17\Gamma)$$

Если поля не зависят от времени, то как  $J_{\perp}$ , так и  $\mathcal{E} + e\Phi$  постоянны.

#### 4. Интегралы дрейфовых уравнений

При постоянных во времени электрическом и магнитном полях интегралы дрейфовых уравнений (3.17) можно получить исходя из симметрии задачи [6]. Поскольку дрейфовые уравнения яв-



ляются дифференциальными уравнениями первого порядка, то их интегралы дают уравнения поверхностей, на которых лежат траектории ведущего центра.

Рассмотрим релятивистский случай. При  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , не зависящих от времени, законы сохранения энергии и адиабатического инварианта можно записать в виде

$$mc^2 + e\Phi = E_0 = \text{const}; \quad \frac{m^2 v_{\perp}^2}{m_0^2 B} = J_{\perp} = \text{const}, \quad (3.18)$$

где  $\Phi(\mathbf{r})$  — потенциал электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ , а  $m$  определяется формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}}}.$$

Отсюда продольную скорость  $v_{\parallel}$  можно представить как функцию положения  $v_{\parallel} = v_{\parallel}(\mathbf{r})$ , или

$$v_{\parallel} = \sqrt{v^2 - J_{\perp} B \frac{m_0^2}{m^2}}. \quad (3.19)$$

При фиксированных  $E_0$  и  $J_{\perp}$  функция  $v_{\parallel}(\mathbf{r})$  определена на соответствующей траектории ведущего центра. Однако мы будем понимать под  $v_{\parallel}$  функцию положения  $\mathbf{r}$ , формально определяемую формулой (3.19). Тогда уравнения дрейфового движения (3.17) могут быть выражены через  $\text{rot}(m\mathbf{v}_{\parallel})$ :

$$\text{rot}\left(mv_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B}\right) = mv_{\parallel} \text{rot} \frac{\mathbf{B}}{B} + \left[\nabla(mv_{\parallel}), \frac{\mathbf{B}}{B}\right].$$

Вычисляя  $\nabla(mv_{\parallel})$  с учетом формул (3.18) и (3.19), находим что уравнения (3.17) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{b} \left\{ v_{\parallel} - \frac{mcv_{\parallel}^2}{eB} (\mathbf{b} \text{rot} \mathbf{b}) \right\} + \frac{cv_{\parallel}}{eB} \text{rot}(mv_{\parallel} \mathbf{b}), \quad (3.20)$$

где  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}$ . При получении интегралов дрейфовых уравнений ограничимся случаем  $(\mathbf{B} \text{rot} \mathbf{B}) = 0$ , когда второй член в правой части уравнения (3.20) обращается в нуль. Тогда уравнение (3.20) можно записать через векторный потенциал ( $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ ) в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B} \text{rot} \left( \mathbf{A} + \frac{mcv_{\parallel}}{eB} \mathbf{B} \right). \quad (3.21)$$

Вводя векторный потенциал

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mcv_{\parallel}}{eB} \mathbf{B}, \quad (3.22)$$

замечаем, что семейство траекторий ведущего центра с фиксированными  $E_0$  и  $J_{\perp}$  совпадает с силовыми линиями «магнитного поля»  $\mathbf{B}^* = \text{rot } \mathbf{A}^*$  и, если не интересоваться временной зависимостью движения, то эквивалентным уравнению (3. 21) является уравнение

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{B}^* \right] = 0. \quad (3. 23)$$

Уравнение силовых линий поля  $\mathbf{B}^*$  (или, что то же, уравнения траекторий дрейфового движения) можно записать в виде уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L^*}{\partial q_i}; \quad L^* = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{A}^*. \quad (3. 24)$$

Действительно, функция  $L^*$  формально совпадает с функцией Лагранжа, соответствующей движению в магнитном поле  $\mathbf{B}^*$  частицы с массой  $m = 0$ , и, следовательно, уравнениями движения этой частицы будут уравнения (3. 23).

Используя лагранжеву форму уравнений движения, можно получать интегралы дрейфовых уравнений аналогично тому, как это делается в обычной механике (см. § 1). Для трансляционной симметрии, когда  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(x, y)$  и  $L^*$  не зависит от  $z$ , согласно уравнениям (3. 24),

$$A_z^* = \text{const}. \quad (3. 25)$$

Для аксиальной симметрии  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, z)$  и  $L^*$  не зависит от азимута  $\varphi$ , и, следовательно,

$$rA_{\varphi}^* = \text{const}. \quad (3. 26)$$

Для винтовой симметрии  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(r, \varphi - \alpha z)$ ,  $\alpha = \text{const}$ ,  $L^*$  не меняется при повороте на  $\delta\varphi$  и одновременном смещении по  $z$

на  $\delta z = \frac{\delta\varphi}{\alpha}$ . Поэтому  $\delta L^* = \frac{\partial L^*}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L^*}{\partial \varphi} \delta\varphi = \frac{d}{dt} \left( \frac{A_z^*}{\alpha} + rA_{\varphi}^* \right) \delta\varphi = 0$ , и, следовательно,

$$A_z^* + \alpha rA_{\varphi}^* = \text{const}. \quad (3. 27)$$

При  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$  полученные таким образом формулы дают, очевидно, уравнения силовых линий магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , обладающего соответствующей симметрией. При отсутствии  $B_z$  в первом случае,  $B_{\varphi}$  — во втором случае и продольного однородного поля — в третьем случае ведущие центры движутся по магнитным поверхностям соответственно

$$A_z = \text{const}; \quad rA_{\varphi} = \text{const}; \quad A_z + \alpha rA_{\varphi} = \text{const}. \quad (3. 28)$$

Если  $(\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B}) \neq 0$ , то даже при наличии симметрии задачи уравнения (3. 20) не имеют, по-видимому, простых интегралов. Однако есть случай, когда один интеграл уравнения (3. 20) находится

тривиально. А именно: если магнитные поверхности являются эквипотенциальными ( $\Phi = \text{const}$ ) и совпадают с поверхностями, образованными линиями электрического тока и поверхностями  $B = \text{const}$ , то точным интегралом уравнения (3. 20) является уравнение поверхности  $B = \text{const}$ , так как при этом  $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla B\right) = 0$ . Следует отметить, что совпадение магнитных и токовых поверхностей является следствием условия гидродинамического равновесия плазмы  $-\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] = 0$ .

### 5. Движение частиц в адиабатической ловушке

А. Рассмотрим снова движение частиц в магнитном поле с «пробками» (рис. 12).

Если  $\frac{r_{\perp}}{L} \ll 1$ , где  $L$  — характерный масштаб поля, то движение частиц может быть рассмотрено в дрейфовом приближении. Пусть магнитное поле постоянно, а электрическое отсутствует. Тогда сохраняются квадрат скорости частицы и поперечный инвариант. Следовательно, продольная скорость частицы, определяемая формулой (3. 19), будет равна

$$v_{\parallel} = \sqrt{v^2 - J_{\perp} B}.$$

Если в пробках, где поле достигает наибольшей величины  $B_M$ ,

$$v^2 < J_{\perp} B_M,$$

то частица отразится, не дойдя до пробки. В противном случае она пройдет через пробку.

Подставляя в предыдущее неравенство

$$J_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{B} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{B},$$

где  $\alpha$  — угол вектора скорости с силовой линией  $\mathbf{B}$ , можно записать его в виде

$$\sin^2 \alpha > \frac{B}{B_M}. \quad (3. 29)$$

Таким образом, от пробок отражаются только те частицы, угол вектора скорости которых с силовой линией магнитного поля больше, чем  $\alpha_{\text{кр}}$ . При инжекции в средней плоскости пробкотрона, где поле  $B = B_m$  минимально,

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{B_m}{B_M}}.$$

Конус  $\alpha < \alpha_{\text{кр}}$  называется конусом ухода частиц (рис. 13). Частицы, у которых  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  такие, что  $\alpha < \alpha_{\text{кр}}$ , от пробок не отражаются и уходят через них вдоль силовых линий  $\mathbf{B}$ .

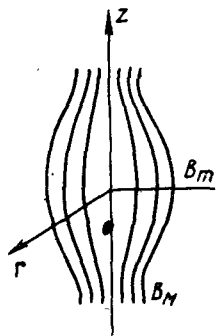


Рис. 12

Б. Рассмотрим теперь движение частиц вблизи оси аксиально-симметричного гофрированного магнитного поля. В аксиально-симметричном магнитном поле

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \text{rot } \mathbf{A}_\varphi; \\ B_r &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi); \\ A_\varphi &= \frac{r}{2} b(z) - \frac{r^3}{16} b''(z) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

где  $b(z)$  — поле на оси симметрии  $z$ . Ограничиваясь квадратичными членами по отклонению  $r$  от оси  $z$ , дрейфовые уравнения (3.17г) можно записать в виде [7]

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \sqrt{v^2 - J_\perp b(z)}; \\ \dot{r} &= -\frac{r}{2} \frac{b'}{b} \dot{z}; \\ \dot{\varphi} &= \frac{mc}{2e} \frac{2v^2 - J_\perp b}{b^3} \left( -\frac{bb''}{2} + \frac{3b'^2}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Второе из этих уравнений интегрируется непосредственно и дает

$$r^2 b(z) = \text{const.}$$

Это соотношение является приближенным выражением точного интеграла дрейфовых уравнений [см. формулу (3.26)]  $r A_\varphi(r, z) = \text{const}$  для случая аксиальной симметрии и показывает, что движение частиц происходит по поверхностям вращения, образованным магнитными силовыми линиями.

Первое из уравнений (3.31) после дифференцирования по  $t$  принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{J_\perp}{2} b'(z) = 0, \quad (3.32)$$

откуда следует, что частица может совершать колебательное движение по  $z$  около минимума  $b(z)$ .

В. Параболическая аппроксимация поля на оси. Если поле на оси имеет вид

$$b(z) = b_m \left( 1 + \frac{z^2}{l^2} \right),$$

то уравнения (3.31) можно проинтегрировать в элементарных функциях. В этом случае решением уравнения (3.32) являются гармонические колебания

$$z = l \sqrt{\frac{v^2}{J_\perp b_m} - 1} \sin \frac{\sqrt{J_\perp b_m}}{l} t,$$

а движение по азимуту представляется интегралом

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{z} dz, \quad (3.33)$$

вычисление которого приводит к следующей зависимости  $\varphi = \varphi(z)$ :

$$\varphi(z) = -\frac{r_{\perp}}{8l} \left\{ \frac{z \sqrt{1-s^2(1+z^2/l^2)} [4+3s^2(1+z^2/l^2)]}{l(1+z^2/l^2)} + \right. \\ \left. + (1+3s^4) \operatorname{arctg} \frac{z/l}{\sqrt{1-s^2(1+z^2/l^2)}} \right\},$$

где  $r_{\perp} = \frac{mcv}{eb_m}$ ;  $s^2 = J_{\perp} b_m / v^2$ . При инжекции в плоскости  $z = 0$  величина  $s = \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между начальной скоростью

и силовой линией  $\mathbf{V}$ . На рис. 14 показаны траектории для различных начальных углов  $\alpha$ .

Г. Движение в периодическом поле. Если поле на оси  $z$  является периодической

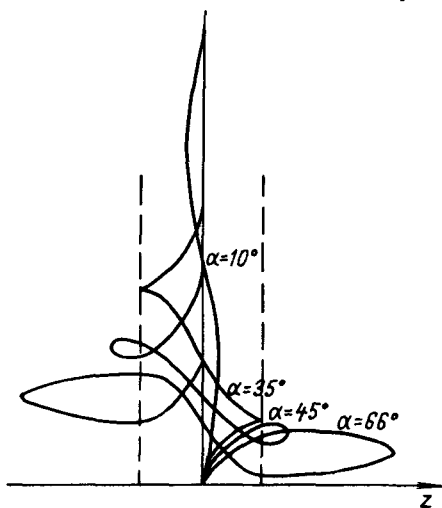


Рис. 14

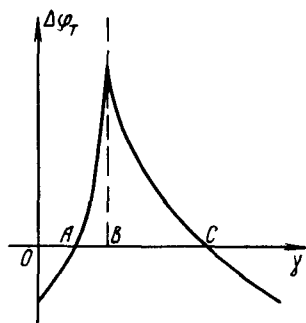


Рис. 15

функцией  $z$ , то наряду с колеблющимися около минимумов поля «запертыми» частицами существуют также «пролетные» частицы, которые не отражаются от максимумов поля и движутся в одну сторону вдоль силовых линий  $\mathbf{V}$ .

Рассмотрение азимутального дрейфа в таком гофрированном поле представляет определенный интерес. Без особых вычислений ясно, что график зависимости угла дрейфа за период движения частицы  $\Delta\varphi_T$  от угла скорости частицы с нормалью к силовой линии в плоскости минимума поля  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$  имеет вид, изображенный на рис. 15. Точка  $B$  соответствует частице с таким углом инжекции  $\gamma$ , что она останавливается в максимуме поля. Слева от точки  $B$  расположена область запертых частиц, справа — область пролетных. В точках  $A$  и  $C$  величина  $\Delta\varphi_T$  обращается в нуль, а в точке  $B$  логарифмически стремится к бесконечности.

Рассчитаем график рис. 15 для конкретного гофрированного поля с напряженностью на оси [8]

$$b = b_0(1 - a \cos az); \quad a = \frac{2\pi}{L}, \quad (3.34)$$

где  $L$  — период гофра, а  $a \ll 1$ .

Из закона сохранения  $J_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{b}$  для точки  $B$ , где  $v_{\perp} = v$ , получаем выражение

$$\cos^2 \gamma_B = \frac{1-a}{1+a},$$

или  $\gamma_B \simeq \sqrt{2a}$ . Величина  $J_{\perp} = \frac{v^2 \cos^2 \gamma}{b_0(1-a)}$ .

Подставляя выражение (3.34) в уравнения (3.31) и (3.33) и интегрируя по периоду движения частицы, получим:

1) для запертых частиц в первом приближении по  $a$

$$\Delta\varphi_T = -2ar_{\perp} \sqrt{2a} \left\{ E(k) - \frac{1}{2} K(k) \right\}, \quad (3.35a)$$

где  $r_{\perp} = mc\nu/eb_0$ ;  $E(k)$  и  $K(k)$  — эллиптические интегралы от аргумента  $k^2 = \frac{1-a}{2a \operatorname{ctg}^2 \gamma}$ . Величина  $\Delta\varphi_T$  представляет собой азимутальное смещение за период движения запертой частицы («туда» и «обратно» по силовой линии). Величина  $\Delta\varphi_T$  обращается в нуль при  $k^2 \simeq 0,83$ , т. е. при  $\gamma_A \simeq 0,9\sqrt{2a}$ ;

2) при определении  $\Delta\varphi_T$  для пролетных частиц необходимо учитывать члены  $\sim a^2$ . Вычисление интеграла (3.33) с учетом квадратичных по  $a$  членов приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_T = & \frac{ar_{\perp}a}{k^2} \frac{1 + \sin^2 \gamma}{\sin \gamma} \left\{ (2 - k^2) K - 2E + \right. \\ & + \frac{2a \cos^2 \gamma}{3k^2(1 + \sin^2 \gamma)} [(k^2 - 4)K + (k^2 + 4)E] - \\ & \left. - \frac{2a}{3k^2} [(3k^4 - 14k^2 + 14)K + (7k^2 - 14)E] \right\}. \quad (3.35b) \end{aligned}$$

Здесь  $E$  и  $K$  — эллиптические интегралы от аргумента  $k^2 = \frac{2a \operatorname{ctg} \gamma}{1-a}$ .

Разлагая  $E$  и  $K$  по степеням  $k^2$ , получим

$$\Delta\varphi_T = \frac{ar_{\perp}\pi a^2}{8} \frac{1 - 3 \sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma}.$$

Это выражение обращается в нуль при  $\sin \gamma_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\gamma_c \simeq 35^\circ$ .

Таким образом, для магнитного поля (3. 34) при  $a \ll 1$  точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  на графике рис. 15 соответствуют углам  $\gamma$ :

$$\gamma_A \simeq 0,9\sqrt{2a}; \quad \gamma_B \simeq \sqrt{2a} \quad \text{и} \quad \gamma_C \simeq 35^\circ.$$

### 6. Дрейфовая теория в случае сильного электрического поля

При выводе уравнений обычной дрейфовой теории, изложенной выше, существенным являлось предположение

$$E \ll \frac{v}{c} B.$$

Теперь мы предположим, что

$$E_{\perp} \sim \frac{v}{c} B; \quad E_{\parallel} \ll \frac{v}{c} B,$$

но будем считать движение нерелятивистским, т. е.  $\frac{v}{c} \ll 1$ .

При этих предположениях скорость электрического дрейфа  $s \frac{E_{\perp}}{B}$  сравнима со скоростью частицы  $v$ .

Для применения метода усреднения удобно теперь представить вектор скорости частицы в виде

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{v}_F + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta), \quad (3. 36)$$

где

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{\omega} [\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{F}], \quad \omega = -\frac{eB}{mc}.$$

Это выражение отличается от использованного выше выражения (3. 6) включением в него члена  $\mathbf{v}_F$ , описывающего электрический дрейф, который в рассматриваемом случае не является малой величиной.

Вывод соответствующих дрейфовых уравнений дан в приложении III. Они получаются очень громоздкими, и только в том случае, когда продольная скорость частицы мала, эти уравнения с нужной точностью сводятся к системе\* [21]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} - \frac{mc}{eB^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{B} \right] + \frac{mcv_{\perp}^2}{2eB^3} [\mathbf{B} \nabla B], \quad (3. 37a)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (3. 37b)$$

$$\frac{dJ_{\perp}}{dt} = 0, \quad (3. 37b)$$

\* Мы полагаем здесь, что сила  $\mathbf{F}$  чисто электрическая, т. е.  $\mathbf{F} = e\mathbf{E}/m$ .

где

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 + v_E^2); \quad J_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{B};$$

$$\mathbf{u} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \mathbf{v}_E, \quad \mathbf{v}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}].$$

Здесь в уравнении для  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  удержаны члены порядка  $\frac{1}{B}$ , а в остальных только члены порядка единицы (см. приложение III).

Второй член в уравнении для  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  можно интерпретировать как дрейф под действием силы инерции  $-m \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right\}$ .

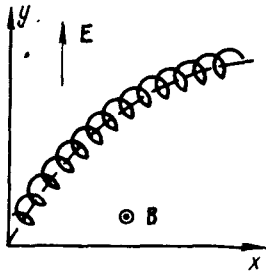


Рис. 16

Остальные члены интерпретируются так же, как и в обычной дрейфовой теории.

Появление дрейфа под действием силы инерции можно пояснить следующим примером. Допустим, что магнитное поле однородно и постоянно во времени, а электрическое — однородно, но медленно меняется во времени. В этом случае при  $v_{\parallel} = 0$  уравнения (3.37) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_E + \frac{mc^2}{eB^2} \dot{\mathbf{E}}; \quad v_{\perp} = \text{const.} \quad (3.38)$$

В то же время движение частицы в рассматриваемом поле может быть рассчитано и точно. Действительно, уравнение движения

$$m \dot{\mathbf{v}} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$$

для случая, когда  $\mathbf{E}$  является линейной функцией времени, может быть заменой переменных

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_E + \frac{mc^2}{eB^2} \dot{\mathbf{E}} \quad (3.39)$$

сведено к виду

$$m \dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{B}].$$

Отсюда видно, что  $v_{\perp} = \text{const}$ , а  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_E + \frac{mc^2}{eB^2} \dot{\mathbf{E}}$  в соответствии с уравнением (3.38) (рис. 16).

### 7. Продольный адиабатический инвариант

В том случае, когда без учета дрейфа движение ведущего центра является периодическим, а смещение в результате дрейфа за один период мало по сравнению с характерными размерами магнитного поля, дрейфовые уравнения имеют еще один так называемый «продольный» адиабатический инвариант дрейфовых урав-



нений [9]. Примером такого движения является движение в гофрированном торе (см. § 7).

Введем криволинейную систему координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  таким образом, чтобы координатные линии  $\xi_3$  совпадали с силовыми линиями  $\mathbf{B}$ . Контрвариантные компоненты произвольного вектора являются коэффициентами его разложения по компонентам вектора  $x_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i}$ , т. е.  $\mathbf{a} = a^i x_i$ . Ковариантные компоненты определяются как  $a_i = \mathbf{a} x_i$ . Связь между ними дается соотношением  $a_i = g_{ik} a^k$ , где  $g_{ik} = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)$  — метрический тензор. Операции  $\text{div } \mathbf{a}$  и  $\text{rot } \mathbf{a}$  записываются в виде

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\sqrt{g} a^i); \quad (\text{rot } \mathbf{a})^l = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial a}{\partial \xi_i}, \quad (3.40)$$

где  $g = \text{Det } g_{ik}$ , а  $e^{ijk}$  — единичный полностью антисимметричный тензор. Контрвариантные компоненты единичного вектора  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  равны:  $b^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}$ ;  $b^1 = b^2 = 0$ .

Ограничиваясь случаем слабого электрического поля, запишем уравнения (3.20) в такой криволинейной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{cv_{\parallel}}{eB\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (mv_{\parallel} b_3) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (mv_{\parallel} b_2) \right\}; \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{cv_{\parallel}}{eB\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_3} (mv_{\parallel} b_1) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} (mv_{\parallel} b_3) \right\}; \\ \frac{d\xi_3}{dt} &= \left\{ v_{\parallel} - \frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B} (\mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{b}) \right\} b^3 + \frac{cv_{\parallel}}{eB\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (mv_{\parallel} b_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \xi_2} (mv_{\parallel} b_1) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Интегрируя первые два уравнения по  $t$  и заменяя при этом  $v_{\parallel} dt \approx \frac{d\xi_3}{\sqrt{g_{33}}}$ , а также учитывая, что (согласно уравнению  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ )  $\frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \sqrt{g} \frac{B}{\sqrt{g_{33}}} \right) = 0$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_1 &\simeq \frac{c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (mv_{\parallel} b_3) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (mv_{\parallel} b_2) \right\} d\xi_3; \\ \Delta \xi_2 &\simeq \frac{c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_3} (mv_{\parallel} b_1) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} (mv_{\parallel} b_3) \right\} d\xi_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Производные по  $\xi_1$  и  $\xi_2$  из под знака интеграла можно вынести, а члены с производными по  $\xi_3$  интегрируются непосредственно. Предположим теперь, что движение ведущего центра без учета дрейфа (происходящее по силовой линии магнитного поля) является периодическим, как, например, колебательное движение

по  $z$  в поле пробкотрона или движение по замкнутой силовой линии. Беря интегралы в выражениях (3.42) по периоду  $L$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_1 &= \frac{m_0 c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left\{ \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi_2} - (mv_{\parallel} b_2)_0^L \right\}; \\ \Delta \xi_2 &= -\frac{m_0 c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left\{ \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi_1} - (mv_{\parallel} b_1)_0^L \right\}; \\ J_{\parallel}(\xi_1, \xi_2) &= \oint \frac{m}{m_0} v_{\parallel} b_3 d\xi_3 = \oint \frac{m}{m_0} v_{\parallel} ds, \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где  $ds$  — элемент длины силовой линии  $\mathbf{B}$ .

В том случае, когда невозмущенное движение представляется колебательным по одной силовой линии или движением по замкнутой силовой линии, подстановки в выражениях (3.43) исчезают и мы имеем

$$\Delta \xi_1 = \frac{m_0 c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi_2}; \quad \Delta \xi_2 = -\frac{m_0 c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi_1}. \quad (3.44)$$

Полученные соотношения являются уравнениями в конечных разностях. Если правые части их малы, т. е. смещения  $\Delta \xi_1$  и  $\Delta \xi_2$  малы по сравнению с периодом  $L$ , то с точностью до величин второго порядка малости их можно заменить на дифференциальные уравнения

$$\frac{d\xi_1}{dn} = \frac{m_0 c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi_2}; \quad \frac{d\xi_2}{dn} = -\frac{m_0 c}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi_1}. \quad (3.45)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $\frac{d\xi_2}{dn}$ , а второе на  $-\frac{d\xi_1}{dn}$ , складывая и интегрируя, окончательно получим

$$J_{\parallel}(\xi_1, \xi_2) = \oint \frac{m}{m_0} v_{\parallel} ds = \text{const}. \quad (3.46)$$

Это уравнение определяет проекцию траектории частицы на поверхность  $\xi_3 = \text{const}$ . Примеры использования этого уравнения даны в § 7.

В том случае, когда частица является пролетной и движется в нулевом приближении по силовой линии, обладающей пространственной периодичностью, но незамкнутой, необходимо учитывать члены следующего приближения. Мы ограничимся исследованием движения таких частиц в поле, удовлетворяющем условию  $\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{B} = 0$ . Тогда дрейфовые уравнения совпадают с уравнениями силовых линий поля  $\mathbf{V}^* = \text{rot } \mathbf{A}^*$ , где  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mc v_{\parallel}}{eB} \mathbf{B}$ , и если траектория ведущего центра составляет малый угол с силовыми линиями магнитного поля (случай быстропролетных частиц), то можно воспользоваться усредненными уравнениями [10].

Например, при движении частиц в поле, имеющем большую однородную составляющую  $B_{z0}$ , приближенным интегралом дрейфовых уравнений является

$$\overline{A_z^*} - \frac{\overline{B_\varphi^* \widehat{B}_r^*}}{B_{z0}} = \text{const} \quad (3.47)$$

или, пренебрегая в компонентах  $B_\varphi^*$  и  $B_r^*$  дрейфовыми членами, а также членами аналогичного порядка малости, получаем

$$\overline{A_z} + \frac{c}{e} \frac{1}{L} \int_0^L m v_{\parallel} dz - \frac{\overline{B_\varphi \widehat{B}_r}}{B_{z0}} = \text{const}. \quad (3.48)$$

Полученное соотношение можно выразить через средний угол прокручивания силовых линий магнитного поля

$$\frac{1}{L} \int_0^L m v_{\parallel} dz - \frac{e B_{z0}}{c} \int_0^r \frac{d\bar{\varphi}}{dz} r dr = \text{const}. \quad (3.49)$$

В общем случае, когда частицы, являясь пролетными, имеют скорость  $v_{\parallel} \gtrsim v_{др}$ , а также при очень малых  $\frac{d\bar{\varphi}}{dz}$  продольный инвариант имеет вид [8]

$$J_{\parallel} - \frac{eB}{m_0 c} \int_0^r \frac{d\bar{\varphi}}{dz} r dr = \text{const}. \quad (3.50)$$

Аналогичные адиабатические инварианты можно написать в случае, когда основное продольное поле является тороидальным и винтовым [10].

### 8. Влияние излучения

В заключение остановимся вкратце на влиянии излучения на дрейфовое движение частицы в сильном магнитном поле. Пренебрегая влиянием электрического поля и членами, содержащими производные от магнитного поля, запишем силу торможения излучением [3] в виде

$$\mathbf{f}_T = - \frac{2e^4}{3m_0^2 c^5} \left\{ [\mathbf{v} [\mathbf{v} \mathbf{B}]] + \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v} [\mathbf{v} \mathbf{B}]^2}{1 - v^2/c^2} \right\}. \quad (3.51)$$

Для того чтобы учесть излучение, вместо  $\mathbf{F}$  в уравнение (3.4) следует подставить  $\mathbf{F} + \mathbf{f}_T/m$ . Представляя  $\mathbf{v}$  в форме (3.6), убеждаемся, что при этом в правой части уравнения (3.4) добавляется член  $-\kappa v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta)$ , где  $\kappa = \frac{2e^4 B^2}{3m_0^2 m c^5}$ . Вели-

чина  $\kappa$  имеет размерность частоты. Предположим, что характерное время излучения велико по сравнению с временем пролета частицы через систему размера  $L$ , т. е., поскольку пролетное время принято за единицу, будем считать  $\kappa \sim \varepsilon \ll 1$ . Нетрудно видеть, что уравнения (II.10) (см. приложение II) от соответствующих уравнений, не учитывающих излучения, будут отличаться только появлением добавочного члена —  $\kappa v_{\perp}$  в выражении для  $\frac{dv_{\perp}}{dt}$ .

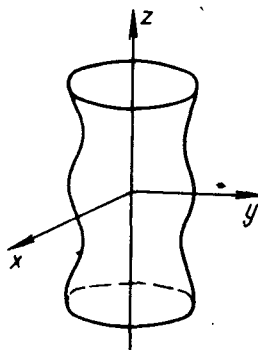


Рис. 17

Таким образом, учет излучения в рассматриваемом приближении сводится к изменению уравнений, выражающих законы сохранения энергии и адиабатического инварианта для усредненного движения:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = eE \frac{dr}{dt} + \frac{m_0^2 J_{\perp}}{2m} \left( \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{2m^2}{m_0^2} \kappa B \right); \quad (3.52)$$

$$\frac{dJ_{\perp}}{dt} = -\frac{2m^2}{m_0^2} \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right) \kappa J_{\perp}. \quad (3.52a)$$

Величину  $\kappa$  можно представить в виде  $\kappa = \frac{2m}{3m_0} \omega_B^2 \frac{r_0}{c}$ , где  $r_0$  — классический радиус электрона. Из выражения для  $\frac{dJ_{\perp}}{dt}$

следует, что характерное время изменения  $J_{\perp}$  порядка обратной величины коэффициента при  $J_{\perp}$  в правой части уравнения (3.52a). В частности, при движении нерелятивистского электрона в поле  $B \sim 10^4$  гс оно порядка 0,1 сек.

**Задача 1.** Рассмотреть движение частиц в адиабатической ловушке, слегка сплюснутой в направлении оси  $x$ . Движение рассчитать вблизи плоскости  $z = 0$  (рис. 17).

**Решение.** Поле сплюснутой адиабатической ловушки можно записать в виде  $\mathbf{B} = \nabla \Phi_m$ , где

$$\Phi_m = B_0 z - \frac{b_0}{k} I_0(kr) \sin kz + \frac{b_2}{k} I_2(kr) \cos 2\varphi \sin kz.$$

В окрестности плоскости  $z = 0$  и при достаточно малых  $kr$  силовые линии можно рассматривать как прямые и с точностью до членов  $\sim k^2 r^2, k^2 z^2$

$$B = B_z = B_0 - b_0 + \frac{k^2 r^2}{4} \left( -b_0 + \frac{b_2}{2} \cos 2\varphi \right) - \frac{b_0}{2} k^2 z^2.$$

Следовательно,

$$J_{\parallel} = \int v_{\parallel} ds = \int_{-z_{\max}}^{+z_{\max}} \sqrt{v_0^2 - J_{\perp} B_z} dz =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{v_0^2 - J_{\perp} \left[ B_0 - b_0 + \frac{k^2 r^2}{4} \left( -b_0 + \frac{b_2}{2} \cos 2\varphi \right) \right]}{\sqrt{J_{\perp} b_0 k^2}}.$$

Отсюда находим траекторию движения частицы  $J_{\parallel} = \text{const}$ , т. е.

$$r^2 \left( -b_0 + \frac{b_2}{2} \cos 2\varphi \right) = \text{const}.$$

**Задача 2.** Рассчитать в дрейфовом приближении движение частицы  $v_{\parallel} = 0$  в поле магнитного диполя  $\mu$  при условии, что диполь притягивает частицу также и по ньютоновскому закону тяготения (рис. 18).

**Решение.** Поле диполя с моментом  $\mu$  можно задать векторным потенциалом

$$A = -\frac{[\mu r]}{r^3}; \quad \mu = \mu z^0,$$

а силу тяготения — формулой

$$F = -\frac{qr}{r^3}.$$

При  $v_{\parallel} = 0$  частица будет двигаться в экваториальной плоскости по азимуту. Как следует из уравнения (3.16а), скорость дрейфа по азимуту будет равна

$$r\dot{\varphi} = \frac{c}{eB^2} [FB]_{\varphi} + \frac{mcv_{\perp}^2}{2eB^3} [BV B]_{\varphi}.$$

Напряженность поля в экваториальной плоскости имеет только компоненту  $B_z$ , равную

$$B_z = -\frac{\mu}{r^3},$$

и, следовательно,

$$r\dot{\varphi} = -\frac{c}{e\mu} qr + \frac{3mcv_{\perp}^2}{2e\mu} r^2.$$

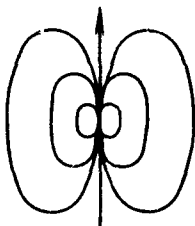


Рис. 18

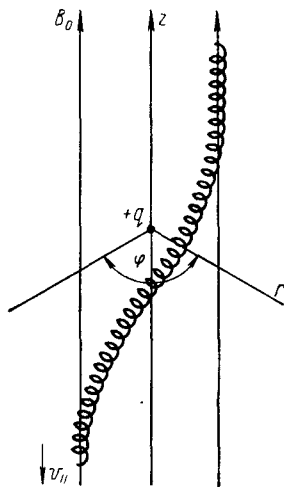


Рис. 19

**Задача 3.** В однородном магнитном поле находится неподвижный точечный электрический заряд. Рассчитать в дрейфовом приближении рассеяние частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$ , пролетающей около заряда  $q$ . Поле заряда  $q$  считать слабым (рис. 19).

**Решение.** При малой величине заряда  $q$  в первом приближении движение частицы происходит по полю  $B_0$  с постоянной скоростью  $v_0$ . Дрейф частицы направлен по  $\varphi$ , причем

$$r\dot{\varphi} = \frac{c [EB_0]_{\varphi}}{B_0^2} = \frac{qcr}{B_0(r^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}.$$

Здесь  $r$  — расстояние от центра ларморовской окружности частицы до оси  $z$ . Интегрируя это выражение по  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим искомого смещение по  $\varphi$

$$\delta\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varphi} dt = \frac{2cq}{B_0 v_0 t^2}.$$

## § 4. Движение заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле

### 1. Высокочастотный потенциал

В том случае, когда частота изменения электромагнитного поля  $\omega$  велика по сравнению с ларморовской частотой  $\omega_B$  и с пролетной частотой  $v/L$ , где  $v$  — скорость <sup>частоты</sup> частицы, а  $L$  — характерный размер поля, уравнения движения частицы можно усреднить по высокой частоте изменения поля [11]. Ограничиваясь для простоты нерелятивистским случаем, запишем уравнения движения частицы в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{vB}] \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t, \omega t). \quad (4.1)$$

Мы предполагаем, что кроме быстропеременной периодической части, изменяющейся с частотой  $\omega$ , поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  содержат еще медленно меняющиеся части. Если  $\tilde{E} \sim \tilde{B}$ ,  $\frac{v}{c}$  — малая величина  $\sim \frac{1}{\omega}$  или еще меньше, то уравнение (4.1) может быть заменено на усредненное (см. приложение I):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\omega^2} \left\{ \left( \frac{\widehat{\partial \mathbf{F}}}{\partial t} \nabla_v \right) \widehat{\mathbf{F}} + \overline{(\widehat{\mathbf{F}} \nabla) \widehat{\mathbf{F}}} \right\}, \quad (4.2)$$

где операция  $\wedge$  [см. формулу (3.12)] производится по аргументу  $\omega t$ . Подставляя сюда значение  $\mathbf{F}$  и преобразуя полученные выражения по известным формулам векторного анализа, получим с точностью до членов  $\sim \frac{1}{\omega^2}$  включительно

$$\ddot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{e^2}{\omega^2 m^2} \left\{ \nabla \frac{\widehat{\mathbf{E}}^2}{2} + \frac{1}{c} \left[ \frac{\widehat{\partial \mathbf{E}}}{\partial t} \widehat{\mathbf{B}} \right] - \overline{[\widehat{\mathbf{E}} \text{rot } \widehat{\mathbf{E}}]} \right\}. \quad (4.3)$$

Далее, используя уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , в правой части которого производную по времени можно приближенно считать взятой по времени  $t$ , входящему в аргумент  $\omega t$ , находим, что  $\text{rot } \widehat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \widehat{\mathbf{B}}}{\partial t}$ , и, следовательно,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{e^2}{\omega^2 m^2} \left\{ \nabla \frac{\widehat{\mathbf{E}}^2}{2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \overline{[\widehat{\mathbf{E}} \widehat{\mathbf{B}}]} \right\}. \quad (4.4)$$

Последний член в выражении (4.4) при усреднении исчезает, и мы окончательно получаем

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \bar{\mathbf{E}} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \bar{\mathbf{B}}] - \frac{e^2}{2m\omega^2} \overline{\nabla \widehat{\mathbf{E}}^2}. \quad (4.5)$$

Таким образом, при сделанных предположениях усредненное движение частицы происходит как бы в усредненных по высокой

частоте полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , к которым добавляется еще сила, имеющая «высокочастотный потенциал»  $U = \frac{e^2}{2m\omega^2} (\hat{\mathbf{E}})^2$ . Добавочная сила, равная  $-\nabla U$ , очевидно, не зависит от знака заряда частицы. При чисто синусоидальном изменении  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_A e^{i\omega t}$  потенциал  $U = \frac{e^2}{2m\omega^2} \bar{E}^2$ .

Отметим, что сила  $f$ , действующая на единицу объема плазмы и равная  $-n \frac{e^2}{2m\omega^2} \nabla \bar{E}^2$ , где  $n$  — концентрация, может быть представлена в виде дивергенции усредненного по высокой частоте тензора максвелловских натяжений [12]:

$$f_k = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \frac{\partial \bar{E}^2}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \epsilon \bar{E}_i \bar{E}_k + \bar{B}_i \bar{B}_k - \frac{\delta_{ik}}{2} (\bar{E}^2 + \bar{B}^2) \right\}.$$

Здесь  $\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}$  и при выводе использованы уравнения Максвелла:  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ;  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}$ ;  $\text{div } \epsilon \mathbf{E} = 0$ ;  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  являются медленно меняющимися функциями в пространстве и во времени, так что  $r_L \ll L$ , а  $\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial t}$  и  $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} \ll$

$\ll \omega_B$ , где  $r_L$  и  $\omega_B$  — ларморовские радиус и частота, то уравнение (4.5) можно еще усреднить по быстрому вращению по ларморовской окружности.

## 2. Движение частиц в ловушке с переменным полем

Используя высокочастотный потенциал, исследуем в качестве примера движение частиц в ловушке, образованной тремя взаимно перпендикулярными аксиально симметричными переменными магнитными полями (рис. 20).

Если предположить, что магнитное поле в области движения частиц однородно, то в квазистационарном приближении поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  будут иметь компоненты (см. приложение V)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= h \{ \sin(\omega t + \theta_x), \sin(\omega t + \theta_y), \sin(\omega t + \theta_z) \}; \\ \mathbf{E} &= \frac{\omega h}{2c} \{ y \cos(\omega t + \theta_z) - z \cos(\omega t + \theta_y), \\ & z \cos(\omega t + \theta_x) - x \cos(\omega t + \theta_z), x \cos(\omega t + \theta_y) - y \cos(\omega t + \theta_x) \}, \end{aligned} \right\} (4.6)$$

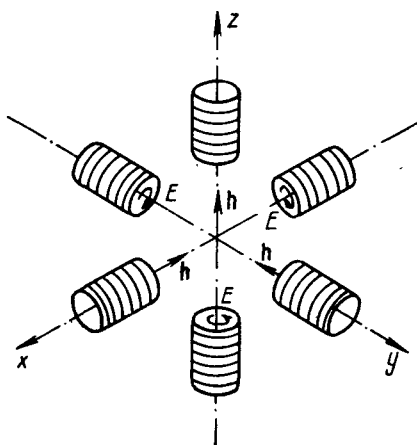


Рис. 20

где  $h$  — амплитуда магнитного поля в каждой катушке. Высоко-частотный потенциал равен

$$U = \frac{e^2 \bar{E}^2}{2m\omega^2} = \frac{e^2 h^2}{8mc^2} (x^2 + y^2 + z^2 - xy \cos \varphi_{xy} - yz \cos \varphi_{yz} - xz \cos \varphi_{xz}) \equiv \frac{e^2 h^2}{8mc^2} f(x, y, z). \quad (4.7)$$

Здесь  $\varphi_{xy} = \theta_x - \theta'_y$  и т. д. — разности фаз между токами в соответствующих катушках. Таким образом, между  $\varphi_{ik}$  существует связь

$$\varphi_{xy} + \varphi_{yz} + \varphi_{xz} = 0. \quad (4.8)$$

Для ограниченности движения частиц необходимо и достаточно, чтобы поверхность  $f(x, y, z) = a_{ik} x_i x_k = 1$  представляла собой эллипсоид. Используя равенство (4.8), инварианты\* поверхности второго порядка  $f(x, y, z) = 1$  можно записать в виде [13, 14]

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{3}{4} (1 - \cos \varphi_{xy} \cos \varphi_{yz} \cos \varphi_{xz}) \geq 0; \quad \Delta = -\delta \leq 0; \\ s &= 3 > 0; \quad T = 3 - \frac{1}{4} (\cos^2 \varphi_{xy} + \cos^2 \varphi_{yz} + \cos^2 \varphi_{xz}) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Отсюда видно, что при любых сдвигах фаз, отличных от нуля, движение частиц ограничено. Поворотом системы координат функция  $f(x, y, z)$  приводится к сумме квадратов  $f(x', y', z') = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2$ . В новой системе координат уравнения движения

$$\ddot{\mathbf{r}}' + \frac{\omega_h^2}{8} \nabla f(\mathbf{r}') = 0 \quad (4.10)$$

представляют собой уравнения гармонических колебаний с частотами порядка  $\omega_h = \frac{eh}{mc}$ . Условием применимости расчета на основе высокочастотного потенциала в рассматриваемом случае является неравенство  $\frac{v}{L} \sim \omega_h \ll \omega$ . Предполагая, что  $L$  порядка радиуса соленоида, и присоединяя сюда условие квазистационарности  $\lambda \gg L$ , получим

$$\lambda \gg L \gg \frac{\beta \lambda}{2\pi}; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (4.11)$$

---

\* 
$$\Delta = \text{Det } a_{ik}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}; \quad s = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$T = a_{11} a_{22} + a_{22} a_{33} + a_{11} a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2.$$



Частица, имеющая в начале координат скорость  $v$ , колеблется с амплитудой  $\sim \frac{v}{\omega_H}$ , т. е. порядка ларморовского радиуса в поле  $h$ . Если вблизи начала координат инжектируются протоны и электроны со скоростями одного порядка, то облако протонов окружает сгусток электронов.

Разберем несколько частных случаев.

1. В случае  $\varphi_{xy} = \varphi_{yz} = \varphi_{xz} = 0^\circ$  поверхность  $f(x, y, z) = 1$  представляет собой круглый цилиндр, ориентированный вдоль оси, проходящей через начало координат и составляющей с осями

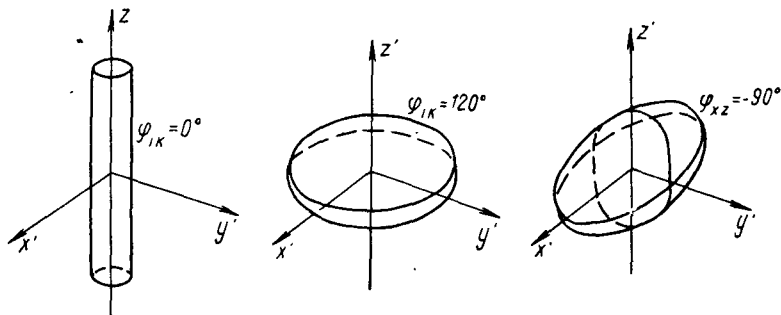


Рис. 21

координат одинаковые углы. В этом случае частицы могут беспрепятственно уходить вдоль оси цилиндра.

2. Если  $\varphi_{xy} = \varphi_{yz} = \varphi_{xz} = 120^\circ$ , то поверхность  $f = 1$  является сплюснутым эллипсоидом вращения, ось которого направлена так же, как ось цилиндра в предыдущем примере. Поворотом системы координат  $f(x, y, z) = 1$  преобразуется в уравнение

$$\frac{3}{4} x'^2 + \frac{3}{4} y'^2 + \frac{3}{2} z'^2 = 1,$$

т. е. продольный размер эллипсоида в  $\sqrt{2}$  раз меньше поперечных.

3. При  $\varphi_{xy} = 0$ ;  $\varphi_{yz} = -\varphi_{xz} = 90^\circ$  поверхность  $f = 1$  является трехосным эллипсоидом

$$\frac{1}{2} x'^2 + \frac{3}{2} y'^2 + z'^2 = 1,$$

оси  $x'$  и  $y'$  которого повернуты относительно осей  $x, y$  на угол  $45^\circ$ , а ось  $z'$  совпадает с осью  $z$  (рис. 21).

**Задача.** Определить движение частиц внутри тороидального соленоида, в обмотках которого наряду с постоянным возбуждается также и переменный ток (рис. 22).

Решение. Если частота переменного тока  $\omega$  велика по сравнению с ларморовской частотой, то движение происходит под действием постоянной дополнительной силы

$$eE_{\omega} = -\nabla U = -\nabla \frac{e^2 \bar{E}^2}{2m\omega^2}. \quad (4.12)$$

Суммарное «электромагнитное» поле  $E_{\omega}$  и  $\bar{B}_{\varphi} = \bar{B}_{\varphi R} \frac{R}{r}$  обладает аксиальной симметрией, и, следовательно, считая выполненными условия применимости дрейфовых уравнений, мы можем получить уравнения траекторий ведущего центра, используя интеграл дрейфовых уравнений (3.26). Поскольку  $A_{\varphi}$  равно нулю, этот интеграл можно представить в виде

$$r^2 v_{\parallel}^2 = \text{const}. \quad (4.13)$$

Выражая  $v_{\parallel}^2$  через  $v$  и  $\bar{B}_{\varphi}$  с помощью законов сохранения энергии и адиабатического инварианта

$$\frac{mv^2}{2} + U = \frac{mv_0^2}{2}; \quad v^2 = v_{\parallel}^2 + J_{\perp} \bar{B}_{\varphi}, \quad (4.14)$$

получим

$$r^2 v_0^2 - \frac{e^2 r^2}{m^2 \omega^2} \bar{E}_{\omega}^2 - J_{\perp} \bar{B}_{\varphi R} R r = \text{const}. \quad (4.15)$$

Если тороидальный соленоид имеет круглое поперечное сечение и частицы движутся вблизи его оси  $r = R$ , где переменная часть поля  $\bar{B}_{\varphi} = h \sin \omega t$  и  $h = \text{const}$ , то средний квадрат электрического поля равен (см. приложение V)

$$\bar{E}_{\omega}^2 = \frac{\omega^2 h^2}{8c^2} (x^2 + z^2), \quad x = r - R, \quad (4.16)$$

и, следовательно, уравнения траекторий ведущего центра принимают вид

$$(2v_0^2 - v_{0\perp}^2) \frac{x}{R} - \frac{\omega_h^2}{8} (x^2 + z^2) = \text{const}, \quad (4.17)$$

т. е. движение происходит по окружностям, центр которых сдвинут к внутренней стороне тора на величину

$$\Delta = \frac{4}{R\omega_h^2} (2v_0^2 - v_{0\perp}^2), \quad \omega_h \equiv \frac{eh}{mc}, \quad (4.18)$$

порядка  $\frac{4r_h^2}{R}$ , где  $r_h$  — ларморовский радиус в магнитном поле  $h$ .

В том случае, когда постоянное поле  $\bar{B}_{\varphi}$  отсутствует, движение частиц вблизи оси тора определяется только высокочастотным потенциалом  $U$ , и уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\omega_h^2}{16} \nabla (x^2 + z^2). \quad (4.19)$$

Из этого уравнения следует, что частицы колеблются около оси тора  $r = R$  и их поперечное смещение порядка  $3r_h$ .

## § 5. Усреднение уравнений движения по пространственному периоду поля

Если поле обладает периодичностью по координате  $z$  (не обязательно декартовой) и частица движется в основном в направлении  $z$ , то уравнения движения можно усреднить по  $z$ .

Запишем уравнения движения частицы.

$$\ddot{x}_n = F_n(x_i, \dot{x}_i, z, \dot{z}) \quad (5.1)$$

в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_k}{dz} &= x'_k; \\ \frac{dx'_k}{dz} &= \frac{1}{z^2} (F_k - x'_k F_z); \\ \frac{dz}{dz} &= \frac{1}{z} F_z \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

и будем считать  $x'_k$  и  $F_k$  малыми величинами порядка  $\epsilon$ , а  $F_z$  — величиной порядка  $\epsilon^2$ . Тогда во втором уравнении (5.2), ограничиваясь точностью  $\sim \epsilon^2$ , членом  $x'_k F_z$  можно пренебречь. Полученная таким образом система эквивалентна системе (I.19) (см. приложение I), в которой аргумент  $t$  заменен на  $z$ . Соответствующие усредненные уравнения (I.22) с учетом сделанных предположений о порядке малости величин принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_k}{dz^2} &= \frac{1}{v_z^2} \overline{F_k} + \frac{1}{v_z^4} \left( v_z \overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \hat{F}_i} - \overline{\frac{\partial F_k}{\partial x_i} \hat{F}_i} \right); \\ \frac{dv_z}{dz} &= \frac{1}{v_z} \overline{F_z}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где  $v_z \equiv \dot{z}$ . Усредненные уравнения (5.3) позволяют, например, рассчитать движение частиц под действием знакопеременной фокусировки\*.

### 1. Движение частиц в знакопеременном электростатическом поле

Пусть электрическое поле  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(x, y, z)$  является периодическим по  $z$ . В этом случае  $F_k = \frac{e}{m} E_k$  и уравнения (5.3) дают

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} = -\frac{e^2}{2m^2 v_z^4} \overline{\nabla \mathbf{E}^2}. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) эквивалентно уравнению (4.5) предыдущего параграфа, в котором усреднение производилось по периодической

\* О знакопеременной фокусировке в случае немалых поперечных полей см., например, работу [15].

зависимости от времени. Знакопеременная фокусировка достигается, в частности, электрическим полем, имеющим вблизи оси  $z$  потенциал  $\Phi = f(z)(x^2 - y^2)$ , где  $f(z)$  — периодическая функция со средним значением, равным нулю. При этом уравнения (5.4) описывают гармонические колебания частицы по обеим поперечным координатам  $x$  и  $y$ .

## 2. Движение частиц в знакопеременном магнитостатическом поле

Аналогичные уравнения получаются и в случае знакопеременной магнитной фокусировки. Пусть  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  и  $A = A_z(x, y, z)$  периодическая функция  $z$ . Тогда  $F_x = -\frac{e}{mc} \dot{z} B_y$ ;  $F_y = \frac{e}{mc} \dot{z} B_x$ ;  $F_z = \frac{e}{mc} (\dot{x} B_y - \dot{y} B_x)$ , и уравнения (5.3) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dz^2} = -\frac{e^2}{2m^2 c^2 v_z^2} \overline{\nabla \hat{B}^2}. \quad (5.5)$$

При  $A_z = f(z)(x^2 - y^2)$  частицы, движущиеся вблизи оси  $z$ , так же как и рассматривавшиеся в п. 1, совершают гармонические колебания по  $x$  и по  $y$ .

## 3. Движение частиц в аксиально симметричном гофрированном магнитном поле

Уравнения движения в аксиально симметричном поле можно представить в потенциальной форме (см. §1):

$$\ddot{r} = -\frac{\partial u(r, z)}{\partial r}; \quad \ddot{z} = -\frac{\partial u(r, z)}{\partial z}. \quad (5.6)$$

Пусть частица движется в основном вдоль оси  $z$  и магнитное поле периодически зависит от  $z$ . Тогда, усредняя уравнения (5.6) согласно уравнениям (5.3), получим  $v_z = \text{const}$  и

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{1}{v_z^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{2v_z^4} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \hat{u})^2. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) определяет  $r = r(z)$ . Азимутальное движение находится после этого из соотношения  $p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} r A_\varphi = \text{const}$ .

## 4. Движение магнитного диполя в неоднородном магнитном поле

Сгусток хорошо проводящей плазмы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле (рис. 23) может рассматриваться как диполь с магнитным моментом

$$\boldsymbol{\mu} = -\kappa \mathbf{B}, \quad (5.8)$$

где  $\kappa$  — коэффициент, зависящий от геометрии сгустка.

В частности, если сгусток представляет собой шар радиуса  $a$ , то

$$\kappa = \frac{a^2}{2}. \quad (5.9)$$

Сила, действующая на диполь в неоднородном магнитном поле, равна

$$\mathbf{F} = (\mu \nabla) \mathbf{B} = -\kappa (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}.$$

Если поле безвихревое, то

$$(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} = \nabla \frac{B^2}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{F} = -\frac{\kappa}{2} \nabla B^2. \quad (5.10)$$

Таким образом, движение малого плазменного сгустка, рассматриваемого как магнитный диполь, в безвихревом магнитном поле эквивалентно движению частицы в поле с потенциалом

$$U = \frac{\kappa}{2} B^2 \quad (5.11)$$

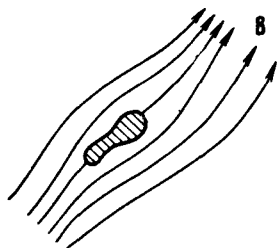


Рис. 23

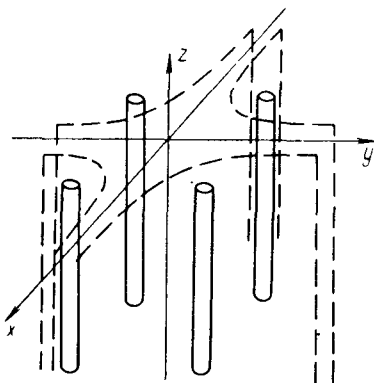


Рис. 24

и лагранжианом

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa}{2} B^2. \quad (5.12)$$

Такой диполь обладает энергией\*

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\kappa}{2} B^2.$$

Используя полученные уравнения, можно рассчитать движение плазменного сгустка в различных магнитных полях.

Рассмотрим несколько примеров (А. И. Морозов, 1959).

1. Пусть магнитное поле создано четырьмя проводниками с чередующимся направлением токов. Магнитное поле вблизи оси такой системы (рис. 24) имеет вид

$$B_x = by; \quad B_y = -bx; \quad B_z = B_0 = \text{const.}$$

Следовательно, потенциал

$$U = \frac{\kappa b^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\kappa}{2} B_0^2 \quad (5.13)$$

\* Мы предполагаем для простоты, что  $\kappa$  не зависит от  $B$ .

и движение сгустка в таком поле есть наложение простых гармонических колебаний по  $x$  и по  $y$ .

2. Пусть плазменный сгусток движется в гофрированном магнитном поле (рис. 25), заданном скалярным потенциалом

$$\Phi_m = B_0 z + \frac{b_0}{k} I_0(kr) \sin kz.$$

Потенциал  $U$  в этом случае равен

$$U = \frac{\kappa}{2} (B_z^2 + B_r^2) = \frac{\kappa}{2} \{ (B_0 + b_0 I_0 \cos kz)^2 + b_0^2 (I_0')^2 \sin^2 kz \}. \quad (5.14)$$

Считая, что сгусток движется вдоль оси  $z$  с большой скоростью, для расчета усредненной траектории мы можем использовать уравнение (5.7). Исключая из лагранжиана (5.12) циклическую координату [см. формулу (1.22)], получим потенциал

$$U + \frac{p_\varphi}{2mr^2}. \quad (5.15)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.7), найдем, что при  $p_\varphi = 0$  и  $kr \ll 1$

$$m \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{3\kappa k^2 b^2}{8} r = 0, \quad (5.16)$$

т. е. сгусток колеблется по радиусу с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{3\kappa k^2 b^2}{8m}}$ .

Подробнее о движении сгустков в магнитном поле см. работу [16].

**Задача 1.** Рассчитать движение плазменного сгустка в изогнутом гофрированном магнитном поле.

**Решение.** Сверхное в тор большого радиуса  $R$  гофрированное магнитное поле может быть описано скалярным потенциалом

$$\Phi = B_0 s + \frac{b I_0(kQ)}{k} \sin ks; \quad \mathbf{B} = \nabla \Phi.$$

Здесь  $s \equiv R\varphi$  — координата, отсчитываемая вдоль тора (см. рис. 37). Найдем компоненты  $B_s$ ,  $B_\theta$  и  $B_Q$  и подставляя их в формулу (5.11), получим выражения для  $U$ . Полагая далее  $\dot{\theta} = 0$  и используя уравнение (5.3), получим окончательно следующее уравнение для движения по  $Q$  при малых  $kQ$ :

$$m \frac{d^2 Q}{dt^2} + Q \frac{3\kappa k^2 b^2}{8} = \frac{\kappa B_0^2 + m s_0^2}{R}.$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент, определяемый соотношением (5.8), а  $m$  — масса сгустка.

**Задача 2.** Рассчитать движение плазменного сгустка в винтовом магнитном поле.

**Решение.** Магнитное винтовое поле можно задать скалярным потенциалом

$$\Phi = B_0 z + \frac{b}{nk} I_n(nkr) \sin n(\varphi - kz).$$

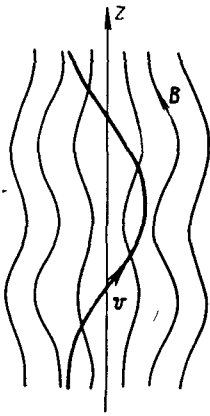


Рис. 25

Найдя с его помощью  $U$  и затем используя уравнения (5.3), в результате при малых  $kr$  и  $n = 1, 2$  получим

$$m\ddot{r} + \frac{\kappa}{4} b^2 k^2 r = 0.$$

Если  $n > 2$ , то

$$m\ddot{r} + \frac{\kappa b^2 (knr)^{2n-3}}{(n-1)((n-2)!)^2 2^{2n}} = 0.$$

## § 6. Движение частиц во вращающемся электромагнитном поле

### 1. Общие соотношения

В предыдущих параграфах было рассмотрено движение частиц в медленно меняющихся ( $\omega \ll \omega_B$ ) и быстро меняющихся ( $\omega \gg \omega_B$ ) полях. В том случае, когда ларморовская частота  $\omega_B$  сравнима с частотой изменения поля  $\omega$ , построить общую приближенную теорию движения частиц достаточно сложно, и поэтому мы ограничимся рассмотрением частного случая вращающегося поля. Кроме переменного поля предполагается также наличие постоянных во времени полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ , симметричных относительно оси вращения переменного поля. Изучение поведения частиц в такой конфигурации полей значительно облегчается вследствие того, что во вращающейся системе координат мы приходим к задаче о движении частиц в постоянных полях.

Функция Лагранжа в неподвижной системе координат  $x, y, z$  имеет вид

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A} - e\Phi. \quad (6.1)$$

Для того чтобы во вращающейся системе поля были постоянными, переменная компонента векторного потенциала  $\tilde{\mathbf{A}}$  должна представляться в виде

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left\{ \tilde{A}'_x \cos \omega t - \tilde{A}'_y \sin \omega t, \tilde{A}'_x \sin \omega t + \tilde{A}'_y \cos \omega t, \tilde{A}'_z \right\}. \quad (6.2)$$

где  $\omega$  — угловая частота вращения поля, причем  $\tilde{\mathbf{A}}$  и  $\tilde{\Phi}$  должны быть функциями только от следующих комбинаций координат  $x, y, z$ :

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t; \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t; \quad z' = z. \quad (6.3)$$

Для перехода к вращающейся системе координат  $x', y', z'$  в лагранжиане (6.1) следует заменить  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{v}' + [\omega \mathbf{r}']$ ,  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r}'$ , а  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}'$ , где  $\mathbf{A}'$  образуется из  $\mathbf{A}$  с помощью той же матрицы поворота (6.3), что и  $\mathbf{r}'$  из  $\mathbf{r}$ . Таким образом, движение во вращающейся с угловой частотой  $\omega$  системе координат описывается лагранжианом

$$L' = \frac{m}{2} (\mathbf{v}' + [\omega \mathbf{r}'])^2 + \frac{e}{c} (\mathbf{v}' + [\omega \mathbf{r}']) \mathbf{A}' - e\Phi'. \quad (6.4)$$

Уравнения движения, которые получаются из лагранжиана (6. 4), записываются в виде следующей векторной формулы:

$$m = \frac{dv'}{dt} \left[ \mathbf{v}' \times \left( \frac{e}{c} \mathbf{B}' + 2m\boldsymbol{\omega} \right) \right] + \nabla \left( -e\Phi' + \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2 + \frac{e}{c} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] \mathbf{A}' \right), \quad (6. 5)$$

которая показывает, что частицы можно представлять себе движущимися в эффективных магнитном и электрическом полях, причем последнее имеет скалярный потенциал. Соответственно уравнение (6. 5) имеет интеграл энергии

$$\frac{mv'^2}{2} + e\Phi' - \frac{m}{2} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']^2 - \frac{e}{c} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'] \mathbf{A}' = \text{const.} \quad (6. 6)$$

Уравнение движения (6. 5) наряду с  $\mathbf{B}'$  содержит также и  $\mathbf{A}'$ . Это связано с тем, что электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , определяется непосредственно векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  (см. приложение V).

Электромагнитное поле с вращающимся вокруг оси  $z$  вектором  $\mathbf{B}$  можно построить множеством различных способов. Достаточно общей формой является

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \{ \varepsilon_r(z) \cos \omega t, \varepsilon_r(z) \sin \omega t, \varepsilon_z(x \cos \omega t + y \sin \omega t) \}; \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \{ h(z) \cos \omega t, h(z) \sin \omega t, 0 \}; \quad \frac{\omega}{c} h(z) = \varepsilon_z - \varepsilon'_r(z). \end{aligned} \right\} \quad (6. 7)$$

Здесь последнее соотношение получается из уравнения  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Формулы (6. 7) соответствуют квазистационарному приближению ( $\lambda \gg L$ ). Однако в частном случае, когда  $h(z) = h_0 \cos kz$ ;  $\varepsilon_r = -h_0 \sin kz$ ;  $\varepsilon_z = 0$ ;  $k = \frac{\omega}{c}$ , поля  $\tilde{\mathbf{E}}$  и  $\tilde{\mathbf{B}}$  удовлетворяют также и уравнению  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , т. е. являются точными решениями уравнений Максвелла.

## 2. *Случай однородного вращающегося поля*

Рассмотрим в качестве примера движение частицы во вращающемся магнитном поле, образованном двумя круглыми соленоидами (направленными по осям  $x$  и  $y$ ), токи в которых пропорциональны соответственно  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t^*$ . Поле в каждом из соленоидов описывается векторным потенциалом, имеющим только одну компоненту, направленную по  $\varphi_x$  или  $\varphi_y$  (рис. 26) и соответственно равную  $\frac{h}{2} \varrho_x$  или  $\frac{h}{2} \varrho_y$ . Пусть имеется также постоянное однородное поле  $B_z$ , которое определяется  $\varphi_z$ -компо-

\*Соответствующая задача рассмотрена в работе [17].



нентой  $A$ , равной  $B_z \frac{r}{2}$ . Нетрудно убедиться, что получающееся поле имеет векторный потенциал

$$A = \left\{ -\frac{h}{2} z \cos \omega t - \frac{B_z}{2} y, -\frac{h}{2} z \sin \omega t + \frac{B_z}{2} x, \right. \\ \left. \frac{h}{2} (x \cos \omega t + y \sin \omega t) \right\}.$$

Во вращающейся системе

$$A' = \left\{ -\frac{h}{2} z' - \frac{B_z}{2} y', \frac{B_z}{2} x', \frac{h}{2} x' \right\}; \quad B' = \{0, -h, B_z\};$$

$$E' = \frac{\omega}{c} \left\{ 0, \frac{h}{2} z', -\frac{h}{2} y' \right\}.$$

Уравнения движения (6.5) в координатах представляются системой

$$\ddot{x}' - (2\omega + \omega_B) \dot{y}' - (\omega\omega_B + \omega^2) x' - \omega_h \dot{z}' = 0; \\ \ddot{y}' + (2\omega + \omega_B) \dot{x}' - (\omega\omega_B + \omega^2) y' - \frac{\omega\omega_h}{2} z' = 0; \quad (6.8)$$

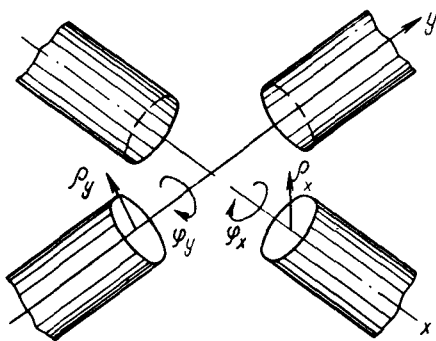


Рис. 26

$$\dot{z}' + \omega_h \dot{x}' - \frac{\omega\omega_h}{2} y' = 0; \quad \omega_B \equiv \frac{eB_z}{mc}; \quad \omega_h \equiv \frac{eh}{mc}.$$

Эти уравнения являются линейными с постоянными коэффициентами и поэтому могут быть решены точно. Подстановка  $r' = r'_0 \exp(i\sqrt{k}t)$  приводит к характеристическому уравнению

$$k^3 - (\Omega^2 + \omega^2 + \omega_h^2) k^2 + \omega^2 \left( \Omega^2 + \frac{3}{4} \omega_h^2 \right) k - \frac{1}{4} \omega^3 \omega_h^2 \Omega = 0, \quad (6.9)$$

где  $\Omega = \omega_B + \omega$ .

Движение частицы ограничено только в том случае, когда корни этого уравнения положительны и различны. Для этого необходимо, чтобы дискриминант кубического уравнения и коэффициент при  $k$  были положительными, а коэффициент при  $k^2$  и свободный член отрицательными [14]. Отсюда, в частности, следует, что  $\frac{\Omega}{\omega} > 0$ . Области устойчивости в координатах

$$\alpha = \frac{\Omega}{\omega} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\omega_h}{\omega}$$

показаны на рис. 27 (заштрихованы). При  $\alpha, \beta \ll 1$  эти области ограничены кривыми  $\beta^2 = \alpha^3$  и  $\beta^2 = \frac{16}{9} \alpha$ , а при  $\beta \gg 1$  — кривыми  $\beta^2 = \alpha$  и  $\alpha = \frac{9}{16}$ .

В важном частном случае, когда  $\Omega = \omega$  и  $\omega_B = 0$ , т. е. когда частицы движутся в скрещенных аксиально симметричных переменных полях без постоянного магнитного поля, дисперсионное уравнение (6. 9) принимает вид

$$k^3 - (2\omega^2 + \omega_h^2) k^2 + \omega^2 \left( \omega^2 + \frac{3}{4} \omega_h^2 \right) k - \frac{1}{4} \omega^4 \omega_h^2 = 0. \quad (6. 10)$$

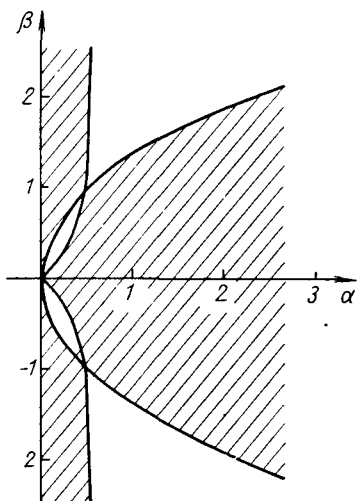


Рис. 27

При  $\omega_h \ll \omega$

$$k = \begin{cases} \omega^2 \left( 1 \pm \frac{\omega_h}{\sqrt{2} \omega} \right); \\ \frac{\omega_h^2}{4}. \end{cases} \quad (6. 11)$$

Эти результаты согласуются с тем, что получается из высокочастотного потенциала (см. §4):

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\omega_h^2}{16} \nabla (x^2 + y^2 + 2z^2) = 0. \quad (6. 12)$$

Отсюда видно, что в неподвижной системе координат частица движется в трехмерной потенциальной яме, причем частота колебаний по  $z$  есть  $\frac{\omega_h}{2}$ , а по  $x$  и  $y$  равна  $\frac{\omega_h}{2\sqrt{2}}$ . Если же

$\omega_h \gg \omega$ , то дисперсионное уравнение дает

$$k = \begin{cases} \omega^2 \left( \frac{3}{8} \pm \frac{i\sqrt{7}}{8} \right); \\ \omega_h^2. \end{cases} \quad (6. 13)$$

Формулы (6. 11) и (6. 13) показывают, что продольный размер области, в которой колеблются частицы, порядка  $v/\omega_h$ , а поперечные размеры порядка  $v/\omega_h$  при  $\omega_h \ll \omega$  и неограничены при  $\omega_h \gg \omega$ .

### 3. Движение частиц при наличии постоянного аксиально симметричного поля

В заключение этого параграфа остановимся на задаче о движении частиц вблизи оси аксиально симметричного магнитного поля при наличии вращающегося поля (6. 7). Эту задачу можно было бы решить методом усреднения уравнений (6. 5). Но вычи-

сления получаются менее громоздкими, если уравнения движения усреднять непосредственно в неподвижной системе координат.

Если обозначить через  $B(z)$  поле на оси симметрии, то с точностью до линейных по отклонению от оси членов магнитное поле  $\mathbf{B}(r, z)$  имеет компоненты

$$B_x = -\frac{x}{2} B'(z); \quad B_y = -\frac{y}{2} B'(z); \quad B_z = B(z). \quad (6.14)$$

Уравнения движения в полях (6.7) и (6.14) запишем в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\zeta} + i\omega_B \dot{\zeta} &= -\frac{i\omega_B \dot{z}}{2} \zeta + \frac{e}{m} \left( \varepsilon_r + \frac{i\dot{z}}{c} h \right) e^{i\omega t}; \\ \dot{z} &= -\frac{i\omega_B \dot{z}}{4} (\zeta \zeta^* - \dot{\zeta} \dot{\zeta}^*) + \frac{e}{2m} \left( \varepsilon_z \zeta + \frac{ih}{c} \dot{\zeta} \right) e^{-i\omega t} + \\ &\quad + \frac{e}{2m} \left( \varepsilon_z \zeta^* - \frac{ih}{c} \dot{\zeta}^* \right) e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

где  $\zeta = x + iy$ ,  $\omega_B(z) = \frac{eB}{mc}$ , а звездочка означает комплексное сопряжение.

Произведем замену переменных  $\zeta$  и  $\dot{\zeta}$  на  $A_1, A_2$  по формулам

$$\zeta = A_1 + A_2 e^{-i\theta_1}; \quad \dot{\zeta} = -i\omega_B A_2 e^{-i\theta_1}; \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_B(z). \quad (6.16)$$

Тогда система (6.15) заменится системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -\frac{\omega_B \dot{z}}{2\omega_B} (A_1 - A_2 e^{-i\theta_1}) - \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{ie\varepsilon_r}{m} - \dot{z}\omega_h \right) e^{i\theta_2}; \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{\omega_B \dot{z}}{2\omega_B} (A_1 e^{i\theta_1} - A_2) + \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{ie\varepsilon_r}{m} - \dot{z}\omega_h \right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}; \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}; \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\omega_B \omega_B'}{4} (2A_2 A_2^* + A_1 A_2^* e^{i\theta_1} + A_1^* A_2 e^{-i\theta_1}) + \\ &\quad + \frac{e\varepsilon_z}{2m} (A_1 e^{-i\theta_2} + A_1^* e^{i\theta_2}) + \frac{1}{2} \left( \omega_B \omega_h + \frac{e\varepsilon_z}{m} \right) \times \\ &\quad \times (A_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + A_2^* e^{i(\theta_1+\theta_2)}); \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_B(z); \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \omega. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Полученные уравнения представляют собой двухпериодную систему, решение которой методом усреднения приведено в приложении I. Для полноты к ним следует добавить еще два уравнения

для  $A_1^*$  и  $A_2^*$ , которые получаются из уравнений для  $A_1$  и  $A_2$  заменой их на комплексно-сопряженные. При усреднении уравнений (6.17) предполагаем, что  $\omega_{B'}'$  и  $\omega_h = \frac{eh}{mc}$  малы по сравнению с  $\omega_B$  и  $\omega$ . Кроме того, следует отбрасывать величины порядка  $\omega_B'^2$  и  $\omega_B''$ , так как поле (6.14) взято только в линейном приближении. Поскольку  $\omega_B$  зависит только от  $z$ ,  $\omega = \text{const}$  и  $\hat{f}_z = 0$ , то формулы (I.30) [см. приложение I] существенно упрощаются и усредненные уравнения, соответствующие уравнениям (6.17), могут быть записаны в виде

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \bar{f}_k + \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i}} \hat{f}_i \quad (6.18)$$

В итоге усреднения системы (6.17) по формулам (6.18) при учете сделанных замечаний получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= - \left\{ \frac{\dot{\omega}_B}{2\omega_B} - i \frac{e\varepsilon_z^*}{2m} \frac{\omega_h}{\omega\omega_B} \right\} A_1; \\ \frac{dA_2}{dt} &= - \left\{ \frac{\dot{\omega}_B}{2\omega_B} + i \frac{\omega_h}{2\omega_B\Omega} \left( \omega_B\omega_h + \frac{e\varepsilon_z}{m} \right) \right\} A_2; \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}; \\ \frac{dz}{dt} &= - \frac{\omega_B\dot{\omega}_B}{2} A_2 A_2^* + \frac{e\varepsilon_r}{m\Omega} \left( \omega_h - \frac{e\varepsilon_z}{m\omega} \right); \quad \Omega \equiv \omega + \omega_B(z). \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Решения первых двух уравнений получим в виде

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_{10} \sqrt{\frac{\omega_{B_0}}{\omega_B}} \exp \left( i \int \frac{e\varepsilon_z \omega_h}{2m\omega\omega_B} dt \right); \\ A_2 &= A_{20} \sqrt{\frac{\omega_{B_0}}{\omega_B}} \exp \left[ -i \int \frac{\omega_h}{2\omega_B\Omega} \left( \omega_B\omega_h + \frac{e\varepsilon_z}{m} \right) dt \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Зависимость  $z = z(t)$  определяется из четвертого уравнения (6.19). Из выражений (6.20) вытекает сохранение поперечного инварианта  $J_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{B}$ . Действительно, согласно соотношениям (6.16) и (6.20),

$$v_{\perp}^2 = \dot{\xi}\dot{\xi}^* = \omega_B^2 A_2 A_2^* = \omega_B \omega_{B_0} A_{20} A_{20}^*. \quad (6.21)$$

Подставляя выражение (6.21) в уравнения (6.19) и учитывая, кроме того, связь между  $h$  и  $\varepsilon$ , которая дается последней формулой (6.7), окончательно получим следующее уравнение для продольных колебаний частицы по оси  $z$ :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{J_{\perp}}{2} B'(z) - \frac{e^2}{m^2} \frac{\varepsilon_r(z) \varepsilon_r'(z)}{\omega(\omega + \omega_B)}. \quad (6.22)$$

Если вращающееся поле отсутствует ( $\varepsilon_r = 0$ ), то частицы заперты в потенциальной яме  $U(z) \sim B(z)$  поперечным инвариан-

том  $J_{\perp}$ . Высокочастотное удержание осуществляется вторым слагаемым в правой части уравнения (6. 22), для которого характерно наличие члена  $\omega$  ( $\omega + \omega_B$ ) в знаменателе [12]. Наличие высокочастотного поля при надлежащем выборе частоты  $\omega$  уменьшает конус ухода частиц через пробки. В предельных случаях, когда  $\omega \ll \omega_B$  или  $\omega \gg \omega_B$ , уравнение (6. 22) может быть получено и из общих теорий § 3 и 4.

Если продольное поле однородно, а вращающееся поле образуется двумя скрещенными круглыми соленоидами (см. рис. 26)

$$\mathbf{B} = \{h \cos \omega t, h \sin \omega t, B\};$$

$$\mathbf{E} = \frac{\omega h}{2c} \{-z \cos \omega t, -z \sin \omega t, x \cos \omega t + y \sin \omega t\},$$

то уравнение (6. 22) переходит в уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega \omega_h^2}{4(\omega + \omega_B)} z = 0 \quad (6. 23)$$

с частотой  $\omega_z = \frac{\omega h}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\omega + \omega_B}}$ , которая может быть получена и из точного дисперсионного уравнения (6. 9) при  $\omega_h \ll \omega_B$  и  $\omega_h \ll \omega$ . Частица колеблется в области, поперечные размеры которой порядка ларморовского радиуса в поле  $B$  ( $r \sim \frac{v}{\omega_B}$ ), а продольный размер  $z_{\text{макс}} \sim \frac{v}{\omega_z}$ . Продольный размер уменьшается, если  $\omega$  и  $\omega_B$  имеют разные знаки. Условием ограниченного движения по  $z$  является  $\omega_z^2 > 0$ . При  $\omega = -\omega_B$  происходит резонансное ускорение, и частицы уходят по радиусу.

В заключение приведем уравнение (6. 22) для точных полей  $h = h_0 \cos kz$ ;  $\varepsilon_r = -h_0 \sin kz$ ;  $\varepsilon_z = 0$ , удовлетворяющих волновым уравнениям:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega \omega_h^2}{2k(\omega + \omega_B)} \sin 2kz = 0. \quad (6. 24)$$

Если коэффициент при  $\sin 2kz$  положителен, то уравнение (6. 24) является уравнением колебаний маятника около точки  $z = 0$ , соответствующей максимуму переменного магнитного поля. Если же этот коэффициент отрицателен, то колебания происходят в областях узлов  $h(z)$ . Предполагая, что частица колеблется около средней плоскости  $z = 0$ , найдем максимальный угол скорости с плоскостью  $z = 0$  (при инжекции в средней плоскости), при котором частица еще не уходит вдоль оси  $z$ :

$$\sin^2 \gamma = \frac{c}{v} \frac{r_{\Omega} \lambda}{2\pi r_h^2}. \quad (6. 25)$$

Здесь  $r_h = \frac{v}{\omega_h}$ ;  $r_\Omega = \frac{v}{\Omega}$ ;  $\Omega = \omega + \omega_B$ . Поле рассмотренного типа можно возбудить, например, в прямоугольном резонаторе с квадратным поперечным сечением.

## § 7. Движение частиц в тороидальных магнитоэстатических полях

### 1. Понятие об абсолютной ловушке

Проблема удержания электромагнитным полем отдельных частиц приводит, естественно, к задаче создания так называемой абсолютной ловушки. Эта задача впервые была поставлена Л. А. Арцимовичем. Абсолютная ловушка должна обладать свойством удерживать находящуюся в ней частицу после одного или нескольких столкновений с другими частицами. Это означает, что ловушка должна удерживать в ограниченном объеме частицы с произвольными по направлению скоростями при условии, что модуль скорости не превосходит некоторого максимального значения  $v_M^*$ . Точнее, если через  $V_0$  обозначить область поля, являющуюся абсолютной ловушкой, то внутри этой области должна существовать область  $V_1$ , такая, что частица, вышедшая из произвольной точки  $V_1$  с произвольным направлением скорости, останется в пределах  $V_0$ , если  $|v| < v_M$  (рис. 28).

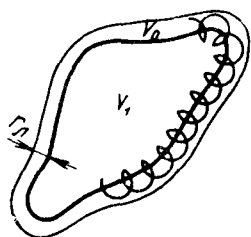


Рис. 28

В § 4 было показано, что усредненное движение частицы в высокочастотном поле есть движение в некотором эффективном поле, обладающем потенциалом. Мы видели, что всегда можно выбрать такую систему высокочастотных полей (с использованием или без использования статического магнитного поля), чтобы частица удерживалась по крайней мере в течение промежутка времени, соответствующего применимости высокочастотного потенциала (см. п. 2 § 4). Кроме того, в п. 2 § 6 приведен пример ловушки, рассчитанной на основании точных уравнений движения.

Поскольку вопрос о создании абсолютных ловушек с использованием высокочастотного поля представляется ясным, мы в дальнейшем остановимся только на исследовании магнитоэстатических ловушек.

Простейшим примером абсолютной магнитоэстатической ловушки может служить поле кольца с током  $J_\phi$  с наложенным на него продольным магнитным полем прямой нити с током  $J_z$  (рис. 29). Абсолютность такой ловушки следует из сохранения квадрата скорости  $v^2$  и момента количества движения частицы

Простейшим примером абсолютной магнитоэстатической ловушки может служить поле кольца с током  $J_\phi$  с наложенным на него продольным магнитным полем прямой нити с током  $J_z$  (рис. 29). Абсолютность такой ловушки следует из сохранения квадрата скорости  $v^2$  и момента количества движения частицы

\* Разумеется, если модуль скорости не ограничен, то ловушку в принципе создать нельзя.

$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + \frac{e}{c}rA_\varphi$ . Из очевидного неравенства  $r^2\dot{\varphi}^2 \leq v_0^2$  и указанных выше законов сохранения вытекает (см. п. 4 и 5 § 1), что

$$\frac{e}{mc} |A_\varphi(r, z) - A_\varphi(r_0, z_0)| \leq v_0 \left(1 + \frac{r_0}{r}\right). \quad (7.1)$$

Здесь  $r_0, z_0$  — начальные координаты частиц. Это соотношение можно еще записать в виде

$$\left| \frac{e}{mc} \frac{\partial A_\varphi}{\partial n} \delta n \right| \leq v_0 \left(1 + \frac{r_0}{r}\right), \quad (7.2)$$

где  $\delta n$  — смещение вдоль нормали к поверхности  $A_\varphi = \text{const}$ . Величина  $\frac{\partial A_\varphi}{\partial n}$  равна напряженности поля  $B$ , созданного током  $J_\varphi$ . Следовательно,

$$\delta n \leq r_\perp \left(1 + \frac{r_0}{r}\right), \quad (7.3)$$

где  $r_\perp = \frac{mc v_0}{eB}$ . Поскольку величина  $\frac{r_0}{r} \sim 1$ , постольку  $\delta n \sim r_\perp$ , и удерживаемые полем частицы будут двигаться в пределах полого тора толщиной  $\sim r_\perp$ . Отсюда и следует абсолютность рассматриваемой ловушки. Обращает на себя внимание то, что  $\delta n$  не зависит от напряженности поля, созданного током  $J_z$ . Это обстоятельство, как мы увидим ниже, связано с тороидальным дрейфом.

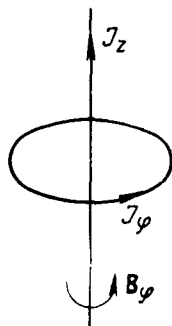


Рис. 29

Можно показать, что для всех аксиально симметричных абсолютных ловушек область удержания частиц представляет собой систему полых торов или включает в себя область, где  $j \neq 0$  (например, движение частиц внутри плазменного тороидального шнура).

Наряду с аксиально симметричными полями большой практический интерес представляют также несимметричные магнитные поля, например тороидальные винтовые поля.

Однако методов исследования ловушечных свойств несимметричных полей — не только в рамках ньютоновых, но даже в рамках дрейфовых уравнений — пока еще нет. Поэтому такого рода исследования проводятся только с помощью продольных инвариантов. Разумеется, что при этом теряются эффекты\*, связанные с несохранением на больших временах как продольного, так и поперечного инварианта.

Ограничиваясь случаями безвихревых магнитных полей, дрейфовые уравнения можно записать в форме (3. 21). Эти уравнения показывают, что при малых магнитных моментах частица движется

\* В частности, теряются эффекты, аналогичные разрушению магнитных поверхностей [10].

в поле без остановок, причем уравнение траектории движения тем меньше будет отличаться от уравнения силовых линий, чем меньше отношения  $r_{\perp}/L$  и  $J_{\perp}B/v^2$ , где  $L$  — масштаб неоднородности поля. Поскольку абсолютная ловушка должна удерживать все частицы со скоростями, меньшими некоторой максимальной, и, в частности, те, у которых  $J_{\perp} \rightarrow 0$ ,  $\frac{r_{\perp}}{L} \rightarrow 0$ , то абсолютной ловушкой может быть только такое магнитное поле, у которого все силовые линии лежат в ограниченном объеме. Простейшими полями такого рода являются тороидальные поля [10], рассмотрим которых мы и ограничимся.

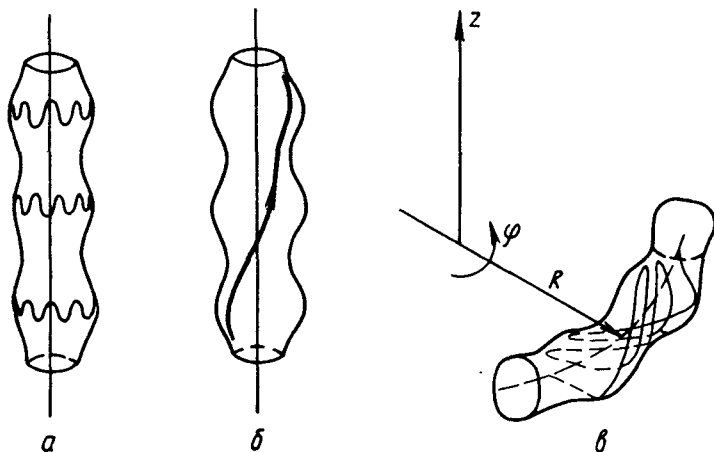


Рис. 30

Но одного условия тороидальности недостаточно для того, чтобы поле являлось магнитной ловушкой. Связано это с тем, что частицы не только движутся вдоль силовых линий, но и дрейфуют поперек этих линий.

По своей структуре уравнения силовых линий и дрейфовые уравнения в форме (3.21) очень похожи, однако описываемые ими силовые линии и траектории частиц имеют существенные различия. Если в тороидальном поле магнитная силовая линия идет, так сказать, без остановки, то частицы, движущиеся в таком поле, могут как сохранять направление своего движения, так и периодически менять его. Частицы первого рода мы будем называть пролетными, а второго рода — запертыми.

В качестве пояснительного примера можно взять прямое гофрированное магнитное поле. Те частицы, у которых на данной силовой линии  $v_0^2 > J_{\perp}B_{\text{макс}}$ , будут являться пролетными, а те, для которых справедливо обратное неравенство, будут запертыми. При этом и пролетные и запертые частицы вследствие неоднородности магнитного поля будут, вообще говоря, дрейфовать, обходя ось поля (рис. 30, а, б).



В случае прямого поля все запертые частицы будут колебаться в пределах одного периода. Если же такое поле свернуть в тор или взять неаксиально симметричное прямое поле, то появятся частицы, область колебаний которых будет состоять из нескольких периодов поля (см. рис. 30, в).

Таким образом, исследование ловушки на абсолютность требует изучения движения как пролетных, так и запертых частиц.

При рассмотрении поведения силовых линий в тороидальном поле удобно использовать понятие изображающей плоскости  $P$ , т. е. плоскости, пересекающей в каком-нибудь месте тороидальное поле. При этом поведении силовой линии поля изображается множеством точек пересечения этой силовой линии с плоскостью  $P$  [10].

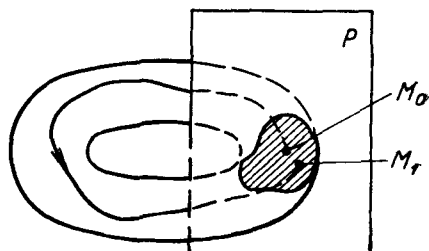


Рис. 31

Поскольку продольный инвариант вычисляется для периода силовой линии, постольку его можно рассматривать как функцию изображающей точки  $M$ , и поверхность  $J_{\parallel} = \text{const}$ , по которой движется частица, может быть представлена некоторой линией на изображающей плоскости. В дальнейшем при рассмотрении конкретных примеров мы будем находить только траектории на изображающей поверхности  $P$  (рис. 31).

## 2. Тороидальный дрейф

Простейшим безвихревым тороидальным магнитным полем является поле прямой нити с током, спадающее как  $\frac{1}{r}$ :

$$B_{\varphi} = B_0 \frac{R}{r}; \quad B_r = B_z = 0. \quad (7.4)$$

Здесь через  $B_0$  обозначена напряженность поля на некотором расстоянии  $R$  от нити. Подставляя эти значения поля в дрейфовые уравнения (3.17), получим следующие выражения для скорости ведущего центра:

$$\frac{dr}{dt} = v_{\parallel} \Phi^0 + \frac{mc}{2eBr} (2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) z^0; \quad v_{\parallel} = \text{const}; \quad v_{\perp} = \text{const}. \quad (7.5)$$

Отсюда видно, что частица вращается вокруг нити с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$  и в то же время смещается перпендикулярно к силовым линиям вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью (рис. 32)

$$v_{\text{др}}^{\text{тор}} = \frac{mc}{2eBr} (2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2). \quad (7.6)$$

Это смещение частицы в  $z$ -направлении получило название тороидального дрейфа. Как показывает формула (7.6), частицы противоположных знаков дрейфуют в противоположные стороны.

Если в рассматриваемое поле поместить редкую плазму (т. е. плазму, у которой  $\frac{8\pi p}{B^2} \ll 1$ ), то вследствие дрейфа электронов и ионов плазма поляризуется и в ней появится электрическое поле, в результате чего возникнет радиальный электрический дрейф частиц со скоростью

$$v_{др}^{эл} = \frac{c}{B^2} [EB],$$

что приведет к непрерывному расширению кольца плазмы (рис. 33). Эти рассуждения показывают, что в поле (7.4) нельзя получить равновесную плазменную конфигурацию, как нельзя удержать и отдельные частицы.

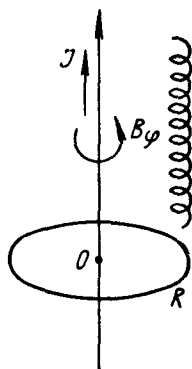


Рис. 32

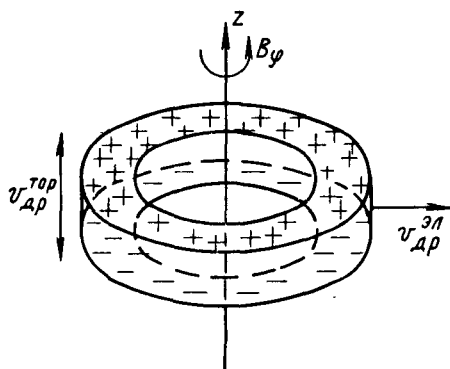


Рис. 33

Компенсацию тороидального дрейфа для одной частицы с известными  $J_\perp$  и  $v_0$  можно осуществить в принципе самыми различными способами. Так, например, достаточно было бы добавить к азимутальному полю еще однородное поле, направленное вдоль оси  $z$  и равное по величине ( $B_z \ll B_\phi$ ):

$$B_z = -\frac{B}{v_\parallel} v_{др}^{тор}, \quad (7.7)$$

и превратить поле с замкнутыми силовыми линиями в поле с незамкнутыми силовыми линиями, неограниченно удаляющимися вдоль оси  $z$ , и тем самым компенсировать дрейф смещением вдоль силовой линии.

Однако для любой другой частицы с другими  $v$  и  $J_\perp$  тороидальный дрейф сохраняется. Наибольший интерес, разумеется, представляют такие методы компенсации тороидального дрейфа, которые приводят к абсолютной ловушке. Можно предложить целый ряд методов подобной компенсации с использованием статических полей. Очевидно, простейшими из этих способов будут те, которые обеспечивают движение частицы, представляемое в изображающей

плоскости замкнутыми кривыми. Это наводит на мысль о том, что если в некотором прямом магнитном поле частицы непрерывно обходят магнитную ось поля, то при изгибании такого поля в тор достаточно большого радиуса они по-прежнему не уйдут далеко от магнитной оси.

Разумность такого предположения поясним следующим формальным примером. Пусть движение частицы в прямом поле таково, что траектория в изображающей плоскости представляет собой окружность, причем перемещение по этой окружности описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega z; & \frac{dz}{dt} &= \omega x; \\ \omega &= \text{const.} \end{aligned} \right\} (7.8)$$

Если такое поле изогнуть в тор достаточно большого радиуса, то появится тороидальный дрейф, скорость которого мы обозначим через  $\beta$ . Теперь движение в изображающей плоскости (рис. 34) будет описываться уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -\omega z; \quad \frac{dz}{dt} = \omega x + \beta. \quad (7.9)$$

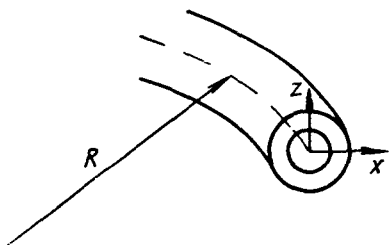


Рис. 34

Считая  $\beta$  постоянной, находим интеграл

$$\left(x + \frac{\beta}{\omega}\right)^2 + z^2 = \text{const.} \quad (7.10)$$

Отсюда видно, что при  $\omega \neq 0$  частица по-прежнему будет двигаться по окружности, но с несколько смещенным центром. Поскольку при  $R \rightarrow \infty$  скорость дрейфа  $\beta \rightarrow 0$ , то и смещение траектории в изображающей плоскости при  $R \rightarrow \infty$  становится сколь угодно малым.

Нужное нам вращение частицы вокруг оси прямого поля может быть получено несколькими способами: либо посредством магнитного или электрического дрейфа частиц, либо прокручиванием силовых линий магнитного поля. Магнитный дрейф частиц проще всего может быть осуществлен гофрированием магнитного поля (см. § 3 и п. 3 § 7).

Электрический дрейф в тороидальном поле может быть осуществлен, например, с помощью заряженного проводника, concentрично надетого на прямой проводник с током  $J_z$ , создающим магнитное поле (рис. 35).

Прокручивание силовых линий может быть получено как с помощью кольцевого проводника с током, о котором мы говорили выше, так и с помощью специальных винтовых обмоток [10].

Нетрудно убедиться, что в ряде случаев, например в гофрированном поле, все-таки имеются небольшие группы частиц, которые

ось не обходят (см. п. 5 § 3). Однако, как мы увидим на конкретных примерах, эти частицы по-прежнему остаются в конечном объеме, если  $R \rightarrow \infty$ , хотя их удаление от оси при конечном  $R$  больше, чем смещение частиц, вращающихся вокруг оси.

### 3. Примеры абсолютных ловушек

Рассмотрим движение частиц в двух конкретных случаях.

**а. Движение в поле кольца с током.** Выше мы показали, что поле, изображенное на рис. 29, является абсолютной ловушкой в рамках ньютоновых уравнений движения. Однако расчет траектории частиц в такой ловушке на основе точных уравнений можно выполнить только численно. Если же движение рассматривать в дрейфовом приближении, то существует интеграл [см. формулу (3. 26)]

$$r \left( A_{\varphi} + \frac{mcv_{\parallel}}{eB} B_{\varphi} \right) = \text{const}, (7.11)$$

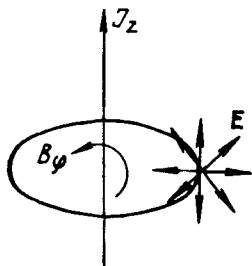


Рис. 35

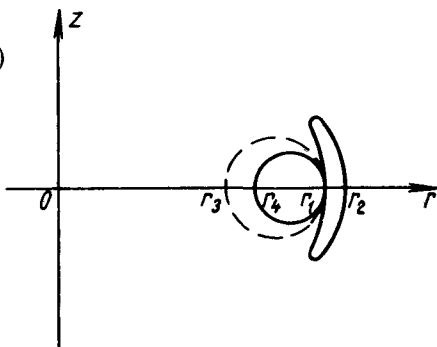


Рис. 36

который и описывает движение частицы в плоскости  $r, z$ . Если частица имеет большую поперечную скорость, то она колеблется снаружи кольца по серповидной (в рассматриваемой плоскости) траектории (рис. 36), причем по порядку величины ширина серпа

$$s = r_1 - r_2 = - \frac{2mcv_{\parallel}}{eB} \frac{\overline{B_{\varphi}}}{\overline{B_z}}, (7.12)$$

т. е. порядка  $r_{Lz}$  — ларморовского радиуса в поле  $B_z$ . Если же поперечная скорость частицы мала, то частица обходит кольцо с током, отклоняясь от первоначальной силовой линии на величину

$$s \sim \frac{mc}{e} \frac{\overline{B_{\varphi}}}{\overline{B_z}} \left( \frac{v_{\parallel}^1}{B_1} - \frac{v_{\parallel}^4}{B_4} \right), (7.13)$$

которая также порядка  $r_{Lz}$ . Здесь  $s = r_4 - r_3$ , где  $r_4$  — координата пересечения частицей плоскости  $z = 0$  после обхода витка, а  $r_3$  — координата пересечения с плоскостью  $z = 0$  силовой линии, вышедшей из точки с координатой  $r_1$ .

При написании формул (7. 12) и (7. 13) были использованы соотношения

$$(rA_{\varphi})_1 - (rA_{\varphi})_2 = r\overline{B_z}; \quad r_1B_{\varphi 1} - r_2B_{\varphi 2} = \overline{rB_{\varphi}}.$$

**б. Движение в тороидальном гофрированном магнитном поле.** В качестве второго примера ловушки, которая может считаться абсолютной при условии сохранения продольного инварианта, рассмотрим гофрированный тор.

Движение в прямом «тонком» ( $kr \ll 1$ ) гофрированном поле в дрейфовом приближении частично рассмотрено в § 3 и в приложении IV. Здесь мы остановимся на движении частицы в слабо гофрированном магнитном поле ( $\frac{b}{B_0} \ll 1$ ), свернутом в тор достаточно большого радиуса. Для определения движения мы будем исходить из продольного инварианта, считая его функцией изображающей точки той силовой линии, по которой вычисляется инвариант (рис. 37).

Уравнения (3.45) в координатах  $\varrho, \theta$  изображающей плоскости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{mc}{eB\varrho} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \varrho}, \\ \Delta\varrho &= -\frac{mc}{eB\varrho} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} (7.14)$$

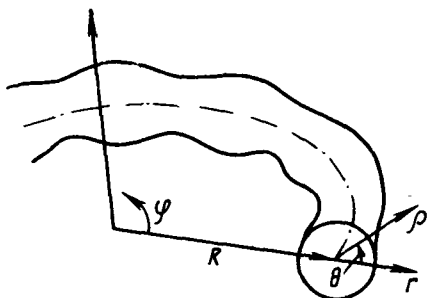


Рис. 37

Если исходное прямое поле является аксиально симметричным, то продольный инвариант будет зависеть только от  $\varrho$  и  $J_{\perp}$ . Если же мы согнем такое поле в тор достаточно большого радиуса, то

$$J_{\parallel} = J_{\parallel} \left( \varrho, \frac{x}{R}, J_{\perp} \right), \quad (7.15)$$

где  $x = r - R$ . Если  $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi}$ , где  $\xi = \frac{x}{R}$ , не обращается в нуль или бесконечность\*, то выражение (7.15) можно разложить по степеням  $\xi$  и ограничиться первым членом разложения

$$J_{\parallel}^{\circ}(\varrho, 0, J_{\perp}) + \frac{x}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} J_{\parallel}^{\circ}(\varrho, 0, J_{\perp}) = \text{const.} \quad (7.16)$$

Очевидно, здесь  $J_{\parallel}^{\circ}$  определяется только прямым полем ( $R \rightarrow \infty$ ) и уравнение  $J_{\parallel}^{\circ}(\varrho, 0, J_{\perp}) = \text{const}$  является уравнением концентрических окружностей.

Исследование уравнения (7.16) удобно провести отдельно для больших и малых  $\varrho$ . В окрестности  $\varrho = 0$  продольный инвариант

\* Случай  $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} = \infty$  для слабо гофрированного поля не реализуется. Случай  $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} \rightarrow 0$ , характерный для малой группы частиц, а также некоторые другие специфические случаи рассмотрены в работе [8].

$J_{\parallel}(\varrho)$  разлагается в ряд по четным степеням  $\varrho$  (поскольку  $|\mathbf{B}|$  и  $B_{\varphi}$  являются квадратичными относительно  $\varrho$ ) и уравнение (7. 16) записывается в виде

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \varrho^2} \varrho^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J_{\parallel}}{\partial (\varrho^2)^2} \varrho^4 + \dots + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} + \dots = \text{const.} \quad (7. 17)$$

Если  $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \varrho^2} \neq 0$ , т. е. частица непрерывно вращается вокруг оси [см. уравнения (7. 14)], то, пренебрегая высшими членами разложения, получаем уравнение

$$\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \varrho^2} \varrho^2 + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi} = \text{const}, \quad (7. 18)$$

определяющее окружность, центр которой смещен от оси  $\varrho = 0$  на расстояние

$$\Delta = -\frac{1}{2R} \frac{\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi}}{\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \varrho^2}}. \quad (7. 19)$$

Этот результат полностью совпадает с формальным примером предыдущего пункта. Случай  $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \varrho} = 0$ , который соответствует равному нулю дрейфу по азимуту, будем называть резонансным. При этом уравнение (7. 17) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^4 + \frac{x}{\lambda} = \text{const}, \quad (7. 20)$$

где

$$\lambda = \left(\frac{2}{R} \frac{\partial J_{\parallel}}{\partial \xi}\right)^{1/3} / \left(\frac{\partial^2 J_{\parallel}}{\partial (\varrho^2)^2}\right)^{1/3}.$$

Характерным размером, определяющим смещение траектории, является величина  $\lambda$ .

Рассмотрим теперь траектории, для которых  $\varrho$  много больше  $\Delta$  в нерезонансном случае или много больше  $\lambda$  в резонансном случае. При этом уравнение  $J_{\parallel} = \text{const}$  можно решать методом возмущений, подставляя вместо  $\varrho$  выражение  $\varrho_0 + \delta\varrho$  и разлагая его по степеням  $\delta\varrho$ . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\parallel}(\varrho_0)}{\partial \varrho} \delta\varrho + \frac{\partial^2 J_{\parallel}(\varrho_0)}{\partial \varrho^2} (\delta\varrho)^2 + \dots + \frac{x}{R} \frac{\partial J_{\parallel}(\varrho_0)}{\partial \xi} + \dots = \\ = \frac{x_0}{R} \frac{\partial J_{\parallel}(\varrho_0)}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (7. 21)$$

Здесь  $x_0$ ,  $\varrho_0$  — координаты силовой линии, на которой частица находилась в начальный момент. Если  $\frac{\partial J_{\parallel}(\varrho_0)}{\partial \varrho} \neq 0$ , то

смещение частицы при изгибании поля будет пропорционально  $\frac{1}{R}$ , тогда как при  $\frac{\partial J_{\parallel}}{\partial q} = 0$  и  $\frac{\partial^2 J_{\parallel}}{\partial q^2} \neq 0$  оно пропорционально  $\frac{1}{\sqrt{R}}$ . В первом случае траектории имеют вид смещенных окружностей, а во втором — вид «серпов», расположенных с одной стороны от прямой  $x = x_0$  (рис. 38). Таким образом, мы показали абсолютный характер ловушки в виде гофрированного тора.

Проиллюстрируем эти общие соотношения на конкретном примере. Пусть прямое гофрированное поле задается скалярным потенциалом  $\Phi_m = B_0 z - \frac{b}{a} I_0(ar) \sin az$ ;  $b = \text{const}$ ;  $a = \frac{2\pi}{L}$ ,  $L$  — период структуры поля. Скалярный потенциал такого поля, изогнутого по окружности радиуса  $R \gg L$ , при условии, что  $b \ll B_0$ , можно записать в виде

$$\Phi_m = B_0 s - \frac{b}{a} \sin as \cdot I_0(aq),$$

где  $s = R\varphi$ ;  $q^2 = x^2 + z^2$ ;  $x = r - R$ . Начало отсчета  $s$  выбрано так, что оно совпадает с минимумом поля. Будем считать, что  $\frac{q}{R} \ll \frac{b}{B_0}$ . Тогда уравнение силовых линий с точностью до первого порядка малой величины

$\frac{b}{B_0}$  можно найти с помощью векторного потенциала для прямого поля  $rA_{\varphi} = \text{const}$ . Таким образом, напряженность поля на силовой линии может быть вычислена с точностью до членов  $\sim \frac{b^2}{B_0^2}$  включительно.

Рассмотрим сначала движение запертых частиц. В этом случае вычисление  $J_{\parallel}$  достаточно провести с точностью до членов порядка  $b/B_0$ :

$$J_{\parallel} \left(1 + \frac{x}{R}\right) \int \sqrt{v^2 - J_{\perp} \left\{ B_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) - b I_0(aq) \cos as \right\}} ds = \\ = J_{\parallel}^0 \left( q, x, B_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) \right) \left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

Здесь  $q$  и  $x$  — координаты силовой линии в плоскости  $s = 0$ ;  $J_{\parallel}^0$  — продольный инвариант для прямого поля.  $J_{\parallel}^0$  выражается через полные эллиптические интегралы

$$J_{\parallel}^0 = 4 \sqrt{2I_0(aq) J_{\perp} b} \{ E(k) - (1 - k^2) K(k) \}, \quad (7.22)$$

зависящие от аргумента  $k^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2 - J_{\perp} B_0}{2J_{\perp} b I_0} \right)$ .

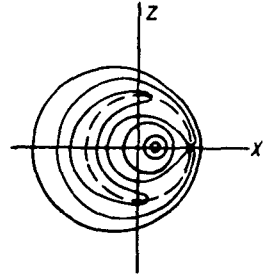


Рис. 38

Условие резонанса  $\frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial \varrho^2} = 0$  приводит к уравнению  $2E - K = 0$ , которое удовлетворяется при  $k_p^2 \simeq 0,83$ . Таким образом, зависимость  $\gamma = \gamma(\varrho)$  (где  $\cos \gamma = \frac{v_{\perp}}{v}$ ) дается соотношением  $\operatorname{ctg}^2 \gamma = \frac{1}{2k_p^2} \frac{1 - hI_0/B_0}{I_0} \simeq \frac{0,6}{I_0(\alpha\varrho_4)}$ . Уравнение движения частицы с принятой точностью имеет вид

$$J_{\parallel}^0(\varrho, \gamma) + \frac{x}{R} \left( J_{\parallel}^0 - \frac{\partial J_{\parallel}^0}{\partial B} B_0 \right) = \text{const.}$$

В окрестности оси оно может быть разложено в ряд по степеням  $\varrho^2$ :

$$4K_0 \frac{x}{R} + \frac{b}{B_0} \left\{ \left( E - \frac{1}{2} K_0 \right) \left( 2 + \frac{\alpha^2 \varrho^2}{8} \right) \alpha^2 \varrho^2 + \frac{E - (1 - k^2) K_0}{8k^2 (1 - k^2)} \alpha^4 \varrho^4 \right\} = \text{const.}, \quad (7.23)$$

где  $K_0 = K(\varrho = 0)$ . Отсюда следует, что при отсутствии резонанса смещение центра окружности, определенное выражением (7.19), равно  $\Delta = \frac{2B_0}{\alpha^2 b R} \frac{K_0}{2E - K_0}$ , а при резонансе движение происходит по кривой (7.20) с параметром  $\lambda = \frac{2}{\alpha} \times \left( \frac{B_0}{abR} \right)^{1/3}$ . Аналогично можно найти траектории вдали от оси, на чем мы не будем останавливаться.

Для исследования поведения прелетных частиц необходимо учитывать члены порядка  $b^2/B_0^2$ . Однако в общем виде вычисление  $J_{\parallel}$  с учетом квадратичных по  $b$  членов является достаточно громоздким, и поэтому мы ограничимся его вычислением при условии  $v^2 - J_{\perp} B_0 \gg J_{\perp} b$ , т. е. при  $\frac{b}{B_0} \operatorname{ctg}^2 \gamma \ll 1$ . При этом условии  $J_{\parallel}$  вычисляется с помощью разложения по указанным малым параметрам, и мы получаем следующую формулу для траектории вблизи оси, справедливую по крайней мере в области резонанса и для более быстро пролетающих частиц:

$$\left( 1 + \frac{p}{2} \right) \frac{x}{R} + \frac{b^2}{32B_0^2} \left\{ (p - p^2 + 2) \alpha^2 \varrho^2 + \frac{1}{16} (4p + 8 - 3p^2) \alpha^4 \varrho^4 \right\} = \text{const.}, \quad (7.24)$$

где  $p = \frac{J_{\perp} B_0}{v^2 - J_{\perp} B_0} = \operatorname{ctg}^2 \gamma$ . Резонансная область соответствует  $p = 2$ . Вне резонансной области траекторией является



окружность с центром, смещенным от оси на величину  $\Delta =$   

$$= \frac{8B_0^2}{\alpha^2 b^2 R} \frac{p+2}{p-p^2+2}.$$

В резонансном случае получается уравнение, совпадающее по форме с уравнением (7. 20), с  $\lambda = \frac{8}{\alpha} \left( \frac{B_0^2}{2\alpha R b^2} \right)^{1/3}$ . Отсюда следует, что пролетные частицы как вне резонансной области, так и при резонансе смещаются больше, чем запертые частицы.

В заключение в более общем виде остановимся на соотношении дрейфового приближения и метода продольного инварианта в применении к гофрированному полю. Для этого сравним точность дрейфовых уравнений и уравнений (7. 14). Если с помощью первых подсчитать смещение  $\Delta r$  за период продольных колебаний  $T$ , то это смещение будет отличаться от истинного на величину порядка  $vT \left( \frac{r_{\perp}}{L} \right)^2$ . В то же время расчет с помощью уравнений (7. 14) вносит ошибку  $\sim \frac{(vT)^2}{L} \left( \frac{r_{\perp}}{L} \right)^2$ . Вывод сохранения  $J_{\parallel}$ , который связан с переходом от конечноразностных уравнений (7. 14) к дифференциальным, вносит ошибку  $\sim \left( \frac{r_{\perp}}{L} \right)^2$ . Таким образом, отношение точностей дрейфовых уравнений и уравнений (7. 14) порядка  $\frac{vT}{L}$ . Как правило,  $\frac{vT}{L} \sim 1$ , и только для небольшой группы частиц, которые очень медленно проходят окрестность максимума поля на данной силовой линии,  $\frac{vT}{L} \gg 1$ . Большой период  $T$  набирается в основном в окрестности  $B_M$ , где можно положить  $B \simeq B_M (1 - l^2/L^2)$ .

Вычисляя  $T \sim \int \frac{dl}{v_{\parallel}}$ , получим  $T \sim \frac{L}{v} \ln \frac{v}{\Delta v}$ , и, следовательно, доля частиц с большим  $T$  экспоненциально мала:  $\frac{\Delta v}{v} \sim e^{-vT/L}$ , если функция распределения  $f(\mathbf{v})$  достаточно изотропна. Как показывает линейная теория, рассмотренная в приложении IV, из этого количества частиц возможен уход не всех, а лишь резонансных частиц, соответствующих углам прокручивания  $\Delta\Phi_T \simeq 2\pi m$ . Следует отметить, что так же, как уравнение  $J_{\perp} = \text{const}$  остается справедливым в течение большего интервала времени, чем дрейфовые уравнения, можно ожидать, что и продольный инвариант сохраняется дольше, чем уравнения Кадомцева (7. 14), из которых он получен.

Аналогично, используя инвариант (3. 50), можно рассмотреть движение частиц в винтовом поле и показать, что при определенных условиях тороидальное винтовое магнитное поле также является абсолютной ловушкой при сохранении продольного инварианта (3. 50).

**МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ**

Для получения приближенных уравнений движения заряженной частицы в сильном магнитном (дрейфовые уравнения) и в высокочастотном электромагнитном (высокочастотный потенциал) полях, для получения приближенных выражений магнитных поверхностей, а также во многих других задачах широко используется метод приближенного решения дифференциальных уравнений, получивший название метода усреднения. В наиболее законченной форме этот метод развит в работах Боголюбова \*. Мы приводим здесь для справок вывод некоторых основных формул усреднения систем дифференциальных уравнений.

**1. Система дифференциальных уравнений первого порядка**

Канонической для метода усреднения является система уравнений первого порядка

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_i, t, \theta); \quad \theta = \frac{t}{\epsilon}, \tag{I. 1}$$

где  $\epsilon$  — малый параметр, а  $f_k$  — периодические функции аргумента  $\theta$  с периодом  $2\pi$ , зависящие от  $n + 1$  переменных  $x_i$  и  $t$ . Малый параметр  $\epsilon$  характеризует здесь большую частоту колебаний правых частей уравнений (I. 1), и решение ищется на интервале изменения  $t$  — порядка единицы или больше. Уравнения (I. 1) можно записать и в другой форме, часто используемой в приложениях, а именно: если выбрать в качестве аргумента  $\tau = \frac{t}{\epsilon}$ , то получим систему

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \epsilon f_k(x_i, \epsilon\tau, \tau); \tag{I. 1a}$$

в которой малый параметр  $\epsilon$  характеризует малость правых частей уравнения. Наличие второго аргумента в  $f_k$  показывает, что кроме периодического изменения правые части могут также медленно изменяться по произвольному закону. Решение уравнений (I. 1), справедливое на интервале  $t \sim 1$ , соответствует решению уравнений (I. 1a) на интервале  $\tau \sim \frac{1}{\epsilon}$ .

Для решения уравнений (I. 1) мы будем искать такую замену переменных для  $x_k$ , чтобы новые усредненные переменные  $\xi_k$  мало отличались от  $x_k$  и удовлетворяли бы уравнениям, не содержащим быстропеременной фазы  $\theta$ :

$$x_k = \xi_k + \epsilon g_{1k}(\xi_i, t, \theta) + \epsilon^2 g_{2k}(\xi_i, t, \theta) + \dots; \tag{I. 2}$$

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \Phi_{0k}(\xi_i, t) + \epsilon \Phi_{1k}(\xi_i, t) + \epsilon^2 \Phi_{2k}(\xi_i, t) + \dots \tag{I. 3}$$

Уравнениями (I. 2) и (I. 3) вводятся новые неизвестные функции  $g_{ik}$  и  $\Phi_{ik}$ , и задача сводится к нахождению этих функций. Производя в уравнениях (I. 1) замену переменных и используя уравнения (I. 3), путем приравнивания членов при одинаковых степенях  $\epsilon$  получим следующую систему уравнений для определения  $g_{ik}$  и  $\Phi_{ik}$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{0k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \theta} &= f_k; & \Phi_{1k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \xi_i} \Phi_{0i} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial t} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} g_{1i}; \\ \Phi_{2k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \xi_i} \Phi_{1i} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \xi_i} \Phi_{0i} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial t} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} g_{2i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} g_{1i} g_{1j}; \\ & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \tag{I. 4}$$

\* См., например, работы [4, 18].

Здесь подразумевается суммирование по дважды встречающемуся индексу, а  $f_k = f_k(\xi_i, t, \theta)$ . Потребуем, чтобы функции  $g_{ik}$  были периодическими функциями аргумента  $\theta$  и введем некоторые обозначения. Для любой периодической функции  $f(\xi_i, t, \theta)$  мы можем написать

$$f = \bar{f} + \tilde{f}, \quad (I. 5)$$

где

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\theta. \quad (I. 6)$$

Здесь и далее интегрирование производится при фиксированных аргументах  $\xi_i$  и  $t$ ;  $\bar{f}$  — постоянная часть  $f$ ;  $\tilde{f}$  — переменная часть  $f$ . Кроме того, мы будем обозначать через  $\hat{f}$  переменную часть интеграла от переменной части  $f$ , т. е.

$$\hat{f} = \int_0^{\theta} \tilde{f} d\theta. \quad (I. 7)$$

Количество введенных функций  $g_{ik}$  и  $\Phi_{ik}$  в уравнениях (I. 4) таково, что для однозначного их определения необходимо ввести дополнительные требования. Наиболее естественным представляется требование обращения в нуль постоянных частей  $g_{ik}$ . При этом  $\xi_k$  являются средними значениями (по переменной  $\theta$ ), около которых колеблются истинные значения решений  $\bar{x}_k = \xi_k$ . Однако это условие, конечно, не является единственно возможным. В частности, если уравнения (I. 1) написаны в гамильтоновой форме, то можно выбрать  $g_{ik}$  так, чтобы и усредненные уравнения (I. 3) были гамильтоновскими [15].

Полагая  $\bar{g}_{ik} = 0$  и требуя, чтобы уравнения (I. 4) выполнялись тождественно, фиксируем  $\xi_i$  и  $t$  и приравняем в них порознь постоянные и переменные части. Приравнивание постоянных частей дает выражения для  $\Phi_{ik}$ , а интегрируя по  $\theta$  оставшиеся равенства, мы находим  $g_{ik}$ . Используя введенные обозначения, непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{0k} = \bar{f}_k; \quad g_{1k} = \hat{f}_k; \quad \Phi_{1k} = \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} g_{1i}}; \quad g_{2k} = \widehat{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} g_{1i}} - \frac{\partial \hat{g}_{1k}}{\partial \xi_i} \Phi_{0i} - \\ - \frac{\partial \hat{g}_{1k}}{\partial t}; \quad \Phi_{2k} = \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} g_{2i}} + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} g_{1i} g_{1j}} \dots \end{aligned} \quad (I. 8)$$

Для преобразования получающихся выражений полезно иметь в виду тождество

$$\overline{\widehat{ab}} = -\widehat{\overline{ab}}, \quad (I. 9)$$

вытекающее из равенства нулю среднего значения производной:  $\overline{\frac{\partial}{\partial \theta} (\widehat{ab})} = 0$ .

Из соотношений (I. 8) окончательно получаем усредненные уравнения для  $\xi_k$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} = \bar{f}_k + \varepsilon \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \hat{f}_i} + \varepsilon^2 \left\{ -\hat{f}_i \overline{\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j}} + \bar{f}_i \overline{\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j}} + \right. \\ \left. + \overline{\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial t} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i}} + \frac{1}{2} \overline{\hat{f}_i \hat{f}_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j}} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (I. 10)$$

и периодические поправки к решению

$$x_k = \xi_k + \varepsilon \hat{f}_k + \varepsilon^2 \left( \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \hat{f}_i} - \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial \xi_i} \bar{f}_i - \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial t} \right) + \dots \quad (I. 11)$$

Уравнения (I. 10) применимы на тем большем интервале изменения  $t$ , чем больше членов в них удержано. Выписанные в уравнении (I. 10) члены позволяют определить  $\xi_k$  с погрешностью  $\sim \varepsilon$  на интервале  $t \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$  или же с погрешностью  $\sim \varepsilon^2$  на интервале  $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$  и т. д. При этом, конечно, необходимо, чтобы функции  $f_k$ , а также их производные были конечными величинами. Фактическое написание уравнений (I. 10) существенно упрощается в том случае, когда  $f_k$  содержит только тригонометрические функции  $\theta$ . Тогда  $\widehat{\cos n\theta} = \frac{1}{n} \sin n\theta$ ,  $\widehat{\sin n\theta} = -\frac{1}{n} \cos n\theta$ , и усреднение производится особенно просто. Для многих задач оказывается достаточным использование формул (I. 10) и (I. 11) с отброшенными членами  $\sim \varepsilon^2$ , однако при усреднении, например, системы уравнений второго порядка (см. ниже) их необходимо учитывать.

## 2. Система дифференциальных уравнений второго порядка

При выводе усредненных уравнений для движения заряженной частицы в высокочастотном поле, а также для других задач необходимо усреднение системы уравнений второго порядка. Соответствующие формулы легко получить из выражения (I. 10). Действительно, рассмотрим систему

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = F_k \left( x_i, \frac{dx_i}{dt}, t, \omega t \right), \quad (\text{I. 12})$$

где  $F_k$  — периодические функции  $\theta = \omega t$ , а роль малого параметра  $\varepsilon$  играет величина  $\frac{1}{\omega}$ . Записывая уравнения (I. 12) в виде системы уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \dot{x}_k; \\ \frac{d\dot{x}_k}{dt} &= F_k(x_i, \dot{x}_i, t, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 13})$$

находим

$$\frac{d\dot{\xi}_k}{dt} = \dot{\xi}_k, \quad \left. \begin{aligned} \frac{d\dot{\xi}_k}{dt} &= \overline{F_k} + \frac{1}{\omega} \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} \widehat{F}_i} + \frac{1}{\omega^2} \left\{ -\overline{\frac{\partial \widehat{F}_k}{\partial \xi_i} \widehat{F}_i} - \overline{\frac{\partial \widehat{F}_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} \widehat{F}_j} + \right. \\ &+ \overline{\frac{\partial \widehat{F}_k}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \widehat{F}_i}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} \overline{F_j} \right)} + \overline{\frac{\partial \widehat{F}_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \widehat{F}_i}{\partial t}} + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 F_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \widehat{F}_i \widehat{F}_j} \left. \right\} + \\ &+ 0 \left( \frac{1}{\omega^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 14})$$

Таким образом, векторное уравнение движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t, \omega t), \quad (\text{I. 15})$$

в котором сила  $\mathbf{F}$  является периодической функцией  $\omega t$ , при большой частоте осцилляций  $\omega$  может быть заменена на приближенное уравнение, усредненное по последнему аргументу в  $\mathbf{F}$ , вида

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \overline{\mathbf{F}} - \frac{1}{\omega} \overline{(\mathbf{F}\nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}} - \frac{1}{\omega^2} \overline{(\hat{\mathbf{F}}\nabla)\hat{\mathbf{F}}} + \frac{1}{\omega^2} \left\{ -\overline{((\hat{\mathbf{F}}\nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}, \nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}} + \right. \\ \left. + \overline{\left( \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla \right) \hat{\mathbf{F}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial t}, \nabla_{\mathbf{v}} \right) \hat{\mathbf{F}}} + \overline{((\mathbf{F}\nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}, \nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}} + \frac{1}{2} \overline{(\hat{\mathbf{F}}, (\hat{\mathbf{F}}\nabla_{\mathbf{v}})\nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}} \right\}. \quad (I. 16)$$

Здесь  $\nabla$  и  $\nabla_{\mathbf{v}}$  означают градиенты по координатам  $\mathbf{r}$  и компонентам скорости  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Полученное уравнение существенно упрощается, если члены в  $\mathbf{F}$ , содержащие скорость, можно считать малыми\* порядка  $\frac{1}{\omega}$ . В этом случае с принятой точностью вместо уравнения (I. 16) получаем

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \overline{\mathbf{F}} - \frac{1}{\omega} \overline{(\mathbf{F}\nabla_{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{F}}} - \frac{1}{\omega^2} \overline{(\hat{\mathbf{F}}\nabla)\hat{\mathbf{F}}}. \quad (I. 17)$$

Полученное усредненное уравнение можно представить в форме

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \overline{\mathbf{F}} - \frac{1}{\omega^2} \left\{ \overline{\left( \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial t} \nabla_{\mathbf{v}} \right) \hat{\mathbf{F}}} + \overline{(\hat{\mathbf{F}}\nabla)\hat{\mathbf{F}}} \right\}, \quad (I. 18)$$

так как производная по аргументу  $t$  в  $\mathbf{F} \left( \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t, \omega t \right)$  дает вклад более высокого порядка малости, чем производная по  $\omega t$ .

С помощью формулы (I. 11) можно получить также и поправки к усредненному решению, однако мы на этом не останавливаемся. Если функция  $\mathbf{F}$  вовсе не содержит скорости  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , то второй член в правой части уравнения (I. 18) обращается в нуль, и мы приходим к уравнению, полученному П. Л. Капицей [19].

### 3. Система уравнений, содержащих быстро вращающуюся фазу

Для вывода дрейфовых уравнений движения заряженной частицы в сильном магнитном поле используется усреднение системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \theta); \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{e} \omega(\mathbf{x}, t) + A(\mathbf{x}, t, \theta). \quad (I. 19)$$

Вывод соответствующих усредненных уравнений аналогичен усреднению уравнений (I. 1). Замена переменных и искомые усредненные уравнения пишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \xi + \varepsilon \mathbf{g}_1(\xi, t, \alpha) + \varepsilon^2 \mathbf{g}_2(\xi, t, \alpha) + \dots; \\ \theta &= \alpha + \varepsilon q_1(\xi, t, \alpha) + \varepsilon^2 q_2(\xi, t, \alpha) + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (I. 20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varphi_0(\xi, t) + \varepsilon \varphi_1(\xi, t) + \dots; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{e} \omega(\xi, t) + \Omega_0(\xi, t) + \varepsilon \Omega_1(\xi, t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (I. 21)$$

\* Это справедливо, например, для движения нерелятивистской частицы, когда  $v/c \ll 1$ , где  $c$  — скорость света.

Поступая далее так же, как и при усреднении уравнений (I. 1), т. е. требуя, чтобы уравнения типа (I. 4) удовлетворялись тождественно и чтобы введенные функции  $g_i$  и  $q_i$  были периодическими функциями  $\alpha$ , не содержащими постоянных частей, получим с точностью до  $\varepsilon$  включительно

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{f} + \varepsilon \left\{ (\hat{f} \nabla) \frac{\bar{f}}{\omega} - \bar{A} \frac{\bar{f}}{\omega} \right\}. \quad (I. 22)$$

Здесь  $\nabla$  — градиент по всем координатам  $\xi_i$ . Решением уравнения (I. 22) является  $\xi$ , которое отличается от решения  $x$  исходной системы (I. 19) на величины порядка  $\varepsilon$

$$x = \xi + \frac{\varepsilon}{\omega} \hat{f} \quad (I. 23)$$

на интервале времени  $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ .

#### 4. Многопериодная система

Если частица движется в сильном магнитном поле и находится, кроме того, под воздействием переменного поля, частота изменения которого сравнима с частотой обращения частицы по лармеровской окружности, то для получения соответствующих приближенных уравнений движения необходимо усреднение системы вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_i, t, \theta_m); \quad \frac{d\theta_n}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \omega_n(x_i, t) + A_n(x_i, t, \theta_m) \quad (I. 24)$$

с периодическими (периода  $2\pi$ ) по всем аргументам  $\theta_m$  функциями  $f_k, A_n$ . Здесь  $i$  и  $k$  пробегает значения от 1 до  $N$ , где  $N$  — число неизвестных  $x_k$ , а  $m$  и  $n$  изменяются от 1 до  $M$ , где  $M$  — число периодов функций  $f_k, A_n$ .

Аналогично предыдущему ищем такую замену переменных

$$x_k = \xi_k + \varepsilon g_{1k}(\xi_i, t, \alpha_m) + \dots; \quad \theta_n = \alpha_n + \varepsilon q_{1n}(\xi_i, t, \alpha_m) + \dots, \quad (I. 25)$$

чтобы новые переменные удовлетворяли уравнениям, не содержащим фаз  $\theta_m$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} &= \Phi_{0k}(\xi_i, t) + \varepsilon \Phi_{1k}(\xi_i, t) + \dots; \\ \frac{d\alpha_n}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon} \omega_n(\xi_i, t) + \Omega_{0n}(\xi_i, t) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (I. 26)$$

Подставляя выражения (I. 25) и уравнения (I. 26) в уравнения (I. 24) и приравнявая члены одинакового порядка по  $\varepsilon$ , найдем уравнения, связывающие  $f_k(\xi_i, \alpha_m)$  и введенные функции:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{0k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \alpha_m} \omega_m &= f_k; \quad \Omega_{0n} + \frac{\partial q_{1n}}{\partial \alpha_m} \omega_m = A_n + \frac{\partial \omega_n}{\partial \xi_i} g_{1i}; \\ \Phi_{1k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \xi_i} \Phi_{0i} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \alpha_m} \Omega_{0m} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial t} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial t} \omega_m &= \\ &= \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} g_{1i} + \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_m} q_{1m}; \dots \end{aligned} \right\} \quad (I. 27)$$

Периодические функции  $f(\alpha_m)$  можно представить в виде суммы гармоник

$$f(\alpha_m) = \sum_{p, q, \dots} C_{p, q, \dots} \exp i(p\alpha_1 + q\alpha_2 + \dots) + C_{0, 0, \dots} \quad (I. 28)$$

Определим  $\bar{f}$  и  $\hat{f}$  как

$$\bar{f} = C_{0,0} \dots; \quad \hat{f} = \sum_{p, q, \dots} \frac{C_{p, q, \dots}}{i(p\omega_1 + q\omega_2 + \dots)} \times \exp i(p\alpha_1 + q\alpha_2 + \dots). \quad (I. 29)$$

Требую, чтобы  $g_k$  и  $q_n$  были периодическими функциями, не содержащими постоянных частей ( $\bar{g}_k = \bar{q}_n = 0$ ), и решая уравнения (I. 27), получим искомые усредненные уравнения

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \bar{f}_k + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \xi_i} \hat{f}_i + \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \alpha_m} \left( \hat{A}_m + \frac{\partial \omega_m}{\partial \xi_i} \hat{f}_i \right). \quad (I. 30)$$

Следует иметь в виду, что такого рода усреднения имеют смысл только в случае отсутствия резонанса, когда частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots$  не находятся в кратном отношении:  $p\omega_1 + q\omega_2 + \dots \neq 0$ .

В заключение заметим, что операция  $\wedge$  в применении к тригонометрическим функциям дает в рассматриваемом случае многопериодной системы

$$\overline{\cos(p\alpha_1 + q\alpha_2 + \dots)} = \frac{\sin(p\alpha_1 + q\alpha_2 + \dots)}{p\omega_1 + q\omega_2 + \dots};$$

$$\overline{\sin(p\alpha_1 + q\alpha_2 + \dots)} = -\frac{\cos(p\alpha_1 + q\alpha_2 + \dots)}{p\omega_1 + q\omega_2 + \dots}$$

и также справедливы формулы  $\overline{\widehat{ab}} = -\widehat{ab}$ .

## 5. Система уравнений с чисто периодическими правыми частями

В том случае, когда система уравнений

$$\frac{dy_k}{dt} = \varepsilon f_k(y_i, t) \quad (I. 31)$$

с малыми и периодическими по  $t$  правыми частями такова, что  $\bar{f}_k = 0$ , легко получить соответствующую усредненную систему с точностью до членов  $\sim \varepsilon^2$  включительно. Действительно, произведем замену переменных

$$y_k = x_k + \varepsilon \hat{f}_k(y_i, t). \quad (I. 32)$$

Тогда подстановка в уравнения (I. 31) дает

$$\frac{dx_k}{dt} = -\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial y_i} f_i \equiv -\varepsilon^2 F_k(y_i, t). \quad (I. 33)$$

Из уравнений (I. 32) методом последовательных приближений находим

$$y_k = x_k + \varepsilon \hat{f}_k(x_i, t) + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial x_i} (x_i, t) \hat{f}_i(x_i, t) + \dots \quad (I. 34)$$

Подставляя выражения (I. 34) в уравнения (I. 33), получим выражение для  $F_k(y_i, t)$  через  $x_i$  и  $t$ :

$$F_k(y_i, t) = F_k + \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \left( \varepsilon \hat{f}_i + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} \hat{f}_j \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_i \partial x_j} \hat{f}_i \hat{f}_j \equiv p_k(x_i, t). \quad (I. 35)$$

Таким образом, мы пришли к каноническим уравнениям типа (I—Ja)

$$\frac{dx_k}{dt} = -\varepsilon^2 p_k(x_i, t), \quad (I. 36)$$

правые части которых являются малыми величинами  $\sim \varepsilon^2$ . Применяя к ним формулу усреднения (I. 10)

$$\frac{d\xi_k}{dt} = -\varepsilon^2 \bar{p}_k + \varepsilon^4 \overline{\frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \hat{p}_i}, \quad (I. 37)$$

получаем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{dt} = & -\varepsilon^2 \bar{F}_k - \varepsilon^3 \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} \hat{f}_i} - \varepsilon^4 \left( \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \xi_j} \hat{f}_j} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 F_k}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \hat{f}_i \hat{f}_j} - \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \xi_i} F_i} \right), \end{aligned} \quad (I. 38)$$

где

$$f_k = f_k(\xi_i, t); \quad F_k = \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} f_i.$$

Усредненные переменные  $\xi_k$  связаны с  $x_k$  соотношением (I. 11)

$$x_k = \xi_k - \varepsilon^2 \hat{p}_k(\xi_i, t) + \dots, \quad (I. 39)$$

а их связь с  $y_k$  получается из выражений (I. 34) и (I. 39)

$$y_k = \xi_k + \hat{e} f_k - \varepsilon^2 \widehat{\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} f_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial \xi_i} \hat{f}_i + \dots \quad (I. 40)$$

Отметим, что при таком способе усреднения мы получаем поправки к  $y_k$ , среднее значение которых не равно нулю.

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### ВЫВОД ФОРМУЛЫ (3. 15). ДРЕЙФОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Подставляя выражения (3. 8) в уравнения (3. 7), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 \cos \theta + \mathbf{V}_2 \sin \theta \equiv \mathbf{f}_r; \\ \dot{v}_{\parallel} &= a^0 + a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta + a_3 \cos 2\theta + a_4 \sin 2\theta \equiv f_{\parallel}; \\ \dot{v}_{\perp} &= b^0 + b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + b_3 \cos 2\theta + b_4 \sin 2\theta \equiv f_{\perp}; \\ \dot{\theta} &= \omega + c^0 + c_2' \cos \theta - c_1' \sin \theta + c_4 \cos 2\theta - c_3 \sin 2\theta \equiv \omega + A. \end{aligned} \right\} \quad (II. 1)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $a_i = a \tau_i$  — для компонент произвольного вектора  $\mathbf{a}$ ;  $T_{ijk} = \tau_i (\tau_j \nabla) \tau_k$ ;  $\mathbf{T} = (\tau_0 \nabla) \tau_0 = -[\tau_0 \text{ rot } \tau_0] = \frac{\mathbf{n}}{R}$  — вектор кривизны силовой линии магнитного поля  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{n}$  — главная нормаль;  $R$  — радиус кривизны);

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= v_{\parallel} \tau_0; \quad \mathbf{V}_1 = v_{\perp} \tau_1; \quad \mathbf{V}_2 = v_{\perp} \tau_2; \\ a^0 &= \left(1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2}\right) F_0 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \text{div } \tau_0; \quad \mathbf{a} = -\frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{c^2} \mathbf{F} + v_{\parallel} v_{\perp} \mathbf{T} + v_{\perp} \frac{\partial \tau_0}{\partial t}; \\ a_3 &= \frac{v_{\perp}^2}{2} (T_{110} - T_{220}); \quad a_4 = \frac{v_{\perp}^2}{2} (T_{120} + T_{210}); \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned}
 b^0 &= -\frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{c^2} F_0 - \frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0; \quad \mathbf{b} = \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}\right) \mathbf{F} - v_{\parallel}^2 \mathbf{T} - v_{\parallel} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_0}{\partial t}; \\
 b_3 &= -\frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{2} (T_{110} - T_{220}); \quad b_4 = -\frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{2} (T_{120} + T_{210}); \\
 c^0 &= -\frac{v_{\parallel}}{2} (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0 + 2T_{201}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_1}{\partial t} \boldsymbol{\tau}_2 - \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_2}{\partial t} \boldsymbol{\tau}_1 \right); \\
 c'_1 &= \frac{c_1}{v_{\perp}} + v_{\perp} T_{221}; \quad c'_2 = \frac{c_2}{v_{\perp}} + v_{\perp} T_{112}; \\
 \mathbf{c} &= \mathbf{F} - v_{\parallel}^2 \mathbf{T} - v_{\parallel} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_0}{\partial t}; \quad c_3 = -\frac{v_{\parallel}}{2} (T_{110} - T_{220}); \\
 c_4 &= -\frac{v_{\parallel}}{2} (T_{120} + T_{210}).
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 2})$$

При написании этих выражений учтены следующие векторные тождества:

$$T_{ijk} + T_{kji} = 0; \quad T_{110} + T_{220} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0; \quad T_{210} - T_{120} = \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0. \quad (\text{II. 3})$$

Уравнения (II. 1) являются точными уравнениями движения релятивистской частицы, записанными в криволинейной системе координат с ортами  $\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ . Запишем более подробно соответствующие приближенные (усредненные) уравнения (3. 11), сохраняя прежние обозначения  $\mathbf{r}, v_{\parallel}, v_{\perp}$  для усредненных величин. Далее будут встречаться только усредненные переменные, и поэтому это не внесет путаницы. Усредненные уравнения записываются в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \overline{\mathbf{f}_r} + \overline{\hat{f}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\overline{\mathbf{f}_r}}{\omega} + \overline{\hat{f}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{\overline{\mathbf{f}_r}}{\omega} + \left( \overline{\hat{\mathbf{f}}_r \nabla} \right) \frac{\overline{\mathbf{f}_r}}{\omega} - \frac{\overline{\tilde{A}}}{\omega} \overline{\mathbf{f}_r}; \\
 \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \overline{\hat{f}_{\parallel}} + \overline{\hat{f}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\overline{\hat{f}_{\parallel}}}{\omega} + \overline{\hat{f}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{\overline{\hat{f}_{\parallel}}}{\omega} + \overline{\hat{\mathbf{f}}_r \nabla} \frac{\overline{\hat{f}_{\parallel}}}{\omega} - \frac{\overline{\tilde{A}}}{\omega} \overline{\hat{f}_{\parallel}}; \\
 \frac{dv_{\perp}}{dt} &= \overline{\hat{f}_{\perp}} + \overline{\hat{f}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\overline{\hat{f}_{\perp}}}{\omega} + \overline{\hat{f}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{\overline{\hat{f}_{\perp}}}{\omega} + \overline{\hat{\mathbf{f}}_r \nabla} \frac{\overline{\hat{f}_{\perp}}}{\omega} - \frac{\overline{\tilde{A}}}{\omega} \overline{\hat{f}_{\perp}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 4})$$

Здесь и далее  $\nabla$  означает обычный оператор трехмерного градиента, действующий на координаты точки  $\mathbf{r}$ . Подставляя сюда выражения (II. 1), получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} \left( a_1 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\mathbf{V}_2}{\omega} - a_2 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{\mathbf{V}_1}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left( b_1 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{\mathbf{V}_2}{\omega} - \right. \\
 &\left. - b_2 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{\mathbf{V}_1}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left( (\mathbf{V}_1 \nabla) \frac{\mathbf{V}_2}{\omega} - (\mathbf{V}_2 \nabla) \frac{\mathbf{V}_1}{\omega} \right) - \frac{1}{2\omega} (c'_2 \mathbf{V}_1 - c'_1 \mathbf{V}_2); \\
 \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= a^0 + \frac{1}{2} \left( a_1 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{a_2}{\omega} - a_2 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{a_1}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left( b_1 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{a_2}{\omega} - \right. \\
 &\left. - b_2 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{a_1}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{V}_1 \nabla \frac{a_2}{\omega} - \mathbf{V}_2 \nabla \frac{a_1}{\omega} \right) - \frac{1}{2\omega} (c'_2 a_1 - c'_1 a_2) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left( a_3 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{a_4}{\omega} - a_4 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{a_3}{\omega} \right) + \frac{1}{4} \left( b_3 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{a_4}{\omega} - \right. \\
 &\quad \left. - b_4 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{a_3}{\omega} \right) - \frac{1}{2\omega} (c_4 a_3 - c_3 a_4);
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 5})$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{\perp}}{dt} = & b^0 + \frac{1}{2} \left( a_1 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{b_2}{\omega} - a_2 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{b_1}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left( b_1 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{b_2}{\omega} - \right. \\
& \left. - b_2 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{b_1}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{V}_1 \nabla \frac{b_2}{\omega} - \mathbf{V}_2 \nabla \frac{b_1}{\omega} \right) - \frac{1}{2\omega} (c'_2 b_1 - c'_1 b_2) + \\
& + \frac{1}{4} \left( a_3 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{b_4}{\omega} - a_4 \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{b_3}{\omega} \right) + \frac{1}{4} \left( b_3 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{b_4}{\omega} - b_4 \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \frac{b_3}{\omega} \right) - \\
& - \frac{1}{2\omega} (c_4 b_3 - c_3 b_4). \tag{II. 5}
\end{aligned}$$

Учитывая конкретные выражения (II. 2) для входящих сюда величин, можно преобразовать уравнения (II. 5) так, чтобы в них входили только известные величины  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{F}$  и не содержались векторы  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$ :

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} = & \left( v_{\parallel} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0 \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} [\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{c}] - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega^2} [\boldsymbol{\tau}_0 \nabla \omega]; \\
\frac{dv_{\parallel}}{dt} = & a^0 + \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\omega} \left\{ \left[ \mathbf{a} \frac{\partial a}{\partial v_{\parallel}} \right] + \left[ \mathbf{b} \frac{\partial a}{\partial v_{\perp}} \right] + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v_{\perp}} [\mathbf{a} \mathbf{b}] + \right. \\
& \left. + \frac{v_{\perp}}{\omega} [\mathbf{a} \nabla \omega] + v_{\perp} (\operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0)) + \frac{1}{v_{\perp}} [\mathbf{c} \mathbf{a}] \right\}; \\
\frac{dv_{\perp}}{dt} = & b^0 + \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\omega} \left\{ \left[ \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v_{\parallel}} \right] + \left[ \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v_{\perp}} \right] - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial v_{\perp}} [\mathbf{a} \mathbf{b}] + \right. \\
& \left. + \frac{v_{\perp}}{\omega} [\mathbf{b} \nabla \omega] + v_{\perp} (\operatorname{rot} \mathbf{b} - \mathbf{b} (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0)) + \frac{1}{v_{\perp}} [\mathbf{c} \mathbf{b}] \right\}. \tag{II. 6}
\end{aligned} \right.$$

При выводе уравнений (II. 6) использованы векторные формулы

$$\left. \begin{aligned}
[\mathbf{a} \boldsymbol{\tau}_0] = & \boldsymbol{\tau}_1 a_2 - \boldsymbol{\tau}_2 a_1; \quad [\mathbf{a} \mathbf{b}] \boldsymbol{\tau}_0 = a_1 b_2 - a_2 b_1; \\
(\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_2 - (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_1 = & \boldsymbol{\tau}_1 T_{112} - \boldsymbol{\tau}_2 T_{221} - \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0); \\
(\boldsymbol{\tau}_1 \nabla a_2) - (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla a_1) = & a_1 T_{112} - a_2 T_{221} + \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{a} - a_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0), \tag{II. 7}
\end{aligned} \right.$$

справедливые для произвольных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Отметим, что коэффициенты при  $\cos 2\theta$  и  $\sin 2\theta$  полностью выпадают в первом приближении (II. 6), так что их можно было бы с самого начала не принимать во внимание. Учитывая сказанное относительно порядков величин  $\frac{\partial \boldsymbol{\tau}_0}{dt}$  и  $\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t}$  и подставляя в уравнения (II. 6) выражения (II. 2) для векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}}{dt} = & \left( v_{\parallel} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0 \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{F} - v_{\parallel}^2 \mathbf{T} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla \omega \right]; \\
\frac{dv_{\parallel}}{dt} = & a^0 + \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\omega} \left\{ 2 \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right) [\mathbf{F} \mathbf{T}] - \frac{v_{\perp}^2}{\omega} [\nabla \omega \mathbf{T}] + \frac{v_{\perp}^2}{\omega c^2} [\nabla \omega \mathbf{F}] + \right. \\
& \left. + v_{\perp}^2 \operatorname{rot} \mathbf{T} - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \operatorname{rot} \mathbf{F} - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0) \mathbf{F} \right\} v_{\parallel}; \tag{II. 8}
\end{aligned} \right.$$

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = b^0 + \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\omega} \left\{ -\frac{2v_{\parallel}^2}{c^2} [\mathbf{F}\mathbf{T}] + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega} [\nabla\omega\mathbf{T}] - \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) [\nabla\omega\mathbf{F}] - \right. \\ \left. - v_{\parallel}^2 \operatorname{rot} \mathbf{T} + \left( 1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) \operatorname{rot} \mathbf{F} - \left( 1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0) \mathbf{F} \right\} v_{\perp}. \quad (\text{II. 8})$$

Полученные уравнения существенно упрощаются, если ввести новые переменные [20] вместо  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ :

$$v'_{\parallel} = v_{\parallel} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0; \quad v'_{\perp} = v_{\perp} + \frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{2\omega} \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0. \quad (\text{II. 9})$$

Такая замена переменных диктуется тем, чтобы, во-первых,  $v'_{\parallel}$  описывала всю среднюю скорость вдоль магнитного поля и, во-вторых, чтобы не изменялась (в принятом приближении) полная скорость  $\bar{v}^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ . Производя в уравнениях (II. 8) замену переменных (II. 9) и опуская затем штрихи у новых переменных  $v'_{\parallel}$  и  $v'_{\perp}$ , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\omega} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathbf{F} - v_{\parallel}^2 \mathbf{T} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla\omega \right]; \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right) \mathbf{F} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \nabla\omega \right\} + \frac{\boldsymbol{\tau}_0 v_{\parallel}}{2\omega} \left\{ 2 \left( 1 - \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} \right) [\mathbf{F}\mathbf{T}] - \frac{v_{\perp}^2}{\omega} [\nabla\omega\mathbf{T}] + \frac{v_{\perp}^2}{\omega c^2} [\nabla\omega\mathbf{F}] - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \right\}; \\ \frac{dv_{\perp}}{dt} &= \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \left\{ -\frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{c^2} \mathbf{F} + \frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{2\omega} \nabla\omega \right\} + \frac{\boldsymbol{\tau}_0 v_{\perp}}{2\omega} \left\{ -\frac{v_{\parallel}^2}{c^2} [\mathbf{F}\mathbf{T}] + \frac{v_{\parallel}^2}{\omega} [\nabla\omega\mathbf{T}] - \frac{1}{\omega} \left( 1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) [\nabla\omega\mathbf{F}] + \left( 1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right) \operatorname{rot} \mathbf{F} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 10})$$

При выводе этих уравнений из уравнений (II. 8) использовано уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , что дает  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0 = -\frac{1}{\omega} (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla\omega)$ , а также векторное тождество

$$\boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{T} - (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0) \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0.$$

Уравнения (II. 10) в отличие от уравнений (II. 8) содержат в нужном приближении законы сохранения энергии и поперечного адиабатического инварианта  $J_{\perp}$  для усредненного движения. Вычисляя полные производные  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \nabla \right)$  от величин

$$\mathcal{E} = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}}}; \quad J_{\perp} = -\frac{emv_{\perp}^2}{m_0^2 \omega},$$

где  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  определяется уравнением (II. 10), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (mc^2) &= m \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega} \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{mv_{\perp}^2}{\omega} \right) &= \frac{mv_{\perp}^2}{\omega^2} \left( \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{F} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 11})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ III

#### ВЫВОД ФОРМУЛЫ (3. 37). ОБОБЩЕНИЕ ДРЕЙФОВОЙ ТЕОРИИ НА СЛУЧАЙ СИЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Область применимости обычной дрейфовой теории существенно ограничена требованием  $E \ll \frac{v}{c} B$ . Мы будем считать далее, что  $E_{\perp} \sim \frac{v}{c} B$ ;  $E_{\parallel} \ll \frac{v}{c} B$ ,

но  $\frac{v}{c} \ll 1$ . При этом скорость электрического дрейфа  $c \frac{E_{\perp}}{B}$  становится сравнимой со скоростью  $v$  частицы [21]. Вектор скорости частицы представим в виде

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{v}_F + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \theta); \quad \mathbf{v}_F \equiv \frac{1}{\omega} [\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{F}], \quad (\text{III. 1})$$

отличающемся от выражения (3. 6) наличием члена  $\mathbf{v}_F$ , описывающего электрический дрейф. Далее, поступая аналогично предыдущему, придем к формулам (II. 1), в которых

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{u}; \quad \mathbf{V}_1 = v_{\perp} \boldsymbol{\tau}_1; \quad \mathbf{V}_2 = v_{\perp} \boldsymbol{\tau}_2; \quad a^0 = F_0 + \mathbf{v}_F \boldsymbol{\tau}'_0 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0; \\ a_1 &= v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}'_{01} + v_F (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0); \quad a_2 = v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}'_{02} + \mathbf{v}_F (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_0); \\ a_3 &= \frac{v_{\perp}^2}{2} (T_{110} - T_{220}); \quad a_4 = \frac{v_{\perp}^2}{2} (T_{120} + T_{210}); \\ b^0 &= -\frac{v_{\perp}}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \mathbf{u} \}; \quad b_1 = -u'_1; \quad b_2 = -u'_2; \\ b_3 &= -\frac{v_{\perp}}{2} (u_{11} - u_{22}); \quad b_4 = -\frac{v_{\perp}}{2} (u_{12} + u_{21}); \\ c^0 &= \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}'_2 - \boldsymbol{\tau}_2 \boldsymbol{\tau}'_1 - \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \mathbf{u} \}; \quad c'_1 = -\frac{u'_1}{v_{\perp}} + v_{\perp} T_{221}; \\ c'_2 &= -\frac{u'_2}{v_{\perp}} + v_{\perp} T_{112}; \quad c_3 = -\frac{1}{2} (u_{11} - u_{22}); \quad c_4 = -\frac{1}{2} (u_{12} + u_{21}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 2})$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_i \equiv (\mathbf{a} \boldsymbol{\tau}_i); \quad \mathbf{u} \equiv v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{v}_F; \quad \mathbf{a}' \equiv \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{a}; \quad u_{ik} \equiv \boldsymbol{\tau}_i (\boldsymbol{\tau}_k \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{III. 3})$$

и использовано тождество  $u_{21} - u_{12} = \tau_0 \operatorname{rot} \mathbf{u}$ . В отличие от выражений (II. 2) в выражения (III. 2) величина  $\mathbf{F}$  входит только в виде  $\tau \mathbf{F}$  и в  $v_F$ . Обе эти величины при сделанных предположениях являются величинами  $\sim 1$ . Таким образом, в формулах (III. 2), так же как и раньше, все величины порядка единицы, кроме  $\omega$ , которая  $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ . Поэтому, применяя метод усреднения, приходим к уравнениям (II. 5). Подставляя в них выражения (III. 2), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u} + \frac{1}{\omega} (u'_2 \tau_1 - u'_1 \tau_2) + \frac{v_{\perp}^2}{2} \left\{ (\tau_1 \nabla) \frac{\tau_2}{\omega} - (\tau_2 \nabla) \frac{\tau_1}{\omega} \right\} - \\ &\quad - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} (\tau_1 T_{112} - \tau_2 T_{221}); \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= a^0 + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \left\{ (\tau'_{01} + v_F (\tau_1 \nabla) \tau_0) T_2 - (\tau'_{02} + v_F (\tau_2 \nabla) \tau_0) T_1 \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2\omega} \left\{ (\tau'_{02} + v_F (\tau_2 \nabla) \tau_0) u'_1 - (\tau'_{01} + v_F (\tau_1 \nabla) \tau_0) u'_2 \right\} + \\ &\quad + \frac{v_{\perp}^2}{2} \left\{ (\tau_1 \nabla) \frac{\tau'_{02} + v_F (\tau_2 \nabla) \tau_0}{\omega} - (\tau_2 \nabla) \frac{\tau'_{01} + v_F (\tau_1 \nabla) \tau_0}{\omega} \right\} - \\ &\quad - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \left\{ \left( T_{112} - \frac{u'_2}{v_{\perp}} \right) (\tau'_{01} + v_F (\tau_1 \nabla) \tau_0) - \left( T_{221} - \frac{u'_1}{v_{\perp}} \right) (\tau'_{02} + \right. \\ &\quad \left. + v_F (\tau_2 \nabla) \tau_0) \right\} - \frac{v_{\perp}^2}{4\omega} \left\{ (u_{11} - u_{22}) (T_{120} + T_{210}) - \right. \\ &\quad \left. - (u_{12} + u_{21}) (T_{110} - T_{220}) \right\}; \\ \frac{dv_{\perp}}{dt} &= b^0 - \frac{v_{\perp}}{2\omega} \left\{ (\tau'_{01} + v_F (\tau_1 \nabla) \tau_0) \frac{\partial u'_2}{\partial v_{\parallel}} - (\tau'_{02} + v_F (\tau_2 \nabla) \tau_0) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial u'_1}{\partial v_{\parallel}} \right\} - \frac{v_{\perp}}{2} \left\{ (\tau_1 \nabla) \frac{u'_2}{\omega} - (\tau_2 \nabla) \frac{u'_1}{\omega} \right\} + \frac{v_{\perp}}{2\omega} (u'_1 T_{112} - u'_2 T_{221}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 4})$$

Для приведения полученных выражений к виду, содержащему только известные векторные величины  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$ , используются векторные формулы (II. 7) и, кроме того, формулы

$$\left. \begin{aligned} b_2 \mathbf{a} (\tau_1 \nabla) \tau_0 - b_1 \mathbf{a} (\tau_2 \nabla) \tau_0 &= \{ (\mathbf{a} \nabla) \tau_0 - a_0 (\tau_0 \nabla) \tau_0 \} [b \tau_0] + \\ &\quad + (\mathbf{a} \mathbf{b} - a_0 b_0) (\tau_0 \operatorname{rot} \tau_0); \\ (\tau_1 \nabla) (\mathbf{a} (\tau_2 \nabla) \tau_0) - (\tau_2 \nabla) (\mathbf{a} (\tau_1 \nabla) \tau_0) - T_{112} \mathbf{a} (\tau_1 \nabla) \tau_0 + T_{221} \mathbf{a} (\tau_2 \nabla) \tau_0 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ (a_{11} - a_{22}) (T_{120} + T_{210}) - (a_{12} + a_{21}) (T_{110} - T_{220}) \} = \\ &\quad = - \frac{1}{2} (\tau_0 \operatorname{rot} \tau_0) (\operatorname{div} \mathbf{a} + 3\mathbf{a} \mathbf{F}) + \frac{1}{2} (\tau_0 \operatorname{rot} \mathbf{a}) \operatorname{div} \tau_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 5})$$

Последняя формула имеет место только в случае  $\tau_0 \mathbf{a} = 0$ . В результате получим:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} - \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} (\tau_0 \operatorname{rot} \tau_0) \tau_0 + \frac{1}{\omega} [\mathbf{u}' \tau_0] + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega^2} [\nabla \omega \tau_0];$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{\parallel}}{dt} = & a^0 + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} \{ \boldsymbol{\tau}_0 [\boldsymbol{\tau}'_0 \mathbf{T}] + (v_F \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 [\mathbf{T} \boldsymbol{\tau}_0] + (v_F \mathbf{T}) (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0) \} + \\
& + \frac{1}{\omega} \{ \boldsymbol{\tau}_0 [\boldsymbol{\tau}'_0 \mathbf{u}'] + (v_F \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 [\mathbf{u}' \boldsymbol{\tau}_0] + (v_F \mathbf{u}') (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0) \} + \\
& + \frac{v_{\perp}^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \frac{\boldsymbol{\tau}'_0}{\omega} + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega^2} \{ (v_F \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 [\nabla \omega \boldsymbol{\tau}_0] + (v_F \nabla \omega) (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0) \} - \\
& - \frac{v_{\perp}^2}{4\omega} \{ (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0) (\text{div } v_F + 3v_F \mathbf{T}) - (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } v_F) \text{div } \boldsymbol{\tau}_0 \}; \\
\frac{dv_{\perp}}{dt} = & b^0 + \frac{v_{\perp}}{2\omega} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial v_{\parallel}} \boldsymbol{\tau}'_0 \right] \boldsymbol{\tau}_0 - \frac{v_{\perp}}{2\omega} \left\{ (v_F \nabla) \boldsymbol{\tau}_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial v_{\parallel}} \boldsymbol{\tau}_0 \right] + \right. \\
& \left. + \left( v_F \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial v_{\parallel}} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0) \right\} - \frac{v_{\perp}}{2} \left\{ \boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \frac{\mathbf{u}'}{\omega} - \frac{1}{\omega} (\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{u}') (\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0) \right\}.
\end{aligned} \tag{III. 6}$$

В этих уравнениях величины  $\mathbf{u}$ ,  $a^0$  и  $b^0$  являются величинами порядка единицы, а остальные — порядка  $\varepsilon$ . Система уравнений (III. 6) написана с точностью до  $\varepsilon$  включительно, т. е. в том же приближении, что и обычные дрейфовые уравнения. Это приближение позволяет в принципе описывать движение частиц, совершающих большое число  $\sim \frac{1}{\varepsilon}$  пролетов через систему размером  $L \sim 1$ . Однако получающиеся уравнения оказываются довольно громоздкими, и их решение, по-видимому, может быть эффективным только в некоторых частных случаях. Например, небольшое упрощение получается в случае  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ , когда члены, содержащие  $\boldsymbol{\tau}_0 \text{rot } \boldsymbol{\tau}_0$ , обращаются в нуль.

Попытка упростить эти уравнения посредством замены двух последних уравнений законами сохранения энергии и адиабатического инварианта (аналогично обычной дрейфовой теории) встречает затруднение, что при вычислении работы  $m \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  приходится умножать первое уравнение (III. 6) на большую величину  $F \sim \omega \sim \frac{1}{\varepsilon}$  и, следовательно, появляется необходимость учиты-

вать следующие члены в разложении  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Корректным приближением, описывающим малое число пролетов через систему, являются уравнения (III. 6), в правых частях которых сохранены только члены  $\mathbf{u}$ ,  $a^0$  и  $b^0$ . Однако для написания закона сохранения энергии в этом приближении в силу сказанного выше необходимо учитывать в  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  члены порядка  $\varepsilon$ . Кроме того, единственная величина

$\mathbf{u} \sim 1$ , входящая в  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , содержит только  $v_{\parallel}$ . И если  $v_{\parallel}$  является малой величиной  $\sim \varepsilon$ , то с точностью до  $\varepsilon$  включительно можно оставить в выражениях

для  $\frac{dv_{\parallel}}{dt}$  и  $\frac{dv_{\perp}}{dt}$  только члены  $a^0$  и  $b^0$ . Таким образом, существуют задачи, в которых следует учитывать все выписанные в уравнениях (III. 6) члены в выражении для  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  и можно ограничиться только членами  $a^0$  и  $b^0$  в выражениях

для  $\frac{dv_{\parallel}}{dt}$  и  $\frac{dv_{\perp}}{dt}$ . В этом приближении, очевидно, можно опустить в первом

уравнении (III. 6) член  $-\frac{v_{\perp}^2}{2\omega} (\boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_0) \boldsymbol{\tau}_0$ , так как он исчезает в результате замены переменных (II. 9), не меняющей в нулевом приближении двух последних уравнений (III. 6). Полученная таким образом система имеет вид [21]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{u}'\boldsymbol{\tau}_0] + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega^2} [\nabla\omega\boldsymbol{\tau}_0]; \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \mathbf{F}\boldsymbol{\tau}_0 + v_F\boldsymbol{\tau}'_0 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0; \\ \frac{dv_{\perp}}{dt} &= -\frac{v_{\perp}}{2} \{ \operatorname{div} \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \mathbf{u} \}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 7})$$

Из уравнений (III. 7) вытекают законы сохранения энергии и адиабатического инварианта. Ограничимся случаем, когда  $\mathbf{F} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$  и никаких других сил неэлектромагнитного происхождения нет. Тогда  $v_F \equiv v_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ . Вычисляя производные в выражениях энергии усредненного движения и адиабатического инварианта с учетом уравнений Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , получаем

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 + v_E^2}{2} \right) - eE \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{mcv_{\perp}^2}{2B^4} (\mathbf{E}\mathbf{B}) (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}) = \\ &= \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega} \frac{\partial\omega}{\partial t} + 0 \left( \frac{1}{\omega} \right); \end{aligned} \quad (\text{III. 8})$$

$$\omega \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{\perp}^2}{\omega} \right) = \frac{cv_{\perp}^2}{B^4} (\mathbf{E}\mathbf{B}) (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0 \left( \frac{1}{\omega} \right).$$

Здесь члены, содержащие  $(\mathbf{E}\mathbf{B})$ , малы в силу сделанного предположения о малости  $E_{\parallel}$  по сравнению с  $B$ . Следовательно, окончательно систему (III. 7) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u} - \frac{mc}{eB^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{B} \right] - \frac{mcv_{\perp}^2}{2eB^3} [\nabla B, \mathbf{B}]; \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= e\mathbf{E} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t}; \quad \frac{dJ_{\perp}}{dt} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 9})$$

где  $\mathcal{E} = \frac{m}{2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 + v_E^2)$ ;  $J_{\perp} = \frac{v_{\perp}^2}{B}$ ;  $\mathbf{u} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \mathbf{v}_E$ ;  $\mathbf{v}_E = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]$ , причем в первом уравнении удержаны члены порядка  $1/B$ , а в остальных — только члены порядка единицы. Второй член в выражении для  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  можно интерпретировать как дрейф под действием силы инерции  $-m \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right\}$ . Остальные члены в уравнениях (III. 9) интерпретируются так же, как и в обычной дрейфовой теории.

**ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ТОРОИДАЛЬНОМ ГОФРИРОВАННОМ  
МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ДРЕЙФОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

При движении в магнитном поле, имеющем только азимутальную составляющую  $B_\varphi$ , частица дрейфует вдоль оси  $z$  системы (так называемый тороидальный дрейф). Действительно, так как  $B_\varphi \sim \frac{1}{r}$ , то член  $[B \nabla B]$  в уравнениях (3. 17) дает дрейф, направленный по  $z$ . Для того чтобы частица двигалась вблизи кольцевой оси, необходим какой-нибудь стабилизирующий механизм, компенсирующий тороидальный дрейф. Как было показано в § 7, для компенсации тороидального дрейфа достаточно заставить частицу прокручиваться вокруг кольцевой оси. Такое прокручивание частицы может быть вызвано двумя способами. Во-первых, созданием магнитного поля, силовые линии которого прокручивались бы вокруг кольцевой оси, и, во-вторых, приложением дополнительных полей, вызывающих дрейф частицы (электрический или магнитный) вокруг кольцевой оси. Простейший способ создания необходимого дрейфа заключается в применении «гофрированного» вдоль  $\varphi$  магнитного поля [9], на котором мы и остановимся более подробно.

Если кольцевая осевая магнитная силовая линия имеет радиус  $R$ , достаточно большой по сравнению с удалением частицы от этой силовой линии, то компоненты магнитного поля вблизи нее можно представить в виде [7] (см. рис. 37)

$$B_r = -\frac{b'(s)}{2} x; \quad B_z = -\frac{b'(s)}{2} z; \quad B_\varphi = b(s) \left(1 - \frac{x}{R}\right) - \frac{b''(s)}{4} (x^2 + z^2), \quad (IV. 1)$$

где  $s = R\varphi$ ;  $x = r - R$ ;  $b = b(s)$  — поле на осевой силовой линии  $r = R$ , а штрихи означают производные по  $s$ . В формулах (IV. 1) влияние тороидальности поля учтено только в основной компоненте  $B_\varphi$ . Уравнения дрейфовой теории (3. 17) для движения частицы в поле (IV. 1) дают

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon - \beta x - \gamma z; \\ \dot{x} &= \beta z - \gamma x; \\ \dot{s} &= \sqrt{v^2 - J_\perp b}, \end{aligned} \right\} \quad (IV. 2)$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{b^2}{R} \frac{mc(2v^2 - J_\perp b)}{2eb^3}; \quad \beta = \left(\frac{3b'^2}{4} - \frac{bb''}{2}\right) \frac{mc(2v^2 - J_\perp b)}{2eb^3}; \quad \gamma = \frac{b'}{2b} \dot{s}.$$

Полученные уравнения можно упростить, введя переменные  $\xi$  и  $\zeta$  согласно равенствам

$$\xi = \sqrt{b} x; \quad \zeta = \sqrt{b} z. \quad (IV. 3)$$

Тогда получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \sqrt{b} \varepsilon - \beta \xi; \\ \dot{\xi} &= \beta \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (IV. 3a)$$

Уравнения (IV. 3a) являются типичными при исследовании компенсации тороидального дрейфа (см. п. 2 § 7). При движении в прямом поле ( $R \rightarrow \infty$ ) член с  $\varepsilon$  исчезает, и мы получаем уравнения, описывающие движение вокруг оси с угловой частотой  $\beta$ . Наоборот, если  $\beta = 0$  (отсутствие прокручивания вокруг оси  $r = R$ ), то частица уходит вдоль оси  $z$ . Для гофрированного магнитного поля  $b(s)$  является периодической функцией  $s$ . Следует различать две группы



частиц: запертые частицы — колеблющиеся в пределах одной ячейки разрежения поля и пролетные — обходящие всю систему вдоль кольцевой оси. Для обеих групп частиц коэффициенты уравнения (IV. 3а) являются периодическими функциями времени. Если среднее значение  $\bar{\beta}$  не равно нулю, то, усредняя уравнения (IV. 3а), имеем

$$\dot{\xi} = \sqrt{\bar{b} \varepsilon} - \bar{\beta} \xi; \quad \dot{\xi} = \bar{\beta} \xi.$$

Отсюда, умножая первое уравнение на  $\dot{\xi}$ , а второе на  $\xi$ , вычитая и интегрируя получившееся соотношение, найдем

$$\xi^2 + \zeta^2 - \frac{2\sqrt{\bar{b} \varepsilon}}{\bar{\beta}} \xi = \text{const}, \quad (\text{IV. 4})$$

т. е. ларморовский центр движется по окружности, центр которой смещен относительно оси  $r = R$  на величину  $\Delta \xi = \frac{\sqrt{\bar{b} \varepsilon}}{\bar{\beta}}$ , обратно пропорциональную среднему прокручиванию. При  $\bar{\beta} = 0$  имеем резонансный случай. Как показывает нелинейная теория, рассмотренная в § 7, при  $\bar{\beta} = 0$  частица уходит от оси  $r = R$  дальше, чем нерезонансная частица, но также на конечное расстояние.

Уравнения (IV. 3) линейного по удалению от оси  $r = R$  приближения могут быть решены и точно. Введем комплексную функцию  $q = x + iz$ . Тогда отклонение от оси  $r = R$  будет равно  $|q|$ , а азимут вокруг этой оси  $\theta = \arg q$ . Обозначим через  $y$  величину  $\sqrt{\frac{b}{b_0}} q$  и через  $\gamma$  величину  $i e \sqrt{\frac{b_0}{b}}$ , где  $b_0 = b$  при  $t = 0$ . Уравнение для  $y$  будет

$$\dot{y} + i\beta(t)y = \gamma(t), \quad (\text{IV. 5})$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  — функции времени, определяемые уравнением (IV. 2). Будем искать

решение уравнения (IV. 5) в виде  $y = A(t) e^{-i \int_0^t \beta dt}$ . Используя периодичность коэффициентов уравнения (IV. 5), можно получить для  $A$  уравнение в конечных разностях

$$A_{n+1} - A_n = \Delta A_0 e^{i\beta_0 n T}, \quad (\text{IV. 6})$$

связывающее его значения в точках, отстоящих одна от другой на расстоянии,

равном периоду  $T$ . Здесь  $\beta_0 = \bar{\beta}$  и  $\Delta A_0 = \int_0^T b e^{i \int_0^t \beta dt} dt$  — величины, опреде-

ляемые интегралами только по периоду  $T$ . Решая уравнение (IV. 6), получим для  $y_n$  выражение

$$y_n = y_0 e^{-i\beta_0 n T} + \Delta A_0 e^{-i \frac{\beta_0 T}{2} (n+1)} \frac{\sin(\beta_0 n T / 2)}{\sin(\beta_0 T / 2)}. \quad (\text{IV. 7})$$

Из формулы (IV. 7) видно, что  $y_n$  является ограниченной величиной, за исключением резонансных случаев  $\beta_0 T = 2\pi m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , при которых  $|\delta y_n| = |\Delta A_0| n$ , т. е. неограниченно растет.

Из уравнений (IV. 3) следует, что  $\beta_0 T = \Delta\varphi_T$ , т. е. углу поворота частицы вокруг оси  $r = R$  за период  $T$ . Окончательно формулу для отклонения траектории ведущего центра от невозмущенной траектории можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} |\delta q| &= |\Delta A_0| \left| \frac{\sin(n\Delta\varphi_T/2)}{\sin(\Delta\varphi_T/2)} \right|; \quad \Delta\varphi_T = \oint \frac{\beta ds}{\sqrt{v^2 - J_{\perp} b}}; \\ \Delta A_0 &= \oint \sqrt{\frac{b_0}{b}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{v^2 - J_{\perp} b}} \exp\left(i \int_0^s \frac{\beta ds}{\sqrt{v^2 - J_{\perp} b}}\right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV. 8})$$

Угол дрейфа за период  $\Delta\varphi_T$ , входящий в выражение (IV. 8), в рассматриваемом приближении может быть взят тем же самым, что и для прямого поля. Поэтому представляет интерес рассмотрение азимутального дрейфа в прямом аксиально симметричном гофрированном поле. Угол прокручивания  $\Delta\varphi_T$  в прямом поле рассчитан в § 3

## П Р И Л О Ж Е Н И Е V

### ОБ ИНДУКЦИОННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

При исследовании движения заряженных частиц в ловушках, использующих переменное во времени электромагнитное поле, возникает вопрос об определении индукционного электрического поля. Мы ограничимся здесь рассмотрением электрического поля, появляющегося при квазистационарном изменении магнитного поля. В этом случае наличием свободных зарядов (как объемных, так и поверхностных) можно пренебречь, и, следовательно, скалярный потенциал электрического поля  $\Phi$  можно положить равным нулю. Уравнения квазистационарного приближения [3] для электрического поля

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{V. 1})$$

удовлетворяются, если мы положим  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  и потребуем равенства нулю дивергенции  $\mathbf{A}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{V. 2})$$

Таким образом, если известен векторный потенциал магнитного поля  $\mathbf{A}$ , то электрическое поле  $\mathbf{E}$  определяется через его производную по времени. При заданных токах  $\mathbf{A}$  выражается формулой

$$\mathbf{A} = \int \mathbf{j} \frac{dV}{R}. \quad (\text{V. 3})$$

При исследовании ловушечных свойств переменного поля представляет интерес определение поверхностей, на которых лежат силовые линии индукционного электрического поля. Если ввести вектор  $\mathbf{\Pi}$ , так что

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}, \quad (\text{V. 4})$$

и учесть, что, согласно уравнению (V. 2), силовые линии  $\mathbf{E}$  совпадают с линиями  $\mathbf{A}$  (с точностью до множителя зависящего от времени), то нетрудно видеть, что электрические поверхности для полей, обладающих симметрией, будут определяться через  $\mathbf{\Pi}$  так же, как магнитные поверхности через  $\mathbf{A}$  [10]. А именно, для трансляционной, аксиальной и винтовой симметрии имеем

$$\left. \begin{aligned} \Pi_z(x, y) = \text{const}; \quad r\Pi_\varphi(r, z) = \text{const}; \\ \Pi_z(r, \varphi - az) + ar\Pi_\varphi(r, \varphi - az) = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 5})$$

Например, если винтовое магнитное поле при постоянных токах задается скалярным потенциалом  $\mathbf{B} = \nabla\Phi_B$  вида

$$\Phi_B = B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_n(\alpha n r) \sin n\theta; \quad \theta \equiv \varphi - \alpha z, \quad (V. 6)$$

го соответствующий векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющий условию  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , имеет компоненты [10]

$$\left. \begin{aligned} A_r &= -\frac{1}{\alpha^2 r} \sum b_n I_n(\alpha n r) \sin n\theta; \\ A_\varphi &= B_0 \frac{r}{2} - \frac{1}{\alpha} \sum b_n I_n'(\alpha n r) \cos n\theta; \\ A_z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (V. 7)$$

и уравнение поверхностей, на которых лежат силовые линии магнитного поля, определяется выражением  $A_z + \alpha r A_\varphi = \alpha r A_\varphi = \text{const}$ . При квазистационарном изменении этого поля появляется электрическое поле  $\mathbf{E}$ , которое равно  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . Силовые линии вектора  $\mathbf{A}$  лежат на поверхности  $\Pi_z + \alpha r \Pi_\varphi = \text{const}$ . Нетрудно убедиться, что векторный потенциал (V. 7) можно представить в виде  $\text{rot } \Pi$ , где  $\Pi$  имеет только одну  $z$ -составляющую, равную

$$\Pi_z = -B_0 \frac{r^2}{4} + \frac{1}{\alpha^2} \sum \frac{b_n}{n} I_n(\alpha n r) \cos n\theta. \quad (V. 8)$$

Таким образом, уравнениями  $A$ -поверхностей будут уравнения  $\Pi_z(r, \theta) = \text{const}$ .

Так же, как это делалось в работе [10] в случае постоянного магнитного поля, индукционное электрическое поле при наличии симметрии задачи удобно описывать соответствующими функциями тока, совпадающими с выражениями (V. 5). Мы рассмотрим здесь в качестве примеров плоскую и аксиально симметричную задачи. Для плоской задачи из уравнения  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  следует, что можно ввести функцию  $\Psi$  так, что

$$E_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad E_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (V. 9)$$

Подставляя выражения (V. 9) в первое уравнение (V. 1), получим

$$\Delta \Psi = \frac{1}{c} \dot{B}, \quad (V. 10)$$

т. е.  $\Psi$  определяется уравнением Лапласа с правой частью. Граничным условием на поверхности проводников с током, создающих магнитное поле, является условие  $\Psi_\Sigma = \text{const}$ , так как электрическое поле не должно иметь нормальной компоненты [3].

В частности, для прямого соленоида эллиптического сечения  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  решением уравнения (V. 10), удовлетворяющим граничному условию, является

$$\Psi = \frac{\dot{B}}{2c} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (V. 11)$$

Отсюда следует, что электрические силовые линии будут эллипсами с пропорционально меняющимися полуосями (рис. 39).

В случае аксиально симметричной задачи из уравнения  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  следует возможность введения  $\Psi$  из условий

$$rE_z = \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad rE_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (\text{V. 12})$$

и подстановка условий (V. 12) в уравнение (V. 10) приводит к уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{R}{c} \dot{B}_{\Phi R}; \quad \dot{B}_{\Phi} \equiv \dot{B}_{\Phi R} \frac{R}{r}. \quad (\text{V. 13})$$

Рассмотрим задачу об определении индукционного электрического поля в соленоиде, свернутом в тор. Будем решать ее не путем задания сечения тора, а путем подбора этого сечения к заданному уравнению силовых линий  $\mathbf{E}$ .

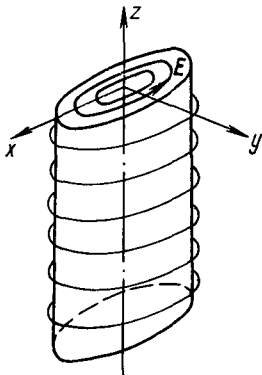


Рис. 39

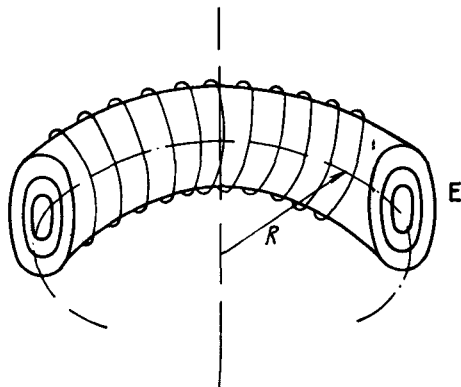


Рис. 40

Решение уравнения (V. 13) ищем в виде  $\Psi = A_0 z^2 + f(r)$ . Подставляя его в уравнение (V. 13) и налагая дополнительные условия  $E_z|_{z=0} = \Psi|_{z=0} = 0$ ,  $r=R$   $r=R$

где  $R$  — средний радиус тора, получим

$$\Psi = A_0 z^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{R \dot{B}_{\Phi R}}{c} - 2A_0 \right) \left( 2r^2 \ln \frac{r}{R} + R^2 - r^2 \right). \quad (\text{V. 14})$$

Для того чтобы при малых  $z$  и  $x = r - R$  силовые линии были эллипсами, расположенными в меридиональных плоскостях, следует положить  $A_0 =$

$= \frac{a^2}{2b^2} \left( \frac{R \dot{B}_{\Phi R}}{c} - 2A_0 \right)$ . При этом выражение (V. 14) переходит в

$$\Psi = \frac{R \dot{B}_{\Phi R}}{2c} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ \frac{z^2}{b^2} + \frac{1}{2a^2} \left( 2r^2 \ln \frac{r}{R} + R^2 - r^2 \right) \right\}, \quad (\text{V. 15})$$

и в окрестности  $r = R$  получаем

$$\Psi \simeq \frac{R \dot{B}_{\Phi R}}{2c} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \right). \quad (\text{V. 16})$$

Таким образом, электрические силовые линии лежат на поверхностях тороидов эллиптического сечения. Такое поле может быть создано тороидальным соленоидом, сечение которого определяется уравнением  $\Psi = \text{const}$  и в обмотках которого течет переменный ток (рис. 40).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балебанов В., Гласко В., Кузнецов В., Свешников А., Семашко Н., Тихонов А. Доклад, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям. Зальцбург, сентябрь, 1961.
  2. Арнольд В. «Докл. АН СССР», **142**, 4 (1962).
  3. Ландау Л. и Лифшиц Е. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
  4. Боголюбов Н. и Митропольский Ю. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1958.
  5. Сивухин Д. В кн. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
  6. Морозов А. и Соловьев Л. «Докл. АН СССР», **128**, № 3, 506 (1959).
  7. Соловьев Л. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958.
  8. Морозов А. и Соловьев Л. «Ж. техн. физ.», **30**, 271 (1960).
  9. Кадомцев Б. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958.
  10. Морозов А. и Соловьев Л. Геометрия магнитного поля (см. настоящий выпуск).
  11. Гапонов А. и Миллер М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, вып. 1, 242 (1958).
  12. Пятаевский Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 11 (1960).
  13. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М., ОНТИ, 1935.
  14. Курош А. Курс высшей алгебры. М., Гостехиздат, 1949.
  15. Бурштейн Э. и Соловьев Л. «Докл. АН СССР», **109**, № 4, 721 (1956).
  16. Аскарьян Г. Диссертация. Москва, 1961.
  17. Казанцев А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **37**, вып. 5 (11), (1959).
  18. Волосов В. «Успехи матем. наук», **17**, вып. 6 (108) (1962).
  19. Ландау Л., Лифшиц Е. Механика. М., Физматгиз, 1961.
  20. Брагинский С. «Укр. матем. журн.», **8**, 119 (1956).
  21. Рудаков Л., Сагдеев Р. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958.
  22. Веденов А., Рудаков Л. Там же, т. IV.
  23. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
  24. Арцимович Л. Управляемые термоядерные реакции. М., Изд-во АН СССР, 1961.
  25. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
  26. Бурштейн Э. и Соловьев Л. «Докл. АН СССР», **139**, № 4, 855 (1961).
  27. Крускал М. Адиабатические инварианты. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
  28. Крускал М. Доклад, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям. Зальцбург, сентябрь, 1961.
  29. Northrop G., Teller E. Phys. Rev., **117**, 215 (1960).
  30. Hellwig G. Z. Naturforsch., **10a**, 508 (1955).
  31. Kulsgud R. Phys. Rev., **106**, 205 (1957).
-

## СОДЕРЖАНИЕ

Геометрия магнитного поля. <i>А. И. Морозов, Л. С. Соловьев</i> . . . . .	3
§ 1. Общие замечания . . . . .	3
§ 2. Основные понятия . . . . .	7
1. Уравнения квазистационарного магнитного поля . . . . .	7
2. Силовые линии и магнитные трубки . . . . .	9
3. Удельный объем магнитной трубки . . . . .	11
4. Тороидальные магнитные поля . . . . .	13
5. Тороидальные магнитные поверхности . . . . .	15
6. Обратные задачи по геометрии поля . . . . .	18
§ 3. Уравнения магнитных поверхностей . . . . .	19
1. Симметричные поля . . . . .	19
2. Усредненные магнитные поверхности . . . . .	20
3. Магнитные поверхности вблизи замкнутой силовой линии . . . . .	26
§ 4. Поля с замкнутыми силовыми линиями . . . . .	29
1. Поле кольца с током . . . . .	29
2. Поле двух колец с током . . . . .	32
3. Прямые гофрированные поля . . . . .	33
§ 5. Прямое поле с винтовой симметрией . . . . .	38
1. Магнитные поверхности винтового поля . . . . .	38
2. Усредненные магнитные поверхности и силовые линии . . . . .	45
3. Точное выражение для угла прокручивания . . . . .	48
§ 6. Устойчивость магнитного поля . . . . .	52
1. Определение устойчивости поля . . . . .	52
2. Устойчивость прямого поля в адиабатическом приближении . . . . .	54
3. Усредненные магнитные поверхности слабо неперiodического магнитного поля . . . . .	58
4. Устойчивость магнитного поля токового шнура . . . . .	59
5. О типичной структуре несимметричного тороидального магнитного поля . . . . .	62
§ 7. Изгибание магнитного поля . . . . .	70
1. Изгибание магнитного поля в тор . . . . .	70
2. Магнитные поверхности тороидальных полей . . . . .	73
3. Магнитные поля с осью двоякой кривизны . . . . .	74
§ 8. Поле вблизи данной магнитной поверхности . . . . .	77
1. Постановка задачи . . . . .	77
2. Поле вблизи симметричных магнитных поверхностей . . . . .	79
3. Магнитные поверхности вблизи несимметричной магнитной поверхности . . . . .	81
§ 9. Магнитное поле в окрестности особых точек и линий . . . . .	83
1. Регулярные особые точки . . . . .	84
2. Нерегулярные особые точки . . . . .	85
<i>Приложение. Уравнения для симметричных магнитных поверхностей в произвольной криволинейной системе координат</i> . . . . .	89
<i>Литература</i> . . . . .	90

<b>Равновесие плазмы в магнитном поле. В. Д. Шафранов . . . . .</b>	<b>92</b>
§ 1. Общие замечания . . . . .	92
§ 2. Теорема вириала . . . . .	95
§ 3. Некоторые свойства равновесных конфигураций . . . . .	96
§ 4. Другая форма уравнения равновесия . . . . .	102
§ 5. Вариационный принцип . . . . .	105
§ 6. Равновесие в некоторых конкретных системах . . . . .	111
§ 7. Гидродинамическая аналогия равновесных конфигураций . . . . .	121
§ 8. Диффузия и дрейфы в равновесной конфигурации . . . . .	122
§ 9. О равновесии плазмы с неизотропным давлением . . . . .	128
<i>Литература</i> . . . . .	130
<b>Гидромагнитная устойчивость плазмы. Б. Б. Кадомцев . . . . .</b>	<b>132</b>
Введение . . . . .	132
§ 1. Уравнение малых колебаний . . . . .	134
§ 2. Энергетический принцип . . . . .	137
§ 3. Устойчивость границы плазма — магнитное поле . . . . .	140
§ 4. Пинч без продольного поля . . . . .	143
§ 5. Конвективная неустойчивость плазмы низкого давления . . . . .	146
§ 6. Стабилизирующее действие проводящих торцов . . . . .	150
§ 7. Скинированный пинч с продольным полем . . . . .	152
§ 8. Пинч с распределенным током . . . . .	156
§ 9. Винтовая неустойчивость . . . . .	165
§ 10. Устойчивость тороидальных систем . . . . .	167
§ 11. Токово-конвективная неустойчивость . . . . .	170
§ 12. Перегревная неустойчивость . . . . .	173
<i>Литература</i> . . . . .	175
<b>Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев . . . . .</b>	<b>177</b>
Введение . . . . .	177
§ 1. Уравнения движения и их интегралы . . . . .	178
1. Уравнения движения . . . . .	178
2. Интегралы уравнений движения . . . . .	179
3. Исключение циклических координат . . . . .	181
4. Оценка области движения частицы в электромагнитном поле . . . . .	183
5. Условия абсолютного удержания частицы в адиабатической ловушке . . . . .	185
§ 2. Движение заряженной частицы в постоянных однородных полях . . . . .	188
§ 3. Движение частиц в дрейфовом приближении . . . . .	194
1. Постановка задачи . . . . .	194
2. Вывод дрейфовых уравнений . . . . .	195
3. Интерпретация дрейфовых уравнений . . . . .	199
4. Интегралы дрейфовых уравнений . . . . .	200
5. Движение частиц в адиабатической ловушке . . . . .	203
6. Дрейфовая теория в случае сильного электрического поля . . . . .	207
7. Продольный адиабатический инвариант . . . . .	208
8. Влияние излучения . . . . .	211
§ 4. Движение заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле . . . . .	214
1. Высокочастотный потенциал . . . . .	214
2. Движение частиц в ловушке с переменным полем . . . . .	215
§ 5. Усреднение уравнений движения по пространственному периоду поля . . . . .	219
1. Движение частиц в знакопеременном электростатическом поле . . . . .	219
2. Движение частиц в знакопеременном магнитостатическом поле . . . . .	220
3. Движение частиц в аксиально симметричном гофрированном магнитном поле . . . . .	220

4. Движение магнитного диполя в неоднородном магнитном поле	220
§ 6. Движение частиц во вращающемся электромагнитном поле	223
1. Общие соотношения	223
2. Случай однородного вращающегося поля	224
3. Движение частиц при наличии постоянного аксиально симметричного поля	226
§ 7. Движение частиц в тороидальных магнитостатических полях	230
1. Понятие об абсолютной ловушке	230
2. Тороидальный дрейф	233
3. Примеры абсолютных ловушек	236
<i>Приложение I. Метод усреднения</i>	242
<i>Приложение II. Вывод формулы (3. 15). Дрейфовые уравнения</i>	248
<i>Приложение III. Вывод формулы (3. 37). Обобщение дрейфовой теории на случай сильного электрического поля</i>	252
<i>Приложение IV. Движение частиц в тороидальном гофрированном магнитном поле в дрейфовом приближении</i>	256
<i>Приложение V. Об индукционном электрическом поле</i>	258
<i>Литература</i>	261

**ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ**  
**В Ы П У С К 2**

Редактор *Л. П. Бутусов*

Переплет художника *Л. П. Балаш*

Техн. ред. *Е. И. Мазель*

Корректор *Ю. К. Мисеева*

Сдано в набор 17/V 1963 г. Подписано в печ. 26/V III 1963 г. Бумага 60×90<sup>1/8</sup>.  
 Физич. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 16,84. Заказ изд. 1079. Тираж 6700 экз.  
 Т-09735. Цена 94 к. Заказ № 1446.  
 Госатомиздат, Москва, Центр, ул. Кирова, 18



ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
32	Рис. 20, а, б (размер)	$l, a$	$2l, 2a$
32	Рис. 20, б		В правом кольце изменить направление тока на обратное
51	Формула (5. 55)	$1 + 2a\Sigma$	$1 - 2\Sigma$
51	Формула (5. 56)	$1 + 2a\Sigma$	$1 + 2\Sigma$
52	4 сверху	$z + 2a\Sigma$	$z + 2a\Sigma$
80	7 сверху	$h_s = 1 + \frac{\omega}{r}$	$h_s = 1 + \frac{\omega}{R}$
85	14 сверху	силовые линии	осевые линии
110	Формула (5. 40)	$R^{\infty}$	$F_R =$
113	Формула (6. 5)	$e_r e S =$	$e_r dS =$
139	Формула (2. 7)	$-\frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_{0e}}{\partial n}$	$-\frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_{0e}^2}{\partial n}$
164	Формула (8. 17)	$+\frac{B_{\varphi s}}{B_z^2}$	$+\frac{B_{\varphi s}^2}{B_z^2}$
185	Формула (1. 32)	$\frac{p_{\varphi}}{e}$	$\frac{p_{\varphi}}{r}$
187	1 снизу	$\sqrt{1+}$	$\sqrt{1-}$
191	8 снизу	$\tau_0 a$	$\tau_0, a$
201	10 сверху	$\sqrt{1+}$	$\sqrt{1-}$
224	Формула (6. 5)	$m = \frac{dv'}{dt}$	$m \frac{dv'}{dt} =$
239	7 снизу	$J_{\parallel}$	$J_{\parallel} =$
243	19 сверху	[15]	[26]
257	7 снизу	$b$	$\gamma(t)$

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ



**ГОСАТОМИЗДАТ · 1963**