

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

Под редакцией М. А. ЛЕОНТОВИЧА

ВЫПУСК 4



АТОМИЗДАТ
Москва 1964

В четвертом выпуске серии сборников «Вопросы теории плазмы» излагаются основы гидродинамического описания плазмы, дается теория гидромагнитных течений идеально проводящей жидкости, приводится обзор теории неустойчивости относительного движения частиц плазмы и обсуждаются другие вопросы.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров-физиков, аспирантов и студентов, специализирующихся по физике плазмы.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Т. Ф. Волков

1. Строгое описание поведения плазмы должно проводиться с помощью кинетических уравнений для электронов и ионов. Этот способ, однако, весьма сложен и во многих практически важных случаях не нужен. Как доказывается теорией [1], система кинетических уравнений может быть заменена более простой системой так называемых уравнений переноса для локальных макроскопических величин, определяющих поведение электронов и ионов, если выполнены два основных условия:

1) за характерное время процесса происходит много столкновений;

2) путь, проходимый частицей между двумя столкновениями, значительно меньше расстояния, на котором существенно меняются макроскопические величины.

Часто эти условия не выполняются. Так, для типичной «термоядерной» плазмы нарушается, например, второе условие. Тогда приближенное описание поведения плазмы можно получить, если в кинетических уравнениях пренебречь вообще столкновительными членами, т. е. исходить из уравнений вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

(фактически должны рассматриваться два уравнения для электронов и ионов совместно с уравнениями Максвелла). Уравнения гидродинамики, однако, проще и позволяют нагляднее истолковывать полученные решения. Ниже будет показано, что гидродинамическое описание плазмы без столкновений в ряде случаев может быть применено по крайней мере как эвристическое средство для получения качественно правильных результатов.

Попытаемся получить уравнения гидродинамики из кинетического уравнения (1) обычным способом, беря моменты от функции распределения f . Для этого удобно выделить среднюю скорость $\mathbf{V} = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}$, перейдя к новой переменной $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$.

Дальнейшие вычисления удобно производить в координатной форме. Переход к новым переменным в пространстве скоростей сводится к замене

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial V_k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial w_k}, \quad \frac{\partial}{\partial v_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial w_j}.$$

Используя также обозначения

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad F_j = \frac{e}{m} \left(E_j + \varepsilon_{jkl} \frac{V_k}{c} B_l \right).$$

(ε_{jkl} — совершенно антисимметричный тензор третьего ранга), кинетическое уравнение приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + \omega_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \left(F_k - \frac{dV_k}{dt} \right) \frac{\partial f}{\partial w_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \omega_j \frac{\partial f}{\partial w_k} + \\ + \varepsilon_{jkl} \frac{\omega_k}{c} B_l \frac{\partial f}{\partial w_j} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Умножив это уравнение на 1 и ω_i и проинтегрировав по \mathbf{w} , получим уравнение непрерывности и уравнение движения

$$\frac{dn}{dt} + n \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dV_i}{dt} = - \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad (4)$$

или в векторной форме

$$\frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \mathbf{V} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}] \right).$$

Здесь $n = \int f d\mathbf{w}$; \mathbf{P} — тензор давления с компонентами $p_{ij} = m \int \omega_i \omega_j f d\mathbf{w}$. Чтобы выразить величины p_{ij} через гидродинамические переменные (плотность, скорость), можно попытаться получить уравнение для вторых моментов функции распределения. Умножая уравнение (2) на $\omega_m \omega_n$ и интегрируя по скоростям, находим

$$\begin{aligned} \frac{dp_{mn}}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} p_{mni} + p_{mn} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \frac{\partial V_m}{\partial x_j} p_{nj} + \frac{\partial V_n}{\partial x_j} p_{mj} - \\ - \varepsilon_{mkl} p_{nk} B_l - \varepsilon_{nkl} p_{mk} B_l. \end{aligned} \quad (5)$$

Это уравнение может интерпретироваться как уравнение состояния. Замкнутой системы уравнений мы все же не получили, ибо в уравнение (5) вошли третьи моменты $p_{mni} = \int \omega_m \omega_n \omega_j f d\mathbf{w}$, а в уравнение для третьих моментов войдут четвертые и т. д. Для получения замкнутой системы уравнений необходимо знать функцию распределения f , которая в этой схеме остается неопределен-

ной. Заметим здесь, что в противоположном случае, когда столкновения частиц играют определяющую роль, функция распределения находится однозначно [2]. Чтобы избавиться от третьих моментов, обычно вводят предположения относительно симметрии функции распределения. При достаточно изотропной функции распределения (например, распределение скоростей, близкое к максвелловскому) третьи моменты могут оказаться малыми или даже точно равными нулю. Малыми являются также недиагональные компоненты тензора p_{ij} , т. е.

$$p_{ij} = p\delta_{ij}. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (5), получаем уравнение состояния

$$\frac{dp}{dt} + \frac{5}{3} p \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (7)$$

Выражая $\operatorname{div} \mathbf{V}$ из уравнения непрерывности, находим

$$\frac{d}{dt} \frac{p}{n^{5/3}} = 0, \quad (8)$$

т. е. имеет место обычный адиабатический закон с $\gamma = \frac{5}{3}$.

Иногда в распределении частиц имеется резко выраженная анизотропия, например при наличии сильного магнитного поля (см. ниже). Поскольку в плазме с редкими столкновениями обмен энергиями между степенями свободы не происходит, то давление вдоль магнитного поля может отличаться от давления в перпендикулярном направлении ($p_{\parallel} \neq p_{\perp}$). В системе декартовых координат, одна из осей которой направлена вдоль магнитного поля, тензор давлений имеет диагональный вид

$$(p_{mn}) = \begin{pmatrix} p_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\perp} \end{pmatrix}.$$

В произвольной системе координат его компоненты будут $p_{mn} = p_{\parallel} \tau_m \tau_n + p_{\perp} (\delta_{mn} - \tau_m \tau_n)$, где τ_i — компоненты единичного вектора, направленного вдоль магнитного поля. Подставляя p_{mn} в уравнение (5), получаем для p_{\parallel} и p_{\perp} различные уравнения состояния (считая третьи моменты малыми)

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} + p_{\parallel} \operatorname{div} \mathbf{V} + 2p_{\parallel} \tau (\tau \nabla) \mathbf{V} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} + 2p_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{V} - p_{\perp} \tau (\tau \nabla) \mathbf{V} = 0. \quad (10)$$

Интерпретация этих уравнений будет дана ниже.

2. Полученные гидродинамические уравнения имеют формальный смысл, ибо нигде в выводе их не содержится доказательства, что плазму без столкновений можно рассматривать как сплошную

среду. Во всей полноте такое утверждение просто не верно. Так, тензор давления, например, который фигурирует в гидродинамических уравнениях (4) и (5), есть конвективный перенос импульса частицами, а не сила воздействия одной части плазмы на другую. Аналогично скорость V есть средняя скорость 1 см^3 ансамбля невзаимодействующих частиц, а не скорость элементарного объема вещества в обычной гидродинамике. Применение системы гидродинамических уравнений (3)—(5) к нейтральному газу без столкновений смысла не имеет. Для плазмы это не бессмысленно, ибо в плазменных процессах существенную роль играют *самосогласованные поля*, которые заменяют столкновения, связывая частицы, затрудняя разлет отдельных частиц.

Покажем в качестве примера, что в некоторых важных в практическом отношении случаях скорости электронов мало отличаются от скорости ионов именно благодаря наличию самосогласованного магнитного поля [11] (электроны «привязаны» к ионам даже в отсутствие столкновений). Оценим для этого отношение

$$\frac{|V_i - V_e|}{V_i} = \frac{j}{enV_i}.$$

Заметим, что из уравнений Максвелла $j \sim \frac{cB}{4\pi L}$ (L — характерный размер неоднородности поля). Если отношение плотности кинетической энергии частиц к плотности магнитной энергии обозначить $\alpha \equiv \frac{4\pi m_i n V_i^2}{B^2}$, то

$$\frac{|V_i - V_e|}{V_i} \approx \left(\frac{c^2 m_i}{4\pi e^2 L n} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha \Pi}}.$$

Число Π — так называемый «погонный протон», т. е. число ионов в слое высотой, равной классическому радиусу иона, и площадью, равной квадрату характерного размера системы. Отношение $|V_i - V_e|/V_i$ мало, если $\sqrt{\alpha \Pi} \gg 1$. В астрофизических приложениях $L \sim 10^{10} - 10^{20}$, $\alpha \sim 1$, $\Pi \gg 1$. Для экспериментальной плазмы при $L \sim 10 \div 100 \text{ см}$ Π может быть порядка 1 и предположение о привязанности электронов не всегда верно.

Заметим, что гидродинамические уравнения очень грубо учитывают тепловое движение частиц. Некоторый усредненный эффект теплового движения передается членами, содержащими давление. Действительная роль теплового движения может быть установлена только из кинетического решения задачи. К сожалению, невозможно указать универсальные критерии применимости гидродинамического решения задач динамики плазмы. Для важного частного случая малых колебаний, например, гидродинамика дает по крайней мере качественно правильные результаты, если фазовая скорость волн больше, чем тепловая скорость частиц, т. е. малы диссипативные процессы (затухание Ландау [3]). Это осуществляется, например, для ленгмюровских колебаний или

для ионного звука при $T_e \gg T_i$ (в последнем случае гидродинамическое рассмотрение дает фазовую скорость $v_\phi = \left(\frac{T_e + T_i}{m_i}\right)^{1/2}$, которая при $T_e \gg T_i$ оказывается значительно больше тепловой скорости ионов). Аналогичная ситуация имеет место и для магнитозвуковых колебаний. Небольшая величина затухания Ландау (эффекта, который целиком определяется тепловым разбросом скоростей) объясняется тем, что при $v_\phi \gg v_T$ оказывается мало так называемых резонансных частиц, движущихся вместе с волной и способных с ней интенсивно взаимодействовать.

3. Рассмотрим теперь гидродинамические уравнения, описывающие поведение разреженной плазмы в сильном магнитном поле. Будем предполагать, что плазма «замагничена», т. е. ларморовский радиус частиц значительно меньше характерной длины неоднородности плазмы, а соответствующие ларморовские частоты больше характерных частот процесса. В сильном магнитном поле распределение электронов и ионов может обладать осевой симметрией относительно направлений последнего. Это обстоятельство приводит к тому, что, если отсутствуют тепловые потоки вдоль силовых линий, медленные движения плазмы подчиняются уравнениям магнитной гидродинамики с неизотропным тензором давления. Ниже выводим эти уравнения, исходя из кинетических уравнений для электронов и ионов.

Кинетическое уравнение без столкновительных членов представляет собой уравнение непрерывности в фазовом пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{v} f + \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{a} f = 0. \quad (11)$$

Символы $\operatorname{div}_{\mathbf{r}}$ и $\operatorname{div}_{\mathbf{v}}$ означают взятие дивергенции в пространствах координат и скоростей соответственно; \mathbf{a} — ускорение частицы, f — функцию распределения. Будем для определенности рассматривать кинетическое уравнение для одного сорта частиц. Полученные результаты могут быть применены как для ионов, так и для электронов с помощью замены $e \rightarrow e_\alpha$ и $m \rightarrow m_\alpha$ ($\alpha = e, i$ для электронов и ионов соответственно).

Кинетическое уравнение (11) запишем в цилиндрической системе координат в пространстве скоростей

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} f + \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} v_\perp a_\perp f + \frac{\partial}{\partial v_\parallel} a_\parallel f + \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial \Theta} a_\Theta f = 0. \quad (12)$$

Здесь v_\parallel — компонента скорости, параллельная магнитному полю; v_\perp — компонента скорости, перпендикулярная к магнитному полю.

Рассмотрим далее уравнение движения частицы

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \omega_B [\mathbf{v}\mathbf{r}]. \quad (13)$$

Здесь

$$\omega_B = \frac{eB}{mc}, \quad \mathbf{F} = \frac{e\mathbf{E}}{m}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{B}.$$

Скорость \mathbf{v} представим в виде

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau} + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \Theta). \quad (14)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ — единичные векторы, образующие правую тройку и перпендикулярные к $\boldsymbol{\tau}$ и между собой. Направление этих векторов нам безразлично, поскольку они выпадают из окончательного результата. Величина \mathbf{v}_F представляет скорость электрического дрейфа:

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{\omega_B} [\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}] = \frac{c[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}. \quad (15)$$

С этой скоростью дрейфуют заряженные частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях; \mathbf{v}_F является также скоростью движения системы координат, в которой отсутствует перпендикулярная к $\boldsymbol{\tau}$ компонента электрического поля ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$). В теории дрейфового движения частиц в сильном электрическом поле [4] скорость \mathbf{v}_F принято выделять, вводя движущуюся локальную координатную систему согласно формуле (14).

Подставляя выражение (14) в уравнение (13), получаем

$$\dot{v}_{\parallel} \boldsymbol{\tau} + v_{\parallel} \dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{v}_F + \dot{v}_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \Theta) + v_{\perp} (\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 \cos \Theta + \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 \sin \Theta) + v_{\perp} \dot{\Theta} (-\boldsymbol{\tau}_1 \sin \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \Theta) = -\omega_B v_{\perp} (-\boldsymbol{\tau}_1 \sin \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \Theta) + \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F} \boldsymbol{\tau}).$$

Проектируя на направления $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}_1 \cos \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \Theta$ и $-\boldsymbol{\tau}_1 \sin \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \Theta$, получаем

$$a_{\parallel} = \dot{v}_{\parallel} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F} - \mathbf{v}'_F) + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - v_{\perp} [(\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}'_1) + \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \mathbf{v}_F] \cos \Theta - v_{\perp} [(\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}'_2) + \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \mathbf{v}_F] \sin \Theta + \dots, \quad (16a)$$

$$a_{\perp} = \dot{v}_{\perp} = -\frac{v_{\perp} v_{\parallel}}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \frac{v_{\perp}}{2} \operatorname{div} \mathbf{v}_F + \frac{v_{\perp}}{2} \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{v}_F - \boldsymbol{\tau}_1 (v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F) \cos \Theta - \boldsymbol{\tau}_2 (v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F) \sin \Theta + \dots, \quad (16b)$$

$$a_{\Theta} = \dot{\Theta} = -\omega_B + \frac{\boldsymbol{\tau}_2}{v_{\perp}} \cos \Theta \{-v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' - \mathbf{v}'_F - v_{\perp}^2 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_1\} + \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{v_{\perp}} \sin \Theta \{v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F + v_{\perp}^2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_2\} + \dots \quad (16b)$$

[штрихом обозначена производная $\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}, \nabla)$]. В формулах (16 а, б, в) не выписаны члены, пропорциональные $\cos 2\Theta$ и $\sin 2\Theta$, а в уравнении (16в) также член, не зависящий от Θ и не содержащий ω_B . Их явный вид для дальнейшего несуществен.

Подставляем выражения для a_{\parallel} , a_{\perp} и a_{Θ} из уравнения (16 а, б, в) в кинетическое уравнение (12), приводим его к виду

$$\left\{ D_0 + A_0 \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cos \Theta \left(D_1 + A_1 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \sin \Theta \left(D_2 + A_2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \right. \\ \left. + \cos 2\Theta \left(D_3 + A_3 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \sin 2\Theta \left(D_4 + A_4 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \right\} f = \omega_B \frac{\partial f}{\partial \Theta}. \quad (17)$$

Здесь

$$D_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}) + \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left\{ (\boldsymbol{\tau}_1 \mathbf{F} - \mathbf{v}'_F) + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \right\} + \\ + \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp}^2 \left\{ -\frac{v_{\parallel}}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) v_F \right\}; \quad (17a)$$

$$D_1 \equiv v_{\perp} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_1 - \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} v_{\perp} \{ (\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}'_1) + \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) v_F \} - \\ - \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \boldsymbol{\tau}_1 (v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F) + \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{v_{\perp}} \{ v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F + v_{\perp}^2 (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) \boldsymbol{\tau}_2 \}; \quad (17б)$$

$$D_2 \equiv v_{\perp} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_2 - \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} v_{\parallel} \{ (\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}'_2) + \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau}_2 \nabla) v_F \} - \\ - \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} v_{\perp} \boldsymbol{\tau}_2 (v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F) + \frac{\boldsymbol{\tau}_2}{v_{\perp}} \{ v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{v}'_F + v_{\perp}^2 (\boldsymbol{\tau}_1 \nabla) \boldsymbol{\tau}_1 \} \quad (17в)$$

Конкретный вид операторов D_3 , D_4 , A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) может быть определен, если учесть в формулах (16) все опущенные члены.

Если предположить, что $\frac{\omega}{\omega_B} \ll 1$ и $\frac{r_B}{L} \ll 1$ (ω — частота процесса; r_B — средний ларморовский радиус частиц; L — характерная длина неоднородности в распределении плотности и полей), то решение уравнения (17) можно искать в виде разложения по обратным степеням ω_B

$$f = f_0 + \frac{1}{\omega_B} f_1 + \dots \quad (18)$$

В нулевом приближении имеем

$$\frac{\partial f_0}{\partial \Theta} = 0, \quad (19)$$

т. е.

$$f_0 = f_0(t, \mathbf{r}, v_{\parallel}, v_{\perp}).$$

Функция f_1 должна быть определена из уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Theta} = \{ \cos \Theta D_1 + \sin \Theta D_2 + \cos 2\Theta D_3 + \sin 2\Theta D_4 \} f_0 + D_0 f_0. \quad (20)$$

По физическому смыслу задачи величина f_1 должна быть периодической функцией угла Θ . Интегрируя последнее уравнение по Θ от 0 до 2π , получаем необходимое для этого условие

$$D_0 f_0 = 0, \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (20) при соблюдении условия (21), находим

$$f_1 = \{\sin \Theta D_1 - \cos \Theta D_2\} f_0 + \frac{1}{2} \{\sin 2\Theta D_3 - \cos 2\Theta D_4\} f_0 + G_1 \quad (22)$$

$[G_1 = G_1(t, \mathbf{r}, v_{\parallel}, v_{\perp})$ — функция, не зависящая от Θ]. Подставляя f_1 в кинетическое уравнение (17), получаем уравнение для определения f_2 :

$$\left\{ D_0 + A_0 \frac{\partial}{\partial \Theta} + \cos \Theta \left(D_1 + A \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \sin \Theta \left(D_2 + A_2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \right. \\ \left. + \cos 2\Theta \left(D_3 + A_3 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \sin 2\Theta \left(D_4 + A_4 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \right\} f_1 = \frac{\partial f_2}{\partial \Theta} \quad (23)$$

(f_2 — периодическая функция Θ). Интегрируя уравнение (23) по Θ от 0 до 2π и приравнявая к нулю получающийся результат, находим уравнение для определения функции G_1 :

$$D_0 G_1 + \frac{1}{2\omega_B} \left\{ D_2 D_1 - D_1 D_2 = \frac{1}{2} (D_4 D_3 - D_3 D_4) + A_1 D_1 + A_2 D_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (A_3 D_3 + A_4 D_4) \right\} f_0 = 0. \quad (24)$$

Можно было бы показать в общем случае, что уравнение для функции G_n получается как условие периодичности ($n-1$)-го приближения. Практически вычисления становятся очень громоздкими уже при нахождении функции G_1 . К счастью, в некотором классе задач можно ограничиться нахождением f_0 и периодической по Θ части f_1 .

Остановимся на физическом смысле полученных результатов. Уравнение (21) получено из выражения (20) в результате интегрирования по Θ . Эта операция эквивалентна усреднению уравнений движения частицы (16) по азимутальному углу Θ . Усреднение означает переход к так называемому дрейфовому приближению (или приближению ведущих центров). Понимая под v_{\parallel} и v_{\perp} усредненные по Θ значения, кинетическое уравнение в дрейфовом приближении (21) можно записать в форме теоремы Лиувилля в фазовом пространстве $t, \mathbf{r}, v_{\parallel}, v_{\perp}$ [5]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{V}_c \nabla) f_0 + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + \frac{dv_{\perp}}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} = 0, \quad \mathbf{V}_c = \mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}, \quad (25)$$

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F} - \mathbf{v}'_F) + \frac{v_{\perp}^2}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \quad (25a)$$

$$\frac{dv_{\perp}}{dt} = -\frac{v_{\parallel} v_{\perp}}{2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \frac{v_{\perp}}{2} \operatorname{div} v_F + \frac{v_{\perp}}{2} (\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{v}_F). \quad (25b)$$

Сравнивая формулы (25a) и (25b) с уравнениями дрейфового движения частиц [5], видим, что \mathbf{V}_c — скорость движения ведущего центра, уравнения (25a, б) определяют параметры v_{\parallel} и v_{\perp} .

В соответствии с приведённым выше выводом везде опущены члены $\sim \frac{1}{\omega_B}$ и высшего порядка малости. Сама функция распределения, уже не зависящая от распределения скоростей частиц по азимуту Θ , должна интерпретироваться как функция распределения ведущих центров.

При рассмотрении динамики плазмы необходимо кинетические уравнения решать совместно с уравнениями Максвелла. Трудности возникают при написании выражения для электрического тока и плотности заряда. Дело в том, что *средняя макроскопическая скорость* частиц данного сорта не совпадает со *средней скоростью их ведущих центров*. Истинная плотность тока определяется средними макроскопическими скоростями электронов и ионов, которые выражаются через функции распределения частиц f , а не f_0 . Для получения правильных выражений для средних скоростей частиц данного сорта необходимо учитывать член первого порядка в разложении решений кинетического уравнения (17) по степеням $\frac{1}{\omega_B}$.

4. Вычислим среднюю макроскопическую скорость частиц данного сорта. По определению имеем

$$n\bar{\mathbf{v}} = \int \mathbf{v} (f_0 + f_1) d\mathbf{v}, \quad d\mathbf{v} = v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\Theta. \quad (26)$$

Подставляя выражение для f_1 из уравнения (22) и учитывая, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau} + v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_1 \cos \Theta + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \Theta),$$

получаем

$$\begin{aligned} n\bar{\mathbf{v}} &= \int (\mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}) (f_0 + \frac{1}{\omega_B} G_1) d\mathbf{v} + \frac{1}{\omega_B} \int v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_2 D_1 - \boldsymbol{\tau}_1 D_2) f_0 d\mathbf{v} = \\ &= n(\mathbf{v}_F + u\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{2\omega_B} \int v_{\perp} (\boldsymbol{\tau}_2 D_1 - \boldsymbol{\tau}_1 D_2) f_0 d\mathbf{v} + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_B} \int (\mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}) G_1 d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь учтено, что $\int f_0 d\mathbf{v} = n$, $\int v_{\parallel} f d\mathbf{v} = nu$, u — средняя макроскопическая скорость частиц вдоль поля. Нахождение функции G_1 , а следовательно, и интеграла $\frac{1}{\omega_B} \int (\mathbf{v}_F + v_{\parallel} \boldsymbol{\tau}) G_1 d\mathbf{v}$ практически сложно. Чтобы обойти эту трудность, предположим, что величина v_{\parallel} имеет порядок $\frac{1}{\omega_B}$. Для этого нужно, чтобы составляющая электрического поля, параллельная \mathbf{B} , была мала ($E_{\parallel} \ll E$). Такое предположение обычно делается в дрейфовой теории и означает, что частицы в основном движутся в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{B} . Если указанное предположение справедливо, то $\frac{1}{\omega_B} \int v_{\parallel} \boldsymbol{\tau} G_1 d\mathbf{v}$ будет порядка $\frac{1}{\omega_B^2}$ и им можно пренебречь; величиной $\frac{1}{\omega_B} \int \mathbf{v}_F G_1 d\mathbf{v}$ также пренебрегают, ибо она в $\frac{1}{\omega_B}$ раз меньше $n\mathbf{v}_F$. Второй интеграл в равенстве (27) определяет среднюю

скорость, приобретаемую частицами перпендикулярно к магнитному полю за счет прочих дрейфов, не включенных в $n\mathbf{v}_F$. Выражения для операторов D_1 и D_2 берутся из формул (17а) и (17б). Для исключения векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ следует поступать аналогично тому, как это сделано в работах [4] и [6]. Произведя интегрирование по \mathbf{v} с учетом того, что

$$\begin{aligned} p_{\perp} &= \frac{mn\bar{v}_{\perp}^2}{2} = \frac{m}{2} \int v_{\perp}^2 f_0 d\mathbf{v}, \\ p_{\parallel} &= mn(\bar{v}_{\parallel}^2 - u^2) = m \int (v_{\parallel} - u)^2 f_0 d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}} &= u\boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_F - \frac{c}{en} \operatorname{rot} \left(\frac{p_{\perp}}{B} \boldsymbol{\tau} \right) + \\ &+ \frac{1}{\omega_B} \left[\boldsymbol{\tau}, u \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_F}{dt} + \frac{p_{\parallel}}{nm} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \boldsymbol{\tau} + \frac{p_{\perp}}{nm} \frac{\nabla B}{B} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u\boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_F, \nabla).$$

Это выражение можно удобно записать в другой, эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}} &= u\boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_F + \frac{1}{\omega_B} \left[\boldsymbol{\tau}, u \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_F}{dt} + \frac{(p_{\parallel} - p_{\perp})}{mn} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \boldsymbol{\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{mn} \nabla p_{\perp} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Для этого нужно представить третий член выражения (28) как

$$\begin{aligned} \frac{c}{en} \operatorname{rot} \left(\frac{p_{\perp} \boldsymbol{\tau}}{B} \right) &= \frac{p_{\perp}}{m\omega_B} [\boldsymbol{\tau}, (\boldsymbol{\tau} \nabla) \boldsymbol{\tau}] + \frac{p_{\perp}}{m\omega_B} \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}) - \\ &- \frac{c}{en} \left[\boldsymbol{\tau}, \frac{\nabla p_{\perp}}{B} \right]. \end{aligned}$$

Второй член правой части написанного равенства определяет дополнительный вклад порядка $\frac{1}{\omega_B}$ в компоненту скорости, параллельную магнитному полю. Его можно объединить со средней скоростью вдоль поля, полагая

$$u_{\text{нов}} = u + \frac{p_{\perp}}{m\omega_B} (\boldsymbol{\tau} \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}),$$

как это обычно делается в теории дрейфового движения частиц.

Смысл отдельных членов в равенстве (28) разъясняется следующим образом: $u\boldsymbol{\tau}$ — упорядоченная макроскопическая скорость частиц вдоль поля; \mathbf{v}_F — скорость электрического дрейфа, который считается главным, если электрическое поле достаточно

сильное; последний член в формуле (28) дает усредненный дрейф частиц за счет градиента магнитного поля, его кривизны (центробежный дрейф), а также за счет силы инерции $u \frac{d\tau}{dt} + \frac{dv_F}{dt}$, поскольку рассмотрение велось в движущейся локальной системе координат (можно сравнить с соответствующими выражениями для движения частиц в работе [4]). Для уяснения роли оставшегося члена $\frac{c}{en} \text{rot} \left(\rho_{\perp} \frac{\tau}{B} \right)$ напишем выражение для электрического тока в плазме:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i = en (\bar{\mathbf{V}}_i - \bar{\mathbf{V}}_e) = -c \text{rot} \left(\frac{\rho_{\perp}}{B} \tau \right) + en (u_i - u_e) \tau + \mathbf{j}_{др}, \quad (30)$$

$$\mathbf{j}_{др} = \frac{c}{B} \left[\tau, \sum_{\alpha=e, i} m_{\alpha} n \left(n_{\alpha} \frac{d\tau}{dt} + \frac{dv_F}{dt} \right) + \rho_{\parallel} (\tau \nabla) \tau + \rho_{\perp} \frac{\nabla B}{B} \right]. \quad (31)$$

В формулах (30) и (31) $\rho_{\perp} = \rho_{\perp i} + \rho_{\perp e}$, $\rho_{\parallel} = \rho_{\parallel e} + \rho_{\parallel i}$. Величина $\mathbf{j}_{др} + en (u_i - u_e) \tau$ — это ток, получающийся за счет относительного движения ведущих центров электронов и ионов. Уравнение Максвелла $\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ может быть написано в следующей форме:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi e}{c} (u_i - u_e) \tau + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{др}, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + 4\pi \frac{\rho_{\perp} \tau}{B} = \mathbf{B} \left(1 + \frac{4\pi \rho_{\perp}}{B^2} \right).$$

В равенстве (30) $\text{rot} \frac{c\rho_{\perp}}{B} \tau$ — ток намагничивания, а величина $\kappa = 1 + \frac{4\pi\rho_{\perp}}{B^2}$ может трактоваться как магнитная проницаемость плазмы. Намагничивание единицы объема характеризуется величиной $\bar{\mu} = \frac{\rho_{\perp}}{B^2}$. Магнитный момент частицы, движущейся по ларморовской окружности, равен $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$. Следовательно, $\bar{\mu}$ — средний магнитный момент единицы объема плазмы. Выделять напряженность магнитного поля \mathbf{H} при рассмотрении динамики плазмы не принято, и обычно рассматривают полный ток \mathbf{j} и магнитную индукцию \mathbf{B} .

5. Кинетическое уравнение (21), написанное для электронов и ионов, совместно с уравнениями Максвелла [выражение для тока необходимо взять из соотношения (30)] дает полную систему уравнений для описания движений плазмы с частотами ниже ларморовской частоты ионов. Часто бывает проще вместо кинетических уравнений использовать уравнения гидродинамики. Для получения гидродинамических уравнений следуем обычной схеме, т. е.

умножаем кинетическое уравнение (21) на 1, v_{\parallel} , v_{\perp}^2 , $(v_{\parallel} - u)^2$ и интегрируем по скорости. В результате получаем уравнение непрерывности для данного сорта частиц (опуская индекс α)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n (\mathbf{v}_F + \boldsymbol{\tau} u) = 0, \quad (33)$$

уравнение движения в направлении магнитного поля

$$\frac{du}{dt} = \left(\boldsymbol{\tau}, -\frac{\nabla p_{\parallel}}{mn} + \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}_F}{dt} \right) + (p_{\perp} - p_{\parallel}) \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad (34)$$

и уравнения состояния

$$\begin{aligned} & \frac{dp_{\perp}}{dt} + 2p_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{v}_F - p_{\perp} (\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{v}_F) + \\ & + p_{\perp} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} u + p_{\perp} u \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} q - q \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dp_{\parallel}}{dt} + 3p_{\parallel} (\boldsymbol{\tau} \nabla) u + up_{\parallel} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + p_{\parallel} \operatorname{div} \mathbf{v}_F + \\ & + 2p_{\parallel} (\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{v}_F) = -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} s. \end{aligned} \quad (36)$$

Система уравнений (33)—(36) впервые получена Чу, Гольдбергером и Лоу [7]. Уравнения (35) и (36) приводятся к форме уравнений (9)—(10), если под \mathbf{V} понимать величину $u\boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_F$. Величины q и s представляют тепловые потоки (третьи моменты от функции распределения):

$$q = \int v_{\perp}^2 (v_{\parallel} - u) f_0 dv, \quad s = \int (v_{\parallel} - u)^2 f_0 dv.$$

Для полного описания плазмы необходимо еще добавить уравнения Максвелла.

Гидродинамическое уравнение (31) определяет скорость движения частиц вдоль магнитного поля; скорость в перпендикулярном направлении можно найти по формуле (28). Система уравнений (33)—(36) оказывается незамкнутой. Получение уравнений для третьих моментов функции распределения положения не улучшает, так как в них входят четвертые моменты и т. д. Систему уравнений обычно превращают в замкнутую путем приравнивания величин q и s к нулю. Иначе говоря, предполагается определенная симметрия функции распределения относительно продольных скоростей. Это означает также отсутствие потоков тепла вдоль силовых линий. Такое предположение физически разумно, ибо частицы вдоль поля перемещаются значительно свободнее, чем поперек, а вращение частиц по ларморовским окружностям к переносу энергии не приводит. Магнитное поле эффективно «гидродинамизирует» систему, причем ларморовский радиус r_B заменяет свободный пробег в том смысле, что при $r_B = 0$ потоки частиц и энергии перпендикулярно к магнитному полю отсутствуют и для их получения необходимы члены порядка r_B/L и высшего (L — введенный выше характерный размер неоднородности в распределении рассматриваемых величин).

Если положить $q = s = 0$, то уравнения (35) и (36) могут быть написаны в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{uB} \right) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0. \quad (38)$$

При этом следует воспользоваться равенством

$$-u \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \operatorname{div} \mathbf{v}_F + (\boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{v}_F) = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt}$$

и уравнением непрерывности.

6. Система уравнений (33)—(36) описывает динамику двух «жидкостей» — электронов и ионов (у всех величин следует ввести индекс $\alpha = e, i$). В этой системе уравнение движения (33) не имеет настоящего гидродинамического вида, ибо оно справедливо только для движения вдоль магнитного поля. Покажем, что система (33)—(36) эквивалентна системе уравнений магнитной гидродинамики с анизотропным давлением и идеальной проводимостью. Если не интересоваться специально движением электронов, считая плазму квазинейтральной, то удобнее рассматривать движение центра инерции элементарного плазменного объема, практически совпадающее с движением ионов, и движение электронов относительно ионов (закон Ома). Для получения уравнения движения квазинейтральной плазмы заметим, что электрический ток \mathbf{j} может быть представлен так:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp} = \boldsymbol{\tau} e (u_i - u_e) + \frac{c}{B} \left[\boldsymbol{\tau}, \sum_{\alpha=e, i} m_{\alpha} n \left(u_{\alpha} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_F}{dt} \right) + \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\boldsymbol{\tau} \nabla) \boldsymbol{\tau} \right]. \quad (39)$$

Далее, умножая уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ векторно на \mathbf{B} , подставим выражение для \mathbf{j} из уравнения (39). Раскрывая двойное векторное произведение, получим

$$\sum_{\alpha=e, i} m_{\alpha} n \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_F + \boldsymbol{\tau} u_{\alpha}) = -\nabla p_{\perp} + (p_{\perp} - p_{\parallel}) (\boldsymbol{\tau} \nabla) \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} (p_{\perp} - p_{\parallel}) + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (40)$$

Если ввести тензор \mathbf{P} с компонентами $p_{ik} = p_{\parallel} \tau_i \tau_k + p_{\perp} (\delta_{ik} - \tau_i \tau_k)$, то, непосредственно дифференцируя, можно убедиться, что

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\boldsymbol{\tau} \nabla) \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} (p_{\parallel} - p_{\perp}). \quad (41)$$

Пренебрегая в левой части уравнения (40) массой электрона и вводя обозначение $\mathbf{V} = \mathbf{v}_F + \boldsymbol{\tau} u_i$, получаем

$$m_i n \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (42)$$

Это уравнение движения квазинейтральной плазмы с неизотропным тензором давления.

Скорость плазмы в пренебрежении членами порядка $\frac{1}{\omega_B}$ есть $\mathbf{V} = \frac{c[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}$. Составляя векторные произведения обеих частей написанного равенства с вектором \mathbf{B} и используя предположение о малости продольной компоненты электрического поля, получаем

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}]. \quad (43)$$

Электрическое поле \mathbf{E} , следовательно, определяется из закона Ома с идеальной проводимостью. Подставляя \mathbf{E} из формулы (43) в уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{V}\mathbf{B}] = 0, \quad (44)$$

что означает «вмороженность» магнитных силовых линий в рассматриваемом случае. Уравнения состояния в пренебрежении потоками тепла могут быть записаны в виде, аналогичном уравнениям (35), (37) или (37), (38):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{nB} \right) = 0, \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{n^3} \right) = 0 \quad (46)$$

или

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} + p_{\parallel} \text{div } \mathbf{V} + 2p_{\parallel} \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{V} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} + 2p_{\perp} \text{div } \mathbf{V} - p_{\perp} \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{V} = 0. \quad (48)$$

Здесь $p_{\perp} = p_{\perp e} + p_{\perp i}$, $p_{\parallel} = p_{\parallel e} + p_{\parallel i}$. Заметим, что уравнения (45) и (46) могут быть истолкованы следующим образом. При сжатии плазмы в направлении магнитного поля не изменяются величины B и p_{\perp} . Величины p_{\parallel} и n оказываются связанными адиабатическим законом с $\gamma = 3$ в соответствии с тем, что увеличивается энергия одной продольной степени свободы. При сжатии плазмы в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, p_{\parallel} остается постоянным. Согласно условию вмороженности, $B \propto n$. Следовательно, уравнение (48) интерпретируется как адиабата с $\gamma = 2$, что свидетельствует об увеличении энергии двух перпендикулярных степеней свободы.

Система уравнений (42)—(46), являясь аналогом уравнений магнитной гидродинамики, описывает поведение плазмы в сильном магнитном поле. Подчеркнем, что для сохранения анизотропии тензора давления в течение всего процесса определяющую

роль играет отсутствие столкновений. Справедливость этого для каждой задачи должна быть проверена.

Отметим в заключение еще одно обстоятельство, которое следует иметь в виду при применении системы уравнений (42) — (46) для описания равновесных плазменных конфигураций. Строго говоря, метод усреднения, применяемый при выводе дрейфовых уравнений частицы [а следовательно, и кинетического уравнения в дрейфовом приближении (21)], справедлив, если число пролетов каждой частицы через систему меньше L/r_B [4]. Если система существует достаточно долго и это условие нарушается, то выводы, полученные на основании применения кинетического уравнения (21) или гидродинамической системы (42) — (46), могут рассматриваться только как приближенные.

7. В качестве примера применения полученных уравнений рассмотрим задачу о малых колебаниях неизотермической плазмы. Решение системы (42)—(46) будем искать в виде $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1$,

$$p_{\parallel} = p_{\parallel 0} + p_{\parallel 1}, \quad p_{\perp} = p_{\perp 0} + p_{\perp 1}, \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho_1, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1.$$

Вводим обозначения

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{V}_0/B_0, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{V}_1/B_0, \quad \xi = \int^t \mathbf{V}_1 dt, \quad V_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}.$$

Система (42)—(46) в пренебрежении членами второго порядка малости по возмущениям принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \mathbf{P}_1 - V_A^2 \{ \nabla (\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{b}_1) - (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \mathbf{b}_1 \}, \quad (49)$$

$$\mathbf{b}_1 = (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \xi - \boldsymbol{\tau}_0 \operatorname{div} \xi, \quad (50)$$

$$p_{\perp 1} = -2p_{\perp 0} \operatorname{div} \xi + p_{\perp 0} (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) (\boldsymbol{\tau}_0 \xi), \quad (51)$$

$$p_{\parallel 1} = -p_{\parallel 0} \operatorname{div} \xi - 2p_{\parallel 0} (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) (\boldsymbol{\tau}_0 \xi). \quad (52)$$

С помощью уравнений (50)—(52) получаем из формулы (41)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P}_1 = & -2p_{\perp 0} \operatorname{div} \xi + p_{\perp 0} \nabla (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) (\boldsymbol{\tau}_0 \xi) + (p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla)^2 \xi + \\ & + (p_{\perp 0} - 4p_{\parallel 0}) \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla)^2 (\xi \boldsymbol{\tau}_0) + p_{\perp 0} \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \operatorname{div} \xi. \end{aligned} \quad (53)$$

Из уравнения (49) находим, что

$$\left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \boldsymbol{\tau}_0 \right) = p_{\perp 0} (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla) \operatorname{div} \xi + (-p_{\perp 0} + 3p_{\parallel 0}) (\boldsymbol{\tau}_0 \nabla)^2 (\xi \boldsymbol{\tau}_0). \quad (54)$$

Если взять дивергенцию от обеих частей уравнения (49), продифференцировать его дважды по времени, а величины $\left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \boldsymbol{\tau}_0 \right)$

выразить с помощью формулы (54), то получим, заметив, что

$$\operatorname{div} \xi = -\frac{p_{\perp}}{q_0},$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 q}{\partial t^4} - \left(2 \frac{p_{\perp 0}}{q_0} + V_A^2 \right) \Delta \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} - \left(2 \frac{p_{\parallel 0}}{q_0} - \frac{p_{\perp 0}}{q_0} \right) (\tau_0 \nabla)^2 \frac{\partial q_1}{\partial t^2} - \\ & - \left\{ \frac{p_{\perp 0}^2}{q_0^2} - 3 \frac{p_{\parallel 0}}{q_0} \left(2 \frac{p_{\perp 0}}{q_0} + V_A^2 \right) \right\} \Delta (\tau_0 \nabla)^2 q_1 + \left\{ 3 \frac{p_{\parallel 0}^2}{q_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{p_{\perp 0}}{q_0} \left(3 \frac{p_{\parallel 0}}{q_0} - \frac{p_{\perp 0}}{q_0} \right) \right\} (\tau_0 \nabla)^4 q_1 = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Если считать, что решение написанного уравнения пропорционально $e^{i k r + i \omega t}$, то получим дисперсионное уравнение (считаем, что магнитное поле направлено вдоль оси z)

$$\omega^4 - A \omega^2 - B = 0; \quad (56)$$

$$A = \left(\frac{2p_{\perp 0}}{q_0} + V_A^2 \right) k^2 + \frac{1}{q_0} (2p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) k_z^2;$$

$$\begin{aligned} B = & \left\{ \frac{p_{\perp 0}^2}{q_0^2} - 3 \frac{p_{\parallel 0}}{q_0} \left(2 \frac{p_{\perp 0}}{q_0} + V_A^2 \right) \right\} k^2 k_z - \\ & - \frac{1}{q_0^2} \{ 3p_{\parallel 0}^2 + p_{\perp 0} (3p_{\parallel 0} - p_{\perp 0}) \} k_z^4. \end{aligned}$$

Из этого уравнения можно получить зависимости, аналогичные тем, которые получаются для изотропной плазмы. Так, для волны, распространяющейся вдоль поля \mathbf{B}_0 , получаем

$$\omega_1^2 = 3 \frac{p_{\parallel 0}}{q_0} k^2, \quad \omega_2^2 = V_A^2 k^2.$$

Первое из этих решений соответствует «одномерному» звуку с адиабатой $\gamma = 3$, второе — альфвеновской волне.

Для волны, распространяющейся перпендикулярно к направлению магнитного поля, получаем

$$\omega_1^2 = 2 \frac{p_{\perp 0}}{q_0} + V_A^2,$$

что соответствует ускоренной магнитозвуковой волне с «двумерным» показателем адиабаты $\gamma = 2$. Без анизотропии давлений замедленная магнитозвуковая волна в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, отсутствует, т. е. $\omega_2 = 0$. При наличии анизотропии давления величина ω_2^2 может стать отрицательной, что соответствует появлению неустойчивости. В случае почти перпендикулярного распространения, когда $\frac{k_z}{k} \ll 1$, для появле-

ния неустойчивости требуется достаточно большая анизотропия:

$$\rho_{\perp 0} > 3\rho_{\parallel 0} + \sqrt{9\rho_{\parallel 0}^2 + 3\rho_{\parallel 0}V_A^2\varrho_0}.$$

В замедленной магнитозвуковой волне магнитное поле увеличивается в местах уменьшения плотности. При достаточно большой анизотропии вследствие диамагнетизма плазмы замедленные магнитозвуковые волны могут раскачиваться спонтанно, за счет нарастания B в местах случайного уменьшения ϱ . Эта неустойчивость, полученная в работе [9], названа диамагнитной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 183.
2. Чепмен С. и Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **16**, вып. 7, 574 (1946).
4. Морозов А. И. и Соловьев Л. С. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 177.
5. Сивухин Д. В. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 7.
6. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1955.
7. Чу Г., Гольдбергер М. и Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. «Проблемы современной физики», вып. 7, 139 (1957).
8. Рудаков Л. И. и Сагдеев Р. З. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М., Изд-во АН СССР, III, 1958, стр. 268.
9. Рудаков Л. И. Кинетика неоднородной плазмы в сильных магнитных полях. Диссертация. М., 1961.
10. Кадомцев Б. Б. О динамике плазмы в сильном магнитном поле. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций». М., Изд-во АН СССР, IV, 1958.
11. Брагинский С. И. Об одном критерии применимости уравнений магнитной гидродинамики к плазме. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы». Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1959.

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Р. З. Сагдеев

§ 1. Коллективные процессы в плазме

Известно, что релаксационные процессы в разреженной плазме в состоянии, далеко от термодинамического равновесия, сопровождаются, как правило, возбуждением коллективных плазменных колебаний (например, из-за неустойчивости). Возникновение таких колебаний существенно влияет на явления переноса в плазме, что наиболее интересно с практической точки зрения. Важнейшим примером является так называемая «аномальная диффузия» горячей плазмы в магнитных ловушках [1]. Различные стороны этой сложной проблемы, связанные с теорией устойчивости относительно малых возмущений, сейчас изучены достаточно полно, и по существу уже заложены основы нелинейного подхода. Другой интересный пример коллективных процессов — ударные волны в плазме. В обычной газодинамике толщина фронта ударной волны ограничена снизу величиной порядка длины свободного пробега молекул в газе, в плазме же благодаря «коллективным» свойствам возможно существование специфических ударных волн с толщиной, значительно меньшей длины свободного пробега. Это означает, что даже сильно разреженная плазма по своим свойствам походит не на «кнудсеновский» газ, а на газодинамическую среду.

Цель данной статьи — наглядно изложить основные идеи и результаты теории коллективных процессов в разреженной плазме. Основное внимание уделяется качественной стороне данного вопроса — уяснению физического смысла при рассмотрении различных приближенных моделей.

1. Взаимодействие между частицами в плазме за счет дальнего действующего характера электрических сил осуществляется не только при столкновениях, но также и в результате действия так называемого согласованного поля. Для плазмы, которую можно рассматривать как почти идеальный газ (условием применимости «газового приближения» является $na^3 \gg 1$, где n — плотность

числа частиц; a — дебаевский радиус), справедливая кинетическая теория, в которой функция распределения для ионов (электронов) $f_{i, e}(v, r, t)$ удовлетворяет уравнению Больцмана—Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = St(f), \quad (1)$$

где $[H, f]$ — скобки Пуассона; $St(f)$ — столкновительный член.

Самосогласованное поле в уравнении (1) учитывается включением членов, содержащих электрическое и магнитное поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Плотность заряда и плотность тока берут в виде $\rho = \sum e_k \int f_k dv$ и $j = \sum e_k \int v f_k dv$, где суммирование производится по всем сортам заряженных частиц, присутствующих в плазме. Столкновения учитываются в уравнении (1) интегралом столкновений $St(f)$, конкретный вид которого определяется составом плазмы. В динамике плазмы «близкие» столкновения и самосогласованное поле, казалось бы, должны играть принципиально различные роли. Так, столкновения должны определять релаксационные процессы (установление локального максвелловского распределения, обмен энергией и импульсом между ионами и электронами и т. п.), каждый из которых можно характеризовать некоторым временем τ («время столкновения»). Самосогласованное поле, напротив, должно было бы определять «дисперсионные» характеристики плазмы, особенности собственных колебаний, волновые свойства плазмы. В простейшем случае, например, когда отсутствует магнитное поле, основным дисперсионным параметром плазмы является ленгмюровская электронная частота ω_0 ($\omega_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$, e — заряд электрона, m — масса, n — плотность). В большинстве интересующих нас случаев частоту колебаний плазмы будем считать достаточно большой, так что $\omega\tau \gg 1$, т. е. в такой плазме имеются два различных масштаба времени τ и $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (период колебаний, причем $T \ll \tau$). Поэтому, рассматривая колебательные процессы, можно не учитывать близких столкновений, считая их редкими, т. е. можно исключить интеграл столкновений из уравнения (1). Такой подход, получивший название «бесстолкновительной теории плазмы», позволит упростить рассмотрение целого круга задач динамики плазмы. Эта теория рассматривает процессы, протекающие в плазме за время, которое значительно меньше времени свободного пробега τ . Исходным уравнением является кинетическое уравнение Власова с самосогласованными полями без интеграла столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0. \quad (2)$$

Так как в отсутствие интеграла столкновений, как следует из Н-теоремы, энтропия сохраняется, бесстолкновительная теория

плазмы, казалось бы, относится к изэнтропическим процессам и не должна описывать необратимых процессов релаксации плазмы, процессов установления теплового равновесия («максвеллизации») и т. п. Тем не менее экспериментально доказано, что релаксационные процессы протекают за время, значительно меньшее τ , т. е. в условиях, когда применима бесстолкновительная теория. Такие аномальные диссипативные свойства разреженной плазмы напоминают положение в обычной гидродинамической теории турбулентности. Характерное время необратимого процесса диффузии скорости порядка

$$\tau_v \sim \frac{R^2}{\nu}, \quad (3)$$

где R — характерный размер; ν — кинематическая вязкость. На самом же деле реальное время релаксации оказывается значительно меньшим: развитие неустойчивостей приводит к турбулентности — дроблению масштабов, а следовательно, к уменьшению времени размешивания. Здесь существенную роль играют два фактора. Во-первых, наличие очень большого числа макроскопических степеней свободы — так называемых «масштабов пульсаций» в теории турбулентности, — взаимодействующих между собой из-за нелинейных эффектов, само по себе приводит к необратимости процессов во времени при переходе от динамического к статистическому описанию системы, т. е. при переходе от уравнения Навье—Стокса к уравнениям, характеризующим усредненные движения ¹ жидкости.

Во-вторых, по мере перехода энергии к движениям все более и более мелких масштабов усиливается роль вязких эффектов из-за увеличения пространственных градиентов; тогда величину R в уравнении (3) нужно заменить на характерный масштаб ² пульсаций l . При $l \ll R$ время диффузии скорости резко уменьшается.

Раскрывая смысл аналогии между гидродинамической турбулентностью и аномальными диссипативными процессами в разреженной плазме, можно выделить две важнейшие группы подобных явлений.

1) Бесстолкновительная теория описывает различные плазменные колебания и волны. Часто состояния плазмы оказываются неустойчивыми, так что амплитуды таких колебаний быстро нарастают. Нелинейные взаимодействия различных видов колебаний соответствуют взаимодействиям между масштабами пульсаций в гидродинамике. Число различных колебаний в плазме можно счи-

¹ Например, система бесконечного числа зацепляющихся уравнений для моментов скоростей.

² Масштаб пульсаций l в гидродинамике во всяком случае не меньше длины свободного пробега λ .

тать очень большим¹ и от динамического описания перейти к статистическому. Как и в гидродинамической турбулентности, процессы даже в бесстолкновительной плазме становятся необратимыми.

2) Электрическое и магнитное поля плазменных колебаний вызывают резкие локальные изменения функции распределения частиц по скоростям. Это связано с тем, что любая волна вида $\exp i(\omega t - kr)$ сильнее всего взаимодействует с так называемыми резонансными частицами, например с частицами, движущимися со скоростью, близкой к фазовой скорости волны $v \sim \frac{\omega}{k}$. В результате возникают большие градиенты, но в пространстве скоростей. Столкновениям между заряженными частицами соответствует столкновительный член $\hat{D}\Delta_v f$, где D — «коэффициент диффузии» в пространстве скоростей, напоминающий член, содержащий вязкость в уравнении Навье—Стокса (но в пространстве скоростей). Это соответствует случаю, когда столкновения с отклонениями на малые углы, т. е. с малым изменением скоростей, преобладают. Таким образом, и здесь можно установить аналогию с гидродинамической турбулентностью, но скорее формальную, так как вязкости в обычном пространстве (гидродинамика) соответствует «вязкость» в пространстве скоростей (плазма).

Теорию таких аномальных явлений в плазме принято называть теорией коллективных процессов, тем самым подчеркивая, что основная роль в них принадлежит плазменным колебаниям и волнам, представляющим собой «коллективные» движения частиц плазмы. Аналогия с гидродинамической турбулентностью дает представление о характере и масштабе трудностей теории коллективных процессов в плазме. В действительности в теории коллективных процессов в плазме положение еще сложнее, хотя бы потому, что функция распределения частиц по скоростям зависит не от четырех переменных (\mathbf{r}, t), как в гидродинамике, а от семи ($\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$).

Основная задача теории коллективных процессов состоит в построении кинетики неравновесных процессов — процессов установления термического равновесия. Если исходное состояние плазмы достаточно далеко от равновесного, то переход к послед-

¹ Так, число N степеней свободы ленгмюровских колебаний в плазме можно оценить следующим образом: в единице объема число колебаний

$$\frac{N}{V} \sim \int_0^{k_{\max}} k^2 dk,$$

где k — волновое число.

Для плазменных колебаний, как известно, $k_{\max} \sim \frac{1}{a}$. Следовательно, $N \sim \frac{v}{a^3}$, что по определению много больше 1.

нему носит не монотонный характер, а сопровождается интенсивной раскачкой плазменных колебаний вследствие неустойчивостей¹.

Теория коллективных процессов должна определять характерное время этих переходных явлений. Наличие достаточно интенсивных неупорядоченных колебаний, сопровождающих эти переходные процессы, сказывается и на явлениях переноса, таких, как диффузия, теплопроводность и т. д. С точки зрения практических приложений теории они представляют большой интерес. Так, например, в исследованиях по управляемым термоядерным реакциям используется принцип магнитной термоизоляции плазмы. При этом часто равновесные конфигурации плазмы в магнитном поле оказываются неустойчивыми. Возникновение неустойчивостей может привести к резкому ухудшению магнитной термоизоляции и возрастанию потоков тепла и частиц на стенки, как следствие коллективных процессов. В этой области за последние годы накоплен значительный экспериментальный материал. Однако зачастую явления аномально быстрого «ухода» плазмы на стенки бывают связаны не со специфически коллективными плазменными процессами, а с обычными магнитогидродинамическими неустойчивостями. Трудно провести четкую грань между специфически плазменными коллективными процессами и турбулентными явлениями магнитогидродинамической природы, тем более что иногда разреженную плазму с очень большой длиной свободного пробега с хорошей точностью можно описать уравнениями, напоминающими уравнения обычной магнитной гидродинамики.

2. В многочисленных работах по динамике разреженной плазмы можно встретить совершенно различные математические модели, используемые для описания плазмы. Самый общий подход к решению данной задачи заключается в применении кинетического уравнения с самосогласованными электрическим и магнитным полями. Однако этот путь довольно сложен. Часто (особенно при рассмотрении задач из теории колебаний и устойчивости) пользуются для описания плазмы «гидродинамическими» уравнениями (отдельно для электронов и ионов). Строго говоря, ни о какой гидродинамике в отсутствие столкновений нельзя говорить. Тем не менее, во многих отношениях такой подход дает разумные результаты.

Рассмотрим например, вопрос о распространении какой-либо волны по плазме в отсутствие постоянного магнитного поля.

Если фазовая скорость $\frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}$, то тепловое движение частиц не существенно и можно считать, что все ионы и электроны в данной точке имеют одинаковые скорости. Тогда можно пользоваться просто уравнениями движения для каждого сорта частиц. В эйлеровой системе координат это есть не что иное, как гидродинамика

¹ Часто уже небольшое отклонение от термодинамического равновесия достаточно, чтобы вызвать неустойчивость.

с нулевой температурой. Если же нас интересуют поправки, связанные с малым тепловым разбросом, то правильный результат, т. е. совпадающий с кинетическим, получится в том случае, когда в эти «гидродинамические» уравнения мы добавим члены, учитывающие градиенты давления ∇p (для ионов и электронов), а p будем считать изменяющимся по адиабатическому закону с показателем адиабаты $\gamma = 3$. Это неудивительно: ведь в отсутствие столкновений движение по каждой степени свободы является независимым, а для одномерного движения, как известно, $\gamma = 3$.

Можно подобным же образом оправдать «гидродинамический» упрощенный подход и в другом случае. Допустим, что фазовая скорость $\frac{\omega}{k}$ значительно больше тепловой скорости ионов $\left(\frac{T_i}{M}\right)^{1/2}$, но значительно меньше тепловой скорости электронов $\left(\frac{T_e}{m}\right)^{1/2}$.

По-прежнему ионы можно описывать уравнениями движения, пренебрегая тепловым разбросом. Что же касается электронов, то здесь картина меняется. Так как электроны движутся гораздо быстрее волны, то ее электрическое поле по отношению к электронам будет квазистатическим. Тогда, если в области, где электрический потенциал ϕ максимален, распределение электронов по скоростям является максвелловским $f \sim \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)$, то плотность электронов в любом месте будет описываться распределением Больцмана $n = n_0 e^{\frac{e\phi}{T}}$. Если теперь ограничиться длинами волн, значительно превышающими дебаевский радиус a , то электрическое поле можно исключить из уравнений, пользуясь условием квазинейтральности: $n_i = n_e = n_0 e^{\frac{e\phi}{T}}$. Член, содержащий электрическое поле в уравнении движения для ионов — $e\nabla\phi$, заменяется на $-\frac{T}{n} \nabla n$. Таким образом, движение ионов подчиняется уравнениям гидродинамики с $\gamma = 1$ (изотермичность обеспечивается за счет электронов, которые, двигаясь быстрее волны, успевают выравнять температуру). Однако гидродинамическое описание не учитывает некоторые особенности, связанные с наличием теплового движения. Так, выпадают из рассмотрения особенности, обусловленные наличием резонансных частиц, имеющих скорости, близкие к скорости распределения волн. Такие частицы определяют затухание колебаний, не связанное со столкновениями. Если $\frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}$, таких частиц экспоненциально мало и затухание, следовательно, мало [порядка $\exp\left\{-\frac{m}{T} \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right\}$].

При наличии в плазме достаточно сильного магнитного поля ситуация может измениться. При некоторых ограничениях кинетический способ описания даже в отсутствие столкновений можно

привести к гидродинамическому. Физическая причина этого заключается в том, что магнитное поле как бы «привязывает» частицы к своим силовым линиям, тогда средняя макроскопическая скорость частиц будет определяться «движением» самих силовых линий. Формально такие приближенные уравнения получаются разложением кинетического уравнения по степеням отношения среднего ларморовского радиуса частиц к характерному пространственному масштабу R . Разложение по $\frac{r_H}{R}$ напоминает вывод обычного гидродинамического приближения из кинетической теории, когда разложение ведется по $\frac{\lambda}{R}$ (λ — длина свободного пробега). Это разложение фактически означает переход к описанию плазмы как совокупности квазичастиц — «ларморовских кругов». В получающихся таким образом гидродинамических уравнениях содержатся уже два давления: продольное и поперечное (по отношению к направлению силовых линий магнитного поля). При этом $\gamma = 2$, так как поперечное движение является двумерным.

В статье наряду с кинетическим уравнением используются и гидродинамические упрощенные уравнения в тех случаях, когда их применение обоснованно. Это существенно облегчает рассмотрение некоторых нелинейных задач, хотя бы по той причине, что позволяет обращаться к аналогии с нелинейными движениями в обычной гидродинамике.

3. Ясно, что важную роль в теории коллективных процессов играет теория устойчивости. Обычно устойчивость состояния какой-либо системы исследуется методом возмущения. Если начальное возмущение стационарного состояния системы растет со временем, то состояние неустойчиво по отношению к такому виду возмущений. Практически всегда речь идет об устойчивости лишь по отношению к малым возмущениям — отклонениям от исходного стационарного состояния, когда уравнения, описывающие их, допускают линеаризацию, т. е. разложение по амплитуде возмущений, и отбрасывание всех членов первого порядка аналогично теории малых колебаний. В теории устойчивости состояний разреженной плазмы сохраняются, как правило, многие черты магнитогидродинамической теории устойчивости. Это связано с тем, что часто разреженную плазму можно, как уже отмечалось, с хорошей точностью описывать магнитогидродинамическими уравнениями. Однако разреженной плазме присущи и своеобразные неустойчивости, не описываемые в рамках магнитогидродинамических уравнений. Критерий возникновения этих неустойчивостей и скорости их нарастания могут быть получены лишь в кинетической теории. Интеграл столкновений обычно опускается, что справедливо, если инкременты нарастания неустойчивости значительно больше частоты соударений. При рассмотрении неустойчивости, связанной с локальным отклонением состояния плазмы

от термодинамического равновесия, удобно считать «фон» (стационарное состояние плазмы) однородным и бесконечно протяженным. Исследование устойчивости в подобных случаях сводится к решению соответствующего дисперсионного уравнения, связывающего собственную частоту ω с волновым вектором k . Получение критерия неустойчивости по отношению к некоторым простейшим типам возмущений часто вообще не требует проведения громоздких расчетов: оказывается достаточным ограничиться наглядными рассуждениями [2]. Поддаются анализу также задачи об устойчивости «слабонеоднородной» плазмы, когда можно воспользоваться малостью отношения $\frac{\lambda}{R}$ (λ — длина волны возмущения; R — характерный размер «неоднородности»).

Рассмотрим неустойчивости по отношению к волнообразным искривлениям силовых линий магнитного поля. Известно, что в равновесной плазме такие начальные искривления силовых линий распространяются как альфвеновские магнитогидродинамические волны, которые можно наглядно представить в виде колебаний «упругих нитей» (силовых линий магнитного поля). Для выяснения условий неустойчивости рассмотрим силы, возникающие при искривлении силовой линии (рис. 1). Так как частицы «привязаны» к силовым линиям, при движении по их искривленному участку возникает центробежная сила

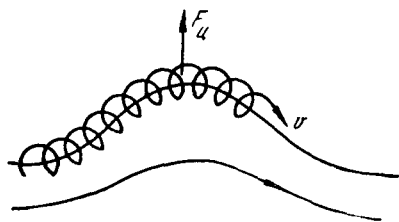


Рис. 1.

$$F_{ц} = \int f \frac{mv_{\parallel}^2}{R} dv, \quad (4)$$

стремящаяся увеличить искривление.

Поскольку, кроме того, каждая «квазичастица» обладает магнитным моментом μ , ориентированным против магнитного поля H , то на частицу в неоднородном магнитном поле будет действовать сила, связанная с током намагничения,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\mu} &= c \nabla \times \int \mu f dv, \\ \mathbf{F}_{\mu} &= \frac{[\mathbf{j}_{\mu} \times \mathbf{H}]}{c} = [\text{rot} \int \mu f dv \times \mathbf{H}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта сила вместе с силой натяжения линий магнитного поля

$$\mathbf{F}_H = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}] \quad (6)$$

стремится вернуть силовую линию в положение равновесия.

Если $F_{\parallel} > F_{\mu} + F_{\text{н}}$, система уходит от положения равновесия, т. е. возникает неустойчивость. Из выражений (4)–(6) трудно получить следующее условие неустойчивости:

$$p_{\parallel} - p_{\perp} > \frac{H^2}{4\pi}, \quad (7)$$

где

$$p_{\parallel} = \int mv_{\parallel}^2 f dv, \quad p_{\perp} = \int \mu H f dv, \quad \mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2H}.$$

Скорость, с которой плазма уходит из положения равновесия, можно найти, приравняв сумму сил $F_{\parallel} - F_{\mu} - F_{\text{н}}$ к произведению массы элемента плазмы на ускорение $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} c \frac{E_{\sim}}{H}$. Из уравнений Максвелла следует, что $E_{\sim} = H_{\sim} \frac{\omega}{ck}$, если выбирать возмущения в виде $\exp(i\omega t - ikx)$. Тогда уравнение равно $\frac{dv}{dt} = i\omega^2 \frac{H_{\sim}}{kH}$. Подставляя значения сил F , получим

$$\omega^2 = \frac{k^2}{q} \left(\frac{H^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right). \quad (8)$$

Эта неустойчивость обязана своим появлением центробежной силе, возникающей при движении частиц по искривленной силовой линии (иногда ее называют «шланговой»), по аналогии с резиновым шлангом, который скручивается, когда по нему течет вода).

Аналогично в другом предельном случае ($p_{\perp} > p_{\parallel}$) приходим к критерию неустойчивости, имеющему вид

$$p_{\perp} \gg p_{\parallel} \left(1 + \frac{H^2}{8\pi p_{\perp}} \right). \quad (9)$$

Условия (7) и (9) показывают, что плазма неустойчива, если распределение частиц по скоростям достаточно сильно отличается от изотропного. С уменьшением H неустойчивость может быть при меньшей анизотропии. Однако при очень малых H велик ларморовский радиус частиц, и представление о квазичастицах — ларморовских кружках — становится неверным. Тем не менее в пределе $H \rightarrow 0$ тоже существует анизотропная неустойчивость. Рассмотренные неустойчивости являются аperiодическими, т. е. зависимость от времени для них имеет вид $\exp \gamma t$. Отклонение состояния плазмы от термодинамического равновесного может привести и к раскачке волн, т. е. к появлению колебательной неустойчивости. Критерий возникновения такой неустойчивости, т. е. условия изменения знака мнимой части ω_i частоты $\omega = \omega_r + i\omega_i$, можно легко получить, рассмотрев баланс обмена энергией между какой-нибудь плазменной волной, возникшей в результате флуктуации, и частицами плазмы. При очень малых ω_i ($\omega_i \ll \omega_r$) волна с данной ω и соответствующим волновым вектором является почти периодической. Ионы (электроны) плазмы, осциллируя в периодическом поле волны, в среднем не изменяют своей энергии.

Исключение составляют те частицы из распределения по скоростям, для которых выполнено условие резонанса с волной. При отсутствии магнитного поля в невозмущенной плазме в резонансе находятся лишь те частицы, скорость которых близка к фазовой скорости волны $\frac{\omega}{k}$ (условие резонанса: $\omega - kv = 0$). При наличии постоянного внешнего магнитного поля эффективно взаимодействовать с волной будут также и те частицы, для которых в их собственной системе координат частота волны $\omega' = \omega - kv$ из-за эффекта Доплера будет близка к циклотронной частоте $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ (или к одной из ее гармоник $n\omega_H$ при $n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Частицы, у которых составляющая скорости вдоль магнитного поля удовлетворяет этому условию, будут непрерывно ускоряться (или замедляться) полем волны подобно тому, как ускоряются ионы в циклотроне. В простейшем случае, когда постоянное магнитное поле отсутствует, в однородной плазме могут распространяться либо чисто поперечные, либо чисто продольные волны. Поперечные волны не будем рассматривать, поскольку их фазовая скорость превышает скорость света $\left(v = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$. Что же касается продольных ленгмюровских электронных колебаний, их фазовая скорость ограничена снизу величиной порядка тепловой скорости электронов (соответствующая минимальная длина волны порядка дебаевского радиуса) и растет с увеличением длины волны. Рассмотрим ленгмюровскую волну с частотой ω (и фазовой скоростью $\frac{\omega}{k}$) в системе координат, движущейся относительно лабораторной со скоростью $\frac{\omega}{k}$ как электростатический потенциал, представляющий собой неподвижную синусоиду амплитуды ϕ_0 : чередование потенциальных «ям» и «горбов» для электронов. Те электроны, скорость которых заметно отличается от $\frac{\omega}{k}$, будут свободно двигаться в этом периодическом поле, сохраняя в среднем свою энергию. Электроны же, скорость которых v отличается от $\frac{\omega}{k}$ на величину, меньшую $\sqrt{\frac{2e\phi_0}{m}}$, будут отражаться от потенциальных «горбов». Эти электроны можно разбить на две группы: скорость одних превышает $\frac{\omega}{k}$; другие имеют меньшую, чем $\frac{\omega}{k}$, скорость. Электроны первой группы, догоняя «горбы» потенциала, отражаются, отдавая энергию волне; электроны второй группы «подхлестываются» волной, получая от нее энергию. Простое рассмотрение баланса энергии при отражении электронов от потенциальных «горбов» приводит к получению условия неустойчивости, называемого обращенным затуханием Ландау. Амплитуда волны будет расти, если в целом энергия переходит от электронов

к волне, а это происходит в том случае, если число электронов первой группы больше, чем второй, т. е. если

$$\frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k} \right) > 0. \quad (10)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы функция распределения электронов по скоростям имела по меньшей мере один дополнительный максимум в области скоростей, превышающих тепловую. Если же всюду $\frac{df}{dv} < 0$, то $\omega_i < 0$, т. е. волна затухает (это и есть затухание Ландау) [3].

Оценив работу, совершаемую электрическим полем волны, можно аналогично вывести критерий неустойчивости и для циклотронного резонанса $\omega = \omega_H - kv$, который оказывается существенным для поперечно поляризованных волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля.

4. Самым трудным вопросом теории коллективных процессов в плазме является вопрос о том, в какое состояние переходит плазма в результате развития неустойчивостей: ведь экспоненциально растущие возмущения рано или поздно станут настолько велики, что нарушатся условия применимости линейного рассмотрения. Принципиальный ответ на этот вопрос, оказывается, можно дать для колебательной неустойчивости. В этом случае состояние, в которое переходит плазма вследствие неустойчивости, очевидно, должно представлять собой своеобразную смесь двух ансамблей: частиц и волн. Взаимодействие частиц с волнами, в частности, приводит к неустойчивости. Взаимодействие между волнами — эффект полностью нелинейный. Если любая волна «существует» в течение времени, значительно большего ее периода ($t \gg \frac{2\pi}{\omega}$), можно применять к ней понятие «квазичастица», а ансамбль таких волн-квазичастиц описывать соответствующей функцией распределения волн по квазимпульсам (волновым векторам k), удовлетворяющей соответствующему кинетическому уравнению. Формально ситуация становится очень близкой к имеющей место в квантовой теории твердого тела, где тоже рассматривается смесь двух газов: электронного и фононного. На самом же деле в теории неустойчивости плазмы все гораздо сложнее, так как уравнения принципиально нелинейны, ибо имеет смысл рассматривать лишь состояния, далекие от термодинамического равновесия. Чтобы написать соответствующие кинетические уравнения теории турбулентной плазмы, надо знать вид соответствующих столкновительных членов: волна—частица и волна—волна. Первый из них выводится в так называемой «квазилинейной» теории, которая принимает во внимание роль малых нелинейных эффектов лишь однажды — учитывает искажение функции распределения частиц из-за обратного воздействия волн [4—6].

В квазилинейном приближении функция распределения частиц по скоростям представляется в виде суммы двух частей:

медленно меняющейся $f_0(v, t)$ (будем называть ее «фоном») и быстро осциллирующей $f_{\sim}(v, t)$. Медленное изменение «фона» вследствие обратного воздействия колебаний на частицы обусловлено усредненными квадратичными эффектами малых быстрых осцилляций, аналогично известному методу Ван дер Поля в нелинейной механике. С другой стороны, термин «квазилинейность» означает, что непосредственное взаимодействие между различными гармониками, обусловленное нелинейностью, не учитывается. Поэтому баланс энергии в k -й гармонике колебаний определяется, как и в линейной теории устойчивости, уравнением

$$\frac{d}{dt} E_k^2 = 2\nu E_k^2, \quad (11)$$

где ν — мнимая часть частоты.

Рассмотрим, как получаются уравнения квазилинейного приближения для продольных электронных ленгмюровских колебаний в одномерном случае

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi n_{\sim} e, \quad n_{\sim} = \int f_{\sim} dv. \quad (12)$$

Разобьем функцию распределения на медленно и быстро меняющиеся части

$$\begin{aligned} f_{\sim} &= \sum (f_k e^{i(kx - \omega_k t)} + \text{к. с.}), \\ E &= \sum (E_k e^{i(kx - \omega_k t)} + \text{к. с.}). \end{aligned} \quad (13)$$

Величины f_k и E_k связаны между собой обычным соотношением, как и в линейной теории

$$f_k = -i \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\omega_k - kv} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot E_k. \quad (14)$$

Уравнение для медленно меняющейся части функции распределения f_0 мы получим, производя усреднение по быстрым осцилляциям,

$$\langle f \rangle = f_0. \quad (15)$$

Для такого усреднения необходимо, чтобы в плазме имелось одновременно много волн с различными волновыми векторами и хаотически распределенными фазами. Составленные из таких волн волновые «пакеты» должны иметь достаточно большую ширину, чтобы можно было пренебречь захватом частиц в «потенциальные» ямы отдельных гармоник пакета. Например, в рассматриваемом случае продольных ленгмюровских колебаний для этого необходимо, чтобы разброс фазовых скоростей волн в пакете значительно превышал ту скорость, с которой захваченная волной частица двигалась бы в потенциальной яме $e\Phi_0$: $\Delta \frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{e\Phi_0}{m}\right)^{1/2}$. Учитывая, что $\langle E f_0 \rangle = \langle E \rangle f_0$, получим из (12) — (14) следующее уравнение для f_0 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (16)$$

где коэффициент диффузии в пространстве скоростей D пропорционален квадрату электрического поля волн

$$-\frac{e^2}{m^2} \sum_{kk'} \left\langle (E_{k'} \cdot e^{i(k'x - \omega_{k'} t)} + \text{к. с.}) \left(\frac{E_k}{i(\omega_k - kv)} e^{i(kx - \omega_k t)} + \text{к. с.} \right) \right\rangle := -\frac{e^2}{m^2} 2\pi \sum_k |E_k|^2 \text{Im}(\omega_k - kv)^{-1}.$$

Уравнение (16) описывает обратное влияние ленгмюровских колебаний на функцию распределения частиц. Область применимости уравнений квазилинейной теории ограничена случаями, когда инкремент (или декремент) колебаний значительно меньше их частоты; если же это условие не выполнено, то разделение функции распределения на быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части невозможно.

Из уравнения (16) для усредненной функции распределения частиц f_0 ясно, что при возбуждении коллективных степеней свободы — волн — в плазме появляется, кроме обычной «столкновительной», дополнительная диффузия в пространстве скоростей. Данное уравнение, в отличие от исходного уравнения (12), уже не сохраняет энтропию. В этом нет ничего удивительного, так как процедура усреднения, использованная при переходе от выражения (12) к уравнению (16), соответствует переходу от динамического к статистическому описанию плазмы. Применение подобного же подхода к описанию волн приводит к кинетическому уравнению для волн-квазичастиц [7—10]. Такой статистический подход по существу эквивалентен корреляционному методу, используемому в теории гидродинамической турбулентности. Для волновых неустойчивостей с $\frac{\nu}{\omega} \ll 1$ (инкремент много меньше частоты) зацепляющаяся цепочка уравнений для корреляционных функций может быть разорвана по малому параметру $\frac{\nu}{\omega}$ [11]. Неустойчивости же неволнового характера с $\nu \geq \omega$ не удастся рассмотреть таким способом, так как в задаче отсутствует малый параметр. В подобных случаях в теории коллективных процессов для получения результатов пользуются полуколичественными оценками.

Настоящий обзор посвящен конкретным применениям теории коллективных процессов для построения теории толщины ударных волн в разреженной плазме.

В разреженной плазме, в силу «коллективных» свойств, возможно существование специфических ударных волн с толщиной, значительно меньшей длины свободного пробега. На первый взгляд такой вывод мог бы показаться парадоксальным. Представим себе (рис. 2) ударную волну с толщиной Δ , значительно меньшей длины свободного пробега l . Более быстрые частицы ($v > u$) из области слева (нагретая ударной волной плазма),

казалось бы, могли, свободно двигаясь в сторону невозмущенной плазмы, размыть переходную область до толщины l — длины свободного пробега. Какие эффекты могут предотвратить такое расплывание переходной области?

1) Самый простой случай имеет место при наличии магнитного поля, параллельного плоскости фронта. Такое магнитное поле заворачивает ионы и электроны плазмы на расстояниях порядка их ларморовского радиуса r_H . Следовательно, можно ожидать, что $\Delta \sim r_H$. Достаточно сильное магнитное поле ($\frac{H^2}{8\pi} \gg nT$)

препятствует размыванию даже в том случае, если оно не обязательно лежит в плоскости фронта.

Это связано с тем, что скорости ударной волны при $\frac{H^2}{8\pi} \gg nT$ значительно больше тепловой скорости частиц, и, следовательно, доля ионов (электронов), обгоняющих волну, экспоненциально мала. В задачах этого круга возникает следующий кажущийся парадокс. Состояния с обеих сторон фронта ударной волны связаны соответствующими законами сохранения (адиабатой Гюгонио), согласно которым энергия поступательного движения невозмущенной плазмы трансформируется во внутреннюю энергию плазмы после прохождения ударной волны. Что же приводит к диссипации, если $\Delta \ll l$? Ответ на этот вопрос заключается в том, что в возмущенном состоянии плазмы за фронтом волны основная доля внутренней энергии приходится на интенсивные плазменные колебания. Происхождение таких нелинейных колебаний не обязательно связано с неустойчивостью плазмы. Оно тесно связано со специфическими дисперсионными свойствами плазмы. Вторая глава специально посвящается изложению теории нелинейных упорядоченных колебаний плазмы (ее результаты представляют интерес и вне связи с ударными волнами). Нестационарные нелинейные движения плазмы представляют собой слишком сложную задачу (удается рассмотреть лишь некоторые частные случаи при различных упрощающих предположениях). Зато установившиеся нелинейные незатухающие колебания рассмотрены относительно полно. Здесь следует отметить полезную аналогию между нелинейными колебаниями плазмы и волнами конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. В теории нелинейных колебаний плазмы также появляются «уединенные» волны, скорость которых зависит от амплитуды. Нелинейные волны в плазме могут разрушаться вследствие различных плаз-

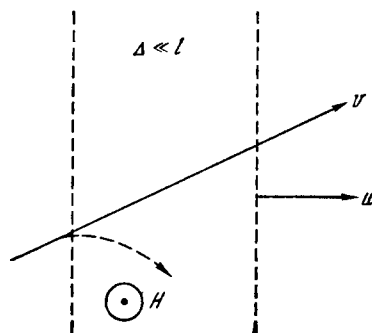


Рис. 2.

пательного движения невозмущенной плазмы трансформируется во внутреннюю энергию плазмы после прохождения ударной волны. Что же приводит к диссипации, если $\Delta \ll l$? Ответ на этот вопрос заключается в том, что в возмущенном состоянии плазмы за фронтом волны основная доля внутренней энергии приходится на интенсивные плазменные колебания. Происхождение таких нелинейных колебаний не обязательно связано с неустойчивостью плазмы. Оно тесно связано со специфическими дисперсионными свойствами плазмы. Вторая глава специально посвящается изложению теории нелинейных упорядоченных колебаний плазмы (ее результаты представляют интерес и вне связи с ударными волнами). Нестационарные нелинейные движения плазмы представляют собой слишком сложную задачу (удается рассмотреть лишь некоторые частные случаи при различных упрощающих предположениях). Зато установившиеся нелинейные незатухающие колебания рассмотрены относительно полно. Здесь следует отметить полезную аналогию между нелинейными колебаниями плазмы и волнами конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. В теории нелинейных колебаний плазмы также появляются «уединенные» волны, скорость которых зависит от амплитуды. Нелинейные волны в плазме могут разрушаться вследствие различных плаз-

менных неустойчивостей. Некоторые типы неустойчивостей нелинейных волн рассмотрены в заключение § 2. Один из типов возможных неустойчивостей — так называемая «пучковая» неустойчивость — проявляется в нелинейных волнах в магнитном поле и связан с электрическим током волны. Если упорядоченная скорость электронов относительно ионов превышает их среднюю тепловую скорость, то энергия волны вследствие пучковой неустойчивости будет перекачиваться в энергию электростатических продольных колебаний плазмы. Существует и другой тип неустойчивости, присущий нелинейным периодическим волнам — так называемые «распадные» неустойчивости, когда регулярные колебания распадаются, рождая целый спектр неупорядоченных волн. Эта неустойчивость в известном смысле напоминает распад коллективных возбуждений в квантовой теории систем многих частиц. Совокупность всех этих факторов и приводит к формированию структуры ударной волны (§ 3).

2) Когда магнитное поле мало или вообще отсутствует, механизм, мешающий расплыванию фронта ударной волны, имеет иную природу. Предположим, что вследствие расплывания некоторая доля быстрых частиц проникнет в невозмущенную плазму перед фронтом ударной волны (см. рис. 2). Тогда состояние плазмы в этой области представит собой смесь равновесного невозмущенного распределения частиц и некоторой группы быстрых частиц, т. е. станет неравновесным (в итоге распределение частиц по скоростям будет отличаться от максвелловского). Неравновесная плазма неустойчива по отношению к раскашке различного рода колебаний. Флуктуирующие электрическое и магнитное поля колебаний, возникших вследствие неустойчивости, приводят к рассеянию ионов и электронов. Иначе говоря, при наличии такого сорта флуктуирующих полей нужно переопределить понятие длины свободного пробега. В достаточно редкой плазме рассеяние на неравновесных шумах оказывается значительно более существенным, чем обычные «парные» кулоновские столкновения частиц.

§ 2. Нелинейные колебания плазмы

1. Наиболее существенная роль нелинейных эффектов, как известно, состоит в увеличении крутизны переднего фронта. Однако в плазмодинамике по мере роста крутизны фронта часто начинают играть важную роль дисперсионные эффекты. Это приводит к интересным особенностям возникающих асимптотических движений — к спонтанному возникновению интенсивных колебаний вследствие конкуренции между нелинейностью и дисперсией. Данный параграф посвящается систематическому изложению теории нелинейных незатухающих колебаний. Начнем обсуждение этого вопроса с качественного рассмотрения нелинейного искажения формы какого-либо начального возмущения.

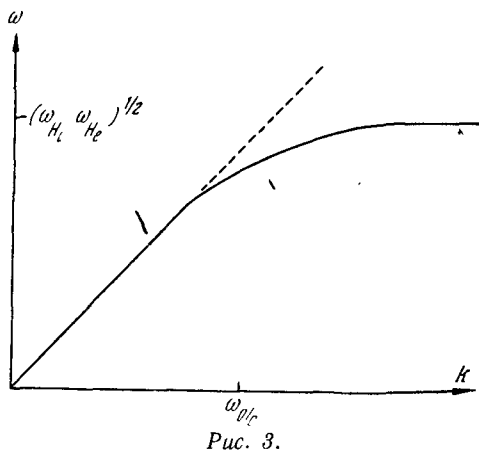
В линейной теории колебательное движение плазмы представляет собой суперпозицию отдельных невзаимодействующих волн — гармоник $[\exp i(\omega t - \mathbf{k}r)]$, где ω — частота; \mathbf{k} — волновой вектор]. Между ω и \mathbf{k} , вообще говоря, существует определенная связь — закон дисперсии $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Ясно, что учет нелинейности колебаний может изменить картину движения, имеющую место в линейной теории. Обратимся к наглядной аналогии со звуковыми колебаниями в обычной газодинамике. Хорошо известно, что звуковые волны, гармонические в линейном приближении, из-за конечности амплитуды с течением времени искажаются. Эта нелинейная деформация заключается в том, что участки профиля, которым соответствует большая скорость, стремятся опередить участки с меньшей скоростью и в конце концов образуются разрывы (если звук не успеет затухнуть).

Теперь проследим за возможным нелинейным искажением профиля какой-нибудь гармонической волны в разреженной плазме. Тенденция к увеличению крутизны переднего фронта из-за нелинейности сохраняется и в волнах в разреженной плазме. [Исключение составляют волны с поперечной поляризацией, как, например, альфвеновские магнитогидродинамические. В уравнениях, описывающих такие волны, нелинейные члены типа $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ выпадают.] Если в газовой динамике рост крутизны фронта ограничивается диссипативными эффектами, то в разреженной плазме главную роль могут играть эффекты дисперсии. На примере с гармонической волной «конкуренцию» между нелинейностью, стремящейся опрокинуть волну, и дисперсией можно проиллюстрировать следующим образом. Увеличение крутизны переднего фронта означает рождение высших гармоник в волне под влиянием нелинейности. В первом (линейном) приближении всякая волна остается гармонической $[\exp i(\omega t - \mathbf{k}r)]$; во втором приближении должны появляться вторые гармоники (как это имеет место в звуковой волне). В разложении по амплитуде волны уравнение для поправки второго приближения примет вид

$$\hat{L}_0 f_2 = \hat{l} f_1^2 \exp i(2\omega t - 2\mathbf{k}r). \quad (17)$$

Здесь f — отклонение какой-либо величины, характеризующей плазму или поле, от равновесного значения (индексы 1, 2 означают соответственно первое и второе приближение); L_0 — линейный оператор, соответствующий линейным колебаниям плазмы с каким-то законом дисперсии $\omega = \omega(\mathbf{k})$. В известном смысле уравнение (17) имеет вид уравнения движения «осциллятора» под действием вынуждающей силы $\sim f_1^2$. Ясно, что вторая гармоника будет возбуждаться, если эта сила находится в резонансе с собственной частотой осциллятора, т. е. если удвоенной исходной частоте соответствует (в законе дисперсии) волновой вектор, равный $2\mathbf{k}$. Такой «резонанс» будет осуществляться лишь для линейного закона дисперсии $\omega = c\mathbf{k}$, как это и имеет место в обыч-

ном звуке. Для произвольного закона дисперсии, вообще говоря, уже не будет перекачки энергии основной гармонике во вторую и т. д., если «вынуждающая» сила находится далеко от резонанса. Такая качественная иллюстрация показывает, что периодические волны в плазме в области частот, где существенно отклонение от линейного закона дисперсии, могут распространяться без искажения своей формы из-за нелинейности. Зная ход дисперсионных кривых $\omega(k)$ из теории линейных колебаний плазмы, можно, таким образом, предвидеть некоторые общие свойства нелинейных движений. Пусть, например, речь идет о магнитозвуковых колебаниях, распространяющихся поперек магнитного поля в плазме.



При частотах, меньших ω_{H_i} — ларморовской частоты ионов, фазовая скорость таких колебаний равна

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)^{1/2} = \left(\frac{H_0^2}{4\pi Q_0} + 2 \frac{p_0}{Q_0} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

где H_0 — невозмущенное магнитное поле; Q_0 — плотность; p_0 — давление. С ростом частоты фазовая скорость меняется из-за дисперсии. В общем слу-

чае закон дисперсии даже для таких волн весьма сложен. Рассмотрим два противоположных предельных случая.

Плазма низкого давления ($p_0 \ll \frac{H_0^2}{8\pi}$). Фазовая скорость от значения $\frac{H_0}{\sqrt{4\pi Q_0}}$ при малых частотах с ростом ω уменьшается до нуля при частоте $(\omega_{H_i} \omega_{H_e})^{1/2}$ (так называемая «гибридная» частота $(\frac{e^2 H^2}{m M c^2})^{1/2}$; mM — массы электрона и иона). Дисперсионная кривая для этого типа колебаний для наглядности показана на рис. 3. Соответствующий закон дисперсии имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{H_0^2}{4\pi Q_0} \cdot \frac{\omega_0^2/c^2}{k^2 + \omega_0^2/c^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi n l^2}{m}.$$

Отклонения от линейного закона дисперсии начинают существенно проявляться при $k \rightarrow \frac{\omega_0}{c}$. Величина $\frac{c}{\omega_0}$ определяет характерный пространственный масштаб для установившихся

нелинейных магнитозвуковых волн. Все это справедливо для плазмы в не слишком сильном магнитном поле $\frac{H^2}{8\pi} \ll nmc^2$. В такой плазме состояние в магнитозвуковой волне оказывается квазинейтральным. Если рассматривать, например, очень сильные магнитные поля

$$\frac{H_0^2}{8\pi} \gg n_0 mc^2,$$

то для частот, больших ω_{H_i} , становится существенным отступление от квазинейтральности. Закон дисперсии для таких колебаний имеет вид (опять-таки при пренебрежении тепловым движением)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{H_0^2}{4\pi Q_0} \frac{\frac{4\pi Q_0}{H_0^2} \Omega_0^2}{k^2 + \frac{4\pi Q_0^2}{H_0^2} \Omega_0^2} \quad \left(\Omega_0^2 = \frac{4\pi n l^2}{M} \right). \quad (19)$$

Фазовая скорость стремится к нулю при ионной ленгмюровской частоте $\omega \rightarrow \Omega_0$. Характерная длина, при которой становится существенно отклонение от линейного закона дисперсии, есть $\frac{H_0 M}{4\pi Q_0 e}$.

Плазма «большого давления» ($\rho_0 \gtrsim \frac{H^2}{8\pi}$). В этом случае дисперсия начинает проявляться при $\omega \rightarrow \omega_{H_i}$. Действительно, когда частота ω становится больше ω_{H_i} , за время одного колебания траектория иона будет слабо искривляться магнитным полем. Иначе говоря, движение его в волне будет уже не двумерным, а одномерным. Поэтому эффективный показатель адиабаты γ ионов, характеризующий скорость магнитозвуковой волны, при $\omega > \omega_{H_i}$ нужно полагать равным 3 (а не 2, как при $\omega < \omega_{H_i}$). Следовательно, фазовая скорость волны при $\omega > \omega_{H_i}$ увеличивается. Таким образом, в плазме «большого давления» в рассматриваемом интервале частот фазовая скорость волн должна не падать, а расти с частотой. Характерный размер нелинейных волн в этом случае тоже иной; он порядка ларморова радиуса ионов.

До сих пор речь шла о волнах, распространяющихся строго перпендикулярно к магнитному полю. Как показывает линейная теория малых колебаний, законы дисперсии резко меняются даже при небольшом отклонении направления распространения от перпендикулярного. Это связано с тем, что в таких волнах появляется составляющая электрического поля вдоль H_0 . Электроны вдоль H_0 под действием этого электрического поля двигаются гораздо быстрее, чем поперек H_0 , но сильно искажают распределение токов и зарядов в волне. Рассмотрим опять «холодную» плазму.

Для углов, удовлетворяющих условию $\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll \theta \ll 1$, закон дисперсии, связывающий ω с k , приобретает особенно простой асимптотический вид (если ограничиться не слишком короткими волнами $\lambda \gg \frac{c}{\omega_0} 1/\theta$)

$$\frac{\omega^2}{k^2} \approx \frac{H_0^2}{4\pi Q_0} \left(1 + \frac{k^2 \theta^2 c^2}{\Omega_0^2}\right). \quad (20)$$

Отклонение от линейного хода $\omega = \omega(k)$ становится существенным для длин волн порядка $\frac{c}{\Omega} \theta$. С ростом частоты в таких волнах фазовая скорость возрастает. Следует ожидать, что это приведет к изменению характера нелинейных движений.

Перейдем теперь к случаю, когда магнитное поле вообще отсутствует. При этом ионные звуковые колебания в разреженной плазме, как известно из линейной теории, имеют смысл, если давление электронов значительно превышает давление ионов $p_e \gg p_i$. Такие условия реализуются, например, в неизометрической плазме, когда температура электронов значительно превышает ионную. Если для простоты принять ионы «холодными» ($T_i = 0$), то закон дисперсии будет подобен закону (19):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{T_e}{M} \cdot \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k^2}, \\ \kappa^2 &= \frac{\Omega_0^2 M}{T_e}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Роль характерного масштаба здесь играет дебаевский радиус $1/\kappa^1$.

Все рассмотренные случаи показывают, что на малых расстояниях становятся существенными эффекты дисперсии. В обычной гидродинамике на малых расстояниях становятся существенными диссипативные эффекты, которые и ограничивают рост крутизны переднего фронта. В отличие от обычной газовой динамики, в разреженной плазме такой причиной являются дисперсионные эффекты. Различие между этими двумя группами эффектов находит свое отражение в математической структуре исходных уравнений. Диссипативные эффекты (вязкость, теплопроводность и т. п.) нарушают их обратимость — увеличивают порядок производных на нечетное число (как, например, вязкость добавляет к уравнению Эйлера в газодинамике члены со вторыми производными). Дисперсионные эффекты не нарушают обратимости и увеличивают порядок дифференцирования в уравнениях на четное число.

¹ Наконец, колебания электронов в холодной плазме без магнитного поля имеют в качестве дисперсионного соотношения просто $\omega^2 = \omega_0^2$. Здесь нет характерного масштаба, и можно сконструировать установившиеся нелинейные волны любого пространственного периода.

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений, описывающих распространение ионно-звуковых колебаний при условии $T_e \gg T_i$. При сделанных предположениях одномерное плоское движение будет описываться системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v)}{\partial x} &= 0; \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 4\pi e \left(n_i - n_0 e^{\frac{e\varphi}{T}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Здесь M , v , n_i — соответственно масса, скорость и плотность ионов. Последнее уравнение системы (22) содержит старшую (вторую) производную. Для движений с характерным масштабом, значительно превышающим дебаевский радиус $(T/4\pi n e^2)^{1/2}$, можно считать плазму квазинейтральной: $n_i = n_0 \exp(e\varphi/T)$, т. е. в последнем уравнении системы (22) надо опустить член $\partial^2 \varphi / \partial x^2$. Тогда, исключив из уравнений электрическое поле, получим

$$\left. \begin{aligned} M \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{T}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Эта система по форме совпадает с уравнениями изотермического движения ($\gamma = 1$) обычной газовой динамики. Здесь фронт, вообще говоря, любого начального возмущения с течением времени будет становиться все круче и круче. Такое нелинейное искажение формы профиля возмущения нагляднее всего иллюстрируется для частного случая, когда начальное распределение скорости и плотности таково, что одну из этих величин можно представить как функцию другой. В обычной газовой динамике для аналогичного случая существует решение Римана, описывающее так называемую простую волну произвольной амплитуды. Зависимость скорости от времени и координаты в этом решении определяется неявной функцией

$$x = t [v \pm c] + \chi(v), \quad (24)$$

где c — скорость звука, а $\chi(v)$ — функция, зависящая от начальных условий. Согласно выражению (24), профиль течения будет меняться так, что начиная с некоторого момента решение становится трехзначным. В обычной газовой динамике (с малой длиной свободного пробега) в подобных условиях возникает установившееся течение с разрывом (ударной волной). На основе описанной математической аналогии и возникла гипотеза

о возможности бесстолкновительной ударной волны в разреженной плазме. В рассматриваемом случае, однако, как только передний фронт возмущения стал достаточно крутым, включается действие дисперсионных эффектов [для задачи (23), например, они связаны с отступлением от квазинейтральности]. Интересно, что в обычной гидродинамике несжимаемой жидкости хорошо исследован аналог таких нелинейных движений — нелинейные волны на поверхности тяжелой жидкости. Если же глубина канала мала, уравнения двумерного движения сводятся, как известно, к уравнениям одномерного движения (для средней скорости жидкости v в данном сечении и глубины жидкости h):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hv) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где g — ускорение силы тяжести. Это так называемые «уравнения мелкой воды», являющиеся нулевым приближением в асимптотическом разложении точных уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости в канале конечной глубины по малому параметру h_0/L , где h_0 — глубина канала, L — характерный размер (например, длина волны). Уравнения мелкой воды по форме совпадают с уравнениями, описывающими плоские изэнтропические течения сжимаемого газа (с показателем адиабаты $\gamma = 2$). Поэтому в теории мелкой воды имеют смысл решения типа простых волн Римана. Из этих решений следует, что произвольный начальный профиль поверхности жидкости с течением времени стремится к образованию гребня. Уравнения мелкой воды, кроме того, в точности совпадают с уравнениями движения разреженной плазмы (при условии $nT \ll \frac{H^2}{8\pi}$) поперек магнитного поля для длин волн, значительно превышающих c/ω_0 (если, например, $H^2 \ll nmc^2$). При этом роль глубины канала h в уравнениях плазмы играет магнитное поле H . По мере роста крутизны переднего фронта волны в газовой динамике начинают играть роль диссипативные эффекты, в динамике редкой плазмы, напротив, появляются дисперсионные эффекты, когда характерный размер приближается к c/ω_0 . В теории мелкой воды, когда L приближается к h_0 , также начинают играть роль дисперсионные эффекты: уравнения (25) становятся несправедливыми, но когда h_0/L все еще мало, их можно «улучшить», добавляя следующие члены разложения по h_0/L точных уравнений. Эти члены имеют вид старших производных, ответственных за дисперсионные эффекты. Закон дисперсии для волн малой амплитуды в такой теории имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kh_0).$$

При малых kh_0 его можно привести к виду

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \approx gh_0 \left[1 - \frac{1}{3} (kh_0)^2 + \dots\right] \quad (26)$$

Нелинейные колебания на поверхности тяжелой жидкости в настоящее время хорошо изучены для случая так называемых установившихся волн, т. е. волн, не меняющих свою форму с течением времени. Помимо периодических волн с длинами волн порядка h_0 , существуют так называемые «уединенные» волны, представляющие собой распространяющиеся обособленные возвышения уровня жидкости в канале.

На основании отмеченной аналогии с волнами в разреженной плазме в последней можно ожидать существование похожих периодических и уединенных волн. Однако в плазме из-за разнообразия законов дисперсии в различных случаях мы увидим и более разнообразные типы установившихся волн. Так, при определенных условиях по плазме могут распространяться уединенные волны «разрежения» (которым в теории поверхностных волн должны были бы соответствовать уединенные волны типа впадин).

В § 3 будет показано, что в разреженной плазме нелинейные волны такого типа неразрывно связаны с ударными волнами. До сих пор рассуждения проводились для конечной, но малой амплитуды волн. Для волн с достаточно большой амплитудой положение может быть совершенно иным. Дисперсионные эффекты могут оказаться недостаточными для ограничения роста крутизны, и фронт при амплитудах, превышающих некоторое критическое значение, может «опрокинуться». Возникают области многоскоростного течения (разумеется, это имеет смысл для первоначально холодной плазмы).

2. В газовой динамике асимптотической формой (при $t \rightarrow \infty$) любого начального движения является, вообще говоря, ударная волна. Какой характер должны иметь асимптотические движения в разреженной плазме? Можно ожидать, что при $t \rightarrow \infty$ в конце концов установится какое-то стационарное волновое движение. Предполагая, что такие установившиеся движения существуют, в одномерном случае их нетрудно исследовать, непосредственно решая уравнения динамики плазмы. Стандартная процедура получения таких решений заключается в том, что в исходных уравнениях выбирают систему координат, движущуюся вместе с волной. В такой системе отсчета пропадает зависимость от времени и задача сводится к отысканию стационарного течения. Скорость волны u сначала входит в задачу как свободный параметр. Затем из условия разрешимости определяются границы, внутри которых может меняться u , а также связь u с амплитудой волны. Интерес для теории толщины ударных волн представляет исследование установившихся нелинейных волн в тех случаях,

когда закон дисперсии соответствующих колебаний при малой амплитуде стремится к линейному при больших длинах волн (звук), а дисперсионные эффекты проявляются на коротких волнах.

Начнем рассмотрение с волн, распространяющихся поперек магнитного поля. В приближении малого ларморовского радиуса («дрейфовое» приближение) здесь справедливы гидродинамические уравнения. Единственным типом установившегося движения для этих уравнений является тривиальный плоско-параллельный поток. Для того чтобы найти нетривиальные установившиеся движения,

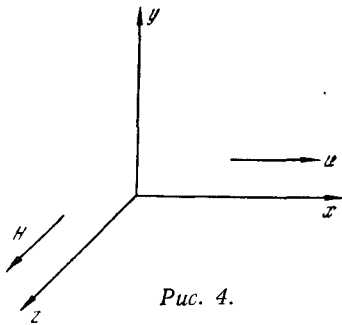


Рис. 4.

нужно учесть эффекты дисперсии, проявляющиеся на малых расстояниях. Эффекты дисперсии связаны с отступлением от квазинейтральности, с инерцией электронов. При учете хотя бы одного из этих факторов можно получить установившиеся движения, отличные от плоско-параллельного потока. Им соответствуют две характерные длины.

Рассмотрим, как дисперсионные эффекты приводят к формированию установившихся волн для холодной

плазмы ($nmc^2 \gg \frac{H^2}{8\pi} \gg nT$). Рассматривая этот случай, мы не будем учитывать тепловое движение, так что система уравнений, описывающая движение ионов и электронов и профиль полей в установившейся волне, примет вид ($m_i = M$, $m_e = m$; волна распространяется вдоль оси x , магнитное поле направлено вдоль оси y ; рис. 4):

$$m_{i,e} \dot{v}_{x_{i,e}} (v_{x_{i,e}} - u) = \pm e E_x \pm \frac{e}{c} v_{y_{i,e}} H, \quad (27)$$

$$m_{i,e} \dot{v}_{y_{i,e}} (v_{x_{i,e}} - u) = \pm e E_y \mp \frac{e}{c} v_{x_{i,e}} H, \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \frac{u}{c} (H - H_0), \\ -H' &= \frac{4\pi}{c} ne (v_{y,i} - v_{y,e}), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} n_{i,e} &= \frac{n_0 u}{u - v_{i,e}}, \\ n_i &= n_e. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из последнего уравнения, выражающего квазинейтральность, вытекает равенство компонент скорости электронов и ионов вдоль оси x . Исключая из этих уравнений все переменные, кроме H ,

получим (с точностью до членов с $\frac{m}{M}$)

$$-\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2 u} \frac{d}{dx} \left[\frac{dH}{dx} \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u \right) \right] \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u \right) =$$

$$= \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u \right) H + u H_0. \quad (31)$$

Это уравнение определяет профиль изменения H в исследуемой установившейся волне. Интегрируя один раз, приведем его к виду

$$-a^2 H'^2 \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u \right)^2 = \frac{(H^2 - H_0^2)^2 - 16\pi n_0 M u^2 (H - H_0)^2}{16\pi n_0 M} + C$$

$$\left(a^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2} = \frac{c^2}{\omega_0^2} \right). \quad (32)$$

Перебирая различные значения C —константы интегрирования, мы получаем различные решения. Удобно проследить за характером решений в зависимости от C , построив интегральные кривые на фазовой плоскости (H, H') . Эти кривые приведены на рис. 5.

Решения уравнения (32) должны описывать периодические волны конечной амплитуды. Исключение составляет решение, соответствующее особому выбору величины C :

$$C = 0.$$

Такой выбор соответствует условию $\frac{dH}{dx} = 0$ при $H = H_0$. Тогда уравнение примет вид

$$\pm a \frac{dH}{dx} = \frac{(H - H_0)}{\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 M u} - u} \cdot (16\pi n_0 M)^{-1/2} \cdot \sqrt{16\pi n_0 M u^2 - (H + H_0)^2}. \quad (33)$$

Если выбрать определенный знак перед корнем в равенстве (33), то нельзя построить физически разумное решение для H на всей оси x . Существуют, однако, решения всюду непрерывные (до второй производной включительно), в которых при некоторых $x = x_1$ производная H' меняет знак. В этой точке H достигает своего максимального значения $H_{\text{макс}}$. Уравнение $\frac{dH}{dx}(x_1) = 0$ связывает амплитуду магнитного поля $H_{\text{макс}}$ со скоростью распространения волны и играет роль, аналогичную дисперсионному уравнению

$$16\pi n_0 M u^2 - (H_{\text{макс}} + H_0)^2 = 0. \quad (34)$$

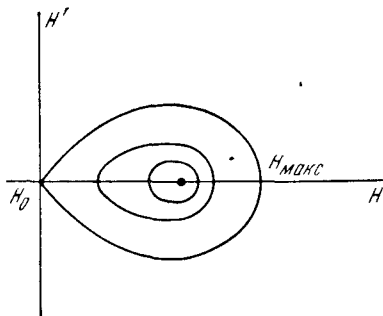


Рис. 5.

Решая уравнение (18) относительно u , получим [12—15]

$$u^2 = \frac{(H_{\text{макс}} + H_0)^2}{16\pi n_0 M}. \quad (35)$$

В предельном случае малых амплитуд ($H_{\text{макс}} \rightarrow H_0$) уравнение (35) определяет скорость так называемого магнитного звука. С ростом амплитуды скорость распространения волны возрастает. Интегрирование выражения (33) дает профиль изменения H в такой волне. Профиль решения оказывается симметричным

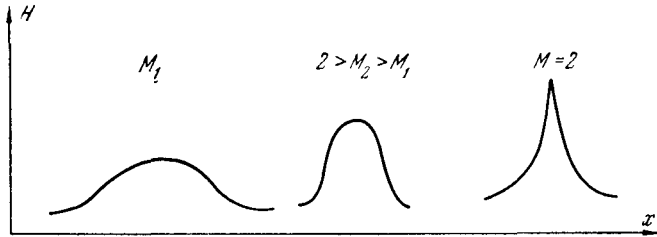


Рис. 6.

относительно $x = x_1$ и представляет собой одиночный импульс магнитного поля с шириной порядка

$$\delta \sim \frac{c}{\omega_0},$$

где

$$\omega_0 = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, решение уравнения (33) должно описывать аналог уединенной волны в разреженной плазме. Простое аналитическое выражение для профиля магнитного поля в уединенной волне легко получить для малых амплитуд ($H_{\text{макс}} - H_0 < H_0$). Оно имеет вид

$$H = H_0 \left\{ 1 + 2 \left(\frac{u^2}{\left(\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}} \right)^2} - 1 \right) \text{sh}^2 \frac{x}{\frac{c}{\omega_0}} \sqrt{ \frac{u^2}{\left(\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}} \right)^2} - 1 } \right\}. \quad (36)$$

На рис. 6 изображены зависимости $H = H(x)$ для различных значений числа Маха $\mathcal{M} = \frac{u}{H_0/\sqrt{4\pi n_0 M}}$.

Уравнение (17) имеет действительное решение не при сколь угодно больших u и H . Так, например, для уединенных волн решения существуют при $H_{\text{макс}} \leq 3H_0$ (т. е. $u < 2 \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}}$).

При приближении амплитуды волны к критической, плотность ионов (электронов) на гребне волны стремится к бесконечности. Физически это означает следующее. Уединенная волна представ-

ляет собой «горб» электрического потенциала φ . В системе координат, связанной с волной, поток ионов из $x = \infty$ набегаёт на этот потенциальный барьер со скоростью u . При не слишком больших амплитудах начальная кинетическая энергия иона $\frac{Mu^2}{2}$ превышает высоту потенциального барьера $e\varphi_{\text{макс}}$ и ионы, несколько задержавшись, переваливают через него. Однако, как следует из решения, с ростом амплитуды волны потенциальный барьер становится настолько высоким, что $e\varphi_{\text{макс}} > \frac{Mu^2}{2}$. Момент $e\varphi_{\text{макс}} \approx \frac{Mu^2}{2}$ соответствует амплитуде $H_{\text{макс}} = 3H_0$ (иначе говоря, критическое число Маха равно 2). На гребне такой волны ионы, потеряв скорость, «останавливаются», а их плотность возрастает до бесконечности. При ещё больших амплитудах ионы просто «отражались» бы от барьера, но соответствующее такой картине движение уже не описывается в рамках нашей исходной системы уравнений (27) — (30), так как после отражения течение становится «многопоточковым» (взаимопроникающие потоки набегающих и отраженных ионов).

Таким образом, мы видим, что эффекты дисперсии не могут остановить «прокидывание» волн с достаточно большой амплитудой в холодной плазме.

Если бы мы учли тепловой разброс скоростей ионов, то даже при малых амплитудах волны могли бы найтись ионы, отражающиеся от барьера (это ионы с малой относительной скоростью $u - v_x$), т. е. двигавшиеся первоначально в направлении распространения волны со скоростью, близкой к u ; эти ионы можно назвать «захваченными». Такие ионы отбирают энергию от волны, вызывая её затухание. Однако мы пока пренебрегаем затуханием. Без учета захваченных ионов легко найти решение для уединенной волны и в более общем виде с учетом теплового разброса, рассматривая функцию распределения ионов по скоростям.

Очень похожий класс нелинейных движений может осуществляться и в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля — это нелинейные ионно-звуковые колебания. Так как из линейной теории известно, что ионный звук имеет место лишь при $T_e \gg T_i$, мы ограничимся этим случаем.

Предположив, что все величины зависят от x и t только в комбинации $x - ut$, систему (22) можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка для потенциала

$$\varphi'' = 4\pi n_0 e \cdot \left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}}} - \exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right) \right\}. \quad (37)$$

Интегрируя уравнение (37) один раз, получим

$$-\frac{1}{2} (\varphi')^2 = 4\pi n_0 e \left(-\frac{uM}{e} \sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}} - \frac{T}{e} \exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right) \right) + C. \quad (38)$$

В зависимости от выбора константы интегрирования C можно сконструировать различные периодические волны (см. интегральные кривые на фазовой плоскости рис. 7). Особый случай представляет величина C , выбираемая из условия $\varphi' \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 0$, т. е. $C = 4\pi n_0 (Mu^2 + T)$. На фазовой плоскости этот случай выделен особо. Он соответствует уединенной волне (рис. 8), представляющей собой симметричный «горб» потенциала.

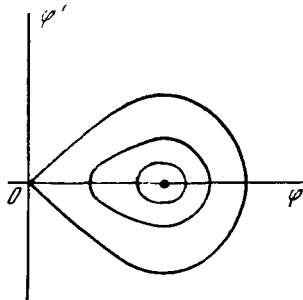


Рис. 7.

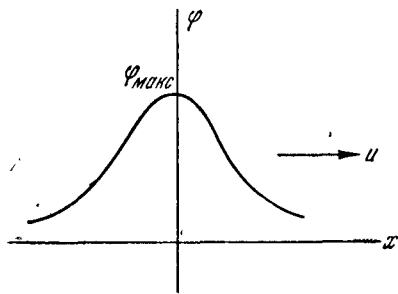


Рис. 8.

Скорость распространения такой волны u как функцию $\varphi_{\text{макс}}$ амплитуды потенциала найдем из выражения (38), полагая $\varphi' = 0$ при $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$ [4],

$$u^2 = \frac{T}{2M} \cdot \frac{\left[\exp\left(\frac{e\varphi_{\text{макс}}}{T}\right) - 1 \right]^2}{\exp\left(\frac{e\varphi_{\text{макс}}}{T}\right) - 1 - \frac{e\varphi_{\text{макс}}}{T}}. \quad (39)$$

В предельном случае малых амплитуд ($e\varphi_{\text{макс}} \ll T$) u стремится к скорости изотермического звука $\sqrt{\frac{T}{M}}$. Для малых амплитуд профиль потенциала в уединенной волне имеет вид

$$\varphi \approx \frac{3}{2} \frac{T}{e} \left(1 - \frac{T}{Mu^2}\right) \text{sh}^2 \left\{ \frac{\sqrt{\pi n_0 e}}{\sqrt{T}} \sqrt{1 - \frac{T}{Mu^2}} \cdot x \right\}. \quad (40)$$

Ионные волны тоже существуют не при сколь угодно большой амплитуде. В конце концов наступает момент, когда движение становится многопоточковым. Это происходит по той причине, что ионы оказываются не в состоянии перевалить потенциальный барьер. Амплитуда «уединенной» волны, при которой это происходит, равна $e\varphi_{\text{макс}} = \frac{Mu^2}{2}$. Если для u — скорости волны — воспользоваться выражением (39), то для $\varphi_{\text{макс}}$ получается трансцендентное уравнение. Соответствующий корень оказывается приближенно равным $e\varphi_{\text{макс}} \approx 1,3 T$. Это и есть критическая амплитуда уединенной волны. Ей соответствует число Маха

$$\mathcal{M} = \frac{u}{\left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}} \approx 1,6.$$

Таким образом, в обоих рассмотренных выше случаях (магнитозвуковые и ионные волны) мы получили сходную картину установившегося нелинейного движения. Отличие практически заключается лишь в различных пространственных масштабах. Это и неудивительно, ведь соответствующие линейные законы дисперсии для этих случаев [см. уравнения (19) и (21)] очень похожи. Наиболее интересны уединенные волны. Уединенные волны представляют собой особый тип установившихся нелинейных волн. Если периодические волны могут существовать при произвольном законе дисперсии (лишь бы не линейном), то для уединенных волн требуется определен-

ный характер закона дисперсии. Это связано с тем, что, в то время как спектральное разложение периодических волн содержит дискретные ω и k , разложение профиля уединенной волны имеет сплошной спектр. Поэтому рассуждения, использовавшиеся в начале этой главы, уже невозможны. Ясно, что для существования стационарной картины в уединенной волне необходимо, чтобы участкам профиля с боль-

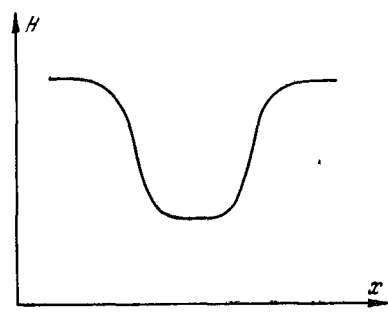


Рис. 9.

шими амплитудами скорости соответствовали меньшие скорости распространения волн в линейной теории. Тогда более сильное влияние нелинейности на участки с большей амплитудой скорости

будет, грубо говоря, компенсироваться уменьшением $\frac{\partial \omega}{\partial k}$. Такого

рода законами дисперсии ($\frac{\partial \omega}{\partial k}$ падает с ростом k) обладают

рассмотренные нами магнитозвуковые волны и «ионный» звук в плазме при $T_e \gg T_i$. Такое же свойство имеет закон дисперсии для волн на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины.

Волны с обратным законом дисперсии, для которых $\frac{\partial \omega}{\partial k}$

растет с ростом k , должны в нелинейном случае формировать уединенные волны «разрежения» (рис. 9), в отличие от волн «уплотнения», как в предыдущем случае. Такой закон дисперсии справедлив, например, для волны поперек магнитного поля в плазме высокого давления. Отыскание профиля подобных волн и установление связи между скоростью волны и амплитудой магнитного поля не представляет труда. Однако мы уже выяснили характерные физические особенности нелинейных незатухающих волн, а теперь перейдем к изучению различных механизмов затухания таких волн.

3. В разреженной плазме, помимо обычных механизмов затухания, связанных с переходом энергии упорядоченного движения в тепло при соударениях частиц, существует «затухание без столкновений». Оно связано с «захваченными» частицами, т. е. частицами, имеющими скорости движения, близкие к фазовой скорости волны. Мы исследуем это явление на простейшем примере электронных ленгмюровских волн. При этом качественная картина останется справедливой для любых типов волн. Волны очень малой амплитуды, рассмотренные Л. Д. Ландау [3], как известно, затухают, если функция распределения резонансных частиц

убывает, т. е. $\frac{df}{dv} < 0$ для $v = \frac{\omega}{k}$.

Это связано с тем, что более быстрые частицы замедляются, а более медленные — ускоряются волной. Если в резонансе быстрых частиц меньше, чем медленных, то волна затухает. Практически линейная теория быстро становится неприменимой, так как в процессе затухания вид $f(v)$ меняется. Так, в «квазилинейной» теории искажение функции распределения описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (41)$$

где $D \sim E^2$ и особенно велико для резонансных частиц.

Согласно уравнению (41) резонансные частицы перераспределяются, и на графике функции распределения (рис. 10) образуется плато $\frac{df}{dv} \rightarrow 0$ [уравнение (41) аналогично уравнению тепло-

проводности в неоднородной среде]. Это означает, что наступает насыщение и затухание прекращается. Однако столкновения, хотя и редкие, постепенно «сглаживают» края плато и устанавливают квазистационарное состояние, в котором $\frac{df}{dv}$ слегка от-
лично от нуля ($\frac{df}{dv} < 0$). Чтобы найти его величину и тем

самым затухание, нужно в уравнение (41) ввести столкновительный член. Ясно, что чем больше амплитуда колебаний, тем сильнее их релаксирующее действие на вид функции распределения в окрестности $v \approx \frac{\omega}{k}$. Следовательно, можно ожидать, что

величина декремента затухания $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}$ (ε — энергия волны), пропорциональная $\frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k} \right)$, с ростом ε будет падать. Ста-

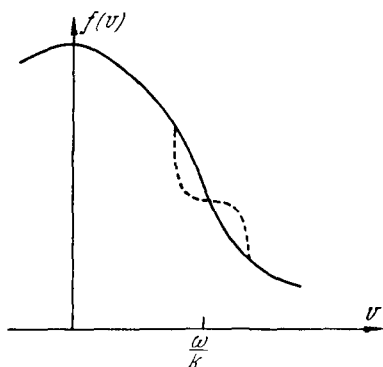


Рис. 10.

ционарный наклон $\frac{df}{dv}$ найдем из уравнения

$$\frac{d}{dv} D \frac{df}{dv} = \text{Sh}(f), \quad (42)$$

где для резонансных частиц ($v \approx \frac{\omega}{k}$) выражение для квазилинейного коэффициента диффузии D можно упростить

$$D(v) = \sum_k \frac{e^2}{m^2} E_k^2 \text{Im}(\omega + kv)^{-1} \sim \frac{e^2 E^2}{m^2 \omega}. \quad (43)$$

В выражении для $\text{St}(f)$ удержим старший член, содержащий вторую производную

$$\text{St}(f) \approx v_{\text{cr}} \cdot \frac{T}{m} \frac{d^2(f_0 - f)}{dv^2},$$

где f_0 — максвелловская функция распределения. Такая упрощенная форма «интеграла столкновений» учитывает восстановление локального равновесного распределения. Интегрируя уравнение (42) один раз, получим

$$\frac{df}{dv} = \frac{df_0}{dv} \cdot \frac{1}{1 + \frac{e^2 E^2}{m \omega T v_{\text{cr}}}}. \quad (44)$$

Из этого выражения видно, что для волн малой амплитуды $\frac{e^2 E^2}{m \omega T v_{\text{cr}}} < 1$ декремент затухания

$$v = \frac{\pi \omega_0}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k}\right) \rightarrow \frac{\pi \omega_0}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k}\right) \equiv v_0$$

стремится к v_0 -декременту затухания Ландау. Однако при амплитудах $\frac{e^2 E^2}{m \omega T v_{\text{cr}}} > 1$ линейная теория уже неприменима. Декремент затухания для таких волн, как следует из выражения (44), должен падать с ростом амплитуды, как E^{-2} .

То, что было проделано выше, справедливо только для затухания колебаний, представляющих собой достаточно широкие волновые пакеты, так как мы воспользовались квазилинейной теорией. Для монохроматической волны с одним ω и k выражение (44) уже неприменимо, и нужно было бы провести специальное рассмотрение. Мы ограничимся здесь лишь полуколичественной оценкой для того, чтобы установить зависимость инкремента от амплитуды. Формулу (44) можно интерпретировать следующим образом: представим ее в виде $v = v_0 / (1 + \tau_1 / \tau_2)$. Здесь v_0 — декремент, получаемый в линейном приближении (затухание Ландау); τ_1 — характерное время установления локального максвелловского распределения; τ_2 — характерное время искажения функции распределения под действием поля волнового пакета. Если $\tau_1 \ll \tau_2$ (за счет столкновения успевает устанавливаться

максвелловская функция распределения), мы получаем обычное затухание Ландау. С ростом амплитуды волны искажение, вносимое ею, становится настолько большим, что столкновения не успевают установить максвелловскую функцию распределения, и декремент затухания уменьшается. Путем подобной интерпретации можно оценить поглощение и для монохроматической волны, если выбрать правильно τ_1 и τ_2 . Пусть амплитуда потенциала в волне φ , тогда ответственными за поглощение будут частицы со скоростями относительно волны порядка $\pm \sqrt{\frac{e\varphi}{m}}$. Это значит, что наиболее сильно искажается функция распределения в области Δv с шириной порядка $\pm \sqrt{\frac{e\varphi}{m}}$. Из-за кулоновских столкновений с рассеянием на малые углы локальное равновесие в этой области будет восстанавливаться, очевидно, за время $\tau_1 \sim \frac{e\varphi}{v_{cr}T}$. Время же нелинейного искажения под действием поля волны имеет порядок $\tau_2 \sim \frac{\lambda}{\sqrt{e\varphi/m}}$, где λ — длина волны. Окончательно получим [4]

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{(e\varphi)^{3/2}}{T\lambda v_{cr} \sqrt{m}}}. \quad (45)$$

Значит, для монохроматической волны с ростом амплитуды декремент затухания падает как $E^{-\frac{3}{2}}$. Строгое рассмотрение подтверждает эту зависимость [16].

4. Из этих результатов можно сделать вывод, что нелинейные волны в разреженной плазме затухают очень медленно, как только происходит «релаксация» в распределении резонансных частиц, ответственных за затухание. Тем не менее это еще не гарантирует того, что, раз возникнув, нелинейные установившиеся волны могут долго существовать. Надо еще выяснить, устойчивы ли они по отношению к различным случайным искажениям. Если они окажутся неустойчивыми, то это будет означать переход их энергии в какие-то другие виды движения плазмы, возможно, в беспорядочное турбулентное движение. Тогда можно было бы говорить об эффективном затухании. Ясно, что распространение в разреженной плазме достаточно больших возмущений должно сопровождаться заметным отклонением плазмы от термодинамического равновесия, что и может привести к неустойчивости.

Рассмотрим, например, установившуюся уединенную волну, распространяющуюся поперек магнитного поля в холодной плазме ($nT \ll \frac{H^2}{8\pi}$). Вернемся снова к картине движения ионов и электронов плазмы в такой волне. Если $\frac{H^2}{8\pi} \ll nmc^2$, плазма квазинейтральна. В направлении распространения волны и ионы и электроны движутся с одинаковыми скоростями. Однако элек-

трический ток в направлении, перпендикулярном к скорости волны и к магнитному полю, создается только электронами. В однородной плазме, как известно, наличие заметного относительного движения ионов и электронов приводит к так называемой «пучковой» неустойчивости. Ясно, что аналогичный эффект можно ожидать и здесь. Задача упростится, если при рассмотрении малых отклонений от стационарной картины уединенной волны пренебречь членами, учитывающими невозмущенное движение плазмы в направлении x . Очевидно, это справедливо в том случае, когда время развития неустойчивости значительно меньше времени «прохождения» плазмой области уединенной волны.

Последнее по порядку величины равно, очевидно, $\frac{\delta \sqrt{4\pi n M}}{H}$, где

δ — «ширина» волны. Эту задачу нетрудно решить, если возмущенное движение ионов и электронов рассматривать для простоты как движение двух «жидкостей» с адиабатическими законами изменения давления. Влияние магнитного поля на возмущенное движение учитывать не будем, ограничиваясь частотами колебаний, которые значительно больше ларморовской частоты электронов ω_{He} . В этом приближении уравнения для возмущенных величин v_e (скорость электронов); v_i (скорость ионов); n_e, n_i (плотность электронов и ионов) и φ (электрический потенциал) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} i(\omega + kv_0) \mathbf{v} &= \nabla \frac{e}{m} \varphi - \nabla \frac{T}{mn_0} n; \\ i\omega \mathbf{V} &= -\nabla \frac{e}{M} \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} i(\omega + kv_0) n_e + ikn_0 v_y + \frac{d}{dx} (n_0 v_x) &= 0; \\ i\omega n_i + \frac{d}{dx} (n_0 v_x) + ikn_0 v_y &= 0; \\ -k^2 \varphi + \varphi'' &= 4\pi e (n_e - n_i). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Здесь уравнения (46) — уравнения движения для электронов и ионов, (47) — уравнения непрерывности для электронов и ионов, а также уравнение Пуассона для электрического поля. Мы сразу выбрали зависимость возмущенных величин в виде $\varphi(x) e^{i(\omega t + ky)}$. Входящие в уравнения v_0, T и n_0 представляют собой зависящие от x невозмущенные среднюю скорость электронов (по оси y), температуру электронов (ионы для простоты будем считать холодными) и плотность плазмы. В предположении, что производные по x от возмущенных величин значительно больше производных от невозмущенных («квазиклассическое» приближение), эта система уравнений сводится к одному дифференциальному уравне-

нию второго порядка для величин n_e :

$$\frac{T}{m} \frac{d^2 n_e}{dx^2} + \left[(\omega + k v_0)^2 - \frac{T}{m} k^2 - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \right] n_e = 0. \quad (48)$$

Исследование устойчивости сводится к задаче о собственных значениях для уравнения (48). С помощью граничных условий выбираются решения, убывающие в обе стороны от уединенной волны.

Исследуем поведение функции

$$F(x, \omega, k) = (\omega + k v_0)^2 - \frac{T}{m} k^2 - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

В однородной плазме эта функция не зависела бы от x и дисперсионное уравнение, связывающее ω и k , имело бы вид

$$F(\omega, k) = 0. \quad (49)$$

Это уравнение дает неустойчивые решения, когда $v_0^0 > \frac{T}{m}$, т. е. когда средняя скорость относительного движения ионов и электронов превышает тепловую скорость электронов. Для не очень больших k ($k^2 \ll \frac{\omega_0^2}{T} m$) это уравнение приближенно можно записать как

$$F(\omega, k) \approx k^2 \left(v_0^2 - \frac{T}{m} \right) - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = \frac{\Omega_0^2 k^2 \left(\frac{T}{m} - v_0^2 \right)}{\omega_0^2 - k^2 \left(v_0^2 - \frac{T}{m} \right)};$$

при $v_0^2 > \frac{T}{m}$ ω становится мнимым (неустойчивость). Возвращаясь к нашей неоднородной задаче, рассмотрим пространственный ход функции $F(x, \omega, k) \approx k^2 \left(v_0^2 - \frac{T}{m} \right) - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ (в этом приближении достаточно рассматривать действительные ω^2). Для наглядности изобразим (рис. 11) профиль изменения v_0 и ω_0^2 в уединенной волне как функцию x . В области, где $v_0^2 > \frac{T}{m}$, т. е. $F(x, \omega, k) > 0$, для n_e имеется осциллирующее решение. Вдали от уединенной волны $F(x, \omega, k) < 0$, что соответствует экспоненциально затухающим решениям. В точках «поворота», где $F(x, \omega, k) = 0$, эти решения «сшиваются». Итак, нужные

локальные решения всегда существуют, а неустойчивость появляется в том случае, если внутри уединенной волны имеется область, где $v_0^2 > \frac{T}{m}$. Инкременты нарастания такой неустойчивости, как известно, имеют порядок Ω_0 (в плазме «нулевой» температуры максимальный инкремент еще больше $\Omega_0 \left(\frac{M}{m}\right)^{1/4}$). При получении этих результатов было сделано несколько упрощающих предположений. В общем случае задача несколько усложняется: уравнение, соответствующее уравнению (48), становится четвертого порядка; точки «сшивки» смещаются в комплексную плоскость x . Однако условие неустойчивости $v_0^2 > \frac{T}{m}$ остается неизменным.

Амплитуда v_0 в уединенной волне увеличивается с ростом числа Маха \mathcal{M} ($\mathcal{M} = \frac{u \sqrt{4\pi n_0 M}}{H_0}$). Наконец, при некотором значении числа Маха ($\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$) амплитуда v_0 превысит среднюю тепловую скорость электронов, т. е. волна станет неустойчивой. Если воспользоваться решением задачи о профиле уединенной волны, которое было приведено ранее, можно убедиться, что для холодной плазмы ($nT \ll \frac{H_2}{8\pi}$)

$$\mathcal{M}^* \approx 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{8\pi n_0 T}{H_0^2} \right)^{1/3}. \quad (50)$$

По существу все это означает, что для неоднородных задач можно, соблюдая известную осторожность, применять критерии «пучковой» неустойчивости в однородной плазме. Проверим теперь, удовлетворяется ли исходное предположение о том, что время развития неустойчивости значительно меньше времени «прохождения» плазмой области уединенной волны $\frac{c}{\omega_0} \cdot \left(\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}} \right)^{-1} \gg \nu^{-1}$.

Подставляя $\nu \sim \Omega_0$, получим $H_0^2 \ll 4\pi n_0 m c^2$.

Развитие пучковой неустойчивости, влияя на исходную нелинейную волну, должно вызывать эффективное затухание последней — энергия упорядоченного движения электронов в нелинейной волне переходит в энергию беспорядочных ленгмюровских электронных колебаний. В этом смысле влияние такого рода неустойчивости можно трактовать как силу трения электронов об ионы, имеющую коллективную природу [4, 17, 18].

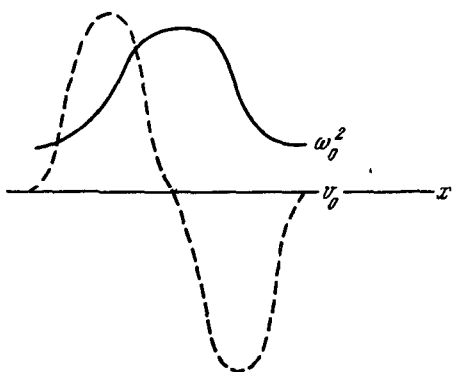


Рис. 11.

Хотя мы применяли рассмотренную неустойчивость лишь к уединенным установившимся волнам, ясно, что такая же ситуация может возникнуть и для других волн в плазме с магнитным полем. Тем не менее «пучковая» неустойчивость все же относится к довольно узкому классу задач. Более общий характер имеют так называемые «распадные» неустойчивости, которые могут наблюдаться у периодических нелинейных волн [19].

Начнем с некоторых общих замечаний. При изучении устойчивости нелинейных стационарных волн (которые для краткости будем называть «фоном») удобно перейти к системе координат, движущейся вместе с волной. Коэффициенты в линеаризованных уравнениях, описывающих поведение малых отклонений от «фона», не зависят от времени, и зависимость решений этих уравнений от времени можно выбрать в виде $e^{i\omega t}$. Задача сводится к решению системы уравнений, которая символически может быть записана в виде

$$\hat{L}\varphi = 0, \quad (51)$$

где \hat{L} — некоторый линейный дифференциальный оператор. Конкретный вид оператора зависит от «фона» и собственной частоты ω , в отыскании которой и заключается исследование устойчивости. Оператор \hat{L} можно представить в виде суммы \hat{L}_0 и \hat{L}_1 , где \hat{L}_0 — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а \hat{L}_1 — дифференциальный оператор, стремящийся к нулю вместе со стремлением к нулю амплитуды, исследуемой на устойчивость стационарной волны. Для волн конечной, но малой амплитуды \hat{L}_1 мало и естественно воспользоваться теорией возмущений. В нулевом приближении ¹ уравнение

$$\hat{L}_0\varphi = 0 \quad (52)$$

описывает колебания однородной плазмы с собственными функциями, пропорциональными e^{ikr} , и собственными значениями ω , удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\omega = \omega(k)$. В первом приближении по \hat{L}_1 появляются диагональные матричные элементы $\langle \varphi_\omega | \hat{L}_1 | \varphi_\omega \rangle$, причем пространственная зависимость \hat{L}_1 определяется множителями $e^{\pm i \cdot k_0 \cdot r}$. Ясно, что матричные элементы обращаются в нуль, если каждому значению частоты ω соответствует лишь одно значение модуля волнового вектора k . Первое приближение теории возмущений дает неисчезающий вклад лишь в том случае, если существуют «вырожденные» состояния, для которых одному ω соответствует по меньшей мере два волно-

¹ В гидродинамическом приближении в пренебрежении диссипацией \hat{L}_0 самосопряженный оператор и его собственные функции должны соответствовать незатухающим волнам.

вых вектора (k_1 и k_2). В этом случае между k_1 и k_2 должно выполняться следующее соотношение:

$$k_1 = k_0 + k_2, \quad (53)$$

а принадлежность их к одной и той же частоте запишем в виде $\omega_1 = \omega_2$. Если вернемся теперь от системы координат, движущейся вместе с волной, в лабораторную систему координат, частоты ω_1 и ω_2 будут уже разными. При этом будет выполняться условие

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \Omega_2, \quad (54)$$

где Ω_0 — частота колебаний фона ($\Omega_0 = k_0 u$), а Ω_1 и Ω_2 — частоты, соответствующие волновым векторам k_1 и k_2 ($\Omega_1 = \omega_1 + k_1 u$; $\Omega_2 = \omega_2 + k_2 u$). Условия (53) и (54) можно трактовать как законы сохранения квазиэнергии и квазиимпульса при взаимодействии («распадах») квазичастиц волн. Поэтому в дальнейшем будем называть их распадными условиями, а неустойчивость, возникающую при этом, распадом колебания с частотой Ω_0 и волновым вектором k_0 на колебания с частотами Ω_1 и Ω_2 и волновыми векторами k_1 и k_2 .

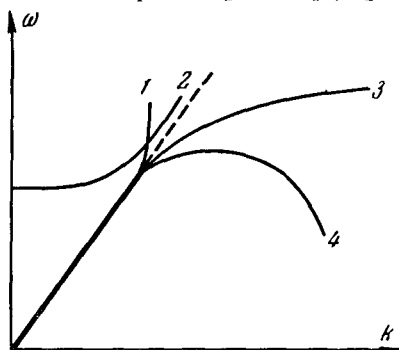


Рис. 12.

Распадные условия выполняются не для любых законов дисперсии $\omega(k)$. На рис. 12 изображены кривые, соответствующие различным формам спектров.

Легко показать, что распады колебаний могут происходить лишь для спектров 1 и 4. Колебания, имеющие спектры, подобные спектрам 2 и 3, устойчивы по отношению к распадам. Однако при наличии нескольких ветвей в спектре колебания, характеризуемые спектрами, аналогичными спектрам 2, могут быть неустойчивыми по отношению к распадам на колебания, из которых хотя бы одно не принадлежит данной ветви. Более точно: распады возможны тогда, когда через три точки, соответствующие колебаниям Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 (эти три точки, вообще говоря, могут лежать на разных ветвях), можно провести кривую, подобную либо кривой 1, либо кривой 3 (для разных ветвей спектров могут, однако, возникнуть «запреты», связанные с поляризацией волн). Но выполнение «распадных» условий само по себе еще не означает неустойчивости. Если подсчитать поправку к частоте из первого приближения теории возмущений, окажется, что либо она мнимая, т. е. действительно имеется неустойчивость, либо действительная, т. е. возникает лишь сдвиг частоты. Что же именно происходит, нужно исследовать в каждом конкретном

случае. Величины A_i , характеризующие рассматриваемый «фон», могут быть записаны в виде

$$A_i = A_{i0} + 2\delta(k_0) \sin k_0 r + O(\delta A_i^2),$$

где k_0 — волновой вектор. В дальнейшем мы не будем учитывать слагаемое $O(\delta A_i^2)$, иными словами, будем исследовать устойчивость основной гармоники, учитывая взаимодействие ее с малыми отклонениями от фона. С этой целью рассмотрим прежде всего, в каких случаях могут быть выполнены распадные условия.

Рассмотрим сначала простейший случай — плазма без магнитного поля. В такой плазме имеется две ветви колебаний: электронные продольные колебания и ионный звук (при $T_e \gg T_i$). Электронные колебания принадлежат к виду, спектр которого соответствует кривой 2 (см. рис. 12), ионные — к виду, спектр которого соответствует кривой 3, следовательно, сами по себе эти колебания устойчивы. Однако не запрещены перекрестные распады

$$\begin{array}{l} \text{электронная волна} \begin{cases} \nearrow \text{электронная волна} \\ \searrow \text{ионная волна} \end{cases} \\ \text{ионная волна} \begin{cases} \nearrow \text{электронная волна} \\ \searrow \text{электронная волна} \end{cases} \end{array}$$

«Распад» электронной продольной волны на электронную и ионную продольные волны является одним из простейших примеров неустойчивости «распадного» типа. Уравнения для малых возмущений имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) v_i - \frac{e}{M} E &= -2\delta v_i \frac{\partial}{\partial x} (v_i \sin k_0 x); \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) n_i + n_0 \frac{\partial v_i}{\partial x} &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \{(n_i \delta v_i + \\ &+ v_i \delta n_i) \sin k_0 x\}; \\ eE + \frac{T}{n_0} \frac{\partial n_e}{\partial x} &= 2 \frac{T}{n_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (n_e \delta n_e \sin k_0 x) \end{aligned} \quad (55)$$

(эта система уравнений будет описывать ионную волну). Здесь v_i , n_i , e — скорость и плотность ионов (электронов).

Для электронной волны гидродинамические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) v_e + \frac{e}{m} E + \frac{1}{mn_0} \frac{\partial p_e}{\partial x} &= -2\delta v_e \frac{\partial}{\partial x} (v_e \sin k_0 x) + \\ &+ \frac{\gamma p_0}{mn_0^3} \cdot 2\delta n_e \frac{\partial}{\partial x} (n_e \sin k_0 x); \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) n_e + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \{(n_e \delta v_e + v_e \delta n_e) \sin k_0 x\}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(p_e - \gamma \frac{p_0}{n_0} n_e\right) = 2\gamma(\gamma - 1) \frac{p_0 \delta n_e}{n_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \\ \times (n_e \sin k_0 x); \\ \frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e n_e,$$

где v_e — скорость электронов, γ — показатель адиабаты для электронов, который можно в одномерном случае принять равным 3; p_e — давление электронов; δv , δn — амплитуды скорости и плотности электронов и ионов в исходной электронной волне, исследуемой на устойчивость. Здесь мы для простоты ограничились одномерным случаем, т. е. предположили, что величины, описывающие динамику малых отклонений от «фона», зависят лишь от времени и координаты x (ось x направлена вдоль k_0).

Итак, в соответствии с намеченной схемой исследования устойчивости, ищем возмущение в виде суперпозиции $C_i e^{i(\omega + k_1 x)} + C_e e^{i(\omega + k_1 x)}$ ионной и электронной волн. В нулевом приближении они независимы, а при учете правых частей в уравнениях (55), (56) между ними появляется связь. Из условия разрешимости системы уравнений для C_i и C_e после простых, но довольно громоздких выкладок можно получить выражение для квадрата мнимой части частоты

$$v^2 \approx \left(\frac{\delta v_e}{u}\right)^2 \frac{k_2 u}{4} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \left\{ \Omega_2 + (\gamma - 2) k_2 v_T \frac{v_T}{u} \right\}, \quad (57)$$

где $v_T = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{n_0 m}}$ и Ω_1 , Ω_2 — частоты ионных и электронных колебаний в лабораторной системе координат.

Распадные условия имеют следующий вид:

$$\pm |k_1| = k_0 \pm |k_2|, \\ \pm k_1 u_i = \sqrt{\omega_0^2 + k_2^2 v_T^2} - \sqrt{\omega_0^2 + k_0^2 v_T^2}, \quad (58)$$

где $u_i = \sqrt{\frac{p_0}{n_0 M}}$.

Используя выражения (57) и (58), можно показать, что $-v^2 > 0$, т. е. электронные продольные колебания неустойчивы по отношению к распаду на ионные и электронные продольные колебания. Наиболее неустойчивы достаточно коротковолновые колебания ($k_0 \lesssim \kappa$; $\frac{1}{\kappa}$ — дебаевский радиус). Для них

$$v_{\max} \sim \frac{\delta v}{u} \sqrt[4]{\frac{m}{M}} \cdot \omega_0. \quad (59)$$

Выше все вычисления проводились в гидродинамическом приближении, т. е. тепловое движение электронов учитывалось лишь включением электронного давления. Как известно, учет теплового движения приводит также к появлению затухания волн. Затухания электронных волн можно не учитывать, если волновой вектор

$k \ll \kappa$. Для ионных волн затухание не является экспоненциально малым эффектом, а потому неустойчивость фона фактически будет определяться неравенством $\nu > \nu_i$, где ν_i — декремент затухания ионных колебаний. Как известно (см., например, [20]), при $\rho_i \ll \rho_e$

$$\nu_i \cong \sqrt{\frac{\pi}{8}} \Omega_1 \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (60)$$

Сравнивая это выражение, например, с формулой (59), получаем, что колебания, для которых амплитуды удовлетворяют неравенству $\frac{\delta v}{u} > \left(\frac{m}{M}\right)^{3/4}$, будут неустойчивы. Отметим, что, как видно из выражений (57) и (58), при распаде возникают электронные колебания с частотами, меньшими частот фона.

Исследуя аналогично второй случай перекрестного распада, можно убедиться, что ионные волны устойчивы: связь между C_1 и C_2 приводит лишь к сдвигу частоты. Поступая подобно тому, как было показано для первого случая, можно исследовать устойчивость различного типа нелинейных периодических волн не слишком большой амплитуды и в плазме, находящейся в магнитном поле. В одной из работ [21] такое исследование было проделано с альфвеновскими магнитогидродинамическими волнами. Известно, что в магнитной гидродинамике (и притом не только в несжимаемой жидкости, но и в газе) альфвеновские волны являются точным решением нелинейных уравнений. Поэтому могло возникнуть предположение, что эти волны существуют неограниченно долго без изменения формы. Анализ показал, однако, что альфвеновская волна «распадается» на сумму двух волн: альфвеновской и медленной магнитозвуковой (или быстрой магнитозвуковой и медленной магнитозвуковой). Инкременты «распадной» неустойчивости пропорциональны первой степени амплитуды исходной нелинейной волны. Поэтому волны малой амплитуды могут существовать длительное время, не распадаясь.

Более тонкое исследование уравнений $\hat{L}_0 \varphi = \hat{L}_1 \varphi$, получающихся при анализе распадной неустойчивости, показывает, что по виду закона дисперсии можно угадать, будет ли поправка к частоте мнимой (неустойчивость) или действительной (сдвиг частоты). Если $|\Omega_0| > |\Omega_1|, |\Omega_2|$, то при выполнении условий распада (53) и (54) исходная волна с частотой Ω_0 неустойчива. Как будет видно ниже, «распадная» неустойчивость играет важную роль в теории бесстолкновительных ударных волн, к изложению которой мы сейчас перейдем.

§ 3. Ударные волны в сильно разреженной плазме

В обширной литературе по этому вопросу, накопившейся за последние несколько лет, встречаются совершенно различные, казалось бы, даже противоречащие друг другу утверждения.

В первом приближении можно разделить их на две группы противоположных точек зрения:

1) ударные волны с толщиной, значительно меньшей длины свободного пробега, существуют, причем все происходящее внутри фронта в принципе можно описать в рамках ламинарной теории (на языке упорядоченных нелинейных колебаний);

2) процесс аномальной диссипации во фронте ударной волны связан с плазменной турбулентностью.

Наконец, существовала еще и третья, негативная точка зрения, что таких ударных волн вообще не существует. В аргументации сторонников различных теорий были слабые места, не позволяющие сделать однозначный выбор той или иной теории. Так, в турбулентной теории неясен был механизм неустойчивости, приводящий к переходу в турбулентное состояние. Внутри самой ламинарной теории не было единства — зачастую приводились, казалось бы, противоречащие друг другу результаты.

Естественный путь построения теории ударной волны без столкновений должен быть таким. Сначала строится ламинарная теория, основанная на представлении о регулярных колебаниях (для этого нам окажется достаточным взять за основу сведения, приведенные в предыдущей главе), затем исследуется устойчивость таких решений. Наконец, в неустойчивых случаях (а также тогда, когда ламинарных решений вообще не существует) строится «турбулентная» теория.

1. Ламинарная теория строится весьма легко: достаточно лишь учесть влияние затухания на характер нелинейных установившихся волн. В отсутствие затухания эти волны описывали обратимые движения. Так, состояние плазмы до и после прохождения уединенной волны оказывалось одним и тем же. Ясно, что учет диссипации должен нарушить обратимость, и состояния плазмы до и после уединенной волны будут различны. Если воспользоваться для нелинейных движений плазмы уравнениями сохранения потоков массы, импульса и энергии, то для установившихся движений эти уравнения, по определению, должны связывать состояния, подчиняющиеся уравнениям адиабаты Гюгонио. Состояния до и после уединенной волны без учета затухания тривиально удовлетворяют адиабате Гюгонио. Как изменится форма уединенной волны, если учесть диссипацию? Состояние после прохождения уединенной волны должно отличаться от исходного, причем различие это, конечно, определяется конкретным механизмом и величиной диссипации.

С другой стороны, адиабата Гюгонио не зависит от диссипации. В теории толщины ударной волны в обычной газодинамике этот кажущийся парадокс разрешается тем, что в зависимости от коэффициентов вязкости, теплопроводности и других величин, характеризующих диссипацию, меняется и сама форма переходной зоны (ее толщина). В разреженной же плазме «толщина» уединенной волны (при малой диссипации) задается независимо

от адиабаты Гюгонио дисперсионными свойствами. Решение кажущегося парадокса в случае разреженной плазмы заключается в том, что после прохождения уединенной волны состояние плазмы остается «возмущенным»: в плазме остаются интенсивные колебания, вклад которых в потоки импульса и энергии нужно учитывать. Это означает, что внутри фронта ударной волны самопроизвольно нарастают регулярные колебания конечной амплитуды. Как известно, толщина фронта слабой ударной волны в обычных газах значительно превышает длину свободного пробега. Это обстоятельство позволяет для исследования структуры фронта применять уравнения газодинамики с учетом диссипативных эффектов.

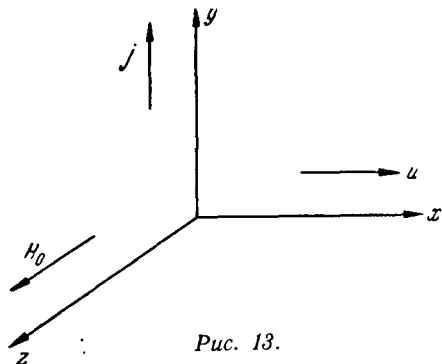


Рис. 13.

Начнем наше рассмотрение с ударных волн в плазме в магнитном поле. В случае разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле, когда длина свободного пробега значительно больше среднего ларморовского радиуса ионов, формальное газодинамическое описание применимо (для движений поперек силовых линий) внутри пространственных об-

ластей, меньших свободного пробега. Необходимо только, чтобы все величины мало менялись на расстоянии порядка ларморовского радиуса. Рассматривая структуру фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме, будем считать, что всюду внутри фронта выполнено условие малости ларморовского радиуса по сравнению с любым характерным размером. Для этого необходимо выполнение условия малости амплитуды волны. Рассмотрим сначала более простой случай «холодной» плазмы ($\rho \ll \frac{H^2}{8\pi}$).

В качестве механизма затухания возьмем сначала джоулево нагревание за счет столкновений между ионами и электронами (как мы увидим ниже, конкретная величина затухания будет носить в данной задаче чисто символический характер). Наша задача заключается в том, чтобы составить систему дифференциальных уравнений для величин, характеризующих плазму и самосогласованные электромагнитные поля внутри фронта ударной волны, и исследовать ее. Введем систему координат, в которой фронт волны покоится; магнитное поле направим по оси z ; zy пусть является плоскостью фронта. Электрический ток будет переноситься электронами в направлении y (рис. 13). Инерция электронов в этом направлении будет существенно влиять на структуру фронта. Наконец, для простоты примем, что внутри фронта вы-

полняется условие квазинейтральности $n_i = n_e$, где $n_{i, e}$ — плотность числа ионов (электронов) в соответствии с аналогичной задачей о незатухающих нелинейных колебаниях поперек магнитного поля (см. § 2).

В набор величин, определяющих плазму и поля, входят: n , H , v — скорость плазмы в направлении распространения волны, v_y — скорость электронов, переносящих ток; E_y — напряженность электрического поля вдоль оси y (поле вдоль оси E_x не входит в уравнения из-за квазинейтральности). Для этих шести неизвестных имеется шесть уравнений: а) уравнение сохранения потока частиц; б) уравнение сохранения потока импульса; в) уравнение сохранения потока энергии; г) уравнение движения электронов в направлении переноса электрического тока — по оси y ; д) и е) уравнения Максвелла для соответствующих компонентов роторов E и H . Исходную систему — шесть уравнений — после несложных преобразований можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка для одной из переменных, например H . Однако поскольку вся схема газодинамического приближения справедлива лишь для слабых ударных волн, можно с самого начала упростить уравнения. Действительно, в слабой волне, распространяющейся по холодной плазме, перепад давления плазмы будет величиной пренебрежимо малой по сравнению с перепадом магнитного поля: $\frac{p}{H_0^2} \ll \frac{H - H_0}{H_0}$. Тогда из

уравнения сохранения потока импульса скорость плазмы v непосредственно выражается через H . Нам теперь нет надобности пользоваться уравнением сохранения потока энергии, так как в остальные уравнения p явно не входит (исходная система уравнений расщепляется). Выпишем эти уравнения с учетом сделанных приближений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} nv &= 0; \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{Mnv^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0; \\ mnv \frac{dv_y}{dx} &= -enE_y + \frac{e}{c} nvH - \bar{v}mnv_y; \\ \frac{dE_y}{dx} &= 0; \\ \frac{dH}{dx} &= \frac{4\pi ne}{e} v_y. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Последний член в правой части уравнения движения для электронов соответствует силе трения электронного газа об ионный (\bar{v} — средняя частота столкновений между электроном и ионом, равная $n < v_e \sigma >$, где n — плотность числа ионов; σ — сечение столкновения и v_e — относительная скорость электрон — ион;

в достаточно слабой ударной волне \bar{v} можно считать приблизительно постоянным внутри фронта); M , m — масса иона (электрона).

После выполнения процедуры исключения всех переменных, кроме H , система уравнений (61) сводится к следующему дифференциальному уравнению для определения H :

$$-a^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H_0 - H + H \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi M n_0 u^2} + \frac{a^2}{u} v \frac{dH}{dx}. \quad (62)$$

Здесь H_0 — магнитное поле в плазме до прихода ударной волны (при $x \rightarrow \infty$); n_0 — невозмущенная плотность числа ионов (электронов); u — скорость ударной волны относительно невозмущенной плазмы;

$$a^2 = \frac{mc^2}{4\pi ne^2} = \frac{c^2}{\omega_0^2}.$$

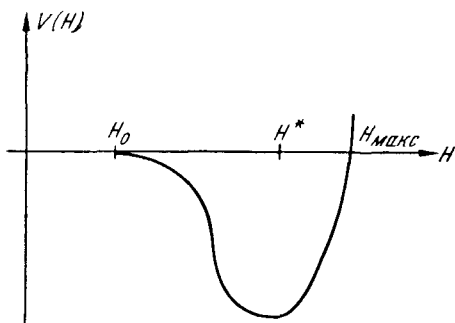


Рис. 14.

Если из этого уравнения исключить трение, оно будет напоминать уравнение (31). Единственное отличие останется в том, что здесь мы сразу ограничились для простоты небольшими амплитудами.

Уравнение (2) представляет собой уравнение движения ангармонического осциллятора при наличии трения; роль обобщенной координаты играет H ; роль времени — x .

Форма ямы определяется потенциалом

$$V(H) = \frac{1}{2} (H - H_0)^2 \left[\frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} - 1 \right]. \quad (63)$$

На рис. 14 для наглядности изображен вид $V(H)$. При

$$H = H^* = -\frac{H_0}{2} + \sqrt{8\pi n_0 M u^2 + \frac{H_0^2}{4}}$$

$V(H)$ достигает минимума. Аналогия с осциллятором легко позволяет установить профиль H внутри фронта ударной волны; H осциллирует вокруг значения H^* с затухающей амплитудой до тех пор, пока не установится $H = H^*$, соответствующее магнитному полю позади фронта ударной волны. Для того чтобы H_0 соответствовало минимуму магнитного поля в волне, т. е. чтобы $V(H)$ имело вид, изображенный на рис. 14, необходимо выполнение условия $u^2 > \frac{H_0^2}{4\pi n_0 M}$. При $\bar{v} \rightarrow 0$ максимальная амплитуда,

достигаемая в конце первого полупериода колебаний, соответствует

$$H_{\text{макс}} = 4u \sqrt{\pi n_0 M} - H_0.$$

В явном виде найти $H(x)$ не удастся, однако, если затухание за один период мало, можно воспользоваться простым приближенным методом медленно меняющейся амплитуды, усреднив по быстрым осцилляциям. В отсутствие трения движение «частицы» в нашей потенциальной яме определяется с помощью одной константы c , представляющей уровень полной энергии «частицы» (см. рис. 14). Тогда определение обратной зависимости x от H сводится к квадратуре

$$\int \frac{dH}{\sqrt{(H - H_0)^2 \left[1 - \frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right] + c}} \pm \frac{x}{a}. \quad (64)$$

Пусть решение соответствующей задачи будет $H = \Phi(x, C)$. В методе медленно меняющейся амплитуды ищем решение (и при учете трения) в виде $H = \Phi(x, C_x)$, но C теперь считается медленно убывающим с возрастанием x (вследствие «диссипации» энергии). Зависимость C от x определяется после усреднения по периоду следующим уравнением:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\frac{\bar{v}}{u} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sqrt{(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right] + c} d\Phi}{\int_{\Phi}^{\Phi_2} \left(\sqrt{(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right] + c} \right)^{-1} d\Phi}. \quad (65)$$

Здесь $\Phi_{1,2}$ — два положительных корня уравнения

$$(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right] + c = 0, \quad (66)$$

которые больше H_0 . Таким образом, задача сводится к решению уравнений (64) и (65). При $x \rightarrow \infty$ мы имеем граничное условие $H \rightarrow H_0$, $\frac{dH}{dx} \rightarrow 0$, т. е. $C \rightarrow 0$. При малых C оба уравнения имеют простые асимптотические решения. Так, $\Phi(x, 0)$ имеет вид

$$\Phi(x, 0) \approx H_0 \left[1 + 2(\mathcal{M}^2 - 1) \text{sh}^2 \frac{x}{a} \sqrt{\mathcal{M}^2 - 1} \right],$$

совпадающий, разумеется, с профилем уединенной волны небольшой амплитуды (см. § 2), где $\mathcal{M} = \left(\frac{4\pi M n_0 u^2}{H_0^2} \right)^{1/2}$, т. е. магнитное число Маха. Уравнение (65) при $C \rightarrow 0$ сводится к следующему:

$$\frac{dC}{dx} \approx -\frac{4}{15} \frac{\bar{v}}{u} \cdot \frac{H_0^2 8 (\mathcal{M} - 1)^3}{\ln \frac{\sqrt{-c}}{H_0 \sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}}}, \quad (67)$$

откуда находим

$$C \ln \frac{V\sqrt{-c}}{H_0 \sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}} \approx -\frac{4}{15} \frac{\bar{v}}{u} 8H_0^2 (\mathcal{M} - 1)^3 x + \text{const.} \quad (68)$$

При больших C , когда амплитуда колебаний заметно уменьшилась по сравнению с начальной, колебания становятся затухающими гармоническими

$$H - H^* \sim e^{\frac{\bar{v}}{u} x} \sin \left(\sqrt{\mathcal{M} - 1} \frac{x}{a} \right).$$

Профиль изменения H внутри фронта волны окончательно можно представить следующим образом (рис. 15). Сначала в невоз-

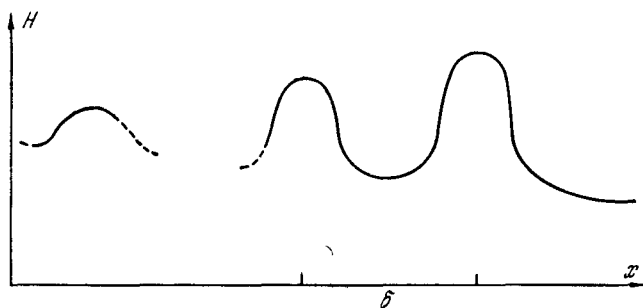


Рис. 15.

мушенной плазме появляется уединенная волна, на гребне которой магнитное поле достигает максимального значения; вследствие наличия необратимой диссипации (трение) состояние плазмы после прохождения такой волны будет немного отличаться от исходного. На расстоянии порядка

$$\delta \approx \frac{a}{\sqrt{\mathcal{M} - 1}} \ln \frac{u}{va} \sqrt{\mathcal{M} - 1} \quad (69)$$

вслед за первой волной движется вторая волна и т. д. Если не интересоваться тонкой структурой осцилляций во фронте ударной волны и произвести усреднение по расстояниям, превышающим δ , то можно говорить о δ как об эффективной толщине фронта ударной волны, связывающей два состояния плазмы: невозмущенное (до прихода волны) и возмущенное (модулированное интенсивными колебаниями), вклад которых при таком подходе нужно включить в законы сохранения на «разрыве». В этом смысле роль затухания действительно чисто символическая, так как в выражение для δ (69) (ширина такой ударной волны) затухание входит под знаком логарифма [22].

Картина затухания нелинейных осцилляций позади фронта ударной волны имеет следующий характер. В последующих «уединенных» волнах амплитуда все уменьшается и расстояние между

двумя соседними «возвышениями» магнитного поля сокращается до $\frac{a}{\sqrt{\mathcal{M}-1}}$, когда совокупность возвышений и впадин становится затухающей синусоидой. Полная длина затухания осцилляций будет порядка Δ

$$\Delta \sim \frac{u}{v}. \quad (70)$$

Для чисел Маха, не слишком близких к единице, эта формула неприменима, так как \bar{v} будет уже меняться внутри фронта волны. Но для оценки Δ можно пользоваться просто выражением $\frac{u}{\langle v \rangle}$, где $\langle v \rangle$ — средняя частота столкновений электронов с ионами. Выражая через длину свободного пробега $\lambda = \frac{\bar{v}_e}{v}$ (\bar{v}_e — средняя относительная скорость электронов относительно ионов), получим

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{H^2}{8\pi n T} \cdot \frac{m}{M}} \lambda, \quad (71)$$

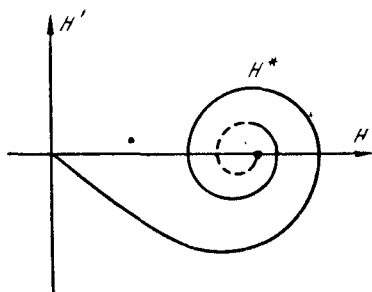


Рис. 16.

откуда видно, что даже длина затухания осцилляций из-за столкновений в реальных условиях, соответствующих принятому приближению, может оказаться значительно меньше свободного пробега (если $\frac{H^2}{8\pi n T} \frac{m}{M} \ll 1$). Это и естественно, так как при джоулевым нагреве растет температура электронов, а их время релаксации, как правило, значительно меньше ионного из-за большой скорости. «Выравнивание» температур ионов и электронов будет происходить уже после того, как колебания внутри фронта затухнут, на расстояниях порядка $\lambda \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$.

При переходе к большим числам Маха, кроме отмеченных выше ограничений, появляется и еще одно. Суть его заключается в том, что, если плазма в невозмущенном состоянии и была «холодной», в конце концов она нагреется настолько, что ларморовские радиусы электронов станут сравнимы с характерной длиной осцилляции $\frac{c}{\omega_0}$. Очевидно, это произойдет тогда, когда давление электронов станет сравнимым с магнитным давлением $nT \sim \frac{H^2}{8\pi}$.

Однако картина начальной стадии фронта будет иметь вышеописанный характер и для не малых чисел Маха. На фазовой плоскости (H' , H) рассмотренное осциллирующее решение для профиля во фронте ударной волны имеет вид, изображенный на рис. 16

(сравните с соответствующими интегральными кривыми в отсутствие затухания на рис. 5, в).

Интересно установить связь между полученным решением для разреженной плазмы и известным выражением для толщины ударной волны в магнитной гидродинамике плазмы для аналогичного случая слабой волны, распространяющейся поперек магнитного поля

$$\Delta \sim \frac{\eta_m}{u(\mathcal{M} - 1)}, \quad (72)$$

где η_m — так называемая магнитная вязкость ($\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$,

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\nu}).$$

Точка $H = H^*$ является особой точкой уравнения (62). До сих пор мы, рассматривая разреженную плазму, молчаливо предполагали затухание [роль последнего члена

в уравнении (62)] малым, и точка H^* автоматически оказывалась фокусом. В плотной же плазме особенность H^* становится «узлом» (рис. 17) при условии

$$\frac{c}{\omega_0} < \frac{c^2 m \nu \cdot 1}{4\pi n e^2 u \cdot \sqrt{6}} \cdot \frac{H_0^{1/2}}{(H^* - H_0)^{1/2}}. \quad (73)$$

В противоположность рассмотренному в предельном случае, когда

$$\frac{c}{\omega_0} \ll \frac{c^2 m \nu}{4\pi n e^2 u}$$

и имеет место известный гидродинамический профиль, определяемый магнитной вязкостью. Толщина фронта тогда дается выражением (72).

2. К каким эффектам могло бы привести малое «бесстолкновительное» затухание за счет доли частиц, скорости которых близки к скорости распространения ударной волны [14, 23]? Механизм затухания — это получение энергии ионами, отражающимися от «горбов» потенциала на фронте ударной волны (рис. 18). При таком отражении магнитное поле не играет существенной роли, если ларморов радиус ионов значительно больше характерного размера осцилляций $\frac{c}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\mathcal{M} - 1}$.

Основная доля отражений приходится на первую уединенную волну (если вообще не учитывать заворачивающее действие

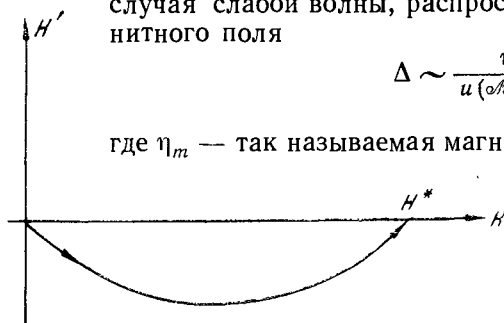


Рис. 17.

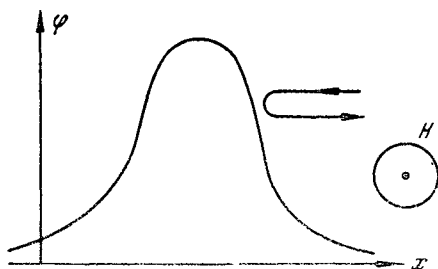


Рис. 18.

магнитного поля и столкновения, отражения имели бы место лишь на первой уединенной волне). Количественный учет эффекта отражающихся ионов довольно громоздок, и мы его не приводим (в более простом случае волны в отсутствие магнитного поля такой расчет будет дан ниже).

Отметим любопытный эффект ускорения группы ионов в такой ударной волне. Ионы, скорость которых весьма близка к скорости ударной волны, будут иметь очень маленький ларморов радиус. Поэтому, отразившись от горба потенциала, они сразу будут вновь возвращены магнитным полем, снова отразятся и т. д. После многократных отражений (рис. 19) они приобретут весьма большую скорость по оси y (в плоскости фронта и поперек H). Однако эта скорость не может стать сколь угодно большой, так как с ростом v_y становится существенной лоренцова сила $\frac{e}{c} v_y H$ в области горба, которая в конце концов превысит «отражающую» силу $-e\nabla\phi$, и ион перевалит через горб. Максимальная энергия таких ионов оказывается равной по порядку величины $\frac{M}{m} \cdot \frac{Mu^2}{2}$, где $\frac{Mu^2}{2}$ средняя энергия упорядоченного движения, приходящаяся на один ион в таких колебаниях.

Другим механизмом бесстолкновительного затухания могли бы служить неустойчивости, которые приводят к перекачке энергии упорядоченных осцилляций в энергию хаотических колебаний. Воспользуемся результатами предыдущей главы. Наиболее прозрачным типом неустойчивости для нелинейных волн в магнитном поле является «пучковая», когда средняя упорядоченная скорость электронов относительно ионов превышает среднюю тепловую ($v_0 > \sqrt{\frac{T}{m}}$). Это условие начинает выполняться для волн с числом Маха, превышающим

$$M^* \approx 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{8\pi n T}{H^2} \right)^{1/2}$$

[см. формулу (50)]. Физически эта неустойчивость означает, что электроны, двигаясь относительно ионов, тормозятся не только за счет обычных столкновений [последний член в уравнении (62)], но и за счет своеобразной силы трения коллективной природы — когерентное «излучение» плазменных колебаний вследствие неустойчивости. Для оценки можно воспользоваться следующими

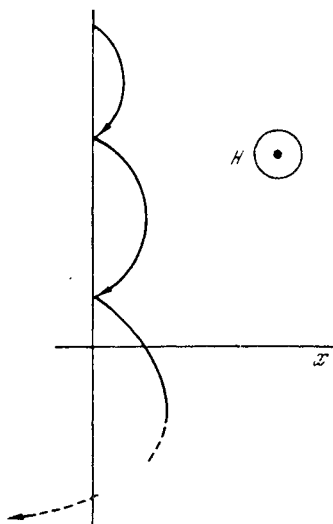


Рис. 19.

соображениями: в выражении для коэффициента электропроводности $\sigma_{\text{эфф}} \sim \frac{ne^2}{m\nu}$; под ν теперь надо понимать обратное время потерь энергии электронами за счет неустойчивости. Разумно вместо $1/\nu$ выбрать по порядку величины эффективное время раскачки неустойчивости, т. е.

$$\sigma_{\text{эфф}} \sim \frac{ne^2}{m\Omega_0}. \quad (74)^1$$

При выполнении условия $\mathcal{M} > \mathcal{M}^*$ головная часть фронта ударной волны будет определяться именно таким эффектом затухания. На языке эффективной потенциальной ямы $V(H)$ струк-

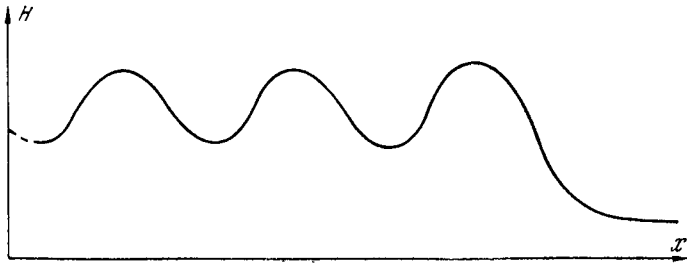


Рис. 20.

тура фронта будет качественно иметь вид, изображенный на рис. 20. Резкое торможение частицы вначале связано с влиянием неустойчивости. Затем по мере уменьшения амплитуды пульсаций (и увеличения температуры) неустойчивость пропадает и дальнейшее торможение замедляется [17]. На самом деле затухание осцилляций и в этой области может быть аномальным из-за распадной неустойчивости.

3. До сих пор речь шла о структуре волны, распространяющейся в «холодной» плазме строго поперек магнитного поля. Теперь нетрудно обобщить предыдущее рассмотрение на случай волн, не перпендикулярных к H . Дисперсионные эффекты резко чувствительны к направлению распространения волны. Если волна распространяется не строго поперечно, дисперсионное уравнение, связывающее ω с k , имеет вид уравнения (20) в § 2. Характерной длиной дисперсии является $\frac{c}{\Omega_0} \theta$ (при $\sqrt{\frac{m}{M}} \ll \theta \ll 1$). Инерция электронов для таких волн незначительна, но зато учитывается гиротропия плазмы. Исходную систему уравнений для

¹ Это означает, что при выполнении условия неустойчивости $v_0 > \sqrt{\frac{T}{m}}$ появляется аномальное электрическое сопротивление, приводящее к аномальной диссипации. Данное явление было обнаружено экспериментально в волнах большой амплитуды в плазме, помещенной в магнитном поле [24].

этого случая

$$\begin{aligned}
 M \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}; \\
 \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{V} &= 0; \\
 -e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} &= 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0; \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\
 \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi en}{c} (\mathbf{V} - \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned}
 \varrho \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\nabla \frac{H^2}{8\pi} + \frac{(\mathbf{H}\mathbf{V})\mathbf{H}}{4\pi}; \\
 \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho\mathbf{V} &= 0; \\
 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{H} - \frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{V}}{dt}.
 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Слагаемое $\frac{Mc}{e} \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ дает отклонение от линейного закона дисперсии при больших k . Стационарное решение этой системы уравнений (в которую нужно включить аналогично предыдущему случаю джоулеву диссипацию) описывает профиль ударной волны.

При $\sqrt{\frac{m}{M}} \ll \theta \ll 1$ уравнение, описывающее профиль изменения магнитного поля внутри волны, будет иметь вид [17, 25]

$$\frac{c^2}{\Omega_0^2} \theta^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H \left\{ 1 + \frac{H_0^2}{8\pi \varrho_0 \omega^2} - \frac{H^2}{8\pi \varrho_0 \omega^2} \right\} - H_0 + \alpha \frac{dH}{dx}. \quad (76)$$

Здесь меняется не только длина диссипации (вместо $\frac{c}{\omega_0}$ стало $\frac{c}{\Omega_0} \theta$), но и характер дисперсии ($\frac{\omega}{k}$ с ростом k увеличивается). В уравнении (76) по сравнению с уравнением (62) изменился знак «эффективной массы». В пренебрежении затуханием $\alpha \frac{dH}{dx}$ уравнение (76) описывает нелинейные периодические установившиеся волны. Особым решением и здесь являются уединенные волны (рис. 21), но в этом случае это уединение волны «разрежения». Профиль же ударной волны будет иметь вид, показанный на рис. 22. Любопытно, что внутри фронта ударной волны магнитное поле достигает минимального значения, меньшего, чем в невозмущенной плазме.

Длина затухания таких осцилляций из-за обычной силы трения по порядку величины равна

$$\Delta \sim \lambda \theta \left(\frac{H^2}{8\pi n T} \right)^{1/2}. \quad (77)$$

Самое главное отличие от предыдущего случая заключается в том, что передний фронт осцилляций не является резким. По этой причине здесь может создаться впечатление, что нет ударной волны без столкновений, так как в выражение (77) для Δ (длины затухания осцилляций) входит λ — длина свободного пробега. Однако закон дисперсии $\omega(k)$ для этих колебаний является как раз таким, чтобы нелинейные периодические волны были неустойчивы относительно «распада» [26] (см. § 2). Вследствие распадной неустойчивости нелинейные упорядоченные колебания затухнут гораздо раньше, чем по формуле (77), так как их энергия перейдет в энергию целого спектра шумов. Получающуюся таким образом длину затухания Δ можно отождествить с толщиной фронта ударной волны. Для нахождения Δ нужно уметь находить уровень шумов, возникающих

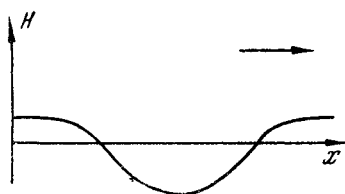


Рис. 21.

дочерные колебания затухнут гораздо раньше, чем по формуле (77), так как их энергия перейдет в энергию целого спектра шумов. Получающуюся таким образом длину затухания Δ можно отождествить с толщиной фронта ударной волны. Для нахождения Δ нужно уметь находить уровень шумов, возникающих

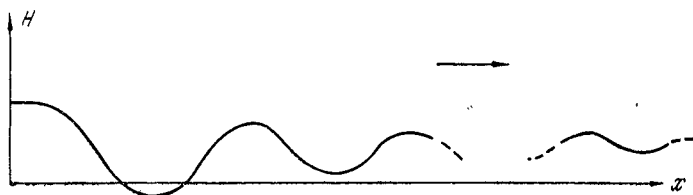


Рис. 22.

из-за распадной неустойчивости, и их обратное влияние на фон. Эта чрезвычайно сложная задача еще не решена (в одной из работ [8] сделана попытка получить приближенную оценку Δ). Из размерностных соображений можно ожидать, что Δ должно быть порядка нескольких длин осцилляций (кроме длины волны осцилляций внутри фронта, в задаче нет других характерных размеров).

Таким образом, задача о ламинарной структуре нелинейных осцилляций внутри фронта ударных волн сводится к двум различным постановкам (рис. 23): 1) когда дисперсионная кривая $\omega(k)$ имеет вид типа 1 (волны, перпендикулярные к H в холодной плазме); в этом случае передний фронт осцилляций резкий (все начинается с уединенных волн), и можно говорить о бесстолкновительной ударной волне даже в ламинарной теории; 2) когда короткие волны имеют бóльшую скорость распространения, чем длин-

ные (тип 2). В этом случае передний фронт осцилляций вытягивается, так как короткие волны обгоняют фронт. Для существования бесстолкновительной ударной волны здесь уже необходимо аномальное затухание таких осцилляций. Причиной затухания может служить распадная неустойчивость (присущая как раз спектрам типа 2). В результате развития такой неустойчивости плазма переходит в турбулентное состояние. Теория толщины ударных волн в первом случае весьма проста, но во втором построение количественной теории представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Однако качественно и здесь уже ясны главные механизмы.

Можно было бы еще привести примеры задач, сводящихся к одному из двух проанализированных случаев. Так, ударная волна поперек магнитного поля в плазме «большого» давления ($\rho \geq \frac{H^2}{8\pi}$) относится ко второму случаю, так как соответствующая дисперсионная зависимость (см. § 2) относится к типу 2. Ионный звук в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) имеет спектр типа 1, поэтому задача о бесстолкновительной ударной волне решается в ламинарной постановке.

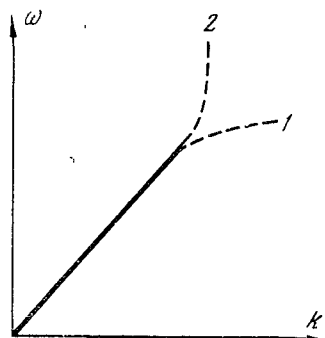


Рис. 23.

4. Для установления профиля фронта в этом случае будем пользоваться аналогией с предыдущим пунктом. В отсутствие магнитного поля нелинейные установившиеся колебания существуют при $T_e \gg T_i$. В пренебрежении затуханием уравнение, описывающее профиль потенциала φ в такой волне [см. уравнение (37)], имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi n_0 e \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}}} - e^{-\frac{e\varphi}{T}} \right) = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (78)$$

где $V(\varphi)$ — эффективная потенциальная энергия. Мы будем считать, что обычная диссипация из-за столкновений частиц друг с другом отсутствует, но примем во внимание эффект отражения ионов от переднего фронта волны, играющий роль бесстолкновительной диссипации.

Структуру возникающей при этом бесстолкновительной ударной волны можно описать, исходя из следующей наглядной картины. В отсутствие какой-либо диссипации в плазме может распространяться уединенная волна, представляющая собой симметричный горб потенциала. В действительности же в плазме имеется хотя бы небольшая группа ионов, отражающихся от движущегося потенциального горба, что приводит к нарушению симметрии;

за горбом появляются периодические колебания, так что в результате возникает своеобразная ударная волна, связывающая два различных состояния плазмы: невозмущенное (перед фронтом) и модулированное интенсивными упорядоченными колебаниями (за фронтом). Соответствующая «ударная адиабата» должна учитывать дополнительные слагаемые в выражениях для плотностей потоков энергии и импульса за фронтом, связанные с такими упорядоченными колебаниями. Следует, однако, заметить, что распределение энергии между тепловым движением и колебаниями зависит от конкретного механизма «бесстолкновительной» диссипации.

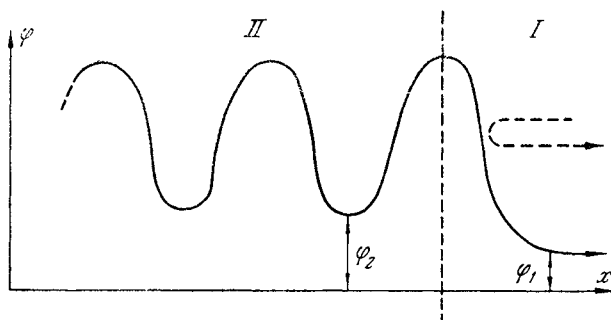


Рис. 24.

Если число отраженных частиц мало, то можно найти форму профиля такой ударной волны. Вид потенциала в волне показан на рис. 24. В отсутствие диссипации $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\lambda = \infty$ — симметричная уединенная волна.

При учете отраженных ионов для потенциала в области I (см. рис. 24) имеет место уравнение, отличающееся от уравнения (78) наличием в правой части дополнительных слагаемых

$$-4 n_0 e f(\varphi_1) \frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}}}, \quad 2 \cdot 4 n_0 e f(\varphi).$$

Первое слагаемое соответствует вычитанию отраженных ионов из полного числа ионов n_0 ; второе же представляет собой вклад отраженных ионов. Величина $n_0 f(\varphi)$ есть полная плотность отражающихся ионов в точке с потенциалом φ (конкретный вид f легко найти, зная невозмущенное распределение ионов по скоростям).

Скачок потенциала φ_1 связан с уходящими в бесконечность ионами, отразившимися от потенциального барьера, и в рассматриваемом случае малого числа отраженных частиц ($f \ll 1$) пропорционален f , величина же φ_2 , как мы увидим, пропорциональна корню квадратному из числа отраженных частиц, так что $\varphi_1 \ll \varphi_2$. Состояние плазмы за фронтом (в области II) характеризуется вели-

чинами $\Phi_{\text{макс}}$, Φ_2 , определяющими амплитуду колебаний и длиной осцилляции λ ; в этой области справедливо уравнение (78).

Решая уравнение для потенциала в областях I и II с граничными условиями непрерывности Φ и $\frac{d\Phi}{dx}$, находим профиль потенциала. Если мы снова обратимся к аналогии с движением частицы в потенциальной яме $V(\Phi)$, то можно сказать, что влияние отраженных ионов сводится к тому, что полная энергия C становится отрицательной. Это и приводит к периодическому движению (к периодической структуре за фронтом волны).

Уменьшение энергии C пропорционально числу отраженных ионов

$$-C \sim \int_0^{\Phi_{\text{макс}}} f(\Phi) d\Phi.$$

Так как потенциальная энергия $V(\Phi)$ при малых Φ меняется квадратично, точка поворота Φ_2 пропорциональна квадратному корню из энергии $-C$

$$\Phi_2 \sim \sqrt{-C},$$

а период колебаний логарифмически растет с уменьшением энергии

$$\lambda \sim \ln \frac{1}{-C}.$$

Таким образом, минимальное значение потенциала Φ_2 за фронтом ударной волны равно

$$\Phi_2 = \frac{2\mathcal{M}}{\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}} \left(\frac{T}{e} \int_0^{\Phi_{\text{макс}}} f(\Phi) d\Phi \right)^{1/2} \left(\mathcal{M}^2 = \frac{u^2}{M} \right). \quad (79)$$

Значение же $\Phi_{\text{макс}}$ мало отличается от соответствующего значения в уединенной волне с тем же числом Маха.

Длина осцилляций на фронте есть [27]

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}} \left(\frac{T}{\pi n_0 e^2} \right)^{1/2} \ln \frac{\Phi_{\text{макс}}}{\Phi_2}, \quad (80)$$

где $A \sim 1$.

5. Мы еще совсем не касались случаев, когда ламинарную теорию фронта ударной волны вообще невозможно построить. Такая ситуация в уже рассмотренных примерах осуществляется при достаточно больших амплитудах, когда нет установившихся нелинейных волн. Рассмотрим сначала случай, когда ударная волна идет поперек сильного магнитного поля в холодной плазме. При небольших числах Маха здесь внутри фронта ударной волны существовали упорядоченные колебания. При приближении амплитуды магнитного поля в волне к значению, втрое большему начальной величины магнитного поля, рассмотренная упорядоченная осцилляторная структура нарушается. Действительно, как

следует из § 2, при таких амплитудах (соответственно при числах Маха, больших 2) уединенная волна не существует; более того, невозможно построить установившееся нелинейное течение односкоростного типа, т. е. такое, что в каждой точке пространства имеется лишь одно значение скорости ионов. Физически это означает, что как только амплитуда волны достигает критического значения ($H_{\text{макс}} = 3H_0$), происходит «опрокидывание». В некотором участке пространства ионы, двигавшиеся первоначально позади, настигают передних и обгоняют их (рис. 25). Профиль скорости в этот момент становится трехзначным.

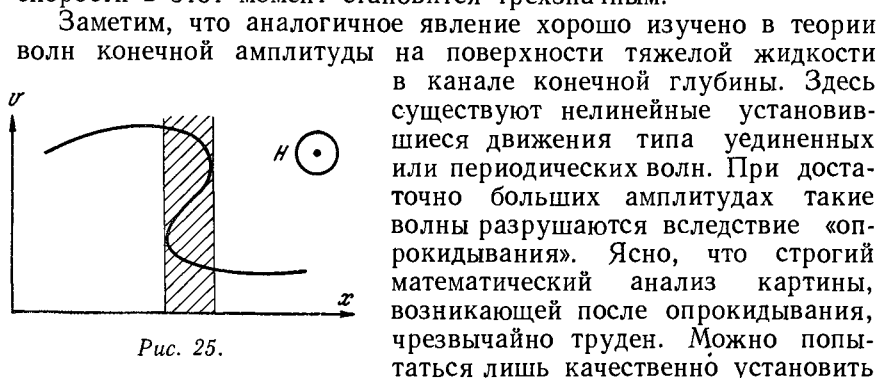


Рис. 25.

Заметим, что аналогичное явление хорошо изучено в теории волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Здесь существуют нелинейные установившиеся движения типа уединенных или периодических волн. При достаточно больших амплитудах такие волны разрушаются вследствие «опрокидывания». Ясно, что строгий математический анализ картины, возникающей после опрокидывания, чрезвычайно труден. Можно попытаться лишь качественно установить наиболее существенные черты явления, проводя аналогию с волнами в жидкости.

Основной вопрос заключается в том, будет ли после опрокидывания движение плазмы стремиться к какому-либо установившемуся режиму или же переходная область (заштрихованная на рис. 25) будет неограниченно размываться, как это имело бы место в обычном газе без столкновений. В теории поверхностных волн через некоторое время после опрокидывания возникает установившееся течение, называемое «прыжок воды» или «бор», представляющий собой некоторую переходную область конечной толщины, которая обычно заменяется идеализированной математической поверхностью, разделяющей два плоскопараллельных потока. При переходе через эту поверхность удовлетворяются соответствующие законы сохранения. В известном смысле «бор» представляет собой аналог ударной волны. Стационарность ширины переходного слоя физически обеспечивается тем, что участки профиля, выдвигающиеся вперед при опрокидывании, в конце концов, описав дугу, под действием силы тяжести падают и «смещиваются» с покоившимися. В плазме роль силы тяжести выполняет магнитное поле, заворачивающее ионы. Хотя распределение их скоростей еще далеко от максвелловского, можно состояния плазмы с обеих сторон переходной области связывать законами сохранения потоков массы, импульса и энергии, понимая под энергией теплового движения величину $\frac{M}{2}(\overline{v} - \bar{v})^2$ (черта

означает усреднение по распределению скоростей). Ширину переходной области можно оценить как радиус кривизны ионов после опрокидывания в магнитном поле [22]. Так как в волне с числом Маха, большим 2, амплитуда скорости $v \geq \frac{H}{\sqrt{4\pi Q}}$, то ширина переходного слоя (или ширина бесстолкновительной ударной волны) будет порядка

$$\delta \sim \frac{vMc}{eH} \sim \frac{c}{\Omega_0}, \quad \left(\Omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{M} \right). \quad (81)$$

Многоскоростное течение со скоростями, перпендикулярными к магнитному полю, возникающее после опрокидывания, однако, должно быть неустойчиво. Действительно, если для простоты рассмотреть двухпучковое распределение ионов с разностью скоростей между пучками, превышающей $\sqrt{\frac{T}{M}}$, то возникает неустойчивость относительно раскочки колебаний с волновым вектором, почти параллельным скорости пучка. В «боре» также имеет место неустойчивость сходной природы (встречные потоки); это просто неустойчивость тангенциального разрыва, возникающая при соприкосновении падающей струи с поверхностью покоившейся жидкости.

Если характерные размеры областей многопотокового движения значительно превышают длины волн возникающих неустойчивостей, можно пользоваться результатами исследования устойчивости в однородной плазме. В случае, например, двух встречных ионных потоков, движущихся поперек магнитного поля со скоростями v_0 и $-v_0$, дисперсионное уравнение имеет вид [28]

$$\frac{2}{\omega_{H_i} \omega_{H_e}} = \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2}. \quad (82)$$

Максимальный инкремент неустойчивости по порядку величины равен $(\omega_{H_i} \omega_{H_e})^{1/2}$. Для $v_0 \lesssim \frac{H}{\sqrt{4\pi n M}}$ характерная длина волны неустойчивости имеет порядок $\frac{c}{\omega_0}$. Таким образом, многопотоковые движения поперек магнитного поля неустойчивы.

Если бы плазма была «горячей», т. е. нужно было бы учитывать разброс скоростей, то дисперсионное уравнение в форме (82) было бы непригодно. Для $v_{T_i} \sim \frac{H}{\sqrt{4\pi Q}}$ максимальный инкремент неустойчивости оказывается равным по порядку величины ω_{H_i} , а соответствующая длина волны $\frac{c}{\Omega_0}$. Следовательно, эта вели-

чина характеризует толщину фронта ударной волны в сильном магнитном поле ¹.

6. Выше мы рассмотрели вопрос о бесстолкновительных турбулентных ударных волнах в плазме, распространяющихся поперек сильного магнитного поля. Магнитное поле, параллельное плоскости фронта волны, удерживает более «горячие» частицы, предотвращая распыление переходной области между невозмущенной (холодной) плазмой (перед фронтом ударной волны) и нагретой плазмой за волной. В ряде работ обсуждалась возможность существования бесстолкновительных ударных волн и в плазме без магнитного поля. Здесь в качестве механизма, сдерживающего распыление переходной области, указывалась так называемая «пучковая» неустойчивость двух взаимопроникающих плазм [30]. При таком подходе, однако, не учитывается тепловой разброс внутри каждого из «пучков». Но более строгое рассмотрение, учитывающее тепловое движение, не дает неустойчивости, вплоть до чисел Маха от единицы до приблизительно $\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$, если температуры электронов сравнимы с температурой ионов или меньше их (M — масса иона; m — масса электрона; см., например, работу [31]).

В неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$), как может показаться, такой проблемы не существует, так как там оказалось возможным построить ламинарную теорию. Однако и здесь при $M > 1,6$ из-за опрокидывания нужно искать другой выход. Оказывается, этот выход заключается в использовании хорошо известной анизотропной неустойчивости. Когда более быстрые ионы из области позади фронта попадают в невозмущенную плазму перед фронтом, распределение ионов по скоростям в ней становится неизотропным. Такое состояние плазмы неустойчиво. Возникают хаотические флуктуации электрического и магнитного полей. Под толщиной фронта ударной волны тогда нужно понимать величину порядка длины свободного пробега ионов относительно рассеяния на таких неравновесных флуктуациях. С той степенью «строгости», которая считается допустимой в теории турбулентности, эта проблема была решена в работе [27]. Здесь мы приведем наглядные качественные оценки.

Пусть в невозмущенной плазме $H = 0$. Постараемся понять физический смысл анизотропной неустойчивости в этом случае.

¹ В работе [29] сообщается о численном расчете одномерной модели движения плазмы поперек магнитного поля при больших амплитудах, когда течение становится многопоточковым (и неустойчивым). В частности, при $M = 5,8$ эффективная «длина размешивания» — толщина фронта оказалась $3,4 r_i$.

А. Кантровицем и Г. Петчеком [7] развивается полуфеноменологическая теория турбулентной структуры фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля. Авторы предполагают, что из-за какой-нибудь неизвестной неустойчивости в плазме с самого начала существует целый спектр колебаний, взаимодействующие между различными гармониками которого определяет процессы переноса энергии и импульса.

Итак, пусть имеется плазма с различными средними энергиями частиц, скажем, в направлениях x и y [$\varepsilon_x, y = M(\overline{v} - \overline{v})^2$, причем $\varepsilon_y > \varepsilon_x$]. Рассмотрим возмущение, имеющее вид сколь угодно малой флуктуации магнитного поля; направим его, например, по оси z (рис. 26). Неизотропия распределения может приводить к его нарастанию. Действительно, рассмотрим частицы, движущиеся по оси y вблизи точки x_0 , где магнитное поле меняет знак. На частицы действует сила Лоренца $F_x = \frac{e}{c} H v_y$. Частицы,

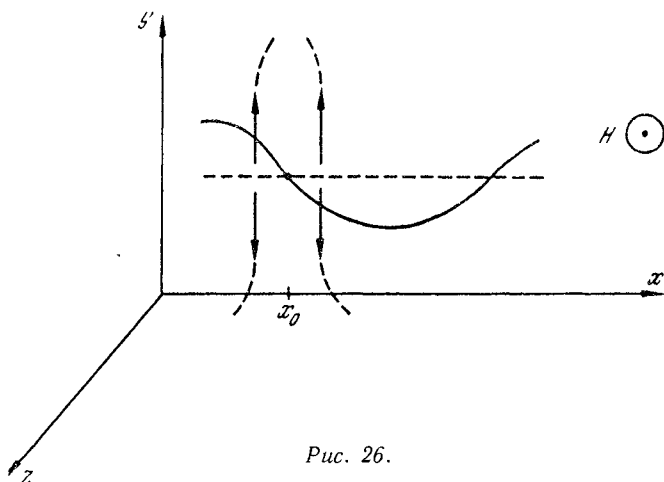


Рис. 26.

имеющие $v_y > 0$, она будет толкать в сторону к x_0 , частицы с $v_y < 0$ — в сторону от x_0 . Таким образом, вблизи x_0 стремятся сконцентрироваться частицы с $v_y > 0$. Это значит — появляется электрический ток j_y . Анализируя его направление, нетрудно убедиться в том, что он приводит к увеличению исходной флуктуации магнитного поля, т. е. к неустойчивости. Однако мы не учли стабилизирующую роль теплового движения по оси x , которое противодействует такой «конденсации» частиц с одинаковыми знаками v_y . Если $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, то неустойчивости вообще нет. Если же $\varepsilon_y > \varepsilon_x$, то для достаточно длинных волн это противодействие не в состоянии погасить неустойчивость. Порядок длины волн таких возмущений легко оценить. Сравним две силы: силу Лоренца, стремящуюся вывести из равновесия, и противодействие, которое для оценки можно взять в виде градиента давления по x . Для неустойчивости необходимо

$$\frac{e}{c} v_y n_0 \delta H > \text{grad } M \overline{v}_x^2 \delta n, \quad (83)$$

где δH и δn — флуктуация магнитного поля и плотности. Величины δH и δn , с другой стороны, связаны уравнением Максвелла

$$\text{rot } \delta H \sim \frac{4\pi}{c} e v_y \delta n. \quad (84)$$

Представляя δH и δn в виде $\sim e^{ikx}$, с помощью уравнения (84) перепишем условие (23)

$$\frac{\Omega_0^2}{c^2} v_y^2 > k v_x^2,$$

откуда, считая v_x^2 и v_y^2 величинами одного порядка, получим характерное k

$$k^3 < \frac{\Omega_0^2}{c^2}. \quad (85)$$

где $\Omega_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{M}$. Разумеется, весь эффект связан с ионами, т. е. ионы несут основную энергию.

Итак, пусть в некоторой области разреженной плазмы возникло возмущение. При отсутствии какого-либо сдерживающего механизма возмущение с течением времени расплылось бы в связи с постепенным уходом более быстрых частиц. На самом деле при приходе частиц в новые области там возникает анизотропия распределения по скоростям и связанная с этим неустойчивость; возникшее беспорядочное магнитное поле, очевидно, должно рассеивать частицы, имитируя «столкновения». Таким образом, создается возможность распространения нерасплывающего возмущения, имеющего характер ударной волны, как в обычной газодинамике.

Оценим амплитуду пульсаций δH в нелинейном режиме развивающейся неустойчивости. Можно было бы ожидать, что флуктуация магнитного поля будет нарастать до тех пор, пока почти весь избыток энергии ионов $n\Delta\varepsilon$ (за счет неустойчивости) не перейдет в энергию магнитного поля $\frac{(\delta H^2)}{8\pi}$ (для простоты будем считать, что $\Delta\varepsilon \sim \varepsilon \sim T$). Однако электроны, которые до сих пор можно было не учитывать, оказывают гасящее действие, «замораживая» $(\delta H)^2$ на гораздо меньшем уровне. Действительно, как только средний ларморов радиус электронов становится порядка $\lambda \sim \frac{1}{k}$ — длины волны возмущений, которая характеризует пространственную неоднородность магнитного поля, электроны «вмораживаются» в магнитное поле. Дальнейший рост магнитного поля должен сопровождаться огромным увеличением энергии электронов в силу сохранения адиабатического инварианта $\mu = \frac{mv^2}{2H}$. Итак, разумно

оценить δH из условия $r_{He} \sim \frac{1}{k}$, что дает

$$\frac{(\delta H^2)}{8\pi} \sim \frac{m}{M} nT. \quad (86)$$

Рассеяние ионов в таком магнитном поле будет носить диффузионный характер. Коэффициент диффузии (в скоростном пространстве) теперь нетрудно оценить

$$D \sim \frac{e^2}{M^2 c^2} \cdot \frac{(\delta H)^2}{k} v_i. \quad (87)$$

Отсюда найдем время «рассеяния» иона $r \sim \frac{v_i^2}{D}$, и соответствующую длину свободного пробега $l \sim r \cdot v_i \sim \frac{M}{m} \cdot \frac{c}{\Omega_0}$. Это и будет определять по порядку величины толщину фронта ударной волны

$$\Delta \sim \frac{M}{m} \cdot \frac{c}{\Omega_0}. \quad (88)$$

«Строгая» теория приводит к следующему результату:

$$\Delta \sim \frac{c}{\Omega_0} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{(\mathcal{M} - 1)^2} \text{ при } \mathcal{M} - 1 < 1, \quad (89)$$

в котором учитывается также зависимость от амплитуды волны.

Аналогичное рассмотрение можно было бы проделать и для плазмы, в которой с самого начала имеется слабое магнитное поле $\left(\frac{H^2}{8\pi} \ll nT\right)$. Оказывается, начиная с $H \sim \delta H$ фронт ударной волны с ростом H сужается [27, 32].

7. Можно надеяться, таким образом, что представления об ударных волнах применимы значительно дальше рамок обычной газодинамики, основанной на понятии длины свободного пробега по отношению к парным столкновениям, так как в разреженной плазме главную роль начинают играть коллективные процессы — плазменные колебания. Единой теории толщины фронта в плазме, из которой автоматически получались бы различные частные случаи, в настоящее время еще не существует. Слишком велико разнообразие явлений, связанных с коллективными процессами. Выше были просуммированы лишь различные предельные случаи и подходы, которые позволяют понять то новое, что появляется здесь по сравнению с обычной газодинамикой: дисперсионными эффектами, микроскопическими неустойчивостями, бесстолкновительным затуханием и т. д. Соответственно в различных предельных случаях появляются самые разные длины, характеризующие толщину фронта волны (дебаевский радиус, ларморовский радиус, $\frac{c}{\Omega_0} \frac{M}{m}$ и т. п.).

К сожалению, сейчас почти не ставят систематических лабораторных экспериментов по ударным волнам в редкой плазме. Тем не менее отдельные эффекты, используемые при построении теории ударных волн, в последнее время находят экспериментальное подтверждение.

Косвенным подтверждением теории может служить явление так называемого внезапного начала геомагнитных бурь. Еще в 1955 г. Т. Гойлд сделал заключение, что быстрое нарастание земного магнитного поля (несколько минут) в первой фазе магнитной бури можно объяснить только тем, что солнечные вспышки генерируют ударные волны по межпланетному газу. Приняв

плотность ионов в межпланетной плазме $n \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$ из формулы (88) можно получить толщину фронта ударной волны порядка $10^9 - 10^{10} \text{ см}$, что при скорости 10^8 см/сек дает характерное время 1 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Усп. физ. наук», **73**, 701 (1961).
3. Landau L. D. J. Phys. USSR, **10**, 25 (1946).
4. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», **1**, 82 (1961).
5. Drummond W. E., Pines D. Salzburg Conference, Paper CN-10/134 (1961).
6. Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **1**, 123 (1961).
7. Samac M., Kantrowitz A. R., Litvak M. M., Patrick R. M., Petschek H. E. Salzburg Conference, Paper CN-10/132 (1961).
8. Галеев А. А., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 592 (1963).
9. Карпман В. И. «Докл. АН СССР», **152**, 587 (1953).
10. Friedman E., Bodner S., Rutherford P. Phys. Fl., **6**, 1298 (1963).
11. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 2234 (1962).
12. Adlam J., Allen J. Phil. Mag., **3**, 448 (1958).
13. Сагдеев Р. З. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958.
14. Gardner C., Goertzel H., Grad H., Morawetz C., Rose M., Rubin H. Paper No. 374, Geneva Conference (1958).
15. Davies L., Lüst R., Schlüter A. Z. Naturforsch., **13a**, 916 (1958).
16. Захаров В. Е., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 490 (1962).
17. Sagdeev R. Z. Proceedings of the Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma, Polytechnic Institute of Brooklyn, Apr. 4—6 (1961).
18. Випетан О. Preprint, Stanford University (1961).
19. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», **32**, 1291 (1962).
20. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 3.
21. Галеев А. А., Ораевский В. Н. «Докл. АН СССР», **147**, № 1 (1962).
22. Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», **31**, 1955 (1961).
23. Сагдеев Р. З. Ударные волны в разреженной плазме. Доклад на IV конференции по ионизационным явлениям. Уппсала, 1959.
24. Завойский Е. К. «Атомная энергия», **14**, 57 (1963).
25. Карпман В. И. «Ж. техн. физ.», **33**, 959 (1963).
26. Карпман В. И., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», **33** (1963).
27. Moiseev S. S., Sagdeev R. Z. J. Nucl. Energy, Part C **5**, 43 (1963).
28. Кадомцев Б. Б. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 364.
29. Auer P. L., Hurwitz H., Kilb R. W. Phys. Fl., **4**, 1105 (1961).
30. Parker E. Phys. Rev., **112**, 1429 (1958);
Kahn F. D., Rev. Mod. Phys., **30**, 1069 (1958).
31. Noerdlinger P. Astrophys. J., **133**, 1034 (1961).
32. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», **146**, 329 (1962).

КУЛОНОВСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Д. В. Сивухин

§ 1. Трудности теории кулоновских столкновений

Построение последовательной теории столкновений в плазме наталкивается на большие трудности, связанные с медленным убыванием кулоновских сил с увеличением расстояния между взаимодействующими частицами. В любой момент времени каждая частица плазмы подвергается воздействию громадного числа окружающих частиц, и все эти воздействия должны быть как-то учтены. Вместо простой задачи двух тел мы приходим к труднейшей задаче многих тел. В строгой постановке такая задача вряд ли разрешима. Чтобы сделать решение возможным, необходимо ввести некоторые упрощения. Простейшим является *приближение парных столкновений*, в котором взаимодействие плазменных частиц сводится к независимым и мгновенным взаимодействиям пар частиц. В этом приближении непрерывный процесс взаимодействия каждой частицы с другой частицей плазмы, длящийся бесконечное время, заменяется мгновенным актом столкновения этих частиц, приводящим к тем же окончательным изменениям их энергий и импульсов, что и при действительном процессе за бесконечное время взаимодействия. Благодаря этому при вычислении различного рода величин получаются расходящиеся интегралы. Их расходимость устраняется искусственным обрезанием радиуса действия кулоновских сил. Это приводит к результатам, согласующимся во всех существенных чертах с результатами, к которым приводят другие, более последовательные, хотя и не лишенные принципиальных недостатков, методы учета взаимодействия многих частиц. В настоящей статье мы ограничимся приближением парных столкновений и поэтому начнем изложение с рассмотрения вопроса о столкновении двух частиц. В § 19 будет показано, что учет конечности времени взаимодействия в схеме парных взаимодействий приводит к тем же результатам, которые дает идеализированная схема парных столкновений, где взаимодействия

считаются мгновенными. Этот параграф можно поэтому рассматривать как обоснование (хотя и не строгое) приближения парных столкновений.

Систематические методы решения задач, в которых речь идет о неравновесных состояниях, основаны на *кинетическом уравнении*. Однако есть ряд задач, решение которых может быть получено без использования кинетического уравнения. Сюда относятся все задачи о равновесных или квазиравновесных состояниях, для которых функции распределения могут быть заимствованы из статистики. Эти задачи представляют самостоятельный интерес. Кроме того, при их решении будут введены понятия и получены результаты, необходимые для вывода кинетического уравнения в приближении парных столкновений. Поэтому мы начнем с рассмотрения задач такого типа. Затем, начиная с § 14, мы перейдем к выводу кинетического уравнения и некоторым его применениям. Для лучшего уяснения физических основ теории всюду применяются элементарные методы. По этой причине мы не рассматриваем относящиеся сюда важные исследования Н. Н. Боголюбова, В. П. Силина, О. В. Константинова и В. И. Переля, Ростокера, Балеску, Ленарда, Ю. Л. Климонтовича и С. В. Темко и др.

§ 2. Столкновение двух частиц

1. Под *столкновением* двух частиц понимается такое взаимодействие их, когда можно отвлечься от времени этого взаимодействия и считать его пренебрежимо малым. Если *временем взаимодействия* пренебречь нельзя, то вместо термина «столкновение» мы будем пользоваться более общим термином «*взаимодействие*». В задачах о столкновениях нас интересует связь между параметрами, определяющими состояния сталкивающихся частиц до и после столкновения. Установим здесь такую связь между этими параметрами, которая вытекает из законов сохранения импульса и энергии. Столкновения предполагаются *упругими*, так что внутреннее состояние сталкивающихся частиц не меняется в результате столкновения.

Обозначим через m и m^* массы сталкивающихся частиц, через \mathbf{v} и \mathbf{v}^* — их скорости до столкновения, через $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}^* + \delta\mathbf{v}^*$ — скорости после столкновения. По закону сохранения импульса

$$m\delta\mathbf{v} + m^*\delta\mathbf{v}^* = 0. \quad (2.1)$$

Если $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ — скорость первой частицы относительно второй, то

$$\delta\mathbf{v} - \delta\mathbf{v}^* = \delta\mathbf{u}.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением (2.1), находим

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v} &= \frac{m^*}{m + m^*} \delta\mathbf{u} = \frac{\mu}{m} \delta\mathbf{u}, \\ \delta\mathbf{v}^* &= -\frac{m}{m + m^*} \delta\mathbf{u} = -\frac{\mu}{m^*} \delta\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где μ — приведенная масса:

$$\mu = \frac{mm^*}{m + m^*}. \quad (2.3)$$

Для приращений $\delta p = m\delta v$ и $\delta p^* = m^*\delta v^*$ импульсов сталкивающихся частиц получаем

$$\delta p = -\delta p^* = \mu \delta u, \quad (2.4)$$

а для приращения $\delta \mathcal{E}$ кинетической энергии первой из них

$$\delta \mathcal{E} = \frac{m}{2} (\mathbf{v} + \delta \mathbf{v})^2 - \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = m \mathbf{V} \delta \mathbf{v} + \mu \delta u \delta \mathbf{v} + \frac{m}{2} (\delta \mathbf{v})^2,$$

где \mathbf{V} — скорость центра инерции рассматриваемой системы двух частиц:

$$\mathbf{V} = \frac{m\mathbf{v} + m^*\mathbf{v}^*}{m + m^*}, \quad (2.5)$$

не меняющаяся в результате столкновения.

Из закона сохранения энергии, записанного в системе отсчета, в которой одна из сталкивающихся частиц покоится, следует, что длина вектора относительной скорости \mathbf{u} также не меняется при столкновении; этот вектор меняется только по направлению. Поэтому

$$\delta (\mathbf{u})^2 = 2\mathbf{u} \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u})^2. \quad (2.6)$$

Принимая это во внимание, а также соотношение (2.2), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} &= m (\mathbf{V} \delta \mathbf{v}), \\ \delta \mathcal{E}^* &= m^* (\mathbf{V} \delta \mathbf{v}^*), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\delta \mathcal{E}^*$ — приращение кинетической энергии второй частицы. В силу соотношения (2.1) $\delta \mathcal{E} + \delta \mathcal{E}^* = 0$, как и должно быть по закону сохранения энергии.

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V} + \frac{m^*}{m + m^*} \mathbf{u}, \\ \mathbf{v}^* &= \mathbf{V} - \frac{m}{m + m^*} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

то формулы (2.7) приводятся к виду

$$\delta \mathcal{E} = -\delta \mathcal{E}^* = \mu (\mathbf{V} \delta \mathbf{u}). \quad (2.9)$$

2. Выразим δu_{\parallel} через угол поворота ϑ вектора \mathbf{u} в результате столкновения частиц. Обозначим через \mathbf{u}' вектор относительной скорости после столкновения. Его длина равна длине вектора \mathbf{u} . Поэтому, как видно из рис. 1,

$$\begin{aligned} \delta u_{\parallel} &= u (\cos \vartheta - 1) = -2u \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ \delta u_{\perp} &= u \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где δu_{\parallel} и δu_{\perp} — значения слагающих вектора $\delta \mathbf{u}$ вдоль вектора \mathbf{u} и перпендикулярно к нему. В векторной форме

$$\delta \mathbf{u} = [\mathbf{k}\mathbf{u}] \sin \vartheta - 2\mathbf{u} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (2.11)$$

где \mathbf{k} — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ и образующий правовинтовую систему с направлением поворота вектора \mathbf{u} .

Таким образом,

$$\delta p_{\parallel} = -2\mu u \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (2.12)$$

$$\delta p_{\perp} = \mu u \sin \vartheta, \quad (2.13)$$

$$\delta \mathbf{p} = -\delta \mathbf{p}^* =$$

$$= \mu [\mathbf{k}\mathbf{u}] \sin \vartheta - 2\mu u \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (2.14)$$

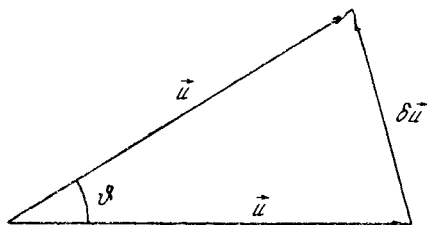


Рис. 1.

$$\delta \mathcal{E} = -\delta \mathcal{E}^* = \mu \sin \vartheta ([\mathbf{u}\mathbf{V}] \mathbf{k}) - 2\mu \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (\mathbf{V}\mathbf{u}). \quad (2.15)$$

Наконец, проектируя соотношение (2.4) на направление вектора \mathbf{u} относительной скорости до столкновения, получим

$$\delta p_{\parallel} = \mu \frac{\mathbf{u}\delta \mathbf{u}}{u},$$

где δp_{\parallel} — проекция вектора $\delta \mathbf{p}$ на направление \mathbf{u} .

С помощью формул (2.6) и (2.4) это выражение можно привести к виду

$$\delta p_{\parallel} = -\frac{\mu}{2u} (\delta \mathbf{u})^2 = -\frac{(\delta p)^2}{2u\mu}. \quad (2.16)$$

3. Все полученные соотношения выведены из одних лишь законов сохранения энергии и импульса, а потому они остаются справедливыми при любом законе силового взаимодействия между сталкивающимися частицами. Они справедливы как в классической, так и в квантовой механике, поскольку в них ничего не говорится о пространственной локализации сталкивающихся частиц, а рассматриваются состояния частиц до и после столкновения, когда частицы бесконечно удалены друг от друга, и, следовательно, могут обладать определенными значениями энергии и импульса.

§ 3. Средние скорости изменения энергии и импульса пробной частицы в плазме. Электростатическая аналогия

1. Перейдем к рассмотрению ряда задач, решение которых может быть получено без использования кинетического уравнения. Предполагается, что внешние силовые поля отсутствуют.

Допустим, что в плазме движется какая-либо частица с массой m , зарядом e и скоростью \mathbf{v} . По установившейся терминологии такая частица называется *пробной*. Все остальные частицы рассматриваются как среда, в которой движется пробная частица; они называются *полевыми* частицами. Требуется найти средние скорости изменения энергии \mathcal{E} и импульса \mathbf{p} пробной частицы вследствие взаимодействия ее с полевыми частицами. Говоря о средних значениях физических величин, мы имеем в виду *усреднение по ансамблю пробных частиц*, т. е. совокупности взаимодействующих друг с другом одинаковых пробных частиц, движущихся в плазме при одних и тех же начальных значениях импульса (а следовательно, и энергии). В приближении парных столкновений изменения энергии и импульса пробной частицы слагаются из изменений этих величин, которые они испытывают в результате *независимых* столкновений пробной частицы с каждой из полевых частиц.

2. Рассмотрим сначала случай, когда все полевые частицы одинаковы и движутся с одной и той же скоростью \mathbf{v}^* . Пусть n^* — концентрация полевых частиц, т. е. число их в единице объема; m^* — масса; e^* — заряд полевой частицы. В системе отсчета, в которой полевые частицы покоятся, пробная частица движется со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$. При каждом акте столкновения с полевой частицей энергия и импульс пробной частицы получают приращения $\delta\mathcal{E}$ и $\delta\mathbf{p}$, определяемые выражениями (2. 15) и (2. 14). В результате столкновения длина вектора относительной скорости \mathbf{u} не меняется, а самый вектор \mathbf{u} поворачивается на некоторый угол ϑ . Вероятность того, что за время dt вектор \mathbf{u} отклонится на угол, лежащий в пределах от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, т. е. попадет внутрь телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, равна $n^* u \sigma(\vartheta, u) d\Omega dt$, где $\sigma(\vartheta, u)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния пробной частицы на полевой в системе отсчета, где полевые частицы покоятся. Поэтому средние приращения энергии и импульса пробной частицы за время dt определяются выражениями,

$$n^* u dt \int \delta\mathcal{E} \sigma(\vartheta, u) d\Omega \quad \text{и} \quad n^* u dt \int \delta\mathbf{p} \sigma(\vartheta, u) d\Omega,$$

а средние скорости их изменения — равенствами

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = n^* u \int \delta\mathcal{E} \sigma(\vartheta, u) d\Omega, \quad (3. 1)$$

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = n^* u \int \delta\mathbf{p} \sigma(\vartheta, u) d\Omega. \quad (3. 2)$$

При подстановке сюда выражений (2. 15) и (2. 14) слагаемые $\mu [\mathbf{k}\mathbf{u}] \sin \vartheta$ и $\mu \sin \vartheta ([\mathbf{u}\mathbf{V}] \mathbf{k})$ могут не приниматься во внимание, так как вектор \mathbf{k} с одинаковой вероятностью может принимать любое направление, перпендикулярное к вектору \mathbf{u} .

Поэтому

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = -4\pi\mu n^* u (\mathbf{V}u) \int_0^\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sigma(\vartheta, u) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (3.3)$$

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = -4\pi\mu n^* u u \int_0^\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sigma(\vartheta, u) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (3.4)$$

3. При кулоновских столкновениях дифференциальное сечение $\sigma(\vartheta, u)$ дается известной формулой Резерфорда

$$\sigma(\vartheta, u) = \left(\frac{ee^*}{2\mu u^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.5)$$

Если подставить это выражение в формулы (3.3) и (3.4), то получится расходящийся интеграл $\int_0^\pi \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta$. Расходимость обусловлена обращением в бесконечность подинтегральной функции на нижнем пределе $\vartheta = 0$. Она объясняется тем, что *реальные взаимодействия* в нашей схеме расчета заменены *мгновенными столкновениями*: в формулах (3.1) и (3.2) под $\delta\mathcal{E}$ и $\delta\mathbf{p}$ мы понимали приращения энергии и импульса пробной частицы в течение *всего* времени взаимодействия ее с полевой частицей, тогда как по смыслу задачи под ними следовало бы понимать приращения за время dt , входящее в эти формулы. Вследствие этого при вычислении использованы завышенные значения для $\delta\mathcal{E}$ и $\delta\mathbf{p}$. Это завышение особенно существенно, когда речь идет о взаимодействии пробной частицы с *далекими* полевыми частицами. Оно и приводит к расходимости в интегралах (3.3) и (3.4). Если использовать правильные значения для $\delta\mathcal{E}$ и $\delta\mathbf{p}$ ¹, то для левых частей в формулах (3.1) и (3.2) получатся конечные выражения. Однако это не устраняет указанной трудности, так как эти конечные выражения физически неприемлемы, поскольку они, как показывает расчет, в явном виде содержат интервал времени dt . Этот вопрос подробно будет разобран в § 19.

В теории парных столкновений указанная трудность преодолевается *искусственным обрезанием* радиуса действия кулоновских сил. Каждая заряженная частица плазмы притягивает противоположно заряженные и отталкивает одноименно заряженные частицы. Вследствие этого имеется тенденция к образованию вокруг нее избытка частиц противоположного знака заряда, который ослабляет (экранирует) ее кулоновское поле. Вычислительно такая тенденция может быть учтена, если принять, что

¹ Разумеется, тогда нельзя пользоваться при вычислении понятием дифференциального сечения рассеяния, по крайней мере в том виде, в котором оно обычно вводится.

действие кулоновского поля частицы распространяется лишь на расстояния, не превосходящие некоторую величину D , а дальше практически прекращается. В качестве величины D обычно принимают *дебаевский радиус* (см. § 4). Если дебаевский радиус мал по сравнению с расстоянием udt , проходимым пробной частицей за время dt в среде полевых частиц, то взаимодействие этой частицы с каждой частицей *дебаевской сферы* можно рассматривать как столкновение. Тогда расходимости в формулах (3. 3) и (3. 4) не получится, так как угол ϑ не может быть меньше некоторого минимального предела $\vartheta_{\text{мин}}$. Если эту величину взять в качестве нижнего предела интегрирования, то формулы (3. 3) и (3. 4) примут вид:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = - \frac{4\pi n^*}{\mu u^3} (ee^*)^2 L(\mathbf{V}\mathbf{u}), \quad (3. 6)$$

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = - \frac{4\pi n^*}{\mu u^3} (ee^*)^2 L\mathbf{u}, \quad (3. 7)$$

где через L обозначен интеграл

$$L = \int_{\vartheta_{\text{мин}}}^{\pi} \text{ctg} \frac{\vartheta}{2} \frac{d\vartheta}{2} = - \ln \sin \frac{\vartheta_{\text{мин}}}{2}, \quad (3. 8)$$

называемый *кулоновским логарифмом*.

4. Допустим теперь, что имеется несколько типов полевых частиц, отличающихся друг от друга значениями заряда и массы. Введем *функцию распределения* $f^*(\mathbf{v}^*)$ для частиц какого-либо определенного типа. По определению $f^*(\mathbf{v}^*)d\mathbf{v}^*$ дает среднее число частиц рассматриваемого типа в единице объема, концы векторов скорости которых лежат в элементе объема $d\mathbf{v}^* \equiv dv_x^* dv_y^* dv_z^*$ *скоростного пространства* с центром в точке \mathbf{v}^* . Тогда из формул (3. 6) и (3. 7) легко получить

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = - 4\pi e^2 \sum^* \int \frac{e^{*2}}{\mu u^3} L(\mathbf{V}\mathbf{u}) f^*(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*; \quad (3. 9)$$

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = - 4\pi e^2 \sum^* \int \frac{e^{*2}}{\mu u^3} L\mathbf{u} f^*(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*. \quad (3. 10)$$

Звездочка над знаком суммы означает, что суммирование ведется по всем типам полевых частиц. Этот способ обозначения мы будем применять и в дальнейшем, чтобы избежать использования индексов, загромождающих формулы.

Кулоновский логарифм L в формулах (3. 9) и (3. 10) оставлен под знаком интеграла, так как он может зависеть от относительной скорости \mathbf{u} . Впрочем, эта зависимость очень слабая. Если ею пренебречь и понимать под L некоторое среднее (по \mathbf{u}) значение кулоновского логарифма, что мы в большинстве случаев и будем

делать, то формулы (3. 9) и (3. 10) можно преобразовать к следующему виду:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = - \sum^* L \left\{ \frac{\mathbf{v} \mathbf{E}_v}{\mu} - \frac{\varphi_v}{m} \right\}; \quad (3. 11)$$

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = - \sum^* \frac{L}{\mu} \mathbf{E}_v. \quad (3. 12)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathbf{E}_v = \int \frac{\mathbf{u}}{u^3} \varrho_v(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*; \quad (3. 13)$$

$$\varphi_v = \int \frac{1}{u} \varrho_v(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*; \quad (3. 14)$$

$$\varrho_v = 4\pi (ee^*)^2 f^*(\mathbf{v}^*). \quad (3. 15)$$

Величины μ и L зависят от масс обеих сталкивающихся частиц, а потому в формулах (3. 11) и (3. 12) они оставлены под знаком суммы \sum^* (впрочем, для L эта зависимость очень слабая, и в большинстве случаев ею можно пренебречь).

Что касается интегралов (3. 13) и (3. 14), то по своей структуре они напоминают выражения для *напряженности* и *потенциала* электрического поля в электростатике. Роль обыкновенного пространства играет *пространство скоростей*. Величина $\varrho_v = 4\pi (ee^*)^2 f^*(\mathbf{v}^*)$ играет роль *плотности заряда* в точке \mathbf{v}^* этого пространства. Вектор \mathbf{E}_v формально аналогичен *напряженности электрического поля* в точке \mathbf{v} , а скаляр φ_v — *потенциалу* этого поля в той же точке. Чтобы подчеркнуть эту формальную аналогию, мы и обозначали эти величины через \mathbf{E}_v и φ_v , снабдив их значком v , указывающим на то, что речь идет не о реальных электрических полях, а о величинах, являющихся их *аналогами в пространстве скоростей*. Эта формальная аналогия была отмечена и систематически использовалась для упрощения вычислений Б. А. Трубниковым [1], а также независимо от него Розенблютом, Макдональдом и Джаддом [2].

§ 4. Дебаевское экранирование и дебаевский радиус

1. Понятие *дебаевского экранирования* и *дебаевского радиуса* имеет ясный смысл в том случае, когда в плазме имеется неподвижный источник, создающий вокруг себя электростатическое поле. В этом поле устанавливается равновесное *максвелл-больцмановское распределение* положительных и отрицательных ионов плазмы. Для целей настоящей статьи достаточно считать, что положительные и отрицательные ионы плазмы являются *однозарядными* — заряд каждого из них численно равен заряду электрона. Заряд источника обозначим через q . В состоянии статистического равновесия вокруг заряда q образуется избыток ионов противоположного знака заряда. Потенциал усредненного электростати-

ческого поля, создаваемого зарядом q и окружающими его ионами плазмы, обозначим через φ . Во всем пространстве вне заряда q потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e(n^+ - n^-), \quad (4.1)$$

где e — абсолютное значение заряда электрона, n^+ и n^- — концентрации положительных и отрицательных ионов. При максвелл-больцмановском распределении

$$n^+ = ne^{-\frac{e\varphi}{T}}, \quad n^- = ne^{\frac{e\varphi}{T}},$$

где T — температура плазмы в энергетических единицах; n — концентрация положительных или равная ей концентрация отрицательных ионов на бесконечности. Таким образом,

$$\Delta\varphi = -4\pi ne \left(e^{-\frac{e\varphi}{T}} - e^{\frac{e\varphi}{T}} \right). \quad (4.2)$$

Рассмотрим решение этого уравнения для двух случаев: когда заряд q — точечный и когда он равномерно распределен по бесконечной плоскости.

2. Для точечного заряда не представляется возможным найти точное решение уравнения (4.2) в простой форме. Мы ограничимся приближенным решением, пригодным на больших расстояниях от q , на которых

$$|e\varphi| \ll T. \quad (4.3)$$

На таких расстояниях левую часть в уравнении (4.2) можно разложить в степенной ряд и оборвать это разложение на линейных членах. В этом приближении

$$\Delta\varphi + \frac{\varphi}{D^2} = 0, \quad (4.4)$$

где введено обозначение

$$D = \sqrt{\frac{T}{8\pi ne^2}}. \quad (4.5)$$

В силу сферической симметрии потенциал φ может зависеть только от расстояния r от точечного заряда q , и уравнение (4.4) запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) + \frac{\varphi}{D^2} = 0.$$

Его общее решение

$$\varphi = \frac{1}{r} \left(C e^{-\frac{r}{D}} + C' e^{\frac{r}{D}} \right). \quad (4.6)$$

Интеграционная постоянная C' должна равняться нулю, так как потенциал φ на бесконечности должен обращаться в нуль. Вторая интеграционная постоянная C может быть определена

из требования, чтобы на малых расстояниях r решение уравнения (4. 2) переходило в *кулоновский потенциал* $\varphi = \frac{q}{r}$. Следовательно, для определения C , вообще говоря, необходимо знать вид решения уравнения (4. 2) на малых расстояниях. Однако если условие (4. 3) выполняется уже при $r \ll D$, то при таких r решение (4. 6) еще применимо. Но тогда оно переходит в $\varphi = \frac{C}{r}$, и мы получим кулоновский потенциал, положив $C = q$. Таким образом, если помимо условия (4. 3) выполняется условие

$$\left| \frac{eq}{D} \right| \ll T, \quad (4. 7)$$

то $C = q$, и мы получаем

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{D}}. \quad (4. 8)$$

Этот потенциал называется *дебаевским потенциалом*, а расстояние D — *дебаевским радиусом*. Как видно из формулы (4. 8), дебаевский радиус по порядку величины определяет расстояние от заряда q , на котором кулоновское поле этого заряда экранируется противоположно заряженными ионами плазмы. Можно также сказать, что действие кулоновского поля заряда q простирается на расстояния порядка дебаевского радиуса D , а на больших расстояниях практически не имеет места.

3. Требование (4. 7) может считаться всегда выполненным при условии применимости того макроскопического подхода к решению задачи, которым мы пользовались. Действительно, для применимости такого макроскопического подхода необходимо, чтобы внутри *дебаевской сферы* (т. е. сферы с радиусом D) содержалось еще очень много частиц плазмы. Иначе теряет смысл понятие дебаевского экранирования и дебаевского радиуса, а также усреднение плотности заряда и электрического поля вокруг заряда q , которое было использовано при написании уравнения Пуассона (4. 1). Математически это требование можно записать в виде

$$D^3 n \gg 1, \quad (4. 9)$$

или с учетом выражения (4. 5)

$$T \gg e^2 n^{1/2}. \quad (4. 10)$$

Это условие означает, что *средняя кинетическая энергия теплового движения частицы плазмы должна быть велика по сравнению с потенциальной энергией кулоновского взаимодействия ее с соседней частицей плазмы, удаленной на расстояние $n^{-1/2}$, равное среднему расстоянию между одноименно заряженными частицами плазмы*. Но при условии (4. 9) автоматически выполняется и условие (4. 7), если только заряд q , как это всегда бывает, по порядку величины совпадает с e . Действительно, из условия (4. 9) следует,

что дебаевский радиус D велик по сравнению со средним расстоянием $n^{-1/3}$ между одноименно заряженными частицами плазмы. Но тогда потенциальная энергия $\frac{eq}{D}$, входящая в условие (4. 7), по абсолютной величине будет меньше $e^2 n^{-1/3}$, а потому из неравенства (4. 9) или (4. 10) следует и неравенство (4. 7). Тем самым при условии (4. 10) доказана справедливость формулы (4. 8) и при том не только на больших, но и на любых расстояниях от заряда q , поскольку на малых расстояниях, когда представление об экранирующем действии плазмы уже теряет смысл, формула (4. 8) приводит в пределе к правильному результату $\varphi = \frac{q}{r}$.

Условие (4. 10) соблюдается тем лучше, чем выше температура плазмы и чем меньше ее плотность. Во всех случаях, представляющих физический интерес, оно хорошо выполняется. Например, даже для такой плотной плазмы, когда $n = 10^{21}$ частиц/см³, это условие означает $T \gg 2,3 \cdot 10^{-12}$ эрг = 1,4эв.

4. Когда электрический заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости, уравнение (4. 2) легко решить точно, не накладывая ограничения (4. 3). Допустим, что плазма занимает полупространство правее равномерно заряженной плоскости AB (рис. 2). Пусть заряд плоскости поддерживается постоянным. Найдем электрическое поле в плазме после того, как будет достигнуто состояние статистического равновесия. Направим ось x вправо перпендикулярно к плоскости AB , поместив начало координат в точку O . В рассматриваемом случае все величины зависят только от одной координаты x , и уравнение (4. 2) переходит в

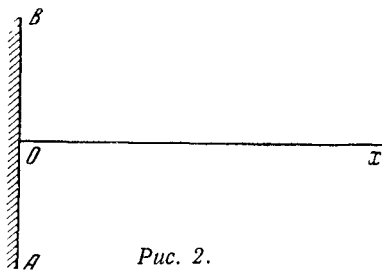


Рис. 2.

$$\frac{dE}{dx} = -8\pi en \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{T}, \quad (4. 11)$$

где $E = -\frac{d\varphi}{dx}$ — напряженность электрического поля. После умножения уравнения (4. 11) на $2Edx = -2d\varphi$ получим

$$dE^2 = 16\pi en \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{T} d\varphi.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $x = \infty$,* есть

$$E^2 = 16\pi nT \left(\operatorname{ch} \frac{e\varphi}{T} - 1 \right) = 32\pi nT \operatorname{sh}^2 \frac{e\varphi}{2T}.$$

При извлечении квадратного корня следует взять знак плюс. В самом деле, если плоскость AB заряжена положительно, то поле E направлено в положительную сторону оси x , т. е. само

положительно; потенциал φ также всюду положителен. Если же плоскость AB заряжена отрицательно, то E и φ также отрицательны. Этим условиям удовлетворяет только знак плюс у квадратного корня. Итак,

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = +\sqrt{32\pi nT} \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{2T}. \quad (4.12)$$

После интегрирования

$$\operatorname{th} \frac{e\varphi}{4T} = \operatorname{th} \frac{e\varphi_0}{4T} e^{-\frac{x}{D}}, \quad (4.13)$$

где φ_0 — потенциал плоскости AB , а D — дебаевский радиус, определяемый выражением (4.5). Разрешая уравнение (4.13) относительно φ , находим

$$\varphi = \frac{2T}{e} \operatorname{In} \frac{1 + \operatorname{th} \frac{e\varphi_0}{4T} e^{-\frac{x}{D}}}{1 - \operatorname{th} \frac{e\varphi_0}{4T} e^{-\frac{x}{D}}}. \quad (4.14)$$

Остается найти φ_0 . В силу формулы (4.12) потенциал связан с напряженностью электрического поля E_0 вблизи AB и с поверхностной плотностью заряда σ соотношением

$$E_0 = 4\pi\sigma = \sqrt{32\pi nT} \operatorname{sh} \frac{e\varphi_0}{2T},$$

откуда

$$\varphi_0 = \frac{T}{e} \operatorname{In} \left\{ \frac{\pi\sigma}{\sqrt{2\pi nT}} + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2nT} + 1} \right\}. \quad (4.15)$$

Как и для точечного заряда, в рассматриваемом случае имеет место экранирующее действие плазмы, ослабляющее электрическое поле заряженной плоскости. Это ослабляющее действие по-прежнему определяется значением дебаевского радиуса D . Величина $\operatorname{th} \frac{e\varphi}{4T}$ экспоненциально убывает с расстоянием от плоскости, причем на протяжении дебаевского радиуса она убывает в e раз.

При $x \gg D$ формула (4.14) переходит в

$$\varphi = \frac{4T}{e} \cdot \operatorname{th} \frac{e\varphi_0}{4T} \cdot e^{-\frac{x}{D}}. \quad (4.16)$$

На таких расстояниях экспоненциально убывают самый потенциал φ и соответствующая ему напряженность электрического поля.

5. В некоторых случаях (см. § 9 и 12) в плазме могут возникать *квазиравновесные состояния*, характеризующиеся максвелловскими распределениями скоростей ионов и электронов, но с различными ионной и электронной температурами. Понятие о дебаевском

экранировании и дебаевском радиусе тривиальным образом распространяется и на такие состояния. Различие состоит только в том, что вместо выражения (4. 5) надо пользоваться выражением

$$D = \sqrt{\frac{T_i T_e}{4\pi n e^2 (T_i + T_e)}}, \quad (4. 17)$$

где T_i — температура ионов; T_e — температура электронов, а n — концентрация либо ионов, либо электронов (плазма предполагается квазинейтральной).

6. При вычислении кулоновского логарифма радиус действия кулоновских сил обычно обрезают на величине D . Так будем поступать и мы, хотя необходимо отметить, что обоснование этой процедуры, использующее представление о дебаевском экранировании при буквальном его понимании, содержит неясности и противоречия. В самом деле, понимая дебаевское экранирование буквально, следует сказать, что каждая частица плазмы является силовым центром, вокруг которого существует равновесное распределение Максвелла — Больцмана всех остальных частиц плазмы. Но такое представление, очевидно, противоречиво, так как распределение одних и тех же частиц не может быть сферически симметричным распределением Максвелла — Больцмана с силовым центром одновременно и в точке нахождения частицы 1, и в точке нахождения частицы 2. Равновесное распределение Максвелла — Больцмана может установиться вокруг силового центра только тогда, когда этот центр неподвижен. Частицы плазмы совершают тепловое движение. Сферически симметричное максвелл-больцмановское распределение вокруг каждой частицы плазмы установиться не успеет. Поэтому представление о дебаевском экранировании при буквальном его понимании, когда каждая частица плазмы рассматривается как силовый центр распределения Максвелла — Больцмана, к плазме неприменимо.

Тем не менее в вычислительном отношении оно приводит в основном к правильным результатам. Дело в том, что каждая заряженная частица плазмы притягивает разноименно и отталкивает одноименно заряженные частицы. Благодаря этому вокруг каждой частицы плазмы в течение коротких промежутков времени возникает избыток частиц противоположного знака заряда и недостаток частиц того же знака заряда. Распределение этих частиц не имеет ничего общего с равновесным распределением Максвелла — Больцмана. Оно существует в течение времен порядка периода плазменных (ленгмюровских) колебаний, постоянно разрушается тепловым движением, а затем вновь возникает. В среднем влияние этого эффекта таково, как будто кулоновское поле каждой частицы плазмы было обрезано на некотором определенном расстоянии R . Это расстояние, как показывает более подробный анализ (см. § 19), порядка дебаевского радиуса D . Правдоподобность этого результата станет более очевидной, если рассмотреть какую-либо частицу плазмы, которая по

тем или иным причинам длительно покоится. К такой частице применимо представление о дебаевском экранировании, которое в вычислительном отношении эквивалентно обрезанию радиуса действия кулоновских сил на величину порядка D . Точное значение радиуса обрезания R несущественно, так как в теорию R входит всегда *под знаком логарифма*, и ошибка в величине R в несколько раз мало сказывается на значениях кулоновского логарифма. Поэтому в следующем параграфе мы проведем вычисление кулоновского логарифма на основе представления о дебаевском экранировании. Вычисления подобного рода нельзя абсолютизировать, но они дают практически достаточно точные значения кулоновского логарифма.

§ 5. Вычисление кулоновского логарифма

1. Для вычисления кулоновского логарифма следовало бы определить дифференциальное поперечное сечение $\sigma(\Phi, u)$ заряженной частицы в дебаевском поле другой частицы, определяемом

потенциалом $\Phi = \frac{e^*}{r} e^{-\frac{r}{D}}$. Можно было бы также определить это сечение в обрезанном кулоновском поле, т. е. таком поле, потенциал которого при $r < D$ равен $\frac{e^*}{r}$, а при $r > D$ обра-

щается в постоянную. Однако такой способ связан с громоздкими, хотя в принципе и простыми вычислениями, заниматься которыми не оправдано в рамках приближения парных столкновений. Поэтому мы применим другой, значительно более простой способ.

2. Рассмотрим сначала вычисление кулоновского логарифма в той области, где применима *классическая механика*. При классическом рассмотрении результат столкновения двух частиц определяется двумя параметрами — *относительной скоростью* u сталкивающихся частиц до столкновения и *прицельным расстоянием* q между ними. При этом в целях упрощения вычислений мы будем обрезать не радиус действия кулоновских сил, а прицельное расстояние q , считая, что максимальное значение q равно дебаевскому радиусу D . Иными словами, мы будем считать, что пробная частица с $q < D$ подвергается воздействию со стороны полевой частицы не только тогда, когда она попадает в пределы дебаевской сферы последней, но и на протяжении всего своего движения. Для таких частиц сечение $\sigma(\Phi, u)$ определяется формулой Резерфорда (3. 5), а для частиц с $q > D$ это сечение равно нулю. Этот способ обрезания приводит к несколько завышенному значению для поперечного сечения σ , а следовательно, и для кулоновского логарифма по сравнению с обрезанием радиуса действия кулоновских сил. Это завышение, однако, не существенно, поскольку основное воздействие на пробную частицу со стороны полевой частицы происходит в пределах дебаевской сферы последней.

Как хорошо известно из решения проблемы Кеплера в классической механике, прицельное расстояние q связано с углом

отклонения ϑ соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{q_{\perp}}{q}, \quad (5.1)$$

где q_{\perp} — значение прицельного расстояния, при котором угол отклонения ϑ равен $\frac{\pi}{2}$. Оно равно

$$q_{\perp} = \left| \frac{ee^*}{\mu u^2} \right|. \quad (5.2)$$

Если обрезать прицельное расстояние на дебаевском радиусе D , то минимальное значение угла отклонения определится по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_{\min}}{2} = \frac{q_{\perp}}{D}$$

или

$$\sin \frac{\vartheta_{\min}}{2} = \frac{q_{\perp}}{\sqrt{D^2 + q_{\perp}^2}}.$$

Подстановка этого значения в формулу (3. 8) дает

$$L_{\text{кл}} = \ln \frac{\sqrt{D^2 + q_{\perp}^2}}{q_{\perp}} \approx \ln \frac{D}{q_{\perp}}, \quad (5.3)$$

где индекс у L указывает на то, что при вычислении кулоновского логарифма использовалась классическая механика.

Во всех интересующих нас случаях кулоновский логарифм — большая величина (превышающая 10, см. табл. 1 и 2). А так как в формулу (5. 3) максимальное прицельное расстояние D входит под знаком логарифма, то выражение (5. 3) не чувствительно к изменениям D . Например, если вместо D взять величину вдвое большую, то L увеличится всего на $\ln 2 \approx 0,7$. Отмеченная нечувствительность оправдывает также замену обрезания радиуса действия кулоновских сил обрезанием прицельного расстояния q , которая была использована выше для упрощения вычислений.

3. Классическая механика применима при условии $\frac{2\pi}{\lambda} q_{\perp} \gg 1$, где $\lambda = \frac{h}{\mu u}$ — длина волны де Бройля для пробной частицы в системе отсчета, в которой рассеивающий центр (полевая частица) покоится. Подставляя вместо q_{\perp} выражение (5. 2), можно записать это условие в виде

$$u \ll \alpha c, \quad (5.4)$$

где

$$\alpha = \left| \frac{ee^*}{\hbar c} \right| \quad (5.5)$$

($\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек). Если e и e^* равны элементарному заряду, то постоянная $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ совпадает с постоянной тонкой структуры.

При несоблюдении условия (5.4) классическое рассмотрение неприменимо. На первый взгляд это может показаться непонятным, поскольку точное квантовомеханическое решение задачи о рассеянии заряженной частицы в кулоновском поле рассеивающего центра приводит к выражению для $\sigma(\vartheta, u)$, в точности совпадающему с классическим выражением (3.5) [см., например, книгу [3] или любой подробный курс квантовой механики]. Дело, однако, в том, что это совпадение имеет место, когда поле рассеивающего центра кулоновское *во всем пространстве*. Для *обрезанного* кулоновского поля волновые свойства частиц вносят существенные отклонения от того, что дает классическое рассмотрение¹.

В предельном случае, когда

$$u \gg ac, \quad (5.6)$$

квантовомеханическая задача о рассеянии может быть сравнительно просто решена в *борновском приближении*. Решение проще получить не для обрезанного кулоновского поля, а для дебаевского поля с потенциалом

$$\varphi = \frac{e^*}{r} e^{-\frac{r}{D}}. \quad (5.7)$$

В этом случае при соблюдении условия (5.6) квантовая механика, как известно, приводит к следующему результату:

$$\sigma(\vartheta, u) = \left(\frac{ee^*}{2\mu u^2} \right)^2 \frac{1}{\left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \varepsilon^2 \right)^2}, \quad (5.8)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{4\pi D} = \frac{\hbar}{2\mu u D} \quad (5.9)$$

(см., например, книги [3—5]).

Если подставить выражение (5.8) в формулы (3.3) и (3.4), то мы снова придем к формулам (3.6) и (3.7) с той лишь разницей, что вместо классического надо использовать квантовомеханическое значение кулоновского логарифма

$$L_{\text{кв}} = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta}{\left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \varepsilon^2 \right)^2} d\vartheta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2(1 + \varepsilon^2)}. \quad (5.10)$$

¹ Следует, однако, заметить, что в квантовой механике формула Резерфорда (3.5) строго применима лишь для столкновений *не тождественных* частиц. При столкновениях *тождественных* частиц (например, электронов или одинаковых ионов) появляются специфические *обменные эффекты*, приводящие к дополнительному члену в выражении для $\sigma(\vartheta, u)$. Поэтому формула Резерфорда (3.5), а также формула (5.8), строго говоря, неприменимы к столкновениям тождественных частиц. Но эти обменные эффекты мы можем не принимать во внимание, поскольку в интересующих нас вопросах существенно рассеяние только на *малых углах*, когда эти эффекты пренебрежимо малы.

Так как во всех случаях, представляющих физический интерес,

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{4\pi D} \ll 1, \quad (5.11)$$

то квадратом ε можно пренебречь по сравнению с единицей. В этом приближении

$$L_{\text{кв}} = \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \ln \frac{4\pi D}{\lambda} - \frac{1}{2}. \quad (5.12)$$

Это выражение, если пренебречь слагаемым $-\frac{1}{2}$, отличается от классического значения (5.3) только тем, что вместо нижнего предела ϱ_{\perp} в нем стоит $\frac{\lambda}{4\pi}$. Этот результат нетрудно понять. Волна де Бройля, связанная с падающей частицей, испытывает *дифракцию* на дебаевской сфере, окружающей рассеивающий центр. Из теории дифракции или элементарных интерференционных соображений следует, что среднее значение *угла дифракции* с точностью до незначительного коэффициента порядка единицы равно $\vartheta = \frac{\lambda}{2D}$. Если это значение превосходит классический предел $\vartheta_{\text{мин}} = \frac{2\varrho_{\perp}}{D}$, то классическая формула (5.3) становится неприменимой, и в качестве нижнего предела в интеграле (3.8) следует взять $\vartheta \approx \frac{\lambda}{2D}$. Это приводит к $L = \ln \frac{4D}{\lambda}$, что отличается от формулы (5.12) незначительным множителем π под знаком логарифма. Из этого качественного рассмотрения следует также, что результат рассеяния на обрезанном кулоновском поле не может существенно отличаться от результата рассеяния на дебаевском поле (5.7).

Квантовую формулу (5.12) можно представить в виде

$$L_{\text{кв}} = L_{\text{кл}} + \ln \frac{2ac}{u} - \frac{1}{2}. \quad (5.13)$$

Напомним, что эта формула выведена в предположении $u \gg ac$, тогда как классическое выражение (5.3) годится для $u \ll ac$.

4. В промежуточной области $u \approx ac$ квантовомеханические расчеты становятся слишком сложными. Заниматься ими физически не оправдано, так как в рамках теории парных столкновений с ее искусственным и в значительной степени произвольным обрезанием радиуса действия кулоновских сил получаемое в результате этих сложных расчетов уточнение значений кулоновского логарифма иллюзорно. Значительно проще и в рамках принятого приближения последовательнее поступить следующим образом. Как показывают обе предельные формулы (5.3) и (5.12), кулоновский логарифм содержит скорость u под знаком логарифма, а следовательно, является очень медленно меняющейся функцией u . Физически очевидно, что такое медленное изменение сохраняется и в промежуточной области. Поэтому, не внося существенной

ошибки, можно экстраполировать выражения (5.3) и (5.12) в промежуточную область до такого значения $u = u_{гр}$, при котором эти выражения совпадают. При $u < u_{гр}$ следует пользоваться классической формулой (5.3), а при $u > u_{гр}$ — квантовой формулой (5.12) или (5.13).

Значение $u_{гр}$, как видно из формулы (5.13), определится из требования $\ln \frac{2ac}{u_{гр}} = \frac{1}{2}$, которое дает

$$u_{гр} = 1,21ac = 0,00885c, \quad (5.14)$$

причем численный коэффициент 0,00885 относится к столкновению однозарядных ионов.

Если вместо относительной скорости u ввести эквивалентную температуру по формуле $3T = \mu u^2$, то равенство (5.14) перейдет в

$$T_{гр} = 0,49\mu a^2 c^2. \quad (5.15)$$

Подставляя сюда соответствующие значения приведенных масс, получим в случае дейтериевой плазмы следующие значения *граничных температур* для электрон-электронных, электрон-ионных и ион-ионных столкновений соответственно:

$$\left. \begin{aligned} T_{гр}^{ee} &= 6,65 \text{ эв}; \\ T_{гр}^{ei} &= 13,3 \text{ эв}; \\ T_{гр}^{ii} &= 2,45 \cdot 10^4 \text{ эв} = 24,5 \text{ кэв}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

5. В том случае, когда роль пробной частицы играет любая частица плазмы, при вычислении кулоновского логарифма, вследствие слабой зависимости его от u , можно пренебречь разбросом скоростей, взяв в качестве u некоторую среднюю скорость. Если при этом температуры электронов и ионов не очень сильно отличаются друг от друга, то можно ввести среднюю температуру T их, определив u хотя бы равенством $\mu u^2 = 3T$. Так определенную величину T мы подставляем в выражение (4.5) для дебаевского радиуса D , после чего из классической формулы (5.3) находим значение кулоновского логарифма

$$L_{кл} = 23,1 - \frac{1}{2} \ln n - \frac{3}{2} \ln T_{эв}, \quad (5.17)$$

где температура выражена в электронвольтах. Это выражение применимо для столкновений однозарядных частиц любого типа, т. е. электрон-электронных, ион-ионных и электрон-ионных столкновений. Однако границы его применимости зависят от масс сталкивающихся частиц. Оно применимо при $T \leq T_{гр}$, где $T_{гр}$ определяется значениями (5.16).

При $T > T_{гр}$ в выражение (5.17) надо ввести квантовую поправку по формуле (5.13). После этого получаем:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ для электрон-электронных столкновений} \\ L_{кв} = 24,1 - \frac{1}{2} \ln n + \ln T_{эв} \quad (T_{эв} \geq 6,65 \text{ эв}); \\ 2) \text{ для электрон-ионных столкновений} \\ L_{кв} = 24,4 - \frac{1}{2} \ln n + \ln T_{эв} \quad (T_{эв} \geq 13,3 \text{ эв}); \\ 3) \text{ для ион-ионных столкновений (дейтерий)} \\ L_{кв} = 28,2 - \frac{1}{2} \ln n + \ln T_{эв} \quad (T_{эв} \geq 2,45 \cdot 10^4 \text{ эв}). \end{array} \right\} (5.18)$$

Классическое (5.17) и квантовое (5.18) выражения приводят к одной и той же зависимости кулоновского логарифма L от кон-

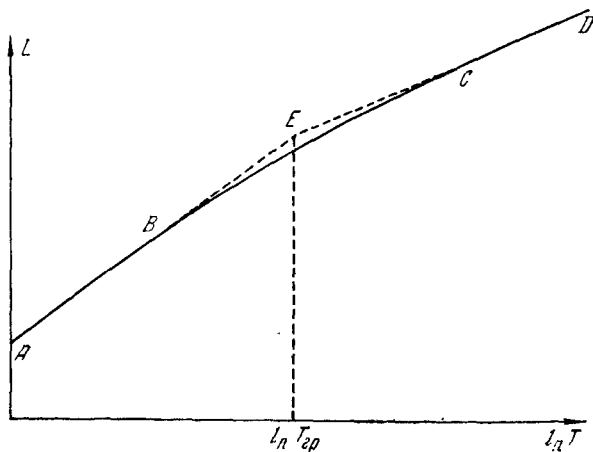


Рис. 3.

центрации электронов n , но дают различную зависимость от температуры T . На рис. 3 схематически изображена зависимость L от $\ln T$ при постоянной концентрации n . Прямолинейные участки AB и CD соответствуют областям применимости классического (5.17) и квантовых (5.18) выражений. В промежуточной области зависимость должна была бы изображаться кривой BC гиперболического типа, для которой прямые AB и CD являются асимптотами. Мы, однако, продолжили прямые AB и CD до их пересечения в точке E и заменили криволинейный участок BC ломаной BEC , немного завысив значения кулоновского логарифма.

Как видно из выражений (5.18), значения L для электрон-электронных столкновений практически не отличаются от соответствующих значений для электрон-ионных столкновений, а по-

Значения L для электрон-ионных столкновений

$T_{эв}$	Концентрация электронов n , $см^{-3}$							
	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}
10^{-1}	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9			
1	23,1	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9		
10	26,6	23,1	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9	
10^2	29,0	25,6	22,1	18,7	15,2	11,8	8,3	4,9
10^3	31,3	27,9	24,4	21,0	17,5	14,1	10,6	7,2
10^4	33,6	30,2	26,7	23,3	19,8	16,4	12,9	9,5
10^5	35,9	32,5	29,0	25,6	22,1	18,7	15,2	11,8
10^6	38,2	34,8	31,3	27,9	24,4	21,0	17,5	14,1

тому этим различием можно пренебречь. В табл. 1 приведены значения кулоновского логарифма L для электрон-ионных столкновений, а в табл. 2 — для ион-ионных столкновений. Предполагается, что температуры ионов и электронов одинаковы. Значения L для электронно-протонной плазмы, приводимые в книге Спитцера [6], практически не отличаются от значений, приведенных нами в табл. 1. Из этих таблиц, а также из анализа формул, с помощью которых они были получены, видно, что разница в величине L для электрон-ионных и ион-ионных столкновений, а также квантовые поправки невелики, и в большинстве случаев ими можно пренебречь.

Таблица 2

Значения L для ион-ионных столкновений (дейтерий)

$T_{эв}$	Концентрация электронов n , $см^{-3}$							
	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}
10^{-1}	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9			
1	23,1	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9		
10	26,6	23,1	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9	
10^2	30,0	26,6	23,1	19,7	16,2	12,8	9,3	5,9
10^3	33,5	30,0	26,6	23,1	19,7	16,2	12,8	9,3
10^4	36,9	33,5	30,0	26,6	23,1	19,7	16,2	12,8
10^5	39,7	36,2	32,8	29,3	25,9	22,4	19,0	15,5
10^6	42,0	38,5	35,1	31,6	28,2	27,4	21,3	17,8

§ 6. Обмен энергиями между пробной частицей и плазмой. Общие формулы

1. Вернемся снова к одной из задач, которые рассматривались в § 3. Пусть в плазме движется пробная частица с массой m , зарядом e и скоростью v . Требуется найти среднюю скорость изменения ее кинетической энергии \mathcal{E} . Если пренебречь зависимостью кулоновского логарифма L от относительной скорости u ,

то задача сводится к вычислению аналога электрического поля \mathbf{E}_v и его потенциала φ_v в пространстве скоростей.

Допустим, что функция распределения $f^*(\mathbf{v}^*) \equiv f^*(v^*)$ полевых частиц в пространстве скоростей *изотропна*, т. е. зависит только от абсолютного значения скорости v^* , а не от ее направления. Тогда величина ϱ_v , определяемая выражением (3.15), будет зависеть также только от v^* . Задача свелась к вычислению электростатического поля при сферически симметричном распределении электрических зарядов вокруг начала координат. Такая задача элементарно решается с помощью *электростатической теоремы Гаусса*. Последняя дает

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_v(\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{v}}{v^3} \int_{v^* < v} \varrho_v d\mathbf{v}^*, \\ \varphi_v(\mathbf{v}) &= \frac{1}{v} \int_{v^* < v} \varrho_v d\mathbf{v}^* + \int_{v^* > v} \frac{\varrho_v}{v^*} d\mathbf{v}^*. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Проведем вычисления для максвелловского распределения скоростей полевых частиц

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{v}^*) &= n^* \left(\frac{b^*}{V\pi} \right)^3 e^{-b^{*2}v^{*2}} \\ (b^* &= \sqrt{\frac{m^*}{2T^*}}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь T^* — температура полевых частиц определенного типа. Для всех ионов, вследствие незначительности различия их масс, температура T^* одна и та же. Но для электронов, ввиду малости их масс, температура T^* может отличаться от температуры ионов (см. § 9 и 12).

Подставив в формулы (6.1) вместо ϱ_v выражение (3.15) и взяв в качестве элемента объема элемента объема сферического слоя $d\mathbf{v}^* = 4\pi v^{*2} dv^*$, получим в результате простого интегрирования:

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{v}) = \frac{4\pi (ee^*)^2 n^*}{v^3} \Phi_1(b^*v) \cdot \mathbf{v}, \quad (6.3)$$

$$\varphi_v(\mathbf{v}) = \frac{4\pi (ee^*)^2 n^*}{v} \Phi(b^*v). \quad (6.4)$$

Через $\Phi(x)$ обозначен *интеграл ошибок*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \quad (6.5)$$

Функция $\Phi_1(x)$ определяется выражением

$$\Phi_1(x) = \Phi(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \Phi(x) - x \frac{d\Phi}{dx}. \quad (6.6)$$

Подставив теперь выражения (6. 3) и (6. 4) в формулу (3. 11), получим

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = -\frac{4\pi e^2}{v} \sum^* Ln^* e^{*2} \left[\frac{\Phi(b^*v)}{m^*} - \frac{2b^*v(m+m^*)}{mm^*\sqrt{\pi}} e^{-b^{*2}v^2} \right]. \quad (6.7)$$

Этой формулой определяется средняя скорость изменения кинетической энергии \mathcal{E} пробной частицы, движущейся в плазме с определенной скоростью v . Напомним, что величина $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle$ получается из $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ усреднением по ансамблю пробных частиц, характеризующемуся одними и теми же значениями скорости v . В качестве такового можно представить себе, например, пучок не взаимодействующих друг с другом одинаковых пробных частиц, движущихся в плазме с одной и той же скоростью v . (Направления скоростей у разных частиц пучка могут не совпадать, но абсолютные значения скоростей должны быть одинаковы.)

2. Функции $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ постоянно будут встречаться в дальнейшем. Значения $\Phi(x)$ и $\frac{d\Phi}{dx}$ с достаточной для нас точностью приведены в «Таблицах функций» Янке и Эмде [7]. При малых x удобно пользоваться разложением

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)nl}. \quad (6.8)$$

Оно получается из формулы (6. 5) разложением в степенной ряд подынтегральной функции с последующим почленным интегрированием его. Используя формулу (6. 6) и разложение (6. 8), получаем

$$\Phi_1(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)nl}. \quad (6.9)$$

При больших x удобнее пользоваться *асимптотическими рядами*. Представив $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi,$$

интегрированием по частям нетрудно получить

$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k \cdot x^{2k+1}} \right] + R_n(x),$$

где «остаточный» член» $R_n(x)$ дается выражением

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2^{n+1}} e^{-\xi^2} d \frac{1}{\xi^{2n+3}}.$$

Отсюда

$$|R_n(x)| < \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2^{n+1} \cdot x^{2n+3}}.$$

Таким образом, если функцию $\Phi(x)$ привести в соответствие с асимптотическим рядом

$$\Phi(x) \rightarrow 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k \cdot x^{2k+1}} \right] \quad (6.10)$$

и оборвать его в каком-либо месте, то такой оборванный ряд будет аппроксимировать функцию $\Phi(x)$ с ошибкой, значение которой по абсолютной величине не превосходит первого отбрасываемого члена. Знак ошибки совпадает со знаком того же члена.

Аналогично

$$\Phi_1(x) \rightarrow 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left[2x + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k \cdot x^{2k+1}} \right]. \quad (6.11)$$

§ 7. Критическая скорость и максимальная передача энергии

1. Для детального исследования вопроса об обмене энергиями между пробной частицей и плазмой рассмотрим отдельное слагаемое в правой части формулы (6. 7). Физически оно означает *среднюю скорость* приращения кинетической энергии пробной частицы вследствие взаимодействия ее с какой-либо одной выделенной компонентой плазмы, например со всеми электронами или с определенным типом ионов. Это слагаемое обозначим через $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_1$; индекс «1» должен указывать на то, что речь идет о взаимодействии пробной частицы не со всей плазмой, а только с какой-либо одной мысленно выделенной компонентой. Согласно формуле (6. 7),

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_1 = -\frac{4\pi(ee^*)^2}{v} Ln^* \left[\frac{\Phi(b^*v)}{m^*} - \frac{2b^*v(m+m^*)}{mm^*\sqrt{\pi}} e^{-b^{*2}v^2} \right]. \quad (7.1)$$

Указанное расчленение взаимодействия пробной частицы с плазмой на взаимодействия с отдельными компонентами ее носит условный — математический — характер. Речь идет не о взаимодействии пробной частицы с какой-либо изолированной компонентой плазмы, а об их взаимодействии в присутствии всех остальных компонент плазмы. Роль последних сводится к компенсации кулоновских сил отталкивания между частицами

выделенной компоненты плазмы, и только при их наличии имеет смысл говорить о кулоновском экранировании и кулоновском логарифме.

Такой же условный смысл имеется в виду, когда говорят о взаимодействии пучка невзаимодействующих частиц с выделенной компонентой плазмы.

2. Введем обозначения

$$x = b^*v, \quad \beta = \frac{m^*}{m}; \quad (7.2)$$

$$F(x, \beta) = \Phi(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}}(1 + \beta)e^{-x^2}. \quad (7.3)$$

Параметр x есть отношение скорости пробной частицы к наиболее вероятной скорости $\frac{1}{b^*} = \sqrt{\frac{2T^*}{m^*}}$ частиц выделенной компоненты плазмы. В этих обозначениях

$$\left\langle \frac{d\delta}{dt} \right\rangle_1 = -\frac{4\pi}{m^*} Lb^* (ee^*)^2 n^* \frac{F(x, \beta)}{x}. \quad (7.4)$$

Исследуем, при каких значениях x это выражение обращается в нуль. Для этого необходимо, чтобы $F(x, \beta) = 0$. Функция $F(x, \beta)$ обращается в нуль при $x = 0$. Однако этот корень следует отбросить, так как при $x = 0$ отношение $\frac{F(x, \beta)}{x}$ не обращается в нуль, а равно $-\frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}$. Производная

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} [2x^2(1 + \beta) - \beta]$$

отрицательна при $x^2 < \frac{\beta}{2(1 + \beta)}$ и положительна при $x^2 > \frac{\beta}{2(1 + \beta)}$. В точке $x = \sqrt{\frac{\beta}{2(1 + \beta)}}$ величина F как функция x достигает минимума, оставаясь отрицательной в интервале $0 < x < \sqrt{\frac{\beta}{2(1 + \beta)}}$. В дальнейшем она монотонно растет и стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$ (рис. 4). Поэтому в интервале $\sqrt{\frac{\beta}{2(1 + \beta)}} < x < +\infty$ функция $F(x, \beta)$ обращается в нуль и притом только один раз. Следовательно, уравнение $\frac{F(x, \beta)}{x} = 0$ имеет единственный корень $x = x_{кр}$ и этот корень лежит в том же интервале. Значение этого корня определяется уравнением $F(x_{кр}, \beta) = 0$, которое можно записать в виде

$$1 + \beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2x_{кр}} \Phi(x_{кр}) e^{x_{кр}^2}. \quad (7.5)$$

Величину $x_{кр}$ и соответствующую ей скорость $v_{кр} = \frac{x_{кр}}{b^*} = x_{кр} \sqrt{\frac{2T^*}{m^*}}$ назовем *критическими*. При критической скорости пробной частицы средняя скорость передачи энергии выделенной компоненте плазмы обращается в нуль. Если ввести пучок невзаимодействующих пробных частиц, как в § 6, то можно сказать, что при $v < v_{кр}$ энергия передается пучку от выделенной компоненты плазмы, а при $v > v_{кр}$ — от пучка к той же компоненте плазмы.

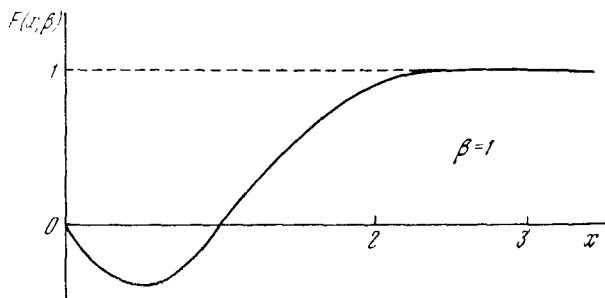


Рис. 4.

Максимальная скорость передачи энергии от пучка к выделенной компоненте плазмы происходит при $x = x_m$, т. е. $v = v_m = \frac{x_m}{b^*}$. Значение x_m определяется уравнением $\frac{\partial}{\partial x} \frac{F(x, \beta)}{x} = 0$, которое можно записать в виде

$$1 + 2x_m^2(1 + \beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x_m} \Phi(x_m) e^{x_m^2}. \quad (7.6)$$

Это уравнение имеет два корня. Первый, мало интересный корень $x = 0$ соответствует случаю неподвижной пробной частицы (энергия передается от плазмы к пробной частице). В существовании второго корня можно убедиться с помощью следующих простых соображений. Функция $\frac{F(x, \beta)}{x}$ обращается в нуль при $x = x_{кр}$ и $x = \infty$. Поэтому, по известной *теореме Ролля*, должно существовать такое значение $x = x_m$, лежащее в интервале $x_{кр} < x_m < \infty$, при котором производная $\frac{\partial}{\partial x} \frac{F(x, \beta)}{x}$ обращается в нуль. В этом случае энергия переходит от пучка пробных частиц к выделенной компоненте плазмы, так как $x_m > x_{кр}$. В дальнейшем под x_m понимается значение второго корня. Можно показать, что других корней уравнение (7.6) не имеет (на этом вопросе мы не останавливаемся).

Корни $x_{кр}$ и x_m возрастают с возрастанием β . В этом нетрудно убедиться, вычислив с помощью соотношений (7. 5) и (7. 6) производные:

$$\frac{dx_{кр}}{d\beta} = \frac{x_{кр}}{2x_{кр}^2(1+\beta) - \beta}; \quad (7. 7)$$

$$\frac{dx_m}{d\beta} = \frac{x_m}{1 + (1 + \beta)(2x_m^2 - 3)}. \quad (7. 8)$$

Первая из этих производных положительна, поскольку $x_{кр} > \sqrt{\frac{\beta}{2(1+\beta)}}$, как было показано выше. Вторая производная (7. 8) также положительна, так как ниже будет показано, что $2x_m^2 > 3$.

3. При исследовании уравнений (7. 5) и (7. 6) рассмотрим три случая.

Первый случай. Параметр $\beta = \frac{m^*}{m}$ очень мал. Этот случай реализуется, например, для пучка ионов, взаимодействующего с электронами плазмы. Значение $x = \sqrt{\frac{\beta}{2(1+\beta)}}$, при котором функция $F(x, \beta)$ обращается в минимум, стремится к нулю при $\beta \rightarrow 0$. Естественно поэтому ожидать, что при $\beta \rightarrow 0$ корень уравнения (7. 5) также стремится к нулю, а следовательно, в рассматриваемом случае этот корень очень мал. Поэтому можно разложить правую часть уравнения (7. 5) по степеням $x_{кр}$ и оборвать это разложение, например, на членах шестой степени. В результате получим

$$\frac{3}{2}\beta = x_{кр}^2 + \frac{2}{5}x_{кр}^4 + \frac{8}{105}x_{кр}^6.$$

Возведя обе части этого равенства сначала в квадрат, а затем в куб, получим

$$\frac{9}{4}\beta^2 = x_{кр}^4 + \frac{4}{5}x_{кр}^6,$$

$$\frac{27}{8}\beta^3 = x_{кр}^6.$$

Исключая отсюда $x_{кр}^4$ и $x_{кр}^6$, найдем

$$x_{кр}^2 = \frac{3}{2}\beta - \frac{9}{10}\beta^2 + \frac{243}{350}\beta^3. \quad (7. 9)$$

Таким же путем можно получить и высшие степени в разложении $x_{кр}^2$ по степеням β . При малых β можно ограничиться первым членом

$$x_{кр}^2 = \frac{3}{2}\beta. \quad (7. 10)$$

Корень $x_{кр}$ получился малым, что оправдывает применимость использованного нами разложения.

Найдем теперь выражение для x_m . При $\beta = 0$ корень трансцендентного уравнения (7. 6) примерно равен

$$x_{m0} \approx 1,52. \quad (7. 11)$$

Используя этот результат, корень x_m при $\beta \neq 0$ легко найти методом последовательных приближений. При этом проще исходить не из уравнения (7. 6), а использовать получающееся из него соотношение (7. 8). Разлагая правую часть этого соотношения по степеням β , получим

$$\frac{dx_m}{d\beta} = \frac{x_m}{2(x_m^2 - 1)} \left[1 - \frac{2x_m^2 - 3}{x_m^2 - 1} \frac{\beta}{2} + \left(\frac{2x_m^2 - 3}{x_m^2 - 1} \cdot \frac{\beta}{2} \right)^2 - \dots \right].$$

В первом приближении оставляем в правой части только первый член, заменяя в нем x_m на x_{m0} . В результате после интегрирования получим

$$x_m = x_{m0} + \frac{x_{m0}}{2(x_{m0}^2 - 1)} \beta \approx 1,52 + 0,580\beta. \quad (7. 12)$$

Аналогично получают следующие приближения. В третьем приближении

$$x_m \approx 1,52 + 0,580\beta - 0,458\beta^2 + 0,57\beta^3. \quad (7. 13)$$

Второй случай. Параметр $\beta \equiv \frac{m^*}{m}$ очень велик. Примером может служить пучок электронов, взаимодействующий с ионами плазмы. Для ионов водорода $\beta = 1836$, для ионов дейтерия $\beta = 3672$. В рассматриваемом случае корни $x_{кр}$ и x_m сравнительно велики, а потому можно принять $\Phi(x_{кр}) = \Phi(x_m) = 1$. При $\beta > 15$ вносимая этим ошибка не превышает 1%, а при $\beta > 100$ — 0,1%. В этом приближении уравнения (7. 5) и (7. 6) переходят в

$$Ax_{кр} e^{-x_{кр}^2} = 1, \quad (7. 14)$$

$$2Ax_m^3 e^{-x_m^2} = 1, \quad (7. 15)$$

причем во втором из этих уравнений мы пренебрегли единицей по сравнению с $2x_m^2(1 + \beta)$. Через A обозначена постоянная

$$A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 + \beta). \quad (7. 16)$$

После логарифмирования

$$\begin{aligned} x_{кр}^2 &= \ln A + \ln x_{кр}, \\ x_m^2 &= \ln(2A) + 3 \ln x_m. \end{aligned}$$

Так как коэффициент A велик, то эти уравнения удобно решать методом последовательных приближений. В нулевом приближении отбрасываем $\ln x_{кр}$ и $3 \ln x_m$ и находим

$$\left. \begin{aligned} x_{кр}^2 &= \ln A; \\ x_m^2 &= \ln(2A), \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

В первом приближении $x_{кр}$ и x_m под знаком логарифма заменяем их значениями $\sqrt{\ln A}$ и $\sqrt{\ln(2A)}$ из нулевого приближения, что дает

$$\left. \begin{aligned} x_{кр}^2 &= \ln A + \frac{1}{2} \ln \ln A, \\ x_m^2 &= \ln(2A) + \frac{3}{2} \ln \ln(2A). \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Аналогично во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} x_{кр}^2 &= \ln A + \frac{1}{2} \ln \left(\ln A + \frac{1}{2} \ln \ln A \right), \\ x_m^2 &= \ln(2A) + \frac{3}{2} \ln \left[\ln(2A) + \frac{3}{2} \ln \ln(2A) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

и т. д.

При $\beta > 100$ ошибка второго приближения не превышает 1%.

Для электронов, взаимодействующих с протонной компонентой плазмы ($\beta = 1836$), указанным методом находим $x_{кр} = 2,95$, $x_m = 3,47$, а для электронов, взаимодействующих с дейтонной компонентой ($\beta = 3672$), $x_{кр} = 3,07$, $x_m = 3,58$.

Третий случай. Параметр $\beta \equiv \frac{m^*}{m}$ порядка единицы или отличается от нее в несколько десятков раз. Этот случай реализуется для пучка электронов, взаимодействующего с электронной компонентой плазмы, а также для пучка ионов, взаимодействующего с ионной компонентой плазмы. В этой промежуточной области трудно найти простые аппроксимирующие выражения для корней $x_{кр}(\beta)$ и $x_m(\beta)$, и надо решать трансцендентные уравнения (7.5) и (7.6). Впрочем, эти корни проще найти путем численного интегрирования уравнений (7.7) и (7.8) с использованием приближенных формул (7.9) и (7.13).

В табл. 3 приведены значения корней $x_{кр}(\beta)$ и $x_m(\beta)$ для некоторых значений параметра β . Там же приведены отношения энергий $\mathcal{E}_{кр} \equiv \frac{mv_{кр}^2}{2}$ и $\mathcal{E}_m \equiv \frac{mv_m^2}{2}$ к температуре T^* выделенной компоненты плазмы. Энергии $\mathcal{E}_{кр}$ и \mathcal{E}_m вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{кр} &= \frac{x_{кр}^2}{\beta} T^*, \\ \mathcal{E}_m &= \frac{x_m^2}{\beta} T^*. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Критические параметры для различных значений величины β

β	$x_{кр}$	x_m	$\frac{\mathcal{E}_{кр}}{T^*}$	$\frac{\mathcal{E}_m}{T^*}$	β	$x_{кр}$	x_m	$\frac{\mathcal{E}_{кр}}{T^*}$	$\frac{\mathcal{E}_m}{T^*}$
0	0	1,52	1,5	∞	30	2,07	2,68	0,144	0,240
0,1	0,377	1,57	1,42	24,6	40	2,15	2,75	0,115	0,189
0,2	0,519	1,61	1,35	13,0	50	2,21	2,80	0,0980	0,157
0,3	0,620	1,65	1,28	9,10	60	2,25	2,84	0,0840	0,134
0,4	0,699	1,69	1,22	7,13	70	2,28	2,87	0,0743	0,118
0,5	0,765	1,72	1,17	5,92	80	2,31	2,90	0,0670	0,105
0,6	0,822	1,75	1,12	5,10	90	2,34	2,92	0,0612	0,0950
0,7	0,871	1,78	1,08	4,53	100	2,37	2,94	0,0556	0,0867
0,8	0,915	1,81	1,05	4,10	200	2,52	3,08	0,0317	0,0478
0,9	0,954	1,83	1,01	3,73	300	2,60	3,15	0,0226	0,0332
1,0	0,990	1,85	0,980	3,42	400	2,66	3,21	0,0177	0,0258
1,1	1,02	1,87	0,948	3,18	500	2,71	3,25	0,0147	0,0211
1,2	1,05	1,89	0,918	2,99	600	2,74	3,28	0,0125	0,0180
1,3	1,08	1,91	0,897	2,80	700	2,77	3,31	0,0110	0,0157
1,4	1,11	1,93	0,873	2,65	800	2,80	3,33	0,00980	0,0139
1,5	1,13	1,94	0,852	2,51	900	2,82	3,35	0,00887	0,0125
2	1,23	2,01	0,757	2,03	1 000	2,84	3,37	0,00807	0,0114
3	1,37	2,11	0,626	1,49	2 000	2,97	3,49	0,00441	0,00608
4	1,47	2,18	0,541	1,19	3 000	3,04	3,55	0,00308	0,00421
5	1,54	2,24	0,475	1,01	4 000	3,09	3,60	0,00239	0,00322
6	1,60	2,29	0,427	0,875	5 000	3,13	3,63	0,00196	0,00264
7	1,65	2,33	0,388	0,775	6 000	3,16	3,66	0,00165	0,00223
8	1,69	2,36	0,357	0,697	7 000	3,18	3,68	0,00145	0,00194
9	1,73	2,39	0,331	0,635	8 000	3,20	3,70	0,00128	0,00172
10	1,76	2,42	0,310	0,585	9 000	3,22	3,72	0,00116	0,00154
15	1,88	2,52	0,235	0,423	10 000	3,24	3,74	0,00105	0,00140
20	1,96	2,59	0,193	0,335					

4. Парадоксальным на первый взгляд кажется то обстоятельство, что $\mathcal{E}_{кр} \neq \frac{3}{2} T^*$. Только в предельном случае очень малых значений параметра $\beta = \frac{m^*}{m}$ (моноэнергетический пучок ионов, взаимодействующий с электронами плазмы) $\mathcal{E}_{кр}$ приближается к $\frac{3}{2} T^*$. Во всех остальных случаях $\mathcal{E}_{кр} < \frac{3}{2} T^*$. Особенно сильно $\mathcal{E}_{кр}$ отличается от $\frac{3}{2} T^*$ при больших значениях β . Так, для пучка электронов, взаимодействующего с водородными ионами плазмы ($\beta = 1836$), $\mathcal{E}_{кр} = \frac{1}{211} T^*$, а для пучка, взаимодействующего с ионами дейтерия ($\beta = 3672$), $\mathcal{E}_{кр} = \frac{1}{388} T^*$.

В действительности здесь нет противоречия. Средняя скорость передачи энергии должна была бы обращаться в нуль при $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{2} T^*$, если бы скорости частиц пучка и выделенной компоненты

плазмы были распределены по Максвеллу с одной и той же температурой. Что выражение (7.1) удовлетворяет этому требованию — в этом мы убедимся в § 9 с помощью прямых расчетов. Если же максвелловского распределения нет (например, если пучок частиц — моноэнергетический), то при $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{2} T^*$ средняя скорость передачи энергии не обязательно должна обращаться в нуль.

Возникает, однако, следующий вопрос. Пусть энергия \mathcal{E} частицы моноэнергетического пучка такова, что $\mathcal{E}_{кр} < \mathcal{E} < \frac{3}{2} T^*$.

Тогда, с одной стороны, энергия пучка будет переходить к выделенной компоненте плазмы, т. е. начнет уменьшаться. С другой стороны, должно установиться статистическое равновесие, в котором частицы пучка распределены по Максвеллу со средней энергией $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{2} T^*$; энергия пучка в конце концов должна увели-

читься. Противоречия здесь нет. Вначале, когда скорости частиц пучка одинаковы или почти одинаковы, энергия действительно передается от пучка к выделенной компоненте плазмы. В дальнейшем взаимодействие пучка с плазмой приводит к перераспределению скоростей, и начиная с некоторого момента величина $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_1$ меняет знак. В конце концов устанавливается равновесное состояние, в котором средние энергии частиц пучка плазмы одинаковы.

Допустим, например, что в начальный момент скорости всех частиц моноэнергетического пучка равны критической. Тогда в этот момент средняя скорость передачи энергии будет равна нулю. Благодаря взаимодействию с частицами плазмы, распределение скоростей частиц пучка начнет меняться. В пучке появятся частицы с энергией меньше критической (назовем их медленными) и частицы с энергией больше критической (назовем их быстрыми). Так как средняя скорость передачи энергий в начальный момент равна нулю, то энергия пучка в целом вначале практически не изменится. Затем медленные частицы начнут получать энергию от выделенной компоненты плазмы, а быстрые частицы — отдавать ей энергию. Так как в выражении (7.1) скорость v стоит в знаменателе, за одно и то же время медленные частицы получат больше энергии, чем отдадут быстрые. Энергия пучка в целом начнет монотонно возрастать, и это возрастание будет продолжаться до тех пор, пока распределение скоростей в пучке не перейдет в максвелловское с температурой, равной температуре плазмы.

Монотонное возрастание энергии пучка будет наблюдаться и в том случае, когда вначале энергия частицы пучка была меньше критической. Если же $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{кр}$, то вначале энергия будет переходить всегда от пучка к выделенной компоненте плазмы. При не очень больших значениях \mathcal{E} скорость передачи энергии может обратиться в нуль, а затем изменить знак. При достаточно боль-

ших \mathcal{E} энергия пучка будет убывать монотонно, а средняя скорость передачи энергии, не меняя знака, асимптотически стремиться к нулю.

§ 8. Относительная роль ионной и электронной компонент в обмене энергией плазмы с моноэнергетическим пучком взаимодействующих частиц

1. Пусть плазма является *двухкомпонентной* и состоит из электронов и одинаковых ионов. Температуру электронов и ионов будем считать одной и той же и обозначать через T^* . Пучок пробных частиц предполагается *моноэнергетическим* и может состоять либо из электронов, либо из одинаковых ионов. Скорости изменения энергии \mathcal{E} частицы пучка вследствие ее взаимодействия с ионной и электронной компонентами плазмы обозначим через $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*}$ и $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e$ соответственно. Для этих величин формулы (7. 4) и (7. 3) дают

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*} = -\frac{4\pi}{vm_i^*} L (ee_i)^2 n_i^* \left[\Phi(x) - \left(1 + \frac{m_i^*}{m}\right) x \frac{d\Phi}{dx} \right]; \quad (8. 1)$$

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e = -\frac{4\pi}{vm_e} L (ee_e)^2 n_e^* \left[\Phi(y) - \left(1 + \frac{m_e}{m}\right) y \frac{d\Phi}{dy} \right]. \quad (8. 2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x = b_i^* v = \sqrt{\frac{m_i^*}{m} \frac{\mathcal{E}}{T^*}},$$

$$y = b_e^* v = \sqrt{\frac{m_e}{m} \frac{\mathcal{E}}{T^*}} = x \sqrt{\frac{m_e}{m_i^*}}. \quad (8. 3)$$

Все величины без звездочки относятся к пробной частице: m , e , \mathcal{E} , v — масса, заряд, энергия и скорость этой частицы. Звездочкой отмечены величины, относящиеся к полевым частицам (исключение составляют масса m_e и заряд e_e электрона). Например, m_i^* , e_i^* , n_i^* означают массу, заряд и концентрацию полевых ионов.

В дальнейшем предполагается, что скорость частиц пучка превосходит критическую.

2. Рассмотрим сначала случай, когда пучок состоит из ионов.

Если энергия \mathcal{E} настолько велика, что $y \gg 1$ (а следовательно, тем более $x \gg 1$), то выражения в квадратных скобках формул (8. 1) и (8. 2) можно считать равными единице. В этом случае с учетом квазинейтральности $|n_i^* e_i^*| = |n_e^* e_e|$ формулы (8. 1) и (8. 2) дают

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e : \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*} = \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right|, \quad (8. 4)$$

т. е. ионный пучок греет электроны плазмы приблизительно в $\left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right|$ раз сильнее, чем ее ионы. Пока пучок не замедлился, практически вся его энергия идет на нагревание электронов, а не ионов.

С уменьшением \mathcal{E} начинают греться и ионы. При малых y правую часть формулы (8. 2) можно разложить в ряд по степеням y и оборвать это разложение на членах третьей степени. Пользуясь разложением (6. 8), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e &: \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right| y \frac{\frac{2}{3} y^2 - \frac{m_e}{m}}{\Phi(x) - \left(1 + \frac{m_i^*}{m} \right) \frac{d\Phi}{dx}}. \end{aligned} \quad (8. 5)$$

При $y = 0,2$ (т. е. $x = 0,2 \sqrt{\frac{m_i^*}{m_e}}$) вносимая этим ошибка не превышает 5%. Если x достаточно велико ($x \geq 2$), то знаменатель в выражении (8. 5) с достаточной точностью можно заменить на единицу. Тогда, приравнявая это выражение к единице, найдем значение параметра y , при котором средние потери энергии на электронах становятся равными соответствующим потерям на ионах. Это значение определяется уравнением

$$\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right| y^3 = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right| y. \quad (8. 6)$$

Условиями применимости последнего являются $y \ll 1$ и $x \gg 1$ или в силу первого соотношения (8. 3)

$$\sqrt{\frac{m_e}{m_i^*}} \ll y \ll 1. \quad (8. 7)$$

В других переменных

$$\frac{m}{m_i^*} \ll \frac{\mathcal{E}}{T^*} \ll \frac{m}{m_e}. \quad (8. 8)$$

Для определения y извлекаем кубический корень из обеих частей равенства (8. 6). Так как y мал, то при этом в правой части можно ограничиться первыми степенями y . Это дает

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right| - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right|}}. \quad (8. 9)$$

Второй член в знаменателе мал по сравнению с первым. Если его отбросить, то условие (8. 7) применимости формулы (8. 9) запишется в виде

$$\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \ll \sqrt[3]{\frac{9\pi}{16} \left(\frac{e_i^*}{e_e}\right)^2} \ll \left(\frac{m_i^*}{m_e}\right)^{2/3} \quad (8. 10)$$

и может считаться выполненным всегда.

Используя выражение (8. 3) для y , формулу (8. 9) можно переписать в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\frac{m}{m_e} T^*}{\sqrt[3]{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left|\frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*}\right| - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left|\frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*}\right|}}. \quad (8. 11)$$

Если энергия пробного иона больше этой величины, то сильнее нагреваются электроны плазмы, если меньше, то ионы. Для пучка протонов в водородной плазме из формулы (8. 11) получаем $\mathcal{E} = 16T^*$, а для пучка дейтронов в дейтериевой плазме $\mathcal{E} = 20T^*$.

В табл. 4 приведены значения отношения $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e : \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*}$ для пучка протонов в водородной плазме и для пучка дейтронов в дейтериевой плазме при различных значениях параметра $x = \frac{\mathcal{E}}{T^*}$.

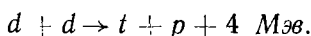
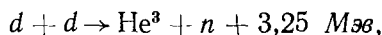
Т а б л и ц а 4

Значение отношения $\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e : \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*}$ при различных величинах параметра $\frac{\mathcal{E}}{T^*}$

$\frac{\mathcal{E}}{T^*}$	$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_e : \left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle_{i^*}$	
	пучок протонов в водородной плазме	пучок дейтронов в дейтериевой плазме
1,5	0	0
2	0,024	0,017
3	0,058	0,041
4	0,097	0,069
5	0,14	0,10
10	0,48	0,34
20	1,5	1,0
30	2,8	1,9
40	4,4	3,1
50	6,0	4,2
100	17	12
1 000	410	290
10 000	1800	3400

Из табл. 4 видно, что для водородной плазмы в интервале энергий $\frac{3}{2} T^* < \mathcal{E} < 4T^*$ энергия, передаваемая ионам более чем в десять раз, превосходит соответствующую энергию, передаваемую электронам. Для дейтериевой плазмы это справедливо в более широком интервале $\frac{3}{2} T^* < \mathcal{E} < 5T^*$.

3. Изложенное в пункте 2 может иметь важное значение для понимания принципов работы будущих *термоядерных реакторов*. Например, в реакторе, который будет работать на *дейтериевой плазме*, должны происходить следующие *ядерные реакции*:



Заряженные продукты этих реакций p , t и He^3 имеют начальные энергии соответственно 3, 1 и 0,81 Мэв. Взаимодействуя с плазмой, они передают ей свою энергию, нагревая ее электроны и ионы. Нейтроны уходят из плазмы и уносят с собой свою энергию. Для работы реактора существен *нагрев ионов*, а не электронов. Однако в действительности происходит наоборот. Вначале заряженные продукты термоядерных реакций нагревают преимущественно электроны плазмы. Лишь после того, как энергия их уменьшится до определенного предела, начнется преимущественный нагрев ионов плазмы.

Рассмотрим, например, протоны, обладающие наибольшей энергией из всех продуктов ядерных реакций. С помощью формулы (8. 11) нетрудно вычислить, что скорости передачи энергии от протонов к электронам и дейтонам плазмы одинаковы при энергии протона $\mathcal{E}_p = 10,5T^*$, что при температуре плазмы $T^* = 50 \text{ кэв}$ составляет $\mathcal{E}_p \approx 525 \text{ кэв}$. При начальной же энергии протонов $\mathcal{E}_p = 3 \text{ Мэв}$ передача энергии электронам происходит примерно в 16 раз быстрее, чем дейтонам плазмы. Максимальная передача энергии от протонов пучка к дейтонам плазмы, как видно из табл. 3, происходит при энергии протона $\mathcal{E}_p = 2,03T^*$, что при $T^* = 50 \text{ кэв}$ составляет $\mathcal{E}_p \approx 100 \text{ кэв}$. Эта максимальная скорость, как нетрудно убедиться с помощью формулы (7. 1), приблизительно равна

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \right\rangle_d = - \frac{2\pi L e^4 n}{\sqrt{2m_p \mathcal{E}_p}}.$$

При $\mathcal{E}_p = 100 \text{ кэв}$, $n = 10^{13} \text{ протон/см}^3$, $L = 22$ отсюда получаем

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \right\rangle_d \approx - 63 \text{ кэв/сек}.$$

4. В заключение кратко рассмотрим случай, когда пучок состоит из электронов с энергией \mathcal{E}_e . В этом случае в формулах (8. 1)

и (8. 2) $m = m_e$, $e = e_e$, и, следовательно,

$$y = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_e}{T^*}}, \quad x = y \sqrt{\frac{m_i^*}{m_e}}.$$

Предполагается, что энергия электрона \mathcal{E}_e превышает критическую энергию при взаимодействии его как с электронами, так и с ионами плазмы. Из первого предположения, как видно из табл. 3, следует, что $\mathcal{E}_e > T^*$, т. е. $y > 1$. Следовательно, параметр x велик, и выражение в квадратных скобках в формуле (8. 1) с очень большой точностью равно единице. Если при этом $y \gg 1$ (практически достаточно, чтобы $y > 2$), то можно заменить на единицу и квадратную скобку в формуле (8. 2). В результате получим

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right\rangle_e : \left\langle \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right\rangle_{i^*} = \left| \frac{m_i^* e_e}{m_e e_i^*} \right|.$$

Энергия электронного пучка передается электронам плазмы в $\left| \frac{m_i^ e_e}{m_e e_i^*} \right|$ раз быстрее, чем ионам, т. е. практически вся энергия передается электронам.*

§ 9. Выравнивание температур в двухкомпонентной плазме

1. В § 7 и 8 рассматривался обмен энергиями между моноэнергетическим пучком одинаковых заряженных частиц и одной из компонент плазмы, состоящей из одинаковых частиц с максвелловским распределением скоростей. Исследуем теперь случай, когда вместо моноэнергетического пучка берется группа одинаковых частиц плазмы, скорости которых в некоторый момент времени распределены по Максвеллу с температурой T . Рассмотрим обмен энергией этой группы частиц с какой-либо другой группой частиц плазмы, состоящей также из одинаковых частиц, скорости которых в тот же момент времени характеризуются максвелловским распределением с температурой T^* . Требуется определить в рассматриваемый момент времени среднюю энергию Q , передаваемую в единицу времени одной частицей первой группы всем частицам второй группы. Эта величина найдется из выражения (7. 1), если в нем изменить знак, а затем усреднить по максвелловскому распределению скоростей частиц первой группы. Вводя обозначение

$$b = \sqrt{\frac{m}{2T}}, \quad (9. 1)$$

имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Phi(b^*v)}{v} \right\rangle &= \frac{4b^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Phi(b^*v) e^{-b^2 v^2} v \, dv = \\ &= \frac{8b^3}{\pi b^{*2}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{b}{b^*}x\right)^2} x \, dx \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

Интеграл легко вычисляется перестановкой порядка интегрирований по ξ и по x :

$$\left\langle \frac{\Phi(b^*v)}{v} \right\rangle = \frac{8b^3}{\pi b^{*2}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi \int_{\xi}^\infty e^{-\left(\frac{b}{b^*}x\right)^2} x dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{bb^*}{\sqrt{b^2 + b^{*2}}}.$$

Далее

$$\langle e^{-b^{*2}v^2} \rangle = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^\infty e^{-(b^2 + b^{*2})v^2} 4\pi v^2 dv = \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + b^{*2}}}\right)^3.$$

Используя эти результаты, после несложных вычислений найдем

$$Q = \frac{3}{2} \frac{(T - T^*)}{\tau_\varepsilon}, \quad (9.2)$$

где

$$\tau_\varepsilon = \frac{3mm^*}{8\sqrt{2\pi n^*L}(ee^*)^2} \left(\frac{T}{n} + \frac{T^*}{m^*}\right)^{3/2}. \quad (9.3)$$

Формулы (9. 2) и (9. 3) другими способами были впервые получены Л. Спитцером [8] и независимо от него В. И. Коганом [9]. Для частного случая, когда $m^* \ll m$, эти формулы были выведены еще ранее Л. Д. Ландау [10, 11] [см. формулу (9. 13)]. В § 17 будет дан другой вывод формул (9. 2) и (9. 3), основанный на кинетическом уравнении для плазмы.

Величина τ_ε имеет размерность времени. Ее можно назвать *временем выравнивания температур* рассматриваемых двух групп частиц.

Как и должно быть, передача энергии, согласно формуле (9. 2), происходит всегда от более нагретой к менее нагретой группе частиц и прекращается, когда выравниваются температуры этих групп. Температуру T , при которой скорость передачи энергии максимальна, обозначим через T_m (предполагается, что температура T^* поддерживается постоянной). Величину T_m можно найти, если приравнять к нулю производную $\frac{dQ}{dT}$ при фиксированной температуре T^* . Таким путем получаем

$$T_m = \left(3 + 2 \frac{m}{m^*}\right) T^*. \quad (9.4)$$

2. Применим полученные результаты к *двухкомпонентной квазинейтральной плазме*, состоящей из электронов и однотипных положительно заряженных ионов. Возникает вопрос, возможно ли и при каких условиях *квазиравновесное состояние*, в котором скорости как электронов, так и ионов плазмы распределены по Максвеллу, но с различными температурами T_e и T_i . Для строгого решения этого вопроса следовало бы рассмотреть процесс

установления термодинамического равновесия в плазме, исходя из ее произвольного начального состояния. Можно, однако, поступить проще. Обозначим через $\tau_{\mathcal{E}}^{ee}$ время установления максвелловского распределения электронов, которое наступает вследствие внутренних взаимодействий между самими электронами. Аналогичную величину для ионов обозначим через $\tau_{\mathcal{E}}^{ii}$. Наконец, через $\tau_{\mathcal{E}}^{ei}$ обозначим время установления термодинамического равновесия между электронами и ионами. Чтобы искомое квазиравновесное состояние возникло при произвольном начальном состоянии плазмы, достаточно выполнения двух условий

$$\tau_{\mathcal{E}}^{ee} \ll \tau_{\mathcal{E}}^{ei}, \quad \tau_{\mathcal{E}}^{ii} \ll \tau_{\mathcal{E}}^{ei}. \quad (9.5)$$

В противном случае при произвольных начальных состояниях плазмы такое квазиравновесное состояние возникнуть не может; оно возможно лишь при специальных начальных состояниях. Времена $\tau_{\mathcal{E}}^{ee}$, $\tau_{\mathcal{E}}^{ii}$, $\tau_{\mathcal{E}}^{ei}$ можно оценить с помощью формулы (9.3) и тем самым качественно решить поставленный вопрос.

Время $\tau_{\mathcal{E}}^{ei}$ можно отождествить с временем выравнивания температур электронов и ионов, которое дается выражением (9.3). Если ионы однозарядные, а плазма квазинейтральна ($n = n^*$), то выражение (9.3) симметрично относительно ионов и электронов, поэтому можно положить, например, $T = T_e$, $T^* = T_i$, $m = m_e$, $m^* = m_i$. Кроме того, выражение (9.3) можно упростить, используя малость отношения $\frac{m_e}{m_i}$. Если выполнено условие

$$\frac{T_i}{m_i} \ll \frac{T_e}{m_e}, \quad \text{т. е.}$$

$$T_i \ll \frac{m_i}{m_e} T_e, \quad (9.6)$$

то из формулы (9.3) получаем

$$\tau_{\mathcal{E}}^{ei} \approx \frac{3m_i T_e^{3/2}}{8\sqrt{2\pi m_e n} Le^4}. \quad (9.7)$$

Времена $\tau_{\mathcal{E}}^{ee}$ и $\tau_{\mathcal{E}}^{ii}$ можно оценить следующим образом. Разделим все электроны плазмы на две группы с концентрациями $\frac{n}{2}$ каждая. Допустим, что скорости электронов каждой из групп распределены по Максвеллу, но с различными температурами T_e и T_e' . Тогда для описания обмена энергиями этих групп применимы формулы (9.2) и (9.3). Время выравнивания их температур можно отождествить с временем $\tau_{\mathcal{E}}^{ee}$ установления максвелловского распределения. Введем несущественное допущение, что $T_e \gg T_e'$. Тогда, подставляя в формулу (9.3) величины $n^* = \frac{n}{2}$, $m =$

$m^* = m_e$, $T = T_e$ и пренебрегая $T^* \equiv T_e'$ по сравнению с T_e , получим

$$\tau_g^{ee} \approx \frac{3 \sqrt{m_e} T_e^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} n L e^4}. \quad (9.8)$$

Хотя эта формула получена для вполне определенного специализированного начального распределения скоростей электронов, нет сомнений, что она пригодна для качественной оценки времени установления максвелловского распределения при любом (не слишком специализированном) начальном распределении скоростей электронов. При этом под T_e можно понимать температуру электронов, например, в конечном состоянии, когда максвелловское распределение уже будет достигнуто.

Таким же путем найдем для ионов

$$\tau_g^{ii} \approx \frac{3 \sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} n L e^4}. \quad (9.9)$$

Чтобы иметь представление о порядке величин τ_g^{ee} , τ_g^{ii} , τ_g^{ei} , приведем их значения для дейтериевой плазмы при $T_e = T_i = = 10 \text{ кэв} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ эрг}$ и $n = 10^{14} \text{ частиц/см}^3$. Пользуясь формулами (9.8), (9.9) и (9.7), а также табл. 1 и 2, получим

$$\tau_g^{ee} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ сек}; \quad \tau_g^{ii} \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ сек}; \quad \tau_g^{ei} \approx 0,36 \text{ сек}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае условия (9.5) выполняются. В общем случае по порядку величины

$$\tau_g^{ee} : \tau_g^{ii} : \tau_g^{ei} \approx 1 : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} : \frac{m_i}{m_e}. \quad (9.10)$$

При этом предполагается, что условие (9.6) выполнено. Мы видим, что при этом условии всегда $\tau_g^{ee} \ll \tau_g^{ei}$. Если, кроме того, выполнено условие $\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \ll \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}$, т. е.

$$T_i \ll \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3} T_e, \quad (9.11)$$

то будет также $\tau_g^{ii} \ll \tau_g^{ei}$.

Из неравенства (9.11) следует неравенство (9.6). Поэтому при выполнении условия (9.11) выполняется также условие (9.5). Далее, в § 12 будет показано, что за время, порядок величины которого определяется формулами (9.8) и (9.9), неизотропные распределения скоростей ионов и электронов успевают перейти в изотропные. Отсюда следует, что условия (9.11) достаточно для того, чтобы в течение всего процесса обмена энергиями между ионами и электронами, за исключением, быть может, его кратковременной начальной стадии, можно было считать распределение скоростей ионов и электронов почти максвелловскими. В частности, это будет иметь место при $T_i < T_e$.

Итак, установление равновесия между ионной и электронной компонентами плазмы — значительно более медленный процесс, чем установление максвелловского распределения для одних только электронов или для одних только ионов. Поэтому в плазме с произвольным начальным распределением скоростей электронов и ионов кулоновские столкновения очень быстро приводят к установлению практически максвелловских распределений скоростей электронов и ионов, тогда как установление теплового равновесия между электронами и ионами наступает значительно позднее. В результате возникает квазиравновесное состояние, характеризующееся двумя температурами: электронной T_e и ионной T_i . При выводе явно использовалось условие (9. 11). Если это условие не выполняется, то указанное заключение, вообще говоря, несправедливо.

Было бы, однако, неправильным утверждать, что условие (9. 11) не только достаточно, но и необходимо для возникновения такого квазиравновесного состояния плазмы. При некоторых начальных условиях оно может возникнуть даже тогда, когда условие (9. 11) не выполнено. Допустим, например, что начальное распределение ионов уже максвелловское и что выполнено условие (9. 6), из которого следует $\tau_{\text{г}}^{ee} \ll \tau_{\text{г}}^{ei}$. Тогда очень быстро возникнет и максвелловское распределение скоростей электронов, и нет оснований ожидать, что максвелловские распределения ионов и электронов будут сильно искажены в результате взаимодействия между ними. В результате в течение всего процесса обмена энергиями между ионами и электронами распределения скоростей ионов и электронов будут почти максвелловскими, хотя условие (9. 11) может и не выполняться.

3. Процесс выравнивания электронной и ионной температур описывается формулой (9. 2), в которой следует положить $T = T_e$, $T^* = T_i$. В рассматриваемом случае, в силу условия (9. 6), можно пренебречь вторым слагаемым в скобках формулы (9. 3), тогда

$$Q \equiv Q_{ei} = \frac{3}{2} \frac{(T_e - T_i)}{\tau_{\text{г}}^{ei}}, \quad (9. 12)$$

где Q_{ei} — средняя энергия, ежесекундно передаваемая одним электроном ионной компоненте плазмы, а время $\tau_{\text{г}}^{ei}$ по-прежнему определяется выражением (9. 7). В результате мы приходим к формуле

$$Q_{ei} = \frac{4\sqrt{2\pi m_e n} L e^4}{m_i T_e^{3/2}} (T_e - T_i), \quad (9. 13)$$

впервые полученной Л. Д. Ландау другим путем [10, 11]. Ее можно представить в виде

$$Q_{ei} = \frac{A}{\sqrt{T_i}} \frac{\alpha - 1}{\alpha^{3/2}}, \quad (9. 14)$$

где A не зависит от T_e и T_i , а через α обозначено отношение $\alpha = \frac{T_e}{T_i}$. График этой функции при фиксированной температуре T_i представлен на рис. 5. Она достигает максимума при $\alpha = 3$, при $\alpha = 5$ имеет точку перегиба, а затем медленно убывает с возрастанием α . При больших α величина Q_{ei} изменяется обратно пропорционально квадратному корню из α ; при $\alpha \approx 25$ величина Q_{ei} равна половине своего максимального значения. При $\alpha = 2$ она составляет 0,92 максимального значения. При дальнейшем уменьшении α величина Q_{ei} быстро убывает, меняя знак при $\alpha = 1$.

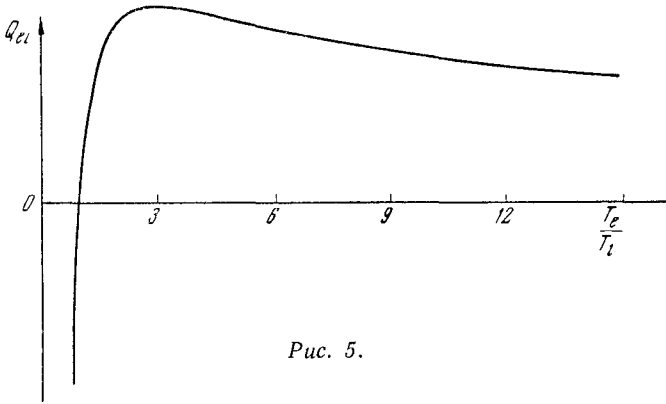


Рис. 5.

4. Для описания процесса выравнивания электронной и ионной температур, помимо уравнения (9. 12), необходимо еще одно уравнение. Его можно получить из закона сохранения энергии. В простейшем случае, когда плазма не получает и не теряет энергии, этот закон сводится к $T_e + T_i = \text{const}$. Обозначим через T_∞ окончательную температуру плазмы, т. е. ту температуру, которая установится в ней, когда выравнивание температур практически закончится. Тогда

$$T_e + T_i = 2T_\infty. \quad (9. 15)$$

Исключая с помощью этого соотношения T_i из формулы (9. 12) и принимая во внимание, что $Q_{ei} = -\frac{3}{2} \frac{dT_e}{dt}$, получим

$$\frac{T_e^{3/2} dT_e}{T_e - T_\infty} = -T_\infty^{3/2} \frac{dt}{\tau_\infty},$$

где

$$\tau_\infty = \frac{3m_i T_\infty^{3/2}}{16 \sqrt{2\pi m_e n} Le^4}. \quad (9. 16)$$

После интегрирования

$$\ln \left| \frac{\sqrt{T_e} - \sqrt{T_\infty}}{\sqrt{T_e} + \sqrt{T_\infty}} \right| = -\frac{t}{\tau_\infty} - \frac{2}{3} \left(\frac{T_e}{T_\infty} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{T_e}{T_\infty} \right)^{1/2} + C, \quad (9. 17)$$

где C — постоянная, определяемая из начальных условий,

Кривая (9. 17) представлена на рис. 6 для случая; когда $T_e > T_i$. Там же приведена соответствующая кривая для температуры ионов. За начало отсчета времени принят момент, когда температура ионов равна нулю. Кривые пригодны для определения T_e и T_i при любых начальных условиях. Для этого следует только отметить на оси времени точку, в которой T_e и T_i в принятом масштабе равны их начальным значениям, и эту точку выбрать за новое начало отсчета времени. Тогда дальнейший ход температур T_e и T_i изобразится на рис. 6 ветвями кривых, расположенными правее этой точки.

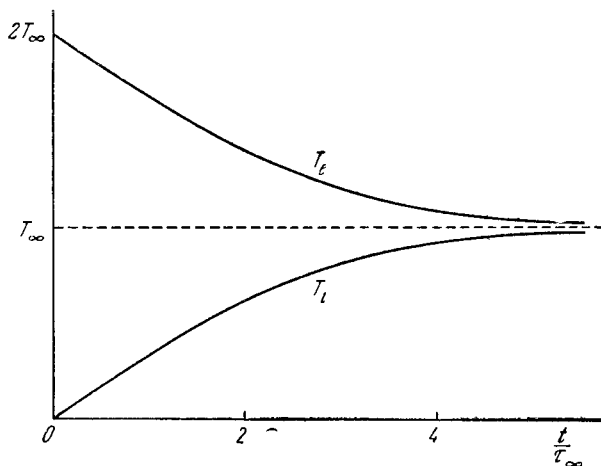


Рис. 6.

На рис. 7 приведены кривые изменения температур электронов и ионов для случая $T_e < T_i$. Участки кривых, где условие (9. 11) не выполнено, изображены пунктиром. Состояния плазмы, соответствующие этим участкам кривых, не совсем лишены смысла, поскольку теоретически возможно квазиравновесное состояние с максвелловскими распределениями скоростей ионов и электронов даже в том случае, когда условие (9. 11) не выполняется.

Впрочем, самые начальные участки кривых на рис. 6 и 7 следует рассматривать как экстраполяции, не соответствующие действительности, поскольку при очень сильном различии T_e и T_i теория неприменима.

При больших значениях t , когда температуры T_e и T_i мало отличаются друг от друга, формула (9. 17) переходит в

$$|T_e - T_\infty| = |T_i - T_\infty| = \text{const} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_\infty}}. \quad (9. 18)$$

В этой области разность температур T_e и T_i убывает в e раз за время τ_∞ . Этим устанавливается простой физический смысл времени τ_∞ .

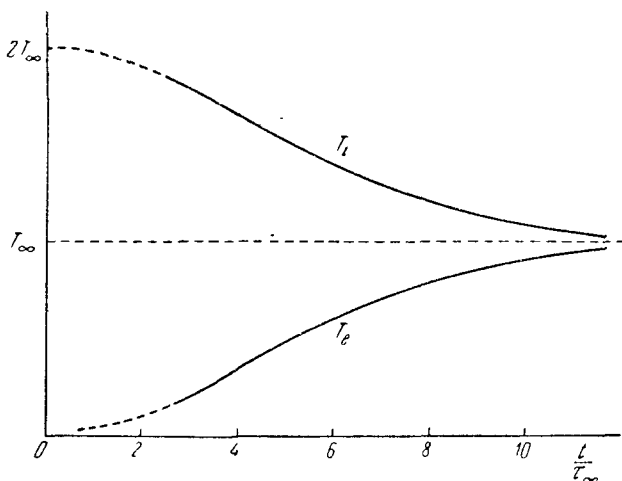


Рис. 7.

§ 10. Изменение импульса пробной частицы, движущейся в плазме

1. В § 6 были выведены формулы для изменения кинетической энергии пробной частицы, движущейся в плазме. Исследуем теперь при тех же предположениях *изменение импульса* пробной частицы. Исходной является формула (3. 12). При изотропном распределении скоростей полевых частиц вектор \mathbf{E}_v параллелен и одинаково направлен с вектором \mathbf{v} . Поэтому формула (3. 12) определяет в среднем *продольное торможение* пробной частицы. Помимо продольного торможения, представляют также интерес *боковые отклонения* частицы от направления своего движения. Они, естественно, носят нерегулярный характер. Поэтому мы дополним формулу (3. 12) выражением, определяющим среднюю скорость изменения квадрата поперечного импульса. Это выражение можно найти из формулы (3. 12) с использованием формулы (3. 11).

Рассмотрим изменение квадрата импульса \mathbf{p} при кулоновских столкновениях. При столкновениях меняется как продольная, так и поперечная составляющие вектора \mathbf{p} (по отношению к направлению движения пробной частицы перед столкновением). В соответствии с этим

$$\frac{dp^2}{dt} = \frac{dp_{\parallel}^2}{dt} + \frac{dp_{\perp}^2}{dt}. \quad (10. 1)$$

Так как $p^2 = 2m\varepsilon$, то

$$\frac{dp^2}{dt} = 2m \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (10. 2)$$

Кроме того,

$$\frac{dp_{\parallel}^2}{dt} = 2p_{\parallel} \frac{dp_{\parallel}}{dt} = 2\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (10. 3)$$

Подставляя эти выражения в предыдущее соотношение и усредняя по ансамблю пробных частиц с фиксированным импульсом \mathbf{p} , получим

$$\left\langle \frac{dp_{\perp}^2}{dt} \right\rangle = 2m \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle - 2\mathbf{p} \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle. \quad (10. 4)$$

Используя формулы (3. 11) и (3. 12), находим

$$\left\langle \frac{dp_{\perp}^2}{dt} \right\rangle = 2 \Sigma^* L \varphi_v. \quad (10. 5)$$

Эта формула и описывает статистически процесс бокового отклонения пробной частицы.

2. С помощью электростатической аналогии легче всего понять следующее любопытное следствие, впервые отмеченное, по-видимому, С. Т. Беляевым и Г. И. Будкером [12]. Если функция распределения $f^*(\mathbf{v}^*)$ изотропна, т. е. зависит только от величины скорости \mathbf{v}^* , но не от ее направления, то тем же свойством обладает «аналог плотности электрических зарядов в пространстве скоростей», определяемый выражением (3. 15). Эти «заряды», таким образом, распределены в пространстве скоростей сферически симметрично вокруг начала координат $\mathbf{v}^* = 0$. В этом случае, как известно из электростатики, «заряды», расположенные от начала координат дальше, чем на v , не влияют на «электрическое поле» \mathbf{E}_v в точке $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$. Поэтому, не меняя значения интеграла (3. 13), можно взять в качестве области интегрирования пространство внутри сферы $v^* < v$, что и сделано в первой формуле (6. 1). Отсюда следует, что *полевые частицы, скорости которых превосходят скорость пробной частицы, не влияют на значение $\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle$, т. е. на среднее продольное торможение этой частицы.*

Отмеченный результат является следствием использованного приближения, в котором кулоновский логарифм L не зависит от относительной скорости u . Но даже в этом приближении полевые частицы со скоростями $v^* > v$ оказывают влияние на боковые отклонения пробной частицы, как это видно из формул (10. 5) и (3. 14): интеграл

$$\int_{v^* > v} \frac{1}{u} \varrho_v(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^* = \int_{v^* > v} \frac{\varrho_v(\mathbf{v}^*)}{v^*} d\mathbf{v}^*$$

отличен от нуля и существенно положителен. Точно так же эти частицы влияют на кинетическую энергию пробной частицы, в среднем всегда увеличивая ее, как это следует из формулы (3. 11), а также из простых физических соображений.

3. Проведем теперь вычисления для максвелловского распределения (6. 2) полевых частиц. В этом случае E_v и Φ_v определяются выражениями (6. 3) и (6. 4). Подставив их в формулы (3. 12) и (10. 5), найдем

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = -\frac{4\pi e^2}{v^3} \mathbf{v} \sum^* \frac{Le^{*2}}{\mu} n^* \Phi_1(b^*v), \quad (10. 6)$$

$$\left\langle \frac{dp_{\perp}^2}{dt} \right\rangle = \frac{8\pi e^2}{v} \sum^* Ln^* e^{*2} \Phi(b^*v). \quad (10. 7)$$

§ 11. Пробег быстрого иона в плазме

1. Допустим, что быстрый ион движется в плазме с кинетической энергией, которая много больше средней кинетической энергии теплового движения ионов и электронов плазмы. В этом случае $b^*v \gg 1$, поэтому можно принять $\Phi_1(b^*v) = \Phi(b^*v) = 1$. Отвлечемся сначала от изменения направления движения быстрого (пробного) иона, описываемого формулой (10. 7), и будем считать, что он движется строго прямолинейно. При этом ион испытывает торможение, описываемое формулой (10. 6). Если под p и v понимать средние (по ансамблю пробных ионов) значения его импульса и скорости, то эту формулу можно представить в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{A}{v^2}, \quad (11. 1)$$

где A — постоянная, равная

$$A = 4\pi e^2 \sum^* \frac{Le^{*2}}{\mu} n^*. \quad (11. 2)$$

Интегрируя уравнение (11. 1), получим

$$v_0^3 - v^3 = \frac{3A}{m} t, \quad (11. 3)$$

где v_0 — значение скорости v при $t = 0$.

Если ввести путь $dx = vdt$, проходимый пробным ионом за время dt , то уравнение (11. 1) запишется в виде

$$m \frac{dv}{dx} = -\frac{A}{v^3}$$

и после интегрирования даст

$$x = \frac{m}{4A} (v_0^4 - v^4). \quad (11. 4)$$

Формулами (11. 3) и (11. 4) можно пользоваться, пока скорость v такова, что кинетическая энергия быстрого иона все еще

превосходит среднюю кинетическую энергию теплового движения электронов и ионов плазмы. Если начальная скорость v_0 очень велика, а конечная v приближается к средней скорости теплового движения полевых ионов плазмы, то в формулах (11. 3) и (11. 4) можно пренебречь слагаемыми v^3 и v^4 . В частности, формула (11. 4) определит тогда средний пробег l быстрого иона в плазме, т. е. среднее расстояние, проходимое им до того момента, когда он придет в тепловое равновесие с окружающей плазмой. Для пробега l , таким образом, получаем

$$l = \frac{mv_0^4}{4A} = \frac{mv_0^4}{16\pi e^2 \sum^* \frac{Le^{*2}}{\mu} n^*}. \quad (11. 5)$$

Так как приведенная масса для ион-ионных столкновений очень велика по сравнению с приведенной массой для ион-электронных столкновений, то при вычислении l влиянием ионов можно пренебречь по сравнению с влиянием электронов. Тогда формула (11. 5) упрощается и принимает следующий вид:

$$l = \frac{mm_e}{16\pi e^2 e^2 Ln_e^*} v_0^4, \quad (11. 6)$$

где обозначения такие же, как в § 8.

Таким образом, при кулоновском взаимодействии торможение быстрых ионов происходит главным образом за счет их рассеяния на электронах плазмы. Этот на первый взгляд парадоксальный результат согласуется с результатами, полученными в § 6—8, где рассматривался обмен энергией быстрого иона с плазмой. Все это объясняется особенностями кулоновского взаимодействия — при одном и том же угле рассеяния ϑ , как показывают формулы (2. 14) и (2. 15), приращения δp , $\delta \mathcal{E}$ импульса и энергии пробной частицы в результате единичного акта рассеяния пропорциональны первой степени приведенной массы μ ; однако, согласно формуле Резерфорда (3. 5), дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\vartheta, u)$ зависит от μ более сильно — оно обратно пропорционально квадрату μ . При этом, как следует из формулы (6. 7), средняя потеря энергии быстрой частицы в единицу времени убывает с возрастанием ее скорости v : она обратно пропорциональна v .

2. Остается еще оправдать использованное при выводе формулы (11. 5) допущение, что траектория пробного иона, пока его скорость превышает среднюю скорость теплового движения ионов плазмы, практически прямолинейна. Для доказательства представим уравнение (10. 7) в виде

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = \frac{B}{v},$$

где $B = 8\pi e^2 \sum^* Ln^* e^{*2}$ — новая постоянная, равная $m_e A$ с точностью до коэффициента порядка двойки. Вводя в качестве неза-

висимой переменной скорость v и воспользовавшись уравнением (11. 1), получим

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = \frac{dp_{\perp}^2}{dv} \frac{dv}{dt} = - \frac{A}{mv^2} \frac{dp_{\perp}^2}{dt}.$$

Следовательно,

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dv} = - \frac{mB}{A} v.$$

После интегрирования

$$p_{\perp}^2 = \frac{Bm}{2A} (v_0^2 - v^2) < \frac{Bm}{2A} v_0^2.$$

Таким образом, если p_0 — значение начального импульса пробного иона, то

$$\left\langle \frac{p_{\perp}^2}{p_0^2} \right\rangle < \frac{B}{2Am} \approx \frac{m_e}{m}.$$

Для ионов $m \gg m_e$, а потому $\langle p_{\perp}^2 \rangle \ll p_0^2$. Это значит, что боковые смещения быстрых ионов пренебрежимо малы — такие ионы движутся до своего замедления практически прямолинейно. Для электронов это заключение несправедливо.

§ 12. Релаксационные времена и длины свободного пробега

1. На основе результатов § 10 введем понятия о различных временах релаксации, с помощью которых легко делать качественные высказывания относительно приближения плазмы к состоянию термодинамического равновесия. Рассмотрим по-прежнему отдельную пробную частицу в плазме, имеющую произвольную начальную скорость v . Будем предполагать, что сама плазма находится в состоянии термодинамического равновесия. При движении пробной частицы она в среднем всегда тормозится и испытывает боковые отклонения. Поэтому можно ввести два типа времен релаксации: *время продольного замедления* τ_{\parallel} и *время бокового отклонения* τ_{\perp} . Первое — τ_{\parallel} — определяет по порядку величины среднее время, в течение которого пробная частица теряет упорядоченную скорость в направлении своего первоначального движения. Второе — τ_{\perp} — по порядку величины определяет среднее время, в течение которого вектор скорости пробной частицы поворачивается на угол порядка 90° . Если p — начальный импульс частицы, то эти времена естественно определить с помощью соотношений

$$\left\langle \frac{dp_{\parallel}}{dt} \right\rangle = - \frac{p}{\tau_{\parallel}}, \quad (12. 1)$$

$$\left\langle \frac{dp_{\perp}^2}{dt} \right\rangle = - \frac{p^2}{\tau_{\perp}}. \quad (12. 2)$$

Сравнивая их с формулами (10. 6) и (10. 7), находим

$$\tau_{\parallel} = \frac{mv^3}{4\pi e^2 \sum^* \frac{Le^{*2}}{\mu} n^* \Phi_1(b^*v)}; \quad (12. 3)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{m^2v^3}{8\pi e^2 \sum^* Le^{*2} n^* \Phi(b^*v)}. \quad (12. 4)$$

2. Выделим мысленно какую-либо компоненту плазмы, например состоящую из электронов, и отвлечемся от взаимодействия пробной частицы со всеми остальными компонентами. Тогда можно ввести время релаксации τ^* для описания взаимодействия пробной частицы с выделенной компонентой плазмы. Например

$$\tau_{\parallel}^* = \frac{m\mu v^3}{4\pi (ee^*)^2 Ln^* \Phi_1(b^*v)}.$$

Полное время релаксации τ , описывающее взаимодействие пробной частицы со всей плазмой, как показывает структура формул (12. 3) и (12. 4), представится в виде

$$\frac{1}{\tau} = \sum^* \frac{1}{\tau^*}, \quad (12. 5)$$

где суммирование ведется по всем типам полевых частиц.

Допустим для простоты, что плазма двухкомпонентная и состоит из электронов и положительных однозарядных ионов. Пусть пробной частицей является электрон. Тогда можно говорить о четырех временах релаксации, которые мы обозначим через τ_{\parallel}^{ee} , τ_{\perp}^{ee} , τ_{\parallel}^{ei} , τ_{\perp}^{ei} . Первые два из них относятся к взаимодействию пробного электрона с электронной компонентой плазмы, а последние два — с ионной компонентой. Допустим далее, что скорость пробного электрона больше или порядка средней скорости теплового движения электронов плазмы. Кроме того, предположим, что тепловые скорости ионов, как это бывает почти всегда, меньше тепловых скоростей электронов. Тогда можно принять, что в формулах (12. 3) и (12. 4) функции Φ_1 и Φ равны единице, и мы получим

$$\tau_{\parallel}^{ee} = \tau_{\perp}^{ee} = \frac{1}{2} \tau_{\parallel}^{ei} = \tau_{\perp}^{ei} = \frac{m_e^2 v_e^3}{8\pi e^4 Ln}, \quad (12. 6)$$

где через n обозначена концентрация электронов или равная ей концентрация положительных ионов (квазинейтральной) плазмы. Введенные времена релаксации описывают поведение какой-либо определенной индивидуальной пробной частицы, обладающей определенной скоростью v . Теперь введем времена релаксации, характеризующие *средние свойства плазмы в целом*. Они могут быть получены из введенных уже времен релаксации для индивидуальных частиц путем усреднения по соответствующим распределениям их скоростей. Поэтому мы будем обозначать новые времена релаксации теми же буквами, но с черточками

наверху, например $\bar{\tau}_{\parallel}^{ee}$, $\bar{\tau}_{\perp}^{ee}$, $\bar{\tau}_{\parallel}^{ei}$ и т. д. Если нас интересует поведение электронной компоненты плазмы, то соответствующие времена релаксации можно получить из выражений (12. 6), подставив вместо скорости v_e какую-то среднюю тепловую скорость электрона. Последнюю можно определить, например, соотношением $m_e v_e^2 = 3T_e$. Тогда формулы (12. 6) перейдут в

$$\bar{\tau}_{\parallel}^{ee} = \bar{\tau}_{\perp}^{ee} = \frac{1}{2} \bar{\tau}_{\parallel}^{ei} = \bar{\tau}_{\perp}^{ei} = \frac{3\sqrt{3m_e} T_e^{3/2}}{8\pi n L e^4}. \quad (12. 7)$$

Эти величины отличаются от времени выравнивания $\tau_{\mathcal{E}}^{ee}$ температур электронных компонент плазмы (9. 8) численным множителем $\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \approx 0,7$. Таким образом, *все времена $\bar{\tau}_{\parallel}^{ee}$, $\bar{\tau}_{\perp}^{ee}$, $\bar{\tau}_{\parallel}^{ei}$, $\bar{\tau}_{\perp}^{ei}$, $\tau_{\mathcal{E}}^{ee}$ по порядку величины совпадают между собой*, поэтому их можно объединить в одно — *среднее электронное время релаксации*

$$\bar{\tau}_e = \frac{3\sqrt{3m_e} T_e^{3/2}}{8\pi n L e^4}, \quad (12. 8)$$

характеризующее поведение плазмы в целом.

Совершенно аналогично получаем для ионов по порядку величины

$$\bar{\tau}_{\parallel}^{ii} = \bar{\tau}_{\perp}^{ii} = \frac{3\sqrt{3m_i} T_i^{3/2}}{8\pi n L e^4}. \quad (12. 9)$$

Эти времена отличаются от выражения (9. 9) для времени $\tau_{\mathcal{E}}^{ii}$ выравнивания температур ионных компонент плазмы также численным множителем $\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$. Таким образом, *все времена $\bar{\tau}_{\parallel}^{ii}$, $\bar{\tau}_{\perp}^{ii}$ и $\tau_{\mathcal{E}}^{ii}$ по порядку величины совпадают между собой* и могут быть объединены в одно — *среднее ионное время релаксации*

$$\bar{\tau}_i = \frac{3\sqrt{3m_i} T_i^{3/2}}{8\pi n L e^4}, \quad (12. 10)$$

также характеризующее поведение плазмы в целом.

Остается рассмотреть средние релаксационные времена $\bar{\tau}_{\parallel}^{ie}$ и $\bar{\tau}_{\perp}^{ie}$, относящиеся к процессам взаимодействия ионов с электронами плазмы. В качестве пробного иона мы рассматриваем ион плазмы, движущейся со средней тепловой скоростью v . Если скорость v , как это бывает почти всегда, мала по сравнению с тепловой скоростью электронов, то аргумент $x = b^*v$ мал, и можно заменить функции $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ первыми членами их разложений в степенные ряды:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x,$$

$$\Phi_1(x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^3.$$

Тогда из формул (12. 3) и (12. 4) найдем

$$\bar{\tau}_{\parallel}^{ie} = \frac{3m_i T_e^{3/2}}{8 \sqrt{2\pi m_e n L e^4}}, \quad (12. 11)$$

$$\bar{\tau}_{\perp}^{ie} = \frac{3m_i T_i T_e^{1/2}}{8j \sqrt{2\pi m_e n L e^4}}. \quad (12. 12)$$

Время $\bar{\tau}_{\parallel}^{ie}$ совпадает с временем τ_{σ}^{ei} выравнивания температур электронной и ионной компонент плазмы, как это видно из сравнения выражений (12. 12) и (9. 7). Что касается времени $\bar{\tau}_{\perp}^{ie}$, то оно по порядку величины совпадает с $\bar{\tau}_{\parallel}^{ie}$, если только температуры T_i и T_e не слишком сильно отличаются друг от друга. Впрочем, время $\bar{\tau}_{\perp}^{ie}$ не играет сколько-нибудь существенной роли, так как в большинстве случаев не оно, а $\bar{\tau}_{\perp}^{ii}$ является определяющим при рассмотрении процесса бокового отклонения иона. Действительно, из формул (12. 9) и (12. 12) получаем

$$\frac{\bar{\tau}_{\perp}^{ii}}{\bar{\tau}_{\perp}^{ie}} \approx \sqrt{\frac{m_e T_i}{m_i T_e}}. \quad (12. 13)$$

Если $T_i < \frac{m_i}{m_e} T_e$, то $\bar{\tau}_{\perp}^{ii} < \bar{\tau}_{\perp}^{ie}$. Боковое отклонение, вызываемое столкновениями с ионами, — более быстрый процесс, чем отклонение, обусловленное столкновениями с электронами. Это и доказывает наше утверждение. Поэтому достаточно пользоваться одним временем $\bar{\tau}_{ie}$, которое можно назвать *средним ионно-электронным временем релаксации* и определить выражением

$$\bar{\tau}_{ie} = \frac{3m_i T_e^{3/2}}{8 \sqrt{2\pi m_e n L e^4}}. \quad (12. 14)$$

Сопоставляя выражения (12. 8), (12. 10) и (12. 14), получим

$$\bar{\tau}_e : \bar{\tau}_i : \bar{\tau}_{ie} \approx 1 : \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} : \frac{m_i}{m_e}; \quad (12. 15)$$

что совпадает с соотношениями (9. 10).

3. Все выражения для времен релаксации, полученные в настоящем параграфе, относятся к максвелловским распределениям скоростей электронов и ионов. Однако нет оснований сомневаться в том, что они пригодны для качественных оценок и при немаксвелловских распределениях.

Эти выражения позволяют уточнить соображения, относящиеся к приближению плазмы к состоянию термодинамического равновесия, о которых говорилось в § 9. Если имеется плазма с произвольным начальным распределением скоростей электронов и ионов, то в результате столкновений электронов друг с другом и с ионами начнутся прежде всего два процесса, идущие практически с одинаковыми скоростями — процесс установления изотропного распределения скоростей электронов и процесс обмена

энергией между ними. Оба эти процесса очень быстро приведут к практически максвелловскому распределению скоростей электронов с температурой T_e , медленно меняющейся во времени.

Если средние энергии электронов и ионов таковы, что соблюдается условие

$$T_i \ll \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3} T_e, \quad (12.16)$$

то $\bar{\tau}_i \ll \bar{\tau}_{ie}$. При выполнении этого условия после установления максвелловского распределения скоростей электронов начнутся два более медленных процесса, идущих практически также с одинаковыми скоростями, — процессы установления изотропного и максвелловского распределения скоростей для ионов. В результате возникнет квазиравновесное состояние плазмы с максвелловскими распределениями скоростей электронов и ионов, но с различными электронной T_e и ионной T_i температурами. Затем начнется еще более медленный процесс выравнивания электронной и ионной температур, приводящий в конце концов к равновесному максвелловскому распределению для всей плазмы. Этот процесс был подробно рассмотрен в § 9.

4. Наряду с временами релаксации, полезным понятием при рассмотрении многих процессов в плазме является понятие *средней длины свободного пробега*. Применительно к плазме это понятие не отличается той четкостью, какая свойственна ему в классической *кинетической теории газов*. Сравнительная четкость понятия длины свободного пробега молекул в газах обусловлена тем, что траектория молекулы газа имеет вид ломаной линии с резкими изломами, возникающими в моменты столкновений рассматриваемой молекулы с другими молекулами газа. В плазме из-за медленности убывания кулоновских сил с расстоянием, подобные изломы, обусловленные близкими взаимодействиями, встречаются относительно редко. Основную роль при изменении направления движения частицы в плазме играют не близкие, а далекие взаимодействия. Благодаря этому траектория частицы в плазме имеет вид не ломаной, а скорее извилистой линии с непрерывно меняющейся кривизной. Поэтому о средней длине свободного пробега в плазме можно говорить лишь условно. Этому понятию можно придавать различный смысл в зависимости от того, на какую сторону движения частицы мы обращаем внимание. Одним из возможных определений является следующее: *средняя длина свободного пробега λ в плазме есть среднее расстояние, при прохождении которого направление движения рассматриваемой частицы меняется на угол порядка 90°* . В соответствии с этим величину λ количественно можно определить с помощью соотношения

$$\left\langle \frac{d\rho_{\perp}^2}{dx} \right\rangle = \frac{\rho^2}{\lambda}, \quad (12.17)$$

где dx — элемент длины пути, проходимого пробной частицей. Поскольку $dx = v dt$, это уравнение можно переписать в виде

$$\left\langle \frac{dp_{\perp}^2}{dt} \right\rangle = v \frac{p^2}{\lambda}.$$

Сопоставляя это соотношение с формулой (12. 2), получим

$$\lambda = v \tau_{\perp}. \quad (12. 18)$$

Поэтому в силу формулы (12. 4)

$$\lambda = \frac{m^2 v^4}{8\pi e^2 \sum^* L e^{*2} n^* \Phi(b^* v)}. \quad (12. 19)$$

Можно было бы определить среднюю длину свободного пробега также соотношением $\lambda' = v \tau_{\parallel}$. Во всех случаях средняя длина свободного пробега относится к поведению какой-то *индивидуальной* пробной частицы, имеющей определенную скорость v . Для характеристики плазмы в целом можно ввести длины свободного пробега $\bar{\lambda}$ или $\bar{\lambda}'$, характеризующие поведение частиц *плазмы в целом*. Эти величины получаются из выражений для λ и λ' путем замены индивидуальной скорости v соответствующей средней скоростью теплового движения.

§ 13. Явление убегаия электронов

1. При выводе формулы (10. 6) предполагалось, что в плазме имеется максвелловское распределение скоростей и что на нее не действуют внешние силовые поля. Допустим теперь, что в некоторый момент времени, когда распределение скоростей максвелловское, включено однородное электрическое поле E . Тогда, по крайней мере в первое время, когда распределение скоростей не успело существенно измениться, приращение импульса пробной частицы во времени, обусловленное ее столкновениями с частицами плазмы, по-прежнему будет определяться правой частью уравнения (10. 6). Однако теперь к этой части надо добавить силу eE , с которой на пробную частицу действует электрическое поле E . В результате получим

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = -\frac{4\pi e^2}{v^3} \mathbf{v} \sum^* \frac{L e^{*2}}{\mu} n^* \Phi_1(b^* v) + e \mathbf{E}. \quad (13. 1)$$

Если скорость v пробной частицы не слишком мала, то первое слагаемое в правой части по абсолютной величине убывает с возрастанием скорости v . (Функция $\frac{\Phi_1(x)}{x^2}$ при $x=0$ обращается в нуль. С возрастанием x она растет, обращается в максимум при $x=0,968$, затем начинает убывать и асимптотически стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.) Поэтому при достаточно больших v частица в среднем будет не тормозиться, а ускоряться. Ускорение тяжелых ионов незначительно, но ускорение легких электронов может

проявиться в явлении *убегания электронов*, впервые предсказанном Джованелли [13].

При максвелловском распределении скоростей в плазме всегда найдутся электроны с достаточно большими скоростями, которые в электрическом поле будут в среднем ускоряться. Такие электроны называются *убегающими*. Соответствующую им область пространства скоростей можно назвать *областью убегания*, а остальную область — *основной областью*. Положение *границы области убегания*, конечно, зависит от напряженности электрического поля E . Вследствие кулоновских столкновений электроны из основной области могут попасть в область убегания. Часть из этих электронов, претерпев дальнейшие столкновения, может вернуться в основную область. Другая часть ускорится электрическим полем и вступит в режим непрерывного ускорения. Этот процесс идет непрерывно. В результате максвелловское распределение скоростей, существовавшее в начальный момент, все более и более меняется. Все большая и большая часть электронов оказывается перешедшей из основной области в область убегания, т. е. вовлеченной в режим непрерывного ускорения. В этом и состоит явление убегания электронов.

2. Положение границы области убегания можно просто найти с помощью уравнения (13. 1). В качестве пробной частицы возьмем быстрый электрон плазмы. В отличие от уравнения (13. 1), будем понимать под e абсолютное значение заряда электрона. Направленные действующей на него силы ($-eE$) примем за положительное направление оси x и спроектируем уравнение (13. 1) на эту ось. В результате получим

$$\left\langle \frac{dp_x}{dt} \right\rangle = - \frac{4\pi e^2}{v^3} v_x \sum^* \frac{Le^{*2}}{\mu} n^* \Phi_1(b^*v) + eE. \quad (13. 2)$$

При выводе этого уравнения предполагалось, что все электроны, с которыми сталкивается пробный электрон, имеют максвелловское распределение скоростей. В интересующей нас задаче распределение скоростей электронов — немаквелловское. Однако это не имеет существенного значения, пока рассматриваются такие стадии процесса, когда число электронов в области убегания мало по сравнению с их числом в основной области. Действительно, в этом случае столкновениями пробного электрона с убегающими можно пренебречь; электроны же основной области, за исключением малой доли их вблизи границы убегания, имеют практически максвелловское распределение скоростей.

Усреднение в уравнении (13. 2) производится по ансамблю пробных электронов, характеризующемуся одинаковыми значениями вектора v . Между тем в разбираемой нами задаче речь должна идти об ансамбле, который характеризуется *одними и теми же значениями компоненты v_x* . Поэтому мы подвергнем выражение (13. 2) вторичному усреднению, а именно усреднению по максвелловскому распределению поперечных скоростей при

фиксированном значении v_x . Для среднего в этом смысле получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Phi_1(b^*v)}{v^3} \right\rangle &= \frac{\int_0^\infty \frac{\Phi_1(b^*v)}{v^3} e^{-b^{*2}v_\perp^2} v_\perp dv_\perp}{\int_0^\infty e^{-b^{*2}v_\perp^2} v_\perp dv_\perp} = \\ &= 2b^{*2} \int_0^\infty \frac{\Phi_1(b^*v)}{v^3} e^{-b^{*2}v_\perp^2} v_\perp dv_\perp, \end{aligned}$$

где через v_\perp обозначена поперечная слагающая скорости электрона $v_\perp^2 = v^2 - v_x^2$. При фиксированном v_x имеем $v_\perp dv_\perp = v dv$, поэтому, вводя новую переменную интегрирования $\xi = b^*v$, получим

$$\left\langle \frac{\Phi_1(b^*v)}{v^3} \right\rangle = 2b^{*3} e^{b^{*2}v_x^2} J(b^*v_x). \quad (13.3)$$

Здесь через $J(x)$ обозначен интеграл

$$J(x) = \int_x^\infty \frac{\Phi_1(\xi)}{\xi^2} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (13.4)$$

В результате после вторичного усреднения уравнение (13.2) переходит в

$$\left\langle \frac{dp_x}{dt} \right\rangle = -8\pi e^2 v_x \sum^* \frac{Le^{*2}b^{*2}}{\mu} n^* J(b^*v_x) e^{b^{*2}v_x^2} + eE. \quad (13.5)$$

Если правая часть в этом уравнении отрицательна, то электрон с фиксированным значением v_x в среднем будет замедляться в направлении оси x , в противном случае он будет ускоряться. Положение границы области убегания определится, если приравнять к нулю правую часть уравнения (13.5).

3. Представляет интерес случай, когда аргумент b^*v_x велик. Тогда в интеграле (13.4) можно положить $\Phi_1(\xi) = 1$. (При $\xi = 2$ вносимая этим ошибка не превосходит 5%, при $\xi = 3$ она составляет около 0,03%.) Тогда

$$J(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} d\xi = \frac{e^{-x^2}}{x} - \sqrt{\pi} [1 - \Phi(x)]. \quad (13.6)$$

Если воспользоваться асимптотическим рядом (6.10), то можно написать

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} d\xi \rightarrow e^{-x^2} \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k \cdot x^{2k+1}}. \quad (13.7)$$

Ограничиваясь первым членом этого ряда, получим

$$J(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x^3}. \quad (13.8)$$

Эта формула дает несколько завышенные значения для $J(x)$. Ошибка не превосходит $\frac{3}{4x^5} e^{-x^2}$; при $x = 2$ она составляет около 30%, при $x = 3$ — около 16%, при $x = 4$ — около 10% и т. д. Такие ошибки не существенны в приближенных расчетах оценочного характера.

После подстановки выражения (13.8) в формулу (13.5) последняя переходит в

$$\left\langle \left\langle \frac{dp_x}{dt} \right\rangle \right\rangle = -\frac{4\pi e^2}{v_x^2} \sum^* \frac{Le^{*2}n^*}{\mu} + eE. \quad (13.9)$$

Предполагая, что ионы однозарядные и подставляя сюда значения приведенных масс для электрон-электронных ($\mu = \frac{m}{2}$) и электрон-ионных ($\mu = m$) столкновений, получим

$$\left\langle \left\langle \frac{dp_x}{dt} \right\rangle \right\rangle = -\frac{12\pi e^4 Ln}{mv_x^2} + eE \quad (13.10)$$

(n — концентрация электронов; m — масса электрона). Столкновения с электронами в два раза эффективнее, чем столкновения с ионами.

Введем так называемое *критическое поле*

$$E_{кр} = \frac{4\pi e^4 Ln}{T} = \frac{1}{2} \frac{eL}{D^2}, \quad (13.11)$$

где D — дебаевский радиус. Тогда уравнение (13.10) можно переписать в виде

$$\left\langle \left\langle \frac{dp_x}{dt} \right\rangle \right\rangle = e \left(E - \frac{3T}{mv_x^2} E_{кр} \right). \quad (13.12)$$

Это уравнение, как ясно из его вывода, применимо, когда аргумент $b^*v_x = \sqrt{\frac{m}{2T}} v_x$ для электронов велик (практически достаточно, чтобы он был не меньше 2—3). Приравнявая к нулю его правую часть, найдем положение границы убежания. Если

$$E > \frac{3T}{mv_x^2} E_{кр}, \quad (13.13)$$

то электроны в среднем будут непрерывно ускоряться в направлении оси x .

4. Чтобы составить представление о величине критического поля, приведем численный пример. Пусть $T_e = T_i = 1 \text{ кэВ} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ эрг}$, $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и, следовательно, $L = 14,1$. Тогда из (13.11) получаем

$$E_{кр} = 0,012 \text{ ГГСе} = 3,6 \text{ в/см.}$$

Хотя это поле и невелико, но создать его в полностью ионизованной плазме трудно из-за ее высокой электропроводности. Поэтому основной интерес представляет изучение явления убегания электронов в *слабых полях*, т. е. полях, напряженность которых много меньше напряженности критического поля. Рассмотрим этого случая мы и ограничимся.

Качественно картина убегания электронов в слабых электрических полях может быть представлена следующим образом. В момент включения электрического поля распределение скоростей электронов строго максвелловское. После включения электрического поля распределение скоростей электронов в основной области продолжает оставаться практически максвелловским. Однако на это распределение накладывается слабый поток электронов в пространстве скоростей, уносящий электроны из основной области в область убегания. Вначале он носит нестационарный характер. Затем, спустя короткое время $\tau_{уст}$, которое может быть названо *временем установления потока*, устанавливается *квазистационарный поток*, пропорциональный концентрации электронов в основной области. Количественно этот поток определяется как число электронов в единице объема плазмы, ежесекундно уходящих из основной области в область убегания. Обозначив его через S , можно написать

$$\frac{dn}{dt} = -S, \quad (13. 14)$$

где n — концентрация электронов в основной области. Пока последняя велика по сравнению с концентрацией электронов в области убегания, поток S практически постоянен. Распределение скоростей электронов в основной области слабо искажается наличием этого потока — это распределение остается почти максвелловским. Иначе обстоит дело в области убегания. Число электронов, перешедших из основной области в область убегания, может оказаться сравнимым и даже превзойти число электронов, находившихся в этой последней области в начальный момент времени. Поэтому первоначальное максвелловское распределение скоростей в области убегания и вблизи ее границы искажается настолько сильно, что приобретает совершенно иной характер.

5. Время установления $\tau_{уст}$ квазистационарного потока по порядку величины совпадает с временем релаксации для индивидуального электрона плазмы, имеющего скорость v , т. е. согласно уравнению (12. 6) определяется выражением

$$\tau_{уст} \approx \frac{m^2 v^3}{8\pi e^4 L n}. \quad (13. 15)$$

Если ввести среднюю тепловую скорость $v_{тепл}$ электрона и соответствующее ей среднее электронное время релаксации для плазмы в целом

$$\bar{\tau}_e = \frac{m^2 v_{тепл}^3}{8\pi e^4 L n}, \quad (13. 16)$$

то эту формулу можно представить в виде

$$\tau_{уст} \approx \left(\frac{v}{v_{тепл}} \right)^3 \bar{\tau}_e. \quad (13. 17)$$

В качестве v следует взять скорость электрона на границе убегания. На этой границе $\left(\frac{v}{v_{тепл}} \right) \approx \frac{E_{кр}}{E}$, и мы получим

$$\tau_{уст} \approx \left(\frac{E_{кр}}{E} \right)^{3/2} \bar{\tau}_e. \quad (13. 18)$$

6. Что касается потока S , то качественная оценка его величины содержит слишком большой элемент неопределенности¹, поэтому нецелесообразно приводить здесь эту оценку. Вычисление величины S должно основываться на кинетическом уравнении для плазмы. С этой точки зрения теория эффекта убегающих электронов рассматривалась в работах Дрейсера [14, 15] и А. В. Гуревича [16, 17]. Между результатами этих работ имеются значительные расхождения, которые мы здесь обсуждать не будем. Приведем лишь для общей ориентировки результат, полученный А. В. Гуревичем [16]. В наших обозначениях

$$S = \frac{3}{\bar{\tau}_e} \sqrt{\frac{3}{\pi}} n \left(\frac{E}{E_{кр}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{E_{кр}}{4E} + \sqrt{\frac{2E_{кр}}{E}} \right), \quad (13. 19)$$

где время $\bar{\tau}_e$ определяется выражением (12. 8). У Дрейсера основной (экспоненциальный) множитель имеет вид $e^{-\frac{E_{кр}}{2E}}$.

7. В безэлектродных системах с вихревым электрическим полем благодаря наличию потока S в процесс ускорения должны перейти все электроны плазмы, если только обеспечить отсутствие ухода частиц на стенки. На этом основана идея создания *сильноточного ускорителя электронов*, впервые высказанная Штеенбеком. Время t_a , необходимое для того, чтобы при заданном значении напряженности электрического поля E основная масса электронов плазмы вступила в режим непрерывного ускорения, по порядку величины определяется выражением

$$t_a = \frac{n}{S}. \quad (13. 20)$$

Не исключена, однако, возможность существования механизма, препятствующего возрастанию интенсивности электронных пото-

¹ С помощью различных качественных соображений легко установить, что S должно содержать множитель вида $e^{-\alpha \frac{E}{E_{кр}}}$, где α — численный коэффициент порядка единицы, более точное значение которого из качественных соображений установить нельзя. Это обстоятельство и делает качественные оценки весьма неопределенными.

ков. Этот механизм может состоять в появлении *продольных плазменных колебаний*, возбуждаемых пучком быстрых электронов [16]. Такие колебания в свою очередь воздействуют на возбудивший их пучок и могут привести к *аномальному торможению его* [18].

§ 14. Уравнение Фоккера — Планка

1. Когда плазма не находится в состоянии термодинамического равновесия, строгое рассмотрение различного рода происходящих в ней процессов возможно, вообще говоря, лишь на основе *кинетического уравнения*. При выводе такого уравнения мы ограничимся рассмотрением только *полностью ионизованной или горячей плазмы*, в которой процессы *ионизации, рекомбинации и возбуждения* частиц практически не играют роли. Это значит, что наши результаты относятся только к полностью ионизованной плазме, состоящей из электронов и *голых* атомных ядер. Внутреннее состояние каждой частицы плазмы остается неизменным. С классической точки зрения частица может рассматриваться как *материальная точка классической механики*. Фазовым пространством такой частицы является *шестимерное* пространство, каждая точка которого характеризуется тремя прямоугольными координатами x_1, x_2, x_3 , определяющими положение частицы в обычном трехмерном пространстве, и соответствующими им импульсами p_1, p_2, p_3 . Можно также сказать, что положение точки в фазовом пространстве определяется *шестимерным вектором* $\vec{\xi}$ с координатами

$$\begin{aligned} \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3, \\ \xi_4 = p_1, \quad \xi_5 = p_2, \quad \xi_6 = p_3. \end{aligned} \quad (14. 1)$$

Условимся говорить, что в рассматриваемый момент времени частица находится в точке $\vec{\xi}$ фазового пространства, если в этот момент времени она имеет координаты (14. 1).

Концентрация $F(t, \vec{\xi})$ *частиц в фазовом пространстве называется их функцией распределения*. По этому определению число dN частиц, находящихся в момент времени t в элементе объема $d\vec{\xi} \equiv d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_6$ фазового пространства с центром в точке $\vec{\xi}$ связано с функцией распределения соотношением

$$dN = F(t, \vec{\xi}) d\vec{\xi}. \quad (14. 2)$$

Разумеется, здесь, как и во всех статистических исследованиях, речь идет не об истинном числе частиц dN в элементе фазового объема $d\vec{\xi}$, а о *сглаженном* его значении по *физически бесконечно малым* объемам фазового пространства.

Для полного статистического описания плазмы необходимо ввести столько функций распределения, сколько имеется типов частиц. Частице каждого типа будет соответствовать свое фазовое

пространство. В дальнейшем под $F(t, \vec{\xi})$ понимается функция распределения частиц какого-либо определенного (но произвольного) типа.

Вместо фазового пространства (т. е. пространства координат — импульсов) иногда бывает удобнее пользоваться *пространством координат — скоростей* с элементом объема в нем $dx dv \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3$. Функцию распределения в таком пространстве будем обозначать малой буквой $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. Тогда вместо соотношения (14. 2) следует написать

$$dN = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dx dv. \quad (14. 3)$$

Уравнение или система уравнений, описывающих изменение функций распределения во времени и в фазовом пространстве (или пространстве координат — скоростей), называется кинетическим уравнением. В случае, когда нет процессов ионизации и рекомбинации (в более общем смысле — процессов превращения частиц друг в друга), кинетическое уравнение выражает *сохранение числа частиц* каждого типа.

2. Мы получим кинетическое уравнение тем же методом, который применяется в гидродинамике при выводе *уравнения непрерывности* в эйлеровом представлении. Рассмотрим неподвижный фазовый объем Ω , ограниченный замкнутой пятимерной поверхностью Σ . Частицы движутся в фазовом пространстве, и это движение можно описать вектором $\vec{\xi}$ *шестимерной скорости*. Часть частиц уходит из объема Ω через поверхность Σ ; другая часть вступает в него из окружающих частей фазового пространства. По этой и только по этой причине число частиц внутри объема Ω изменяется. Вообще говоря, вектор $\vec{\xi}$ каждой частицы меняется во времени непрерывно. Однако когда две или несколько частиц сближаются друг с другом, между ними развиваются очень большие силы и скорость \mathbf{v} каждой частицы резко меняется в течение очень коротких промежутков времени. В идеализированной картине этими временами пренебрегают и рассматривают изменение скорости как мгновенный процесс — столкновение. При такой идеализации вектор \mathbf{v} , а с ним и вектор $\vec{\xi}$ в момент столкновения испытывают разрыв непрерывности. Это значит, что в результате столкновения частица мгновенно перескакивает из одной точки фазового пространства в другую. Столкновения разделяются на *близкие* и *далекие*. При близких столкновениях вектор \mathbf{v} (а следовательно, и вектор $\vec{\xi}$) испытывает большие изменения, а при далеких — малые. Далекие столкновения, как правило, играют большую роль, чем близкие, так как последние относительно редки. Доказательством этого служат большие значения кулоновских логарифмов, посредством которых как раз и учитываются далекие столкновения. Если полностью пренебречь близкими столкнове-

ниями, учитывая лишь далекие, то останутся только малые скачки частиц в фазовом пространстве. Такое скачкообразное движение можно с достаточной точностью аппроксимировать сглаженным плавным движением. Поэтому движение совокупности частиц в фазовом пространстве может быть описано *шестимерным вектором $\vec{J}^{(6)}$ плотности потока частиц*, подобно тому как описывается движение жидкости в гидродинамике. По определению вектора $\vec{J}^{(6)}$ число частиц, ежесекундно проходящих через элементарную пятимерную площадку $d\Sigma$, представляется в виде $J_v^{(6)} d\Sigma$, где $J_v^{(6)}$ — проекция вектора $\vec{J}^{(6)}$ на направление нормали \vec{v} к площадке $d\Sigma$. Тем самым определена проекция вектора $\vec{J}^{(6)}$ на любое направление в фазовом пространстве, а следовательно, и самый вектор $\vec{J}^{(6)}$. С помощью вектора $\vec{J}^{(6)}$ условие сохранения числа частиц может быть записано в форме *шестимерного уравнения непрерывности*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial J_\alpha^{(6)}}{\partial \xi_\alpha} = 0, \quad (14.4)$$

где в соответствии с тензорной символикой подразумевается, что по дважды встречающемуся координатному индексу α производится суммирование ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$). Задача свелась к нахождению шестимерного вектора $\vec{J}^{(6)}$.

3. С целью решения этой задачи возьмем в шестимерном фазовом пространстве $\vec{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ малую пятимерную площадку $d\Sigma$, перпендикулярную к какой-либо координатной оси ξ_α этого пространства ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$). Положительным направлением нормали к площадке $d\Sigma$ будем считать положительное направление оси ξ_α . Найдем избыток dN числа частиц рассматриваемого типа, проходящих в положительном направлении через площадку $d\Sigma$ в течение малого промежутка времени τ , над числом частиц, проходящих в противоположном направлении.

Возьмем среди частиц рассматриваемого типа достаточно многочисленную группу частиц, которые за время τ смещаются в фазовом пространстве на один и тот же шестимерный вектор $\Delta \vec{\xi}^i$. Концентрацию частиц этой группы в фазовом пространстве обозначим через $F^i(t, \vec{\xi})$.

Число dN^i частиц рассматриваемой группы, проходящих за время τ через площадку $d\Sigma$, очевидно, равно числу их внутри косоугольного шестимерного цилиндра с основанием $d\Sigma$ и образующими $\Delta \vec{\xi}^i$ (рис. 8), т. е. это число равно интегралу $\int F^i(t, \vec{\xi}) d\vec{\xi}$, взятому по всему объему такого цилиндра. Так как площадка $d\Sigma$ предполагается бесконечно малой, то элемент *фазового объема* можно

представить в виде $d\vec{\xi} = |d\Sigma \cdot d\vec{\xi}_\alpha|$. Обозначим далее через $\vec{\xi}_0$ радиус-вектор центра площадки $d\Sigma$. Тогда, полагая $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 + \vec{\varepsilon}$ и опуская ради краткости аргумент t в функции $F^i(t, \vec{\xi})$, можем написать

$$dN^i = \int_{-\Delta \xi_\alpha^i}^0 F^i(\vec{\xi}_0 + \vec{\varepsilon}) d\Sigma \cdot d\varepsilon_\alpha.$$

Допустим, что время τ выбрано настолько малым, что смещения $\Delta \xi_\alpha^i$ малы. Разлагая тогда $F^i(\vec{\xi}_0 + \vec{\varepsilon})$ по степеням $\vec{\varepsilon}$ и обрывая разложение на линейных членах, получим

$$dN^i = d\Sigma \cdot F^i(\vec{\xi}_0) \int_{-\Delta \xi_\alpha^i}^0 d\varepsilon_\alpha + d\Sigma \cdot \frac{\partial F^i}{\partial \xi_\beta} \int_{-\Delta \xi_\alpha^i}^0 \varepsilon_\beta d\varepsilon_\alpha.$$

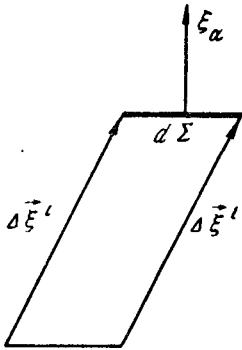


Рис. 8.

Интегрирование легко выполнить, если принять во внимание, что все ε_β пропорциональны ε_α ввиду предположения о бесконечной малости площадки $d\Sigma$.

На этом основании

$$dN^i = d\Sigma \cdot \left\{ \Delta \xi_\alpha^i \cdot F^i - \frac{1}{2} \Delta \xi_\alpha^i \Delta \xi_\beta^i \frac{\partial F^i}{\partial \xi_\beta} \right\}.$$

Здесь опущен аргумент $\vec{\xi}_0$ функции F^i , так как в дальнейшем предполагается, что значения функции F^i и всех ее производных относятся к центру площадки $d\Sigma$.

Избыток dN числа частиц рассматриваемого типа, проходящих в положительном направлении через площадку $d\Sigma$ над числом частиц, проходящих в противоположном направлении, можно найти суммированием предыдущего выражения по всем i , т. е. по всем группам частиц. По определению среднего

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \Delta \xi_\alpha^i \cdot F^i(t, \vec{\xi}) &= \langle \Delta \xi_\alpha \rangle \cdot F(t, \vec{\xi}), \\ \sum_i \Delta \xi_\alpha^i \Delta \xi_\beta^i \cdot F^i(t, \vec{\xi}) &= \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle \cdot F(t, \vec{\xi}). \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

Величины $\Delta \xi_\alpha^i$, как независимые переменные, разумеется, не зависят от $\vec{\xi}$. Однако их средние, а также средние от $\Delta \xi_\alpha^i \Delta \xi_\beta^i$, вообще говоря, зависят от $\vec{\xi}$, поскольку F^i и F являются функциями $\vec{\xi}$. Поэтому, дифференцируя второе равенство по ξ_β и суммируя

по β , найдем

$$\sum_i \Delta \xi_\alpha^i \Delta \xi_\beta^i \frac{\partial F^i(t, \vec{\xi})}{\partial \xi_\beta} = F(t, \vec{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle + \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle \frac{\partial F(t, \vec{\xi})}{\partial \xi_\beta}.$$

Используя это выражение и вводя обозначение

$$J_\alpha^{(6)} = \frac{dN}{d\Sigma}, \quad (14. 6)$$

получим

$$J_\alpha^{(6)} = \frac{1}{\tau} \left\{ \langle \Delta \xi_\alpha \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle \right\} F - \frac{1}{2\tau} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle \frac{\partial F}{\partial \xi_\beta}. \quad (14. 7)$$

Если бы при разложении функции $F^i(\vec{\xi}_0 + \vec{\epsilon})$ учесть следующие члены разложения, то вместо выражения (14. 7) мы получили бы выражение

$$\begin{aligned} J_\alpha^{(6)} = & \frac{1}{\tau} \left\{ \langle \Delta \xi_\alpha \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \Delta \xi_\gamma \rangle \right\} F - \\ & - \frac{1}{2\tau} \left\{ \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \Delta \xi_\gamma \rangle \right\} \frac{\partial F}{\partial \xi_\beta} + \\ & + \frac{1}{6\tau} \langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \Delta \xi_\gamma \rangle \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma}. \end{aligned} \quad (14. 8)$$

Однако мы ограничимся более простым выражением (14. 7). Формула (14. 8) может быть использована для оценки ошибок принятого приближения.

Усреднение в тензорах $\langle \Delta \xi_\alpha \rangle$, $\langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle$, ... производится по группам частиц, определенных таким образом, что за время τ частицы каждой группы претерпевают в фазовом пространстве одно и то же смещение $\Delta \vec{\xi}^i$. Эти группы можно выбрать так, чтобы концентрация частиц каждой группы в обычном пространстве была мала — тогда можно пренебречь взаимодействием между частицами одной и той же группы. В этом приближении частицы одной и той же группы ведут себя как *независимые*. Поэтому при вычислении средних $\langle \Delta \xi_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle$ можно принять, что каждая группа состоит только из одной частицы. Тем самым операция усреднения свелась к усреднению по всем частицам рассматриваемого типа в окрестности фазовой точки $\vec{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

4. Если время τ достаточно мало, то с точностью до членов порядка τ^2 приращения координат Δx_α за время τ могут быть представлены в виде $\Delta x_\alpha = v_\alpha \tau$, где \mathbf{v} — вектор скорости частицы в обычном трехмерном пространстве. Что касается приращений импульсов, то они могут быть разбиты на две части: $\Delta \mathbf{p} = \Delta' \mathbf{p} + \Delta'' \mathbf{p}$. Здесь $\Delta' \mathbf{p}$ — приращение, вызванное действием регулярной силы поля (например, электрического или магнитного), — такое поле называется самосогласованным; $\Delta'' \mathbf{p}$ — приращение, вызванное столкновениями рассматриваемой частицы с другими

частицами. Для $\Delta' \mathbf{p}$ с точностью до членов квадратичных по τ можно написать $\Delta' p_\alpha = X_\alpha \tau$, где \mathbf{X} — сила, действующая на частицу со стороны самосогласованного поля. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \xi_\alpha \rangle &= v_\alpha \tau & (\alpha = 1, 2, 3), \\ \langle \Delta \xi_\alpha \rangle &= X_\alpha \tau + \langle \Delta'' \xi_\alpha \rangle & (\alpha = 4, 5, 6). \end{aligned}$$

Мы учитываем только далекие столкновения, т. е. такие, для которых приращения $\Delta'' \mathbf{p}$ малы по сравнению с \mathbf{p} . Тем не менее при достаточно малых τ эти приращения велики по сравнению с приращениями $\Delta' \mathbf{p}$, вызванными действием регулярной силы \mathbf{X} , так как во время столкновения развиваются очень большие (при математической идеализации — бесконечно большие) силы взаимодействия. Направления векторов $\Delta'' \mathbf{p}$ у разных частиц в окрестности фазовой точки $\vec{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ могут быть какими угодно. Однако эти направления не равновероятны благодаря наличию у этих частиц упорядоченной скорости \mathbf{v} . Поэтому можно предположить (для плазмы в приближении парных столкновений это будет обосновано в следующем параграфе), что при усреднении величин $\Delta'' p_\alpha$ пропадут лишь большие слагаемые, но останутся малые, которые с точностью до членов порядка τ^2 пропорциональны τ . Таким образом,

$$\langle \Delta'' p_\alpha \rangle = A''_\alpha \tau \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

или

$$\langle \Delta'' \xi_\alpha \rangle = A''_\alpha \tau \quad (\alpha = 4, 5, 6),$$

где вектор \mathbf{A}'' не зависит от τ .

Перейдем теперь к рассмотрению тензора $\langle \Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta \rangle$. В нем можно не учитывать приращения координат и регулярные приращения импульсов, так как эти приращения пропорциональны τ , а соответствующие им члены тензора $\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta$ будут пропорциональны τ^2 (такими членами в принятом нами приближении следует пренебречь). Следует оставить лишь члены вида $\Delta'' p_\alpha \Delta'' p_\beta$, т. е. члены, обусловленные столкновениями. При определенных условиях эти члены пропорциональны времени τ . В самом деле, можно написать

$$\Delta'' \mathbf{p} = \sum_i \delta^i \mathbf{p},$$

где $\delta^i \mathbf{p}$ — приращение импульса рассматриваемой частицы в результате единичного (i -го) акта столкновения ее с другой частицей. Поэтому

$$\langle \Delta'' p_\alpha \cdot \Delta'' p_\beta \rangle = \sum_i \sum_j \langle \delta p_\alpha^i \delta p_\beta^j \rangle.$$

Если последовательные соударения частицы с другими частицами статистически независимы, т. е.

$$\langle \delta p_\alpha^i \delta p_\beta^j \rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

то

$$\langle \Delta'' p_\alpha \cdot \Delta'' p_\beta \rangle = \sum_i \langle \delta p_\alpha^i \delta p_\beta^i \rangle = z \langle \delta p_\alpha \delta p_\beta \rangle,$$

где z — число столкновений рассматриваемой частицы за время τ ; оно пропорционально τ , и наше утверждение обосновано.

Таким образом, мы приходим к заключению, что шестимерный вектор (14. 7) с точностью до членов порядка τ не зависит от τ и может рассматриваться как вектор плотности потока частиц в шестимерном фазовом пространстве. С помощью этого вектора кинетическое уравнение может быть записано в форме шестимерного уравнения непрерывности (14. 4). Его можно представить также в трехмерной форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial p_\alpha} (X_\alpha F) + \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0, \quad (14. 9)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$, \mathbf{I} — трехмерный вектор, являющийся проекцией на пространство импульсов той части шестимерного вектора $\vec{J}^{(6)}$, которая обусловлена столкновениями частиц. Вектор \mathbf{I} дает *плотность потока частиц в импульсном пространстве*, возникающего из-за столкновений между частицами. Он определяется выражением

$$I_\alpha = A_\alpha F - D_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial p_\beta}, \quad (14. 10)$$

где

$$A_\alpha = \frac{1}{\tau} \left\{ \langle \Delta p_\alpha \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\beta} \langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle \right\}, \quad (14. 11)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\tau} \langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle. \quad (14. 12)$$

Здесь и в дальнейшем под Δp понимается не полное приращение импульса частицы, а только та его часть, которая обусловлена столкновениями (в выводе она временно обозначалась через $\Delta'' p$).

Кинетическое уравнение в форме (14. 9) называется *уравнением Фоккера—Планка*. Член $-D_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial p_\beta}$ называется *диффузионным потоком частиц в импульсном пространстве*, поскольку он связан с градиентом концентрации частиц в этом пространстве. По аналогии с обычной диффузией тензор $D_{\alpha\beta}$ можно назвать *тензором диффузии в импульсном пространстве*. Наличие члена $A_\alpha F$ объясняется тем, что равномерное распределение частиц по импульсному пространству не является равновесным. Если искусственно создать такое распределение, то по истечении некоторого времени оно само собой перейдет в равновесное распределение Максвелла—Больцмана. Вектор \mathbf{A} называется *коэффициентом динамического трения в импульсном пространстве*.

5. Уравнение Фоккера—Планка можно записать также для функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ в скоростном пространстве.

Оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} (X_\alpha f) + \frac{\partial j_\alpha}{\partial v_\alpha}. \quad (14.13)$$

Здесь j — трехмерный вектор плотности потока частиц в пространстве скоростей, обусловленный столкновениями между частицами. Он определяется выражением

$$j_\alpha = a_\alpha f - d_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial v_\beta}, \quad (14.14)$$

где

$$a_\alpha = \frac{1}{\tau} \left\{ \langle \Delta v_\alpha \rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \langle \Delta v_\alpha \Delta v_\beta \rangle \right\}, \quad (14.15)$$

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\tau} \langle \Delta v_\alpha \Delta v_\beta \rangle. \quad (14.16)$$

Тензор $d_{\alpha\beta}$ называется *тензором диффузии в скоростном пространстве*, а a_α (по Чандрасекару) — *коэффициентом динамического трения*. Очевидно,

$$\begin{aligned} A_\alpha &= m a_\alpha, \\ D_{\alpha\beta} &= m^2 d_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

§ 15. Связь тензора диффузии и коэффициента динамического трения с функцией распределения. Кинетическое уравнение в форме Ландау

1. Чтобы из уравнения Фоккера—Планка получить кинетическое уравнение плазмы в окончательной форме, необходимо выразить средние $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ через функции распределения частиц плазмы. Напомним, что Δp здесь означает изменение импульса рассматриваемой частицы, которое он претерпевает за время τ в результате столкновений с другими частицами плазмы. При решении этой задачи мы будем пользоваться обычным предположением теории парных столкновений, согласно которому при вычислении подобного рода средних можно считать, что *полное изменение импульса Δp равно векторной сумме $\sum \delta p$ тех изменений, которые получил бы импульс частицы при последовательных и независимых друг от друга столкновениях с другими частицами плазмы.*

Рассмотрим сначала столкновения рассматриваемой частицы только с такой группой однотипных частиц, которые имеют один и тот же импульс p^* с разбросом внутри малого элемента dp^* . Концентрация таких частиц в обычном пространстве равна $F^*(p^*) dp^*$. Тогда относительная скорость $u = v - v^*$ может считаться одной и той же при столкновениях со всеми частицами рассматриваемой группы.

Возьмем сначала специальную систему координат, ось z которой направлена вдоль относительной скорости u , а оси x и y — перпендикулярно к ней. Вычислим средние $\langle \Delta_1 p_\alpha \rangle$ и

$\langle \Delta_1 p_\alpha \Delta_1 p_\beta \rangle$, где $\Delta_1 \mathbf{p}$ — изменение импульса рассматриваемой (пробной) частицы за время τ вследствие столкновений ее с частицами рассматриваемой группы. Поскольку азимут плоскости столкновений может с равной вероятностью принимать все значения от 0 до 2π , отличными от нуля будут только средние $\langle \Delta_1 p_z \rangle$, $\langle \Delta_1 p_x^2 \rangle$ и $\langle \Delta_1 p_y^2 \rangle$. (Величина $\langle \Delta_1 p_z^2 \rangle$ должна считаться в рассматриваемом приближении равной нулю как бесконечно малая более высокого порядка.) По той же причине $\langle \Delta_1 p_x^2 \rangle = \langle \Delta_1 p_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Delta_1 p_\perp^2 \rangle$, где $\Delta_1 p_\perp$ — изменение компоненты импульса \mathbf{p} , перпендикулярной к относительной скорости \mathbf{u} . При этом в силу формулы (2. 16)

$$\langle \Delta_1 p_z \rangle = - \frac{1}{2\mu u} \langle \Delta_1 p_\perp^2 \rangle, \quad (15. 1)$$

так что достаточно вычислить только $\langle \Delta_1 p_z \rangle$. Последнюю величину находим суммированием $\delta p_z \equiv \delta p_\parallel = -2\mu u \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ [см. формулу (2. 12)] по всем столкновениям с частицами рассматриваемой группы за время τ . Переходя от суммирования к интегрированию, можем написать

$$\langle \Delta_1 p_z \rangle = F^*(\mathbf{p}^*) u d\mathbf{p}^* \tau \int \delta p_z \sigma(\vartheta, u) d\Omega.$$

Подставляя сюда для $\sigma(\vartheta, u)$ выражение (3. 5) и производя обычное обрезание нижнего предела интеграла, получим

$$\langle \Delta_1 p_z \rangle = - \frac{4\pi (ee^*)^2}{\mu u^2} \tau L F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*,$$

где L — кулоновский логарифм. На основании формулы (15. 1) находим

$$\langle \Delta_1 p_x^2 \rangle = \langle \Delta_1 p_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Delta_1 p_\perp^2 \rangle = \frac{4\pi (ee^*)^2}{u} \tau L F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе координат тензор $\langle \Delta_1 p_\alpha \Delta_1 p_\beta \rangle$ имеет диагональный вид, причем в принятом приближении $\langle \Delta_1 p_z^2 \rangle = 0$. Вектор же $\langle \Delta_1 \mathbf{p} \rangle$ содержит только одну отличную от нуля компоненту (z -компоненту).

Переходя к произвольной системе координат, можно этот тензор и этот вектор записать в виде

$$\langle \Delta_1 p_\alpha \Delta_1 p_\beta \rangle = 4\pi (ee^*)^2 \tau L u_{\alpha\beta} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*, \quad (15. 2)$$

$$\langle \Delta_1 p_\alpha \rangle = - \frac{4\pi (ee^*)^2}{\mu u^3} \tau L u_\alpha F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*, \quad (15. 3)$$

где через $u_{\alpha\beta}$ обозначен тензор

$$u_{\alpha\beta} = \frac{u^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta}{u^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}. \quad (15. 4)$$

Остается только проинтегрировать выражения (15. 2) и (15. 3) по $d\mathbf{p}^*$ и просуммировать по всем типам полевых частиц. В результате получим

$$D_{\alpha\beta} = \sum^* 2\pi L (ee^*)^2 \int u_{\alpha\beta} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*, \quad (15. 5)$$

$$A_{\alpha} = - \sum^* 2\pi L (ee^*)^2 \int \left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}} + \frac{2u_{\alpha}}{\mu u^3} \right) F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*. \quad (15. 6)$$

Полученные формулы дают решение задачи, поставленной в начале настоящего параграфа.

2. Выражение для A_{α} можно преобразовать к более симметричному виду. Прежде всего

$$\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}} = \frac{1}{m} \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial v_{\beta}} = \frac{1}{m} \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial u_{\beta}} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}} \frac{\partial^2 u}{\partial u_{\beta} \partial u_{\beta}} = - \frac{2}{m} \frac{u_{\alpha}}{u^3}. \quad (15. 7)$$

Далее

$$\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}} + \frac{2u_{\alpha}}{\mu u^3} = \frac{2u_{\alpha}}{u^3} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{m} \right) = \frac{2u_{\alpha}}{m^* u^3}.$$

Следовательно,

$$A_{\alpha} = - \sum^* 4\pi (ee^*)^2 L \int \frac{u_{\alpha}}{m^* u^3} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*. \quad (15. 8)$$

Если обозначить через \mathbf{u}^* скорость полевой частицы относительно пробной, то $\mathbf{u}^* = -\mathbf{u}$, и на основании соотношения (15. 7) можно написать

$$\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}^*} = - \frac{2}{m^*} \frac{u_{\alpha}^*}{u^{*3}}$$

или

$$\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}^*} = \frac{2}{m^*} \frac{u_{\alpha}}{u^3}.$$

Поэтому формула (15. 8) переходит в

$$A_{\alpha} = - \sum^* 2\pi (ee^*)^2 L \int \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial p_{\beta}^*} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*.$$

Отсюда интегрированием по частям находим

$$A_{\alpha} = \sum^* 2\pi (ee^*)^2 L \int u_{\alpha\beta} \frac{\partial F^*(\mathbf{p}^*)}{\partial p_{\beta}^*} d\mathbf{p}^*. \quad (15. 9)$$

Окончательно формулы (14. 10), (15. 5) и (15. 9) дают

$$I_{\alpha} = \sum^* 2\pi (ee^*)^2 L \int \left\{ F(\mathbf{p}) \frac{\partial F^*(\mathbf{p}^*)}{\partial p_{\beta}^*} - F^*(\mathbf{p}^*) \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_{\beta}} \right\} u_{\alpha\beta} d\mathbf{p}^*. \quad (15. 10)$$

Это — *интеграл столкновений*, полученный впервые Ландау [10. 11] другим, более формальным, способом. Введя его в уравнение (14. 9), получим *кинетическое уравнение в форме Ландау*.

Уравнение Ландау можно записать также в форме (14. 13), используя скоростное пространство вместо пространства импульсов. На основании формул (14. 14) и (14. 17) вектор \mathbf{j} будет определяться выражением

$$\mathbf{j}_\alpha = \sum^* \frac{2\pi (ee^*)^2 L}{m} \int \left\{ \frac{f(\mathbf{v})}{m^*} \cdot \frac{\partial f^*(\mathbf{v}^*)}{\partial v_\beta^*} - \frac{f^*(\mathbf{v}^*)}{m} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial v_\beta} \right\} u_{\alpha\beta} d\mathbf{v}^*. \quad (15. 11)$$

3. Для некоторых целей целесообразно преобразовать выражения для вектора \mathbf{A} и тензора $D_{\alpha\beta}$ к другой форме, которая особенно удобна при вычислениях этих величин по заданной функции распределения. С этой целью перейдем от интегрирования по пространству импульсов к интегрированию по пространству скоростей. Кроме того, примем во внимание, что

$$u_{\alpha\beta}' = \frac{\partial^2 u}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \quad (15. 12)$$

Тогда формулы (15. 8) и (15. 5) можно переписать в виде

$$\mathbf{A} = - \sum^* \frac{4\pi (ee^*)^2 L}{m^*} \int \frac{\mathbf{u}}{u^3} f^*(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*, \quad (15. 13)$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum^* 2\pi (ee^*)^2 L \frac{\partial^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \int u f^*(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^* \quad (15. 14)$$

или сокращенно

$$\mathbf{A} = - \sum^* \frac{L \mathbf{E}_v}{m^*}, \quad (15. 15)$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum^* L \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{v})}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}. \quad (15. 16)$$

Здесь \mathbf{E}_v — аналог электростатического поля в пространстве скоростей, введенный ранее в § 3. Напомним, что он определяется выражением

$$\mathbf{E}_v = \int \frac{\mathbf{u}}{u^3} \varrho_v(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*, \quad (15. 17)$$

где

$$\varrho_v = 4\pi (ee^*)^2 f^*(\mathbf{v}^*). \quad (15. 18)$$

Функция $\Psi(\mathbf{v})$ по определению равна

$$\Psi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int u \varrho_v(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^*. \quad (15. 19)$$

Функции такого типа впервые были введены Розенблютом, Макдональдом и Джаддом [2] и независимо от них Б. А. Трубниковым [1].

4. Формулы (15. 10), (15. 11) и все эквивалентные им выражения выведены в предположении, что *влиянием силового поля на акт столкновения частиц можно пренебречь*. При сильных полях, благодаря конечности времени столкновения частиц, это не всегда допустимо. Практически важен случай, когда мы имеем дело

с сильным магнитным полем. Тогда выражениями (15. 10) и (15. 11) можно пользоваться, если дебаевский радиус (4. 5) мал по сравнению с ларморовским радиусом

$$r_{\text{л}} = \frac{mcv}{eB} \approx \frac{c}{eB} \sqrt{3mT}. \quad (15. 20)$$

В самом деле, сила кулоновского притяжения или отталкивания взаимодействующих частиц экранируется на расстояниях порядка D . Поэтому для применимости формул (15. 10) и (15. 11) достаточно, чтобы на длинах такого порядка магнитное поле B мало искривляло траекторию частицы. Это возможно при выполнении условия

$$\frac{D}{r_{\text{л}}} \approx \frac{B}{2c \sqrt{6\pi n m}} \ll 1, \quad (15. 21)$$

где n — концентрация частиц одного знака (плазма предполагается квазинейтральной). Для электронов

$$\frac{D}{r_{\text{л}}} \approx \frac{127B}{\sqrt{n}},$$

для ионов водорода

$$\frac{D}{r_{\text{л}}} \approx \frac{3B}{\sqrt{n}},$$

для ионов дейтерия

$$\frac{D}{r_{\text{л}}} \approx \frac{2,1B}{\sqrt{n}},$$

где B — в гауссах.

Интересно исследовать, выполняется ли условие (15. 21) в различного рода магнитных ловушках, разрабатываемых в связи с исследованием проблемы управляемых термоядерных реакций. С этой целью придадим условию (15. 21) несколько иной вид. Введем общепринятое обозначение

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2} \quad (15. 22)$$

для отношения давления p плазмы к магнитному давлению $\frac{B^2}{8\pi}$.

При этом мы будем рассматривать отдельно давления электронной и ионной компонент плазмы, так что последняя будет характеризоваться двумя значениями β — одним для электронов, другим для ионов. Величина β не может быть больше единицы, так как в противном случае магнитное давление не смогло бы уравновесить давление частиц плазмы, т. е. не смогло бы удержать ее в ловушке. Так как $p = nT$, то условие (15. 21) нетрудно преобразовать к виду

$$\beta \gg \frac{1}{3\pi} \frac{T}{mc^2}. \quad (15. 23)$$

Если взять ориентировочно $T = 50$ кэв, то для дейтронов $\frac{T}{mc^2} = \frac{1}{40000}$, и условие (15. 23) требует $\beta \gg \frac{1}{40000}$, что хорошо выполняется в любых установках. Однако для электронов $\frac{T}{mc^2} = \frac{1}{10}$, и это условие переходит в $\beta \gg \frac{1}{100}$. В некоторых установках, например в стеллараторах, оно либо не выполняется, либо выполняется плохо. В этих случаях формулы (15. 10) и (15. 11) дают правильные значения только для той части интеграла столкновений, которая обусловлена рассеянием ионов на ионах. Для интегралов столкновений, связанных с рассеянием ионов на электронах, или с рассеянием электронов на ионах и электронах эти формулы в лучшем случае могут служить лишь для оценки порядка величин.

5. Разумеется, кинетическое уравнение в форме Ландау является приближенным. При его выводе мы пренебрегаем влиянием далеких столкновений. В него входит нечетко определяемая величина — кулоновский логарифм L . Значение последнего, в частности, зависит от температуры плазмы — величины, имеющей ясный и четкий смысл лишь для термодинамически равновесных состояний. Строгое кинетическое уравнение, применимое для описания неравновесных состояний и процессов в плазме, не может содержать в качестве параметров такие величины, как температура плазмы. Поэтому *уравнение Ландау можно применять лишь для состояний, не слишком сильно отличающихся от состояний термодинамического равновесия*. В частности, оно хорошо приспособлено к рассмотрению *явлений переноса*, поскольку в этом случае его решение находится *методом возмущений* и тем самым предполагается, что распределение скоростей не сильно отличается от равновесного максвелловского распределения. К явлениям переноса относятся, например, явления *электропроводности, теплопроводности, диффузии и внутреннего трения* в плазме. *Ламинарная теория этих явлений, основанная на кинетическом уравнении Ландау, детально разработана и составляет важный раздел кинетики плазмы*. Ее обстоятельное изложение дано С. И. Брагинским [19]. Поэтому здесь мы совсем не будем касаться этой теории.

§ 16. Тензор диффузии и коэффициент динамического трения при изотропном распределении полевых частиц в пространстве импульсов

1. Как было отмечено в § 14, вектор плотности потока частиц \mathbf{I} в пространстве импульсов, возникающий в результате их столкновений друг с другом и с другими частицами, может рассматриваться как наложение двух потоков: диффузионного потока — $D_{\alpha\beta} \frac{\partial F}{\partial p_\beta}$ и потока $\mathbf{A}F$, связанного с коэффициентом динамического трения. Вектор \mathbf{I} по своей структуре вполне аналогичен потоку обычных

частиц при *вынужденной диффузии* их, т. е. диффузии, происходящей при наличии внешнего силового поля. Так, например, броуновские частицы в вязкой жидкости, помещенной в однородное поле тяжести, диффундируют из мест большей концентрации в места меньшей концентрации. На этот диффузионный поток накладывается вынужденный поток, величина которого определяется совместным действием силы тяжести, архимедовой подъемной силы и стоксовой силы вязкости. Плотность этого вынужденного потока пропорциональна напряженности поля силы тяжести и концентрации частиц — по своей структуре он вполне аналогичен члену AF .

Однако по сравнению с обыкновенной диффузией диффузия частиц (точнее их *изображающих точек*) в импульсном пространстве описывается более сложными уравнениями. Во-первых, вместо скалярного коэффициента диффузии в последние уравнения входит *тензор диффузии* $D_{\alpha\beta}$. Во-вторых, и это более существенно, тензор диффузии $D_{\alpha\beta}$ и коэффициент динамического трения A не остаются постоянными, а определяются в каждый момент времени видом функции распределения $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ частиц плазмы.

В результате вместо дифференциальных уравнений получается сложная система *нелинейных интегродифференциальных уравнений*.

Не существует общих методов точного решения таких уравнений. Приходится довольствоваться приближенными решениями. К тому же последние, как правило, могут быть получены лишь после далеко идущей схематизации задачи и сильного упрощения исходной системы уравнений. Одно из возможных упрощений состоит в замене неизвестных компонент тензора $D_{\alpha\beta}$ и вектора A известными функциями \mathbf{p} , вид которых не меняется в течение процесса. Решение, полученное таким методом, называется *диффузионным приближением*. Его интуитивным обоснованием может служить замечание, что в обычно встречающихся условиях замена истинных значений $D_{\alpha\beta}$ и A постоянными величинами, близкими к их средним значениям за время процесса, не может качественно изменить характер диффузии, а скажется в окончательных формулах лишь на численных коэффициентах. Разумеется, точность диффузионного приближения зависит от удачной аппроксимации функций $D_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ и $A_{\alpha}(\mathbf{p})$.

2. Допустим, что пробная частица движется в среде полевых частиц с изотропными распределениями скоростей. Это значит, что все функции распределения $F^*(\mathbf{p}^*)$ полевых частиц зависят только от длины вектора \mathbf{p}^* , но не от его направления. Найдем для такой пробной частицы вид тензора диффузии $D_{\alpha\beta}$ и коэффициента динамического трения A в ее импульсном пространстве. Направим ось z вдоль импульса \mathbf{p} пробной частицы, а оси x и y — перпендикулярно к нему. Тогда в силу симметрии в этой системе координат тензор $D_{\alpha\beta}$ будет иметь диагональный вид, а у вектора A будет отлична от нуля только z -компонента. В силу той же симметрии

$D_{xx} = D_{yy}$. Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} D_{\perp} &= D_{xx} = D_{yy}, \\ D_{\parallel} &= D_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Если \mathbf{I} — вектор плотности потока пробных частиц в импульсном пространстве, то его компоненты вдоль вектора \mathbf{p} и перпендикулярно к нему можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_{\parallel} &= -D_{\parallel} \text{grad}_{\parallel} F + \mathbf{A}F, \\ \mathbf{I}_{\perp} &= -D_{\perp} \text{grad}_{\perp} F, \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

где, разумеется, градиент берется в пространстве импульсов. Коэффициенты D_{\parallel} и D_{\perp} назовем соответственно *коэффициентами продольной и поперечной диффузии*.

3. Вычислим вектор \mathbf{A} и тензор $D_{\alpha\beta}$ для двух случаев изотропного распределения скоростей полевых частиц.

Первый случай. Скорости \mathbf{v}^* полевых частиц одного и того же типа одинаковы по абсолютной величине, но равномерно распределены по направлениям. Для полевых частиц различных типов величины этих скоростей могут быть разными.

В этом случае величина, являющаяся аналогом электрического заряда в пространстве скоростей, равномерно распределена по сфере радиуса v^* с центром в начале координат. Вычисление вектора \mathbf{A} свелось к элементарной задаче электростатики о поле равномерно заряженной по поверхности сферы. При этом, как видно из выражения (15.18) и условия нормировки $\int f^*(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^* = n^*$, полный «заряд», расположенный на поверхности сферы, равен $4\pi (ee^*)^2 n^*$. Поэтому, применяя известные формулы электростатики, из формулы (15.15) получим

$$\mathbf{A} = \sum^* \mathbf{A}(m, m^*), \quad (16.3)$$

где

$$\mathbf{A}(m, m^*) = \begin{cases} -\frac{4\pi (ee^*)^2 n^* L}{m^* v^3} \mathbf{v} & \text{при } v > v^*, \\ -\frac{2\pi (ee^*)^2 n^* L}{m^* v^3} \mathbf{v} & \text{при } v = v^*, \\ 0 & \text{при } v < v^*. \end{cases} \quad (16.4)$$

Вычисление $D_{\alpha\beta}$, как следует из формулы (15.16), сводится к вычислению потенциальной функции $\Psi(\mathbf{v})$, определяемой выражением (15.19). В рассматриваемом нами случае поверхностного распределения «заряда» последняя формула переходит в

$$\Psi(\mathbf{v}) = \frac{(ee^*)^2 n^*}{2v^{*2}} \int u ds,$$

причем интегрирование ведется по поверхности рассматриваемой сферы с радиусом v^* . Это интегрирование легко сводится к интегрированию по углу ϑ (рис. 9):

$$\Psi(v) = \pi (ee^*)^2 n^* \int_0^\pi u \sin \vartheta d\vartheta.$$

Введем в качестве переменной интегрирования величину u . Так как $u^2 = v^2 + v^{*2} - 2vv^* \cos \vartheta$, то $udu = vv^* \sin \vartheta d\vartheta$, и после элементарных вычислений получим

$$\Psi(v) = \begin{cases} 2 (ee^*)^2 n^* \left(v + \frac{1}{3} \frac{v^{*2}}{v} \right) & \text{при } v^* < v, \\ 2\pi (ee^*)^2 n^* \left(v^* + \frac{1}{3} \frac{v^2}{v^*} \right) & \text{при } v^* > v. \end{cases} \quad (16.5)$$

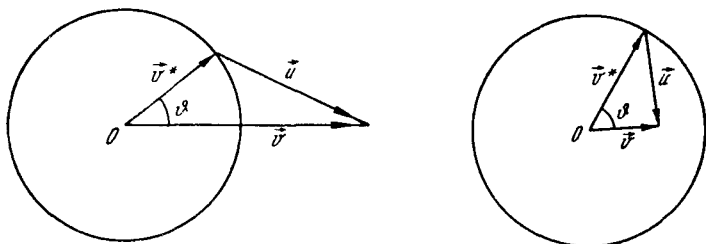


Рис. 9.

Теперь нетрудно получить

$$D_{\alpha\beta} = \sum^* D_{\alpha\beta}(m, m^*), \quad (16.6)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(m, m^*) = \begin{cases} \frac{2\pi (ee^*)^2 n^* L}{v} \left[\left(1 - \frac{v^{*2}}{3v^2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{v^{*2}}{v^2} \right) \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} \right] & \text{при } v > v^*, \\ \frac{4\pi (ee^*)^2 n^* L}{3v^*} \delta_{\alpha\beta} & \text{при } v < v^*. \end{cases} \quad (16.7)$$

При $v = v^*$ оба выражения совпадают.

Мы видим, что при $v < v^*$ коэффициент динамического трения обращается в нуль, а тензор диффузии вырождается в скаляр. Этот результат находится в согласии с тем, что было сказано в пункте 2 § 10. Полевые частицы, скорости которых превышают v , не влияют в среднем на продольное торможение пробной частицы. Их роль сводится лишь к изменению направления ее движения. Это изменение направления движения пробной частицы статистически может быть описано как ее диффузия в пространстве импульсов с изотропным коэффициентом диффузии.

Отмеченный факт позволяет с новой точки зрения понять относительную роль электронов и ионов плазмы в процессе рассеяния пробного иона. Допустим, что скорость пробного иона того же порядка, что и средние скорости теплового движения плазменных ионов. Что касается электронов плазмы, то мы будем предполагать, что их тепловые скорости очень велики по сравнению с тепловыми скоростями ионов. Тогда найдется очень мало электронов со скоростями $v^* < v$. Влиянием таких электронов на процесс рассеяния пробного иона можно пренебречь. Оставшиеся быстрые электроны будут вызывать диффузию пробного иона в пространстве импульсов с тензором диффузии

$$D_{\alpha\beta}^{ie} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{4\pi (ee_e)^2 L}{3} \int \frac{I_e^*(v_e^*)}{v_e^*} dv_e^*.$$

Так как большая скорость v_e^* стоит в знаменателе, то величиной $D_{\alpha\beta}^{ie}$ можно пренебречь по сравнению с тем вкладом в тензор диффузии, который вносят ионы плазмы. Поэтому в рассматриваемом случае рассеянием на электронах вообще можно пренебречь.

Выведенные формулы справедливы при любом выборе системы координат. Чтобы из них получить выражения для коэффициентов продольной и поперечной диффузии, надо перейти к системе координат, в которой одна из координатных осей параллельна вектору v . Тогда тензор $D_{\alpha\beta}$ становится диагональным, и мы получаем

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel} &= \sum^* D_{\parallel}(m, m^*), \\ D_{\perp} &= \sum^* D_{\perp}(m, m^*), \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

где

$$D_{\parallel}(m, m^*) = \begin{cases} \frac{4\pi (ee^*)^2 n^* Lv^{*2}}{3v^3} & \text{при } v > v^*, \\ \frac{4\pi (ee^*)^2 n^* L}{3v^*} & \text{при } v < v^*; \end{cases} \quad (16.9)$$

$$D_{\perp}(m, m^*) = \begin{cases} \frac{2\pi (ee^*)^2 n^* L}{v} \left(1 - \frac{v^{*2}}{3v^2}\right) & \text{при } v > v^*, \\ \frac{4\pi (ee^*)^2 n^* L}{3v^*} & \text{при } v < v^*. \end{cases} \quad (16.10)$$

Как следует из выражений (16.4) и (16.7), между тензором диффузии $D_{\alpha\beta}(m, m^*)$ и коэффициентом динамического трения $A_{\alpha}(m, m^*)$ при $v > v^*$ существует соотношение

$$v_{\beta} D_{\alpha\beta}(m, m^*) = -\frac{m^* v^{*2}}{3} A_{\alpha}(m, m^*). \quad (16.11)$$

Оно дает

$$v D_{\parallel}(m, m^*) = -\frac{m^* v^{*2}}{3} A(m, m^*). \quad (16.12)$$

При $v < v^*$ эти соотношения не имеют места, так как в этом случае $A_{\alpha}(m, m^*) = 0$, тогда как $D_{\alpha\beta} \neq 0$.

Второй случай. Скорости полевых ионов и электронов распределены по Максвеллу. Температуры ионов и электронов могут не совпадать. В этом случае A и $D_{\alpha\beta}$ по-прежнему представляются выражениями (16. 3) и (16. 6), причем из формул (15. 15) и (6. 3) получаем

$$A(m, m^*) = -\frac{4\pi (ee^*)^2 n^* L}{m^* v^3} \Phi_1(b^* v) v. \quad (16. 13)$$

Потенциальную функцию $\Psi(v)$ находим интегрированием функции (16. 5) по максвелловскому распределению

$$f^*(v^*) = n^* \left(\frac{b^*}{\sqrt{\pi}} \right)^3 e^{-b^{*2} v^{*2}}.$$

Это дает

$$\Psi(v) = 2\pi (ee^*)^2 n^* \left\{ \int_0^v \left(v + \frac{1}{3} \frac{v^{*2}}{v} \right) f^*(v^*) \cdot 4 v^{*2} dv^* + \int_v^\infty \left(v^* + \frac{1}{3} \frac{v^2}{v^*} \right) f^*(v^*) \cdot 4\pi v^{*2} dv^* \right\}.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$\Psi(v) = 2\pi (ee^*)^2 n^* v \left[\left(1 + \frac{1}{2b^{*2}v^2} \right) \Phi(b^*v) + \frac{1}{\sqrt{\pi} b^*v} e^{-b^{*2}v^2} \right]. \quad (16. 14)$$

После этого с помощью формулы (15. 16) найдем

$$D_{\alpha\beta}(m, m^*) = \frac{2\pi (ee^*)^2 n^* L}{v} \left[\left(\Phi(b^*v) - \frac{\Phi_1(b^*v)}{2b^{*2}v^2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \left(\Phi(b^*v) - \frac{3\Phi_1(b^*v)}{2b^{*2}v^2} \right) \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} \right], \quad (16. 15)$$

$$D_{\parallel}(m, m^*) = \frac{2\pi (ee^*)^2 n^* L}{v} \frac{\Phi_1(b^*v)}{b^{*2}v^2}, \quad (16. 16)$$

$$D_{\perp}(m, m^*) = \frac{2\pi (ee^*)^2 n^* L}{v} \left[\Phi(b^*v) - \frac{\Phi_1(b^*v)}{2b^{*2}v^2} \right]. \quad (16. 17)$$

Из формул (16. 13) и (16. 15) следует

$$v_\beta D_{\alpha\beta}(m, m^*) = -\frac{m^*}{2b^{*2}} A_\alpha(m, m^*)$$

или

$$v_\beta D_{\alpha\beta}(m, m^*) = -T^* A_\alpha(m, m^*). \quad (16. 18)$$

В частности

$$v D_{\parallel}(m, m^*) = -T^* A(m, m^*). \quad (16. 19)$$

Плотность потока частиц I_α в импульсном пространстве, вызванного столкновениями, определяется выражением (14. 10). Если распределения скоростей всех типов частиц максвелловские,

но температуры частиц различных типов могут отличаться друг от друга, то в силу соотношения (16. 18) можно написать

$$I_{\alpha} = \frac{F}{T} \sum^* A_{\alpha}(m, m^*) [T - T^*]. \quad (16. 20)$$

В состоянии термодинамического равновесия, когда температуры всех компонент плазмы одинаковы, это выражение обращается в нуль. Это значит, что столкновения между частицами уже не влияют на функции распределения. Можно было бы показать, что это условие является необходимым условием полного термодинамического равновесия и на этой основе доказать, что единственным распределением, удовлетворяющим этому условию, является распределение скоростей Максвелла.

4. Вид формул (16. 13), (16. 16) и (16. 17) упрощается в том случае, когда пробной частицей является быстрый электрон, т. е. такой, скорость которого v велика по сравнению со средней скоростью теплового движения электронов. Для простоты предположим, что плазма состоит из электронов и одного типа положительно заряженных ионов. Тогда при вычислении A и D_{\parallel} влиянием ионов из-за их относительно больших масс можно пренебречь. По этой же причине при вычислении D_{\perp} можно пренебречь членом $\frac{\Phi_1(b^* v)}{2b^{*2} v^2}$, когда рассматриваются столкновения пробного электрона с ионами; такой член следует сохранить лишь для столкновений пробного электрона с электронами. Так как при этом аргумент $b^* v$ всегда велик (достаточно, чтобы он превышал 2), то функции $\Phi(b^* v)$ и $\Phi_1(b^* v)$ можно аппроксимировать единицей. В результате получим

$$A = -v(p) p, \quad (16. 21)$$

$$D_{\parallel} = v(p) m T_e, \quad (16. 22)$$

$$D_{\perp} = v(p) p^2 \left(1 - \frac{m T_e}{2p^2}\right), \quad (16. 23)$$

где m — масса электрона. Для сокращения через $v(p)$ обозначена величина

$$v(p) = \frac{4\pi e^4 n L}{m^2 v^3} = \frac{4\pi e^4 m n L}{p^3}, \quad (16. 24)$$

имеющая смысл частоты соударений пробного электрона с электронами или ионами плазмы (плазма предполагается квазинейтральной).

Полученные выражения могут быть использованы при написании кинетического уравнения для *быстрых* электронов. Например, при рассмотрении явления убегания электронов в слабых электрических полях (т. е. полях, много меньших критического) все электроны могут быть разбиты на две группы: электроны основной группы, функция распределения которых практически является максвелловской, и электроны, обладающие высокими

скоростями. Если концентрация последних электронов мала по сравнению с концентрацией электронов основной группы, то можно пренебречь рассеянием на быстрых электронах. Достаточно учесть рассеяние быстрых электронов на электронах основной группы и на ионах. Поэтому при написании кинетического уравнения для быстрых электронов можно воспользоваться выражениями (16. 21), (16. 22) и (16. 23).

Согласно уравнению (14. 10)

$$\mathbf{I} = AF - D_{\parallel} \text{grad}_{\parallel} F - D_{\perp} \text{grad}_{\perp} F, \quad (16. 25)$$

где градиент берется в пространстве импульсов. Возьмем, например, в этом пространстве сферическую систему координат с осью, направленной вдоль действующей электрической силы E . Электрическое поле предполагается однородным. Функция распределения F помимо времени зависит от ρ и от полярного угла ϑ ; от азимута ϕ она не зависит вследствие предполагаемой цилиндрической симметрии задачи. Поэтому вектор \mathbf{I} имеет только две слагающие: слагающую I_{ρ} вдоль вектора \mathbf{r} и перпендикулярную к нему слагающую I_{ϑ} , положительное направление которой совпадает с направлением возрастания угла ϑ . Для этих слагающих имеем

$$\left. \begin{aligned} I_{\rho} &= AF - D_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial \rho}, \\ I_{\vartheta} &= -D_{\perp} \frac{\partial F}{\rho \partial \vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (16. 26)$$

или

$$\left. \begin{aligned} I_{\rho} &= -v(\rho) \left[mT_e \frac{\partial F}{\partial \rho} + \rho F \right], \\ I_{\vartheta} &= -v(\rho) \rho \left(1 - \frac{mT_e}{2\rho^2} \right) \frac{\partial F}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (16. 27)$$

Воспользовавшись этими формулами, а также выражением для дивергенции $\frac{\partial I_{\alpha}}{\partial p_{\alpha}}$ в сферической системе координат, придадим уравнению (14. 9) вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) F + eE (\cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{\sin \vartheta}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \vartheta}) - \\ & - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[v\rho^2 \left(mT_e \frac{\partial F}{\partial \rho} + \rho F \right) \right] - \frac{v}{\sin \vartheta} \left(1 - \frac{mT_e}{2\rho^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким уравнением воспользовался А. В. Гуревич в своей работе по теории убегания электронов [16] ¹.

¹ Последний член этого уравнения в работе А. В. Гуревича несколько отличается от нашего: вместо правильного множителя $\left(1 - \frac{mT_e}{2\rho^2} \right)$ в его работе ошибочно стоит $\left(1 - \frac{mT_e}{4\rho^2} \right)$.

§ 17. Применение кинетического уравнения к задаче об обмене энергиями между различными компонентами плазмы

1. В § 9 была решена задача об обмене энергиями между различными компонентами плазмы. Приведем другое решение той же задачи, основанное на кинетическом уравнении. Будем предполагать, что внешние силовые поля отсутствуют.

При выводе всех основных уравнений предполагалось, что при столкновении двух любых частиц их общая энергия не меняется. Столкновения не могут изменить общий запас энергии частиц плазмы, а лишь перераспределяют его между этими частицами. Нетрудно убедиться непосредственно, что выражение для I_α удовлетворяет этому условию. Обозначим через \mathcal{E} энергию какого-либо сорта частиц плазмы в единице объема

$$\mathcal{E} = \int \frac{p^2}{2m} F(t, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (17.1)$$

Для ее производной по времени можем написать

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \int \frac{p^2}{2m} \frac{\partial F}{\partial t} d\mathbf{p}.$$

В рассматриваемом нами случае $X_\alpha = 0$. Кроме того, предполагается, что плазма однородна и, следовательно, $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 0$. Поэтому уравнение (14.9) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0, \quad (17.2)$$

и мы получим

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = - \int \frac{p^2}{2m} \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_\alpha} d\mathbf{p}.$$

Преобразуем правую часть по теореме Гаусса к виду

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{m} \int I_\alpha p_\alpha d\mathbf{p}. \quad (17.3)$$

Это выражение следует просуммировать по всем типам частиц и убедиться, что в результате получится нуль. С этой целью проще всего воспользоваться выражением для I_α в симметричной форме Ландау (15.10). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum \mathcal{E} &= \sum \sum^* 2\tau (ee^*)^2 L \iint F(\mathbf{p}) \frac{\partial F^*(\mathbf{p}^*)}{\partial p_\beta^*} v_\alpha \mu_{\alpha\beta} d\mathbf{p} d\mathbf{p}^* - \\ &- \sum \sum^* 2\tau (ee^*)^2 L \iint F(\mathbf{p}^*) \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_\beta} v_\alpha \mu_{\alpha\beta} d\mathbf{p} d\mathbf{p}^*. \end{aligned}$$

Знак \sum^* применен для суммирования величин, обозначенных буквами со звездочкой, а знак \sum — для суммирования величин,

обозначенных буквами без звездочки. Так как речь идет о двойном суммировании по одним и тем же типам частиц, то все величины со звездочкой можно заменить на соответствующие величины без звездочки и наоборот. Произведем такую замену во втором слагаемом предыдущего выражения. Тогда, принимая во внимание, что $u_{\alpha\beta}^* = u_{\alpha\beta}$, $v_\alpha - v_\alpha^* = u_\alpha$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \mathcal{E} = \sum \sum^* 2\pi (ee^*)^2 L \iint F(\mathbf{p}) \frac{\partial F^*(\mathbf{p}^*)}{\partial \rho_\beta^*} u_\alpha u_{\alpha\beta} d\mathbf{p} d\mathbf{p}^*.$$

Как нетрудно убедиться с помощью формулы (15. 4),

$$u_\alpha u_{\alpha\beta} = 0 \quad (17. 4)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \mathcal{E} = 0. \quad (17. 5)$$

2. Исследуем более подробно изменение энергии \mathcal{E} рассматриваемой группы частиц вследствие столкновений их с другими частицами плазмы. Будем предполагать, что скорости всех групп распределены по Максвеллу с различными температурами. Подставляя в формулу (17. 3) выражение (16. 20), получим

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{T} \sum^* (T - T^*) \int v_\alpha A_\alpha(m, m^*) F(\mathbf{p}) d\mathbf{p}. \quad (17. 6)$$

Как и в § 9, сосредоточим свое внимание только на одном слагаемом суммы (17. 6), т. е. будем рассматривать обмен энергиями только между двумя группами частиц. Для указанного слагаемого можем написать

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{T - T^*}{T} \int v A(m, m^*) F(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{T - T^*}{T} \int v A(m, m^*) f(v) dv$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = n \frac{T - T^*}{T} \langle v A(m, m^*) \rangle, \quad (17. 7)$$

где усреднение производится по максвелловскому распределению пробных частиц (частиц первой группы). Подставляя сюда вместо $A(m, m^*)$ его выражение из формулы (16. 13), получим

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{T^* - T}{T} \cdot \frac{4\pi (ee^*)^2 n n^* L}{m^*} \left\langle \frac{\Phi_1(b^*v)}{v} \right\rangle.$$

При вычислении $\left\langle \frac{\Phi_1(b^*v)}{v} \right\rangle$ можно воспользоваться результатами, полученными в начале § 9. В силу формулы (6. 6) они дают

$$\left\langle \frac{\Phi_1(b^*v)}{v} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{bb^{*3}}{(b^2 + b^{*2})^{3/2}}.$$

Окончательно

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{T^* - T}{mm^*} \frac{4\sqrt{2\pi} nn^* (ee^*)^2 L}{\left(\frac{T}{m} + \frac{T^*}{m^*}\right)^{3/2}}. \quad (17.8)$$

Этот результат совпадает с формулой (9. 2), поскольку

$$Q = -\frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}.$$

§ 18. Выход ионов из магнитной ловушки с магнитными пробками вследствие столкновений

1. Применим кинетическое уравнение к задаче о выходе ионов из магнитной ловушки с магнитными пробками, предложенной Г. И. Будкером [20] и независимо от него Йорком [21] для удержания заряженных частиц. Ловушка представляет собой цилиндрическую трубу, помещенную в соленоид, создающий сильное однородное постоянное магнитное поле \mathbf{B} , параллельное оси ловушки. На концах ловушки имеются добавочные обмотки, усиливающие там магнитное поле. Области усиленного постоянного магнитного поля на концах ловушки называются *магнитными пробками*. Обозначим через B напряженность однородного магнитного поля в ловушке, а через $B_{\text{макс}}$ — максимальное значение последнего в магнитных пробках (предполагается, что $B_{\text{макс}}$ одно и то же на обоих концах ловушки). Обозначим далее через ϑ угол между направлением движения частицы в ловушке и направлением магнитного поля в тех областях, где оно может считаться однородным. Как известно, дрейфовая теория движения заряженной частицы в магнитных полях приводит к следующему результату. Заряженная частица бесконечно долго удерживается в ловушке, если $\pi - \vartheta_0 > \vartheta > \vartheta_0$ и уходит из нее через пробки, если $\vartheta < \vartheta_0$ или $\vartheta > \pi - \vartheta_0$. Здесь ϑ_0 — предельный угол, определяемый соотношением

$$\sin \vartheta_0 = \sqrt{\frac{B}{B_{\text{макс}}}}. \quad (18.1)$$

Если в ловушке находится не одна частица, а плазма, то в этом случае даже в дрейфовом приближении появится *утечка частиц через пробки*. Одной из причин такой утечки являются *кулоновские столкновения*, сопровождающиеся изменениями угла ϑ и выводящие изображающие точки частиц (в пространстве импульсов или скоростей) внутрь предельного конуса $\vartheta < \vartheta_0$, $\vartheta > \pi - \vartheta_0$; такие столкновения приводят к выходу частиц из ловушки через магнитные пробки. Мы исследуем здесь только этот механизм

ухода частиц и оставим без внимания другие механизмы, например коллективные колебания и неустойчивости плазмы¹.

2. Решение поставленной задачи сводится к нахождению функции распределения $F(t, \mathbf{r}, p)$ частиц рассматриваемого типа. Если новые частицы не поступают в ловушку, то эта задача нестационарна. Чтобы упростить решение, перейдем, следуя Г. И. Будкеру [20], к стационарной задаче. С этой целью введем источники новых частиц, компенсирующие уход частиц из ловушки. Идеализируя задачу, будем предполагать, что эти источники непрерывно распределены по объему всей ловушки. Тогда вместо уравнения (14. 4) следует писать

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial I_{\alpha}^{(6)}}{\partial \xi_{\alpha}} = q \left(\vec{\xi} \right), \quad (18. 2)$$

где $q \left(\vec{\xi} \right)$ — плотность мощности источников в фазовом пространстве, т. е. число частиц, порождаемых источниками в единице объема фазового пространства в 1 сек. В трехмерной форме уравнение (18. 2) гласит

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha}} + X_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} + \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial p_{\alpha}} = q(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (18. 3)$$

Поток I возникает вследствие столкновений рассматриваемых частиц друг с другом и с другими частицами. Поэтому его выражение не зависит явно от вида функции $q(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, а целиком определяется функциями распределения всех частиц плазмы в рассматриваемый момент времени. Это значит, что и при наличии источников справедлива формула (15. 10) и все эквивалентные ей выражения.

С целью дальнейшего упрощения задачи будем предполагать, во-первых, что плазма двухкомпонентная, т. е. состоит из электронов и однотипных ионов. Скорости электронов предполагаются очень большими по сравнению со скоростями ионов; тогда можно пренебречь рассеянием ионов на электронах. Во-вторых, мы будем рассматривать упрощенную модель ловушки, предполагая, что почти во всем объеме ловушки магнитное поле \mathbf{B} однородно,

¹ Известно, что вследствие убывания напряженности магнитного поля от центра к периферии в магнитной ловушке, предложенной Г. И. Будкером, имеет место конвективная неустойчивость плазмы. Поэтому, казалось бы, задача об уходе частиц через магнитные пробки вследствие столкновений в той постановке, в которой она рассматривается здесь, не представляет интереса. На самом деле это не совсем так. Путем наложения дополнительных магнитных полей, обеспечивающих нарастание напряженности магнитного поля к периферии, можно подавить конвективную неустойчивость. Однако при этом в пространстве импульсов все же останутся «щели», аналогичные предельному конусу в ловушке Будкера, через которые частицы могут уходить из ловушки благодаря столкновениям. Задача об уходе частиц через такие щели совершенно аналогична разбираемой нами задаче об уходе частиц через предельный конус в ловушке Будкера. Поэтому результаты, которые мы получим, качественно и в значительной мере количественно будут применимы также и к ловушкам со щелями, в которых нет конвективной неустойчивости.

параллельно ее оси и очень быстро (в пределе -- скачком) нарастает на краях ловушки до максимального значения $B_{\text{макс}}$. При таком упрощении магнитное поле в пробках не будет входить в уравнение (18. 3), а войдет только в граничные условия к нему.

В стационарном состоянии функция F может зависеть только от длины вектора \mathbf{p} и от угла ϑ , который он образует с осью ловушки. Вектор \mathbf{l} будет лежать в *меридиональной плоскости* и в соответствии с этим будет иметь только две компоненты: *продольную* компоненту I_p вдоль вектора \mathbf{p} и перпендикулярную к нему *меридиональную* компоненту I_ϑ . *Азимутальной* компоненты I_φ не будет. Поэтому уравнение (18. 3), как легко видеть, может быть записано в виде

$$\rho \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta I_\vartheta) + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 I_p) = q\rho^2 \sin \vartheta. \quad (18. 4)$$

Члены $\frac{\partial F}{\partial t}$ и $v_\alpha \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$ обращаются в нуль. Член $X_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}$ в рассматриваемом случае сводится к $\frac{e}{c} [\mathbf{vB}] \frac{\partial F}{\partial \rho}$ и также обращается в нуль, поскольку векторы \mathbf{v} , \mathbf{B} , $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ компланарны. Разумеется, мы предполагаем, что условие (15. 21) выполнено.

На основании формулы (14. 10) для I_ϑ и I_p можно написать

$$\left. \begin{aligned} I_\vartheta &= -\frac{1}{\rho} D_{\vartheta\vartheta} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} - D_{\vartheta\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + A_{\vartheta} F, \\ I_p &= -D_{\rho\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} D_{\rho\vartheta} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + A_{\rho} F, \end{aligned} \right\} \quad (18. 5)$$

причем в силу формулы (14. 12)

$$D_{\vartheta\rho} = D_{\rho\vartheta}.$$

К уравнению (18. 4) следует добавить *граничные условия*. Поскольку время удержания частицы в ловушке очень велико по сравнению с временем ее свободного пролета от одного конца ловушки к другому, можно принять, как это сделал Г. И. Будкер, что внутри предельного конуса $\vartheta < \vartheta_0$, $\vartheta > \pi - \vartheta_0$ совсем нет частиц. Поэтому мы требуем, чтобы функция F обращалась в нуль внутри и на границах указанного конуса. Уравнение (18. 4), однако, не изменяется при замене угла ϑ на угол $\pi - \vartheta$. Отсюда и из граничных условий следует, что $F(\vartheta) = F(\pi - \vartheta)$. Впрочем, это и так очевидно из симметрии задачи. Поэтому при решении уравнения (18. 4) можно ограничиться интервалом углов $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ и записать граничные условия в виде

$$\left. \begin{aligned} F &= 0 \text{ при } \vartheta = \vartheta_0, \\ \frac{\partial F}{\partial \vartheta} &= 0 \text{ при } \vartheta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (18. 6)$$

3. Точное решение поставленной задачи затруднительно, так как тензор $D_{\alpha\beta}$ и вектор \mathbf{A} не известны, а сами определяются видом неизвестной функции распределения F . Чтобы сделать решение возможным, перейдем к *диффузионному приближению*, в котором $D_{\alpha\beta}$ и \mathbf{A} заменяются известными функциями ρ и ϑ . К сожалению, при этом нельзя обойтись без введения необоснованных и произвольных допущений, влияние которых на характер решения трудно оценить. Можно, однако, думать, что при удачной замене не будут затронуты основные черты интересующего нас явления. Мы заменим сначала $D_{\alpha\beta}$ и A_α их значениями, какие они приняли бы при изотропной функции распределения F , не фиксируя при этом вида этой функции. Тогда $D_{\vartheta\rho}$ и A_ϑ обратятся в нуль, а компоненты $D_{\rho\rho} \equiv D_{\parallel}$, $D_{\vartheta\vartheta} \equiv D_{\perp}$ и $A_\rho \equiv A$ станут функциями только ρ и не будут зависеть от ϑ . Поэтому уравнение (18. 4) примет вид

$$D_{\perp} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \left(D_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial \rho} - AF \right) \right] = -qp^2 \sin \vartheta. \quad (18. 7)$$

Возьмем теперь для D_{\parallel} , D_{\perp} и A их выражения при *максвелловском* распределении скоростей и будем искать функцию F в виде

$$F = \Theta(\vartheta) e^{-\frac{\rho^2}{2mT}}. \quad (18. 8)$$

Тогда в силу соотношения (16. 19)

$$D_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial \rho} - AF = - \left[\frac{v}{T} D_{\parallel} + A \right] F = 0$$

и уравнение (18. 7) перейдет в

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = - \frac{qp^2}{D_{\perp}} \sin \vartheta. \quad (18. 9)$$

4. Допустим, что функция q зависит только от ρ , но не зависит от ϑ (*изотропная инжекция*). Тогда решение уравнения (18. 9), удовлетворяющее граничным условиям (18. 6), примет вид

$$F = \frac{qp^2}{D_{\perp}} \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0}. \quad (18. 10)$$

Сопоставляя это выражение с выражением (18. 8), заключаем, что

$$\Theta(\vartheta) = C \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0}, \quad (18. 11)$$

$$\frac{qp^2}{D_{\perp}(\rho)} = C e^{-\frac{\rho^2}{2mT}}, \quad (18. 12)$$

где C — постоянная. Формула (18. 12) определяет плотность q (ρ) мощности источников, при которой в плазме поддерживается *квазимаксвелловское* распределение скоростей типа (18. 8). Отно-

шение $\frac{D_{\perp}(\rho)}{\rho^2}$, как видно из формулы (16. 17), убывает с возрастанием ρ : при малых значениях ρ оно пропорционально $\frac{1}{\rho^2}$, при больших значениях — $\frac{1}{\rho^3}$. Поэтому по сравнению с максвелловским распределением источники должны быть относительно богаче медленными ионами, чем быстрыми. Это и понятно, так как медленные ионы быстрее диффундируют внутрь предельного конуса $\vartheta < \vartheta_0$, $\vartheta > \pi - \vartheta_0$, чем быстрые.

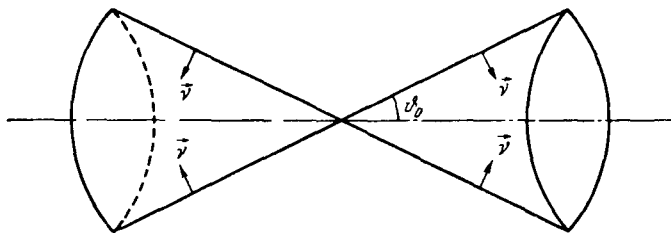


Рис. 10.

Итак,

$$F = C \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} e^{-\frac{\rho^2}{2mT}}, \quad (18. 13)$$

причем постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int F(\vartheta, \rho) d\rho = n. \quad (18. 14)$$

5. Зная функцию распределения $F(\vartheta, \rho)$, можно найти *скорость ухода ионов* из ловушки вследствие столкновений. Она определяется числом N ионов, уходящих из единицы объема ловушки в 1 сек через поверхность предельного конуса $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \pi - \vartheta_0$, и, очевидно, равна

$$\bar{N} = \int I_{\nu} dS,$$

где интегрирование ведется по поверхности всего предельного конуса, а $\vec{\nu}$ — единичный вектор внутренней нормали к этой поверхности, т. е. внешней по отношению к импульсному пространству, заполненному частицами (рис. 10). Замкнув эту поверхность частью бесконечно удаленной сферы, проходящей вне предельного конуса, преобразовав интеграл по теореме Гаусса и перейдя к пределу, можем написать

$$N = \int \frac{\partial I_{\alpha}}{\partial \rho_{\alpha}} d\rho,$$

причем интегрирование ведется по всему импульсному пространству вне предельного конуса. В силу уравнения (18. 3) $\frac{\partial I_{\alpha}}{\partial \rho_{\alpha}} = q$, а потому

$$N = \int_{\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0} q d\rho. \quad (18. 15)$$

Так и должно быть, поскольку в стационарном состоянии число ионов, поставляемых источником, должно быть равно числу уходящих ионов.

6. Задача свелась к вычислению двух интегралов: *нормировочного интеграла* (18. 14) и интеграла (18. 15). В качестве элемента объема импульсного пространства удобно взять

$$d\rho = 2\pi\rho^2 \sin \vartheta d\vartheta d\rho. \quad (18. 16)$$

Тогда после элементарных вычислений нетрудно получить

$$C \cdot (2\pi mT)^{3/2} \left[\ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0 \right] = n, \quad (18. 17)$$

$$N = 4\pi C \cos \vartheta_0 \int_0^\infty D_\perp(\rho) e^{-\frac{\rho^2}{2mT}} d\rho. \quad (18. 18)$$

По формуле (16. 17)

$$D_\perp = \frac{2\pi e^4 nmL}{\sqrt{2mTx}} \left[\Phi(x) - \frac{\Phi_1(x)}{2x^2} \right], \quad (18. 19)$$

где $x = v \sqrt{\frac{m}{2T}} = \frac{\rho}{\sqrt{2mT}}$. Подстановка этого выражения в предыдущую формулу дает

$$N = 8\pi^2 e^4 nmLC \int_0^\infty \frac{1}{x} \left[\Phi(x) - \frac{\Phi_1(x)}{2x^2} \right] e^{-x^2} dx. \quad (18. 20)$$

Для вычисления входящих сюда интегралов найдем сначала интеграл

$$I(b) = \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x} e^{-bx^2} dx.$$

Интеграл, полученный дифференцированием подынтегрального выражения по параметру b , равномерно сходится относительно b в любом интервале $a \leq x < +\infty$, где $a > 0$. Поэтому

$$\frac{dI}{db} = - \int_0^\infty x\Phi(x) e^{-bx^2} dx = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x e^{-bx^2} dx \int_0^x e^{-y^2} dy.$$

Меняя порядок интегрирования, найдем

$$\frac{dI}{db} = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy \int_y^\infty x e^{-bx^2} dx = - \frac{1}{2b\sqrt{1+b}}.$$

Так как $I(\infty) = 0$, то

$$I(b) = - \int_\infty^b \frac{dx}{2x\sqrt{1+x}} = \ln \frac{\sqrt{1+b} + 1}{\sqrt{b}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(x)}{x} e^{-x^2} dx = I(1) = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Для вычисления второго интеграла в формуле (18. 20) замечаем, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \Phi(x) - x\Phi'(x), \\ \Phi'(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \end{aligned}$$

а поэтому можем написать

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi_1(x)}{2x^3} e^{-x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \int_0^{\infty} [\Phi(x) - x\Phi'(x)] \Phi'(x) d\frac{1}{x^2}.$$

Отсюда интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_1(x)}{2x^3} e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \int_0^{\infty} \frac{\Phi\Phi'' - 2x\Phi'\Phi''}{x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(x)}{x} e^{-x^2} dx + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$N = 4\pi^2 e^4 nmLC [3 \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}] \cos \vartheta_0. \quad (18. 21)$$

Исключая отсюда и из формулы (18. 17) постоянную C , получим

$$N = \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \cdot \frac{Le^4 n^2}{T^{3/2}} \cdot \frac{3 \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}}{\ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0} \cos \vartheta_0. \quad (18. 22)$$

Эта формула впервые была получена Г. И. Будкером [20] аналогичным способом, отличающимся от приведенного здесь только в вычислительном отношении.

7. Сделанное при выводе формулы (18. 22) предположение о независимости функции q от угла ϑ (изотропная инжекция) мало существенно. Чтобы убедиться в этом, допустим, что q имеет вид

$$q = q_0(\rho) \varphi(\vartheta), \quad (18. 23)$$

где $\varphi(\vartheta)$ — произвольная в широких пределах функция. Нормируем ее так, чтобы

$$\int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \cos \vartheta_0, \quad (18. 24)$$

т. е. так, чтобы этот интеграл принимал то же значение, как и при изотропной инжекции, когда $\varphi(\vartheta) = 1$.

Решение уравнения (18. 9), удовлетворяющее граничным условиям (18. 6), будет

$$F = \frac{q_0 \rho^2}{D_{\perp}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta'}{\sin \vartheta'} \int_{\vartheta'}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\vartheta'') \sin \vartheta'' d\vartheta'' \quad (18. 25)$$

С помощью известной *теоремы о среднем* интегрального исчисления это выражение можно представить в виде

$$F = \frac{q_0 \rho^2}{D_{\perp}} \varphi(\vartheta_1) \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0}, \quad (18. 26)$$

где ϑ_1 , вообще говоря, зависит от ϑ и удовлетворяет условию

$$\vartheta_0 \leq \vartheta_1 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (18. 27)$$

Теперь вместо формул (18. 11) и (18. 12) следует написать

$$\Theta(\vartheta) = C \varphi(\vartheta_1) \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0}, \quad (18. 28)$$

$$\frac{q_0 \rho^2}{D_{\perp}(\rho)} = C e^{-\frac{\rho^2}{2mT}}. \quad (18. 29)$$

Выражение (18. 21) для N , в силу условия нормировки (18. 24), останется без изменения. Все различие сводится к вычислению нормировочного интеграла (18. 14). Вместо прежнего интеграла

$$\int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} d\vartheta$$

надо вычислить интеграл

$$\int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\vartheta_1) \sin \vartheta \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} d\vartheta.$$

Но этот интеграл по теореме о среднем может быть представлен в виде

$$\bar{\varphi} \int_{\vartheta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \ln \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} d\vartheta,$$

где $\bar{\varphi}$ — значение функции $\varphi(\vartheta)$ при каком-то промежуточном значении аргумента между ϑ_0 и $\frac{\pi}{2}$. Это значение появится в качестве множителя в левой части соотношения (18. 17). Поэтому

вместо формулы (18. 22) получится мало отличающаяся от не формула

$$N = \sqrt{\frac{2\pi}{m} \frac{Le^4 n^2}{T^{3/2}}} \cdot \frac{3 \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}}{\bar{\varphi} \left[\ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0 \right]} \cos \vartheta_0. \quad (18. 30)$$

8. Г. И. Будкер [20] разобрал также случай инжекции частиц перпендикулярно к оси ловушки. В этом случае функция $\varphi(\vartheta)$ имеет вид

$$\varphi(\vartheta) = \cos \vartheta_0 \delta \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (18. 31)$$

и формула (18. 25) дает

$$F = \frac{q_0 \rho^2}{D_{\perp}} \cos \vartheta_0 \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}}. \quad (18. 32)$$

С помощью этой формулы находим

$$N = \sqrt{\frac{2\pi}{m} \frac{Le^4 n^2}{T^{3/2}}} \cdot \frac{3 \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}}{\ln \frac{1}{\sin \vartheta_0}} \cos \vartheta_0. \quad (18. 33)$$

Как следует из легко доказываемого неравенства

$$\ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0 < \ln \frac{1}{\sin \vartheta_0},$$

формула (18. 33) при одних и тех же значениях параметров n , T и ϑ_0 дает меньшее значение для N , чем формула (18. 22). Это и понятно, так как в случае инжекции частиц перпендикулярно к магнитному полю они должны изменить направление своего движения на угол не менее $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$, чтобы начать выходить из ловушки.

9. Время $\tau_{\text{уд}}$, в течение которого из единицы объема ловушки уходят n частиц, определяется выражением

$$\tau_{\text{уд}} = \frac{n}{N}. \quad (18. 34)$$

В стационарном состоянии на место ушедших частиц источник инжектирует в ловушку такое же число новых частиц. Если бы источника не было, то за время, определяемое формулой (18. 34), не все частицы успели бы уйти из ловушки. Однако и в этом случае время $\tau_{\text{уд}}$ определяло бы по порядку величины тот промежуток времени, в течение которого из ловушки уходит основная доля частиц. Поэтому величину $\tau_{\text{уд}}$ можно назвать *средним временем удержания частицы в ловушке*.

При изотропной инжекции время $\tau_{уд}$ можно найти, если в формулу (18. 34) подставить вместо N выражение (18. 22). Объединив при этом все численные множители, мы придем к следующей формуле:

$$\tau_{уд} = 1,57 \cdot \frac{\ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_0}{2} - \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0} \bar{\tau}_i, \quad (18. 35)$$

где $\bar{\tau}_i$ — среднее ионное время релаксации, определяемое выражением (12. 10).

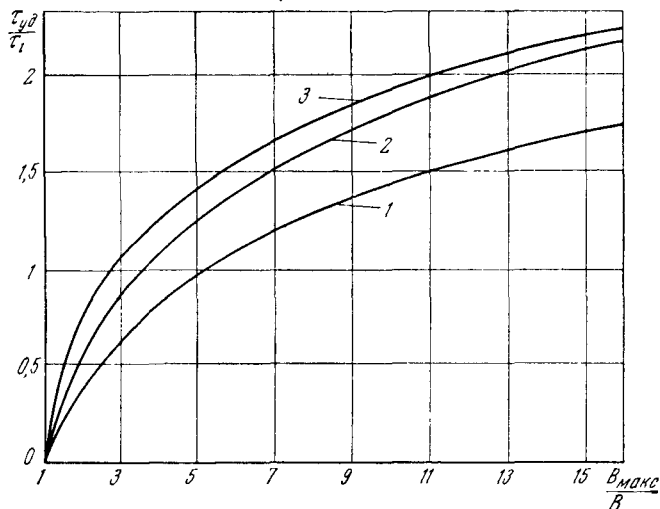


Рис. 11.

Аналогично, при инжекции перпендикулярно к магнитному полю находим из формулы (18. 33)

$$\tau_{уд} = 1,57 \cdot \frac{\ln \frac{1}{\sin \vartheta_0} - \cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_0} \bar{\tau}_i. \quad (18. 36)$$

Графики этих функций представлены на рис. 11 [кривая 1 соответствует формуле (18. 35), кривая 2 — (18. 37), кривая 3 — (18. 36)], причем на оси абсцисс отложено *пробочное отношение* $\frac{B_{макс}}{B}$, связанное с предельным углом ϑ_0 соотношением (18. 1).

10. По поводу выведенных выражений для N и $\tau_{уд}$ следует заметить, что они могут быть приближенно верными лишь при *малых углах* ϑ_0 , т. е. при *больших значениях пробочного отношения* $\frac{B_{макс}}{B}$. В самом деле, если угол ϑ_0 очень мал, то функция распределения $F(\vartheta, \rho)$, как видно из формул (18. 10), (18. 26) и (18. 32), будет очень мало отличаться от изотропной за исключе-

нием, разумеется, области внутри предельного конуса и его малой окрестности. Но, как нетрудно убедиться, подинтегральные выражения в формулах (15. 5) и (15. 8) всюду конечны, а потому вклад, вносимый этой областью и ее окрестностью в тензор $D_{\alpha\beta}$ и вектор A_α , мал. Следовательно, истинные значения $D_{\alpha\beta}$ и A_α будут мало отличаться от максвелловских выражений, использованных при выводе.

Кроме того, при выводе всех выражений для N и $\tau_{уд}$ мы пользовались уравнением Ландау, а следовательно, пренебрегали влиянием близких столкновений. Однако легко видеть, что при малых углах ϑ_0 вклад, вносимый близкими столкновениями в поток N , пренебрежимо мал по сравнению с тем, что дают далекие столкновения. В самом деле, при близких столкновениях частицы рассеиваются на большие углы. Поэтому поток частиц, уходящих через предельный конус, обусловленный близкими столкновениями, приблизительно пропорционален телесному углу при вершине этого конуса $\Omega = 2\pi (1 - \cos \vartheta_0) = 4\pi \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \approx \pi\vartheta_0^2$, т. е. квадрату угла ϑ_0 . Если угол ϑ_0 мал, то этот поток становится пренебрежимо малым по сравнению с потоком частиц, уходящих вследствие далеких столкновений. Действительно, при малых ϑ_0 последний поток, как следует из выражений (18. 22) и (18. 33), пропорционален $\frac{1}{\ln \frac{1}{\vartheta_0}}$. Отношение первого потока

ко второму пропорционально $\vartheta^2 \ln \frac{1}{\vartheta_0}$ и стремится к нулю при $\vartheta_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, формулы (18. 35) и (18. 36) могут считаться обоснованными лишь при малых углах ϑ_0 , т. е. при больших значениях пробочного отношения $\frac{B_{\max}}{B}$. При малых ϑ_0 можно положить $\cos \vartheta_0 = 1$, после чего формула (18. 36) перейдет в

$$\tau_{уд} = 0,785 \bar{\tau}_i \ln \frac{B_{\max}}{B}, \quad (18. 37)$$

формула же (18. 35) при тех же предположениях перейдет в

$$\tau_{уд} = 0,785 \bar{\tau}_i \ln \frac{B_{\max}}{B} - \frac{1}{2} \bar{\tau}_i,$$

что практически не отличается от формулы (18. 37).

График функции (18. 37) представлен на рис. 11 кривой 2. Она дает правильное асимптотическое выражение для времени удержания при больших значениях пробочного отношения $\frac{B_{\max}}{B}$. Однако, пользуясь этой формулой, мы получаем также правильное значение для $\tau_{уд}$ в другом предельном случае, когда $\frac{B_{\max}}{B} = 1$. Действительно, из физических соображений, ясно, что в этом

предельном случае ловушка совсем не будет удерживать частицы, т. е. должно быть $\tau_{уд} = 0$. Но мы получим то же значение для $\tau_{уд}$, если в формуле (18. 37) положим $\frac{B_{\max}}{B} = 1$. Поэтому формулой (18. 37) можно пользоваться не только при больших, но и при любых значениях пробочного отношения, рассматривая эту формулу как *разумную экстраполяцию*.

11. Диффузионный механизм ухода частиц внутрь предельного конуса приводит таким образом к очень слабой (приблизительно логарифмической) зависимости времени удержания $\tau_{уд}$ от пробочного отношения $\frac{B_{\max}}{B}$. *Время удержания мало чувствительно к изменениям пробочного отношения*. По этой причине нецелесообразно строить ловушки с очень большими значениями пробочного отношения. Это же обстоятельство, по-видимому, делает ловушку с магнитными пробками как термоядерный реактор будущего бесперспективной, даже если бы удалось подавить различного рода неустойчивости, развивающиеся в такой ловушке.

В самом деле, для работы ловушки как термоядерного реактора необходимо, чтобы время удержания $\tau_{уд}$ было не меньше среднего времени τ_p , которое проводит ион до вступления в реакцию с другим ионом

$$\tau_{уд} > \tau_p. \quad (18. 38)$$

Для времени τ_p можно написать

$$\tau_p = \frac{1}{n \langle \sigma u \rangle}, \quad (18. 39)$$

где $\langle \sigma u \rangle$ — соответствующим образом усредненное произведение сечения реакции σ и относительной скорости u , которое для любой реакции при максвелловском распределении скоростей является функцией *только температуры*. Что касается времени $\tau_{уд}$, то, согласно формуле (18. 37), его можно отождествить со средним ионным временем релаксации $\bar{\tau}_i$ (этому предположению соответствует пробочное отношение $\frac{B_{\max}}{B} \approx 3,5$). В этом предположении из формул (12. 10), (18. 38) и (18. 39) получаем для реакции dd

$$T_i > 2,7 \cdot 10^{-17} \left[\frac{L}{\langle \sigma u \rangle} \right]^{2/3} \quad (18. 40)$$

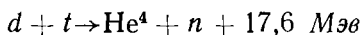
(все величины в системе СГС). Значения величины $\langle \sigma u \rangle$ для различных температур при максвелловском распределении скоростей приведены в работе Томпсона [22]. Максимальная температура в его расчетах составляет 10^9 °К. При этой температуре для реакции dd имеем $\langle \sigma u \rangle = 5 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$. Если воспользоваться этим значением и принять $L = 20$, то из неравенства (18. 40) получим

$$T_i > 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} = 9,15 \text{ Мэв} = 1,06 \cdot 10^{11} \text{ °К.}$$

То обстоятельство, что температура T_i получилась выше исходной температуры (10^9 °К) указывает на то, что мы воспользовались заведомо неправильным значением для $\langle \sigma v \rangle$. Однако это не может иметь существенного значения, во-первых, потому, что величина $\langle \sigma v \rangle$ при дальнейшем повышении температуры растет медленно. Во-вторых, при немаксвелловском распределении скоростей реагирующих ионов (а таким оно будет в термоядерном реакторе) величина $\langle \sigma v \rangle$ меньше, чем при максвелловском [18]. Для реакции td величина $\langle \sigma v \rangle$ на порядок больше. Но это опять не может иметь существенного значения, так как в реакторе, работающем на смеси трития и дейтерия, выход ионов из ловушки обусловлен столкновениями между любыми ионами плазмы, тогда как ядерные реакции происходят лишь при столкновениях ионов трития с ионами дейтерия.

Напомним, что в реакции dd заряженные продукты реакции — p , t и He^3 — имеют кинетические энергии, равные соответственно 3, 1 и 0,81 Мэв.

В реакции



получаются α -частицы с энергией около 3,5 Мэв. Таким образом, мы приходим к следующему заключению. *Чтобы адиабатическая ловушка с магнитными пробками могла служить термоядерным реактором с положительным энергетическим выходом, необходимо нагреть находящуюся в ней плазму до такой температуры, при которой средняя кинетическая энергия каждого иона не меньше той энергии (приходящейся на одну заряженную частицу), которая выделяется при указанных ядерных реакциях. Трудно представить, как при этих условиях можно нагревать плазму за счет происходящих в ней ядерных процессов, т. е. осуществить самоподдерживающуюся термоядерную реакцию.*

§ 19. О природе и устранении расходимостей в теории парных столкновений

1. Все результаты предыдущих параграфов получены в приближении *парных столкновений*. Это приближение, как мы видели, приводит к *расходящимся интегралам*, и расходимость устраняется *искусственным обрезанием* радиуса действия кулоновских сил. Остановимся теперь более подробно на физических предположениях, лежащих в основе теории парных столкновений, и на природе указанной расходимости.

Одним из основных предположений в теории парных столкновений является предположение о *мгновенности* акта столкновения. Как будет показано ниже, это предположение и приводит к расходимости. Поэтому, чтобы понять природу расходимости и наметить пути ее устранения, необходимо от этого предположения отказаться и принять во внимание, что взаимодействие пары

частиц есть *длительный*, а не мгновенный процесс. Это и будет сделано в настоящем параграфе.

Как было показано в § 14, задача теории сводится к вычислению средних $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$, называемых *моментами функции распределения* первого и второго порядков соответственно. Здесь Δp — изменение импульса пробной частицы, которое она испытывает за малое время τ в результате *случайных* взаимодействий с другими частицами. Слово «случайное» указывает на то, что при вычислении Δp *не должны учитываться* изменения импульса p , вызванные действием *регулярных* силовых полей. Влияние последних уже учтено членом $\frac{\partial}{\partial p_\alpha} (X_\alpha F)$ кинетического уравнения (14. 9).

При вычислении Δp ограничимся классической механикой. Из последующих рассуждений, если принять во внимание результаты § 5, будет видно, что учет квантовых свойств частиц сказывается лишь на численных значениях кулоновского логарифма, который войдет в теорию.

2. Возьмем систему отсчета, в которой плазма как целое покоится. Обозначим через E^i электрическое поле, создаваемое i -той полевой частицей в точке нахождения пробной. Полное поле, создаваемое всеми полевыми частицами в той же точке, будет равно $\sum_i E^i$, где суммирование ведется по всем полевым частицам. При наличии в плазме макроскопических зарядов регулярная слагающая, содержащаяся в сумме $\sum_i E^i$ и равная среднему значению указанной суммы, может быть отлична от нуля. Однако, не нарушая общности, можно принять, что эта регулярная слагающая равна нулю, т. е.

$$\left\langle \sum_i E^i \right\rangle = 0. \quad (19. 1)$$

В самом деле, она является составной частью *самосогласованного поля* и, как уже было указано, автоматически учитывается членом $\frac{\partial}{\partial p_\alpha} (X_\alpha F)$ кинетического уравнения (14. 9). Поэтому надо учесть только нерегулярное электрическое поле, входящее в сумму $\sum_i E^i$, т. е. такое поле, среднее значение которого равно нулю. Это поле и вызывает те случайные изменения Δp импульса пробной частицы, которыми определяются значения интересующих нас моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$.

Введем далее гипотезу, что электрические поля, создаваемые полевыми частицами в точке нахождения пробной частицы, *статистически независимы*, точнее

$$\left\langle \sum_{i \neq j} \sum E_\alpha^i(t) E_\beta^j(t') \right\rangle = 0, \quad (19. 2)$$

каковы бы ни были моменты времени t и t' , а также координатные индексы α и β . По своему характеру соотношение (19. 2) является аналогом более общей гипотезы молекулярного хаоса, широко используемой в кинетической теории газов.

3. Рассмотрим теперь движение пробной частицы за малое время τ (от момента времени t до момента $t + \tau$), в течение которого ее траектория заметно не искривляется. Первоначальное направление движения (в момент t) примем за ось z . Тогда из-за малости кривизны траектории всякое направление, перпендикулярное к оси z , может считаться приближенно перпендикулярным и к траектории пробной частицы в любой ее точке. Случайное изменение импульса пробной частицы за время τ

$$\Delta p_\alpha = \sum_i \delta p_\alpha^i,$$

где

$$\delta p_\alpha^i = e \int_0^\tau E_\alpha^i(t + t') dt'.$$

Отсюда

$$\Delta p_\alpha \Delta p_\beta = \int_0^\tau \int_0^\tau dt' dt'' \sum_i \sum_j E_\alpha^i(t + t') E_\beta^j(t + t'').$$

Усредняя эти выражения и используя соотношения (19. 2), получим

$$\langle \Delta p_\alpha \rangle = \sum_i \langle \delta p_\alpha^i \rangle, \quad (19. 3)$$

$$\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle = \sum_i \sum_j \langle \delta p_\alpha^i \delta p_\beta^j \rangle. \quad (19. 4)$$

Наша схема правильно передает характер взаимодействия пробной частицы с остальными частицами плазмы: взаимодействия перекрываются во времени, а не следуют друг за другом, как в приближении парных столкновений. Иными словами, взаимодействия являются *множественными*, а не парными. Однако соотношения (19. 3) и (19. 4) показывают, что моменты $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ при рассеянии пробной частицы на совокупности всех полевых частиц аддитивно складываются из моментов, получающихся при рассеянии на отдельных полевых частицах.

4. Тем не менее этот результат еще мало продвигает нас в решении задачи о вычислении указанных моментов, и было бы ошибочно считать, что он сводит эту задачу к задаче о взаимодействии двух частиц. Действительно, чтобы вычислить δp_α^i , надо предварительно знать *истинные траектории и скорости* как пробной, так и i -той полевой частиц. Для этого потребовалось бы решить задачу многих тел — задачу о движении всех частиц плазмы, взаимодействующих друг с другом и с внешними полями. Эта программа не выполнима. Необходимо новое вероятностное предположение, которое мы и введем.

С этой целью взаимодействия пробной частицы с каждой из полевых частиц разделим на *близкие* и *далекие*. Хотя это разделение и является условным и содержит значительный элемент неопределенности, эта неопределенность в пределах принятой нами точности расчета не влияет на окончательный результат.

При близких взаимодействиях частицы подходят друг к другу на малые расстояния, в результате чего за рассматриваемое время τ получают значительные изменения их импульсов. Поэтому во время взаимодействия пробной и одной из полевых частиц можно совсем пренебречь влиянием остальных полевых частиц, а само взаимодействие рассматривать как *мгновенное столкновение*.

При далеких взаимодействиях частицы все время находятся далеко друг от друга, и изменения их импульсов за время τ в результате взаимодействия малы. Траектории взаимодействующих частиц мало искривлены, и их форма не может существенно сказаться на результате взаимодействия. Истинные траектории взаимодействующих частиц могут быть аппроксимированы прямыми или какими-либо другими мало искривленными линиями. Поэтому далекие взаимодействия можно учесть в *приближении заданных траекторий* взаимодействующих частиц. В частности, в качестве таких траекторий можно взять траектории, которые получились бы, если бы система состояла только из двух тел — из пробной и рассматриваемой полевой частиц. При кулоновских взаимодействиях эти траектории будут гиперболами.

Таким образом, в конце концов при вычислении моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ как близкие, так и далекие взаимодействия могут быть сведены к *независимым взаимодействиям* пар частиц, т. е. таким взаимодействиям, когда каждая пара частиц во время взаимодействия рассматривается как изолированная система. Мы пришли к *приближению парных взаимодействий*¹.

5. Имеется, однако, существенная разница между этим *приближением парных взаимодействий* и тем *приближением парных столкновений*, которым мы пользовались в предыдущих параграфах. В приближении парных столкновений реальное взаимодействие двух частиц заменяется мгновенным актом столкновения и притом таким, что изменение $\delta^i p$ импульса пробной частицы в результате столкновения считается равным тому изменению,

¹ Надо иметь в виду, что метод учета случайных взаимодействий с помощью вектора Γ в кинетическом уравнении (14. 9) годится лишь для далеких взаимодействий, сопровождающихся малыми изменениями импульсов взаимодействующих частиц. Но при кулоновских силах влияние близких взаимодействий, как правило, мало по сравнению с влиянием далеких. Поэтому близкими взаимодействиями можно либо вовсе пренебречь, либо заменить их эквивалентными далекими взаимодействиями. Это можно сделать, учтя при вычислении моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ наряду с далекими также и близкие взаимодействия. Такой метод, применяемый в настоящей статье, не претендует на вполне адекватное описание действительности.

которое получается в действительности за бесконечное время взаимодействия. В более общем приближении парных взаимодействий такой замены не делается — при вычислении моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ следует пользоваться *действительными* изменениями $\delta^i p$ импульса за конечное время взаимодействия пар частиц τ и притом одно и то же для всех полевых частиц.

При близких взаимодействиях оба способа рассмотрения приводят к практически одинаковым значениям $\delta^i p$. В этом случае время τ может считаться бесконечно большим, если только момент максимального сближения взаимодействующих частиц приходится на середину временного интервала τ или лежит вблизи нее.

Совсем иную картину мы имеем при далеких взаимодействиях. Каков бы ни был промежуток времени τ , всегда можно указать достаточно удаленную полевую частицу, при рассеянии на которой изменение импульса пробной частицы за время τ будет пренебрежимо мало по сравнению с его изменением за бесконечное время взаимодействия. В этом случае первый способ рассмотрения (применяемый в приближении парных столкновений), основанный на формуле Резерфорда, не применим. Он использует завышенные значения для $\delta^i p$, что и приводит к расходящимся выражениям для моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ и связанных с ними величин. Расходимость вызывается не медленностью убывания кулоновских сил с расстоянием, как часто утверждают, а *неправильностью расчета*, в ходе которого формула Резерфорда или аналогичные ей выражения используются *вне границ их применимости*. При правильном расчете никаких расходимостей не возникает. Покажем это на примере вычисления моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$.

6. Начнем с вычисления изменения δp_\perp перпендикулярной компоненты импульса пробной частицы, вызванного ее взаимодействием с полевой частицей за время от $t = 0$ до $t = \tau$. При этом мы пользуемся системой отсчета, в которой полевая частица в момент времени $t = 0$ покоится и находится в этот момент в начале координат. Направление скорости пробной частицы в тот же момент времени принято за положительное направление оси z .

Для наших целей достаточно ограничиться далекими взаимодействиями. Поэтому вычисление можно провести в приближении заданной траектории пробной частицы m . В качестве такой траектории возьмем прямую, параллельную скорости пробной частицы в момент времени $t = 0$ и отстоящую от оси z на *прицельное расстояние* q (рис. 12). Пусть начальное значение z -координаты пробной частицы равно z_0 . Тогда в приближении заданной траектории ее координата z в любой момент времени t определится выражением $z = z_0 + ut$. Приращение p_\perp за время dt

$$dp_\perp = \frac{ee^*}{r^2} \sin \varphi dt = \frac{ee^*}{r^3} q dt = \frac{ee^* q}{(q^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \frac{dz}{u},$$

а изменение p_{\perp} за время от $t = 0$ до $t = \tau$

$$\delta p_{\perp} = \frac{ee^*q}{u} \int_{z_0}^{z_0+u\tau} \frac{dz}{(q^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\delta p_{\perp} = \frac{ee^*}{uq} \left\{ \frac{z_0 + u\tau}{\sqrt{q^2 + (z_0 + u\tau)^2}} - \frac{z_0}{\sqrt{q^2 + z_0^2}} \right\}. \quad (19.5)$$

Если в этой формуле положить $z_0 = -\infty$, $z_0 + u\tau = +\infty$, то она перейдет в

$$\delta p_{\perp} = \frac{2ee^*}{uq}.$$

Последним выражением пользуются в приближении парных столкновений.

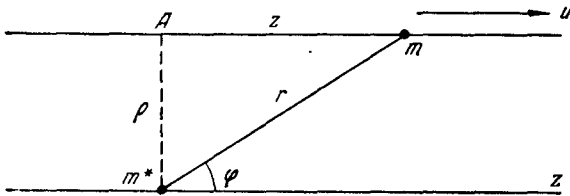


Рис. 12.

7. Перейдем теперь к вычислению моментов второго порядка $\langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle$. Сначала рассмотрим частный случай, когда все полевые частицы одинаковы и движутся с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Тогда вычисления легче всего провести в системе отсчета, где они покоятся. Это мы и сделаем. Первоначальное направление относительной скорости u пробной частицы примем за ось z прямоугольной системы координат. Из всех моментов второго порядка, в силу симметрии, отличными от нуля могут быть только $\langle \Delta p_x^2 \rangle$, $\langle \Delta p_y^2 \rangle$ и $\langle \Delta p_z^2 \rangle$. В силу той же симметрии они связаны соотношениями

$$\langle \Delta p_x^2 \rangle = \langle \Delta p_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Delta p_z^2 \rangle. \quad (19.6)$$

Поэтому вычисления $\langle \Delta p_x^2 \rangle$ и $\langle \Delta p_y^2 \rangle$ сводятся к вычислению $\langle \Delta p_z^2 \rangle$.

Величину Δp_{\perp} можно представить в виде $\Delta p_{\perp} = \Delta_1 p_{\perp} + \Delta_2 p_{\perp}$, где $\Delta_1 p_{\perp}$ — изменение перпендикулярной компоненты импульса пробной частицы, вызванное далекими, а $\Delta_2 p_{\perp}$ — близкими взаимодействиями. В силу формулы (19.4)

$$\langle \Delta p_{\perp}^2 \rangle = \langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle + \langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle. \quad (19.7)$$

8. Сначала вычислим $\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle$. Далекими будем называть взаимодействия с прицельными расстояниями ϱ , превышающими достаточно большую длину $d \gg \varrho_{\perp}$, где ϱ_{\perp} дается выражением (5. 2). Все прочие взаимодействия будем называть близкими. Расстояние d должно быть взято настолько большим, чтобы вычисление $\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle$ можно было провести в приближении заданной траектории пробной частицы, которую будем считать прямолинейной. Никаких более определенных уточнений величины d не требуется, так как она выпадет из окончательных результатов. На основании формулы (19. 4)

$$\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle = \sum_{\varrho > d} \langle \delta^i p_{\perp}^2 \rangle, \quad (19. 8)$$

где суммирование ведется по всем полевым частицам, для которых прицельное расстояние ϱ превосходит d . Выражение для $\delta^i p_{\perp}$ дается формулой (19. 5). Аппроксимируем сумму (19. 8) интегралом. Среднее число полевых частиц в элементе объема $dV = 2\pi\varrho d\varrho dz_0$ равно $n^* dV$. Поэтому сумма (19. 8) при аппроксимации интегралом переходит в

$$\begin{aligned} \langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle = \\ = \frac{2\pi n^* (ee^*)^2}{u^2} \int_d^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{z_0 + u\tau}{\sqrt{\varrho^2 + (z_0 + u\tau)^2}} - \frac{z_0}{\sqrt{\varrho^2 + z_0^2}} \right]^2 dz_0. \end{aligned} \quad (19. 9)$$

Введем новые переменные интегриации x и α по формулам

$$z_0 = \varrho x, \quad \varrho = \frac{u\tau}{\alpha}. \quad (19. 10)$$

Тогда

$$\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle = \frac{2\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \int_0^{\frac{u\tau}{d}} J(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^2}, \quad (19. 11)$$

где

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x + \alpha}{\sqrt{1 + (x + \alpha)^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right]^2 dx. \quad (19. 12)$$

Последний интеграл сводится к эллиптическому. Его нетрудно вычислить при малых и больших значениях параметра α . С этой целью введем обозначение

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Тогда подынтегральное выражение в формуле (19. 12) представится в виде $[\varphi(x + \alpha) - \varphi(x)]^2$. При малых α его можно аппроксимировать выражением $\left[\frac{d\varphi}{dx} \alpha\right]^2 = \frac{\alpha^2}{(1+x^2)^3}$. При таких α

$$J(\alpha) = \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8} \alpha^2. \quad (19. 13)$$

Получим теперь *асимптотическое выражение* для $J(\alpha)$ при больших α . С этой целью обратимся к чертежу (рис. 13). Функция

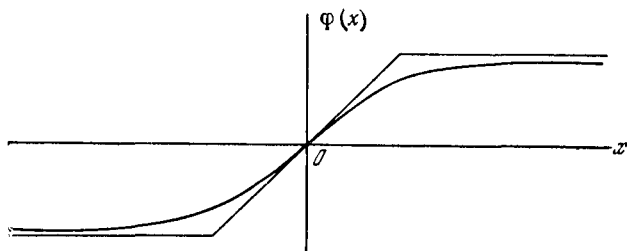


Рис. 13.

$\varphi(x)$ асимптотически стремится к $+1$ при $x \rightarrow +\infty$ и к -1 при $x \rightarrow -\infty$. При малых x ее можно аппроксимировать *линейной функцией* $\varphi(x) = x$. Если обе эти аппроксимации экстраполировать на область промежуточных значений x , то получится ломаная

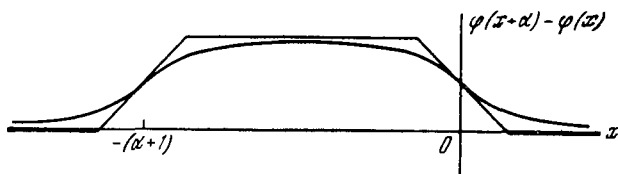


Рис. 14.

линия, изображенная на рис. 13. Этой ломаной мы и заменим кривую $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ при вычислении интеграла (19. 12). Такая замена очень мало скажется на асимптотическом значении выражения (19. 12) при больших значениях параметра α . Для иллюстрации этого на рис. 14 представлена функция $\varphi(x + \alpha) - \varphi(x)$ при $\alpha = 7$. Аппроксимирующая ее функция изображена ломаной линией. На большей части интервала $-(\alpha + 1) < x < 0$, вносящей основной вклад в интеграл (19. 12), аппроксимирующая функция, оставаясь больше истинной, мало отличается от последней (отличие становится заметным лишь вблизи краев указанного интервала). Это ведет к небольшому завышению интеграла (19. 12). Зато вне интервала $-(\alpha + 1) < x < 0$, где

подынтегральная функция в формуле (19. 12) мала, аппроксимирующая функция меньше истинной: это ведет к небольшому занижению интеграла (19. 12). В результате указанная аппроксимация приводит при больших α к асимптотическому выражению для интеграла $J(\alpha)$, точность которого вполне достаточна для наших целей. Более того, как это ясно из последующих вычислений, аппроксимация функции $\varphi(x + \alpha) - \varphi(x)$ ломаной, изображенной на рис. 13, не может изменить порядок величины $J(\alpha)$ также при малых и промежуточных значениях α . Поэтому, чтобы иметь единое простое аналитическое выражение для функции $J(\alpha)$, мы будем пользоваться указанной аппроксимацией *при любых*, а не только при малых значениях параметра α . Происходящая от этого ошибка несущественна, поскольку нас будет интересовать интеграл (19. 11) при больших значениях верхнего предела $\frac{u\tau}{d}$.

Итак, мы аппроксимируем $\varphi(x)$ функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x \leq -1, \\ x & \text{при } -1 \leq x \leq +1, \\ +1 & \text{при } +1 \leq x \leq +\infty. \end{cases}$$

Тогда нетрудно получить

$$J(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 & \text{при } \alpha \leq 2, \\ 4\alpha - \frac{8}{3} & \text{при } \alpha \geq 2, \end{cases} \quad (19. 14)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Delta_1 \rho_{\perp}^2 \rangle = \\ & = \begin{cases} \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \left[\frac{u\tau}{2d} - \frac{1}{24} \left(\frac{u\tau}{d} \right)^2 \right] & \text{при } \frac{u\tau}{d} \leq 2, \\ \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \left[\ln \frac{u\tau}{d} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{2}{3} \frac{d}{u\tau} \right] & \text{при } \frac{u\tau}{d} \geq 2^1. \end{cases} \end{aligned} \quad (19. 15)$$

¹ Выражение (19. 14) при малых α стремится к нулю как α^2 в согласии с правильной формулой (19. 13). Однако вместо правильного коэффициента $\frac{3\pi}{8}$ получился коэффициент 2. Это расхождение можно устранить, если воспользоваться более общей аппроксимацией функции $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < -m, \\ \frac{x}{m} & \text{при } -m \leq x \leq +m, \\ +1 & \text{при } +m \leq x < +\infty, \end{cases}$$

Линейный член 4α входит в асимптотическую формулу (19. 14) с правильным коэффициентом 4. Поэтому логарифмический член $\tau \ln \frac{u\tau}{d}$ в формуле (19. 15) имеет также правильный коэффициент. Все остальные члены в формулах (19. 14) и (19. 15), строго говоря, неверны; они правильно передают лишь порядок соответствующих величин. Следовательно, правильной может считаться лишь вторая формула (19. 15) при больших значениях времени τ , когда $\ln \frac{u\tau}{d} \gg 1$. Как раз этот случай и представляет для нас наибольший интерес. Как будет видно из дальнейшего, нас более всего интересует случай, когда время τ , входящее в логарифмический множитель $\ln \frac{u\tau}{d}$, порядка периода *ленгмюровских колебаний* для электронов, а следовательно, $u\tau$ — порядка *дебаевского радиуса*. Предполагая поэтому, что $\ln \frac{u\tau}{d} \gg 1$ и имея в виду, что добавочный член $\left(\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{2}{3} \frac{d}{u\tau}\right)$ мал и вычислен не совсем правильно, мы можем отбросить этот малый член и написать

$$\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \ln \frac{u\tau}{d}. \quad (19. 16)$$

9. Перейдем теперь к вычислению $\langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle$, в том же предположении, что $\frac{u\tau}{d} \gg 1$. В этом предположении время τ можно считать практически бесконечно большим и вычислить интересующее нас среднее $\langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle$, пользуясь понятием эффектив-

где m — постоянная. Тогда вместо выражений (19. 14) и (19. 15) мы получим

$$J(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{m} \alpha^2 - \frac{1}{3m^2} \alpha^3 & \text{при } \alpha \leq 2m, \\ 4\alpha - \frac{8}{3} m & \text{при } \alpha \geq 2m, \end{cases} \quad (19. 14a)$$

$$\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle = \begin{cases} \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \left[\frac{u\tau}{2md} - \frac{1}{24} \left(\frac{u\tau}{md} \right)^2 \right] & \text{при } \frac{u\tau}{d} \leq 2m, \\ \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \left[\ln \frac{u\tau}{d} + \frac{1}{2} - \ln(2m) + \frac{2m}{3} \frac{d}{u\tau} \right] & \text{при } \frac{u\tau}{d} \geq 2m. \end{cases} \quad (19. 15a)$$

Если положить $m = \frac{16}{3\pi}$, то при $\alpha \rightarrow 0$ формула (19. 14a) перейдет в правильную формулу (19. 13). Таким путем мы получаем правильные выражения для $\langle \Delta_1 p_{\perp}^2 \rangle$ при малых и больших значениях параметра $\frac{u\tau}{d}$. Для промежуточных значений этого параметра формулы (19. 15a) можно рассматривать как экстраполяционные.

ного сечения рассеяния $\sigma(\vartheta, u)$, определяемого формулой Резерфорда (3. 5). В силу формулы (2. 4) изменение перпендикулярной компоненты импульса пробной частицы при единичном акте рассеяния определяется выражением

$$\delta p_{\perp} = \mu \delta u_{\perp} = \mu u \sin \vartheta, \quad (19. 17)$$

где ϑ — угол рассеяния. Как известно из элементарной теории кулоновского рассеяния, он связан с прицельным расстоянием q соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{q_{\perp}}{q}. \quad (19. 18)$$

Таким образом,

$$\langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle = n^* u \tau \int \delta p_{\perp}^2 \cdot \sigma(\vartheta, u) d\Omega,$$

причем интегрирование должно быть распространено на область углов рассеяния $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi$. Здесь ϑ_0 — значение угла рассеяния, которое он принимает при $q = d$. После подстановки в предыдущую формулу выражения (3. 5) получим

$$\begin{aligned} \langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle &= \frac{4\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta = \\ &= \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \left\{ -\ln \sin \frac{\vartheta_0}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right\} \end{aligned}$$

или

$$\langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \left\{ \ln \frac{\sqrt{d^2 + q_{\perp}^2}}{q_{\perp}} - \frac{d^2}{2(d^2 + q_{\perp}^2)} \right\}. \quad (19. 19)$$

Поскольку $d \gg q_{\perp}$, всеми членами, за исключением логарифма, можно пренебречь. Это тем более допустимо, что взаимодействия, сопровождающиеся большими изменениями импульсов (порядка самого импульса), все равно неправильно учитываются теорией, так как кинетическое уравнение (14. 4) выводится в предположении малости изменений импульсов при взаимодействии частиц. Итак, при условии $u\tau \gg d$

$$\langle \Delta_2 p_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \ln \frac{d}{q_{\perp}}. \quad (19. 20)$$

Складывая теперь выражения (19. 16) и (19. 20), получим в силу соотношения (19. 7)

$$\langle \Delta p_{\perp}^2 \rangle = \frac{8\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \ln \frac{u\tau}{q_{\perp}}. \quad (19. 21)$$

Неопределенная вспомогательная величина d выпала из окончательного результата, в соответствии с тем, что было сказано

выше. Формула (19. 21) впервые была получена В. И. Коганом [23] иным путем. Из нее, в силу соотношений (19. 6), получаем

$$\langle \Delta p_x^2 \rangle = \langle \Delta p_y^2 \rangle = \frac{4\pi n^* (ee^*)^2}{u} \tau \ln \frac{u\tau}{\varrho_{\perp}}. \quad (19. 22)$$

10. Перейдем теперь к вычислению моментов первого порядка Δp_{α} , а также момента $\langle \Delta p_z^2 \rangle$. В силу симметрии в выбранной нами системе координат из всех моментов первого порядка отличным от нуля может быть только $\langle \Delta p_z \rangle$. Так как

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{\mathbf{p}^*}{m^*},$$

а изменение $\delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^*$ суммарного импульса при парных взаимодействиях равно нулю, то

$$\delta \mathbf{p} = -\delta \mathbf{p}^* = \mu \delta \mathbf{u}. \quad (19. 23)$$

Обратимся к рис. 12. Приращения относительной скорости на участках заданной прямолинейной траектории, лежащих справа и слева от точки A , имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что приращения δp_z , вызываемые различными полевыми частицами, с равной вероятностью могут быть и положительными и отрицательными. Поэтому может показаться, что момент $\langle \Delta p_z \rangle = \langle \sum^* \delta p_z \rangle$ обращается в нуль. В действительности это не так. В приведенном рассуждении принято во внимание изменение вектора \mathbf{u} по величине, но не учтено его изменение по направлению. Приведенное рассуждение доказывает только, что *изменение длины вектора \mathbf{u} при вычислении момента $\langle \Delta p_z \rangle$ не играет роли*. От этого изменения длины вектора \mathbf{u} можно отвлечься; надо учесть лишь *изменения вектора \mathbf{u} по направлению*. Сделав это, можно написать

$$\mathbf{u}^2 = (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u})^2$$

или

$$2(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u}) = -(\delta \mathbf{u})^2.$$

Отсюда, в силу соотношения (19. 23),

$$2(\mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{p}) = -\frac{1}{\mu} (\delta \mathbf{p})^2.$$

Наконец,

$$\delta p_z = -\frac{(\delta \mathbf{p})^2}{2\mu u} \quad (19. 24)$$

в согласии с формулой (2. 16). Из формулы (19. 24) следует, во-первых, что величина δp_z более высокого порядка малости, чем $\delta \mathbf{p}$. Следовательно и Δp_z более высокого порядка малости по сравнению с Δp_{\perp} . Поэтому в принятом нами приближении следует считать, что

$$\langle \Delta p_z^2 \rangle = 0. \quad (19. 25)$$

Во-вторых, суммируя выражение (19. 24) по всем полевым частицам, получим

$$\langle \Delta p_z \rangle = - \frac{1}{2\mu c} \langle \Delta p_{\perp}^2 \rangle = - \frac{4\pi n^* (ee^*)^2}{\mu c^2} \tau \ln \frac{u\tau}{\varrho_{\perp}}. \quad (19. 26)$$

11. Теперь можно освободиться от использования специальной системы координат, в которой были проведены вычисления, и записать выражения для вектора $\langle \Delta p_{\alpha} \rangle$ и тензора $\langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle$ в произвольной прямоугольной системе координат. Это делается точно так же, как в § 15. В результате получим

$$\langle \Delta p_{\alpha} \rangle = - \frac{4\pi n^* (ee^*)^2}{\mu c^3} u_{\alpha} \tau \ln \frac{u\tau}{\varrho_{\perp}}, \quad (19. 27)$$

$$\langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle = 4\pi (ee^*)^2 u_{\alpha\beta} \tau \ln \frac{u\tau}{\varrho_{\perp}}, \quad (19. 28)$$

где тензор $u_{\alpha\beta}$ дается прежним выражением (15. 4).

Остается снять последнее ограничение — предположение об однотипности всех полевых частиц и об одинаковости их скоростей. С этой целью достаточно в формулах (19. 27) и (19. 28) заменить n^* на $F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*$, проинтегрировать по \mathbf{p}^* , а затем просуммировать по всем типам полевых частиц. Это дает

$$\langle \Delta p_{\alpha} \rangle = - \tau \sum^* 4\pi (ee^*)^2 \int \frac{u_{\alpha}}{\mu c^3} \ln \frac{u\tau}{\varrho_{\perp}} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*, \quad (19. 29)$$

$$\langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle = \tau \sum^* 4\pi (ee^*)^2 \int u_{\alpha\beta} \ln \frac{u\tau}{\varrho_{\perp}} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*. \quad (19. 30)$$

12. Таким образом, мы получили *конечные*, а не расходящиеся выражения для моментов $\langle \Delta p_{\alpha} \rangle$ и $\langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle$. Несмотря на это, трудности теории парных взаимодействий все еще остаются не преодоленными. Действительно, если подставить выражения (19. 29) и (19. 30) в формулы (14. 11) и (14. 12), то для коэффициента динамического трения A_{α} и тензора диффузии $D_{\alpha\beta}$ получаются выражения, явно содержащие промежуток времени τ . Этот промежуток может быть выбран каким угодно — он должен быть только не слишком мал и не слишком велик. Поэтому в выражение (14. 10) для плотности тока в импульсном пространстве I_{α} и в кинетическое уравнение (14. 10) войдет *неопределенная величина* τ , которая может принимать *какие угодно* значения, что физически бессмысленно.

В рамках приближения парных взаимодействий можно указать два способа преодоления этой трудности.

13. Во-первых, можно *искусственно обрезать* радиус действия кулоновских сил на некоторой величине D . Тогда вычисление полного момента $\langle \Delta p_{\perp}^2 \rangle$ можно произвести в точности так, как была выведена формула (19. 20). Фактически это означает, что взаимодействия заменяются мгновенными столкновениями.

В подынтегральные выражения (19. 29) и (19. 30) вместо величины ut войдет расстояние D , и никаких физически бессмысленных результатов не получается. Этот путь избирается в теории парных столкновений, излагавшейся нами в предшествующих параграфах.

14. Во-вторых, можно обойтись без этого искусственного обрезания, а рассуждать следующим образом. *Выражения (19. 29) и (19. 30) не могут оставаться справедливыми для произвольно больших значений времени τ* . Это видно уже из того, что при больших τ траектория пробной частицы отклоняется от своего исходного направления на значительные углы, вследствие чего расчет в приближении заданной траектории становится неприменимым. В действительности, благодаря *коллективным эффектам* в плазме, формулы (19. 29) и (19. 30) становятся неприменимыми значительно раньше. Как бы то ни было, существует такое конечное время τ_0 (мы назовем его *временем столкновения*), что при $\tau > \tau_0$ формулы (19. 29) и (19. 30) перестают быть справедливыми, а при $\tau = \tau_0$ их еще можно считать применимыми. Приняв это, можно дальше рассуждать так.

Пусть промежуток времени τ_0 укладывается в τ целое число (k) раз. Представим его в виде $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$, причём каждый из промежутков τ_i равен τ_0 . Обозначим через $\Delta^i p_\alpha$ изменение импульса пробной частицы за промежуток времени τ_i . Тогда

$$\Delta p_\alpha = \sum_{i=1}^k \Delta^i p_\alpha,$$

$$\Delta p_\alpha \Delta p_\beta = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Delta^i p_\alpha \Delta^j p_\beta.$$

Если время столкновения τ_0 достаточно велико, то изменения $\Delta^i p_\alpha$ и $\Delta^j p_\beta$ импульса пробной частицы за два различных промежутка времени τ_i и τ_j *статистически независимы*:

$$\langle \Delta^i p_\alpha \Delta^j p_\beta \rangle = 0.$$

Поэтому, усредняя предыдущие выражения, получим

$$\langle \Delta p_\alpha \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \Delta^i p_\alpha \rangle = k \langle \Delta^i p_\alpha \rangle = \frac{\tau}{\tau_0} \langle \Delta^i p_\alpha \rangle,$$

$$\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \Delta^i p_\alpha \Delta^i p_\beta \rangle = k \langle \Delta^i p_\alpha \Delta^i p_\beta \rangle = \frac{\tau}{\tau_0} \langle \Delta^i p_\alpha \Delta^i p_\beta \rangle.$$

Здесь принято во внимание, что моменты $\langle \Delta^i p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta^i p_\alpha \Delta^i p_\beta \rangle$ одни и те же для всех i . Значения этих моментов можно найти по формулам (19. 29) и (19. 30), если в них τ заменить на τ_0 .

В результате мы приходим к выражениям

$$\langle \Delta p_\alpha \rangle = -\tau \sum^* 4\pi (ee^*)^2 \int \frac{u_\alpha}{\mu u^3} \ln \frac{u\tau_0}{e_\perp} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*, \quad (19.31)$$

$$\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle = \tau \sum^* 4\pi (ee^*)^2 \int u_{\alpha\beta} \ln \frac{u\tau_0}{e_\perp} F^*(\mathbf{p}^*) d\mathbf{p}^*. \quad (19.32)$$

Эти выражения *не чувствительны* к времени столкновения τ_0 . При этом одно из условий их применимости состоит в том, чтобы логарифмический множитель $\ln \frac{u\tau_0}{e_\perp}$ был велик. Поэтому использованное при выводе предположение о кратности времен τ и τ_0 является несущественным и ненужным — формулы (19.31) и (19.32) остаются справедливыми и в том случае, когда это предположение не выполняется.

Формулы (19.31) и (19.32) приводят к тем же выражениям (15.5) и (15.6) для тензора диффузии и коэффициента динамического трения, которые были получены ранее с помощью обрезания радиуса действия кулоновских сил. Роль кулоновского логарифма играет величина

$$L = \ln \frac{u\tau_0}{e_\perp}. \quad (19.33)$$

Ее можно заменить некоторым средним значением и так же, как раньше, вынести из-под знака интеграла.

15. Остается только определить значение времени столкновения τ_0 . Эта задача, как и строгое обоснование самого понятия времени столкновения, может быть решена только в рамках *теории многих тел*. Однако грубая оценка времени τ_0 может быть дана без детального проникновения в эту теорию.

Если в некоторый момент времени сообщить всем электронам плазмы одно и то же смещение, то, как хорошо известно, в плазме возникнет электрическое поле, пропорциональное этому смещению. Под действием этого поля электроны плазмы начнут совершать гармонические колебания с *ленгмюровской*, или *плазменной*, частотой ω , определяемой выражением

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}. \quad (19.34)$$

Колебания с той же частотой возникнут и в том случае, если в некоторый момент времени всем электронам плазмы сообщить малые смещения в *радиальном* направлении, величина которых зависит только от расстояния r до центра O соответствующей сферы. В самом деле, пусть в некоторый момент времени плазма электрически нейтральна. Вообразим в ней некоторую сферу S с макроскопическим радиусом r и с центром в точке O (рис. 15). Электрический заряд и электрическое поле внутри этой сферы в рассматриваемый момент времени равны нулю. Пусть теперь все электроны испытывают *малые смещения* в направлении радиусов сферы (ионы можно считать бесконечно тяжелыми и неподвиж-

ными). Тогда электроны, располагавшиеся ранее на поверхности сферы S , перейдут на концентрическую с ней сферу S' с радиусом $r' = r + x$. Электрический заряд внутри сферы S уменьшится на величину $q = 4\pi r^2 ex$. В результате на поверхности сферы S возникнет электрическое поле

$$E = \frac{q}{r^2} = 4\pi ex,$$

направленное к центру сферы. Под действием этого поля электроны начнут совершать *радиальные гармонические колебания* с плазменной частотой, определяемой формулой (19. 34).

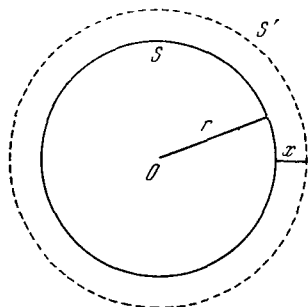


Рис. 15.

Приведенное рассуждение показывает, что при определенных видах коллективных движений, например *трансляционных и радиальных*, электроны плазмы ведут себя не как свободные, а как *квазиупругосвязанные* частицы. Но каждая полевая частица плазмы стремится вызвать как раз коллективные радиальные колебания электронов с центром в точке нахождения этой частицы. Возникающие при этом *квазиупругие силы* действуют, раз-

умеется, не только на электроны, но и на ионы плазмы. В частности воздействию их подвержена и пробная частица. Простейший способ учета коллективных эффектов в плазме заключается в том, чтобы при рассмотрении движения пробной частицы принять во внимание эти квазиупругие силы. Между тем при выводе формул (19. 29) и (19. 30) они учтены не были. Если в некоторый момент времени квазиупругая сила равна нулю, то спустя четверть периода ленгмюровских колебаний $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ она делается по величине равной кулоновской силе, с которой пробная частица действует на полевою. Вообще за время $\frac{1}{\omega}$ квазиупругая сила меняется на величину порядка кулоновской силы, поэтому можно ожидать, что формулы (19. 29) и (19. 30) справедливы для малых промежутков времени $\tau \sim \frac{1}{\omega}$. На этом основании мы определим время столкновения τ_0 формулой

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega}. \quad (19. 35)$$

Уточнение численного коэффициента, который может войти в формулу (19. 35), не имеет значения, поскольку время τ_0 входит в формулы (19. 31) и (19. 32) под знаком логарифма.

В приведенном рассуждении не принято во внимание *тепловое движение* пробной и взаимодействующей с ней полевой частиц.

Однако это не может иметь существенного значения, поскольку нас интересуют *далекие взаимодействия*, когда расстояние между взаимодействующими частицами велико по сравнению с расстоянием $u\tau_0$, проходимым пробной частицей за время τ_0 при ее движении относительно полевой частицы.

Если теперь в формуле (19. 33) скорость u заменить некоторой средней скоростью электрона, например *наивероятнейшей скоростью* его $\sqrt{\frac{2T}{m}}$, то мы получим

$$u\tau_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi n e^2}} = 2D, \quad (19. 36)$$

где D — дебаевский радиус. Поэтому средний кулоновский логарифм, вычисленный с помощью формулы (19. 33), практически не отличается от того, который был получен ранее путем обрезания радиуса действия кулоновских сил на *дебаевской длине* D . Тем самым показано, что оба метода устранения неопределенностей в выражениях для моментов $\langle \Delta p_\alpha \rangle$ и $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$, а с ними и во всех остальных формулах, приводят к одинаковым результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубников Б. А. В сб.: «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 98.
2. Rosenbluth, Mas Donald and Judd. Phys. Rev., **107**, 1 (1957).
3. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
4. Бом Д. Квантовая теория. М., Физматгиз, 1961.
5. Коган В. И. и Галицкий В. М. Сборник задач по квантовой механике. М., Гостехиздат, 1956, стр. 26.
6. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций М. — Л., Гостехиздат, 1948.
8. Spitzer L. Monthly Notices, Roy. Astron. Soc., **100**, 396 (1940).
9. Коган В. И. В кн.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», том I. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 130.
10. Landau L. D. Phys. Z. Sow., **10**, 154 (1936).
11. Ландау Л. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **7**, 103 (1937).
12. Беляев С. Т. и Будкер Г. И. «Докл. АН СССР», **107**, 807 (1956).
13. Giovanelli R. G. Phil. Mag., **40**, 206 (1949).
14. Дрейсер. К теории «убегающих» электронов. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева. 1958». Избр. докл. иностр. ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 170.
15. Dreiser H. Phys. Rev., **115**, 238 (1959); **117**, 329 (1960).
16. Гуревич А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 1296 (1960).
17. Гуревич А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1597 (1960).
18. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1963.
19. Брагинский С. И. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, стр. 183.
20. Будкер Г. И. В кн. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», том III. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3.
21. Бишоп А. С. Проект Шервуд. М., Госатомиздат, 1960.
22. Томпсон В. Б. В сб. «Управляемые термоядерные реакции». М., Госатомиздат, 1960, стр. 4.
23. Коган В. И. «Докл. АН СССР», **135**, 1374 (1960).

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПЛАЗМЫ ¹

Б. Б. Кадоцев

ВВЕДЕНИЕ

Все, кому приходилось иметь дело с плазмой, хорошо знают, что плазма в реальных условиях редко бывает спокойной — как правило, в ней самопроизвольно возбуждаются самые различные шумы и колебания. Уже Ленгмюру было известно, что эти шумы представляют собой далеко не безобидные малые колебания, а являются существенным фактором, который зачастую целиком определяет характер явления. Именно взаимодействием электронов с колебаниями объясняется обнаруженный Ленгмюром эффект «сильного» рассеяния электронов в газовом разряде [1, 2]. С подобного же рода эффектом коллективного взаимодействия частиц связан известный парадокс Ленгмюра, состоящий в том, что даже при очень низком давлении нейтрального газа распределение электронов по скоростям в тлеющем разряде с большой точностью оказывается максвелловским. Определяющая роль колебаний при взаимодействии электронного пучка с плазмой была продемонстрирована в известных работах Меррилла, Уэбба [3] и Луни, Брауна [4].

Эксперименты с плазмой в магнитном поле, в частности, эксперименты по магнитной термоизоляции высокотемпературной плазмы в связи с исследованиями по управляемым термоядерным реакциям обнаружили еще целый ряд совершенно неожиданных явлений, существенно связанных с колебаниями плазмы. Сюда относится прежде всего эффект «аномальной» диффузии плазмы поперек магнитного поля. Впервые с ним столкнулись Бом, Бароп и др. при исследовании работы ионных источников [5], а впоследствии эффект усиленной диффузии плазмы, связанный с ее неустойчивостью, был обнаружен в целом ряде экспериментальных установок.

¹ Настоящий обзор будет опубликован также в сборнике «Progress in Plasma Physics», издаваемом в Англии д-ром Дж. Адамсом.

Именно начиная с работы Бомы [5], где было высказано предположение о том, что усиленная диффузия плазмы определяется хаотическими колебаниями электрического поля, возникающими вследствие неустойчивости, в исследованиях по физике плазмы все чаще начинает употребляться термин турбулентность. В настоящее время под турбулентностью плазмы принято понимать такое ее движение, при котором возбуждено большое число коллективных степеней свободы. Таким образом, в применении к плазме термин турбулентность используется в более широком смысле, чем в обычной гидродинамике. Если гидродинамическая турбулентность представляет собой набор большого числа взаимодействующих между собой вихрей, то в плазме наряду с вихрями могут быть возбуждены различного рода квазиупругие колебания, т. е. волны. Нетрудно видеть, что в зависимости от того, какие именно возбуждены степени свободы, может существенно меняться и характер взаимодействия между возбуждениями.

При вихревом движении обычной жидкости отдельные вихри мало перемещаются в пространстве, и благодаря этому каждый отдельный вихрь успевает длительное время взаимодействовать со своими соседями. В этом случае мы имеем дело с сильным взаимодействием возбуждений и соответственно с сильной турбулентностью. Напротив, при волновом движении отдельные волновые пакеты за время своего существования успевают разойтись на большое расстояние друг от друга. В этом случае взаимодействие отдельной пары волновых пакетов между собой оказывается слабым, и можно говорить о слабой турбулентности. Движение плазмы в слабо турбулентном состоянии, представляющем собой набор слабо коррелированных волн, более сходно с движением взволнованной поверхности моря или колебаниями кристаллической решетки твердого тела, чем с турбулентным движением обычной жидкости.

Теоретическое рассмотрение слабо турбулентных состояний значительно облегчается благодаря возможности использовать теорию возмущений, т. е. провести разложение по малому отношению энергии взаимодействия между волнами к их полной энергии. Проблема нелинейного взаимодействия между волнами в плазме была выдвинута Старроком [6], который рассмотрел конкретный случай взаимодействия ленгмюровских волн в холодной однородной плазме. Для очень низкого уровня шумов, когда взаимодействием между колебаниями можно пренебречь, учет теплового движения был произведен на основе так называемого квазилинейного приближения, в котором учитывается лишь обратное влияние колебаний на усредненную функцию распределения частиц по скоростям. Квазилинейное приближение в кинетике, идея которого была высказана Ю. А. Романовым и Г. Ф. Филипповым [7], развито в работах А. А. Веденова, Е. П. Велихова и Р. З. Сагдеева [8] и Драммонда, Пайнса [9]. В настоящем обзоре изложению квазилинейного приближения посвящена гл. I.

К сожалению, квазилинейный метод имеет довольно узкую область применения, так как нелинейное взаимодействие колебаний начинает играть заметную роль уже при не очень больших амплитудах. В работе Камак и др. [10] для описания нелинейного взаимодействия альфвеновских и магнитозвуковых волн был использован регулярный метод кинетического уравнения для волн, хорошо известный в теории твердого тела [11]. Камак и др. [10] применили этот метод для описания структуры бесстолкновительной ударной волны. Более детально этот вопрос был рассмотрен в работе А. А. Галева и В. И. Карпмана [12].

В простейшем варианте в кинетическом уравнении для волн учитываются лишь трехволновые процессы, т. е. распад волн k, ω на две k', ω' и k'', ω'' и слияние двух волн в одну. Такие процессы разрешены только для так называемых распадных спектров $\omega = \omega(k)$, когда можно одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса: $k'' = k - k', \omega_{k''} = \omega_k - \omega_{k'}$. Для нераспадных спектров более существенными оказываются процессы рассеяния волн на частицах, которые могут быть учтены только на основе кинетического рассмотрения. Такое рассмотрение было проведено в работе Б. Б. Кадомцева и В. И. Петвиашвили [13], которые получили кинетическое уравнение для волн с учетом теплового движения частиц. Позднее это уравнение несколько иным методом было получено В. И. Карапманом [14]. Кинетическое уравнение для волн выводится и обсуждается в гл. II.

К сожалению, во многих практически интересных случаях приходится иметь дело не со слабой, а с сильной турбулентностью. В частности, как правило, именно с сильной турбулентностью связана аномальная диффузия плазмы в магнитном поле. Для определения спектра пульсаций в сильно турбулентной плазме и влияния этих пульсаций на усредненные величины иногда можно воспользоваться аналогией с обычной гидродинамикой и, в частности, использовать феноменологический подход к описанию турбулентного движения.

Такой подход был использован автором при рассмотрении двух конкретных задач о турбулентной диффузии плазмы в ловушке с магнитными пробками [15] и в положительном столбе тлеющего разряда [16]. При этом было использовано представление о длине перемешивания. Результаты рассмотрения находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, что показывает рациональность такого подхода.

Однако в плазме могут развиваться и такие сильно турбулентные движения, которые весьма далеки от вихревого движения обычной жидкости. Поэтому желательно использовать более регулярные методы описания сильной турбулентности. Таким методом может служить приближение слабой связи, излагаемое в гл. III. В этом приближении, которое скорее следовало бы называть приближением промежуточной связи, турбулентное движение опи-

сывается системой двух нелинейных интегральных уравнений для спектральной плотности пульсаций $I_{k\omega}$ и функции Грина $G_{k\omega}$, описывающей отклик системы на внешнюю силу. При уменьшении связи между колебаниями эта система уравнений переходит в кинетическое уравнение для волн.

В обычной гидродинамике уравнения слабой связи были получены Кречнаном [17]. Кречнан показал, что уравнения слабой связи в их простейшем варианте в области больших k приводят к спектру, отличному от спектра Колмогорова. Как показано в гл. III, § 2, это связано с тем, что в уравнениях Кречнана не учитывается адиабатический характер взаимодействия коротковолновых пульсаций с длинноволновыми. Учет адиабатичности взаимодействия позволяет получить улучшенные уравнения слабой связи.

В гл. IV рассмотрены конкретные примеры турбулентных процессов в плазме. Здесь, в частности, изложены результаты Петвиашвили относительно возбуждения ионных колебаний электронным током, но основное внимание уделяется турбулентной диффузии плазмы в магнитном поле.

Как уже упоминалось, проблема турбулентной диффузии была выдвинута Бомом [5], который высказал предположение, что неоднородная плазма в магнитном поле всегда должна быть неустойчива ввиду наличия дрейфового потока электронов относительно ионов. Если это действительно так, то соответствующая неустойчивость должна приводить к турбулентному выбросу плазмы со скоростью порядка дрейфовой. Согласно Бому, этот процесс феноменологически можно рассматривать как диффузию с коэффициентом диффузии порядка

$$D_B = \frac{10^4 T}{H},$$

где T — температура электронов, эв, H — величина магнитного поля, кгс.

Рассуждения Боба создавали иллюзию универсальности этого коэффициента, вследствие чего до сих пор не прекращаются попытки получить коэффициент Боба, исходя из самых общих соображений. Как выяснилось в последнее время, коэффициент турбулентной диффузии нельзя было найти без предварительного детального исследования неустойчивости неоднородной плазмы, в частности ее дрейфовой неустойчивости,

Исследование дрейфовой неустойчивости плазмы в магнитном поле было начато Ю. А. Церковниковым [18], который ограничился возмущениями, постоянными вдоль магнитного поля. Л. И. Рудаков и Р. З. Сагдеев [19] сделали второй шаг, рассмотрев неустойчивость на косых возмущениях с поперечной длиной волны, значительно большей среднего ларморовского радиуса ионов. Но особенно детальное исследование дрейфовой неустойчивости было проведено в самое последнее время, когда вслед за

известной работой Розенблюта, Краля и Ростокера [20] стали изучаться возмущения с поперечной длиной волны порядка среднего ларморовского радиуса ионов. Основные результаты здесь были получены А. Б. Михайловским [21]. В плотной плазме, где существенную роль играют столкновения между частицами, дрейфовая неустойчивость переходит в дрейфово-диссипативную, обнаруженную Тимофеевым [22]. В статье С. С. Моисеева и Р. З. Сагдеева [23] было отмечено, что дрейфово-диссипативная неустойчивость может приводить к диффузионной утечке плазмы с коэффициентом диффузии порядка боровского.

Основные результаты исследования дрейфовой неустойчивости плазмы излагаются в гл. IV, § 3. В § 4 рассмотрен вопрос о том, к какой диффузии приводит дрейфовая неустойчивость в тех или иных конкретных условиях. § 5 настоящего обзора посвящен описанию и краткому обсуждению различных турбулентных процессов в конкретных экспериментальных условиях; рассмотрены турбулентные процессы в тороидальных разрядах и магнитных ловушках, а также дана краткая сводка экспериментальных данных по турбулентному нагреву и диффузии плазмы.

Основное внимание мы уделяли таким процессам, которые могут быть воспроизведены в лабораторных условиях, и совершенно не касались астрофизических приложений. В частности, в настоящем обзоре отсутствует обсуждение обширной группы работ, в которых изучаются турбулентность идеально проводящей жидкости (т. е. магнитогидродинамическая турбулентность), турбулентные ударные волны и т. д.

1. КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

§ 1. Неустойчивость и турбулентность

Как правило, турбулентность развивается вследствие неустойчивости исходного ламинарного состояния. Чтобы представить себе физику перехода от ламинарного состояния к турбулентному, удобно проследить за поведением системы при изменении некоторого параметра R , при увеличении которого происходит потеря устойчивости. Для обычной жидкости таким параметром является число Рейнольдса, для плазмы в ряде случаев роль параметра R может играть напряженность магнитного поля.

Вспомним сначала, что происходит при потере устойчивости системой с одной степенью свободы, например ламповым генератором, где роль параметра R выполняет величина обратной связи. Если обратная связь R меньше некоторого критического значения R_c , то все малые колебания являются затухающими. При $R > R_c$ состояние с нулевой амплитудой уже неустойчиво, и в генераторе возбуждаются колебания с конечной амплитудой. Другими словами, значение $R = R_c$ является точкой бифуркации (раздвоения), выше которой генератор находится в возбужденном состоянии.

При этом возможны два типа возбуждения — мягкий и жесткий. В мягком режиме амплитуда колебаний плавно изменяется в зависимости от R , обращаясь в нуль при $R = R_c$ (рис. 1). В жестком режиме амплитуда скачком возрастает до некоторой конечной величины, как только величина R превысит значение R_c , а при уменьшении R она скачком падает до нуля при $R = R_0 < R_c$ (рис. 2). В области $R_0 < R < R_c$ невозбужденный генератор устойчив по отношению к бесконечно малым возмущениям, но неустойчив по отношению к возмущениям с достаточно большой амплитудой, превышающей равновесное значение, которое изо-

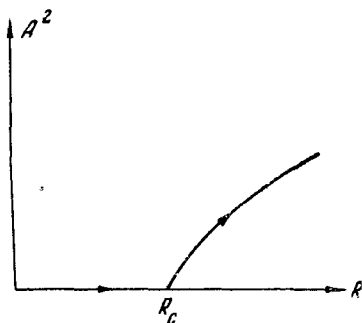


Рис. 1. Мягкое возбуждение.

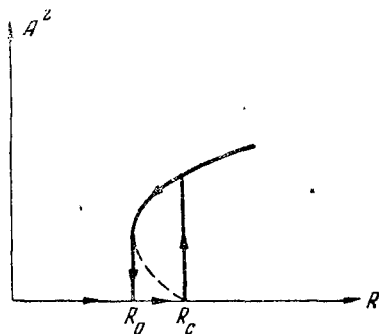


Рис. 2. Жесткое возбуждение.

бражено на рис. 2 пунктирной кривой. При малой нелинейности системы эта картина возбуждения полностью описывается с помощью широко известного метода Ван-дер-Поля, т. е. разложения по малой амплитуде колебаний.

Л. Д. Ландау [24] указал на то, что переход к турбулентности также представляет собой возбуждение системы вследствие неустойчивости. Чтобы проследить за его аргументацией, рассмотрим непрерывную среду, т. е. систему с бесконечным числом степеней свободы, и допустим, что возбуждение является мягким. Тогда при увеличении R будет наблюдаться следующая картина. При малых R мы имеем дело с ламинарным состоянием, в котором все величины полностью определяются начальными и граничными условиями, т. е. система не обладает лишними степенями свободы. При значении R выше некоторого критического значения R_1 в системе возбуждается одна из гармоник, амплитуда которой монотонно возрастает с увеличением R . Другими словами, у системы появляется дополнительная степень свободы. При дальнейшем увеличении R могут возбуждаться вторая и последующие степени свободы (рис. 3), и в конце концов развивается турбулентное движение.

При малом превышении R над R_1 амплитуду A можно найти методом разложения по $R - R_1$, аналогичным методу Ван-дер-Поля. Такой метод был применен В. С. Сорокиным [25] к задаче

о тепловой конвекции жидкости, а затем Стюарт [26] использовал его для описания вихревых ячеек в жидкости между вращающимися цилиндрами. В настоящее время этот метод получил название квазилинейного. Квазилинейный метод приводит к хорошим результатам при $R - R_1 \ll R$.

Характер поведения системы при дальнейшем увеличении R зависит от ее конкретных свойств. В ней могут возбудиться много высших гармоник, сильно взаимодействующих между собой, и в этом случае довольно быстро произойдет переход к турбулентности. В других случаях может оказаться, что первая гармоника подавит, точнее, синхронизует все высшие гармоники, и при этом разовьются колебания (нелинейные) с конечной амплитудой, т. е. дополнительные степени свободы возбуждаться не будут. Примером такой ситуации могут служить страты в положительном столбе тлеющего разряда. И, наконец, третья возможность состоит в том, что возбуждающиеся вновь волны будут слабо взаимодействовать между собой, т. е. разовьется слабо турбулентное движение. В пренебрежении взаимодействием

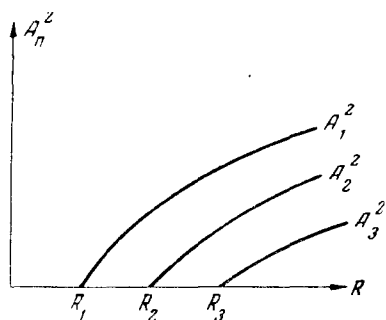


Рис. 3. Мягкое возбуждение системы со многими степенями свободы.

между волнами слабую турбулентность можно описывать с помощью квазилинейного приближения.

Ниже мы более подробно познакомимся с квазилинейным методом в применении к задачам физики плазмы.

§ 2. Ламинарная конвекция плазмы

Рассмотрим два простых примера, когда неустойчивость плазмы приводит к появлению конвекционного течения.

Конвекция слабо ионизованной плазмы в неоднородном магнитном поле

В качестве первого примера рассмотрим конвекцию слабоионизованной плазмы в азимутальном (тороидальном) магнитном поле [27]. Как известно, полностью ионизованная плазма в таком поле конвективно неустойчива: в силу своего диамагнетизма она выталкивается в радиальном направлении. Если магнитное поле достаточно велико, то аналогичной неустойчивости подвержена и слабоионизованная плазма. Выясним, что происходит с плазмой, когда магнитное поле переходит через критическое значение H_c , соответствующее появлению неустойчивости.

Предположим, что плазма находится между двумя идеально проводящими цилиндрами с радиусами R и $R + d$ соответственно

($d \ll R$), причем ионизация производится таким образом (например, с помощью накаливаемых сеток в парах цезия), что на внутреннем цилиндре поддерживается постоянная плотность n , а на внешнем $n - \delta n$, причем $\delta n \ll n$.

Будем считать, что как электроны, так и ионы «замагничены», т. е. $\Omega_j \tau_j = \frac{eH}{m_j c} \tau_j \gg 1$, где τ_j — среднее время свободного пробега, m_j — масса частицы сорта j . Тогда из уравнения движения для электронов

$$T_e \nabla n = -en \nabla \varphi - \frac{en}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] - \frac{m_e n}{\tau_e} \mathbf{v}_e \quad (I. 1)$$

найдем

$$n \mathbf{v}_e = \frac{c}{H} \left[\mathbf{h}, n \nabla \varphi + \frac{T_e}{e} \nabla n \right] - D_{\perp} \nabla n + n b_{\perp} \nabla \varphi, \quad (I. 2)$$

где $D_{\perp} = \frac{D_e}{\Omega_e^2 \tau_e^2} = \frac{T_e}{m_e \tau_e \Omega_e^2}$ — коэффициент поперечной диффузии, $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, φ — потенциал электрического поля, T_e — температура электронов, $b_{\perp} = \frac{eD_{\perp}}{T_e}$ — их поперечная подвижность. В рассматриваемом случае ($\Omega_e \tau_e \gg 1$) поперечной подвижностью электронов, т. е. последним слагаемым в выражении (I. 2) можно пренебречь.

Если подставить выражение (I. 2) в уравнение непрерывности и пренебречь при этом кривизной магнитного поля, то получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n = D_{\perp} \Delta n \equiv D_{\perp} \operatorname{div} (\nabla n), \quad (I. 3)$$

где $\mathbf{v} = \frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla \varphi]$ — дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях. С другой стороны, из ионного уравнения движения в предположении $T_i = 0$ имеем

$$\mathbf{v}_i = \frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla \varphi] - \frac{e \tau_i}{m_i (\Omega_i \tau_i)^2} \nabla \varphi. \quad (I. 4)$$

Подставим выражения для $n \mathbf{v}_e$ и $n \mathbf{v}_i$ в условие квазинейтральности $\operatorname{div} n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = 0$, пренебрегая при этом последним малым членом в выражении (I. 2). Учитывая, что $\operatorname{div} \frac{[\mathbf{h} \nabla n]}{H} = \frac{\partial n}{\partial z} \frac{1}{r} \times \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{H} \right) \cong \frac{2}{RH} \cdot \frac{\partial n}{\partial z}$, получим

$$\frac{c}{H} \operatorname{div} (n \nabla \varphi) = -\frac{2D_a}{R} \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (I. 5)$$

где $D_a = \frac{T_e \tau_i}{m_i}$ — коэффициент амбиполярной диффузии в отсутствие магнитного поля.

В равновесном состоянии $n = n(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$, следовательно, конвекционные потоки отсутствуют. Выясним, при каком значении магнитного поля такое состояние становится неустойчивым.

Так как $\frac{\delta n}{n} \ll 1$, то в левой части соотношения (1. 5) плотность n можно считать постоянной, и возмущение плотности и потенциала можно выбрать в виде $\sin \frac{\pi x}{d} \exp(ikz - i\omega t)$, где ось x направлена по r и $x = 0$ на поверхности внутреннего цилиндра. При этом линеаризованные уравнения (1. 3) и (1. 5) принимают вид

$$[-i\omega + D_{\perp} (k^2 + k_0^2)] n^{(1)} = -ik \frac{c\varphi^{(1)}}{H} \frac{dn}{dx}, \quad (1. 6)$$

$$\frac{c}{H} [k^2 + k_0^2] \varphi^{(1)} = -ik \frac{2T_e \tau_i}{m_i R n} n^{(1)}, \quad (1. 7)$$

где $k_0 = \pi/d$. Отсюда находим:

$$-i\omega = -D_{\perp} (k^2 + k_0^2) + \frac{2Da}{R} \cdot \frac{k^2}{k^2 + k_0^2} \cdot \frac{\delta n}{nd}.$$

При $\omega = 0$, т. е. $D_{\perp} = \frac{2Da}{R} \frac{k^2}{(k^2 + k_0^2)^2} \frac{\delta n}{nd}$, плазма становится неустойчивой. Максимальное значение D_{\perp} достигается при $k = k_0$:

$$D_c = D_a \frac{\delta n}{n} \frac{d}{2\pi^2 R}. \quad (1. 8)$$

Как видим, $D_c \ll D_a$. При уменьшении D_{\perp} , т. е. при увеличении магнитного поля выше критического значения H_c , которое определяется соотношением $D_{\perp} = D_c$, в плазме развивается ламинарная конвекция.

При малом превышении H над H_c величину конвекционного потока можно найти при помощи квазилинейного метода. Полный диффузионный поток определяется соотношением $q = q_0 + \delta q$, где $q_0 = -D_{\perp} \frac{dn}{dx}$, $\delta q = \langle n^{(1)} v_x^{(1)} \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по времени). Здесь в первом приближении $v_x^{(1)}$ можно выразить через $n^{(1)}$ с помощью (1. 7), а у $n^{(1)}$ можно сохранить прежнюю зависимость от x и z . Интегрируя выражение для потока по x с учетом $q = \text{const}$, получим

$$D_{\perp} \delta n + \frac{1}{2} \frac{D_a n d}{R} A^2 = qd, \quad (1. 9)$$

где A — амплитуда колебаний плотности: $\frac{n^{(1)}}{n} = A \sin \frac{\pi x}{d} e^{ikz - i\omega t}$.

Второе соотношение, связывающее между собой q и A^2 мы получим, если подставим в уравнение (1. 6) с $\omega = 0$ величину $\varphi^{(1)}$ из (1. 7), умножим его затем на $n^{(1)}$ и, представив производную от плотности в виде $\frac{dn}{dx} = -q/D_{\perp} + \frac{\langle n^{(1)} v_x^{(1)} \rangle}{D_{\perp}}$, усредним резуль-

тат по x . С помощью равенства (I. 8) полученное таким образом уравнение можно представить в виде

$$\frac{D_{\perp}^2}{D_c} \delta n + \frac{3}{4} \frac{D_{\text{and}}}{R} A^2 = qd. \quad (\text{I. 10})$$

Из соотношений (I. 9) и (I. 10) находим:

$$A^2 = \left(\frac{\delta n}{n} \right)^2 \frac{2}{\pi^2} \left(1 - \frac{D_{\perp}}{D_c} \right), \quad (\text{I. 11})$$

$$q = q_c + \frac{2\delta n D_{\perp}}{d} \left(1 - \frac{D_{\perp}}{D_c} \right). \quad (\text{I. 12})$$

Таким образом, в зависимости от магнитного поля поток q изменяется, как показано на рис. 4, т. е. начиная с $H = H_c$ поток с ростом H возрастает.

Рассмотренная картина вполне аналогична картине возникновения конвекционных ячеек при обычной тепловой конвекции между двумя параллельными пластинками, где конвекция также возникает скачкообразно. В более реальных условиях ограниченной вдоль z камеры эффект критического магнитного поля может отсутствовать, и поток q будет плавно меняться в зависимости от магнитного поля.

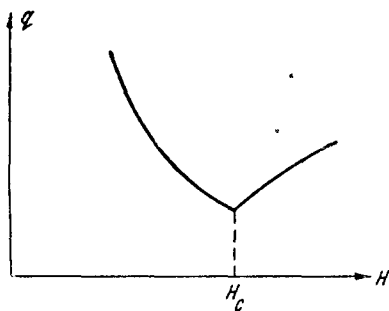


Рис. 4. Поток плазмы в зависимости от магнитного поля при возникновении конвекции.

Эффект возрастания диффузионной утечки плазмы вследствие развития конвекции наблюдался, по-видимому, Бостиком и Левиным [28], а в последнее время он был детально исследован Голантом и др. [29]. В работе [29] изучался распад плазмы в тороидальном магнитном поле. Тороидальная стеклянная камера с радиусом кривизны R (большой радиус тора) имела круглое сечение с радиусом a . Наблюдение за плотностью плазмы велось по прошествии достаточно большого промежутка времени, когда успевало установиться распределение плотности по радиусу, а ее среднее значение убывало по экспоненциальному закону $n = n_0 e^{-t/\tau}$.

Величину утечки нетрудно определить, если приближенно считать, что конвекционная скорость направлена по r , т. е. $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \cong 0$. Тогда из выражения (I. 5) получим $\mathbf{v} = \frac{2D_a}{R} \mathbf{e}$, и уравнение (I. 3) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{2D_a}{R} \mathbf{e} \nabla n = D_{\perp} \Delta n, \quad (\text{I. 13})$$

где \mathbf{e} — единичный вектор, направленный по оси x .

Если пренебречь кривизной в выражении для лапласиана, то уравнение (I. 13) можно рассматривать как уравнение диффузии в прямой цилиндрической трубке при наличии поперечного потока. Нетрудно видеть, что решение уравнения (I. 13) при условии обращения в нуль плотности на стенке дается выражением

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{v}{2D_{\perp}} x\right) J_0\left(\alpha_0 \frac{r}{a}\right), \quad (\text{I. 14})$$

где x отсчитывается от оси трубки. В выражении (I. 14) $n_0 = \text{const}$, $\alpha_0 = 2,4$ — первый корень функции Бесселя нулевого индекса J_0 , а величина постоянной распада дается соотношением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\tau_0} \left(\frac{D_{\perp}}{D_0} + \frac{D_0}{D_{\perp}} \right), \quad (\text{I. 15})$$

где

$$\tau_0 = \frac{a}{\alpha_0 v}, \quad D_0 = \frac{av}{2\alpha_0},$$

$$v = \frac{2D_a}{R}.$$

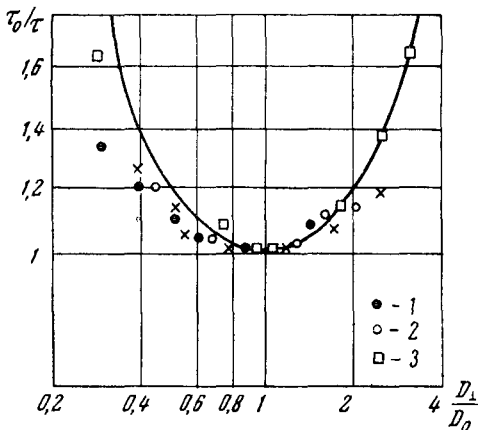


Рис. 5. Время жизни распадающейся плазмы в тороидальной трубке (газ — гелий, $R = 28$ см, $a = 0,3$ см): 1) $p = 0,025$ мм рт. ст.; 2) $p = 0,04$ мм рт. ст.; 3) $p = 0,12$ мм рт. ст.

Согласно равенству (I. 15), постоянная распада $1/\tau$ в зависимости от магнитного поля должна проходить через минимум при $D_{\perp} = D_0$. На рис. 5, взятом из работы [29], сравнивается экспериментально измеренная зависимость τ_0/τ от D_{\perp}/D_0 (где

$1/\tau_0$, D_0 — соответственно постоянная распада и коэффициент диффузии в точке минимума) с теоретической (I. 15). Как мы видим, экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией.

Конвекция плазмы положительного столба в магнитном поле

Познакомимся теперь с конвекцией плазмы в однородном магнитном поле при наличии продольного тока. Эффект возникновения конвекции слабоионизованной плазмы с током был обнаружен Ленертом [30] при исследовании диффузии заряженных частиц из положительного столба тлеющего разряда, помещенного в сильное магнитное поле. Более подробно он был исследован в работе Ленерта и Хоу [31].

В этих работах изучалась зависимость продольного электрического поля E от магнитного H . В положительном столбе уменьшение коэффициента диффузии приводит к уменьшению E , по-

этому при классической диффузии электрическое поле E должно было бы монотонно убывать при увеличении магнитного поля. Такая зависимость E от H действительно наблюдается экспериментально, но только при не очень сильном магнитном поле. Как только H превосходит критическое значение H_c , зависимость $E(H)$ резко меняется: электрическое поле начинает сравнительно быстро возрастать, затем рост несколько замедляется и поле достигает некоторого насыщения E_s (рис. 6).

Объяснение эффекта нарушения монотонной зависимости E от H дано в работе автора и Недоспасова [32], где показано, что положительный столбе тлеющего разряда теряет устойчивость при $H > H_c$. Механизм этой неустойчивости, которую принято называть токово-конвективной, легко уяснить, если рассмотреть вертикально расположенный плазменный шнур, слегка искривленный по винтовой линии. При наличии продольного электрического поля E , направленного вверх вдоль оси разряда z , электронный «штопор» искривленного шнура смещается относительно ионного вдоль оси z , вследствие чего на поверхности шнура выступают заряды: положительный на одной и отрицательный на другой стороне. Эти заряды создают азимутальное электрическое поле E_{\perp} , которое приводит к движению плазмы по радиусу, т. е. к увеличению начального возмущения. В слабом магнитном поле этот эффект подавляется диффузией. В сильном магнитном поле, когда поперечная диффузия уменьшается настолько, что не может ликвидировать возмущения плотности, рассмотренный механизм приводит к неустойчивости плазменного шнура относительно изви-

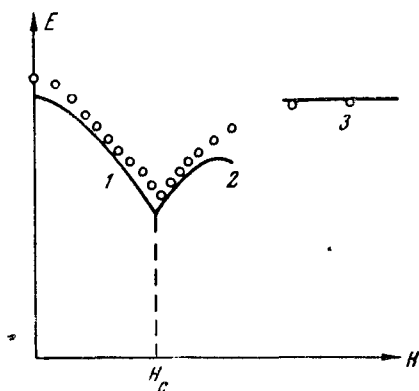


Рис. 6. Зависимость продольного электрического поля от магнитного поля в положительном столбе гелиевого разряда:

- 1 — область классической диффузии;
2 — область ламинарной конвекции (винтовой разряд);
3 — область турбулентного разряда.

Чтобы оценить величину критического поля, рассмотрим задачу об устойчивости в квазиклассическом приближении, которое является вполне точным только для коротковолновых возмущений, но качественно правильно описывает и возмущения с длиной волны порядка радиуса трубки a . В квазиклассическом приближении предполагается, что плотность плазмы является медленно меняющейся функцией координат, скажем, координаты x , а возмущение выбирается в виде плоской волны $\exp(-i\omega t + ikr)$. При давлении нейтрального газа порядка 1 мм рт. ст. неустойчивость возникает при $\Omega_i \tau_i < 1$, когда скорость ионов можно

считать равной $v_i = -b_i \nabla \varphi$. Подставляя это выражение в уравнение непрерывности, получим для возмущения плотности ионов следующее выражение:

$$\frac{n_i}{n} = -i \frac{b_i k^2}{\omega} \varphi, \quad (I. 16)$$

где φ — возмущение потенциала электрического поля.

Возмущение плотности электронов n_e можно найти из уравнения непрерывности, в котором скорость электронов v_e дается соотношением (I. 2). В квазиклассическом приближении линеаризованное уравнение непрерывности для электронов принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(-i\omega + k_z^2 D_e + k_{\perp}^2 D_{\perp} + ik_z u - ik_y \frac{cE_x}{H} \right) n_e - \\ & - \left(\frac{ik_y c}{H_n} \frac{dn}{dx} + b_e k_z^2 + b_{\perp} k_{\perp}^2 \right) \varphi = 0, \end{aligned} \quad (I. 17)$$

где b_e, D_e — продольные, а b_{\perp}, D_{\perp} — поперечные подвижность и коэффициент диффузии электронов, $u = b_e E$ — средняя (токовая) скорость электронов в продольном электрическом поле E , E_x — поперечное электрическое поле в равновесном состоянии, которое при амбиполярной диффузии равно: $E_x = -D_e b_e^{-1} (1 + y)^{-1} \frac{d \ln n}{dx}$, $y = \frac{b_i}{b_e} \Omega_e^2 \tau_e^2$. Ось z мы направили вдоль магнитного поля, а ось x — в сторону убывания плотности. Используя условие квазинейтральности $n_e = n_i$, мы можем подставить в (I. 17) вместо n_e/n выражение (I. 16), и тогда получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega = -i \frac{b_i}{b_e} \frac{k_z^2 D_e + k_{\perp}^2 D_{\perp} + ik_z u - ik_y \kappa D_e (1 + y)^{-1} (\Omega_e \tau_e)^{-1}}{b_i/b_e + (\Omega_e \tau_e)^{-2} + k_z^2/k_{\perp}^2 - ik_y \kappa / \Omega_e \tau_e k_{\perp}^2}, \quad (I. 18)$$

где $\kappa = -\frac{d \ln n}{dx}$. Согласно (I. 18) условие неустойчивости $\text{Im } \omega > 0$ может быть представлено в виде

$$\zeta^4 + (2 + y) \zeta^2 + 1 + y + \frac{\kappa^2 k_y^2}{k^4} \frac{y}{1 + y} < \frac{b_e}{b_i} y \frac{u}{D_e} \frac{k_y \kappa}{k^3} \zeta, \quad (I. 19)$$

где $\zeta = k_z \Omega_e \tau_e / k_{\perp}$.

Согласно (I. 19) неустойчивость имеет место только при наличии продольного тока, когда $u \neq 0$. Поскольку правая часть (I. 19) возрастает при уменьшении k , то в первую очередь должно развиваться возмущение с минимально возможным k , т. е. $k \sim \kappa$. Соответствующее возмущение имеет вид искривления шнура как целого. Поскольку обычно $b_e/b_i \sim 10^2 - 10^3 \gg 1$, а $u\kappa/D_e \sim 1$, то неустойчивость может возникать даже при $y < 1$. При этом $\zeta \sim 1$, т. е. $k_z \sim \kappa (\Omega_e \tau_e)^{-1} \ll \kappa$. Другими словами, продольная длина волны возмущения значительно больше радиуса трубки.

Все эти выводы качественного характера хорошо соответствуют экспериментальным данным, а более точные расчеты приводят

и к количественному согласию с экспериментом. На рис. 7, например, представлено сравнение теоретически рассчитанной зависимости H_c/p от ap (a — радиус трубки, p — давление нейтрального газа) с экспериментальными данными Ленерта и Хоу [31]. Появление винтового искривления шнура при $H > H_c$ было непосредственно продемонстрировано Алленом и др. [33] с помощью фоторазвертки. Пауликас и Пайл [34] провели детальное исследование перехода через критическое поле. На рис. 8 приведена полученная ими экспериментальная зависимость шага искривленного шнура и частоты его вращения от давления нейтрального газа для разряда в гелии. На этом же рисунке сплошными линиями представлена теоретическая зависимость. Как мы видим, согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительное.

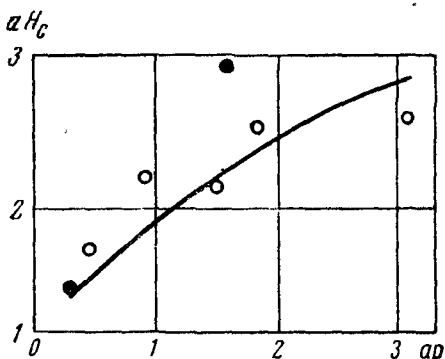


Рис. 7. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей критического магнитного поля от давления нейтрального газа для разряда в гелии.

На этом же рисунке сплошными линиями представлена теоретическая зависимость. Как мы видим, согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительное.

Извивание шнура при магнитном поле, слегка превышающем H_c , как раз и является результатом возникновения конвекции плазмы. При малых $H - H_c$ для определения величины конвекционной утечки плазмы и амплитуды извивания шнура опять можно воспользоваться квазилинейным приближением. Такой расчет, проведенный в работе [32], показывает, что поток плазмы линейно возрастает с увеличением $H - H_c$, а амплитуда искривления растет как $\sqrt{H - H_c}$. Отрезок кривой 2 на рис. 6, представляет собой теоретически рассчитанную зависимость E от H с учетом конвекционной утечки. Как мы видим, при не очень большом превышении H над H_c теоретическая зависимость хорошо согласуется с экспериментом.

Извивание шнура при магнитном поле, слегка превышающем H_c , как раз и является результатом возникновения конвекции плазмы. При малых $H - H_c$ для определения величины конвекционной утечки плазмы и амплитуды извивания шнура опять можно воспользоваться квазилинейным приближением. Такой расчет, проведенный в работе [32], показывает, что поток плазмы линейно возрастает с увеличением $H - H_c$, а амплитуда искривления растет как $\sqrt{H - H_c}$. Отрезок кривой 2 на рис. 6, представляет собой теоретически рассчитанную зависимость E от H с учетом конвекционной утечки. Как мы видим, при не очень большом превышении H над H_c теоретическая зависимость хорошо согласуется с экспериментом.

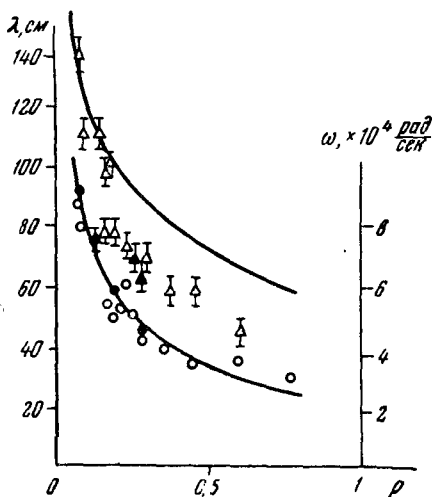


Рис. 8. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей шага винтового разряда λ и частоты вращения ω от давления нейтрального газа (разряд в гелии).

Как мы видим, при не очень большом превышении H над H_c теоретическая зависимость хорошо согласуется с экспериментом.

риментальной. При $H \gg H_c$ положительный столб переходит в турбулентное состояние, которое будет рассмотрено в гл. IV, § 4.

§ 3. Квазилинейное приближение в кинетике

Обратимся теперь к противоположному случаю бесстолкновительной плазмы. Следуя работам [7—9], мы применим сначала квазилинейный метод к задаче о возбуждении ленгмюровских колебаний электронным пучком.

Электронный пучок в плазме

Допустим, что электронная функция распределения имеет вид, представленный на рис. 9 сплошной линией. Наличие второго максимума означает, что наряду с основной группой тепловых электронов в плазме имеется размытый пучок электронов, средняя скорость которого равна v_s .

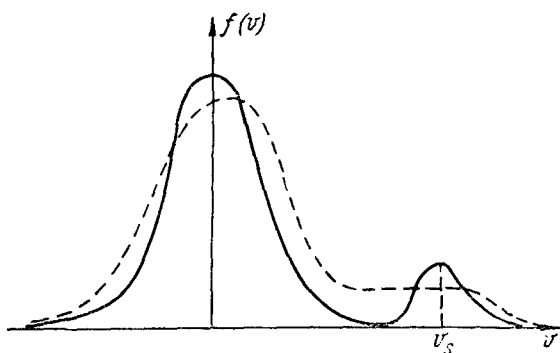


Рис. 9. Начальная (сплошная линия) и конечная (пунктирная линия) функции распределения при возбуждении ленгмюровских колебаний.

Как известно, такое распределение электронов по скорости неустойчиво: ленгмюровские волны с фазовыми скоростями, лежащими в области, где $\frac{df}{dv} > 0$, будут нарастать во времени, так как число электронов, догоняющих отдельную волну и отдающих ей свою энергию, больше числа электронов, отбирающих энергию от волны. Таким образом, благодаря механизму обратного затухания Ландау в плазме будет раскачиваться целая группа волн, фазовые скорости которых лежат в интервале, где $\frac{df}{dv} > 0$.

Если резонансных частиц мало, т. е. плотность частиц в пучке значительно меньше плотности тепловых электронов, то инкремент нарастания волн γ значительно меньше частоты ω . При $\frac{\gamma}{\omega} \ll 1$ взаимодействием волн можно пренебречь, и мы можем восполь-

зваться квазилинейным приближением, т. е. из всех нелинейных эффектов учесть лишь обратное влияние колебаний на «фон» — усредненную функцию распределения.

В одномерном случае движение электронов описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial F}{\partial v} = 0. \quad (I. 20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e \left\{ \int F dv - n_0 \right\}, \quad (I. 21)$$

где n_0 — плотность ионов, F — функция распределения электронов.

Разобьем функцию распределения на две части: $F = f + f'$, где f — средняя, медленно меняющаяся функция t , а f' — осциллирующая часть, в среднем обращающаяся в нуль. Функция f' представляет собой набор колебаний со случайно распределенными фазами:

$$f' = \int f_k e^{i\omega_k t} dk, \quad (I. 22)$$

где ω_k — собственная частота k -й волны. Для ленгмюровских колебаний $\omega_k \approx \omega_0 + i\gamma_k$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}$, $\gamma_k = \frac{\pi \omega_0^3}{2k^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\omega/k}$.

Из линеаризованного уравнения (A. 20) для f' находим связь между f_k и амплитудой электрического поля E_k :

$$f_k = \frac{e}{m} \frac{i}{\omega_k - kv} \frac{\partial f}{\partial v} E_k + A_k \delta(\omega_k - kv). \quad (I. 23)$$

Здесь второе слагаемое учитывает возможность инжекции в плазму слабомодулированных пучков. Для простоты мы предположим, что такие пучки отсутствуют, т. е. $A_k = 0$.

Уравнение для усредненной функции f мы получим, подставляя в уравнение (I. 20) вместо f_k выражение (I. 23) и производя затем усреднение по статистическому ансамблю, т. е. по случайным фазам. Учитывая, что $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $E_k^* = E_{-k}$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D_v \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad (I. 24)$$

где

$$D_v = \frac{e^2}{m^2} \int \frac{\gamma_k E_k^2(t)}{(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2} dk. \quad (I. 25)$$

Здесь в $E_k^2(t)$ учтена зависимость амплитуды колебаний от времени, которая при постоянной функции f была бы просто экспоненциальной ($E_k^2 \sim e^{2\gamma_k t}$), а при слабой зависимости f от времени она определяется соотношением

$$\frac{dE_k^2}{dt} = 2\gamma_k E_k^2. \quad (I. 26)$$

Уравнения (I. 24) и (I. 26) как раз и представляют собой основные уравнения квазилинейной кинетики.

Проследим теперь с помощью этих уравнений за развитием неустойчивых колебаний плазмы. Рассмотрим сначала группу резонансных электронов. Поскольку $\gamma \ll \omega$, то для этой группы частиц коэффициент диффузии в пространстве скоростей D_v с достаточной степенью точности можно записать в виде

$$D_v = \frac{\pi e^2}{n^2} \int \delta(\omega_k - kv) E_k^2 dk. \quad (I. 27)$$

Этот коэффициент диффузии отличен от нуля только в области скоростей, где $\gamma > 0$, т. е. $\frac{df}{dv} > 0$. Вследствие диффузии функция распределения будет сглаживаться в этой области до тех пор; пока инкремент не обратится в нуль, т. е. пока на функции распределения не образуется «плато». К этому времени в плазме устанавливается стационарный спектр надтепловых колебаний. Чтобы определить этот спектр, учтем, что из уравнений (I. 24), (I. 26), (I. 27) и соотношения $\gamma_k = \frac{\pi \omega_0^3}{2nk^2} \frac{\partial f}{\partial v}$ вытекает следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ f + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e^2 n_0}{m^2 \omega_0 v^3} E_v^2 \right) \right\} = 0,$$

откуда получаем

$$f + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e^2 n_0}{m^2 \omega_0 v^3} E_v^2 \right) = \text{const.}$$

Здесь вместо k мы ввели переменную $v = \omega_0/k$.

Из соотношения (I. 28) находим амплитуду установившихся колебаний

$$E_v^2(t = \infty) = \frac{m^2 \omega_0}{e^2 n_0} v^3 \int_{v_1}^v \{f(t = \infty) - f(t = 0)\} dv, \quad (I. 28)$$

где $f(t = \infty) = \text{const}$. В соотношении (I. 28) величина v_1 представляет собой нижнюю границу интервала скоростей, где устанавливается плато. Она должна быть определена из условия сохранения полного числа резонансных частиц: $\int f dv = \text{const}$.

Рассмотрим теперь, что происходит с нерезонансными тепловыми электронами. Для таких электронов $(\omega - kv)^2 \gg \gamma^2$, и, следовательно, соответствующий коэффициент диффузии, грубо говоря, в ω/γ раз меньше, чем коэффициент диффузии для резонансных частиц. Но поскольку тепловых электронов как раз в ω/γ раз больше, чем резонансных, то пренебречь их диффузией нельзя. Соответствующий коэффициент диффузии согласно (I. 25) можно приближенно представить в виде

$$D_v = \frac{e^2}{m^2} \int \frac{\gamma_k E_k^2}{(\omega - kv)^2} dk. \quad (I. 29)$$

Поскольку коэффициент диффузии нерезонансных частиц мал, то в этой области в правую часть уравнения (I. 24) вместо f можно подставить $f(t=0)$. Учитывая соотношение (I. 26), нетрудно проинтегрировать формулу (I. 24) по времени и получить следующее выражение для величины изменения функции распределения тепловых (нерезонансных) электронов

$$f(t=\infty) - f(t=0) = \frac{e^2}{2m^2} \int E_k^2(t=\infty) \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{(\omega - kv)^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right] dk.$$

Таким образом, полной функции распределения при $t = \infty$ будет соответствовать пунктирная кривая на рис. 9. При этом весь импульс и половина энергии, потерянные пучком при взаимодействии с колебаниями, передаются тепловым электронам, что и приводит к искажению их функции распределения (вторая половина потерянной пучком энергии запасается в электрическом поле).

Покажем, например, что полный импульс пучка и плазмы сохраняется. Умножая уравнение (I. 24) на mv и интегрируя результат по v , получим после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int mvf dv = & - \frac{\pi e^2}{m} \int \delta(\omega_0 - kv) E_k^2 \frac{df}{dv} dk dv - \\ & - \frac{e^2}{m} \int \frac{\gamma k}{(\omega_0 - kv)^2} \frac{\partial f}{\partial v} E_k^2 dk dv, \end{aligned}$$

где во втором интеграле интегрирование проводится по области тепловых электронов $|v| \sim v_e = \sqrt{\frac{2T_e}{m}}$.

Учитывая, что в этой области $(\omega_0 - kv)^{-2} \approx \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{2kv}{\omega_0^3}$, проводим интегрирование по v и, подставляя затем вместо γk его выражение через производную от функции распределения резонансных частиц, убеждаемся, что интегралы в правой части этого выражения в точности компенсируются. Это и означает, что полный импульс сохраняется.

Волны в плазме

В общем случае задача описания слаботурбулентного состояния в квазилинейном приближении распадается на две: определение волнового поля и учет обратного влияния волн на частицы. Рассмотрим более подробно первую из этих задач. Так как в реальных условиях плазма практически всегда неоднородна, то мы должны выяснить, как распространяются волны в неоднородной плазме. Поскольку мы имеем в виду турбулентную плазму, в которой возбуждено большое число волн, то для основной части колебаний длина волны должна быть значительно меньше характерных размеров, и, следовательно, неоднородность можно считать слабой.

Напомним, что в однородной неограниченной плазме все собственные колебания представляют собой плоские волны вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Уравнения Максвелла для таких колебаний имеют вид

$$[\mathbf{k}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}] + \frac{\omega}{c} \hat{\epsilon} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 0, \quad (I. 30)$$

$$[\mathbf{k}E_{\mathbf{k}0}] - \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = 0, \quad (I. 31)$$

где $\hat{\epsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Выражая \mathbf{H} через \mathbf{E} с помощью (I. 31), мы получим одно векторное уравнение для \mathbf{E} , которое в проекциях на оси координат записывается в виде

$$\sum_{\beta} \left(k^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} \right) E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (I. 32)$$

Отсюда следует, что частота ω собственных колебаний должна удовлетворять дисперсионному уравнению

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \text{Det} \| k^2 \delta_{\alpha\beta} - \omega^2 c^{-2} \epsilon_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} \| = 0. \quad (I. 33)$$

В общем случае собственные частоты являются комплексными. С точки зрения квазилинейного приближения нас интересует более частный случай, когда мнимая часть частоты мала по сравнению с действительной и обусловлена взаимодействием волны с резонансными частицами. При этом инкремент нарастания волн определяется антиэрмитовой частью диэлектрической проницаемости $i\epsilon''_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*}{2}$, малой по сравнению с эрмитовой

$$\epsilon'_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}^*}{2}.$$

В пренебрежении $\epsilon''_{\alpha\beta}$ собственные функции представляют собой плоские волны с постоянной амплитудой. Если эти волны однородно распределены в пространстве и статистически независимы, то корреляционная функция для электрического поля будет иметь вид

$$\langle E_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \sum_i a_{\alpha}^i a_{\beta}^{i*} I_i(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \\ \times \delta(\omega - \omega') \delta(\omega - \omega'_{\mathbf{k}}), \quad (I. 34)$$

где суммирование проводится по всем собственным частотам $\omega_{\mathbf{k}}^i$, принадлежащим данному волновому вектору \mathbf{k} ; a_i — единичный вектор поляризации (вообще говоря, комплексный), определяемый соотношением $\mathbf{E} = aE$; $I(\mathbf{k})$ — спектральная функция электрического поля.

При наличии магнитного поля одному и тому же значению \mathbf{k} соответствуют, вообще говоря, несколько различных собственных

частот. В этом случае все волны можно считать некоррелированными в отличие от обычной оптики, где необходимо учитывать корреляцию поляризаций, и для полного описания двух поперечных колебаний приходится вводить четыре параметра Стокса.

С учетом малой антиэрмитовской части $\epsilon''_{\alpha\beta}$ амплитуда колебаний изменяется со временем, и корреляционная функция не будет пропорциональна $\delta(\omega - \omega')$. Но если мы имеем дело с большим числом волн в широком интервале частот, то приближенно и в этом случае можно пользоваться соотношением (I. 34), в котором лишь под $I(\mathbf{k})$ следует подразумевать медленно меняющуюся функцию времени. Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\begin{aligned}
 & -i(\omega - \omega') \langle E_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \\
 & = \sum_i \frac{\partial}{\partial t} (a_{\alpha}^i a_{\beta}^{i*} I_i(\mathbf{k}, t)) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \delta(\omega - \omega_k^i). \quad (\text{I. 35})
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что наличие зависимости I от времени соответствует «уширению» δ -функции от $\omega - \omega'$ в выражении для корреляционной функции.

К аналогичному уширению функции $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ должна приводить неоднородность поля в пространстве, которую приближенно можно учесть слабой зависимостью I от \mathbf{r} . При этом имеем $i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \nabla$.

Приближенная запись корреляционной функции в виде (I. 34) соответствует представлению электрического поля колебаний в виде набора волновых пакетов, статистически не зависящих друг от друга. Если характерная длина волны колебаний значительно меньше размеров этих пакетов, то для ограниченных промежутков времени мы можем пренебречь их расплыванием. Чтобы получить уравнение, описывающее поведение таких пакетов, воспользуемся усреднением, а именно, умножим уравнение (I. 30) на $\mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'}$, а уравнение (I. 31) на $\mathbf{H}_{\mathbf{k}'\omega'}$, вычтем одно из другого и затем антисимметризуем полученное соотношение, т. е. вычтем из него аналогичное комплексно сопряженное соотношение с переставленными \mathbf{k}, ω и \mathbf{k}', ω' . В полученном таким образом соотношении величину $\epsilon'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) - \epsilon'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}', \omega')$ можно разложить по малым разностям $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ и $\omega - \omega'$, а затем заменить $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ и $\omega - \omega'$ соответственно на $-i\nabla$ и $i \frac{\partial}{\partial t}$. Аналогичная замена должна быть произведена и в других слагаемых, где появляются соответствующие разности. Нетрудно проверить, что для однородной плазмы мы получим таким образом следующее уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = - \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}^* \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \rangle, \quad (\text{I. 36})$$

где \mathcal{E} — энергия k -й волны, равная

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \omega \mathbf{E}^* \hat{\varepsilon}' \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{H}^* \mathbf{H} \rangle = \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \langle \omega \mathbf{E}^* \hat{\varepsilon}' \mathbf{E} \rangle - \frac{c^2 k^2}{\omega} \langle \mathbf{E}^* \mathbf{E} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2}{\omega} \langle (\mathbf{kE}^*) (\mathbf{kE}) \rangle \right\},\end{aligned}\quad (\text{I. 37})$$

а \mathbf{S} — поток энергии:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left\{ \langle \omega \mathbf{E}^* \varepsilon' \mathbf{E} \rangle - \frac{c^2 k^2}{\omega} \langle \mathbf{E}^* \mathbf{E} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2}{\omega} \langle (\mathbf{kE}^*) (\mathbf{kE}) \rangle \right\}.\end{aligned}\quad (\text{I. 38})$$

Здесь ε' — эрмитовская часть тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. В выражениях для \mathcal{E} и \mathbf{S} дифференцирование по ω и \mathbf{k} в силу равенства (I. 32) можно производить при постоянных \mathbf{E}^* , \mathbf{E} .

Если умножить уравнение (I. 32) на E_α и просуммировать результат по α , то получим

$$G = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}^* \hat{\varepsilon} \mathbf{E} - \mathbf{k}^2 \mathbf{E}^* \mathbf{E} + (\mathbf{kE}^*) (\mathbf{kE}) = 0. \quad (\text{I. 39})$$

Как мы видим, \mathcal{E} и \mathbf{S} выражаются через производные от среднего значения функции G , которое равно

$$\langle G \rangle = \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} (\mathbf{a}^* \hat{\varepsilon} \mathbf{a}) - k^2 + |\mathbf{ka}|^2 \right\} I = D_1 I. \quad (\text{I. 40})$$

Величина D_1 как функция от ω обращается в нуль одновременно с D [см. формулу (I. 33)], поэтому в точке $\omega = \omega_k$ их можно считать пропорциональными друг другу. Отсюда получаем

$$\gamma_k = -\frac{\text{Im} D_1}{\frac{\partial D_1}{\partial \omega}}, \quad \mathbf{U}_k = \frac{d\omega_k}{d\mathbf{k}} = -\frac{\partial D_1}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{\partial D_1}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad (\text{I. 41})$$

где γ_k — инкремент нарастания k -й волны, \mathbf{U}_k — ее групповая скорость. Пользуясь этими соотношениями, приводим уравнение баланса энергии (I. 36) к более простому виду:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} + \mathbf{U}_k \frac{\partial I_k}{\partial \mathbf{r}} = 2\gamma_k I_k. \quad (\text{I. 42})$$

Рассмотрим теперь неоднородную плазму. Неоднородность приводит к нескольким дополнительным особенностям. Прежде всего, в тензоре $\varepsilon_{\alpha\beta}$ появляются малые добавки, пропорциональные градиентам от средних функций распределения для электронов и ионов. При наличии магнитного поля эти добавки учитывают дрейфовые токи. Кроме того, проницаемость $\varepsilon_{\alpha\beta}$ становится медленно меняющейся функцией координат, поэтому в выражении для детерминанта $D(\mathbf{k}, \omega)$, которое можно было бы получить,

выражая все компоненты $\mathbf{H}_{k\omega}$ и $\mathbf{E}_{k\omega}$ через одну, следует производить дифференцирование $\varepsilon_{\alpha\beta}$ по \mathbf{r} в тех случаях, когда $\varepsilon_{\alpha\beta}$ умножается на $\mathbf{k} = -i\nabla$. Допустим, что все эти поправки учтены. Для соответствующего детерминанта мы сохраним прежнее обозначение $D(\mathbf{k}, \omega)$.

Но, кроме этого, мы должны учесть еще одну особенность в распространении волновых пакетов в неоднородной плазме, связанную с тем, что неоднородность приводит к корреляции волн с близкими волновыми векторами. Действительно, в однородной плазме компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в координатном представлении зависят только от разности координат точки наблюдения \mathbf{r} , где вычисляется ток, и точки источника \mathbf{r}' , поле в которой возбуждает ток. Поэтому в \mathbf{k} -представлении компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$ являются просто числами.

В слабо неоднородной плазме $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно представить в виде $\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}\right)$, где зависимость от второго аргумента слабая. При переходе к Фурье-представлению зависимость от первого аргумента переходит в зависимость от \mathbf{k} , а по второму аргументу можно произвести разложение вблизи точки \mathbf{r} , где находится волновой пакет. С точностью до малых первого порядка имеем в координатном представлении

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}\right) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{r}) + \\ + \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{r}),$$

где дифференцирование ε во втором слагаемом производится только по второму аргументу. При переходе к Фурье-представлению величина $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ преобразуется в $-i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ и второе слагаемое будет иметь вид:

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}.$$

Таким образом, при учете зависимости $\varepsilon_{\alpha\beta}$ от \mathbf{r} , t в уравнении (I. 32) мы должны добавить малые слагаемые, пропорциональные производным от электрического поля по \mathbf{k} и ω . Если повторить теперь вывод уравнения баланса энергии (I. 36), то нетрудно заметить, что эти слагаемые приведут к дополнительному члену, содержащему производную по \mathbf{k} от спектральной функции. В результате уравнение (I. 42) для слабо неоднородной плазмы примет вид [36, 37]:

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = 2\gamma_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}. \quad (\text{I. 43})$$

Здесь $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ — собственная частота, определяемая соотношением $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$. Ее производные по \mathbf{k} и \mathbf{r} могут

быть определены по правилу дифференцирования неявных функций:

$$\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = - \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} / \frac{\partial D}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} / \frac{\partial D}{\partial \omega}. \quad (I. 44)$$

Заметим, что для продольных колебаний детерминант D сводится просто к диэлектрической проницаемости ϵ .

Уравнение (I. 43) имеет простой физический смысл. Второе слагаемое описывает движение волнового пакета в пространстве с групповой скоростью $U_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}$, а третье показывает, что при этом волновой пакет искажается таким образом, что частота колебаний остается постоянной.

Выше мы предполагали, что волновой вектор \mathbf{k} и частота $\omega_{\mathbf{k}}$ изменяются непрерывно. На самом деле собственные частоты колебаний неоднородной плазмы должны «квантоваться», т. е. принимать дискретный ряд значений [35]. Но поскольку разность между соседними собственными частотами коротковолновых возмущений весьма мала, то этим эффектом можно пренебречь.

Следует иметь в виду, что уравнение (I. 43) соответствует нулевому квазиклассическому приближению. С этой степенью точности совершенно безразлично, как писать член с дивергенцией потока энергии: в том виде, как в выражении (I. 43), или в виде $\text{div} (U_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}})$. При большом числе колебаний в широком интервале волновых чисел этого приближения, по-видимому, вполне достаточно.

С точки зрения квазилинейного приближения нас интересует случай, когда $\gamma_{\mathbf{k}}$ мало. При этом производную по времени от $I_{\mathbf{k}}$ также можно считать малой, так что в нулевом приближении будем иметь

$$\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = 0. \quad (I. 45)$$

Отсюда следует, что $I_{\mathbf{k}} = I(\omega_{\mathbf{k}})$, т. е. зависимость $I_{\mathbf{k}}$ от \mathbf{r} и \mathbf{k} целиком определяется зависимостью $I(\omega)$ и $\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. Другими словами, $I_{\mathbf{k}}$ представляет собой набор волн с различными частотами, причем амплитуда каждой из волн оказывается не зависящей от \mathbf{r} , а соответствующий волновой вектор $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{r})$ определяется соотношением $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_s = \text{const}$. В следующем приближении мы должны учесть зависимость $I_{\mathbf{k}}$ от времени и возможную слабую зависимость от \mathbf{r} . Для волны с частотой ω_s будем иметь

$$I_{\mathbf{k}} = I_s(\mathbf{r}, t) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_s).$$

Подставляя это выражение в (I. 43), получим

$$\frac{\partial I_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial I_s}{\partial \mathbf{r}} = \gamma_s I_s. \quad (I. 46)$$

Рассмотрим для простоты одномерный случай, когда плазма неоднородна только по одной координате, скажем, x . Допустим, что $\omega_{\mathbf{k}}$ является симметричной функцией k_x , т. е.

каждой частоте отвечают две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Предположим, кроме того, что волны отражаются без поглощения либо от стенок, либо от точек поворота (точек с $k_x = 0$).

При малых γ и $\frac{\partial}{\partial t}$ функцию I_s , согласно формуле (I. 46), можно считать не зависящей от x . Умножая уравнение (I. 46) на U^{-1} и интегрируя его затем по x , мы исключим второе слагаемое и получим

$$\frac{\partial I_s}{\partial t} = \langle \gamma_s \rangle I_s, \quad (\text{I. 47})$$

где $\langle \gamma_s \rangle = \frac{\int \gamma_s(x) dx}{\int dx/U_s}$ — средний инкремент нарастания волны с частотой ω_s .

Очевидно, что стационарное состояние будет достигнуто, когда $\langle \gamma_s \rangle = 0$. При этом локальный инкремент $\gamma_s(x)$ совсем не обязан всюду обращаться в нуль. В указанную схему нетрудно включить поглощение волн стенками. Если это поглощение достаточно велико, то волны могут оказаться затухающими даже в том случае, когда локальный инкремент всюду положителен.

Абсолютная и сносовая неустойчивость

Выше мы не учитывали расплывания волновых пакетов. В некоторых задачах такое приближение вполне оправдано, но иногда это может быть и не так. Мы рассмотрим здесь конкретный пример, когда учет расплывания волнового пакета оказывается совершенно необходимым.

В начале § 3 мы рассмотрели пучковую неустойчивость в неограниченной плазме. Однако реально все эксперименты с пучками, за исключением экспериментов с тороидальными системами, проводятся в ограниченных трубках. Поэтому возникает вопрос, успеет ли развиться неустойчивость в такой трубке. Если подойти к этой задаче с точки зрения геометрической оптики, т. е. в рамках представлений предыдущего пункта о нерасплывающихся пакетах, то мы должны были бы описывать процесс нарастаний возмущений с помощью уравнения (I. 43). Согласно этому уравнению, в отсутствие обратной связи между входом пучка и выходом, которая могла бы осуществляться, в частности, распространяющимися против пучка волнами, всякое возмущение будет сноситься вдоль трубки с групповой скоростью. При этом плазма с пучком работает не как генератор, а как усилитель. Такая неустойчивость называется сносовой (конвективной) в отличие от абсолютной неустойчивости, при которой возмущение нарастает со временем в каждой точке [24, 38—42].

Покажем теперь, что отсутствующую обратную связь может заменить расплывание волнового пакета. Этот эффект приводит

к появлению некоторой граничной групповой скорости U_c ниже которой неустойчивость является абсолютной, а при $U > U_c$ — конвективной. Рассмотрим этот эффект, следуя работе [42].

Допустим, что инкремент γ_k как функция k имеет максимум при $k = k_0$. Очевидно, что по прошествии достаточно большого промежутка времени любое начальное возмущение деформируется таким образом, что оно будет иметь резкий максимум при $k = k_0$. Поэтому нам достаточно рассмотреть волновой пакет, составленный из плоских волн с волновыми числами, близким к k_0 . При этом можно произвести разложение γ_k и ω_k по малой разности $k - k_0$:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \gamma_{k_0} - \frac{\alpha}{2} (k - k_0)^2, \\ \omega_k &= \omega_{k_0} + U (k - k_0) + \frac{\beta}{2} (k - k_0)^2, \end{aligned} \quad (\text{I. 48})$$

где $\alpha = \left. \frac{\partial^2 \gamma}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}$, $U = \left. \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \right|_{k=k_0}$, $\beta = \left. \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}$.

Эволюция во времени такого волнового пакета определяется соотношением

$$E(x, t) = A_{k_0} e^{\gamma_{k_0} t - i k_0 x} \int e^{i(x - Ut)(k - k_0) - \frac{(\alpha - i\beta)t}{2} (k - k_0)^2} dk, \quad (\text{I. 49})$$

где A_{k_0} — начальная амплитуда электрического поля.

При условии, что разность $x - Ut$ не слишком быстро растет с увеличением t этот интеграл вычисляется, и для зависимости электрического поля E от времени получаем

$$E(x, t) = A_{k_0} \exp \left\{ -i k_0 x + \gamma_{k_0} t - \frac{(x - Ut)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)t} \cdot (\alpha + i\beta) \right\}.$$

Здесь последнее слагаемое под знаком экспоненты описывает расплывание волнового пакета. Как мы видим, при

$$U^2 < 2\gamma_{k_0} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} = U_c^2 \quad (\text{I. 50})$$

амплитуда волнового пакета будет нарастать со временем в каждой точке $x = \text{const}$. В противоположном случае $U > U_c$ амплитуда нарастает со временем только в движущейся системе координат.

Поскольку выражение (I. 49) является достаточно точным лишь вблизи максимума, т. е. не очень далеко от точки $x = Ut$, то выражение (I. 50) для критического значения групповой скорости является лишь приближенным.

Резонансное и адиабатическое взаимодействие волн с частицами

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о взаимодействии волн с частицами в рамках квазилинейного приближения. Как мы уже установили в начале § 3, целесообразно различать резонансное и адиабатическое взаимодействие частиц с волнами.

Каждая отдельная частица резонансно взаимодействует с теми волнами, фазовая скорость которых совпадает со скоростью частицы. При резонансном взаимодействии электрическое поле волны постоянно в системе координат, связанной с частицей, поэтому при таком взаимодействии происходит существенный обмен энергией между частицей и волной.

В электрическом поле нерезонансных волн частица совершает колебания, амплитуда которых определяется амплитудой волны. При этом частица «следит» только за амплитудой колебаний поля, медленное изменение которой равносильно адиабатическому изменению амплитуды колебаний самой частицы.

В рассмотренном нами процессе адиабатического взаимодействия описывалось коэффициентом диффузии (I. 29). Чтобы лучше представить себе эффект адиабатического взаимодействия, а заодно и выяснить точность его учета в виде (I. 29), рассмотрим простой пример, когда в плазме задано внешнее поле $Ee^{-i\omega t}$ с $k = 0$. При медленном изменении амплитуды колебаний E согласно выражению (I. 29) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\omega^2 m^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E^2}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (\text{I. 51})$$

Допустим, что квадрат амплитуды поля меняется по линейному закону: $E^2 = E_0^2 \frac{t}{T}$, где $T \gg \omega^{-1}$. При этом уравнение (I. 51) приводится к уравнению диффузии, согласно которому функция распределения холодных в начальный момент электронов к моменту $t = T$ будет равна

$$f = \frac{e^{-v^2/v_0^2}}{\sqrt{\pi} \cdot v_0}, \quad v_0^2 = \frac{e^2 E^2}{m^2 \omega^2}. \quad (\text{I. 52})$$

А при точном рассмотрении мы получили бы, очевидно,

$$f(v) = \langle \delta(v - v(t)) \rangle = \frac{\omega}{\pi |v|} = \frac{1}{\pi \sqrt{v_0^2 - v^2}}. \quad (\text{I. 53})$$

Различие между выражениями (I. 52) и (I. 53) показывает, насколько ухудшается точность квазилинейного приближения при использовании его для одной только волны. При увеличении числа колебаний точность формулы (I. 52) будет улучшаться, так как функция распределения $f(v)$ как плотность распределения вероятности суммы многих случайных величин действительно должна стремиться к гауссовой функции.

Для ленгмюровских колебаний $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$ и кинетическая энергия электронов $\frac{m n v_0^2}{2}$ равна потенциальной энергии электрического поля $E^2/8\pi$. Таким образом, при наличии изотропных ленгмюровских колебаний эффективная температура

электронов T_{ef} , определяющая «ширину» усредненной функции распределения, может быть представлена в виде $T_{ef} = T_e + T_f$, где T_e — истинная температура электронов, а $T_f = \frac{2}{3} \frac{\langle E^2 \rangle}{8\pi n}$. Величина T_f определяет кинетическую энергию колебаний, она возникает как следствие учета адиабатического взаимодействия частиц с волнами. Заметим, что в силу того, что $T_e > 0$, эффективная температура T_{ef} не может быть меньше T_f .

Разделение взаимодействия частиц с волнами на резонансное и адиабатическое несколько усложняется при переходе к неоднородной плазме. Рассмотрим, например, простейший случай ленгмюровских колебаний неоднородной плазмы в отсутствие магнитного поля¹. Предположим, что влиянием среднего электрического поля E на колебания можно пренебречь. Тогда в квазиклассическом приближении кинетическое уравнение для возмущенной функции распределения $f_{k\omega}$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} (-\omega + ikv) f_{k\omega} = & \frac{e}{m} \left\{ \frac{\partial f}{\partial v} E_{k\omega} + i \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial r_{\alpha}} \frac{\partial E_{k\omega}}{\partial k_{\alpha}} - \right. \\ & \left. - i \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial t} \frac{\partial E_{k\omega}}{\partial \omega} \right\}, \end{aligned} \quad (I. 54)$$

где f — невозмущенная (усредненная) функция распределения. В этом уравнении функция $\frac{\partial f}{\partial v}$ и ее производные по r и t считаются не зависящими от r , t , а искажение волнового пакета за счет неоднородности учитывается вторым и третьим слагаемыми в фигурных скобках.

Кинетическое уравнение для усредненной функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla f - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = S_{ef}, \quad (I. 55)$$

где член столкновений электронов с волнами S_{ef} дается соотношением

$$S_{ef} = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v} \int \int \langle E_{k'\omega'}^* f_{k\omega} \rangle dk d\omega dk' d\omega'. \quad (I. 56)$$

Выражение под знаком интеграла в равенстве (I. 56) мы запишем в симметричном виде $\frac{1}{2} \langle E_{k'\omega'}^* f_{k\omega} + E_{k\omega} f_{k'\omega'}^* \rangle$ и подставим затем вместо функции $f_{k\omega}$ ее выражение через $E_{k\omega}$ из (I. 54).

¹ В неоднородной плазме продольные волны точно выделяются только в том случае, если электрическое поле волны направлено вдоль градиента невозмущенной плотности. При произвольном направлении k продольные колебания не отделяются от поперечных, поэтому ленгмюровские колебания должны сопровождаться электромагнитным излучением. Поскольку интенсивность этого излучения мала, то приближенно колебания по-прежнему можно считать продольными.

При этом вклад от первого слагаемого в правой части равенства (I. 54) пропорционален выражению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{\omega - kv + iv} - \frac{i}{\omega' - k'v - iv} \right) \langle E_{k'\omega'}^* E_{k\omega} \rangle. \quad (\text{I. 57})$$

Учитывая, что электрическое поле почти δ -коррелировано, мы можем заменить действительную часть круглой скобки в выражении (I. 57) на $2\pi\delta(\omega - kv)$, а мнимую — представить в виде

$$\begin{aligned} \left[i(\omega - \omega') \frac{\partial}{\partial \omega} + i(k - k') \frac{\partial}{\partial k} \right] (\omega - kv)^{-1} = \\ = \left[-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} + \nabla \frac{\partial}{\partial k} \right] (\omega - kv)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{I. 58})$$

Что касается последних двух слагаемых в фигурной скобке (I. 54), то они приводят к членам, пропорциональным производным от $I_{k\omega}$ по k и ω . Учитывая, что $E_k = \frac{k}{k} E_k$, получим окончательно:

$$\begin{aligned} S_{ef} = \frac{\pi e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \int k \left(\frac{k}{k^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \delta(\omega - kv) I_{k\omega} dk d\omega - \\ - \frac{e^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{k}{\omega - kv} \frac{\partial f}{\partial v} \left\{ \nabla I_{k\omega} - \frac{2k}{k^2} (k \nabla I_{k\omega}) \right\} dk d\omega - \\ - \frac{e^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial v} \int k \left\{ \frac{\partial I_{k\omega}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega} - \frac{\partial I_{k\omega}}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla I_{k\omega} \frac{\partial}{\partial k} + \right. \\ \left. + \frac{\partial I_{k\omega}}{\partial k} \nabla \right\} \frac{k}{k^2} \frac{\partial f}{\partial v} dk d\omega, \end{aligned} \quad (\text{I. 59})$$

где особенность $(\omega - kv)^{-1}$ интегрируется в смысле главного значения. Мы опустили здесь малый член, пропорциональный $I_{k\omega}$ (т. е. не содержащий производных от $I_{k\omega}$) в соответствии с тем, что в рамках принятого нами нулевого квазиклассического приближения мы пренебрегли подобными добавками и в уравнении переноса (I. 43). В выражении (I. 59) первый интеграл соответствует резонансному, а остальные два — адиабатическому взаимодействию частиц с волнами.

Умножая (I. 59) на mv и интегрируя результат по v , мы получим силу F , действующую на плазму со стороны волн. Учитывая, что для продольных колебаний $\varepsilon = 0$, получим

$$\begin{aligned} F = -\frac{1}{8\pi} \int \left[(\nabla I - \frac{2k}{k^2} (k \nabla I)) \right] dk d\omega + \frac{1}{8\pi} \int k \left\{ \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial \omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \right. \\ \left. - \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k} + \frac{\partial I}{\partial k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + 2 \operatorname{Im} \varepsilon I \right\} dk d\omega, \end{aligned} \quad (\text{I. 60})$$

где ε — диэлектрическая проницаемость плазмы, равная

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{k}{\omega - kv} dv. \quad (I. 61)$$

Согласно уравнению (I. 43), второй интеграл в равенстве (I. 60) обращается в нуль, и, следовательно, сила \mathbf{F} сводится к дивергенции тензора максвелловых натяжений. Другая часть силы, которая определяется градиентом кинетической энергии колебаний, учитывается нами посредством усредненной функции и, согласно равенству (I. 52), может быть представлена в виде градиента от тензора давления

$$P_{ij}^f = \frac{e^2 n}{m} \int \frac{k_i k_j}{k^2 \omega^2} I_{k\omega} dk d\omega = \frac{1}{4\pi} \int \frac{k_i k_j}{k^2} I_{k\omega} dk d\omega, \quad (I. 62)$$

где мы заменили ω^2 на $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$.

Таким образом, суммарная сила, действующая на плазму со стороны ленгмюровских колебаний, приводится к взятому с обратным знаком градиенту от плотности энергии электрического поля.

Учет адиабатического взаимодействия частиц с волнами оказывается существенным и в других случаях, когда приходится учитывать баланс энергии и импульса в плазме с колебаниями. В частности, его учет необходим при рассмотрении «аномальной» диффузии плазмы.

Следует иметь в виду, что само разделение взаимодействия на резонансное и адиабатическое возможно лишь при достаточном малых инкрементах, когда можно говорить о почти периодических колебаниях. Для этого должно быть выполнено условие $\gamma \ll \max(\omega, kv_T)$, являющееся вместе с тем необходимым условием применимости квазилинейного приближения (v_T — тепловая скорость).

Усиленная диффузия плазмы

Выражение для члена столкновений в выражении (I. 59) без труда обобщается на продольные колебания плазмы в магнитном поле. Для двухкомпонентной плазмы выражение типа (I. 59) должно быть написано для каждой из компонент. При этом силу \mathbf{F}_j , действующую на компоненту j , можно представить в виде

$$\mathbf{F}_j = \frac{\mathbf{F}_0}{2} \pm \mathbf{F}_{ie}$$

где \mathbf{F}_0 — суммарная сила, действующая на плазму в целом, а \mathbf{F}_{ie} — сила «трения» между электронами и ионами, которая передается через колебания. С помощью соотношения вида (I. 60) нетрудно показать, что суммарная сила \mathbf{F}_0 сводится к дивергенции тензора максвелловых натяжений. Эта сила может привести только к макроскопическому движению всей плазмы с вморожен-

ным в нее магнитным полем. Что касается диффузии поперек магнитного поля, то она определяется силой трения между электронами и ионами F_{ie} , точнее, ее компонентой поперек градиента плотности. Этот вывод непосредственно вытекает из гидродинамических уравнений движения для каждой из компонент, которые, как известно, достаточно точно описывают медленное усредненное движение частиц поперек магнитного поля.

Указанное обстоятельство весьма существенно, и его всегда необходимо иметь в виду при исследовании возможности влияния на диффузию плазмы теск или иных колебаний. В частности, отсюда вытекает, что высокочастотные колебания, в которых движением ионов можно пренебречь, не могут привести к диффузии плазмы. На первый взгляд это утверждение кажется неправдоподобным, так как каждый отдельный электрон в таком поле совершает случайные блуждания, которые можно рассматривать как диффузию. Соответствующий коэффициент диффузии для отдельной частицы можно найти либо путем подсчета среднего квадрата смещения [43], либо по квазилинейной теории [44]; для резонансных частиц эта диффузия описывается первым членом в выражении (I. 59). Но если мы наряду с диффузией резонансных частиц учтем смещение остальных электронов за счет адиабатического взаимодействия, то мы придем к выражению типа (I. 60), согласно которому полный поток точно обращается в нуль. Таким образом, взаимодействие электронов с волнами, в которых ионы не колеблются, приводит только к диффузии отдельных частиц, т. е. к эффектам типа усиленной теплопроводности, а не к диффузии плазмы как целого. Взаимодействие с такими колебаниями эквивалентно электрон-электронным столкновениям.

Надо сказать, что этот факт не всегда учитывается в работах по усиленной диффузии плазмы, что нередко приводит к ошибочным утверждениям. Так, например, в некоторых экспериментальных статьях делаются попытки связать аномальную диффузию непосредственно с высокочастотными колебаниями, в которых ионы заведомо не могут принимать участия. При теоретическом рассмотрении усиленной диффузии иногда ограничиваются только одной из компонент, например электронной, и тогда возникает дополнительный вопрос о том, какой же механизм делает диффузию амбиполярной. При более правильном определении диффузионной утечки по величине силы трения между электронами и ионами этот вопрос автоматически снимается.

Другая ошибка подобного рода совершается, когда не учитывается «увлечение» волн частицами в результате их взаимодействия. Например, в упомянутой выше работе Тейлора [43], где для исследования случайного движения частиц использовалось уравнение Ланжевена, было сделано неявное допущение, что колебания являются изотропными в лабораторной системе координат. Это допущение, равноценное предположению о жесткой

связи колебаний с окружающими плазму стенками, привело автора к ошибочному утверждению, что коэффициент усиленной диффузии не может превышать коэффициент диффузии Бома. Аналогичная ошибка была допущена в работе [45], где вычислялся коэффициент диффузии электронов на тепловых циклотронных колебаниях, которые считались изотропными в лабораторной системе координат, а не в подвижной системе координат, связанной с электронами (эта ошибка была исправлена в работе тех же авторов [46]).

При полном решении задачи о диффузии все эти парадоксы автоматически разрешаются, причем полная ясность, как мы видели, достигается только при учете адиабатического взаимодействия частиц с волнами. В тех случаях, когда резонансное взаимодействие невозможно, усиленная диффузия может определяться адиабатическим взаимодействием. Примером тому может служить рассмотренная Петвиашвили [47] задача о диффузии плазмы на дрейфовых волнах, возбуждаемых внешним источником, когда электроны диффундируют благодаря резонансному взаимодействию с волнами, а ионы — вследствие адиабатического взаимодействия.

II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

Рассмотренный в предыдущем разделе квазилинейный метод имеет весьма ограниченную область применимости. По существу он пригоден для описания лишь настолько слабо возбужденных состояний, что их, строго говоря, и не следовало бы называть турбулентными, поскольку наиболее существенное свойство турбулентности — нелинейное взаимодействие между колебаниями — в них еще не проявляется. Что касается реальных турбулентных процессов в плазме, то в них, как правило, взаимодействие между колебаниями играет существенную роль.

§ 1. Кинетическое уравнение для волн

Вывод кинетического уравнения для волн

Мы рассмотрим здесь только слабо турбулентные состояния, когда взаимодействие между волнами можно считать слабым. Такие состояния можно ожидать в тех случаях, когда инкремент нарастания неустойчивых возмущений достаточно мал, т. е. $\gamma/\omega \ll 1$. Это условие не вполне точно хотя бы по той причине, что величина ω зависит от выбора системы координат. Например, в случае набора звуковых волн, бегущих в одном и том же направлении, скажем, вдоль оси z , при переходе в систему координат, движущуюся со скоростью звука, все частоты обращаются в нуль. Такие колебания даже при очень малом инкременте нельзя считать слабо взаимодействующими. Однако для тех же звуковых колебаний, распределенных изотропно, можно пользоваться приближением слабого взаимодействия. Таким образом,

хотя мы и будем в дальнейшем пользоваться условием $\nu/\omega \ll 1$ как критерием слабой связи, мы должны помнить, что более точный смысл этого условия состоит в утверждении, что время нарастания возмущений должно быть значительно больше характерного времени сохранения фазовых сдвигов между различными волнами.

Рассмотрим сначала такие колебания, в которых резонансное взаимодействие частиц с волнами не играет роли. Такая ситуация осуществляется, например, для холодной плазмы, когда тепловым движением частиц можно пренебречь и для описания движения плазмы можно воспользоваться уравнениями магнитной гидродинамики. Если перейти к Фурье-представлению, то уравнения, описывающие нелинейные гидродинамические колебания, по своей структуре будут вполне аналогичны следующему скалярному уравнению:

$$(\omega - \omega_k - i\gamma_k) C_{k\omega} = \int V_{k\omega, k'\omega'} C_{k'\omega'} C_{-k', \omega-\omega'} dk' d\omega' \quad (II. 1)$$

Мы используем уравнение (II. 1) как модельное уравнение для выяснения характера взаимодействия между колебаниями. (Впрочем, к уравнению такого вида приводит и целый ряд конкретных задач.) Выражение в левой части уравнения (II. 1) имитирует линейную часть уравнения движения, а выражение справа представляет собой Фурье-преобразование квадратичного члена. Этот квадратичный член как раз и описывает взаимодействие между различными гармониками, а величина $V_{k\omega, k'\omega'}$ представляет собой матричный элемент этого взаимодействия.

Заметим, что поскольку $C_{k\omega}$ представляет собой Фурье-компоненту действительной функции, то $C_{k\omega}^* = C_{-k, -\omega}$. Пользуясь этим соотношением, заменим в комплексно сопряженном уравнении (II. 1) знаки у k, ω и k', ω' на противоположные и учтем, что $\omega_{-k} = -\omega_k, \gamma_{-k} = \gamma_k$. Тогда мы получим уравнение, аналогичное (II. 1), но с другими матричными элементами. Сопоставляя эти уравнения, получим

$$V_{k\omega, k'\omega'}^* = -V_{-k-\omega, -k'-\omega'}. \quad (II. 2)$$

Если инкремент $\gamma_k > 0$, то малые возмущения будут нарастать со временем до тех пор, пока в игру не вступит нелинейное взаимодействие. В условиях, близких к равновесным, правую часть уравнения (II. 1) следует считать малой, так что в нулевом приближении имеем

$$(\omega - \omega_k) C_{k\omega}^{(0)} = 0. \quad (II. 3)$$

Если колебания развились из случайных тепловых шумов, то их можно считать совершенно независимыми. Умножая уравнение (II. 3) на $C_{k'\omega'}^{(0)*}$ и усредняя результат по статистическому ансамблю, т. е. по случайным фазам отдельных колебаний, получим для стационарных и однородных в пространстве колебаний:

$$\langle C_{k'\omega'}^* C_{k\omega} \rangle_0 = I_k \delta(\omega - \omega_k) \delta(k - k') \delta(\omega - \omega'). \quad (II. 4)$$

Если в правую часть уравнения (II. 1) подставить $C_{k\omega}^{(0)}$, то нелинейный член будет играть роль вынуждающей силы. Амплитуду вынужденных колебаний мы обозначим через $C_{k\omega}^{(1)}$. Наличие вынужденных колебаний непосредственно к затуханию волн не приводит; соответствующее затухание должно выявиться только в более высоких приближениях. Отсюда следует, что величину CV нужно считать, по крайней мере, порядка $\sqrt{\gamma/\omega}$, поэтому в уравнении для $C_{k\omega}^{(1)}$ инкремент γ_k можно опустить. Более того, поскольку биения должны затухать быстрее основных колебаний, в левую часть уравнения (II. 1) вместо $-i\gamma_k$ мы должны добавить малое слагаемое $i\nu$, которое учитывает затухание высших корреляций. Таким образом, из уравнения первого приближения получаем

$$C_{k\omega}^{(1)} = (\omega - \omega_k + i\nu)^{-1} \int V_{k\omega, k'\omega'} C_{k'\omega'}^{(0)} C_{k-k', \omega-\omega'}^{(0)} dk' d\omega'. \quad (\text{II. 5})$$

Аналогичным образом можно было бы найти поправку к амплитуде колебаний во втором приближении. Но нас интересует не столько поправка к амплитуде, сколько влияние взаимодействия волн на собственные частоты колебаний, точнее, на их мнимую часть, т. е. затухание. Чтобы найти величину дополнительного затухания, умножим уравнение (II. 1) на $C_{k'\omega'}^*$ и усредним затем результат по статистическому ансамблю, предполагая, что в нулевом приближении колебания никак не коррелированы (приближение случайных фаз). При этом правая часть, содержащая произведение трех компонент, в нулевом приближении исчезает, и мы должны учесть следующее приближение. Подставляя поочередно вместо одного из трех сомножителей малую добавку $C^{(1)}$, получим:

$$\begin{aligned} (\omega - \omega_k - i\gamma_k) I_{k\omega} &= I_{k\omega} \int V_{k\omega, k'\omega'} \frac{V_{k''\omega'', k\omega} + V_{k''\omega'', k'-k'-\omega'}}{\omega'' - \omega_{k''} + i\nu} I_{k'\omega'} dk' d\omega' + \\ &+ I_{k\omega} \int V_{k\omega, k'\omega'} \frac{V_{k'\omega', k\omega} + V_{k'\omega', -k''-\omega''}}{\omega' - \omega_{k'} + i\nu} I_{k''\omega''} dk' d\omega' + \\ &+ \frac{1}{\omega - \omega_k - i\nu} \int V_{k\omega, k'\omega'} (V_{k\omega, k'\omega'}^* + V_{k\omega, k''\omega''}^*) I_{k'\omega'} I_{k''\omega''} dk' d\omega', \end{aligned} \quad (\text{II. 6})$$

где $k'' = k - k'$, $\omega'' = \omega - \omega'$.

Как мы видим, первые два члена в правой части этого уравнения пропорциональны $I_{k\omega}$. Достаточно учесть только мнимую их часть, так как именно она и описывает затухание волн за счет нелинейного взаимодействия. Что же касается их действительной части, дающей сдвиг собственных частот, то в силу условия $\gamma/\omega \ll 1$ ею можно пренебречь. Переносим члены, пропорциональные $I_{k\omega}$ в левую часть, мы можем объединить их вместе с выражением $\gamma_k I_{k\omega}$ и получить суммарный инкремент $\tilde{\gamma}_k$ (точнее, декремент

затухания, поскольку в установившемся состоянии величина $\tilde{\gamma}_k$ должна быть отрицательной). Так как нелинейные члены малы, то в рамках данного приближения в последнем члене в уравнении (II. 6) малую добавку $\nu > 0$ можно заменить на $-\tilde{\gamma}_k > 0$, и тогда соотношение (II. 6) переписывается в виде

$$\{(\omega - \omega_k)^2 + \tilde{\gamma}_k^2\} I_{k\omega} = \frac{1}{2} \int |v_{k\omega, k'\omega'}|^2 I_{k'\omega'} I_{k''\omega''} dk' d\omega', \quad (\text{II. 7})$$

где $v_{k\omega, k'\omega'} = V_{k\omega, k'\omega'} + V_{k\omega, k''\omega''}$ (мы привели правую часть равенства (II. 7) к симметричному виду).

При малом $\tilde{\gamma}_k$ выражение $\{(\omega - \omega_k)^2 + \tilde{\gamma}_k^2\}^{-1} \approx -\frac{\pi}{\tilde{\gamma}_k} \delta(\omega - \omega_k)$ так что по-прежнему $I_{k\omega} = I_k \delta(\omega - \omega_k)$. Подставляя последнее соотношение в равенство (II. 7) и учитывая, что $\text{Im}(\omega' - \omega_{k'} + i\nu)^{-1} = -\pi \delta(\omega' - \omega_{k'})$, получим кинетическое уравнение для установившихся колебаний:

$$\begin{aligned} -\tilde{\gamma}_k I_k &\equiv -\gamma_k I_k + \pi I_k \text{Re} \int v_{k\omega, k''\omega''} v_{k''\omega'', k\omega} \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \\ &- \omega_{k''}) I_{k'} dk' - I_k \int \frac{\text{Im}(v_{k\omega, k''\omega''} v_{k''\omega'', k\omega})}{\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}} I_{k'} dk' = \\ &= \frac{\pi}{2} \int |v_{k\omega, k'\omega'}|^2 I_{k'} I_{k''} \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) dk', \quad (\text{II. 8}) \end{aligned}$$

где интегрирование по k в последнем члене в левой части проводится в смысле главного значения, $k'' = k - k'$, $\omega'' = \omega - \omega'$.

В прозрачной среде величина $v_{k\omega, k'\omega'}$ является действительной. Для простоты мы ограничимся здесь именно этим случаем, откладывая общее рассмотрение до § 2, где будет учтено тепловое движение частиц.

Заметим, что добавление в правую часть уравнения (II. 1) кубического члена вида

$$\int V_{k\omega, k'\omega' k''\omega''} C_{k'\omega'} C_{k''\omega''} C_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} dk' dk'' d\omega' d\omega'' \quad (\text{II. 9})$$

привело бы к появлению в правой части уравнения (II. 6) дополнительного слагаемого

$$\int U_{k\omega, k'\omega'} I_{k\omega} I_{k'\omega'} dk' d\omega', \quad (\text{II. 10})$$

где

$$U_{k\omega, k'\omega'} = V_{k\omega, k'\omega', -k'-\omega'} + V_{k\omega, k\omega, k'\omega'} + V_{k\omega, k'\omega', k\omega}. \quad (\text{II. 11})$$

Уравнение (II. 8) определяет спектр колебаний в установившемся состоянии, когда нарастание волн из-за неустойчивости в точности компенсируется затуханием за счет нелинейного взаимодействия. В отсутствие равновесия амплитуда колебаний будет

изменяться со временем с инкрементом, равным разности линейного инкремента и нелинейного затухания. Следовательно, кинетическое уравнение для волн вида (II. 43) с учетом нелинейного взаимодействия запишется в виде

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} + U_{\mathbf{k}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \Gamma} - \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \Gamma} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = 2\gamma_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}} - \pi \int \{ 2v_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} I_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}''} - |v_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2 I_{\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}''} \} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}) d\mathbf{k}'. \quad (\text{II. 12})$$

Это уравнение и представляет собой кинетическое уравнение для волн. Совместно с уравнением для усредненной функции оно составляет основу для описания слаботурбулентных состояний. Для однородной среды, когда $\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \Gamma} = 0$, это уравнение аналогично хорошо известному кинетическому уравнению для фононов, т. е. квантов звука в твердом теле [11]. В применении к плазме кинетическое уравнение для волн стало использоваться совсем недавно [10, 12].

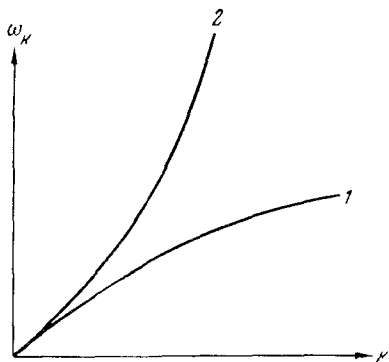


Рис. 10. Нераспадный (1) и распадный (2) спектры колебаний.

В кинетическом уравнении для волн (II. 12) учитываются только трехволновые процессы, а именно распад волны \mathbf{k} на \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' и обратный процесс слияния двух волн \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' в одну. Требование удовлетворить закону сохранения энергии $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}$, которое учитывается в равенстве (II. 12) δ -функцией от разности частот, существенно ограничивает допустимую область взаимодействия в \mathbf{k} -пространстве. Более того, трехволновые процессы допустимы не при всяком спектре $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Поэтому естественно разделить все возможные спектры на две группы: распадные и нераспадные. В изотропной среде, например, спектр вида 1 (рис. 10), у которого фазовая скорость убывает с увеличением k , оказывается нераспадным, т. е. он не допускает трехволновых процессов. Напротив, для спектра вида 2, когда фазовая скорость возрастает вместе с k , распадные условия удовлетворяются.

В случае нераспадного спектра для учета нелинейного взаимодействия волн в прозрачной среде приходится привлекать следующее приближение, т. е. учитывать четырехволновые процессы, в которых две волны, рассеиваясь друг на друге, дают другие две волны. В кинетическом уравнении для волн такие процессы приводят к кубическим относительно I членам.

Как мы увидим ниже, при учете теплового движения частиц появляются дополнительные квадратичные по I члены, поэтому

мы не будем здесь более подробно останавливаться на колебаниях с нераспадным спектром.

Познакомимся теперь с двумя простейшими примерами распадных взаимодействий в плазме.

Взаимодействие ленгмюровских волн с ионно-звуковыми

Рассмотрим простейший случай продольных колебаний плазмы в отсутствие магнитного поля. Допустим, что температура ионов T_i значительно меньше температуры электронов T_e , так что приближенно можно принять $T_i = 0$. Как известно, в такой неизотермической плазме могут распространяться ленгмюровские и ионно-звуковые волны. Каждая из этих ветвей колебаний, взятая в отдельности, имеет нераспадный спектр: у ионно-звуковых колебаний зависимость частоты колебаний от волнового числа имеет вид кривой 1 (см. рис. 10), а частота ленгмюровских колебаний близка к ω_0 , так что разность трех частот в нуль обратиться не может. Поэтому разрешенными являются лишь перекрестные трехволновые процессы, при которых ленгмюровские волны рассеиваются на ионно-звуковых. Именно их мы и должны учесть.

В гидродинамическом приближении колебания описываются уравнениями непрерывности для плотности электронов n_e и ионов n_i

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \operatorname{div}(n_j \mathbf{v}_j) = 0, \quad (\text{II. 13})$$

уравнениями движения для каждой из компонент

$$m_j n_j \frac{dv_j}{dt} + \nabla(n_j T_j) = -\frac{e_j}{m_j} n_j \nabla \varphi \quad (\text{II. 14})$$

и уравнением для потенциала электрического поля

$$\Delta \varphi = -4\pi e(n_i - n_e). \quad (\text{II. 15})$$

Условимся приписывать индекс s ионно-звуковым, а индекс l — ленгмюровским колебаниям. Рассмотрим сначала ленгмюровские колебания. При ленгмюровских колебаниях ионы можно считать неподвижными, т. е. $n_i^l = 0$, так что уравнение (II. 15) примет вид

$$\Delta \varphi^l = 4\pi e n_e^l. \quad (\text{II. 16})$$

Далее, поскольку распады внутри ленгмюровских колебаний запрещены, то нелинейный член в уравнении непрерывности для электронов и квадратичный по скорости нелинейный член в уравнении движения электронов можно опустить. При этом нелинейная связь ленгмюровских колебаний с ионно-звуковыми дается членом в правой части электронного уравнения движения (II. 14). Переходя к Фурье-представлению, выразим с помощью равенства (II. 16) n_e через φ . Беря затем дивергенцию от электронного уравнения движения и выражая $\operatorname{div} \mathbf{v}_e$ через n_e с помощью выражения

(II. 13), получим уравнение для потенциала ленгмюровских колебаний:

$$(\omega^2 - \omega_e^2) \Phi_{k\omega}^l = \int \frac{kk'}{k^2} \left\{ \frac{\omega_0^2}{n} \Phi_{k'\omega'}^l n_{ek-k', \omega-\omega'}^s - \frac{e(k-k')^2}{m_e} \Phi_{k'\omega'}^s \Phi_{k-k', \omega-\omega'}^l \right\} dk' d\omega', \quad (\text{II. 17})$$

где ω_e^2 — квадрат частоты ленгмюровских колебаний, равный

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 + \frac{3T_e}{m_e} k^2.$$

При малых k, k' по сравнению с обратным дебаевским радиусом второе слагаемое в фигурных скобках (II. 17) пренебрежимо мало, и с учетом того, что $n_e^s = \frac{n_e}{T_e} \varphi^s$, получим окончательно:

$$(\omega^2 - \omega_e^2) \Phi_{k\omega}^l = \frac{e\omega_0^2}{T_e} \int \frac{kk'}{k^2} \Phi_{k'\omega'}^l \Phi_{k''\omega''}^s dk' d\omega', \quad (\text{II. 18})$$

где $k'' = k - k', \omega'' = \omega - \omega'$.

В случае ионно-звуковых колебаний можно произвести линеаризацию ионных уравнений непрерывности и уравнения движения, поскольку распады внутри ионной ветви запрещены. Выражая n_i через φ^s с помощью линеаризованных уравнений, получим из уравнения (II. 15)

$$\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}\right) k^2 \varphi_{k\omega}^s = -4\pi en_{ek\omega}^s, \quad (\text{II. 19})$$

где $\Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_i}$ — квадрат ионной ленгмюровской частоты.

При малых k частота ионно-звуковых колебаний значительно меньше Ω_0 , так что в выражении (II. 19) можно пренебречь единицей в круглых скобках.

Чтобы получить связь ионно-звуковых колебаний с ленгмюровскими, мы должны учесть такие нелинейные электронные члены, которые давали бы биения с низкой частотой. Беря дивергенцию от электронного уравнения движения и учитывая, что член с $\Delta\varphi$ можно линеаризовать, получим в Фурье-представлении

$$nm_e \int (k v_{k'\omega'}^l) \left\{ k' v_{k''\omega''}^l - \frac{\omega'}{n} n_{k''\omega''}^l \right\} dk' d\omega' + k^2 T_e n_{ek\omega}^s = k^2 ne \varphi_{k\omega}^s \quad (\text{II. 20})$$

Поскольку частота ионных колебаний ω_s мала, то приближенно $\omega' n_{k''\omega''}^l \approx -\omega'' n_{k''\omega''}^l = -nk'' v_{k''\omega''}^l$. А так как в пренебрежении тепловыми поправками $v_{k\omega}^l = -\frac{ek}{m_e \omega} \varphi_{k\omega}$, то выражая v^l через φ^l , а n^s — через φ^s , получим

$$(\omega^2 - \omega_s^2) \varphi_{k\omega}^s = -\frac{e\omega^2}{m_e \omega_0^2} \int \frac{(kk')(k'k'')}{k^2} \varphi_{k'\omega'}^l \varphi_{k''\omega''}^l dk' d\omega', \quad (\text{II. 21})$$

где $\omega_s^2 = c_s^2 k^2 = \frac{T_e}{m_i} k^2$. Уравнение (II. 21) как раз и описывает взаимодействие между ленгмюровскими и ионно-звуковыми колебаниями.

В линейном приближении каждому волновому вектору k соответствуют две быстрые ($\omega_k = \pm \omega_l$) и две медленные ($\omega_k = \pm \omega_s$) волны. Спектральные функции потенциала ϕ для таких колебаний мы условимся обозначать через $I_k^{\pm l}$, $I_k^{\pm s}$, так что, например

$$I_{k\omega}^s = I_k^{+s} \delta(\omega - kc_s) + I_k^{-s} \delta(\omega + kc_s). \quad (\text{II. 22})$$

Кроме того, поскольку $I_{k\omega} = I_{-k, -\omega}$ будем считать, что $\omega_{-k} = -\omega_k$, и, следовательно, преобразование $\omega, k \rightarrow -\omega, -k$ не изменяет ни I_k , ни $\delta(\omega - \omega_k)$.

Разумеется, можно было бы выбрать другой способ различения двух волн с одним и тем же волновым вектором, но распространяющихся в противоположных направлениях. Часто используется, например, переход к положительным частотам. При этом направление k определяет направление распространения волны, но зато усложняется форма записи члена столкновений между волнами. Поскольку переход от одного представления к другому несложен, а нам не хотелось бы здесь усложнять формулы, то мы будем пользоваться только введенным выше представлением.

Вблизи каждой из собственных частот разность $\omega^2 - \omega_k^2$ можно представить в виде $2\omega_k(\omega - \omega_k)$, и уравнения (II. 18), (II. 21) принимают вид модельного уравнения (II. 1). Поэтому не представляет труда повторить проведенные ранее выкладки и получить следующие кинетические уравнения для продольных колебаний однородной плазмы:

$$\frac{\partial I_k^l}{\partial t} + U_k^e \frac{\partial I_k^l}{\partial r} = \frac{\pi}{4} \frac{e^2 \omega_0^2}{T_e^2} \int \cos^2 \alpha (I_k^l I_{k'}^s - I_k^l I_{k'}^s) \delta(\omega_k^l - \omega_{k'}^l - \omega_{k'}^s) dk', \quad (\text{II. 23})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_k^s}{\partial t} + U_k^s \frac{\partial I_k^s}{\partial r} = & \frac{\pi}{4} \frac{e^2 \omega_s^2}{m_e^2 \omega_0^4} \int k'^2 (k - k' \cos \alpha)^2 \cos^2 \alpha I_k^l I_{k'}^l \delta(\omega_k^s - \\ & - \omega_{k'}^l - \omega_{k'}^s) dk' - \frac{\pi}{2} \frac{e^2 \omega_s}{m_e T_e \omega_0} \int k^3 \cos \alpha (k - k' \cos \alpha) (k' - \\ & - k \cos \alpha) I_k^s I_{k'}^l \delta(\omega_k^s - \omega_{k'}^l - \omega_{k'}^s) dk', \end{aligned} \quad (\text{II. 24})$$

где

$$\cos \alpha = \frac{kk'}{kk'}, \quad U^{\pm l} = \pm \frac{3T_e}{m_e \omega_0} k, \quad U_k^{\pm s} = \pm c_s \frac{k}{k}.$$

Из этих уравнений видно, что основная роль во взаимодействии волн принадлежит электронным колебаниям: такие колебания своими биениями возбуждают ионный звук, а затем интенсивно

рассеиваются на ионно-звуковых волнах. Рассмотрим, например, случай, когда в исходном состоянии по плазме распространяется одна единственная волна с волновым числом k_0 , так что $\varphi^l = \varphi_0 \delta(\omega - \omega_{k_0}^l) \delta(k - k_0)$ [48]. Такая волна может распасться на ленгмюровскую с $k' \approx -k_0$, распространяющуюся в обратную сторону, т. е. имеющую частоту $\omega_{k'}^l$, близкую к $\omega_{k_0}^l$, и ионно-звуковую с волновым вектором $k'' \approx 2k_0$. При этом условие $\omega_{k'}^l - \omega_{k''}^s - \omega_{k_0}^l = 0$ удовлетворяется.

Для исследования этого процесса удобно вернуться к уравнениям (II. 18) и (II. 21) для амплитуд. Полагая для каждой из возбуждаемых волн $\omega = \omega_k + i\nu$, где ν — искомый нами инкремент нарастания малых возмущения, и линеаризируя уравнения для амплитуд относительно возмущений $\varphi^l \delta(k + k_0) \delta(\omega - \omega_k^l)$ и $\varphi^s \delta(k - 2k_0) \delta(\omega - \omega_k^s)$, получим:

$$2i\nu\omega^l\varphi^l = -\omega_0^2 \frac{e\varphi_0}{T_e} \varphi^s, \quad (\text{II. 25})$$

$$2i\nu\omega_s\varphi^s = \frac{e\omega_s^2}{m_e\omega_0^2} k_0^2 \varphi_0 \varphi^l. \quad (\text{II. 26})$$

Отсюда, полагая $\omega^l \approx \omega_0$, находим

$$\nu^2 = \frac{1}{4} \frac{T_e k_0^2}{m_e} \frac{\omega_s}{\omega_0} \left(\frac{e\varphi_0}{T_e} \right)^2. \quad (\text{II. 27})$$

Таким образом, для одной ленгмюровской волны имеет место «распадная неустойчивость», а именно амплитуда малого возмущения типа суперпозиции ленгмюровской и ионно-звуковой волн, связанных с основной волной распадными условиями, экспоненциально растет со временем.

Этот процесс можно было бы рассмотреть и с помощью кинетических уравнений для интенсивностей I^l и I^s . Однако при этом возникает трудность, связанная с тем, что подстановка в кинетическое уравнение функций вида $I_0 \delta(k - k_0)$, $I^l \delta(k + k_0)$ и $I^s \delta(k + 2k_0)$ приводит к расходимости квадратичного члена. Но если вспомнить, что функция $\delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})$ возникла как результат аппроксимации зависимости вида $\frac{1}{\pi} \nu [(\omega - \omega_k)^2 + \nu^2]^{-1}$, то в точке резонанса эту функцию следует заменить на $1/\pi\nu$, и мы придем к тому же самому результату (II. 27).

Этот пример лишней раз показывает, что кинетическое уравнение для волн справедливо, строго говоря, только для достаточно широких в пространстве волновых чисел пакетов, когда I_k является довольно плавной функцией.

Согласно кинетическим уравнениям (II. 23) и (II. 24) одни лишь ленгмюровские колебания не могут взаимодействовать между собой, они должны сначала возбудить ионные колебания. Этот процесс является сравнительно медленным. Но как только ампли-

туда I^s заметно возрастет, основным процессом становится быстрое рассеяние ленгмюровских волн на ионных неоднородностях. Поскольку величина взаимодействия ленгмюровских волн явно зависит от температуры электронов, то при этом заметную роль могут играть процессы, связанные с тепловым движением электронов, которые будут рассмотрены в § 2.

*Взаимодействие альфвеновских волн
с магнитозвуковыми*

В качестве второго примера рассмотрим колебания идеально проводящей плазмы в однородном магнитном поле [50]. Для простоты допустим, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля, так что в уравнении движения давлением плазмы можно пренебречь. Тогда колебания плазмы будут описываться следующей системой уравнений магнитной гидродинамики:

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (\text{II. 28})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (\text{II. 29})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div } n \mathbf{v}. \quad (\text{II. 30})$$

Допустим, что в стационарном состоянии плазма покоится ($\mathbf{v}_0 = 0$), а ее плотность постоянна. Тогда в линейном приближении первые два уравнения при переходе к Фурье-представлению запишутся в виде

$$-m_i n \omega \mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{4\pi} [[\mathbf{k}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}] \mathbf{H}], \quad (\text{II. 31})$$

$$-\omega \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega} = [\mathbf{k} [\mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{H}]]. \quad (\text{II. 32})$$

Из этих уравнений компонента скорости вдоль среднего магнитного поля \mathbf{H} выпадает, и, следовательно, достаточно рассмотреть лишь колебания с поперечным смещением плазмы. Выражая $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}$ через $\mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega}$ с помощью равенства (II. 32) и подставляя результат в (II. 31), мы получим уравнение для скорости

$$\omega^2 \mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega} = c_A^2 [k_z^2 \mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{k} (\mathbf{k}\mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega})], \quad (\text{II. 33})$$

где $c_A^2 = \frac{H^2}{4\pi m_i n}$ — квадрат альфвеновской скорости, k_z компонента волнового вектора вдоль невозмущенного магнитного поля \mathbf{H} .

Отсюда для компоненты скорости $\mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega}^s$, лежащей в плоскости (\mathbf{k}, \mathbf{H}) , получим

$$\omega^2 = \omega_s^2 = c_A^2 k^2, \quad (\text{II. 34})$$

а для компоненты $\mathbf{v}_{\mathbf{k}\omega}^a$, перпендикулярной к \mathbf{k} и \mathbf{H} , имеем

$$\omega^2 = \omega_a^2 = c_A^2 k_z^2. \quad (\text{II. 35})$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае (плазма низкого давления, т. е. $\beta = 8\pi\rho/N^2 \ll 1$) в плазме могут распространяться два типа волн — альфвеновские с частотой ω_a и магнитозвуковые с частотой ω_s . Кроме того, допустимы стационарные ($\omega = 0$) возмущения плотности, которые соответствуют так называемым замедленным магнитозвуковым волнам в плазме с $\rho = 0$, но мы их рассматривать не будем.

Как мы видим, фазовая скорость магнитозвуковых волн постоянна и равна c_A . Отсюда следует, что нелинейное взаимодействие весьма существенно для волн, распространяющихся в одном и том же направлении. Это взаимодействие приводит, в частности, к тому, что отдельная гармоническая в начальный момент волна начинает порождать высшие гармоники, что соответствует так называемому «опрокидыванию» волны. Но для волн с различными направлениями волновых векторов этот эффект не играет роли, так как такие колебания имеют нераспадный спектр.

Альфвеновские колебания распространяются только вдоль магнитного поля \mathbf{H} , притом с одной и той же фазовой скоростью c_A . По этой причине они, казалось бы, должны сильно взаимодействовать между собой. Но на самом деле матричный элемент взаимодействия двух альфвеновских волн, распространяющихся в одну сторону, обращается в нуль. Благодаря этому оказывается возможным распространение альфвеновской волны с произвольной конечной амплитудой.

Таким образом, ни альфвеновские, ни магнитозвуковые волны сами по себе не являются распадными. Однако каждая из них может распадаться на пару, состоящую из альфвеновской и магнитозвуковых волн. Матричные элементы этого взаимодействия нетрудно найти с помощью уравнений движения (II. 28)—(II. 30). Ввиду громоздкости мы не будем здесь приводить соответствующих выражений (их можно найти в работе [48]), а ограничимся лишь предельным случаем почти поперечного распространения, когда $k_z \ll k$. Пренебрегая в матричных элементах величиной k_z по сравнению с k , нетрудно привести уравнения для v^s и v^a к виду:

$$(\omega^2 - k^2 c_A^2) v_{k\omega}^s = \int \frac{kk'}{k''} \{ (v_{k'\omega'}^s \cdot v_{k''\omega''}^a - v_{k'\omega'}^a \cdot v_{k''\omega''}^s) \sin \alpha \cos \alpha - v_{k'\omega'}^a \cdot v_{k''\omega''}^a \sin^2 \alpha \} dk' d\omega', \quad (\text{II. 36})$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k_z^2 c_A^2) v_{k\omega}^a = & \int \frac{kk'}{k''} (\sin \alpha \cos \alpha v_{k'\omega'}^s \cdot v_{k''\omega''}^s + \\ & + v_{k'\omega'}^s \cdot v_{k''\omega''}^s \sin^2 \alpha + v_{k'\omega'}^a \cdot v_{k''\omega''}^s \cos^2 \alpha) dk' d\omega' + \\ & + \int \frac{kk'}{k''} \sin \alpha \cos \alpha \left(\omega + c_A^2 \frac{\omega k_z'^2 - \omega' k_z^2}{\omega' \omega''} \right) v_{k'\omega'}^a \cdot v_{k''\omega''}^a dk' d\omega', \quad (\text{II. 37}) \end{aligned}$$

где $\sin \alpha = \frac{[kk']_z}{kk'}$.

В уравнении для v^a мы умышленно сохранили второй интегральный член, который фактически обращается в нуль для колебаний малой интенсивности, когда можно принять $\omega'^2 = c_A^2 k_z'^2$, $\omega^2 = c_A^2 k_z^2$. Дело в том, что при очень малых k_z , k_z' и достаточно большой амплитуде колебаний может оказаться, что уширение интенсивности колебаний $(v_{k\omega})^2$ по частоте ω будет сравнимо или даже больше величины $k_z c_A$. В этом случае мы не можем уже пренебрегать альфвен-альфвеновским взаимодействием, так как при этом происходит переход к сильной турбулентности, когда теряет смысл выделение δ -зависимости от частоты у спектральных функций.

Мы не будем здесь приводить кинетические уравнения для альфвеновских и магнитозвуковых волн. Их нетрудно получить по аналогии с рассмотренными выше ленгмюровскими и ионно-звуковыми. Отметим лишь, что, согласно уравнениям (II. 36) и (II. 37), матричный элемент взаимодействия оказывается порядка единицы при v^a , $v^s \sim c_A$. Отсюда следует, что время жизни τ по отношению к распаду у отдельной волны с амплитудой v_0 определяется величиной $c_A/\omega_{a,s} v_0$, а характерное время обмена энергией между различными гармониками в размытых волновых пакетах имеет порядок величины $c_A^2/\omega_{a,s} v_0^2$.

§ 2. Взаимодействие волн в плазме с учетом теплового движения частиц

При выводе уравнения (II. 8) мы нигде явно не предполагали, что имеем дело с плазмой, т. е. с системой заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем. Между тем, как мы знаем из линейной теории, дискретность вещества приводит к появлению совершенно специфического затухания волн — затухания Ландау, которое связано с резонансным взаимодействием волн с частицами. Естественно, что это затухание должно проявляться и в нелинейных колебаниях.

Как мы видели выше, нелинейность приводит прежде всего к появлению биений с комбинационными частотами $\omega - \omega'$ и волновыми векторами $k - k'$. Благодаря возможности резонансного взаимодействия частиц с этими биениями появляется дополнительное затухание волн, которое мы будем называть нелинейным затуханием Ландау. В представлении волн и частиц этот процесс соответствует рассеянию волн на частицах, т. е. переизлучению волны k в k' , в то время как линейное затухание Ландау соответствует просто поглощению волны.

Эффект нелинейного затухания дает вклад того же порядка величины, что и процессы распада, а для нераспадных спектров он является основным. Чтобы учесть нелинейное взаимодействие волн с частицами, мы должны воспользоваться кинетическим рассмотрением. Другими словами, мы должны построить кинетиче-

ское уравнение для волн на основе нелинейного кинетического уравнения для частиц. Вместе с тем мы определим, как воздействуют волны на усредненную функцию распределения.

*Кинетическое уравнение для волн
с учетом теплового движения частиц*

Чтобы не усложнять изложение излишними выкладками, мы рассмотрим сначала простейший случай продольных ленгмюровских колебаний, а затем укажем, как должны быть обобщены уравнения на случай произвольных колебаний. Допустим, что в равновесном состоянии плазма однородна, электрическое и магнитное поля отсутствуют. Разобьем, как обычно, функцию распределения электронов на две части — усредненную по времени f и осциллирующую f' , которую мы разложим в интеграл Фурье. Разделив кинетическое уравнение на два путем усреднения, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = -i \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k} \langle \varphi_{\mathbf{k}'\omega'}^* f_{\mathbf{k}\omega} \rangle d\mathbf{k} d\omega d\mathbf{k}' d\omega', \quad (\text{II. 38})$$

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{e}{m} i \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{k}\omega} - i \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' (\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}^* f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} - \langle \varphi_{\mathbf{k}'\omega'}^* f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \rangle) d\mathbf{k}' d\omega', \quad (\text{II. 39})$$

где $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ — Фурье-компонента потенциала электрического поля, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{\mathbf{k}\omega} d\mathbf{v}. \quad (\text{II. 40})$$

Если в уравнении для $f_{\mathbf{k}\omega}$ пренебречь квадратичными членами, то $f_{\mathbf{k}\omega}$ линейно выражается через $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$:

$$f_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{m} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu)^{-1} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{k}\omega}, \quad (\text{II. 41})$$

где положительная величина $\nu \rightarrow 0$, учитывающая наличие малого затухания, добавлена нами для правильного обхода полюса. Подставляя это выражение в уравнение (II. 40), получим

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \varphi_{\mathbf{k}\omega} = 0, \quad (\text{II. 42})$$

т. е. дисперсионное уравнение $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$, определяющее собственную частоту колебаний с данным волновым числом. Здесь величина

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d\mathbf{v} \quad (\text{II. 43})$$

представляет собой диэлектрическую проницаемость плазмы.

Перейдем к решению нелинейного уравнения в предположении, что амплитуда колебаний мала. Прежде всего, запишем

уравнение (II. 39) в более компактной форме:

$$f_{k\omega} = (g_{k\omega} k) f_{\varphi_{k\omega}} + \int (g_{k\omega} k') (\varphi_{k'\omega'} f_{k-k', \omega-\omega'} - \langle \varphi_{k'\omega'} f_{k-k', \omega-\omega'} \rangle) dk d\omega', \quad (\text{II. 44})$$

где g представляет собой оператор, действующий на переменную v

$$g = (\omega - kv + iv)^{-1} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (\text{II. 45})$$

В уравнении (II. 44) квадратичный член можно считать малым. Пользуясь этим, производим итерирование этого уравнения и представляем $f_{k\omega}$ в виде

$$\begin{aligned} f_{k\omega} = & (g_{k\omega} k) f_{\varphi_{k\omega}} + \int (g_{k\omega} k') (g_{k-k'}) (k-k') f \{ \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k-k', \omega-\omega'} - \\ & - \langle \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k-k', \omega-\omega'} \rangle \} dk' d\omega' + \iint (g_{k\omega} k') (g_{k-k'} k'') \times \\ & \times (g_{k-k'-k''}) (k-k'-k'') f \{ \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} - \\ & - \varphi_{k'\omega'} \langle \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} \rangle - \\ & - \langle \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} \rangle \} dk' d\omega' dk'' d\omega'' + \dots \quad (\text{II. 46}) \end{aligned}$$

В принятом нами приближении в соотношении (II. 46) можно пренебречь членами четвертой и более высоких степеней по амплитуде колебаний. Подставляя выражение (II. 46) в уравнение (II. 40) мы получим нелинейное уравнение для потенциала $\varphi_{k\omega}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k\omega) \varphi_{k\omega} = & \int V_{k\omega, k'\omega'} \{ \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k-k', \omega-\omega'} - \\ & - \langle \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k-k', \omega-\omega'} \rangle \} dk' d\omega' + \int V_{k\omega, k'\omega', k''\omega''} \times \\ & \times \{ \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k-k'-k''} - \varphi_{k'\omega'} \langle \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} \rangle - \\ & - \langle \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} \rangle \} dk' d\omega' dk'' d\omega'', \quad (\text{II. 47}) \end{aligned}$$

где матричные элементы даются соотношениями

$$V_{k\omega, k'\omega'} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int (g_{k\omega} k') g_{k-k', \omega-\omega'} (k-k') f dv, \quad (\text{II. 48})$$

$$\begin{aligned} V_{k\omega, k'\omega', k''\omega''} = & -\frac{4\pi e}{k^2} \int (g_{k\omega} k') (g_{k-k', \omega-\omega'} k'') (g_{k-k'-k'', \omega-\omega'-\omega''} \times \\ & \times (k-k'-k'')) f dv. \quad (\text{II. 49}) \end{aligned}$$

Уравнение (II. 47) аналогично модельному уравнению (II. 1), дополненному кубичным членом вида (II. 9). Поэтому мы сразу можем воспользоваться результатами предыдущего пункта и по аналогии с выражениями (II. 6), (II. 7) получим следующее кинетическое уравнение для волн с учетом теплового движения

частий:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) I_{\mathbf{k}\omega} = & I_{\mathbf{k}\omega} \frac{4\pi e}{k^2} \int \int (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \{ (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{-\mathbf{k}', -\omega'}) f + \\ & - (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) f \} d\mathbf{v} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + I_{\mathbf{k}\omega} \int \frac{v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} v_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}}{\varepsilon_+(\mathbf{k}', \omega')} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \quad (\text{II. 50}) \\ & + \frac{1}{2\varepsilon_+(\mathbf{k}\omega)} \int |v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned}$$

где $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\omega'' = \omega - \omega'$, $\varepsilon_+(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega + i\nu)$,

$$v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} + V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega''} = v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega''}.$$

Квадратичные члены в правой части уравнения (II. 50) описывают дополнительное затухание и сдвиг собственных частот за счет нелинейного взаимодействия волн. При $\nu/\omega \ll 1$, т. е. $\varepsilon''/\varepsilon' \ll \ll 1$ ($\varepsilon' = \text{Re} \varepsilon$, $\varepsilon'' = \text{Im} \varepsilon$) уравнение (II. 50) можно решать по методу последовательных приближений. В нулевом приближении полагаем $\varepsilon' I_{\mathbf{k}\omega} = 0$, откуда следует, что $I_{\mathbf{k}\omega} = I_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$, где $\omega_{\mathbf{k}}$ — собственная частота. В следующем приближении достаточно учесть только мнимую часть уравнения (II. 50). Обозначая через $\gamma_{\mathbf{k}}$ линейный инкремент $\gamma_{\mathbf{k}} = -\varepsilon'' \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)^{-1}$ и добавляя член с производной по времени, запишем мнимую часть уравнения (II. 50) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \gamma_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}} + I_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{-1} \text{Im} \frac{4\pi e}{k^2} \int \int (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \times \\ & \times \{ (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{-\mathbf{k}', -\omega'}) f + (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) f \} d\mathbf{v} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' + \\ & + I_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{-1} \text{Im} \int \frac{v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} v_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}}{\varepsilon(\mathbf{k}'', \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} + i\nu)} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' + \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right)_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^{-2} \int |v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}) I_{\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}''} d\mathbf{k}'. \quad (\text{II. 51}) \end{aligned}$$

Здесь последний член и вычетная часть предпоследнего члена описывают процессы распада волн, а остальные нелинейные добавки учитывают когерентное рассеяние волн на частицах (нелинейное затухание Ландау).

Это уравнение написано нами только для электронов. Чтобы включить ионы, достаточно лишь учесть их вклад в ε и в матричные элементы $v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}$, а также просуммировать второе слагаемое в правой части (II. 51) по двум сортам частиц. Нетрудно также обобщить эти уравнения на случай, когда плазма находится в магнитном поле: для этого достаточно лишь соответствующим образом видоизменить операторы $\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}$. Обобщение на случай произвольных (а не только продольных) колебаний связано с дополнительным усложнением формул, так как при этом вместо ε при-

ходится использовать детерминант системы уравнений для компонент электрического поля, и вместо одного кинетического уравнения необходимо написать уравнения для каждой из возможных поляризации.

Учет тепловых флуктуаций

Всюду выше под f мы подразумевали плавную функцию, усредненную по малым макроскопическим объемам в фазовом пространстве. Тем самым мы с самого начала оставили вне поля зрения тепловые флуктуации, связанные с дискретностью вещества. Не представляет труда отказаться от указанного допущения и включить в рассмотрение тепловые флуктуации.

Как известно, кинетическое уравнение Власова без члена столкновений может быть написано для микроскопической функции распределения $f_m(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j)$, где суммирование проводится по всем частицам данного сорта. Разобьем функцию f_m на две части: среднюю f и флуктуационную f^μ , в среднем по макроскопическому объему обращающуюся в нуль. Если пренебречь взаимодействием частиц, что вполне допустимо для разреженной плазмы, у которой дебаевское число $N_D = nD^3 \gg 1$, то для среднеквадратичной величины будем иметь

$$\langle f^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f^\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \times \\ \times \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')) f(\mathbf{v}) \quad (\text{II. 52})$$

в координатном представлении и

$$\langle f_{\mathbf{k}\omega}^\mu(\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}'\omega'}^\mu(\mathbf{v}') \rangle = \\ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{f(\mathbf{v})}{(2\pi)^3} \quad (\text{II. 53})$$

в Фурье-представлении.

Корреляционная функция (II. 52) соответствует свободно пролетающим частицам, она удовлетворяет кинетическому уравнению без учета взаимодействия. При наличии колебаний макроскопическая функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ также становится случайной, т. е. появляются макроскопические флуктуации, которые учитывались нами ранее.

Нетрудно видеть, что тепловые флуктуации были опущены, когда мы выражали $f_{\mathbf{k}\omega}$ через $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$. Действительно, общее решение линейризованного кинетического уравнения для продольных колебаний имеет вид

$$f_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{m} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \frac{\varphi_{\mathbf{k}\omega}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} + f_{\mathbf{k}\omega}^\mu(\mathbf{v}), \quad (\text{II. 54})$$

где функция $f_{\mathbf{k}\omega}^\mu$ удовлетворяет уравнению

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}\omega}^\mu = 0. \quad (\text{II. 55})$$

В отсутствие внешних пучков под $f_{\mathbf{k}\omega}^\mu$ можно подразумевать флуктуационную функцию, удовлетворяющую соотношению

(II. 52). Ранее мы пренебрегали этой добавкой, считая, что амплитуда турбулентных колебаний значительно превышает тепловой уровень. С учетом $f_{k\omega}^{\mu}$ уравнение для $\varphi_{k\omega}$ принимает вид

$$\varepsilon(k\omega) \varphi_{k\omega} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{k\omega}^{\mu} d\nu, \quad (\text{II. 56})$$

т. е. появляется дополнительный источник шумов. В соответствии с этим в уравнении (II. 50) появится дополнительное слабое, учитывающее тепловые флуктуации, и оно примет вид [51]:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k\omega) I_{k\omega} = & \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{k^4 \varepsilon_+^*(k\omega)} \int f(\nu) \delta(\omega - k\nu) d\nu + \\ & + \frac{4\pi e}{k^2} I_{k\omega} \int \int (k' g_{k\omega}) \{ (k g_{k''\omega''}) (k' g_{-k', -\omega'}) f + \\ & + (k' g_{k''\omega''}) (k g_{k\omega}) f \} d\nu I_{k'\omega'} d k' d\omega' + \\ & + I_{k\omega} \int \frac{v_{k\omega} k''\omega'' v_{k''\omega'' k\omega}}{\varepsilon_+(k''\omega'')} I_{k'\omega'} d k' d\omega' + \frac{1}{2\varepsilon_+^*(k\omega)} \times \\ & \times \int |v_{k\omega, k'\omega'}| I_{k'\omega'} I_{k''\omega''} d k' d\omega'. \end{aligned} \quad (\text{II. 57})$$

Первый член в правой части этого уравнения как раз и учитывает тепловые флуктуации. С учетом тепловых флуктуаций уравнение (II. 51) символически можно представить в виде

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \gamma I + q - \alpha I^2, \quad (\text{II. 58})$$

где первый член описывает раскачку колебаний с инкрементом γ , q представляет собой источник тепловых шумов, а нелинейный член описывает взаимодействие волн. Отсюда видно, что в стационарном турбулентном состоянии при большом инкременте можно пренебречь q , и тогда $I = \gamma/\alpha$. С другой

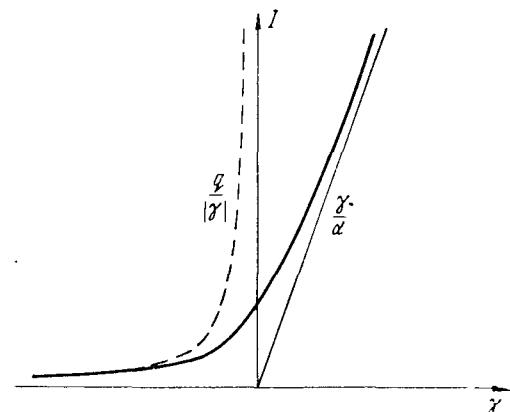


Рис. 11. Зависимость интенсивности шумов от инкремента нарастания малых колебаний.

стороны, при отрицательном и не слишком малом по абсолютной величине γ в уравнении (II. 58) можно пренебречь нелинейным членом, так что $I = q/|\gamma|$. При этом в плазме имеются только тепловые шумы. При $\gamma \rightarrow 0$ интенсивность этих шумов стремится к бесконечности, и для определения I следует удерживать нелинейный член. Эти рассуждения иллюстрируются рис. 11, на котором показан переход от тепловых флуктуаций к турбулентным.

Взаимодействие частиц с волнами

Обратимся теперь к уравнению для усредненной функции (II. 38). Выражение в правой части этого уравнения мы опять обозначим через S_{ef} . Как видно из уравнения (II. 38), член столкновений частиц с волнами можно представить в виде

$$S_{ef} = \text{Im} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k} P_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) d\mathbf{k} d\omega, \quad (\text{II. 59})$$

где корреляционная функция $P_{\mathbf{k}\omega}$ определяется соотношением:

$$P_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \langle \Phi_{\mathbf{k}'\omega'}^* f_{\mathbf{k}\omega} \rangle. \quad (\text{II. 60})$$

Пользуясь выражением (II. 46) для $f_{\mathbf{k}\omega}$ и добавляя к нему часть $f_{\mathbf{k}\omega}^{\mu}$, связанную с тепловыми шумами [см. (II. 53)], получим в приближении случайных фаз

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = & - \frac{4\pi e f}{(2\pi)^3 k^2 \varepsilon_+^*(\mathbf{k}\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + I_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{k}\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) f - \\ & - I_{\mathbf{k}\omega} \int (\mathbf{k}'\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \{ (\mathbf{k}\mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k}'\mathbf{g}_{-\mathbf{k}', -\omega'}) f + (\mathbf{k}'\mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) (\mathbf{k}\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) f \} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' \times \\ & \times d\omega' + I_{\mathbf{k}\omega} \int \frac{v_{\mathbf{k}'\omega'}, \mathbf{k}\omega}{\varepsilon_+(\mathbf{k}'\omega')} (\mathbf{k}'\mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) \{ (\mathbf{k}''\mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}) f + (\mathbf{k}'\mathbf{g}_{\mathbf{k}'\omega'}) f \} \times \\ & \times I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \frac{1}{\varepsilon_+(\mathbf{k}\omega)} \int v_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}^* (\mathbf{k}, \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega}) (\mathbf{k}''\mathbf{g}_{\mathbf{k}''\omega''}) f \times \\ & \times I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (\text{II. 61})$$

где

$$\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}', \quad \omega'' = \omega - \omega', \quad \varepsilon_+(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_+(\mathbf{k}\omega + i\nu).$$

В выражении (II. 61) первое слагаемое описывает торможение отдельных частиц за счет поляризации среды и черенковского излучения продольных волн. Второе слагаемое, линейное по $I_{\mathbf{k}\omega}$, уже рассматривалось нами ранее при знакомстве с квазилинейным приближением, а остальные члены в выражении (II. 61) обязаны своим происхождением нелинейному взаимодействию.

Рассмотрим сначала простейший случай стационарной устойчивой плазмы, когда квадратичными по I членами в равенствах (II. 57) и (II. 61) можно пренебречь. Определяя из кинетического уравнения для волн (II. 57) интенсивность равновесных флуктуаций $I_{\mathbf{k}\omega}$ и подставляя найденное значение во второе слагаемое выражения (II. 61), получим

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = & - \frac{4\pi e f \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{(2\pi)^3 k^2 \varepsilon_+^*(\mathbf{k}\omega)} + \\ & + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} \frac{2e^2}{\pi |\varepsilon(\mathbf{k}\omega)|^2 k^4} \int f(\mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') d\mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (\text{II. 62})$$

Подставляя это выражение в (II. 59) и учитывая, что согласно равенству (II. 43),

$$\varepsilon'' = \text{Im } \varepsilon = - \frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (\text{II. 63})$$

получим

$$S_{ef} = \frac{2e^4}{m^2} \int \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}'\mathbf{v}')}{k^4 |\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v})|^2} \left\{ f(\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - f(\mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\} d\mathbf{k} d\mathbf{v}'. \quad (\text{II. 64})$$

В области $kD > 1$ (D — дебаевский радиус экранирования) диэлектрическую проницаемость можно считать равной единице, и интеграл (II. 64), как нетрудно показать, сводится к члену столкновений в форме Ландау (при этом приходится еще производить обрезание интеграла на верхнем пределе при $\mathbf{k} \sim 1/\rho_0$, где ρ_0 — минимальное сближение частиц при парных столкновениях).

В виде (II. 64) член столкновений был получен в работах [52—60]. В нем учитываются не только парные столкновения с прицельными параметрами, меньшими D , но и взаимодействие через продольные волны. Как было показано Б. И. Давыдовым [61], в плазме, близкой к равновесной, вклад в член столкновений от ленгмюровских волн всего лишь на порядок меньше вклада от парных столкновений. В неравновесной плазме вклад от колебаний может быть значительно больше. Так, например, в работе В. П. Силина и Л. М. Горбунова [62] было показано, что в сильно неизотермической плазме ($T_i/T_e < m_e/m_i$) взаимодействие через ионно-звуковые волны преобладает над парными столкновениями. Другой случай, когда взаимодействие частиц с волнами оказывается больше их парного взаимодействия, был рассмотрен в работах [45, 46], где изучалось взаимодействие электронов с циклотронными волнами в сильном магнитном поле.

При приближении к неустойчивости амплитуда тепловых шумов возрастает, и, следовательно, в выражении (II. 61) более существенным становится второе слагаемое, которое приводит к диффузии частиц в пространстве скоростей в квазилинейном приближении. В этом случае, а также при слабой неустойчивости плазмы, более целесообразно рассматривать временную задачу с начальными условиями, в соответствии с чем в кинетическом уравнении для волн (II. 57) следует учесть член с производной по времени от интенсивности колебаний, а в выражении для члена столкновений S_{ef} необходимо учесть адиабатическое взаимодействие частиц с волнами, т. е. член с производной $\frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t}$. Другими словами, мы приходим к квазилинейному приближению, рассмотренному в гл. 1, § 3.

При заметных амплитудах колебаний, когда в плазме развивается турбулентное движение, в кинетическом уравнении для волн (II. 57) и в члене взаимодействия с волнами (II. 59) необ-

ходимо учитывать нелинейность. Некоторые примеры таких процессов будут рассмотрены в гл. IV. Как мы увидим, в целом ряде случаев в плазме могут возбуждаться низкочастотные колебания продольным или поперечным электронным током. Если фазовая скорость этих колебаний вдоль магнитного поля меньше тепловой скорости электронов, то электроны могут резонансно взаимодействовать с волнами, и для них достаточно учесть лишь квазилинейные члены. Для ионов, тепловая скорость которых может быть значительно меньше продольной фазовой скорости волн, приходится учитывать нелинейные члены. В этом случае энергия и импульс электронов резонансным механизмом передаются волнам, а затем поглощаются ионами благодаря нелинейному затуханию на биениях. Процессы такого типа могут приводить к появлению аномального сопротивления плазмы, которое определяет аномальную диффузию плазмы поперек магнитного поля и турбулентный нагрев плазмы.

III. МЕТОДЫ РАССМОТРЕНИЯ СИЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

§ 1. Приближение слабой связи

Уравнения для волн при слабой связи

В гл. I и II взаимодействие между волнами считалось малым, строго говоря, бесконечно малым. Попробуем теперь проследить за тем, что происходит при увеличении матричного элемента взаимодействия. Вернемся опять к модельному уравнению (II. 1), которое мы запишем в виде

$$(\omega - \omega_k) C_{k\omega} = \int V_{k\omega, k'\omega'} C_{k'\omega'} \times \\ \times C_{k-k', \omega-\omega'} d k' d \omega', \quad (\text{III. 1})$$

где частоту ω_k будем считать комплексной величиной.

Допустим, что матричный элемент взаимодействия $V_{k\omega, k'\omega'}$, оставаясь малым, увеличивается, приближаясь по порядку величины к единице. Ясно, что при этом благодаря взаимодействию между отдельными волнами происходит уширение спектра колебаний по частоте, и при переходе к сильной турбулентности зависимость $I_{k\omega}$ от частоты ничего общего не имеет с δ -функцией (рис. 12). Поэтому мы уже не можем пользоваться кинетическим уравнением в форме (II. 12). Но если матричный элемент остается все же меньше единицы, то даже при неслабой турбулентности можно воспользоваться приближенным методом слабой связи.

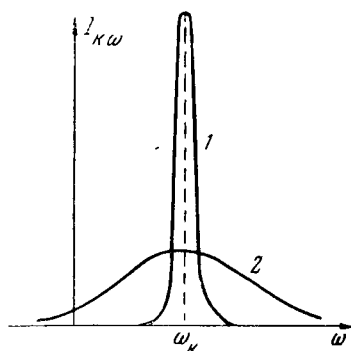


Рис. 12. Спектральные функции при слабой (1) и сильной (2) турбулентности.

Обратим внимание, что согласно уравнению (III. 1) отдельная волна k, ω взаимодействует только с двумя совершенно различными волнами k', ω' и k'', ω'' . Так как волн много, а амплитуда колебаний отдельной волны определяется ее взаимодействием со всеми остальными волнами, то можно думать, что взаимодействие волны k, ω с каждой отдельной волной k', ω' будет сравнительно мало даже при $V \sim 1$. Далее, как мы видели выше, одним из основных эффектов нелинейного взаимодействия является затухание отдельной волны, которое неявно определяется правой частью выражения (III. 1). Естественно выделить заранее это взаимодействие из правой части, записывая уравнение (III. 1) в виде

$$(\omega - \omega_k + \eta_{k\omega}) C_{k\omega} = \eta_{k\omega} C_{k\omega} + \int V_{k\omega, k'\omega'} C_{k'\omega'} C_{k-k', \omega-\omega'} d k' d \omega'. \quad (\text{III. 2})$$

Добавленные нами в правую и левую части этого уравнения члены $\eta_{k\omega} C_{k\omega}$ как раз и учитывают пропорциональную $C_{k\omega}$ долю нелинейного взаимодействия. В правой части уравнения (III. 2), из которой мы уже выделили самодействие каждой отдельной волны, остается только эффект подпитки волн со стороны биений. Эту подпитку мы будем считать малой, что справедливо при $V < 1$. В соответствии с этим примем опять $C_{k\omega} = C_{k\omega}^{(0)} + C_{k\omega}^{(1)}$, где $C_{k\omega}^{(1)} \ll C_{k\omega}^{(0)}$. Для амплитуды вынужденных колебаний $C_{k\omega}^{(1)}$ в правой части уравнения (III. 2) достаточно сохранить лишь нелинейный член, откуда получаем

$$C_{k\omega}^{(1)} = (\omega - \omega_k + \eta_{k\omega})^{-1} \int V_{k\omega, k'\omega'} C_{k'\omega'}^{(0)} C_{k-k', \omega-\omega'}^{(0)} d k' d \omega'. \quad (\text{III. 3})$$

Умножим теперь уравнение (III. 2) на $C_{k\omega}^*$ и усредним результат по статистическому ансамблю. В нелинейный член мы подставим $C_{k\omega} = C_{k\omega}^{(0)} + C_{k\omega}^{(1)}$ и будем считать, что амплитуды $C_{k\omega}^{(0)}$ с различными k, ω статистически независимы. В полной аналогии с выражением (II. 6) нелинейный член сводится к сумме трех слагаемых, два из которых пропорциональны $I_{k\omega}$, а третий — интегралу от произведения $I_{k'\omega'} I_{k''\omega''}$. Определяя величину $\eta_{k\omega}$ таким образом, чтобы пропорциональные $I_{k\omega}$ члены в правой части полученного уравнения сократились, мы получим следующую систему двух интегральных уравнений:

$$|\omega - \omega_k + \eta_{k\omega}|^2 I_{k\omega} = \frac{1}{2} \int |v_{k\omega, k'\omega'}|^2 \times \\ \times I_{k'\omega'} I_{k-k', \omega-\omega'} d k' d \omega', \quad (\text{III. 4})$$

$$\eta_{k\omega} = - \int \frac{v_{k\omega, k''\omega''} v_{k''\omega'', k\omega}}{\omega'' - \omega_{k''} + \eta_{k''\omega''}} I_{k''\omega''} d k'' d \omega'', \quad (\text{III. 5})$$

где

$$v_{k\omega, k'\omega'} = V_{k\omega, k'\omega'} + V_{k\omega, k''\omega''}.$$

Если вместо $\eta_{k\omega}$ ввести новую величину $S_{k\omega} = (\omega - \omega_k + \eta_{k\omega})^{-1}$, то эти уравнения запишутся в виде

$$I_{k\omega} = \frac{1}{2} |S_{k\omega}|^2 \int |v_{k\omega, k'\omega'}|^2 I_{k'\omega'} I_{k''\omega''} dk' d\omega', \quad (\text{III. 6})$$

$$S_{k\omega} = S_{k\omega}^0 - S_{k\omega}^0 S_{k\omega} \int S_{k''\omega''} v_{k\omega, k''\omega''} v_{k''\omega'', k\omega} I_{k'\omega'} d\mathbf{n}' d\omega', \quad (\text{III. 7})$$

где $S_{k\omega}^0 = (\omega - \omega_k)^{-1}$.

Величины $S_{k\omega}$ и $S_{k\omega}^0$ имеют простой физический смысл, который легко выяснить, добавляя в правую часть выражения (III. 2) малый внешний источник $f_{k\omega}$. Повторяя выкладки, нетрудно убедиться в том, что $S_{k\omega}$ представляет собой функцию Грина, которая описывает отклик турбулентной среды на малую «силу» $f_{k\omega}$, а $S_{k\omega}^0$ представляет функцию Грина в линейном приближении.

В теории турбулентности обычной жидкости уравнения вида (III. 6), (III. 7) были установлены Кречнаном [17]. Уайлд показал, что эти уравнения могут быть получены с помощью выборочного суммирования рядов теории возмущений [63]. Чтобы получить уравнения Кречнана, запишем уравнение Навье—Стокса в Фурье-представлении:

$$(ivk^2 + \omega) \mathbf{u}_{k\omega} - \mathbf{k} p_{k\omega} - \int (\mathbf{u}_{k'\omega'} \cdot \mathbf{k}'') \mathbf{u}_{k''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega' = \mathbf{f}_{k\omega}, \quad (\text{III. 8})$$

где $p_{k\omega}$ — давление, $f_{k\omega}$ — внешняя сила, ν — коэффициент кинематической вязкости. Пользуясь условием несжимаемости $\mathbf{k} \mathbf{u}_{k\omega} = 0$, и принимая без ограничения общности $\mathbf{k} \mathbf{f}_{k\omega} = 0$, можно исключить из уравнения (III. 8) давление и привести его к виду

$$(\omega + ik^2\nu) \mathbf{u}_{k\omega} = \mathbf{f}_{k\omega} + \int (\mathbf{u}_{k'\omega'} \cdot \mathbf{k}) \left\{ \mathbf{u}_{k''\omega''} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} \mathbf{u}_{k''\omega''}) \right\} \times \\ \times d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (\text{III. 9})$$

Если повторить проведенные выше выкладки, а затем, считая $f_{k\omega}$ изотропной, усреднить результат по углам, то можно получить следующую систему интегральных уравнений:

$$I_{k\omega} = |S_{k\omega}|^2 q_{k\omega} + \frac{1}{2} |S_{k\omega}|^2 \int k^2 a(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') \times \\ \times I_{k'\omega'} I_{k''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (\text{III. 10})$$

$$\eta_{k\omega} = - \int \frac{k^2 b(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') I_{k'\omega'}}{\omega'' + ivk''^2 + \eta_{k''\omega''}} d\mathbf{k}' d\omega', \quad (\text{III. 11})$$

где $I_{k\omega}$ — спектральная функция скорости: $I_{k\omega} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \langle \mathbf{u}_{k\omega} \mathbf{u}_{k'\omega'} \rangle$, $S_{k\omega} = (\omega + ivk^2 + \eta_{k\omega})^{-1}$, $q_{k\omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') = \langle f_{k\omega} \cdot f_{k'\omega'} \rangle$, а матричные элементы $a(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')$ и $b(\mathbf{k}, \mathbf{k}'')$ определяются

$$a(k, k'') = \frac{1}{2} \left[1 - 2 \frac{(kk')^2 (\bar{k}k'')^2}{k^4 k'^2 k''^2} + \frac{(kk')(k'k'')}{k^2 k'^2 k''^2} \right], \quad (\text{III. 12})$$

$$b(k, k'') = \frac{(kk')^3}{k^4 k'^2} - \frac{(k'k'')(kk'')}{k^2 k'^2}. \quad (\text{III. 13})$$

Полученные уравнения представляют собой преобразованные по Фурье уравнения Кречнана. Как было показано Кречнаном, эти уравнения приводят к неправильному асимптотическому поведению спектральной функции при $k \rightarrow \infty$, а именно, вместо известного спектра Колмогорова $I_k dk \sim \frac{dk}{k^{5/3}}$ из уравнений (III. 10) и (III. 11) следует спектр $I_k dk \sim \frac{dk}{k^{3/2}}$. Как мы увидим ниже, это происходит вследствие того, что в приведенном здесь приближении слабой связи не выделено адиабатическое взаимодействие далеких гармоник.

Слабая связь в кинетике

Покажем на примере ленгмюровских электронных колебаний, как могут быть составлены уравнения слабой связи для сильной турбулентности в бесстолкновительной плазме. За исходные уравнения принимаем следующие:

$$\varphi_{k\omega} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{k\omega} d\mathbf{v}, \quad (\text{III. 14})$$

$$(\omega - k\mathbf{v}) f_{k\omega} = \frac{e}{m} \varphi_{k\omega} k \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \\ + \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' \{ \varphi_{k'\omega'} f_{k''\omega''} - \langle \varphi_{k'\omega'} f_{k''\omega''} \rangle \} dk' d\omega'. \quad (\text{III. 15})$$

Представим снова $f_{k\omega}$ и $\varphi_{k\omega}$ в виде $f_{k\omega}^{(0)} + f_{k\omega}^{(1)}$, $\varphi_{k\omega}^{(0)} + \varphi_{k\omega}^{(1)}$, где индексом (1) отмечены добавки, отвечающие вынужденным колебаниям. Нетрудно видеть, что будучи подставленными в нелинейный член, эти добавки приведут к слагаемым, среди которых, в частности, будут содержаться члены «самодействия», пропорциональные соответственно $f_{k\omega}$ и $\varphi_{k\omega}$. Естественно опять выделить заранее эти слагаемые. За счет нелинейности эти слагаемые не пропорциональны один другому, другими словами, их отношение является случайной величиной. Поэтому мы выделим члены самодействия в виде линейной комбинации $f_{k\omega}$ и $\varphi_{k\omega}$:

$\eta_{k\omega} f_{k\omega} + \xi_{k\omega} \Phi_{k\omega}$, где $\eta_{k\omega}$ является оператором, действующим на переменную \mathbf{v} , а $\xi_{k\omega}$ — функцией скорости. В результате получим для $\varphi_{k\omega}^{(1)}$ и $f_{k\omega}^{(1)}$

$$\varphi_{k\omega}^{(1)} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_{k\omega}^{(1)} d\mathbf{v}, \quad (\text{III. 16})$$

$$\begin{aligned} (\omega - k\mathbf{v} + \eta_{k\omega}) f_{k\omega}^{(1)} - \xi_{k\omega} \varphi_{k\omega}^{(1)} - \frac{e}{m} \varphi_{k\omega}^{(1)} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \\ = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' \varphi_{\mathbf{k}'\omega}^{(0)} f_{\mathbf{k}'\omega}^{(0)} d\mathbf{k}' d\omega'. \end{aligned} \quad (\text{III. 17})$$

С помощью этих уравнений выразим $f_{k\omega}^{(1)}$, $\varphi_{k\omega}^{(1)}$ через интеграл от $\varphi_{\mathbf{k}'\omega}^{(0)}$, $f_{\mathbf{k}'\omega}^{(0)}$ и подставим полученное выражение в нелинейный член уравнения (III. 15). Умножая затем уравнения (III. 14) и (III. 15) на $\varphi_{k\omega}^*$ и производя усреднение по случайным фазам некоррелированных амплитуд $\varphi_{k\omega}^{(0)}$, $f_{k\omega}^{(0)}$, получим после снятия индекса (0)

$$I_{k\omega} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int P_{k\omega} d\mathbf{v}, \quad (\text{III. 18})$$

$$\begin{aligned} (\omega - k\mathbf{v}) P_{k\omega} = \frac{e}{m} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} I_{k\omega} - \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}'\omega''} (\mathbf{k} P_{-\mathbf{k}'-\omega'} I_{k\omega} - \\ - \mathbf{k}' P_{k\omega} I_{\mathbf{k}'\omega'}) d\mathbf{k}' d\omega' + I_{k\omega} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}'\omega''} \mathbf{k}'' f) \\ \left\{ \frac{\tilde{v}_{\mathbf{k}''\omega'', k\omega}}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}'', \omega'')} I_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{\tilde{v}_{\mathbf{k}'\omega', k\omega}}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}'\omega')} I_{\mathbf{k}''\omega''} \right\} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ + \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}'\omega''} \mathbf{k}'' f) \cdot \frac{\tilde{v}_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'}}{\tilde{\varepsilon}^*(\mathbf{k}\omega)} I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (\text{III. 19})$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_{k\omega} = (\omega - k\mathbf{v} + \eta_{k\omega})^{-1} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}; \quad \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}\omega) = 1 + \\ + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v}}{\omega - k\mathbf{v} + \eta_{k\omega}} + \frac{4\pi e}{k^2} \int \frac{\xi_{k\omega} d\mathbf{v}}{\omega - k\mathbf{v} + \eta_{k\omega}}; \quad (\text{III. 20}) \\ \tilde{v}_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int \{ (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k}') (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}'\omega'} \mathbf{k}'' f) + \\ + (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k}'') (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}'\omega'} \mathbf{k}' f) \} d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Из соотношения (III. 19) видно, что нелинейный член в рассматриваемом приближении действительно приводит к сумме

двух слагаемых, из которых первое пропорционально $P_{\mathbf{k}\omega}$, а второе возникает в результате усреднения вида $(\varphi^*\varphi)$. Отождествляя их соответственно с $\eta_{\mathbf{k}\omega} P_{\mathbf{k}\omega}$ и $\xi_{\mathbf{k}\omega} I_{\mathbf{k}\omega}$, получаем

$$\eta_{\mathbf{k}\omega} \mu_{\mathbf{k}\omega} = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' \left(\mathbf{k}' \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}''\omega''} \right) \mu_{\mathbf{k}\omega} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (\text{III. 21})$$

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{k}\omega} = & \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \left(\mathbf{k}' \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}''\omega''} \right) \mathbf{k} P_{-\mathbf{k}', -\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \\ & + \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' \left(\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}''\omega''} \mathbf{k}'' f \right) \left\{ \frac{\tilde{v}_{\mathbf{k}''\omega'', \mathbf{k}\omega}}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}''\omega'')} I_{\mathbf{k}'\omega'} + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{v}_{\mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}\omega}}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}'\omega')} I_{\mathbf{k}''\omega''} \right\} d\mathbf{k}' d\omega', \end{aligned} \quad (\text{III. 21a})$$

где

$$\mu_{\mathbf{k}\omega} = P_{\mathbf{k}\omega} / I_{\mathbf{k}\omega}.$$

Учитывая эти соотношения и подставляя выражение для $P_{\mathbf{k}\omega}$ из уравнения (III. 19) в (III. 18), получим одно из искомым интегральных уравнений:

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}\omega) I_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2} \int \left| \tilde{v}_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} \right|^2 I_{\mathbf{k}'\omega'} I_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega'. \quad (\text{III. 22})$$

В качестве второго уравнения можно использовать (III. 21), а третье мы получим, подставляя выражение для $\xi_{\mathbf{k}\omega}$ (III. 21a) в соотношение (III. 20):

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}\omega) = & 1 + \frac{4\pi e}{k^2} \int \left(\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k} \right) f d\mathbf{v} + \frac{4\pi e}{k^2} \int \left(\mathbf{k} \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}\omega} \right) \left(\mathbf{k}' \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}''\omega''} \right) \times \\ & \times P_{-\mathbf{k}'-\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' d\mathbf{v} + \\ & + \frac{4\pi e}{k^2} \int \frac{\tilde{v}_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''} \tilde{v}_{\mathbf{k}''\omega'', \mathbf{k}\omega}}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}''\omega'')} I_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega'. \end{aligned} \quad (\text{III. 23})$$

Если принять приближенно $\mu_{\mathbf{k}\omega} = \left(\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k} \right) f$, то уравнения (III. 21), (III. 22) и (III. 23) составят полную систему уравнений для трех неизвестных величин $\eta_{\mathbf{k}\omega}$, $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}\omega)$ и $I_{\mathbf{k}\omega}$. Поскольку $\eta_{\mathbf{k}\omega}$ является оператором, то эти уравнения символические, и для выяснения их смысла необходимо провести разложение в ряды по степеням $I_{\mathbf{k}\omega}$. Разложение в ряды по амплитуде колебаний и выборочное их суммирование необходимо и для строгого обоснования написанных выше уравнений, полученных нами, по существу, на основе полуинтуитивных соображений. (Как было показано А. Б. Михайловским на примере плазмы в сильном магнитном поле, интегральные уравнения вида (III. 21)—(III. 22)

действительно могут быть получены выборочным суммированием, аналогичным суммированию Уайлда, которое в первом приближении приводит к уравнениям Кречнана).

Резонансное и адиабатическое взаимодействие волн

В предыдущих рассуждениях была допущена неточность, связанная с тем, что мы неявно допускали возможность только резонансного взаимодействия между волнами. Между тем, взаимодействие далеких по длине волны гармоник не является резонансным. (Здесь и ниже под взаимодействием волн мы подразумеваем лишь секулярную часть взаимодействия, приводящую к затуханию волн, а не к сдвигу их собственных частот.)

Чтобы более детально проанализировать характер взаимодействия между волнами, рассмотрим опять модельное уравнение (III. 1). Допустим для простоты, что частота ω_k монотонно возрастает с k , а отношение инкремента к частоте γ_k/ω_k мало. Как мы уже выяснили ранее, в установившемся турбулентном состоянии затухание каждой отдельной волны за счет распада в точности компенсируется подпиткой за счет биений. При этом волна k , ω существует в течение времени порядка γ^{-1} и занимает область пространства порядка $\frac{\omega}{\gamma k}$. Действительно, за время порядка γ^{-1} отдельно взятая волна полностью исчезает. Она сменяется другой волной, которая возникает за счет биений, и следовательно, может быть не коррелирована с первой. А так как каждая волна (точнее, волновой пакет) расплывается со временем, то независимо от начальной локализации в установившемся состоянии длина локализации L будет порядка расстояния, на которое может распространиться волна за время своего существования, т. е. $L \sim \gamma^{-1} \frac{d\omega}{dk} \sim \frac{\omega}{\gamma k}$.

Таким образом, турбулентное движение сплошной среды представляет собой набор многих волновых пакетов, которые и следует рассматривать как «единицы», из которых составлена рассматриваемая нами система с большим числом степеней свободы. При $\gamma/\omega \ll 1$ эти пакеты существуют весьма длительные промежутки времени и являются весьма протяженными, так что можно говорить о волнах, совершенно не локализованных в пространстве. Но если γ/ω увеличивается, то мы должны учитывать, что единицами турбулентного движения являются не Фурье-компоненты рассматриваемой нами величины (например, скорости), а отдельные волновые пакеты. Другими словами, при конечном γ/ω близкие Фурье-компоненты нельзя уже считать слабо коррелированными.

Это утверждение можно пояснить еще следующим образом. Рассмотрим область волновых чисел порядка k . Поскольку волны в этой области существуют время $t \sim \gamma_k^{-1}$, то при усреднении

квадратичных величин по времени достаточно ограничиться интервалами времени $t \sim \gamma_k^{-1}$. Все медленные степени свободы, т. е. колебания с частотами $\omega' \sim \gamma_k$ в течение этого времени можно считать фиксированными, и усреднение по ним производить не следует. Эти степени свободы могут быть учтены точно так же, как неоднородность «фона», т. е. усредненной величины. Для коротких волн эта неоднородность может быть учтена в квазиклассическом приближении. Как мы видели ранее, она приводит к деформации волновых пакетов, т. е. к изменению длины волны колебаний со временем. Вследствие деформации волновые пакеты перемещаются в пространстве волновых чисел, благодаря чему создается сильная корреляция близких Фурье-компонент, которые описывают по существу один и тот же волновой пакет.

Взаимодействие волны \mathbf{k} , ω с медленной волной \mathbf{k}' , ω' приводит к адиабатическому изменению волнового вектора \mathbf{k} и частоты ω рассматриваемого волнового пакета. Это взаимодействие нельзя рассматривать как резонансную подпитку волны \mathbf{k} , ω близкой к ней волной $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\omega'' = \omega - \omega'$, поскольку Фурье-компоненты $C_{\mathbf{k}\omega}$ и $C_{\mathbf{k}''\omega''}$ относятся фактически к одному и тому же волновому пакету и их нельзя рассматривать как независимые.

Таким образом, при конечном γ/ω мы должны делать различие между резонансным и адиабатическим взаимодействием волн. Чтобы учесть это различие, следует перейти от Фурье-компонент непосредственно к волновым пакетам. При этом для каждого пакета со средним значением частоты ω и средним волновым вектором k область интегрирования \mathbf{k}' , ω' в нелинейном члене удобно разбить на три: основную (1), где $k' \sim k$, $\omega' \sim \omega$; длинноволновую (2), где $\omega' \sim \gamma$; коротковолновую (3), где $\gamma' \sim \omega$ (мы считаем γ/ω малым).

При малом γ/ω распылением волновых пакетов в основной области можно пренебречь. При этом мы можем использовать уравнение (III. 1) для Фурье-компонент. В областях 2 и 3 можно воспользоваться квазиклассическим приближением, т. е. разложением соответственно по k'/k , ω'/ω и k/k' , ω/ω' . Если ограничиться первым (точнее, нулевым) приближением, то получим

$$\begin{aligned}
 (\omega - \omega_{\mathbf{k}}) C_{\mathbf{k}\omega} &\approx \int_{(1)} V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}''\omega''} d\mathbf{k}' d\omega' + \\
 &+ C_{\mathbf{k}\omega} \int_{(2)} (V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} + V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}''\omega''}) C_{\mathbf{k}'\omega'} d\mathbf{k}' d\omega' + \\
 &+ \int_{(3)} V_{\mathbf{k}\omega, \mathbf{k}'\omega'} |C_{\mathbf{k}'\omega'}|^2 d\mathbf{k}' d\omega', \quad (\text{III. 24})
 \end{aligned}$$

где мы для простоты опустили экспоненту $e^{-i\omega't + ik'r}$ в интеграле по области 2, принимая $C_{\mathbf{k}'\omega'}$ медленно меняющейся функцией от \mathbf{r} , t .

В выражении (III. 24) последний интегральный член можно опустить, так как при разделении уравнения для C на два (для усредненной функции и колеблющейся) мы должны были бы включить его в уравнение для усредненной функции. Второй интеграл в правой части (III. 24) пропорционален $C_{k\omega}$, и, следовательно, он дает просто сдвиг собственной частоты. В области I этот сдвиг приближенно можно считать постоянным, и если матричный элемент $V_{k\omega, k'\omega'}$ зависит только от разности частот $\omega - \omega'$ или вообще не зависит от ω, ω' , что часто имеет место, то введением новой переменной вместо ω его можно исключить. В результате мы приходим к прежнему уравнению (III. 1) с той лишь разницей, что интегрирование в нелинейном члене ведется не по всем возможным k', ω' , а только по области I . Отсюда следует, что выделение адиабатического взаимодействия оказывается существенным только для области достаточно больших волновых чисел, когда нижняя граница области I лежит выше основного масштаба турбулентности k_0, ω_0 .

Из изложенного выше ясно, почему простое приближение слабой связи привело Кречнана к получению неправильного спектра: такое приближение переоценивает роль крупномасштабных пульсаций, действие которых фактически сводится к простому переносу турбулентных пульсаций с малой их деформацией. Если в уравнениях слабой связи (III. 10) и (III. 11) при интегрировании по k', ω' исключить область малых k', ω' , полагая нижнюю границу $k' \sim \xi k, \omega' \sim \xi \omega$, где ξ — малое постоянное число (скажем, $\xi \sim 1/3$), то эти уравнения примут автомодельный характер, и для I_k получится правильная зависимость $I_k dk \sim k^{-3/2} dk$. Что же касается пульсаций с масштабом порядка основного, то для них, по-видимому, достаточно простого приближения слабой связи.

Улучшенное приближение слабой связи

Чтобы получить более полное представление о взаимодействии пульсаций в турбулентной среде, мы учтем в уравнении вида (III. 24) следующие члены разложения по малым k', ω' , которые учитывали бы искажение рассматриваемых нами пульсаций длинноволновыми возмущениями. Предполагая для простоты, что матричный элемент от частоты не зависит, получим вместо выражения (III. 24) следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 (\omega - \omega_k - \omega_l) C_{k\omega} \cong & \int_{(1)} V_{kk'} C_{k'\omega'} C_{k-k', \omega-\omega'} dk' d\omega' - \\
 - \frac{\partial C_{k\omega}}{\partial k} \int_{(2)} k' v_{kk'} C_{k'\omega'} dk' d\omega' - \frac{\partial C_{k\omega}}{\partial \omega} \int_{(2)} \omega' v_{kk'} C_{k'\omega'} dk' d\omega' + \\
 + \frac{1}{2} \int_{(3)} v_{kk'} \langle C_{k'\omega'} C_{k''\omega''} \rangle_s dk' d\omega' dk'' d\omega'', \quad (III. 25)
 \end{aligned}$$

где

$$v_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}, \quad \omega_l = \int_{(2)} v_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}'\omega'} dk' d\omega'. \quad (\text{III. 26})$$

В уравнении (III. 25) мы записали последний член в виде среднего значения по высокочастотным колебаниям $\langle \dots \rangle_s$, что вполне допустимо, так как в коротковолновой области \mathcal{Z} колебания успевают полностью усредниться за один период рассматриваемых нами колебаний с частотой ω .

Как мы видим, второе и третье слагаемые в правой части (III. 25) пропорциональны соответственно $\frac{\partial \omega_l}{\partial \mathbf{r}}$ и $\frac{\partial \omega_l}{\partial t}$. Они описывают искажение волнового пакета \mathbf{k}, ω за счет слабой неоднородности и ее медленного изменения. Этот эффект вполне аналогичен рассмотренному нами ранее искажению волновых пакетов в неоднородной среде (см. гл. I § 3).

В уравнении (III. 25) удобно перейти к относительным частотам $\nu = \omega - \omega_l$. Для соответствующих амплитуд колебаний мы сохраним прежнее обозначение $C_{\mathbf{k}\nu}$. Нетрудно видеть, что при переходе к переменной ν третий интеграл в правой части уравнения (III. 25) исчезает, так как $i \frac{\partial C_{\mathbf{k}\nu}}{\partial t} = \left(\nu - \frac{\partial \omega_l}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) C_{\mathbf{k}\nu}$. В остальном все выражения сохраняют прежний вид, лишь частоты ω, ω' заменяются на ν, ν' .

Пользуясь приведенной ранее аргументацией, мы опять выделим из правой части уравнения (III. 25) величину $\eta_{\mathbf{k}\nu} C_{\mathbf{k}\nu}$, пропорциональную $C_{\mathbf{k}\nu}$, а затем представим амплитуду в виде $C_{\mathbf{k}\nu}^{(0)} + C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)}$, где $C_{\mathbf{k}\nu}$ описывает вынужденные колебания. Согласно уравнению (III. 25), амплитуду $C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)}$ можно представить в виде суммы двух слагаемых $C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)} + C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)}$, где первое обусловлено резонансным взаимодействием в области l , а второе, равное

$$C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)} = -(\nu - \omega_{\mathbf{k}} + \eta_{\mathbf{k}\nu})^{-1} \frac{\partial C_{\mathbf{k}\nu}^{(0)}}{\partial \mathbf{k}} \int_{(2)} \mathbf{k}' v_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} dk' d\omega', \quad (\text{III. 27})$$

возникает в результате искажения пульсаций на длинноволновых неоднородностях.

Если умножить на $C_{\mathbf{k}\nu}^*$ уравнение вида (III. 25) для $C_{\mathbf{k}\nu}$ с выделенным членом $\eta_{\mathbf{k}\nu}$ и усреднить результат по всем случайным фазам амплитуд $C_{\mathbf{k}\nu}^{(0)}$, то наряду с найденным ранее вкладом от резонансного взаимодействия мы получим дополнительные слагаемые двух видов. Два слагаемых первого вида возникают от второго члена в правой части уравнения (III. 25). Их сумма пропорциональна $C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)*} \frac{\partial C_{\mathbf{k}\nu}^{(0)}}{\partial \mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}\nu}^{(0)*} \frac{\partial C_{\mathbf{k}\nu}^{(1)}}{\partial \omega}$. Эти члены описывают диффузию волнового пакета \mathbf{k}, ν в импульсном пространстве за

счет искажения на длинноволновых пульсациях. Нетрудно видеть, что величина соответствующего коэффициента диффузии оказывается пропорциональной интегралу по области 2 от величины $k'^2 I_{k'v'}$. Так как волновое число k' в этой области очень мало, то эффектом диффузии на длинноволновых пульсациях можно пренебречь¹. Вторая группа дополнительных слагаемых возникает от последнего интегрального члена в уравнении (III. 25), где вместо $S_{k''v''}$ или $S_{k''v''}$ следует подставить $C_l^{(1)}$. Так как $S_{k'v'}$ и $S_{k''v''}$ входят совершенно симметрично, то вполне достаточно заменить на $C_l^{(1)}$ только $S_{k''v''}$, удвоив затем результат. Если вспомнить, что по отношению к области 3 роль длинноволновой области (так сказать, области 2) играет именно область 1, то нетрудно найти соответствующий вклад. Этот вклад оказывается пропорциональным I_{kv} , и, следовательно, мы должны включить его в уравнение для η_{kv} . Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{kv} = & - \int_{(1)} \frac{v_{kk''} v_{k''k} \tilde{I}_{k'v'}}{v'' - \omega_{k''} + \tilde{\eta}_{k''v''}} \cdot dk' dv' + \\ & + \int_{(3)} \frac{v_{kk'} v_{k'k}}{v' - \omega_{k'} + \tilde{\eta}_{k'v'}} k \frac{\partial \tilde{I}_{k'v'}}{\partial k'} dk' dv', \end{aligned} \quad (\text{III. 28})$$

$$I_{kv} = \frac{1}{2} |\tilde{S}_{kv}|^2 \int_{(1)} |v_{kk'}|^2 \tilde{I}_{k'v'} \tilde{I}_{k''v''} dk' d\omega'. \quad (\text{III. 29})$$

где $k'' = k - k'$, $\omega'' = \omega - \omega'$, $\tilde{S}_{kv} = (v - \omega_k + \tilde{\eta}_{kv})^{-1}$.

Мы отметили здесь значком \sim (тильда) интенсивность \tilde{I}_{kv} и функцию Грина \tilde{S}_{kv} , чтобы еще раз подчеркнуть, что эти величины берутся нами в относительной системе координат, «движущейся» вместе с длинноволновыми пульсациями. Истинные функции $I_{k\omega}$, $S_{k\omega}$ определяются соотношениями

$$I_{k\omega} = \langle \tilde{I}_{k, \omega - \omega_l} \rangle_l, \quad S_{k\omega} = \langle \tilde{S}_{k, \omega - \omega_l} \rangle_l, \quad (\text{III. 30})$$

где усреднение ведется по длинноволновым пульсациям (вспомним, что ω_l все еще является случайной величиной).

Согласно уравнению (III. 26) величину ω_l можно приближенно представить в виде $\omega_l = v_{kk} C_l$, где $C_l = \int_{(2)} C_{k\omega} dk d\omega$ — случайное локальное значение величины C , подсчитанное по

¹ Это утверждение теряет силу в тех случаях, когда в рассматриваемой области резонансное взаимодействие отсутствует, и определяющую роль начинает играть именно искажение пакетов на длинноволновых пульсациях. Такая ситуация имеет место, например, в коротковолновой (вязкой) области обычной турбулентности [64, 65].

длинноволновым пульсациям. Так как C_i является суммой многих случайных величин, которые можно считать слабо коррелированными между собой, то приближенно C_i , а следовательно, и ω_i распределены по закону Гаусса. Таким образом, каждое из соотношений (III. 30) можно записать в виде

$$I_{k\omega} = \frac{1}{\pi\omega_0} \int e^{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \tilde{I}_{k, \omega-\omega_i} d\omega_i,$$

$$S_{k\omega} = \frac{1}{\pi\omega_0} \int e^{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \tilde{S}_{k, \omega-\omega_i} d\omega_i, \quad (\text{III. 31})$$

где

$$\omega_0^2 = 2 \langle \omega_i^2 \rangle = 2 |v_{kk}|^2 \int_{(2)} I_{k'\omega'} dk' d\omega'. \quad (\text{III. 32})$$

Разумеется, вычисление величин $I_{k\omega}$ и $S_{k\omega}$ необходимо проводить только в том случае, если нас действительно интересует временная корреляция пульсаций. В ряде задач вполне достаточно бывает знать только $I_k = \int I_{k\omega} d\omega = \int \tilde{I}_{kv} dv$. При этом можно ограничиться вычислением относительных величин I_{kv} и \tilde{S}_{kv} .

Уравнения (III. 28) и (III. 29) совместно с соотношениями (III. 30) и составляют систему уравнений улучшенного приближения слабой связи. Как мы видим, основной вклад в затухание волн дает резонансная область. Кроме того, согласно выражению (III. 27), небольшое дополнительное затухание дает коротковолновая область \mathcal{Z} . Что касается интенсивности колебаний \tilde{I}_{kv} , то согласно уравнению (III. 29), она определяется биениями пульсаций из резонансной области. Кроме того, небольшой, не учтенный нами эффект типа диффузии в пространстве волновых чисел дает взаимодействие с длинноволновыми пульсациями из области 2 и, наконец, совсем незначительную добавку может давать не учтенная нами подпитка колебаний случайными толчками от коротковолновых пульсаций из области \mathcal{Z} .

При уменьшении связи между колебаниями область 1 расширяется и при $\gamma/\omega \rightarrow 0$ она занимает все k -пространство, за исключением отдельных областей не слабого затухания, где возмущения довольно быстро успевают подстраиваться к остальным пульсациям. В плазме такой областью является область коротких длин волн ($kD > 1$), где колебания являются чисто затухающими. Именно эта область определяет член парных столкновений. Пользуясь тем, что член столкновений очень слабо (логарифмически) зависит от верхнего параметра обрезания, можно не задумываясь дописывать член столкновений (II. 64) при исследовании любых колебаний. Дело в том, что коротковолновые флуктуа-

ций адиабатически следят за колебаниями, хотя с точки зрения квазилинейного подхода (см. гл. II, § 2) они вполне равноправно входят со всеми остальными флуктуациями.

§ 2. Феноменологический подход к описанию сильной турбулентности

Как мы видели выше, количественная теория существует только для слабой турбулентности, когда можно составить кинетическое уравнение для волн. При этом взаимодействие волн должно удовлетворять целому ряду существенных ограничений: инкремент нарастания малых возмущений должен быть мал по сравнению с частотой, зависимость частоты от волнового вектора должна быть такой, чтобы законы сохранения импульса и энергии удовлетворялись одновременно только на отдельных поверхностях в импульсном пространстве, взаимодействие волн должно обеспечивать рассасывание волн из каждой области импульсного пространства и т. д. В реальных условиях эти ограничения довольно часто нарушаются, т. е. развивается сильная турбулентность.

Если исходить из кинетического уравнения для волн, то, как показано выше, переход к сильной турбулентности приводит к интегральным уравнениям слабой связи, в которых предварительно следует выделить адиабатическое взаимодействие. В настоящее время не существует строгого метода выделения адиабатического взаимодействия и вывода интегральных уравнений. Поэтому соответствующее описание неизбежно является только приближенным, причем точность этого приближения пока еще не ясна.

Кроме того, при описании сильной турбулентности в плазме можно воспользоваться аналогией с обычной турбулентностью. Как известно, при изучении турбулентности в обычной жидкости основные результаты были получены на основе феноменологического подхода. Естественно использовать такой подход и в теории турбулентности плазмы.

В настоящем параграфе мы напомним некоторые результаты феноменологического описания обычной турбулентности, а в последующих покажем, как аналогичные представления могут быть использованы при рассмотрении турбулентности в плазме.

Турбулентная струя

При феноменологическом подходе задача о распределении средней скорости в поперечном сечении турбулентного потока решается независимо от задачи о спектре пульсаций. При этом используется понятие длины перемешивания, введенное Прандтлем [66].

Мы рассмотрим здесь простейшую задачу о профиле скорости в затопленной турбулентной струе. Такая струя образуется при вытекании жидкости или газа из отверстия в среде того же состава.

При выходе из отверстия скорость жидкости почти постоянна по сечению, затем, по мере удаления от источника происходит деформация профиля скорости и на достаточно большом расстоянии струя становится автомодельной: профиль скорости остается подобным самому себе, расширяясь пропорционально расстоянию x от начала струи.

Для простоты рассмотрим плоскую струю, возникающую при вытекании жидкости через щель. В такой струе средняя скорость зависит только от двух координат: координаты x вдоль струи и поперечной координаты y . Среднее давление в свободной струе можно считать постоянным, так что продольную компоненту усредненного уравнения движения можно записать в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (\text{III. 33})$$

Здесь u и v представляют собой проекции средней скорости соответственно на оси x и y , ρ — плотность жидкости, $\tau_{xy} = -\rho \langle u'v' \rangle$ — касательное напряжение (напряжение Рейнольдса), возникающее в результате переноса продольного пульсационного импульса $\rho u'$ поперечными пульсациями v' . Величина v' имеет тот же порядок, что и u' , так как они связаны между собой уравнением непрерывности. С физической точки зрения соотношение $v' \sim u'$ возникает как результат появления смещения жидкости в направлении x при обтекании участка жидкости, перемещающегося в направлении y . Что касается величины u' , то Прандтль предположил, что она возникает благодаря поперечному смещению участков жидкости, в результате которого капля жидкости переносит в данную точку ту продольную скорость, которую она имела до смещения. Другими словами,

$$u' \cong l \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (\text{III. 34})$$

где l — средняя длина, на которую смещаются участки жидкости поперек струи. Величина l как раз и представляет собой «длину перемешивания». В свободной струе длину перемешивания приближенно можно считать постоянной по сечению и пропорциональной толщине струи, т. е. $l = cx$, где x — расстояние от начала струи, $c = \text{const}$. Таким образом, приближенно можно принять

$$\tau_{xy} = \pm \rho c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (\text{III. 35})$$

тогда уравнение (III. 33) примет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 2c^2 x^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{III. 36})$$

С учетом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 37})$$

мы получим полную систему уравнений для определения средней скорости в турбулентной струе. Эта система содержит только одну неизвестную константу c , которую можно определить путем сравнения теоретически рассчитанного распределения скорости по сечению с экспериментально измеренным.

Уравнения (III. 36) и (III. 37) были решены Толмином [67]. На рис. 13 сравнивается найденный Толмином профиль с экспериментально измеренным (этот рисунок заимствован из работы [68]). Как видим, при соответствующем выборе константы c

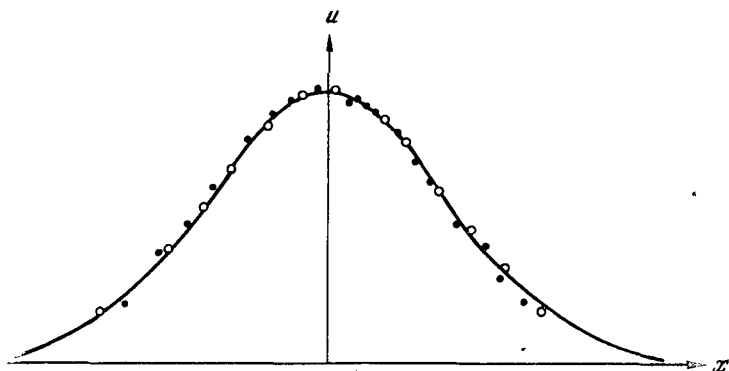


Рис. 13. Профиль скорости в турбулентной струе.

теоретический профиль очень хорошо согласуется с экспериментальным. При этом оказывается, что длина перемешивания l на порядок меньше полутолщины струи a .

Позже другими авторами были предложены несколько иные гипотезы относительно характера переноса импульса поперек турбулентной струи [69], однако основное положение Прандтля о возможности описания этого процесса на основе понятия о длине перемешивания осталось неизменным.

Закон Колмогорова — Обухова

Перейдем теперь к вопросу о спектре пульсаций в турбулентной жидкости. Естественно ограничиться масштабами, значительно меньшими основного, когда можно говорить о локальных свойствах турбулентного потока. Теория такой локально изотропной турбулентности была развита А. Н. Колмогоровым, А. М. Обуховым и позднее Гейзенбергом [70, 71, 72]. Мы изложим здесь только основные положения этой теории, притом в значительно упрощенной форме.

При очень большом числе Рейнольдса для некоторого турбулентного потока вязкость жидкости не играет никакой роли для целой области различных масштабов пульсационного движения, т. е. большой области в пространстве волновых чисел k . Во всей

этой области энергия никак не диссипирует, она может лишь диффундировать в пространстве k . Эта основная область спектра турбулентных пульсаций называется инерционной. Напротив, в области малых длин, начиная с некоторого малого масштаба λ_0 (так называемого внутреннего масштаба турбулентности) основную роль начинает играть вязкость. В этой области энергия движения быстро диссипирует в тепловую.

Согласно А. Н. Колмогорову, в инерционном участке спектра устанавливается квазиравновесное состояние, в котором существует постоянный поток энергии по спектру ε в коротковолновую область $\lambda < \lambda_0$, где происходит диссипация. Именно величина этого потока ε и определяет локальные свойства турбулентности. Введение гипотезы о наличии потока энергии по спектру эквивалентно вполне естественному допущению, что передача энергии от одних гармоник к другим имеет резонансный характер, т. е. энергия некоторой пульсации масштаба λ может передаваться только пульсациям близких масштабов. По этой причине отдельная порция энергии при своем движении от больших масштабов к меньшим должна пройти через всю область масштабов вплоть до λ_0 . Это обстоятельство, в свою очередь, равносильно утверждению, что для каждого масштаба λ величина ε определяется только пульсациями того же масштаба, т. е. значением спектральной функции при $k = 2\pi/\lambda$. Другими словами, величина ε должна выражаться через k и I_k . Но из величин k и I_k можно составить только одну комбинацию с размерностью производной энергии по времени, а именно:

$$\varepsilon \sim \sqrt{I_k k^3} \cdot \rho I_k k. \quad (\text{III. 38})$$

Здесь $I_k k^3$ имеет размерность t^{-2} , а величина $k I_k$ имеет размерность квадрата скорости. Из соотношения (III. 38) следует известный закон Колмогорова — Обухова («закон 5/3»):

$$I_k dk = C \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{2/3} k^{-5/3} dk, \quad (\text{III. 39})$$

где C — универсальная безразмерная константа.

Этот закон хорошо согласуется с экспериментальными данными. В последнее время экспериментально было показано, что величина ε сама является случайной, испытывающей заметные флуктуации. В соответствии с этим А. Н. Колмогоров и А. М. Обухов внесли в теорию некоторые изменения, которые в данном обзоре не рассматриваются.

Как мы видим, закон 5/3 выводится из самых общих соображений теории размерностей и гипотезы об отсутствии заметного взаимодействия между далекими по k пульсациями. Чтобы получить спектр во всей области λ , включая вязкую область $\lambda < \lambda_0$, необходимы более точные представления о характере взаимодействия пульсаций. К настоящему времени предложен целый ряд различных гипотез феноменологического характера о взаимодействии

гармоник в турбулентной жидкости. Определяемые на основе этих гипотез спектры оказываются довольно близкими между собой [69]. В инерционной области все феноменологические теории, за исключением заведомо неправильных, приводят к закону $5/3$.

Ветровые волны

В качестве примера, более близкого к явлениям в плазме, рассмотрим картину развития и взаимодействия морских волн. Как известно, частота колебаний гравитационных волн определяется соотношением

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad (\text{III. 40})$$

где g — ускорение силы тяжести.

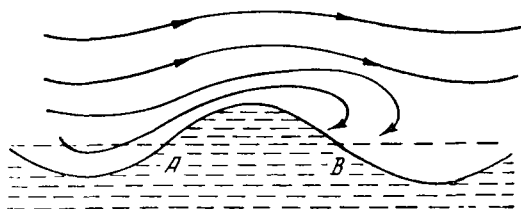


Рис. 14. Возбуждение волн на воде.

Спектр (III. 40) является нераспадным. Это значит, что при малой амплитуде колебаний основную роль должны играть четырехволновые процессы рассеяния двух волн в другие две волны. С помощью теории возмущений можно получить соответствующее кинетическое уравнение для волн. Однако это уравнение весьма сложно и его решение представляет значительные трудности. Более простым оказывается феноменологический подход, при котором общий вид спектральной функции устанавливается из физических соображений [73, 74].

Допустим, что в некоторый начальный момент над морской поверхностью начинает дуть ветер с постоянной скоростью. Вначале, когда поверхность моря почти не возмущена, основным механизмом развития волн является их резонансная раскочка турбулентными пульсациями атмосферного давления. При этом энергия каждой гармоники линейно возрастает со временем. Но как только уклон взволнованной поверхности достигнет некоторой конечной величины, основную роль начинает играть механизм неустойчивости. Физическую причину этого механизма легко выяснить, исходя из следующих соображений. При достаточно большой амплитуде волны на обращенном к ветру склоне волны A давление воздуха оказывается несколько больше, чем на склоне B , защищенном от ветра (рис. 14). Эта разница в давлении, обусловленная в конечном счете завихрением ветра над участком B , приводит к эффективной резонансной передаче энергии

от ветра к волне, поскольку при подъеме жидкости давление оказывается несколько меньше, а при ее опускании — несколько больше среднего.

Механизм неустойчивости (фактически эта неустойчивость является нелинейной) приводит к экспоненциальному росту амплитуды волн. А так как он вступает в действие только при заметном уклоне, который при заданной амплитуде тем больше, чем меньше длина волны, то в каждый данный момент экспоненциально нарастают только возмущения с длиной волны, меньшей некоторой. В сторону более длинных волн спектральная функция, очевидно, должна очень быстро убывать с увеличением λ скорее всего, экспоненциально.

В коротковолновом участке спектра амплитуда установившихся колебаний определяется нелинейным взаимодействием между гармониками. Простейшим и достаточно сильным взаимодействием между волнами является обрушение волн вследствие которого на поверхности моря появляются белые «барашки». Это взаимодействие ограничивает амплитуду колебаний как раз настолько, что на взволнованной поверхности образуются «заострения». Так как эти заострения соответствуют разрывам градиента вдоль поверхности от вертикального смещения ζ , т. е. δ -функциям у второй производной от смещения ζ , то при больших k Фурье-компонента ζ должна убывать как $\zeta_k \sim k^{-2}$. Отсюда следует, что спектральная функция вертикального смещения при больших k , т. е. на участке равновесия, должна вести себя как $I_k dk \sim \sim k^{-4} dk$, где $dk = dk_x dk_y \sim k dk$. При переходе от переменной k к ω , получим

$$I_\omega d\omega \sim d\omega |\omega^{-5}.$$

Этот спектр был получен Филлипсом [73]. Он хорошо согласуется с экспериментальными данными, относящимися к коротковолновому участку спектра. Полный спектр колебаний поверхности, измеренный экспериментально, удовлетворительно аппроксимируется функцией

$$I_\omega = \alpha g^2 \omega^{-5} e^{-\omega_0^2 / \omega^2}, \quad (\text{III. 41})$$

где α и ω_0 зависят только от времени. Этот спектр хорошо согласуется с приведенной выше физической аргументацией.

IV. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛАЗМЕ

§ 1. Нелинейное затухание ленгмюровских волн

Рассмотрение конкретных турбулентных процессов в плазме мы начнем с простейшего случая ленгмюровских колебаний. А именно, мы познакомимся здесь более подробно с нелинейным затуханием волн на биениях. При условии, что среднее волновое число рассматриваемого нами волнового пакета значительно

Меньше обратного дебаевского радиуса D^{-1} , линейным затуханием Ландау можно пренебречь и в кинетическом уравнении для волн (II. 51) следует учесть только второе и третье слагаемые (последнее слагаемое выпадает, так как ленгмюровские колебания обладают нераспадным спектром).

В матричном элементе

$$v_{k\omega, k''\omega''} = -\frac{4\pi e}{k^2} \int \{(\mathbf{g}_{k\omega} k') (\mathbf{g}_{k''\omega''} k'') f + (\mathbf{g}_{k\omega} k'') (\mathbf{g}_{k''\omega''} k') f\} dv. \quad (\text{IV. 1})$$

мы сохраним лишь первое слагаемое, поскольку при малой разности частот $\omega'' = \omega - \omega'$ величина $\mathbf{g}_{k''\omega''} \gg \mathbf{g}_{k\omega}$; $\mathbf{g}_{k''\omega''}$. Интегрированием по частям можно заменить $\mathbf{g}_{k\omega} k'$ на $-\frac{e}{m} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{(\omega - kv)^2} \cong -\frac{e}{m} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega^2}$, а оставшийся интеграл, как нетрудно видеть, может быть выражен через диэлектрическую проницаемость (II. 43).

Таким образом, в нулевом приближении

$$v_{k\omega, k''\omega''}^{(0)} = \frac{e}{m} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{\omega^2} \frac{k''^2}{k^2} \{\varepsilon(k'', \omega'') - 1\}. \quad (\text{IV. 2})$$

В этом выражении можно пренебречь единицей по сравнению с ε , поскольку при $\omega < kv_e$ $\varepsilon(k, \omega) \cong \frac{m\omega_0^2}{k^2 T_e} \gg 1$. Таким образом, $\varepsilon(k'', \omega'')$ в числителе и знаменателе третьего слагаемого в уравнении (II. 43) сокращаются. Если теперь в первом интеграле заменить величину $k' \mathbf{g}_{k\omega}$ на ее приближенное значение $-\frac{e}{m} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{(\omega - kv)^2} \cong -\frac{e}{m} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega^2}$, то как нетрудно видеть, этот интеграл оказывается пропорциональным $v_{k''\omega'', k\omega}$, и два интегральных члена в точности компенсируют друг друга. Это значит, что мы должны учесть отброшенные нами тепловые поправки.

Чтобы установить, какие именно малые поправки мы должны учесть, рассмотрим матричный элемент

$$v_{k''\omega'', k\omega} = \frac{4\pi e}{k'^2} \int \{(\mathbf{g}_{k''\omega''} k') (\mathbf{g}_{k\omega} k) f + (\mathbf{g}_{k''\omega''} k) (\mathbf{g}_{-k', -\omega'} k') f\} dv. \quad (\text{IV. 3})$$

Основной вклад в этот интеграл дает область, где $\mathbf{g}_{k''\omega''} f \rightarrow \infty$, т. е. где $\mathbf{g}_{k\omega} \approx \mathbf{g}_{k''\omega''}$. Поэтому член со второй производной от f по скорости, возникающий в результате действия оператора $\mathbf{g}_{k''\omega''}$ на f , оказывается очень малым. Пренебрегая этим членом, мы можем считать, что оператор $\mathbf{g}_{k''\omega''}$ действует только на $\mathbf{g}_{k\omega}$

и $g_{-k', -\omega'}$. Выполняя дифференцирование и оставляя только главный член, получим

$$\begin{aligned} v_{k''\omega'', k\omega}^{(0)} &= \frac{4\pi e}{k''^2} \frac{e}{m} \frac{kk'}{\omega^2} \int g_{k''\omega''} k'' f dv = \\ &= \frac{e}{m} \frac{(kk')}{\omega^2} \{ \varepsilon(k'', \omega'') - 1 \}. \end{aligned} \quad (IV. 4)$$

Отсюда видно, что не имеет смысла учитывать малые действительные добавки в матричном элементе $v_{k\omega, k''\omega''}$, так как соответствующий вклад будет пропорционален $1 - 1/\varepsilon(k''\omega'')$, а его мнимая часть, имеющая порядок величины $[\varepsilon(k'', \omega'')]^{-2} \ll 1$, оказывается очень малой. Таким образом, нам достаточно лишь учесть малые члены первого и второго порядка малости по kv/ω в операторах $g_{k\omega}$ в первом интегральном члене в уравнении (II. 43) и в матричном элементе $v_{k\omega, k''\omega''}$. Собирая все малые члены и учитывая, что $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \cong \frac{2}{\omega_0}$, получим окончательно

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = \frac{\omega_0^4 I_k}{2\omega^5 m k^2 n^2} \int (kk')^2 (kv)^2 \delta(\omega'' - k''v) k'' \frac{\partial f}{\partial v} dv I_{k'} dk'. \quad (IV. 5)$$

Поскольку для ленгмюровских волн $\omega'' \sim \omega_0 (kD)^2 \ll \omega_0$, то $kv = kv' + \omega'' \approx k'v$ и с точностью до малых величин высшего порядка малости по kv/ω величину $(kv)^2$ можно заменить на $(kv)(k'v)$. В этом приближении матричный элемент, т. е. множитель перед $I_{k'}$ в подынтегральном выражении (IV. 5), оказывается антисимметричным относительно перестановки k и k' . Отсюда следует, что в рассматриваемом приближении ленгмюровские волны рассеиваются без потери энергии [9]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int k^2 I_k dk = 0.$$

Согласно уравнению (IV. 5), характерное обратное время диффузии волн в k -пространстве имеет порядок

$$\nu \sim \frac{k_0^3 v_e^3}{\omega_0^2} \frac{1}{nT} \int k^2 I_k dk, \quad (IV. 6)$$

где k_0 — среднее значение волнового числа.

Что касается затухания энергии ленгмюровских колебаний, то она описывается не учтенными здесь малыми членами, причем соответствующий декремент затухания в $(kD)^{-2}$ раз меньше ν .

Затухание энергии можно найти из следующих соображений. С помощью интегрирования по частям нетрудно показать, что

$$v_{k\omega, k''\omega''} = \frac{k''^2}{k^2} v_{k''\omega'', k\omega}. \quad (IV. 7)$$

Далее, из выражения (IV. 3) для матричного элемента $v_{k''\omega'', k\omega}$ видно, что если пренебречь экспоненциально малыми вычетами в точках $\omega = kv$ и $\omega' = k'v$, сохранив лишь вычет в точке $\omega'' = k''v$,

то перестановка \mathbf{k} и \mathbf{k}' эквивалентна взятию комплексно сопряженного выражения. Другими словами, матричный элемент удовлетворяет условию симметрии

$$v_{\mathbf{k}''\omega'', \mathbf{k}\omega} = v_{-\mathbf{k}''-\omega'', \mathbf{k}'\omega'}^* \quad (\text{IV. 8})$$

Учитывая это соотношение и соотношение (IV. 7), нетрудно видеть, что мнимая часть коэффициента перед $I_{\mathbf{k}'}$ в подынтегральном выражении третьего слагаемого в правой части уравнения (II. 51) при перестановке \mathbf{k} и \mathbf{k}' просто умножается на $-k^2/k'^2$. Аналогичной симметрией обладает и второе слагаемое в уравнении (II. 51). Пользуясь этой симметрией нетрудно показать, что в отсутствие распадов нелинейные члены в уравнении (II. 51) сохраняют «число волн» $N_{\mathbf{k}} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{8\pi} I_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \omega} \right|$. Другими словами, при рассеянии ленгмюровских волн на электронах их энергия уменьшается пропорционально частоте:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}} = \text{const}, \text{ т. е. } \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \mathcal{E}_{\infty} \left(1 + \frac{3k^2 T}{2m\omega_0^2} \right), \quad (\text{IV. 9})$$

где $\mathcal{E}_{\infty} = \text{const}$ представляет собой энергию при $k \rightarrow 0$, т. е. $t \rightarrow \infty$. Соотношение (IV. 9) позволяет определить скорость затухания энергии по скорости уменьшения волнового числа.

Полученный результат допускает наглядную квантовомеханическую интерпретацию. Рассмотренный нами процесс представляет собой рассеяние плазмонов на электронах. Условие $\omega'' = \mathbf{k}''\mathbf{v}$, учитываемое δ -функцией, представляет собой не что иное, как закон сохранения энергии:

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} - \hbar\omega_{\mathbf{k}'} + \Delta p v = 0,$$

где $\Delta p = -\hbar k''$ — импульс, передаваемый электрону. При нормальной заселенности электронных уровней, когда $\frac{\partial f}{\partial v} < 0$, каждый плазмон при рассеянии в среднем теряет часть своей энергии, вследствие чего его частота, а следовательно, и волновое число убывают. Поскольку частота ленгмюровского плазмона очень слабо зависит от импульса k , то изменение его энергии при рассеянии значительно меньше (на фактор $k^2 D^2$), чем изменение импульса. При обратной заселенности электронных уровней (т. е. при «отрицательной» температуре) рассеяние сопровождается увеличением энергии плазмона [77].

При малой амплитуде колебаний, когда высшими процессами взаимодействия волн можно пренебречь, рассмотренный здесь эффект рассеяния волн на частицах является основным. В отличие от обычной гидродинамической турбулентности, где взаимодействие пульсаций приводит к перекачке энергии в сторону больших k , в ленгмюровских колебаниях поток энергии направлен в область малых k , где линейное затухание экспоненциально мало.

Из соотношения (IV. 9) видно, что при малых значениях $k_0 D$ энергия ленгмюровских колебаний мало изменяется при $t \rightarrow \infty$. Другими словами, один лишь процесс рассеяния ленгмюровских волн на электронах не приводит к полной их релаксации в однородной плазме. При учете неоднородности в кинетическое уравнение для волн добавляются слагаемые вида: $U_k \frac{\partial I_k}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial \omega_k}{\partial \tau} \frac{\partial I_k}{\partial k}$. Второе из них, более существенное, описывает поток энергии в k -пространстве за счет искажения волновых пакетов. При малых k связанная с этим потоком скорость изменения среднего волнового вектора $\dot{k}_0 = \frac{d\omega_0}{dx} = \kappa \omega_0$ становится сравнимой с $v k_0$ и k_0 перестает изменяться со временем. Пользуясь уравнением (IV. 6), запишем это условие в следующем виде: $\frac{v k_0 D}{\omega_0} = (k_0 D)^4 \frac{\mathcal{E}}{nT} = \kappa D$. Отсюда находим $\mathcal{E} = -v (k_0 D)^2 \mathcal{E} = -\kappa k D^2 \omega_0 \mathcal{E}$. Поскольку равновесное значение $k_0 D = \left(\kappa D \frac{nT}{\mathcal{E}} \right)^{1/4}$ очень слабо зависит от \mathcal{E} и κ , то время затухания ленгмюровских волн в неоднородной плазме по порядку величины должно быть примерно равно $(D \kappa \omega_0)^{-1}$. Тот же порядок величины имеет время, необходимое для такой деформации волнового пакета, чтобы волновое число k достигло значения D^{-1} , когда существенную роль начинает играть затухание Ландау. В однородной плазме релаксация ленгмюровских волн определяется более медленными процессами четырехволнового взаимодействия и рассеяния волн на ионных флуктуациях.

§ 2. Возбуждение ионных колебаний электронным током

Возбуждение ионно-звуковых волн

Рассмотрим задачу о возбуждении ионно-звуковых волн электронным током [75]. Допустим, что ионная температура T_i значительно меньше электронной T_e . Такая ситуация имеет место, например, в слабоионизованной плазме, где ионы эффективно теряют энергию при столкновениях с атомами холодного нейтрального газа. Кроме того, условие $T_i \ll T_e$ часто выполняется в нестационарных условиях, когда ионы не успевают нагреться от электронов. Результаты рассматриваемой здесь стационарной задачи могут быть перенесены и на нестационарный случай, поскольку время установления стационарного спектра колебаний сравнительно мало.

При $T_i \ll T_e$ ионные колебания возбуждаются, когда направленная (токовая) скорость электронов u превышает скорость звука $c_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$ [78—80]. Если u заметно больше c_s , то наряду с волнами, распространяющимися вдоль направления тока, в плазме возбуждаются и косые волны. При $u \gg c_s$ конус допустимых направлений фазовых скоростей, внутри которого волны

раскачиваются, полностью раскрывается. При этом неустойчивы практически все волны, имеющие положительную проекцию фазовой скорости на ось z, направленную вдоль и.

Две волны с близкими по абсолютной величине волновыми числами, распространяющиеся под углом друг к другу, создают биения с малой фазовой скоростью, так как при этом $\omega'' = \omega - \omega' \approx 0$, а $k'' \neq 0$. Поскольку распад ионно-звуковых волн запрещен, то нелинейное затухание Ландау на биениях дает основной вклад в нелинейное взаимодействие волн. Это затухание приводит к ограничению амплитуды волн, и в стационарных условиях должен установиться некоторый не зависящий от времени спектр колебаний.

Нелинейное затухание ионно-звуковых волн на ионах во многом сходно с затуханием ленгмюровских волн на электронах. Поэтому выкладки предыдущего пункта во многом повторяются. Опять в правой части кинетического уравнения для волн (II. 51) можно опустить последнее слагаемое, поскольку спектр нераспадный. Кроме того, можно пренебречь нелинейным затуханием волн на электронах, так что нелинейное затухание будет описываться теми же членами, что и при ленгмюровских колебаниях, только с заменой m_e на m_i .

Как и при электронных колебаниях нелинейные члены в нулевом приближении по малому параметру $kv/\omega \sim \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}$ взаимно сокращаются. Поправка первого порядка, которая фактически имеет тот же порядок величины, также обращается в нуль, и приходится учитывать следующие два члена разложения.

В нулевом приближении матричные элементы определяются только ионами и даются соотношением

$$v_{k\omega, k''\omega''}^{(0)} = \frac{k''^2}{k^2} v_{k''\omega'', k\omega}^{(0)}, \quad k\omega = -\frac{4\pi e^3 (kk')}{m_i^2 k^2 \omega^2} \left(1 + \frac{2kk''\omega''}{k''^2 \omega}\right) \times \\ \times \int k'' \frac{\partial f_i}{\partial v} (\omega'' - k''v)^{-1} dv, \quad (IV. 10)$$

т. е. они пропорциональны интегралу $\int k'' \frac{\partial f_i}{\partial v} (\omega'' - k''v)^{-1} dv$. Диэлектрическая проницаемость также содержит такой интеграл:

$$\varepsilon(k'', \omega'') = 1 + \frac{4\pi e^2}{m_i k''^2} \int k'' \frac{\partial f_i}{\partial v} (\omega'' - k''v)^{-1} dv + \frac{4\pi e^2 n}{k''^2 T_e}. \quad (IV. 11)$$

Здесь единицей можно пренебречь. Поскольку в выражении (IV. 11) интегральный член значительно больше (в T_e/T_i раз) последнего, то во втором интегральном члене уравнения для волн (II. 50) поправки второго и третьего порядка малости достаточно учесть только в мнимых частях матричных элементов:

$$\text{Im } v_{k\omega, k''\omega''} = \frac{k''^2}{k^2} \text{Im } v_{k''\omega'', k\omega} = \\ = \int \frac{kk'}{(\omega - kv)^2} \tau \delta(\omega'' - k''v) k'' \frac{\partial f_i}{\partial v} dv. \quad (IV. 12)$$

Эти поправки легко вычисляются, и кинетическое уравнение для ионно-звуковых волн приводится к виду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \text{Im} \varepsilon I_{\mathbf{k}} = \frac{\Omega_0^4 I_{\mathbf{k}}}{m_i \omega^3 k^2 n^2} \int (kk')^2 \left\{ \left(1 - 3 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'' \omega''}{k''^2 \omega} \right) (k\mathbf{v})^2 + \right. \\ \left. + \left(3 - 4 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'' \omega''}{k''^2 \omega} \right) \frac{(k\mathbf{v})^3}{\omega} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}'')^2}{k''^4} \omega''^2 \right\} \delta(\omega'' - k''\mathbf{v}) k'' \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{v} dk', \quad (\text{IV. 13})$$

где $\Omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_i}$, $I_{\mathbf{k}}$ — спектральная функция потенциала, $\varepsilon' = \text{Re} \varepsilon$.

При $T_i/T_e \rightarrow 0$, когда основной вклад в интеграл дает область $\omega'' \approx 0$, это уравнение принимает вид

$$\frac{\Omega_0^2}{\omega^3} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \text{Im} \varepsilon I_{\mathbf{k}} = \frac{\Omega_0^4 T_i I_{\mathbf{k}}}{m_i^2 \omega^3 \omega' k^2 n} \int (kk')^2 \left\{ [kk'k''^2 - \right. \\ \left. - \mathbf{k}\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k}'\mathbf{k}''] \delta'(\omega'') \right\} I_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}', \quad (\text{IV. 14})$$

где δ' — производная от δ -функции, $\omega'' = c_s |k - k'|$.

При $T_i \ll T_e$ линейным затуханием Ландау на ионах можно пренебречь, и в $\text{Im} \varepsilon$ остается только вклад от электронов, который и приводит к раскачке колебаний. Если учесть затухание волн за счет столкновений ионов с атомами нейтрального газа, то при максвелловском распределении электронов по скоростям, сдвинутом на величину u вдоль оси z , мнимая часть ε будет определяться соотношением

$$-k^2 \text{Im} \varepsilon = \frac{4\pi^2 e^2}{m} \int \mathbf{k} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - k\mathbf{v}) d\mathbf{v} - \frac{\Omega_0^2}{4c_s^2} \frac{1}{\omega \tau_i} = \\ = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2} v_e^3} (u \cos \theta - c_s) - \frac{\Omega_0^2}{4c_s^2} \frac{1}{\omega \tau_i}, \quad (\text{IV. 15})$$

где $v_e^2 = \frac{2T_e}{m_e}$, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$, $1/\tau_i$ — средняя частота столкновений ионов с атомами нейтрального газа, $\cos \theta = k_z/k$.

Как мы видим, затухание за счет столкновений убывает при увеличении ω . При достаточно большом τ_i оно существенно лишь при очень малых ω и может быть учтено простым обрезанием спектральной функции со стороны низких частот (при том значении ω , где $\text{Im} \varepsilon$ меняет знак, т. е. волны становятся затухающими).

В этом приближении величину $k^2 \text{Im} \varepsilon$ в основной области волновых чисел можно считать не зависящей от k . Тогда из уравнения (IV. 14) видно, что $I_{\mathbf{k}} \sim 1/k^3$. Рассмотрим это уравнение более

подробно. Допустим для простоты, что волны раскачиваются только в сравнительно узком конусе направлений \mathbf{k} с углом раствора θ_0 (такая ситуация имеет место, например, когда плазма заключена в цилиндрическую трубку, поглощающую те волны,

которые распространяются в поперечном направлении). При этом $k'' \sim \theta_0 k$, и, следовательно, величиной $kk'' \sim k''^2$ можно пренебречь по сравнению с kk' . Переходя в k — пространстве к сферическим координатам и интегрируя член с δ' в уравнении (IV. 14) по частям, получим

$$\frac{\Omega_0^2}{\omega^3} \frac{\partial I_k}{\partial t} = -\text{Im} \varepsilon I_k + I_k \cdot \frac{\Omega_0^4 m_i^2 T_i}{T_e^4 n} \times \\ \times \left\{ \int k^2 \theta_s^2 \frac{\partial I_{k\Omega'}}{\partial k} d\Omega' + 3k \int \theta_s^2 I_{k\Omega'} d\Omega' \right\}, \quad (\text{IV. 16})$$

где θ_s — угол между k и k' , $d\Omega'$ — элемент телесного угла.

Проинтегрируем это уравнение по Ω , полагая $\langle \theta_s \rangle^2 = \theta_0^2$ и обозначая через I_k интеграл от I_k по Ω . Тогда получим

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = 2\gamma I_k + A I_k \left(2k^5 \frac{\partial I_k}{\partial k} + 6k^4 I_k \right), \quad (\text{IV. 17})$$

где $\gamma = -\frac{\omega^3}{2\Omega_0^2} \langle \text{Im} \varepsilon \rangle$ — средний инкремент нарастания малых возмущений, $A = \frac{\Omega_0^2 T_i \theta_0^2}{2c_s T_e n}$.

Это уравнение можно записать в более наглядном виде:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} (A k^7 I_k^2) = 2\gamma_k I_k - A k^4 I_k^2. \quad (\text{IV. 18})$$

Если учесть, что энергия ионно-звуковых волн пропорциональна I_k , а именно,

$$\mathcal{E}_k = m_i n v_k^2 = \frac{e^2 n}{m_i T_e} I_k, \quad (\text{IV. 19})$$

то уравнение (IV. 17) можно интерпретировать как уравнение переноса волновой энергии. Второй член слева описывает диффузионный перенос энергии в сторону меньших волновых чисел за счет рассеяния волн на ионах, а второй член справа описывает нелинейное затухание волн на ионах. Как мы уже установили ранее, в основной области волновых чисел $k^2 \text{Im} \varepsilon = \text{const}$, и следовательно, γ_k пропорционально k , т. е. $\gamma_k = \alpha k$. Из уравнения (IV. 17) видно, что в установившемся состоянии, когда $\frac{\partial I_k}{\partial t} = 0$, $I_k = \frac{\alpha}{2A k^3} \ln \frac{k_0}{k}$, где $k_0 = \text{const}$. Величину k_0 можно найти из условия обращения в нуль спектральной функции при $k \sim D^{-1}$, поскольку при больших значениях k инкремент становится отрицательным. Отсюда получаем $k_0 \sim D^{-1}$. Кроме того, спектр $I_k \sim k^{-3} \ln \frac{1}{kD}$ должен быть обрзан при малых k , где $\text{Im} \varepsilon$ меняет знак.

Заметим, что нелинейные члены в уравнении (IV. 18) не меняют «числа волн»: $N_k = \mathcal{E}_k |\omega_k|^{-1}$. Другими словами, согласно этому уравнению $\int N_k dk = \text{const}$ при $\gamma = 0$. Данный результат следует

и непосредственно из уравнения (IV. 14). Таким образом, нелинейное взаимодействие ионно-звуковых волн представляет собой когерентное рассеяние на ионах, при котором «число волн» сохраняется, а энергия уменьшается пропорционально частоте.

Если перейти к частотной зависимости согласно соотношению $I_k dk = I_\omega d\omega$, то получим $I_\omega \sim \omega^{-1} \ln \frac{\Omega_0}{\omega}$. Таким образом, энергия установившихся ионных колебаний оказывается сосредоточенной в области низких частот, т. е. вблизи нижней границы устойчивости. Что касается спектральной функции электрического поля $E_k^2 = k^2 I_k$, которая определяет влияние колебаний на электронную функцию распределения, то она максимальна при $k \sim D^{-1}$.

Если в уравнении (IV. 17) вместо инкремента подставить его значение по линейной теории, то при $u \gg c_s$ мы получим следующее значение для спектральной функции:

$$I_k \sim \frac{u}{v_e} \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{70_0^2} \frac{T_e^2}{4\pi e^2 k^3} \ln \frac{1}{kD}.$$

Это очень большая величина, и совершенно очевидно, что при наличии таких колебаний функция распределения электронов по продольной скорости не может быть максвелловской. Другими словами, мы должны учесть обратное влияние колебаний на усредненную функцию распределения. Для этой цели достаточно воспользоваться квазилинейным приближением.

При наличии достаточно сильного продольного магнитного поля, когда $\Omega_e = \frac{eH}{m_e c} \gg \Omega_0$, движением электронов поперек магнитного поля можно пренебречь, и колебания приводят к образованию плато на распределении по продольной скорости в интервале от c_s до u . В результате инкремент нарастания возмущений снижается в $\frac{\tau_e}{v_e^2} \frac{e^2 E_{k_0}^2}{m^2} \frac{k_0}{c_s}$ раз, где $k_0 \sim D^{-1}$, τ_e — среднее время между последовательными столкновениями электрона с атомами нейтрального газа. С учетом этого эффекта спектральная функция по порядку величины оказывается равной

$$I_k \sim \frac{1}{100_0} \sqrt{\frac{u}{c_s} \frac{m_e}{m_i} \frac{T_e}{T_i} \frac{1}{\omega_0 \tau_e} \ln \frac{1}{kD} \frac{T_e^2}{e^2 k^3}}. \quad (\text{IV. 20})$$

Как мы видим, даже с учетом образования плато на электронной функции распределения амплитуда колебаний достаточно велика.

В отсутствие магнитного поля влияние колебаний на электронную функцию распределения становится еще более существенным. В этом случае каждая отдельная волна с волновым вектором k создает плато по направлению k в тонком слое по v . Этот слой перпендикулярен k и расположен на расстоянии c_s от начала коор-

динат (рис. 15). Поскольку $c_s \ll v_e$, то все колебания в совокупности создают плато на угловой зависимости функции распределения в области резонансного взаимодействия. Таким образом, ионно-звуковые колебания, развивающиеся в некотором конусе направлений с углом раствора θ_0 , должны приводить к изотропизации функции распределения электронов во внешнем объеме конуса с углом раствора $\pi/2 - \theta_0$. При $u \gg c_s$, когда в неограниченной плазме неустойчивы практически все волны с положительной проекцией фазовой скорости на ось z , угол $\theta_0 \approx \pi/2$, и колебания должны были бы приводить к полному «запиранию» тока (направленная скорость электронов не могла бы превышать c_s). В ограниченной плазме, скажем, в плазме положительного столба тлеющего разряда, наряду с рассмотренными эффектами следовало бы учитывать перенос энергии волн на стенку добавлением члена $U_k \frac{\partial I_k}{\partial r}$ в кинетическое уравнение для волн. В соответствии с этим волны, распространяющиеся поперек разряда, должны быть затухающими, и угол θ_0 может быть достаточно мал даже при $u \gg c_s$.

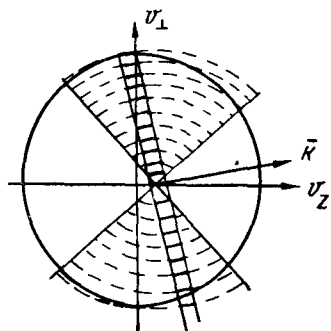


Рис. 15. Изотропизация функции распределения при ионно-звуковых колебаниях.

Отметим еще одно обстоятельство. Выше мы оценили величину усредненной по углам спектральной функции. Если бы мы захотели уточнить угловую зависимость, то мы должны были бы решить интегральное уравнение с вырожденным ядром, которое, как известно, далеко не всегда имеет решения. Другими словами, угловая зависимость $\text{Im} \epsilon$ может оказаться отличной от угловой зависимости интегрального члена в уравнении (IV. 16). При этом интегральный член не может полностью скомпенсировать инкремент, и в отдельных направлениях по k амплитуда колебаний будет продолжать нарастать. Вследствие этого у ионно-звуковых колебаний в неограниченной плазме должна существовать тенденция к образованию отдельных волновых пакетов с довольно резко очерченной угловой зависимостью.

Более того, из уравнения (IV. 16) видно, что взаимодействие волн увеличивается по мере увеличения угла θ_s между их волновыми векторами. Другими словами, отдельная волна эффективно подавляет «далеких соседей», но слабо влияет на волны, идущие с ней в одном направлении. Поэтому нелинейное взаимодействие не только не останавливает, но даже усиливает тенденцию к локализации волн в некоторых выделенных направлениях. В неограниченной плазме этот процесс будет, по-видимому, развиваться до тех пор, пока в игру не вступят четырехволновые процессы. В ограниченной плазме в кинетическое уравнение для коротко-

волновых колебаний следует добавить член $\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}$, который и будет определять их угловую зависимость. Что касается колебаний с длиной волны порядка размеров неоднородности, то для них такой подход не пригоден, и в тех случаях, когда выполнено условие их раскачки, можно ожидать преимущественного развития одного из таких собственных колебаний.

Раскачка циклотронных колебаний электронным током

Рассмотренная выше ионно-звуковая неустойчивость имеет место только в неизотермической плазме, когда $T_e \gg T_i$. При $T_i \sim T_e$ ионно-звуковые колебания не существуют ввиду сильного специфического затухания на ионах, и раскачка колебаний возможна только при $u \geq v_e$ [80]. Однако при наличии магнитного поля, которое придает плазме дополнительную «упругость», колебания могут возбуждаться и при меньших значениях направленной скорости u .

Рассмотрим сначала случай сильного магнитного поля, когда давление магнитного поля много больше давления плазмы, т. е. выполнено условие $\beta = \frac{8\pi p}{H^2} \ll 1$. Драммонд и Розенблют [81] показали, что в этом случае продольный поток электронов может возбуждать ионные циклотронные колебания. Эти колебания при $\beta \ll 1$ являются чисто продольными, т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Их частота, как показано в работе [81], дается соотношением

$$\omega = \Omega_i \left\{ 1 + \frac{T_e}{T_i} e^{-s} I_1(s) + i \sqrt{\pi} \frac{T_e}{T_i} e^{-s} I_1(s) \frac{k_z u - \Omega_i}{k_z v_e} \right\}, \quad (\text{IV. 21})$$

где $\Omega_i = \frac{eH}{m_i c}$ — циклотронная частота ионов, $s = k_{\perp}^2 \rho_i^2 = \frac{k_{\perp}^2 T_i}{m_i \Omega_i^2}$,

$I_1(s)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $v_e = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}$.

Выражение (IV. 21) относится только к волнам с малыми k_z , так как только при $k_z \lesssim \frac{1}{3v_i} (\omega - \Omega_i)$ можно пренебречь затуханием на ионах. Так как величина $\frac{\omega - \Omega_i}{\Omega_i} \approx \frac{T_e}{T_i} e^{-s} I_1(s)$ достигает максимума (порядка $0,2 \frac{T_e}{T_i}$) при $s \approx 1,5$, то $k_z \lesssim \frac{1}{15} \frac{T_e}{T_i} \frac{\Omega_i}{v_i}$, и согласно выражению (IV. 21) неустойчивость развивается только при

$$u > u_c \approx 15 \frac{T_i}{T_e} v_i = 15 \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_e. \quad (\text{IV. 22})$$

Для водородной плазмы это условие принимает вид $u \geq \frac{v_e}{3} \sqrt{\left(\frac{T_i}{T_e} \right)^3}$.

Качественная зависимость частоты колебаний ω и инкремента γ от волнового числа k_{\perp} представлена графически на рис. 16. Такая зависимость γ от k_{\perp} имеет место, когда условие расщепки (IV. 22) выполнено с большим запасом. При уменьшении u область волновых чисел, где $\gamma > 0$, сужается.

В рамках квазилинейного приближения задача об установившихся колебаниях была рассмотрена в работе [81]; авторы этой работы оценили ту амплитуду колебаний, при которой на электронной функции распределения устанавливается плато. Однако при

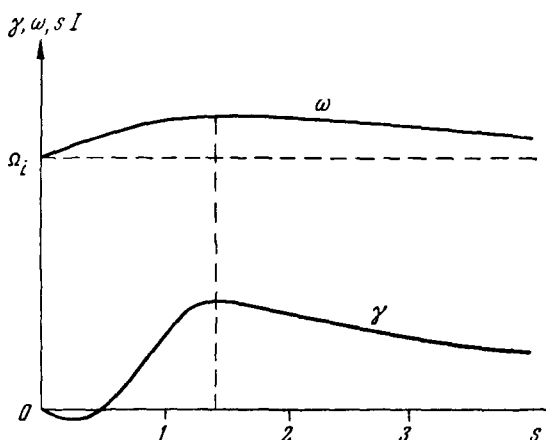


Рис. 16. Зависимость частоты и инкремента циклотронных колебаний от волнового числа.

наличии продольного электрического поля процесс развития колебаний не останавливается на этой стадии, поскольку электрическое поле стремится уничтожить это плато, и функция распределения все время будет иметь тенденцию к превращению в сдвинутую максвелловскую. Поэтому амплитуда колебаний будет нарастать до тех пор, пока не начнут играть роль нелинейные процессы.

Колебания с частотой, несколько большей циклотронной, создают биения на частотах, которые близки к нулю и к удвоенной циклотронной. Поскольку колебания с нулевой частотой весьма эффективно передают энергию ионам, то именно этот процесс нелинейного затухания и приводит к ограничению амплитуды колебаний. Задача об установившихся циклотронных колебаниях была рассмотрена Петвиашвили [82] и Карпманом [83].

Поскольку фазовая скорость циклотронных волн вдоль магнитного поля $\omega/k_z \sim u$ значительно больше тепловой скорости ионов, то, как и выше, нелинейное затухание волн описывается интегральным членом, содержащим под интегралом $\delta(\omega - \omega')$ и ее производную. При интегрировании этой δ -функции по k_{\perp}

мы получим множитель вида $\left| \frac{d\omega}{dk_{\perp}} \right|^{-1}$. При приближении к точке, где ω как функция k_{\perp} достигает максимума, этот множитель стремится к бесконечности. Следовательно, в этой точке амплитуда установившихся колебаний должна обращаться в нуль, хотя, согласно рис. 16, именно в этой точке инкремент максимален.

Эффект рассеяния волн на ионах с учетом образования плато на электронной функции распределения приводит, как показал Петвиашвили, к следующей оценке величины равновесной спектральной функции:

$$dk_{\perp} \int I_k dk_z \sim \frac{T_e T_i}{e^2} \left(\frac{u^3}{v_e v_i^2 \Omega_e \tau_e} \right)^{1/2} \frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}^2}, \quad (\text{IV. 23})$$

где $\Omega_e = \frac{eH}{m_e c}$, $1/\tau_e$ — частота электронных столкновений, I_k — спектральная функция электрического потенциала. Величина (IV. 23) значительно превышает интенсивность тепловых флуктуаций, которая в этой области длин волн имеет порядок величины $I_k k^3 \sim \frac{T_e^2}{e^2} (n_0 \Omega_i^3)^{-1}$.

Выражение (IV. 23) относится к случаю, когда u значительно превышает критическое значение u_c .

Раскачка магнитного звука

При увеличении $\beta = \frac{8\pi p}{H^2}$, когда фазовая скорость рассматриваемых колебаний, имеющая порядок величины u , приближается к альфвеновской, их нельзя уже считать продольными. Другими словами, при этом $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$, и колебания заметно усложняются. Кроме того, в этом случае появляется возможность раскачки более длинноволновых магнитозвуковых колебаний.

Частота магнитозвуковых колебаний с учетом затухания Ландау была получена в работах [84, 85]. Распространяя результат этих работ на случай, когда имеется продольный ток, мы получим для колебаний с частотой $\omega \ll \Omega_i$

$$\omega^2 = c_A^2 k^2 \left\{ 1 + i \frac{V \bar{\pi}}{v_e k_z} (k_z u - kc_A) \frac{T_e}{m_i c_A^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right\}. \quad (\text{IV. 24})$$

Отсюда видно, что неустойчивость возникает при $u > c_A$, причем инкремент оказывается сравнительно мал, а именно $\gamma/\omega \sim \beta \frac{u}{v_e}$.

Выражением (IV. 24) можно пользоваться как приближенным вплоть до $\omega \sim \Omega_i$, т. е. $k\Omega_i \sim \sqrt{\beta}$. При увеличении волнового

числа выше этого значения магнитозвуковые колебания довольно быстро переходят в чисто электронные колебания, соответствующие так называемым «свистящим атмосферикам». В этих колебаниях ионы не принимают участия, и, следовательно, они не могут возбуждаться продольным током. Кроме того, в области более коротких длин волн имеется рассмотренная нами выше циклотронная ветвь, которая при $\beta \ll 1$ примыкает к ионно-звуковым (т. е. замедленным магнитозвуковым) колебаниям.

Таким образом, магнитозвуковые колебания возбуждаются только в области $k\varrho_i < \sqrt{\beta}$. Эти колебания обладают нераспадным спектром (см. гл. II, § 1). Правда, своими биениями они могут возбуждать альфвеновские волны, но поскольку последние практически не поглощаются частицами, то этот эффект не приводит к ограничению амплитуды колебаний. Следовательно, и в данном случае амплитуда установившихся колебаний определяется нелинейным затуханием на биениях, т. е. поглощением энергии колебаний частицами. Средний квадрат амплитуды установившихся колебаний E_k^2 можно оценить из условия баланса энергии. Для этого достаточно приравнять энергию, передаваемую в единицу времени от электронов к ионам, к той энергии, которая поглощается в единицу времени ионами. Приближенно это условие может быть записано в виде

$$\tilde{\gamma} E_k^2 \equiv \gamma \left(\frac{\tau_e}{v_e^2} \frac{e^2}{m_e^2} \frac{1}{uk} E_k^2 \right)^{-1} \cdot E_k^2 = B E_k^4. \quad (\text{IV. 25})$$

Здесь E_k^2 — некоторое среднее значение спектральной функции, $k \sim \varrho_i^{-1} \sqrt{\beta}$, $\gamma \sim \omega \beta \frac{u}{v_e}$ — линейный инкремент, а $\tilde{\gamma}$ — инкремент с учетом образования плато на электронной функции распределения. Правая часть уравнения (IV. 25) учитывает нелинейное затухание волн. Чтобы оценить величину B , заметим, что амплитуда нелинейных биений на низкочастотных колебаниях обусловлена нелинейностью уравнения движения для ионов и может быть оценена как $E_k' \sim \frac{m_i k}{e} \cdot \frac{c^2 E_k^2}{H^2}$. Энергия этих колебаний по порядку величины равна $m_i n \frac{c^2}{H^2} E_k'^2 = m_i^3 n \frac{c^6 k^2}{e^2 H^6} E_k^4$, а ее поглощение в единицу времени можно оценить как $\beta c_A k \frac{c^2 k^2}{H^2 \Omega_i^2} E_k^2 \cdot m_i n E_k^2 \times \times \frac{c^2}{H^2}$, где множитель β учитывает, что к затуханию приводит взаимодействие только близких по частоте колебаний, когда фазовая скорость биений порядка тепловой скорости ионов [ср. с множителем T_i/T_e в (IV. 16)]. Сравнивая полученный результат с уравнением (IV. 25) и учитывая, что энергия основных колебаний имеет порядок величины $m_i n E_k^2 \frac{c^2}{H^2}$, получим приближенно $B \approx$

$\approx v_i k \beta \frac{k^2 c^2}{\Omega_i^2 H^2}$. Подставляя это значение в соотношение (IV. 25)

и полагая $k \sim \Omega_i^{-1} \sqrt{\beta}$, найдем приближенное значение интенсивности колебаний электрического поля:

$$E_k^2 \sim \frac{H^2 v_i^2}{c^2} \frac{u}{\sqrt{c_A v_e}} \frac{1}{\sqrt{\Omega_e \tau_e}}. \quad (\text{IV. 26})$$

Из этого соотношения видно, что кинетическая энергия установившихся колебаний, грубо говоря, в $\sqrt{\Omega_e \tau_e}$ раз меньше тепловой. Эта энергия сосредоточена в колебаниях с частотой, порядка циклотронной Ω_i .

Как магнитозвуковые, так и циклотронные колебания приводят к плато шириной u на электронной функции распределения. Вследствие этого электронный ток уменьшается на малую величину порядка u/v_e от полного тока. Уменьшение тока при заданном электрическом поле эквивалентно появлению дополнительного «аномального» сопротивления. Следовательно, эффективная проводимость плазмы σ определяется соотношением

$$\frac{1}{\sigma} \cong \frac{1}{\sigma_0} \left(1 + \frac{u}{v_e} \right), \quad (\text{IV. 27})$$

где σ_0 — проводимость, обусловленная столкновениями.

Можно показать, что одна треть джоулева тепла, выделяемого на дополнительном сопротивлении, передается колебаниям, а затем ионам. В результате этого происходит дополнительный нагрев ионов. Если в стационарных условиях потери энергии ионами отсутствуют, а температура электронов поддерживается на заданном уровне, то аномальный нагрев ионов должен поднять их температуру до такого значения, чтобы передаваемая им энергия $\frac{1}{3} \frac{u}{v_e} \frac{j^2}{\sigma_0}$ в точности равнялась энергии $\frac{m}{M} \frac{n}{\tau_e} (T_i - T_e)$, передаваемой ими электронам. Полагая $\sigma = e^2 n \tau_e / m_e$, $j = uen$, получим

$$T_i \cong T_e \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m_i}{m_e} \frac{u^3}{v_e^3} \right). \quad (\text{IV. 28})$$

Отсюда следует, что при достаточно большей величине u/v_e турбулентный нагрев ионов может привести к заметному «отрыву» ионной температуры от электронной.

Рассматриваемые колебания должны приводить не только к нагреву, но и к усиленной диффузии плазмы поперек магнитного поля, поскольку в данном случае в колебаниях заведомо участвуют и электроны, и ионы. Так как диффузия определяется величиной среднего дрейфа вдоль градиента плотности, т. е. вдоль оси x , то диффузионный поток можно представить как

$$q = - \frac{d}{dx} \int \frac{c^2}{H^2} \pi E_{y\mathbf{k}}^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}v) f_e d\mathbf{v} dk. \quad (\text{IV. 29})$$

Если подставить сюда значение (IV. 26) для E_k^2 и учесть, что вклад в интеграл дает только резонансная область, то для коэффициента диффузии получим приближенное значение

$$D_{\perp} \sim \frac{u^2}{v_e \sqrt{v_e c_A}} \frac{D_B}{\sqrt{\Omega_e \tau_e}}, \quad (\text{IV. 30})$$

где $D_B \sim \rho_i v_i$ — коэффициент диффузии Бома.

Циклотронные колебания приводят к коэффициенту диффузии того же порядка величины.

§ 3. Дрейфовая неустойчивость плазмы

Здесь мы познакомимся с дрейфовой неустойчивостью плазмы, которая является причиной аномальной диффузии разреженной плазмы в однородном магнитном поле. Дрейфовая неустойчивость была обнаружена Ю. А. Церковниковым [18]. Он показал, что при наличии градиента температуры в неоднородной плазме могут возбуждаться колебания, фазовая скорость которых поперек магнитного поля имеет порядок величины дрейфовой скорости частиц. Такие колебания естественно называть дрейфовыми волнами.

В работе Ю. А. Церковникова [18] были рассмотрены только такие волны, которые распространяются поперек магнитного поля. Позднее Л. И. Рудаков, и Р. З. Сагдеев [19] рассмотрели более общий случай косых дрейфовых волн, переходящих в ионно-звуковые при уменьшении угла между волновым вектором и направлением магнитного поля. Как было показано в работе [19], при наличии градиента температуры такие волны могут нарастать во времени.

На дальнейшее развитие теории дрейфовой неустойчивости весьма существенное влияние оказала работа Розенблюта, Кроля и Ростокера [20], посвященная исследованию эффекта стабилизации желобковой неустойчивости плазмы за счет эффекта конечного ларморовского радиуса. Эта работа стимулировала целый ряд исследований дрейфовой неустойчивости плазмы по отношению к коротковолновым возмущениям с поперечной длиной волны порядка среднего ларморовского радиуса ионов.

В упомянутых выше работах исследовалась устойчивость настолько разреженной плазмы, что столкновениями между частицами можно было пренебречь. С другой стороны, к дрейфовым волнам подвели исследования устойчивости слабо ионизованной плазмы, где столкновения заряженных частиц с атомами нейтрального газа играют определяющую роль. Как обнаружил А. В. Тимофеев [22] (см. также [93, 94]), при уменьшении давления нейтрального газа в слабо ионизованной плазме появляется своеобразная неустойчивость, для которой оказывается существенным сочетание дрейфowego движения заряженных частиц поперек магнитного поля с их диффузией. Такую неустойчивость мы будем

называть дрейфово-диссипативной. Как было показано С. С. Моисеевым и Р. З. Сагдеевым [23], неустойчивость такого типа имеет место и в плотной полностью ионизованной плазме. В работах [88, 96] было показано, что наряду с диффузией в качестве механизма диссипации, ответственного за неустойчивость, может выступать теплопроводность и вязкость.

В настоящем параграфе будет дан краткий обзор дрейфовых неустойчивостей неоднородной плазмы (более полный обзор написан А. Б. Михайловским [21]). При этом мы будем считать, что давление плазмы много меньше давления магнитного поля, т. е. $\beta = 8\pi p/H^2 \ll 1$. Магнитное поле будем считать однородным.

Дрейфовые волны в неоднородной плазме

Рассмотрим плазму низкого давления в однородном магнитном поле H , направленном вдоль оси z , и допустим, что плотность плазмы изменяется вдоль оси x . Для простоты будем считать, что температура плазмы постоянна. Кроме того, допустим, что температура ионов равна нулю. Тогда в равновесном состоянии ионы можно считать покоящимися, а электроны — дрейфующими со скоростью $v_0 = -\frac{T_e}{m\Omega_e n} \frac{dn}{dx}$, где $\Omega_e = \frac{eH}{m_e c}$. Это так называемый ларморовский дрейф. Мы предположим, что $\frac{dn}{dx} < 0$ и, следовательно, $v_0 > 0$.

Рассмотрим возмущения с поперечной длиной волны, значительно меньшей характерного размера $a = \kappa^{-1}$, где $\kappa = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$. Такие возмущения можно считать плоскими волнами вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Ограничиваясь сначала случаем, когда $\omega/k_z \ll c_A$, мы будем считать электрическое поле безвихревым, т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Другими словами, мы рассмотрим сначала продольные колебания плазмы. При не слишком малых k_z , когда фазовая скорость волны значительно меньше тепловой скорости электронов, последние успевают распределиться по Больцману, так что величина возмущения плотности электронов n_e может быть выражена через φ :

$$n_e/n = \frac{e\varphi}{T_e}, \quad (\text{IV. 31})$$

где n — невозмущенная плотность, T_e — температура электронов.

Выражение для возмущения плотности ионов n_i можно найти из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}_i) = 0. \quad (\text{IV. 32})$$

Здесь \mathbf{v}_i — макроскопическая скорость ионов, которая может быть найдена из уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{e}{m_i} \nabla \varphi + \frac{e}{m_i c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}]. \quad (\text{IV. 33})$$

При $\omega \ll \Omega_i$ находим из уравнения (IV. 33) поперечную

$$\mathbf{v}_{i\perp} \doteq i \frac{c}{H} [\mathbf{hk}] \varphi + \frac{c}{H} \frac{\omega}{\Omega_i} \mathbf{k}_{\perp} \varphi. \quad (\text{IV. 34})$$

и продольную

$$v_{iz} = \frac{e}{m_i} \frac{k_z}{\omega} \varphi \quad (\text{IV. 35})$$

компоненты скорости.

При $\omega \ll \Omega_i$ вторым слагаемым в уравнении (IV. 34) можно пренебречь, т. е. можно считать, что скорость ионов определяется электрическим дрейфом. В этом приближении с помощью соотношений (IV. 33)—(IV. 35) получаем

$$\frac{n_i}{n} = \left(\frac{\omega_*}{\omega} - \frac{k_z^2 T_e}{m_i \omega^2} \right) \frac{e \varphi}{T_e}, \quad (\text{IV. 36})$$

где $\omega_* = k_y v_0 = -\frac{T_e k_y \kappa}{m_i \Omega_i}$.

В плотной плазме, когда дебаевский радиус ничтожно мал, все колебания можно считать квазинейтральными, т. е. $n_i = n_e$. Подставляя в это соотношение найденные выше значения для возмущения плотности электронов и ионов, получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - \omega \omega_* - k_z^2 c_s^2 = 0, \quad (\text{IV. 37})$$

где $c_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$ — скорость звука.

Это и есть искомое дисперсионное уравнение для дрейфовых волн. Определяемая им зависимость ω от

k_z представлена графически на рис. 17. Кривая 1 относится к волне, распространяющейся в сторону дрейфа электронов, у которой $\omega/k_y > 0$, а кривая 2 дает частоту волны, распространяющейся в противоположную сторону, т. е. с $\omega/k_y < 0$. Как мы видим, частоты этих двух волн несколько отличаются по абсолютной величине, а именно, при $k_z \rightarrow 0$ частота первой волны стремится к ω_* , а частота второй стремится к нулю.

Поперечная фазовая скорость первой волны при $k_z = 0$ в точности совпадает с дрейфовой скоростью электронов v_0 . По порядку величины она равна $c_s r_n / a$, где $r_n = \sqrt{\frac{T_e}{m_i \Omega_i^2}}$ — ларморовский радиус ионов при электронной температуре (для обычного лармо-

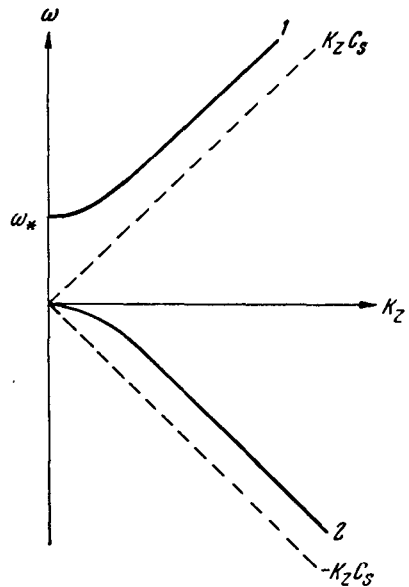


Рис. 17. Дисперсионная зависимость ω от k_z для продольных колебаний неоднородной плазмы.

ровского радиуса ионов $\sqrt{\frac{T_i}{m_i \Omega_i^2}}$ мы сохраним обозначение q_i).

При $k_z/k_y > r_H/a$ обе дрейфовые волны переходят в ионно-звуковые. Поэтому первую из них естественно назвать ускоренной, а вторую — замедленной ионно-звуковой волной. В сильном магнитном поле $r_H \ll a$, и в этом случае переход к простой звуковой волне происходит при почти поперечном распространении, когда $k_z/k_y \ll 1$.

Если еще раз вернуться к выводу дисперсионного уравнения, то нетрудно установить, что влияние неоднородности на частоту колебаний происходит благодаря поперечному дрейфу ионов. Само по себе это движение является несжимаемым, т. е. $\text{div } \mathbf{v}_i \perp = 0$, и в однородной плазме оно не приводит к изменению плотности. Однако в неоднородной плазме даже несжимаемое смещение плазмы ξ вдоль градиента плотности приводит к возмущению плотности $n_i = -\xi \frac{dn}{dx}$. Именно это возмущение плотности и приводит к изменению дисперсионного уравнения.

Эти рассуждения остаются в силе и при отличной от нуля температуре ионов. Действительно, если поперечная длина волны значительно больше ларморовского радиуса ионов q_i , а фазовая скорость вдоль оси z значительно больше тепловой v_i , то можно опять воспользоваться гидродинамическим уравнением движения (IV. 33), в котором лишь следует учесть член с градиентом давления ионов. Этот член приводит к ларморовскому току $\frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla p_i]$, который при $H = \text{const}$ является несжимаемым и поэтому не дает вклада в изменение плотности. Таким образом, при $T_i \neq 0$ полученное выше дисперсионное уравнение (IV. 37) сохраняет свой вид, если только $\omega/k_z > c_s$. Отсюда следует, что при $T_i = T_e$, т. е. $c_s \sim v_i$, когда ионный звук в однородной плазме не существует, в неоднородной плазме может распространяться дрейфовая волна (ускоренная звуковая) с частотой $\omega \approx \omega_*$. Фазовая скорость этой волны вдоль магнитного поля может значительно превышать тепловую скорость ионов, и, следовательно, она не подвержена сильному затуханию на ионах.

При уменьшении k_z фазовая скорость ускоренной волны возрастает и при достаточно малом k_z она может достигнуть либо c_A , либо v_e в зависимости от того, какая из этих скоростей меньше. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая $c_A \ll v_e$, т. е. $\beta = 8\pi \rho / H^2 \gg \frac{m_e}{m_i}$.

При $\frac{\omega}{k_z} \sim c_A$ электрическое поле нельзя уже считать безвихревым. Можно сказать, что при $\frac{\omega}{k_z} \sim c_A$ у силовых линий магнитного поля не хватает «жесткости» и они немного искривляются. В этом случае чисто формально можно ввести продольный

потенциал ψ , определяемый соотношением $E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$. А поскольку при рассматриваемых нами медленных колебаниях поперечную компоненту электрического поля можно считать безвихревой, то можно ввести и поперечный потенциал ϕ : $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp\phi$. Введение потенциала ϕ эквивалентно очевидному допущению, что силовые линии магнитного поля не сгущаются и не разрежаются, а только немного искривляются (при $\psi = \phi$ исчезает и искривление).

Так как по предположению тепловая скорость электронов значительно превышает фазовую скорость волны $\omega/k_z \sim c_A$, то электроны успевают прийти в равновесие вдоль силовых линий магнитного поля и, следовательно, имеет место соотношение

$$T_e i k_z n_e + T_e \frac{H'_x}{H} \frac{dn}{dx} = i k_z e n \psi, \quad (\text{IV. 38})$$

где H'_x — x -компонента возмущения магнитного поля, равная $H'_x = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]_x = i \frac{c}{\omega} k_z k_y (\phi - \psi)$. Таким образом, для возмущения плотности электронов получаем

$$\frac{n_e}{n} = \frac{e\phi}{T} + \frac{e}{T} (\psi - \phi) \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right). \quad (\text{IV. 39})$$

Нам необходимо связать между собой ϕ и ψ . Для этого воспользуемся z -компонентой уравнения $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \text{rot rot } \mathbf{E}$, где \mathbf{j} — плотность электрического тока. Для рассматриваемых нами колебаний получим

$$j_z = \frac{c^2}{4\pi\omega} k_z k_\perp^2 (\phi - \psi). \quad (\text{IV. 40})$$

Чтобы определить j_z , воспользуемся соотношением $\text{div } \mathbf{j} = 0$, из которого получим

$$j_z = i k_z^{-1} \text{div } \mathbf{j}_\perp = i k_z^{-1} \text{div } n (\mathbf{v}_{i\perp} - \mathbf{v}_{e\perp}).$$

Из этого соотношения видно, что продольный ток возникает за счет небольшого различия в поперечных скоростях ионов и электронов. Это значит, что в выражении для скорости ионов (IV. 34) следует учесть второй (инерционный) член. Кроме того, небольшое отличие ионной скорости от скорости электрического дрейфа, как было показано в работе [20], возникает за счет эффекта конечного ларморовского радиуса. В обычных условиях сильного магнитного поля средний ларморовский радиус, хотя и мал, представляет собой некоторую конечную величину. Поэтому электрический дрейф ионов определяется не тем значением электрического поля, которое оно имеет в центре ларморовской окружности, а некоторым усредненным по ларморовской окружности значением. Нетрудно видеть, что при усреднении электрического поля плоской волны

по окружности радиуса $\rho = v_{\perp}/\Omega_i$ с последующим усреднением по v_{\perp} с максвелловской функцией распределения эффективное (среднее) поле уменьшается по сравнению с локальным значением в центре кружка на факторе $^{-s}I_0(s)$, где $s = \frac{k_{\perp}^2 T_i}{m_i \Omega_i^2}$, I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента. При малых значениях s этот множитель приближенно равен $1 - s$, и в этом случае выражение для скорости ионов можно записать в виде

$$v_{i\perp} = \frac{ic}{H} [\mathbf{hk}] \varphi - \frac{ic}{H} [\mathbf{hk}] \frac{k_{\perp}^2 T}{m_i \Omega_i^2} \varphi + \frac{c}{H} \frac{\omega}{\Omega_i} \mathbf{k}_{\perp} \varphi. \quad (\text{IV. 41})$$

Подставляя это выражение для скорости ионов в $\text{div } \mathbf{j}_{\perp}$ и учитывая, что $\mathbf{v}_{e\perp} = \frac{ic}{H} [\mathbf{hk}] \varphi$, получим

$$j_z = -\frac{\mathbf{kj}_{\perp}}{kz} = -\frac{nm_i c^2}{H^2} \frac{k_{\perp}^2}{kz} (\omega + \omega_*) \varphi. \quad (\text{IV. 42})$$

Подставляя это выражение в уравнение (IV. 40), находим связь между φ и ψ :

$$\psi - \varphi = -\varphi \frac{\omega(\omega + \omega_*)}{k_z^2 c_A^2}. \quad (\text{IV. 43})$$

С помощью этого соотношения и уравнения (IV. 39) находим возмущение плотности электронов

$$\frac{n_e}{n} = \left\{ 1 - \frac{\omega^2 - \omega_*^2}{c_k^2 k_z^2} \right\} \frac{e\varphi}{T}. \quad (\text{IV. 44})$$

Приравнивая это выражение к возмущению плотности ионов (IV. 36), пренебрегая при этом вторым слагаемым в круглых скобках в равенстве (IV. 36), мы получим дисперсионное уравнение

$$(\omega - \omega_*) (\omega^2 + \omega_* \omega - c_A^2 k_z^2) = 0. \quad (\text{IV. 45})$$

Как мы видим, оно расщепляется на два: уравнение $\omega = \omega_*$, которое описывает знакомую уже нам дрейфовую звуковую волну, и уравнение

$$\omega^2 + \omega_* \omega - c_A^2 k_z^2 = 0, \quad (\text{IV. 46})$$

которое показывает, что при $k_z \rightarrow 0$ альфвеновские волны в неоднородной плазме также переходят в дрейфовые. Чтобы отличать эти волны от рассмотренных ранее, мы будем называть одну из них ускоренной альфвеновской ($\omega/k_z > c_A$), а другую — замедленной альфвеновской ($\omega/k_z < c_A$).

Если учесть отброшенные нами малые члены порядка $k^2 \rho_i^2$, то при $\beta > \frac{m_e}{m_i}$ вместо пересечения ветвей мы получим картину,

представленную на рис. 18. Здесь, как и раньше, волны с положительной частотой (кривые 1 и 3) распространяются в сторону дрейфа электронов, а волны с $\omega < 0$ (кривые 2 и 4) — в сторону дрейфа ионов. Как мы видим, в неоднородной плазме вместо обычных звуковой и альфвеновской волн мы имеем четыре различные волны.

Ниже проводится исследование устойчивости неоднородной плазмы на дрейфовых волнах. В бесстолкновительной плазме причиной неустойчивости является взаимодействие дрейфовых волн с резонансными частицами, которое учитывается затуханием Ландау. Для учета этого эффекта необходимо кинетическое рассмотрение.

Дрейфовая неустойчивость при $k_{\perp} \rho_i \ll 1$

Для описания колебаний бесстолкновительной плазмы с длиной волны, значительно превышающей средний ларморовский радиус ионов, можно воспользоваться дрейфовым кинетическим уравнением (именно такое приближение было использовано в работе [19]). Для продольных колебаний, которыми мы здесь и ограничимся, линеаризованное дрейфовое кинетическое уравнение для частиц с массой m и зарядом e имеет вид

$$(-\omega + k_z v_z) f' - \frac{e}{m} k_z \varphi \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{c}{H} k_y \varphi \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (\text{IV. 47})$$

где f — невозмущенная функция распределения. С помощью уравнения (IV. 47) находим возмущение плотности

$$n' = -e\varphi \int \left\{ \frac{k_z}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{k_y}{m\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cdot \frac{dv}{\omega - k_z v_z + i\nu}, \quad (\text{IV. 48})$$

где положительная величина $\nu \rightarrow 0$ добавлена нами для правильного обхода полюса. В частном случае, когда функция f является максвелловской, а температура $T = \text{const}$, плотность n' выражается через функцию

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{z - x + i\nu} = 2e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt - i\sqrt{\pi} e^{-z^2}. \quad (\text{IV. 49})$$

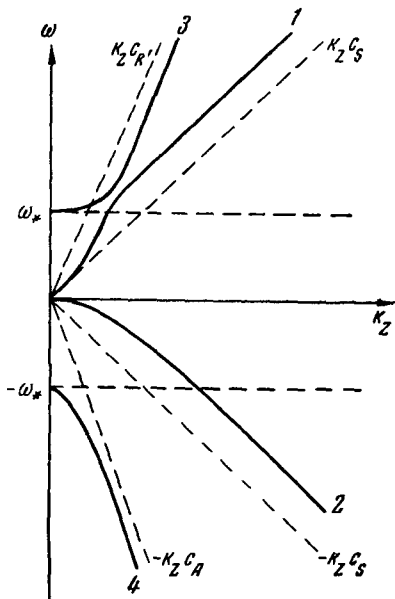


Рис. 18. Зависимость частоты дрейфовых волн от волнового числа.

Действительно, при этом $\frac{\partial f}{\partial v_z} = -\frac{m\dot{v}_z}{T} f$, $\frac{\partial f}{\partial x} = -\chi f$, и из равенства (IV. 48) получаем

$$\frac{n'}{n} = \left\{ \frac{\omega + \omega_*}{k_z v_T} Y \left(\frac{\omega}{k_z v_T} \right) - 1 \right\} \frac{e\Phi}{T}, \quad (\text{IV. 50})$$

где v_T — тепловая скорость.

Пользуясь условием квазинейтральности, получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega + \omega_*}{k_z v_i} Y \left(\frac{\omega}{k_z v_i} \right) + \frac{\omega - \omega_*}{k_z v_e} Y \left(\frac{\omega}{k_z v_e} \right) = 2, \quad (\text{IV. 51})$$

где $v_i = \sqrt{\frac{2T}{m_i}}$, $v_e = \sqrt{\frac{2T}{m_e}}$, $\omega_* = k_y v_0$.

Рассмотрим дрейфовые волны с фазовой скоростью, заключенной в интервале $v_i \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_e$. При этом затуханием Ландау на ионах можно пренебречь. Кроме того, для общности допустим, что температура изменяется вдоль оси x , а электронная функция сдвинута относительно ионной на величину u (т. е. имеется продольный электронный ток). В этом случае дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 - \frac{\omega_*}{\omega} - \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_*}{\omega} \frac{T_i}{T_e} \right) + \frac{i\sqrt{\pi}}{k_z v_e} \left(\omega - k_z u - \omega_* + \frac{1}{2} \omega_* \eta \right) = 0, \quad (\text{IV. 52})$$

где $\eta = \frac{d \ln T_e}{d \ln n}$. При $T_i = 0$ это уравнение отличается от уравнения (IV. 37) малым мнимым слагаемым, которое возникает в результате взаимодействия волны с резонансными электронами, продольная скорость которых совпадает с фазовой скоростью волны. При $\omega/k_z \gg c_s$ третьим слагаемым в уравнении (IV. 52) можно пренебречь, так что приближенно

$$\omega = \omega_*, \quad \gamma = \sqrt{\pi} \omega_* \left(\frac{u}{v_e} - \frac{1}{2} \frac{\omega_*}{k_z v_e} \eta \right). \quad (\text{IV. 53})$$

Как мы видим, при $\frac{u}{v_e} \ll 1$ и $\frac{\omega_*}{k_z} \ll v_e$ инкремент нарастания малых возмущений значительно меньше частоты. Из выражения для инкремента γ видно, что в отсутствие продольного тока неустойчивость имеет место только при $\eta = \frac{d \ln T_e}{d \ln n} < 0$. В реальных условиях величина η , как правило, положительна, и, следовательно, неустойчивость на длинноволновых возмущениях, т. е. при $k_{\perp} \rho_i \ll 1$, появляется лишь при наличии продольного тока (впрочем, при достаточно больших значениях η , а именно при $\eta > 2$, возможна неустойчивость на возмущениях с $k_z \sim \frac{\omega_*}{v_e}$ [19]).

Неустойчивость на дрейфовых волнах при $u \neq 0$ является распространением ионно-звуковой неустойчивости (см. гл. IV, § 2) на случай $T_i \sim T_e$, когда обычный ионный звук не существует. С другой стороны, неустойчивость при $u \neq 0$ сходна с токово-конвективной (см. гл. I, § 2). Действительно, как и при токово-конвективной неустойчивости, возмущение в данном случае нарастает за счет дрейфа частиц в электрическом поле косой волны. Поперечная компонента поля, которая приводит к дрейфу, возникает как простое следствие возмущения продольного электрического поля, которое появляется в результате взаимодействия резонансных электронов с волной. Все различие между рассматриваемой здесь неустойчивостью и токово-конвективной заключается лишь в том, что в данном случае роль столкновений «выполняет» затухание Ландау.

Дрейфовая неустойчивость при $k_{\perp} \rho_i \geq 1$

Из уравнения (IV. 52) видно, что при $\eta = 0$ и $u = 0$ инкремент обращается в нуль только из-за, казалось бы, случайного обстоятельства, которое заключается в том, что частота колебаний в точности совпадает с ω_* . Любые эффекты, которые могут сместить частоту колебаний относительно ω_* , приводят к раскачке (или затуханию) дрейфовых волн. В плазме с холодными ионами ($T_i = 0$), например, достаточно отказаться от дрейфового приближения для ионов и учесть инерционный член в уравнении движения, т. е. второе слагаемое в уравнении (IV. 34). Учитывая соответствующее изменение выражения для плотности ионов, нетрудно показать, что уравнение (IV. 52) с учетом этого эффекта принимает вид

$$\frac{k_{\perp}^2 T_e}{m_i \Omega_i^2} + 1 - \frac{\omega_*}{\omega} - \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} + \frac{i\sqrt{\pi}}{k_z v_e} \left(\omega - k_z u - \omega_* + \frac{1}{2} \omega_* \eta \right) = 0. \quad (\text{IV. 54})$$

Как мы видим, поперечный инерционный член начинает оказывать влияние при $k_{\perp} r_n \sim 1$, где r_n — ларморовский радиус ионов при электронной температуре. При этом неустойчивость имеет место даже в бестоковой плазме при $u = 0$, $\eta = 0$.

В плазме с горячими ионами соответствующий эффект имеет место при $k_{\perp} \rho_i \sim 1$. При $T_e = T_i = T$ и $\eta = 0$ дисперсионное уравнение для продольных колебаний ($\omega/k_z \ll c_A$), которое может быть получено путем решения кинетических уравнений для электронов и ионов, имеет вид

$$e^{-s} I_0(s) \frac{\omega + \omega_*}{k_z v_i} Y \left(\frac{\omega}{k_z v_i} \right) + \frac{\omega - \omega_*}{k_z v_e} Y \left(\frac{\omega}{k_z v_e} \right) = 2, \quad (\text{IV. 55})$$

где $v_i = \sqrt{\frac{2T}{m_i}}$, $v_e = \sqrt{\frac{2T}{m_e}}$, $s = k_{\perp}^2 \rho_i^2 = \frac{k_{\perp}^2 T}{m_i \Omega_i^2}$, I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента, Y — функция, определяемая соотношением (IV. 49).

Уравнение (IV. 55) отличается от (IV. 51) только тем, что в нем в первом слагаемом появляется дополнительный множитель $e^{-s} I_0(s)$, который учитывает уменьшение дрейфовой скорости ионов за счет усреднения поля волны по ларморовской окружности (см. следующий подпараграф). Исследование этого уравнения, проведенное в работе [86], показывает, что раскачиваются только ускоренные звуковые волны, распространяющиеся в сторону дрейфа электронов (кривая 1 на рис. 17). При $v_i \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_e$

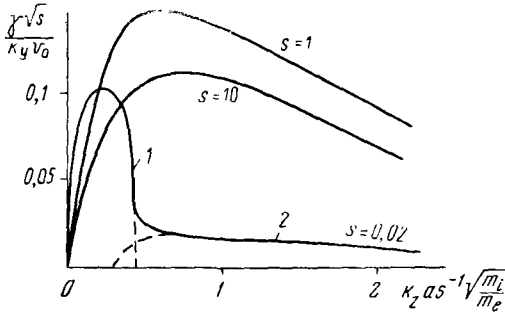


Рис. 19. Зависимость инкремента γ от продольного волнового числа k_z при дрейфовой неустойчивости.

в уравнении (IV. 55) можно положить $Y\left(\frac{\omega}{k_z v_i}\right) \approx \frac{k_z v_i}{\omega}$, $Y\left(\frac{\omega}{k_z v_e}\right) \approx -i\sqrt{\pi}$, и тогда получим

$$\omega = \omega_* \frac{\beta_s}{2 - \beta_s}, \quad \gamma = 2\sqrt{\pi} \frac{\omega_*^2}{k_z v_e} \cdot \frac{\beta_s(1 - \beta_s)}{(2 - \beta_s)^2}, \quad (\text{IV. 56})$$

где $\beta_s = e^{-s} I_0(s)$. Как мы видим, при $k_z v_e \gg \omega_*$ инкремент мал по сравнению с частотой. При уменьшении k_z , когда фазовая скорость волны вдоль оси z приближается к v_e , инкремент γ становится порядка ω . Результат численного расчета инкремента вблизи максимума по k_z для трех значений s и $k_x = 0$ представлен на рис. 19.

Как мы видим, при малых s неустойчивые колебания распадаются на две ветви. Частота одной из них дается соотношением (IV. 56) и соответствующий инкремент убывает как s^2 при $s \rightarrow 0$. Частота второй ветви может быть получена с помощью асимптотического разложения $Y(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^3}$ при $z \gg 1$. Уравнение (IV. 55) приводится при этом к кубическому

$$\frac{\omega - \omega_*}{\omega + \omega_*} = \frac{2\omega_*^2 s}{k_z^2 v_e^2} = \frac{\omega^2}{\omega_*^2}, \quad (\text{IV. 57})$$

где $\omega_z^2 = \Omega_i \Omega_e \frac{k_z^2}{k_\perp^2}$. При $\frac{\omega_*}{\omega_z} > 0,4$ у этого уравнения появляются комплексные корни, причем соответствующий инкремент по порядку величины равен ω_* . На рис. 19 этой неустойчивости соответствует участок 1.

На рис. 20 представлена граница неустойчивости при $k_x = 0$ и $\frac{m_i}{m_e} = 1840$. При малых s она определяется условием $\omega \leq \omega_*$

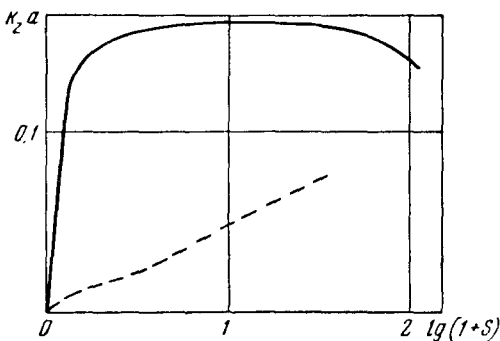


Рис. 20. Область дрейфовой неустойчивости плазмы низкого давления.

и приблизительно совпадает с кривой $ak_z = s$, а при $s \geq 1$ граничное значение $k_z a$ определяется ионным затуханием и оказывается почти не зависящим от s . Пунктирная кривая на этом рисунке показывает, где инкремент как функция $k_z a$ достигает максимума.

Приведенные соотношения относятся к случаю $\frac{\omega}{k_z} < c_A$, т. е. они справедливы для всей области k_z только при $v_e \ll c_A$, и, следовательно, $\beta \ll m_e/m_i$. В противоположном случае $\beta \geq m_e/m_i$ в области малых k_z следует учитывать непотенциальность электрического поля, т. е. искривление силовых линий. А. Б. Михайловский и Л. И. Рудаков [87] показали, что при этом неустойчивость развивается только на ускоренной звуковой ветви (кривая 1 на рис. 18). При $\eta = 0$ и $s \geq 1$ частота этих колебаний приближенно равна

$$\omega \approx \frac{\omega_*}{2} \cdot \frac{\beta_s \zeta^2}{\zeta^2 + \frac{k_y^2}{k_\perp^2}}, \quad (\text{IV. 58})$$

а инкремент γ дается выражением

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \omega^2}{|k_z| v_e \beta_s}, \quad (\text{IV. 59})$$

где $\zeta = 2k_z a / \sqrt{\beta}$. Инкремент γ как функция от k_z достигает максимального значения порядка $\omega \frac{1}{\beta_s} \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}$ при $\zeta \approx 1$. При увеличении $k_{\perp} Q_i$ частота колебаний остается примерно постоянной, а инкремент возрастает и при $s \sim \frac{m_i}{m_e} \beta$ он становится порядка частоты.

Изложенные выше результаты относятся к случаю $T = \text{const}$. Однако и при наличии градиента температуры неустойчивость сохраняется практически при любом соотношении между градиентами плотности и температуры.

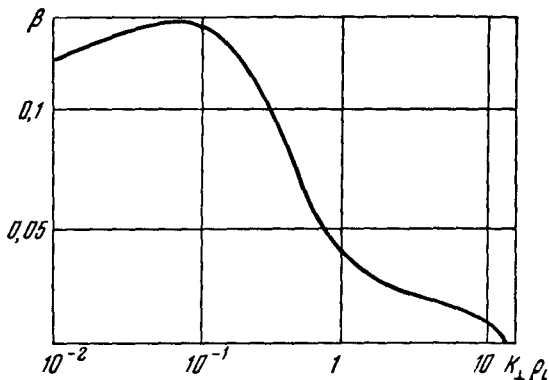


Рис. 21. Область дрейфовой неустойчивости по β .

При увеличении β альфвеновская скорость приближается к тепловой скорости ионов, и все большую роль начинает играть ионное затухание Ландау. При достаточно больших значениях β этот эффект, как было показано в работе [97], приводит к полной стабилизации дрейфовой неустойчивости. На рис. 21 представлена заимствованная из работы [97] зависимость $\beta = \beta(k_{\perp} Q_i)$, показывающая, при каких значениях β колебания с данным k_{\perp} становятся устойчивыми (устойчивости соответствует область над кривой). Как мы видим, при $\beta > 0,13$ дрейфовая неустойчивость полностью подавляется ионным затуханием.

Кроме того, дрейфовая неустойчивость должна отсутствовать в не очень длинных системах. Действительно, уже из рис. 20 видно, что дрейфовая неустойчивость развивается только на возмущениях с малыми k_z , а именно $k_z a$ должно быть порядка 10^{-1} . В ограниченных по длине установках волновое число k_z не может быть малым, и плазма должна быть устойчивой.

Кроме того, к стабилизации дрейфовой неустойчивости приводит эффект перекрещенности силовых линий [91, 92]. Условимся характеризовать величину перекрещенности линий параметром $\theta = a/L$, где a — поперечный размер плазменного шнура, а L —

Какая длина шнура, что отнесенный к ней угол вращательного преобразования [98] изменяется поперек шнура на величину порядка единицы. Грубо говоря, θ — угол между двумя силовыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояние порядка a . Нетрудно видеть, что уже при $\theta \sim \varrho_i/a$ проекция волнового вектора на силовую линию изменяется поперек шнура на величину $k\theta \sim a^{-1}$ (мы считаем, что $k \sim \frac{1}{\varrho_i}$). В этом случае дрейфовая волна при своем распространении поперек шнура будет попадать в область, где $k \sim a^{-1}$, т. е. где имеет место сильное поглощение на ионах. Таким образом, при $L \sim a^2/\varrho_i$ следует ожидать стабилизации за счет перекрещенности. Для некоторых возмущений величина θ , при которой наступает стабилизация, может быть несколько больше ϱ_i/a за счет отражения волны от «потенциальных барьеров», т. е. областей, где данной частоте ω соответствует мнимое k_x [91, 92]. Однако и в этом случае стабилизация наступает при очень малых значениях θ .

Эффект стабилизации конвективной (желобковой) неустойчивости

Как мы уже смогли убедиться выше, неоднородность плазмы приводит к существенному изменению дисперсионной зависимости $\omega(k)$ в области малых частот порядка ω_* . Можно сказать, что по отношению к колебаниям с фазовой скоростью порядка дрейфовой свойства плазмы существенно отличаются от свойств проводящей жидкости, описываемой уравнениями магнитной гидродинамики. Как было показано в работе Розенблюта, Кроля и Ростокера [20], дрейфовые эффекты могут, в частности, существенно повлиять на магнитогидродинамическую желобковую неустойчивость плазмы. При определенных условиях оказывается возможной полная стабилизация этой неустойчивости.

Качественно возможность такой стабилизации можно видеть непосредственно из рис. 18. Действительно, при магнитогидродинамическом рассмотрении частота альфвеновских колебаний равна $\omega = k_z c_A$ и при $k_z = 0$ она обращается в нуль. Возмущения с $k_z = 0$ остаются постоянными вдоль силовых линий магнитного поля. Именно такие возмущения и называются желобковыми. Обращение в нуль частоты колебаний означает, что по отношению с соответствующим возмущениям плазма не обладает никакой «упругостью». Поэтому достаточно лишь немного искривить силовые линии или добавить малую силу тяжести, направленную в сторону убывания плотности, как соответствующие возмущения начнут нарастать со временем, т. е. возникнет неустойчивость. С учетом дрейфовых эффектов, как видно из рис. 18, зависимость частоты колебаний от k_z становится гораздо более сложной, и, следовательно, поперечное движение нельзя считать совершенно неупругим.

Рассмотрим этот эффект более подробно. Допустим, что холодная ($T_i = T_e = 0$) плазма находится в сильном магнитном поле, направленном вдоль оси z , и подвержена действию силы тяжести с ускорением свободного падения g . Будем считать, что g направлено по оси x , т. е. в сторону убывания плотности. В равновесном состоянии в системе координат, где среднее электрическое поле отсутствует, электроны покоятся, а ионы дрейфуют вдоль оси y со скоростью $v_{i0} = -g/\Omega_i$. В возмущенной плазме скорость движения электронов определяется электрическим дрейфом $\frac{c}{H}[\mathbf{h}\nabla\varphi]$, а возмущение скорости ионов v_i может быть найдено с помощью уравнения движения, которое для возмущений типа $\exp(-i\omega t + ikx)$ принимает вид

$$-i\omega' m_i v_i = -iek\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}_i \mathbf{H}], \quad (\text{IV. 60})$$

где $\omega' = \omega + k_y g/\Omega_i$. При $\omega' \ll \Omega_i$ находим из выражения (IV. 60) приближенно

$$\mathbf{v}_i = \frac{ic}{H}[\mathbf{hk}]\varphi + \frac{c}{H}\frac{\omega'}{\Omega_i} \mathbf{k}_\perp \varphi. \quad (\text{IV. 61})$$

Подставляя это выражение в уравнение непрерывности для ионов, мы получим

$$-i\omega' n_i - i\frac{ck_y}{H}\frac{dn}{dx}\varphi + in\frac{c\omega' k_\perp^2}{H\Omega_i}\varphi = 0. \quad (\text{IV. 62})$$

Отсюда находим возмущение плотности ионов

$$n_i/n = \frac{ck_y \kappa}{\omega' H}\varphi - \frac{k_\perp^2}{\Omega_i^2} \frac{e\varphi}{m_i}. \quad (\text{IV. 63})$$

Для возмущения плотности электронов, инерцией которых можно пренебречь, вместо (IV. 63) получим более простое выражение

$$n_e/n = \frac{ck_y \kappa}{\omega H}\varphi. \quad (\text{IV. 64})$$

Подставляя найденные значения для n_i и n_e в уравнение $k^2\varphi = 4\pi e(n_i - n_e)$ и полагая для простоты $k_x = 0$, получим

$$\frac{\Omega_i \kappa}{k} \left(\frac{1}{\omega + k_y g/\Omega_i} - \frac{1}{\omega} \right) - 1 = \frac{c_A^2}{c^2}. \quad (\text{IV. 65})$$

Здесь слагаемые в круглых скобках возникли за счет различия дрейфовых скоростей электронов и ионов (с учетом дрейфа в поле тяжести), единица слева соответствует учету инерционного члена в уравнении (IV. 62), а правая часть учитывает возможное нарушение квазинейтральности. В плотной плазме, когда $c_A \ll c$, правой частью уравнения (IV. 65) можно пренебречь.

Как мы видим, перед круглой скобкой в уравнении (IV. 65) стоит большой множитель Ω_i , поэтому частота колебаний значи-

тельно больше величины $k_y g / \Omega_i$. Пренебрегая $k_y \kappa / \Omega_i$ по сравнению с ω , получим из уравнения (IV. 65) более простое дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + g\kappa = 0.$$

Отсюда получим $\omega = \pm i\sqrt{g\kappa}$, т. е. плазма конвективно неустойчива.

Как мы видим, согласно выражению (IV. 65), неустойчивость возникает за счет малого различия дрейфовых скоростей электронов и ионов. Естественно, что любые дополнительные факторы, которые могут повлиять на это различие в скорости, должны существенно повлиять на устойчивость плазмы. Одним из таких факторов и является эффект конечности ларморовского радиуса ионов, с учетом которого согласно уравнению (IV. 4) при малых s получим вместо выражения (IV. 63)

$$n_i/n = \left\{ \frac{\omega_*}{\omega'} (1 - s) - s \right\} \frac{e\Phi}{T}. \quad (\text{IV. 66})$$

Отсюда видно, что для учета эффекта конечного ларморовского радиуса в дисперсионном уравнении (IV. 65) достаточно лишь добавить множитель $1 - s$ в первое слагаемое в круглых скобках. При $c_A \ll c$ это уравнение может быть представлено в виде

$$\omega^2 + \omega\omega_* + g\kappa = 0, \quad (\text{IV. 67})$$

откуда получаем

$$\omega = -\frac{\omega_*}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_*^2}{4} - g\kappa}. \quad (\text{IV. 68})$$

Отсюда видно, что при $g\kappa < \frac{\omega_*^2}{4}$ плазма конвективно устойчива. Если вместо g ввести эффективный радиус кривизны согласно соотношению $g = \frac{T}{m_i R}$, то условие устойчивости принимает вид

$$k^2 \varrho_i^2 > \frac{4a}{R}. \quad (\text{IV. 69})$$

где $\varrho_i^2 = \frac{T}{m_i \Omega_i^2}$, $a = \kappa^{-1}$. Как мы видим, при $a \ll R$, что довольно часто выполняется в реальных условиях, устойчивыми оказываются даже такие возмущения, поперечная длина волны которых значительно превышает ϱ_i .

При $s \geq 1$, как было показано А. Б. Михайловским [99], в дисперсионном уравнении для желобковых возмущений несколько изменяется и инерционный член, так что при произвольных s дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\Omega_i \kappa}{k} \left(\frac{e^{-s} I_0(s)}{\omega + k_y g / \Omega_i} - \frac{1}{\omega} \right) - \frac{1 - e^{-s} I_0(s)}{s} = \frac{c_A^2}{c^2}. \quad (\text{IV. 70})$$

Результат исследования этого уравнения, проведенного в работе [90], представлен на рис. 22. Как мы видим, в плотной плазме ($c_A \ll c$) стабилизируются все возмущения с достаточно короткими длинами волн. В этом случае условие устойчивости дается соотношением (IV. 69). При понижении плотности плазма становится неустойчивой. Однако при очень малой плотности устойчивость вновь восстанавливается, поскольку в конце концов происходит переход к отдельным не связанным между собой частицам. В промежуточной области имеется «щель», где плазма неустойчива.

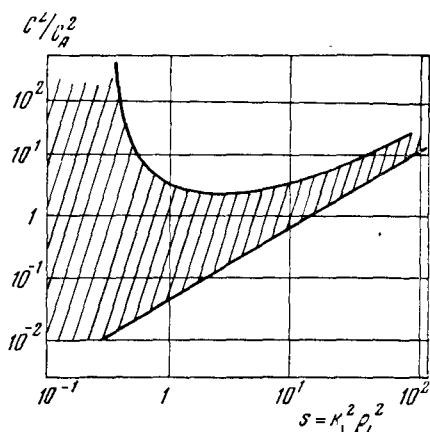


Рис. 22. Область желобковой неустойчивости (заштрихована).

Эта щель распространяется в область больших плотностей, однако длина волны соответствующих возмущений очень мала, поэтому они не могут давать заметный вклад в поперечную диффузию.

Выше были рассмотрены только коротковолновые возмущения, для которых применимо квазиклассическое приближение. Но качественный вывод о возможности стабилизации желобковой неустойчивости относится и к длинноволновым возмущениям, кроме так называемой моды $m = 1$, соответствующей поперечному смещению шнура как целого.

При таком смещении возмущенное электрическое поле в шнуре почти постоянно по сечению, поэтому дрейфовые скорости электронов и ионов совпадают и, следовательно, эффект стабилизации конечным ларморовским радиусом отсутствует.

Неустойчивость моды $m = 1$ более удобно выявить с помощью уравнения количества движения. При $c_A \ll c$ импульсом электромагнитного поля, а также электростатическими силами можно пренебречь, и уравнение количества движения для смещенного шнура запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (\text{IV. 71})$$

где $\mathbf{P} = m_i N \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}$ — импульс шнура, N — полное число ионов на единицу длины, \mathbf{r}_c — радиус-вектор центра масс, \mathbf{F} — сила тяжести. Допустим, что \mathbf{g} возрастает по линейному закону с удалением от оси симметрии: $\mathbf{g} = b\mathbf{r}$. Тогда сила $\mathbf{F} = m_i N b \mathbf{r}_c$, и из уравнения (IV. 71) получаем: $\ddot{\mathbf{r}}_c = b\mathbf{r}_c$, т. е. $\omega^2 = -b$, и, следовательно, плазменный шнур неустойчив по отношению к смещению.

ля плазмы в ловушке с неоднородным магнитным полем сила \mathbf{F} определяется интегралом по объему от величины $\frac{(T_i + T_e)n}{R}$, где n — плотность электронов, R — средний радиус кривизны силовой линии. Если средняя кривизна силовых линий возрастает пропорционально удалению от оси симметрии, т. е. $\frac{1}{R} = \frac{r}{aR_0}$, $n = \text{const}$, $R_0 = \text{const}$, то силу \mathbf{F} можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \frac{P_0}{aR_0} \mathbf{r}_T,$$

где $P_0 = \int p \, dr \approx \text{const}$, а $\mathbf{r}_T = P_0^{-1} \int \mathbf{r} p \, dr$ — радиус-вектор «центра давления» плазмы. Если температура плазмы постоянна по сечению, то \mathbf{r}_T совпадает с \mathbf{r}_c . При этом опять $\ddot{\mathbf{r}}_c = b\mathbf{r}_c$ и, следовательно, плазма неустойчива. Однако в неизотермической плазме благодаря наличию дрейфовых тепловых потоков \mathbf{r}_T может не совпадать с \mathbf{r}_c . В частности, у \mathbf{r}_T может появиться добавка, пропорциональная \mathbf{r}_c , которая представляет собой своеобразный гироскопический эффект в плазме с дрейфовыми потоками. Если эта добавка достаточно велика по сравнению с \mathbf{r}_c , то плазменный сгусток будет устойчив и по отношению к моде $m = 1$. Этот вывод следует и из более строгого рассмотрения на основе линеаризованного кинетического уравнения, проведенного А. Б. Михайловским [90]. Он же привел простой пример устойчивого по отношению к моде $m = 1$ распределения плотности и температуры в плазменном сгустке, в котором плотность $n = \text{const}$ внутри цилиндра с радиусом a и обращается в нуль вне его, а температура изменяется по закону $T = T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$. Такое распределение устойчиво при $q_0^2/a^2 > 0,16 \frac{a}{R_0}$ (где $q_0^2 = \frac{T_0}{m_i \Omega_i^2}$).

Ионно-звуковая неустойчивость неоднородной плазмы

До сих пор мы рассматривали только те колебания, частота которых была значительно меньше как электронной, так и ионной циклотронных частот, и, следовательно, электроны и ионы были «замангничены». Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда магнитное поле является настолько слабым, что его действием на ионы можно пренебречь [93]. Другими словами, мы рассмотрим здесь колебания с частотой, значительно большей Ω_i . С другой стороны, мы допустим, что частота колебаний значительно меньше Ω_e , и, следовательно, для электронов можно воспользоваться дрейфовым приближением (мы полагаем $k\rho_e \ll 1$). Температуру ионов для простоты примем равной нулю. Ограничиваясь плазмой низкого давления, мы будем считать магнитное поле однородным, а колебания потенциальными, т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

При этих предположениях уравнение движения для ионов, которые мы будем считать покоящимися в равновесном состоянии, принимает вид

$$\omega m_i v_i = ek\varphi. \quad (\text{IV. 72})$$

Из этого соотношения и уравнения непрерывности

$$\omega n_i - kv_i n = 0 \quad (\text{IV. 73})$$

находим возмущение плотности ионов

$$n_i/n = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{e}{m_i} \varphi. \quad (\text{IV. 74})$$

Что касается плотности электронов, то она определяется соотношением (IV. 50). Приравнявая n_i и n_e , получим дисперсионное уравнение для частоты рассматриваемых колебаний:

$$\frac{k^2 T_e}{m_i \omega^2} + \frac{\omega - \omega_*}{k_z v_e} Y \left(\frac{\omega}{k_z v_e} \right) = 1. \quad (\text{IV. 75})$$

Для колебаний с фазовой скоростью $\omega/k_z \ll v_e$ оно принимает более простой вид

$$\frac{k^2 c_s^2}{\omega^2} - i\sqrt{\pi} \frac{\omega - \omega_*}{k_z v_e} = 1. \quad (\text{IV. 76})$$

Отсюда находим частоту колебаний $\omega = kc_s$ и инкремент их нарастания

$$\gamma = \frac{V\pi k}{k_z} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} (\omega_* - \omega). \quad (\text{IV. 77})$$

Из этого соотношения видно, что при $\omega < \omega_*$ плазма становится неустойчивой. Как мы установили ранее, аналогичное условие имеет место и при раскачке дрейфовых волн. В рассматриваемом здесь случае это условие означает, что дрейфовая скорость электронов должна быть больше звуковой. Его можно также записать в виде

$$r_n \kappa > 1, \quad (\text{IV. 78})$$

где $r_n = \sqrt{\frac{T_e}{m_i \Omega_i}}$ — ларморовский радиус ионов, рассчитанный по электронной температуре.

Согласно соотношению (IV. 76), инкремент возрастает при уменьшении k_z . Этот рост продолжается до тех пор, пока продольная фазовая скорость не достигнет тепловой скорости электронов, т. е. вплоть до $k_z/k \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. При этом инкремент достигает максимального значения $\gamma \sim \omega \sim kc_s$. При дальнейшем уменьшении k_z частота колебаний и инкремент убывают вместе с k_z .

Циклотронная неустойчивость неоднородной плазмы

При увеличении магнитного поля условие (IV. 78) нарушается, и ионно-звуковая неустойчивость переходит в рассмотренную ранее дрейфовую неустойчивость, развивающуюся на колебаниях с частотой, значительно меньшей Ω_i . Наряду с этим, как показано А. Б. Михайловским и А. В. Тимофеевым [100, 101], в неоднородной плазме возможна раскачка циклотронных колебаний с частотами, близкими к кратной от циклотронной $\omega = n\Omega_i$. С точки зрения циклотронных колебаний дрейфовую неустойчивость можно рассматривать как неустойчивость на нулевой циклотронной гармонике, а ионно-звуковую — как неустойчивость на крайне высоких гармониках.

Для колебаний с частотой, близкой к $n\Omega_i$, когда вкладом в возмущение плотности от остальных гармоник можно пренебречь, дисперсионное уравнение для $T_i = T_e$ имеет вид

$$\frac{\omega + \omega_*}{k_z v_i} Y\left(\frac{\omega - n\Omega_i}{k_z v_i}\right) e^{-s} I_n(s) + \frac{\omega - \omega_*}{k_z v_e} Y\left(\frac{\omega}{k_z v_e}\right) = 2, \quad (\text{IV. 79})$$

где I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента индекса n , а остальные обозначения совпадают с введенными ранее [см. (IV. 55)]. При $k\varrho_e \geq 1$ во второе слагаемое в левой части уравнения (IV. 79) следует ввести дополнительный множитель $e^{-k^2\varrho_e^2} \times I_0(k^2\varrho_e^2)$. Кроме того, при очень больших значениях волнового числа k может нарушиться условие квазинейтральности, и в правую часть уравнения (IV. 79) следует добавить слагаемое $k^2 D^2$.

Уравнение (IV. 79) значительно упрощается при малых k_z , когда $Y\left(\frac{\omega - n\Omega_i}{k_z v_i}\right) \approx \frac{k_z v_i}{\omega - n\Omega_i}$. Условие раскачки таких колебаний, как нетрудно показать, имеет прежний вид $\omega < \omega_*$, т. е.

$$k k \varrho_i^2 > n, \quad (\text{IV. 80})$$

причем раскачиваются как волны, распространяющиеся в сторону дрейфа электронов, так и волны, распространяющиеся в сторону дрейфа ионов.

Интересно отметить, что циклотронные колебания могут раскачиваться и при чисто поперечном распространении ($k_z = 0$), если выполнено условие

$$k \varrho_i \geq 2n \left(\frac{m_e}{m_i} + \frac{c_A^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (\text{IV. 81})$$

где n — номер рассматриваемой гармоники. В разреженной плазме величиной $\frac{m_e}{m_i}$ под корнем в выражении (IV. 81) можно пренебречь, и при $n = 1$ это условие принимает вид

$$k \varrho_i \geq 2c_A/c. \quad (\text{IV. 82})$$

Инкремент циклотронной неустойчивости может достигать значений порядка $\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \Omega_i$. Если условие (IV. 82) не выполнено, то может развиваться экспоненциально малая «остаточная» неустойчивость [102].

Дрейфово-диссипативная неустойчивость

Выше мы рассмотрели раскачку дрейфовых волн в бесстолкновительной плазме. Оказывается, что дрейфовая неустойчивость может развиваться и в плотной плазме, когда существенную роль играют столкновения между частицами [22, 23, 93, 96]. При этом именно столкновения оказываются ответственными за неустойчивость. Чтобы отличать эту неустойчивость от бесстолкновительной, мы условимся называть ее дрейфово-диссипативной.

Предположим, что длина пробега электронов λ_e значительно меньше продольной длины волны, так что для продольного движения можно воспользоваться диффузионным приближением. Для простоты опять ограничимся рассмотрением плоского слоя плазмы, хотя фактически мы будем иметь в виду цилиндрический плазменный шнур в трубке радиуса $a \sim \kappa^{-1}$. Поперечную длину возмущений будем считать значительно меньшей a .

Начнем со случая слабого магнитного поля, предполагая, что температура ионов равна нулю, а ларморовский радиус, подсчитанный по электронной температуре, $r_n \gg a$. Допустим, кроме того, что в равновесном состоянии среднее электрическое поле отсутствует и ионы покоятся. Практически такие условия могут быть выполнены в положительном столбе при очень низком давлении нейтрального газа. Если длина свободного пробега ионов λ_i , по порядку величины равная λ_e , больше a , то их столкновениями можно пренебречь, и для колебаний с частотой $\omega \gg \Omega_i$ согласно уравнению (IV. 74) получим $n_i/n = \frac{k^2 e \varphi}{\omega^2 m_i}$. Возмущение плотности электронов мы найдем из уравнения непрерывности.

$$\omega n_e + \frac{ck_y}{H} \frac{dn}{dx} \varphi - k_z v_{ze} n = 0, \quad (\text{IV. 83})$$

где вместо v_{\perp} мы подставили скорость электрического дрейфа, предполагая, что $\Omega_e \tau_e \gg 1$ (следовательно, поперечной диффузией и подвижностью электронов можно пренебречь). Продольная скорость электронов в диффузионном режиме определяется соотношением

$$v_{ze} = b_e \frac{\partial \varphi}{\partial z} - D_e n^{-1} \frac{\partial n_e}{\partial z} = \frac{e \tau_e}{m_e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{T_e}{en} \frac{\partial n_e}{\partial z} \right), \quad (\text{IV. 84})$$

где b_e — подвижность, D_e — коэффициент диффузии, τ_e — среднее время столкновений электронов с атомами нейтрального газа или ионами (при столкновениях с ионами вместо v_{ze} в выражение

(IV. 84) следовало бы подставить относительную скорость, но поскольку продольным движением ионов в рассматриваемых нами колебаниях можно пренебречь, то этот эффект несуществен).

Подставляя выражение для v_{ze} в уравнение непрерывности для электронов (IV. 83), получим

$$\frac{n_e}{n} = \frac{k_z^2 + i \frac{k_y \kappa}{\Omega_e \tau_e}}{k_z^2 D_e - i \omega} \cdot \frac{e \tau_e}{m_e} \cdot \varphi. \quad (\text{IV. 85})$$

При $\omega \ll k_z^2 D_e$ это выражение принимает более простой вид

$$\frac{n_e}{n} = \left(1 + \frac{i k_y \kappa}{\Omega_e \tau_e k_z^2} \right) \frac{e \varphi}{T_e}. \quad (\text{IV. 86})$$

Приравнивая n_i и n_e , мы получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \left(1 + \frac{i k_y \kappa}{\Omega_e \tau_e k_z^2} \right)^{-1}. \quad (\text{IV. 87})$$

Как мы видим, частота колебаний оказывается комплексной, причем один из корней имеет положительную мнимую часть, т. е. плазма неустойчива. Так как $\omega \sim k c_s$, то эту неустойчивость также можно классифицировать как ионно-звуковую. Из соотношения (IV. 87) видно, что при $\Omega_e \tau_e \gg 1$ в первую очередь раскачиваются сильно вытянутые вдоль магнитного поля возмущения, у которых $k_z \ll k_y$.

Инкремент γ достигает максимума $\gamma \sim \omega \sim c_s k$ при $k_z^2 = \frac{k_y \kappa}{\Omega_e \tau_e}$.

При этом $k_z^2 D_e \omega^{-1} = \kappa r_n \gg 1$, так что принятое нами допущение $\omega \ll k_z^2 D_e$ выполняется всюду, за исключением мало интересной области очень малых k_z .

При $\kappa r_n \lesssim 1$ в выражении (IV. 85) следует учитывать продольную диффузию электронов. Как можно показать [93], в этом случае плазма устойчива по отношению к звуковым колебаниям с частотой $\omega \gg \Omega_i$.

Плазма с рассматриваемыми параметрами может быть создана, например, в положительном столбе тлеющего разряда. В стационарных условиях такая плазма диффундирует к стенке, и если диффузионная скорость имеет порядок величины c_s , то рассматриваемые колебания не успевают развиться до выноса их на стенку, поскольку их групповая скорость также порядка c_s . Так как коэффициент поперечной диффузии D_{\perp} имеет порядок величины $\lambda_e v_e \times (\Omega_e \tau_e)^{-2}$, то условие раскачки $D_{\perp} \kappa < c_s$ можно приближенно представить в виде

$$\lambda_e > \frac{r_n^2}{a} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (\text{IV. 88})$$

где λ_e — средний свободный пробег электронов, $r_n^2 = \frac{T_e}{m_i \Omega_i^2}$, $a = \kappa^{-1}$. Таким образом, рассматриваемая неустойчивость в отсутствие продольного тока развивается только в достаточно разреженной плазме, когда длина пробега электронов не слишком мала.

При $\lambda_i \lesssim a$ следует, кроме того, учитывать столкновения ионов с атомами нейтрального газа. Этот эффект [93] приводит к условию раскачки $\Omega_i \tau_i > \sqrt{\frac{b_i}{b_e}}$, где b_e — электронная, а b_i — ионная подвижности. При уменьшении магнитного поля условие (IV. 88) заменяется на неравенство $\varrho_e < a$, где ϱ_e — средний ларморовский радиус электронов, поскольку при $\varrho_e > a$ действием магнитного поля на электроны можно пренебречь и неустойчивость отсутствует.

Рассмотрим волны с частотой $\omega \ll \Omega_i$. При этом для возмущения плотности электронов можно опять воспользоваться выражением (IV. 85), а возмущение плотности ионов с учетом трения о нейтральный газ при $\Omega_i \tau_i \gg 1$ равно

$$\frac{n_i}{n} = \frac{ck_y \kappa}{\omega H} \Phi - \frac{k_z^2}{\Omega_i^2} \left(1 + \frac{i}{\omega \tau_i} \right) \frac{e \varphi}{m_i}, \quad (\text{IV. 89})$$

где τ_i — среднее время столкновений с атомами нейтрального газа [ср. с уравнением (IV. 63)]. Приравнявая n_e и n_i , мы получим дисперсионное уравнение, которое удобно записать в виде

$$\omega^2 + i\omega \left(\omega_s + D_e k_z^2 + \frac{1}{\tau_i} \right) - i\omega_s \omega_* - \frac{D_e k_z^2}{\tau_i} = 0, \quad (\text{IV. 90})$$

где

$$\omega_* = -k_y \frac{cT_e}{eHn} \frac{dn}{dx}, \quad \omega_s = \frac{k_z^2}{k_\perp^2} \Omega_e \tau_e \Omega_i.$$

Нетрудно видеть, что $D_e k_z^2 / \omega_s = \frac{k_\perp^2 T_e}{m_i \Omega_i^2} = k_\perp^2 r_n^2$. Поэтому при наличии сильного магнитного поля, когда $\kappa r_n \ll 1$, для возмущений с $k_\perp r_n < 1$ величиной $D_e k_z^2$ можно пренебречь по сравнению с ω_s . Если, кроме того, частота столкновений $\nu_i = \tau_i^{-1}$ достаточно мала, то уравнение (IV. 90) упрощается:

$$\omega^2 + i\omega \omega_s - i\omega_s \omega_* = 0. \quad (\text{IV. 91})$$

Это уравнение справедливо и для полностью ионизованной плазмы [23], если под τ_e^{-1} подразумевать среднюю частоту столкновений электронов с ионами. Из уравнения (IV. 91) следует, что при $\omega_s \gg \omega_*$

$$\omega_1 = \omega_* + i \frac{\omega_*^2}{\omega_s}, \quad \omega_2 = -i\omega_s, \quad (\text{IV. 92})$$

при $\omega_s \ll \omega_*$

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{i\omega_s\omega_*}. \quad (\text{IV. 93})$$

И в том, и в другом предельных случаях один из корней имеет положительную мнимую часть, т. е. соответствующее возмущение нарастает со временем. При $\omega_s \sim \omega_*$ инкремент достигает максимального значения $\gamma \sim \omega \sim \omega_*$.

В слабо ионизованной плазме столкновения ионов с атомами нейтрального газа приводят к дополнительному затуханию, и при $\kappa_s \tau_i < 1$ все возмущения становятся затухающими [93].

В обратном предельном случае $\kappa_n \gg 1$ наряду с ионно-звуковыми могут раскачиваться и дрейфовые волны с частотой $\omega < \Omega_i$. Однако их инкремент, по определению меньший Ω_i , заведомо меньше инкремента ионно-звуковых колебаний. Дрейфовые волны могут раскачиваться только при $\Omega_i \tau_i > 1$, когда дрейфовая скорость $\frac{c[h\nabla\Phi]}{H}$

больше $b_i \nabla\Phi$.

Полная область дрейфово-диссипативной неустойчивости в слабо ионизованной плазме схематически представлена на рис. 23. По оси абсцисс отложена величина $\eta = r_n^{-1} \kappa^{-1}$, пропорциональная магнитному полю, а по оси ординат — величина $\xi = \sqrt{\frac{T_e}{T_i}} \tau_i \kappa$, пропорциональная $1/arp$, где p — давление нейтрального газа, a — радиус трубки. В области $\eta < 1$ вплоть до значения $\eta \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, когда лармовский радиус электронов становится порядка a , развивается ионно-звуковая неустойчивость. Соответствующая область отмечена на рис. 23 вертикальной штриховкой. Область собственно дрейфовой неустойчивости ($\omega < \Omega_i$) отмечена горизонтальной штриховкой. При $\eta > 1$ она ограничена снизу значением $\xi = 1$, а при $\eta > 1$ неустойчивость развивается только при $\Omega_i \tau_i > 1$.

Таким образом, при достаточно малом давлении нейтрального газа слабоионизованная плазма в однородном магнитном поле

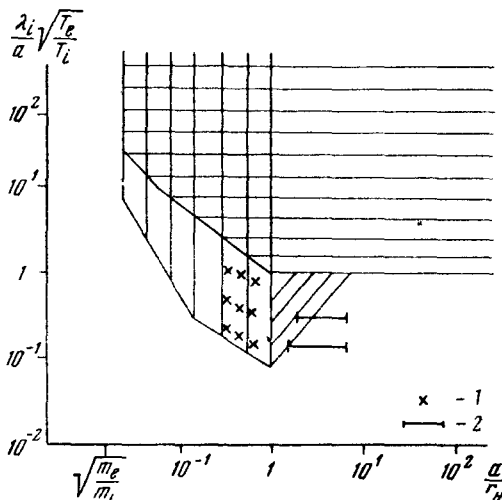


Рис. 23. Область ионно-звуковой (вертикальная штриховка) и дрейфовой (горизонтальная штриховка) неустойчивости неоднородной слабоионизованной плазмы: 1—данные Желе [136]; 2—данные Голанта [115].

оказывается неустойчивой даже в отсутствие продольного тока. При наличии продольного тока область неустойчивости расширяется в сторону меньших значений ξ , поскольку даже при $\lambda_l < a$ в плазме с продольным током может развиваться уже знакомая нам токово-конвективная (спиральная) неустойчивость (см. гл. I, § 2). Кроме того, продольный ток может повлиять и на рассмотренную выше дрейфово-диссипативную неустойчивость. При наличии продольного тока несколько видоизменяется выражение для возмущения плотности электронов, а именно оно принимает вид

$$\frac{n_e}{n} = \frac{k_z^2 + ik_y \kappa (\Omega_e \tau_e)^{-1}}{k_z^2 D_e - i\omega + ik_z u} \cdot \frac{e\tau_e}{m_e} \varphi, \quad (\text{IV. 94})$$

где u — продольная (токовая) скорость электронов.

В соответствии с этим в формуле (IV. 87) для квадрата частоты ионно-звуковых колебаний добавляется множитель $1 + iuk_z^{-2} D_e^{-1}$. Нетрудно видеть, что при этом максимальное значение инкремента опять достигается при $k_z^2 \sim k_y \kappa / \Omega_e \tau_e$. При достаточно большой величине $\Omega_e \tau_e$ максимальный инкремент может возрасти на фактор $\left(\frac{u^2 \Omega_e \tau_e}{D_e k_y \kappa}\right)^{1/4}$ по сравнению с найденным ранее значением $\gamma \sim kc_s$.

Продольный ток усиливает и собственно дрейфовую неустойчивость. Нетрудно видеть, что с учетом (IV. 94) дисперсионное уравнение несколько усложняется по сравнению с (IV. 91), а именно

$$\omega^2 + i\omega(\omega_s + ik_z u) - i\omega_* \left(\omega_s + i \frac{k_z u}{k_{\perp}^2 r_H^2} \right) = 0, \quad (\text{IV. 95})$$

где по-прежнему $\omega_s = \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \Omega_e \tau_e \Omega_i$, $\omega_* = c_s k_y \kappa r_H$.

Как мы установили ранее, в отсутствие тока инкремент достигал максимума при $\omega_s \sim \omega_*$, т. е. при $k_z^2 \sim k_{\perp}^3 \kappa r_H^2 (\Omega_e \tau_e)^{-1}$. Влияние тока становится заметным, если в точке максимума величина $k_z u / k_{\perp}^2 r_H^2$ сравнивается с ω_s , т. е. при $u > u_c = c_s r_H^2 k_{\perp}^2 \sqrt{\frac{\kappa}{k_{\perp}} \Omega_e \tau_e}$. Допустим, что u превосходит указанное значение. Тогда положение максимума инкремента сдвинется в сторону больших k_z , поскольку величина uk_z растет с k_z , а само значение в точке максимума несколько возрастет по сравнению с бестоковой плазмой.

При достаточно больших значениях k_y , когда $\omega_s > k_z u$, приближенно имеем:

$$\omega \cong \omega_* \left(1 + \frac{ik_z u}{\omega_s k_{\perp}^2 r_H^2} \right) = \omega_* \left(1 + i \frac{u}{v_e k_z \lambda_e} \right), \quad (\text{IV. 96})$$

где λ_e — средняя длина свободного пробега электронов. Здесь величину $k_z \lambda_e$ следует считать меньшей единицы, так как в про-

тивном случае для продольного движения электронов нельзя пользоваться диффузионным приближением.

Из выражения (IV. 96) следует, что при уменьшении k_z инкремент возрастает. При малых $k_{\perp} r_H$ это возрастание продолжается до тех пор, пока ω_s^2 не достигнет значения порядка $\omega_* k_{\perp} \mu / k_{\perp}^2 r_H^2$, а затем инкремент начинает убывать с k_z . Максимальное значение инкремента порядка

$$\gamma_1 = u\kappa \left(\frac{c_s^2}{u_0 v_e \lambda_e \kappa} \right)^{1/3} \quad (\text{IV. 97})$$

достигается при $k_z \sim \frac{k_{\perp} Q_i}{\lambda_e} \left(\frac{u\kappa \lambda_e c_s}{v_e^2} \right)^{1/3}$.

При не очень малых значениях $k_{\perp} r_H$ может оказаться, что величина $k_z \mu$ станет больше ω_s до того, как мы подойдем к указанному значению k_z . В этом случае в дисперсионном уравнении (IV. 95) можно пренебречь ω_s по сравнению с $k_z \mu$, и тогда инкремент достигнет максимума

$$\gamma_2 = \omega_* / k_{\perp}^2 r_H^2, \quad (\text{IV. 98})$$

при $k_z \mu \sim \omega_* / k_{\perp}^2 r_H^2$. Таким образом, в общем случае $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2) > \omega_*$. При $k_{\perp} \sim \kappa$ выражением (IV. 97) следует пользоваться, если

$$r_H \kappa < \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/6} (\lambda_e \kappa)^{1/3} \left(\frac{v_e}{u} \right)^{2/3}. \quad (\text{IV. 99})$$

Переход к бесстолкновительной диссипации

Заканчивая знакомство с дрейфово-диссипативной неустойчивостью, рассмотрим вкратце вопрос о переходе от диссипации за счет столкновений к бесстолкновительной [93]. Если воспользоваться упрощенным выражением для члена столкновений, допуская, что после рассеяния на атомах электроны имеют максвелловское распределение, то линейаризованное кинетическое уравнение для электронов может быть записано в виде

$$\begin{aligned} (-i\omega + ik_z v_e) f' + \frac{e}{m_e} ik_z \Phi \frac{\partial f}{\partial v_e} - i \frac{c}{H} k_y \frac{\partial f}{\partial x} \Phi = \\ = -v_e f + v_e \frac{n_e}{n} \bar{f}, \end{aligned} \quad (\text{IV. 100})$$

где $v_e = \tau_e^{-1}$. Отсюда находим плотность электронов:

$$\begin{aligned} \frac{n_e}{n} = \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_*}{k_z v_e} Y \left(\frac{\omega + i v_e}{k_z v_e} \right) \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i v_e}{k_z v_e} Y \left(\frac{\omega + i v_e}{k_z v_e} \right) \right]^{-1} \right\} \frac{e\Phi}{T_e}, \end{aligned} \quad (\text{IV. 101})$$

где функция $Y(z)$ определена формулой (IV. 49).

При $v_e \rightarrow 0$ мы получим найденный ранее результат для бесстолкновительной плазмы. В другом предельном случае $\tau_e k_z v_e = \lambda_e k_z \ll 1$ и $\omega \tau_e \ll 1$ для возмущения плотности n_e/n получаем гидродинамическое выражение (IV. 85). Переход от столкновительной диссипации к бесстолкновительной происходит, грубо говоря, при $\lambda_e k_z = 1$. Более точное рассмотрение этого перехода [93] показывает, что за счет колебаний с $\omega \sim v_e$ происходит некоторое расширение области ионно-звуковой неустойчивости. На рис. 23 эта дополнительная область отмечена наклонной штриховкой.

При очень малых значениях k_z функцию Y можно разложить по обратным степеням аргумента, сохранив два члена этого разложения. При $\omega \tau_e > 1$ такое разложение приводит к выражению

$$\frac{n_e}{n} = \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_*}{\omega} \left[1 + \frac{T_e k_z^2}{\omega (\omega + i\nu_e) m_e} \right] \right\} \frac{e\varphi}{T_e}. \quad (\text{IV. 102})$$

Приравнивая это выражение относительно возмущению плотности ионов, которое для дрейфовых волн при $T_e = T_i$ и $\frac{\omega}{k_z} \gg v_i$ согласно уравнению (IV. 66) равно

$$\frac{n_i}{n} = \left(\frac{\omega_*}{\omega} - s \frac{\omega_* + \omega}{\omega} \right) \frac{e\varphi}{T},$$

получим дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega - \omega_*}{\omega + \omega_*} = \frac{\omega (\omega + i\nu_e)}{\omega_z^2}, \quad (\text{IV. 103})$$

где $\omega_z^2 = \frac{k_z^2}{k_\perp^2} \Omega_i \Omega_e$, $\nu_e = \tau_e^{-1}$. Ранее мы установили [см. уравнение (IV. 57) I], что у этого уравнения при $\nu_e = 0$ и $\frac{\omega_*}{\omega_z} > 0,4$

появляются комплексные корни. При наличии столкновений область неустойчивости расширяется в сторону больших значений k_z , когда $\omega_z^2 \gg \omega_*^2$, и приближенно

$$\omega \approx \omega_* + 2i\nu_e \frac{\omega_*^2}{\omega_z^2}. \quad (\text{IV. 104})$$

Это выражение сходно с (IV. 92), которое было получено в гидродинамическом приближении, а при $T_i = 0$, как нетрудно показать, коэффициент 2 во втором слагаемом уравнения (IV. 105) заменяется на единицу, и соответствующие выражения в точности совпадают.

Токово-конвективная (спиральная) неустойчивость

Покажем теперь, что рассмотренная в гл. I, § 2 неустойчивость положительного столба непосредственно примыкает к дрейфовой неустойчивости, непрерывно переходя в нее при уменьшении частоты столкновений.

Рассмотрим более простой случай $\Omega_i \tau_i \gg 1$. При этом для возмущения плотности ионов можно воспользоваться выражением (IV. 89), а для плотности электронов — (IV. 94). Приравнявая n_i и n_e , получим дисперсионное уравнение для частоты колебаний:

$$\omega^2 + i\omega(v_i + D_e k_z^2 + \omega_s + ik_z u) - v_i(D_e k_z^2 + ik_z u) - i\omega_* \left(\omega_s + \frac{ik_z u}{k_\perp^2 r_H^2} \right) = 0. \quad (\text{IV. 105})$$

При $u = 0$ это уравнение переходит в (IV. 90), а при $v_i = 0$ оно совпадает с уравнением (IV. 95). При $r_H \ll 1$ во втором слагаемом уравнения (IV. 105), как и в (IV. 90), можно пренебречь слагаемым $k_z^2 D_e$ по сравнению с ω_s . Кроме того, при $k_\perp r_H \ll 1$ во втором слагаемом можно пренебречь величиной $k_z u$ по сравнению с ω_s , а в последнем — ω_s по сравнению с $k_z u / k_\perp^2 r_H^2$. В этом приближении при $\omega \ll \omega_s$ из уравнения (IV. 105) получим

$$\omega = \frac{k_z u_0 v_i}{\omega_s + v_i} + i \frac{\omega_* k_z u / k_\perp^2 r_H^2 - v_i D_e k_z^2}{\omega_s + v_i}. \quad (\text{IV. 106})$$

При достаточно малых значениях k_z первое слагаемое в выражении для мнимой части частоты становится больше второго, и соответствующие возмущения нарастают во времени. Это и есть токово-конвективная неустойчивость, обязанная своим происхождением градиенту проводимости поперек магнитного поля. Согласно уравнению (IV. 106) выражение для инкремента можно представить в виде

$$\gamma = b_i E \sqrt{\frac{b_e}{b_i}} \frac{d \ln n}{dx} \frac{k_y}{k_\perp} \frac{\omega_s}{\omega_s + v_i} - D_e \frac{b_i}{b_e} \frac{k_\perp^2}{\Omega_i^2 \tau_i^2} \cdot \frac{\omega_s}{\omega_s + v_i}, \quad (\text{IV. 107})$$

где b_i — ионная, b_e — электронная подвижности, E — продольное электрическое поле, связанное с u соотношением $u = b_e E$. Для возмущений с не очень большими значениями k_\perp вторым слагаемым в выражении (IV. 107) можно пренебречь, а первое достигает максимума при $\omega_s = v_i$, равного

$$\gamma = U \frac{d \ln n}{dx}, \quad (\text{IV. 108})$$

где

$$U = \frac{1}{2} b_i E \sqrt{\frac{b_e}{b_i}}. \quad (\text{IV. 109})$$

Нелинейные дрейфовые течения

Если выполнены условия дрейфовой неустойчивости, то малые возмущения будут нарастать до тех пор, пока в игру не вступят нелинейные процессы взаимодействия между колебаниями. Чтобы хотя бы качественно представить себе, какой характер могут иметь

нелинейные колебания плазмы, можно привести уравнения нелинейного движения к одному уравнению гидродинамического типа. Мы ограничимся здесь выводом такого вида уравнений для нелинейных течений, соответствующих дрейфово-диссипативной, токово-конвективной и желобковой неустойчивостей.

Рассмотрим дрейфово-диссипативную неустойчивость бестоковой плазмы. Для простоты будем пренебрегать столкновениями ионов с атомами нейтрального газа. Кроме того, будем считать, что $T_i = 0$. В рассматриваемых колебаниях, характерный масштаб которых вдоль магнитного поля значительно больше поперечного, продольным движением ионов можно пренебречь. Что касается поперечного движения, то оно определяется, в основном, электрическим дрейфом $\mathbf{v} = \frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla \varphi]$, и лишь за счет инерции возникает небольшая добавка к этой скорости. В уравнении непрерывности этой добавкой можно пренебречь, и с учетом несжимаемости дрейфовой скорости, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, получим:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n = 0. \quad (\text{IV. 110})$$

Далее, суммируя электронное и ионное уравнения движения, получим гидродинамическое уравнение

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}], \quad (\text{IV. 111})$$

где \mathbf{j} — плотность электрического тока, p — давление плазмы.

Если применить к уравнению (IV. 111) операцию $(\operatorname{rot})_z$, то в правой части получим выражение $-\frac{H}{c} \operatorname{div} j_{\perp}$, которое в силу $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ равно $\frac{H}{c} \frac{\partial j_z}{\partial z}$. Величину j_z можно определить из электронного уравнения движения, если пренебречь ионным продольным током:

$$j_z = -\frac{e^2 n \tau_e}{m_e} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{T}{e} \frac{\partial \ln n}{\partial z} \right). \quad (\text{IV. 112})$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{rot}_z \left(m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \Omega_e \tau_e n \frac{\partial}{\partial z} (e\varphi - T \ln n). \quad (\text{IV. 113})$$

Уравнения (IV. 110) и (IV. 113) совместно с соотношением $\mathbf{v} = \frac{c[\mathbf{h} \nabla \varphi]}{H}$ и являются искомыми уравнениями нелинейного движения. С гидродинамической точки зрения потенциал φ можно рассматривать как функцию тока двумерного движения ($v_z = 0$). Уравнение (IV. 110) описывает изменение плотности в каждом сечении $z = \operatorname{const}$, а правая часть уравнения (IV. 113) устанавливает связь между течениями в разных плоскостях. Нетрудно проверить, что в линейном приближении уравнения (IV. 110), (IV. 113) приводят к дисперсионному уравнению (IV. 91).

В частном случае винтового течения, когда все величины являются функциями только двух переменных — расстояния r от оси симметрии и $\zeta = \vartheta - kz$, где ϑ — азимутальный угол, уравнение (IV. 113) можно один раз проинтегрировать, в результате чего получим:

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p_* = - \frac{H^2 \sigma}{c^2} r^2 k^2 \mathbf{e}_r \left(v_r - \frac{Tc}{eHr} \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln n \right), \quad (\text{IV. 114})$$

где $\sigma = \frac{e^2 n \tau_e}{m_e}$ — проводимость плазмы, \mathbf{e}_r — единичный вектор, направленный по радиусу, p_* — произвольная функция координат. Уравнение (IV. 114) совместно с уравнением непрерывности (IV. 110) и условием несжимаемости

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (\text{IV. 115})$$

описывает гидродинамическое винтовое течение, при котором на жидкую среду действует дополнительная сила, определяемая правой частью уравнения (IV. 114). Второе слагаемое в выражении для этой силы как раз и приводит к неустойчивости.

Аналогичным образом могут быть получены уравнения для нелинейного течения, соответствующего токово-конвективной неустойчивости. Для этого достаточно лишь в уравнении (IV. 111) заменить инерционный член на силу трения $m_i n \nu_i$, а в выражении для j_z добавить к $-\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ внешнее электрическое поле E . В результате вместо выражения (IV. 113) получим

$$\text{rot}_z (m_i n \mathbf{v} \nu_i) = - \frac{\partial}{\partial z} \Omega_e \tau_e n \left(e \frac{\partial \varphi}{\partial z} - eE - T \frac{\partial}{\partial z} \ln n \right). \quad (\text{IV. 116})$$

Для винтового течения отсюда получим

$$m_i n \nu_i \mathbf{v} + \nabla p_* = - \frac{H^2 \sigma}{c^2} r^2 k^2 \mathbf{e}_r \left(v_r - \frac{cE}{Hrk} - \frac{Tc}{eHr} \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln n \right). \quad (\text{IV. 117})$$

При малых k основную роль играет второе слагаемое в круглых скобках, которое при $E/k > 0$ соответствует силе, направленной по радиусу. Пренебрегая другими слагаемыми, мы получим уравнение движения для неоднородной несжимаемой жидкости в позистой среде при наличии силы тяжести, направленной по радиусу.

Рассмотрим еще случай течения, отвечающего желобковой неустойчивости с учетом эффекта конечного ларморовского радиуса. Для простоты опять заменим силу диамагнитного выталкивания эффективной силой тяжести с ускорением g . Поскольку скорость электронов и ионов опять определяется, в основном, электрическим дрейфом $\mathbf{v} = \frac{c[\mathbf{h} \nabla \varphi]}{H}$, то мы опять имеем дело

с двумерным несжимаемым течением. Это течение может быть описано уравнениями магнитной гидродинамики с учетом бесстолкновительной «косой» вязкости (см., например, [103]). Как было показано в работах [104, 105], в линейном приближении эти уравнения приводят точно к тем же результатам, которые получаются в кинетическом рассмотрении при $k_{\perp} \rho_i \ll 1$.

С учетом вязкости при $\Omega_i \tau_i \gg 1$ уравнение движения имеет вид:

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p_* = m_i n \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (\text{IV. 118})$$

где сила \mathbf{F} дается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{Tc}{H\Omega_i} (\nabla n \Delta \varphi - (\nabla n \nabla) \nabla \varphi) = \\ &= \frac{T}{\Omega_i} \{ \nabla n \operatorname{rot} \mathbf{v} + (\nabla n \nabla) [\mathbf{h}\mathbf{v}] \}, \end{aligned} \quad (\text{IV. 119})$$

а эффективное давление равно $p_* = 2nT + \frac{H^2}{8\pi} + nT \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{\Omega_i}$. Для рассматриваемого нами несжимаемого течения величину p_* можно считать произвольной функцией координат r, ϑ .

Именно наличие силы \mathbf{F} приводит к стабилизации малых желобковых возмущений. Однако для конечных возмущений такой стабилизации может и не быть. Действительно, совершенно очевидно, что отдельная плазменная трубка в вакууме, расположенная в точке, где $\mathbf{g} \neq 0$, должна с ускорением выбрасываться в направлении \mathbf{g} . Такое движение соответствует как бы моде $m = 1$, а именно, при этом электрическое поле постоянно по сечению трубки, и поэтому нет различия в движении электронов и ионов. Можно думать, что такая трубка не может быть в равновесии и в том случае, если она погружена в плазму заметно меньшей (или заметно большей) плотности. В самом деле, допустим обратное, а именно, будем считать, что в плазме развивается установившееся течение, которое не приводит к потоку на стенку. Такое течение является стационарным в некоторой движущейся системе координат. В этой системе координат эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ должны совпадать с поверхностями постоянной плотности $n = \text{const}$, поскольку $\mathbf{v} \nabla n = 0$. Рассмотрим отдельную плазменную трубку, ограниченную поверхностью $n = \text{const}$, и покажем, что интеграл от силы \mathbf{F} по объему этой трубки обращается в нуль. Например, для интеграла от F_x с помощью интегрирования по частям получаем:

$$\int F_x d\tau = \frac{Tc}{H\Omega_i} \oint_S n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy \right), \quad (\text{IV. 120})$$

где в правой части интегрирование проводится по поверхности $n = \text{const}$. Вынося n из-под интеграла, мы получим обращающийся в нуль интеграл по замкнутому контуру от полного дифферен-

циала $d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$. Аналогичным образом нетрудно показать, что и F_y обращается в нуль. Таким образом, полная дополнительная сила, действующая на отдельную трубку с плазмой, ограниченную поверхностью $n = \text{const}$, обращается в нуль. Отсюда следует, что такая трубка может удерживаться в равновесии только при некоторых специальных течениях, когда давление p_* распределено на ее поверхности таким образом, что оно в точности уравновешивает силу тяжести.

Из этих рассуждений напрашивается вывод, что при достаточно сильных возмущениях, когда от основной плазмы отделяются плазменные трубки, и поверхность $n = \text{const}$ становится многосвязной, эффект стабилизации конечным ларморовским радиусом может отсутствовать.

§ 4. Турбулентная диффузия плазмы

Причиной дрейфовой неустойчивости является только неоднородность плазмы, и поэтому развивающиеся вследствие неустойчивости колебания не смогут «успокоиться» до тех пор, пока они не устроят причину их возбуждения, т. е. полностью не ликвидируют градиент плотности. Другими словами, такая неустойчивость должна приводить к турбулентной диффузии.

Величину «диффузионного» потока при развитых колебаниях можно найти, исходя из следующих соображений. Как мы установили выше, при дрейфовой неустойчивости ($r_{LH} \ll 1$) ионы перемещаются поперек магнитного поля, в основном, за счет электрического дрейфа $\mathbf{v} = \frac{c[\mathbf{h} \nabla \varphi]}{H}$. В однородном магнитном поле дрейфовое движение несжимаемо, т. е. $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Отсюда следует, что при наличии дрейфовых колебаний плазма переносится поперек магнитного поля без дополнительного сжатия или разрежения, т. е. имеет место турбулентная конвекция. При этом перемещение плазмы на расстояние ξ приводит к возмущению плотности $n' = \xi n$. Другими словами, колебания плотности определяются колебаниями смещения ξ . Если эти колебания совершаются по гармоническому закону, то они не приводят к усредненному по времени потоку плазмы. Если же амплитуда колебаний возрастает со временем, то каждый последующий полупериод колебаний приводит к несколько большему смещению плазмы, чем предыдущий, и в результате этого появляется средний поток плазмы $q = \langle \xi n' \rangle = \gamma n l \langle \xi^2 \rangle$. По порядку величины эта связь между потоком q и смещением плазмы ξ или возмущением плотности n' сохраняется и в том случае, когда в игру вступает нелинейное взаимодействие между волнами, поскольку даже при наличии взаимодействия характерная скорость нарастания отдельного волнового пакета и превращения его в другие пакеты имеет порядок величины γ .

Следовательно, чтобы определить q , необходимо знать $\langle \xi^2 \rangle$ или $\langle n'^2 \rangle$. При $\gamma \sim \omega$, когда развивается сильная турбулентность, амплитуда колебаний возрастает настолько, что возмущение градиента плотности $k_{\perp} n'$ становится порядка основного градиента, т. е. $k_{\perp} n' \sim \kappa n$. Таким образом, в этом случае установившаяся интенсивность колебаний плотности с волновым числом k имеет порядок величины $|n'_k|^2 \sim \frac{\kappa^2 n^2}{k_{\perp}^2}$. Следовательно, при этом

$$q = \frac{\gamma}{\kappa n} \langle n'^2 \rangle = \left\langle \frac{\gamma}{k_{\perp}^2} \right\rangle \kappa n = - \left\langle \frac{\gamma}{k_{\perp}^2} \right\rangle \frac{dn}{dx}.$$

При слабой турбулентности, когда $\gamma/\omega \ll 1$, для оценки интенсивности колебаний можно воспользоваться кинетическим уравнением для волн. Если спектр распадный, т. е. можно удовлетворить условию $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$, и это соотношение удовлетворяется не тождественно, а на некоторой поверхности в пространстве волновых чисел, то по порядку величины получаем $\gamma \langle n'^2 \rangle = V^2 \langle n'^2 \rangle^2$. В этом соотношении левая часть описывает развитие волн вследствие неустойчивости, а правая возникает за счет взаимодействия волн. Квадрат матричного элемента можно оценить как $V^2 \sim \omega \frac{k^2}{\kappa^2 n^2}$, поскольку при $n' \sim \frac{\kappa n}{k_{\perp}}$, когда гра-

диент возмущения плотности порядка основного градиента, взаимодействие между колебаниями должно было бы привести к затуханию колебаний с декрементом порядка частоты. Таким образом, при слабой турбулентности интенсивность колебаний должна убывать при уменьшении инкремента, и по порядку величины $\langle n'^2 \rangle \approx \approx \frac{\gamma}{\omega} \frac{\kappa^2}{k_{\perp}^2} n^2$. Следовательно, при этом $q = - \left\langle \frac{\gamma^2}{\omega k_{\perp}^2} \right\rangle \frac{dn}{dx}$ [106].

Множитель перед производной от плотности в этом соотношении и представляет собой коэффициент турбулентной диффузии. При оценке величины коэффициента диффузии вместо k_{\perp} можно подставить то его значение, которое дает максимальный вклад, т. е. по порядку величины

$$D \sim \left(\frac{\gamma_k^2}{\omega k_{\perp}^2} \right)_{\text{макс}}. \quad (\text{IV. 121})$$

Аналогичное соотношение имеет место и при ионно-звуковой неустойчивости ($r_H \kappa \gg 1$), поскольку аналогичные рассуждения применимы к электронам, совершающим дрейфовое движение поперек магнитного поля. Случай $r_H \kappa \gg 1$, кроме того, более простой, поскольку при этом как в отсутствие, так и при наличии столкновений $\gamma \sim \omega \sim \kappa c_s$, и, следовательно,

$$D \sim c_s / \kappa.$$

При наличии сильного магнитного поля, когда $\kappa r_H \ll 1$, турбулентная диффузия более чувствительна к столкновениям, и поэтому требуется более детальное рассмотрение, которое проводится ниже.

Разреженная плазма в отсутствие продольного тока

Рассмотрим настолько разреженную плазму, что столкновениями можно пренебречь. Точнее, мы предположим, что столкновения, с одной стороны, настолько редки, что они не влияют на частоту и инкремент колебаний, а с другой стороны, они настолько часты, что успевают поддерживать максвелловское распределение частиц по скорости. Коэффициент диффузии, соответствующий этим допущениям, мы будем обозначать через D_s .

Чтобы оценить D_s , воспользуемся результатами §2. Рассмотрим сначала неограниченный по длине плазменный столб. При $\beta = \frac{8\pi p}{H^2} > \frac{m_e}{m_i}$ неустойчивость развивается только на возмущениях с $k_{\perp} \geq 1$. Как функция k_z инкремент достигает максимума при $k_z \sim \kappa \sqrt{\beta}$. При этом $\omega \sim \kappa \alpha_i v_i$, $\gamma/\omega \sim \frac{c_A}{v_e} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}$ (мы считаем $T_i = T_e$). Можно показать (см. ниже), что основной вклад в диффузию дают колебания с $k_{\perp} \alpha_i \sim 1$, и при этом

$$D_s \sim \frac{m_e}{m_i \beta} \alpha_i^2 v_i \kappa \sim \frac{m_e}{m_i \beta} \kappa \alpha_i D_B, \quad (\text{IV. 122})$$

где $D_B \sim \alpha_i v_i$ — бомовский коэффициент диффузии.

Таким образом, в рассматриваемой области значений параметра β коэффициент диффузии убывает при увеличении β , а при $\beta \geq 10^{-1}$ плазма становится устойчивой и D_s обращается в нуль (остается лишь классическая диффузия за счет столкновений).

При $\beta < \frac{m_e}{m_i}$ наряду с неустойчивостью на коротковолновых возмущениях с $k_{\perp} \alpha_i \sim 1$ возможна «гидродинамическая» неустойчивость на возмущениях с большими длинами волн при $\omega_*^2 = \omega_z^2$ [см. уравнение (IV. 57)]. Именно эти возмущения и определяют величину коэффициента диффузии. Определяя из условия $\omega \sim \omega_* < c_A k_z$ минимальное допустимое значение $k_{\perp} \sim \frac{\omega_0}{c}$, находим с помощью уравнения (IV. 121) соответствующий коэффициент диффузии:

$$D_s \sim \frac{c\kappa}{\omega_0} D_B \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} \kappa \alpha_i D_B. \quad (\text{IV. 123})$$

В этой области значений магнитного поля коэффициент диффузии обратно пропорционален H^{-1} , но по абсолютной величине он меньше бомовского коэффициента. При уменьшении плотности плазмы, когда ω_0 становится порядка $c\kappa$, т. е. при $\beta \sim \frac{m_e}{m_i} \kappa^2 \alpha_i^2$

коэффициент диффузии достигает максимально возможного значения порядка D_B , которое не изменяется при дальнейшем уменьшении плотности. При этом $\gamma \sim \omega \sim \omega_*$, а максимальный масштаб турбулентных пульсаций определяется радиусом трубки, т. е. $k_{\perp} \sim \kappa$.

Зависимость D_s от β для бесконечно протяженного столба схематически изображена на рис. 24 сплошной линией (в двойном логарифмическом масштабе).

Рассмотрим теперь, как влияет на диффузию укорочение плазменного столба. Величина волнового числа k_{zm} , при котором инкремент достигает максимума, увеличивается вместе с ростом β , а именно $k_{zm} \sim \kappa \times$

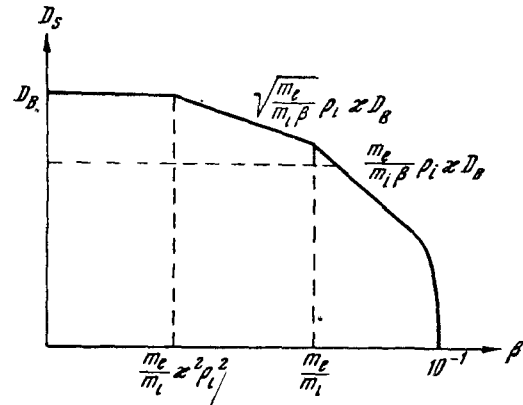


Рис. 24. Коэффициент турбулентной диффузии в бесконечно длинной трубке.

$\times \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \kappa^2 \varrho_i^2$ при $\beta < \frac{m_e}{m_i} \times \kappa^2 \varrho_i^2$, $k_{zm} \sim \kappa \beta \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$ при $\frac{m_e}{m_i} \kappa^2 \varrho_i^2 < \beta < \frac{m_e}{m_i}$, $k_{zm} \sim \kappa \sqrt{\beta}$ при $\beta > \frac{m_e}{m_i}$. Поэтому влияние конечной длины столба на диффузии более существенно при малой плотности плазмы. Это влияние начи-

$$D_s \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \left(\frac{\kappa}{k_0}\right)^{1/2} \kappa \varrho_i D_B \text{ при } \frac{a}{L} \sim \frac{k_0}{\kappa} < \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (\text{IV. 124})$$

$$D_s \sim \frac{m_i}{m_e} \left(\frac{\kappa}{k_0}\right)^2 \kappa \varrho_i D_B \text{ при } \frac{a}{L} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (\text{IV. 125})$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{L}$ — минимальное продольное волновое число.

Таким образом, в трубке конечной длины коэффициент диффузии при уменьшении β сначала совпадает с коэффициентом диффузии для бесконечного шнура, пока соответствующее эффективное значение k_{zm} не достигнет k_0 . При дальнейшем уменьшении β коэффициент диффузии остается постоянным, как показано на рис. 24 пунктирной линией.

Согласно (IV. 124) при $\frac{a}{L} < \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ коэффициент диффузии сравнительно слабо зависит от длины установки. При $\frac{a}{L} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ и малых β коэффициент диффузии по порядку величины равен $D_s \sim \chi v_i \rho_i^2$. При $\frac{a}{L} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ коэффициент D_s довольно быстро убывает при уменьшении L , а при $\frac{a}{L} \geq 10^{-1}$ вообще наступает полная стабилизация (если не учитывать возмущений с $k_z = 0$, чувствительных к граничным условиям на торцах трубки).

Разреженная плазма с продольным током

Допустим, что мы имеем дело с ограниченным по длине плазменным шнуром, скажем, $\frac{a}{L} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$. При этом, как мы установили выше, в отсутствие продольного тока в плазме возбуждаются только коротковолновые колебания с $k_{\perp} \rho_i \sim 1$. Соответствующий коэффициент диффузии сравнительно мал, а именно, $D_s \sim \chi \rho_i D_B$. При наличии продольного тока, как было показано ранее, появляется дополнительная неустойчивость на длинноволновых возмущениях с $k_{\perp} \rho_i \ll 1$. Поскольку коэффициент диффузии в выражении (IV. 121) прямо пропорционален квадрату поперечной длины волны колебаний, то эта неустойчивость приводит к существенному увеличению коэффициента диффузии.

Рассмотрим опять плоский слой неоднородной плазмы с градиентом плотности вдоль оси x и предположим, что $T_i = T_e = \text{const}$. В равновесном, или, точнее, в усредненном по времени состоянии электрическое поле в лабораторной системе координат, где ионы покоятся, определяется градиентом плотности:

$$\nabla \varphi = -\frac{T}{en} \nabla n. \quad (\text{IV. 126})$$

Продольный электронный ток возбуждает колебания потенциала φ' и плотности n' . Если продольная фазовая скорость волн значительно меньше тепловой скорости электронов (согласно § 3 именно такие волны и возбуждаются в плазме), то все электроны, за исключением резонансных, успевают прийти в равновесие вдоль магнитного поля. Поэтому возмущение потенциала можно представить в виде:

$$\varphi' = \frac{T}{e} \ln \left(1 + \frac{n'}{n} \right) \equiv \varphi_1, \quad (\text{IV. 127})$$

где первое слагаемое представляет собой распределение Больцмана, а малая добавка φ_1 связана с резонансными электронами.

Допустим, что ларморовский радиус ионов значительно меньше характерной длины волны рассматриваемых возмущений. Тогда

для ионов можно воспользоваться гидродинамическим приближением. В этом приближении в уравнении непрерывности достаточно учесть лишь электрический дрейф, поскольку ларморовский ток не приводит к изменению плотности:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla (\varphi + \varphi')] \nabla (n + n') = 0. \quad (\text{IV. 128})$$

Учитывая соотношение (IV. 127), мы запишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} - \frac{2cT}{eHn} [\mathbf{h} \nabla n] \nabla n' + \frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla \varphi_1] \nabla (n + n'). \quad (\text{IV. 129})$$

Как мы видим, при $\varphi_1 = 0$ уравнение непрерывности является линейным относительно n' . Это обстоятельство, т. е. отсутствие взаимодействия между гармониками при больцмановском распределении электронов вдоль силовых линий, оказывается весьма существенным для всего последующего рассмотрения.

В уравнении (IV. 129) второе слагаемое описывает перенос возмущения вдоль оси y . При $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = \text{const}$ скорость этого переноса $v_0 = -\frac{2cT}{eHn} \frac{dn}{dx}$ также постоянна, и при помощи перехода в движущуюся систему координат второе слагаемое в уравнении (IV. 129) можно было бы исключить. Однако при произвольной зависимости n от x скорость переноса также зависит от x , и вследствие дифференциального движения возмущение плотности деформируется со временем. Чтобы выяснить характер этой деформации, перейдем к спектральному представлению, а именно, положим $n' = \int n_{k\omega} e^{-i\omega t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} d\omega$, где $n_{k\omega}(\mathbf{r}, t)$ — медленно меняющаяся амплитуда волнового пакета k, ω . При $k \gg \kappa$, когда длина волны возмущения значительно меньше поперечного размера a , величину $\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$ можно разложить в ряд вблизи рассматриваемого нами значения $x = x_0$ и ограничиться двумя членами разложения. Учитывая, что при переходе к Фурье-представлению $x - x_0 \rightarrow i \frac{\partial}{\partial k_x}$, получим:

$$-i(\omega - 2\omega_*) n_{k\omega} + \frac{\partial n_{k\omega}}{\partial t} + \frac{\partial n_{k\omega}}{v_0 \partial y} + 2 \frac{d\omega_*}{dx} \frac{\partial n_{k\omega}}{\partial k_x} - \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{u}{v_e} \omega_* n_{k\omega} - \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{u}{v_e} \int \omega' n_{n'-\omega'} n_{\omega-\omega'}, \omega-\omega' d\mathbf{k}' d\omega' = 0, \quad (\text{IV. 130})$$

где $\omega_* = -\frac{cT\kappa_y}{eHn} \frac{dn}{dx}$, u — продольная средняя скорость электронов.

В уравнении (IV. 130) последние два слагаемые, из которых первое описывает раскачку колебаний резонансными электронами, а второе — нелинейное взаимодействие между волнами, возникли в результате Фурье-преобразования последнего слагаемого в вы-

жении (IV. 129). При этом вместо φ_1 мы подставили его приближенное значение

$$\varphi_{1k\omega} = i \sqrt{\pi} \frac{T}{e} \frac{u}{v_e} \frac{n_{k\omega}}{n}; \quad (\text{IV. 131})$$

которое можно получить из выражения для возмущения плотности (IV. 50) при $\frac{\omega}{k_z} \ll v_e$. Строго говоря, выражение (IV. 131) должно содержать дополнительный множитель $k_z/|k_z|$, который мы опустили, полагая $k_z > 0$.

В уравнении (IV. 130) первое слагаемое значительно больше остальных, и поэтому в первом приближении можно положить $\omega = 2\omega_*$. Другими словами, функция $n_{k\omega}$ близка к $n_k \delta(\omega - 2\omega_*)$. Остальные малые слагаемые в выражении (IV. 130) описывают эволюцию волнового пакета во времени. В частности, слагаемое с $\frac{\partial n_{k\omega}}{\partial k_x}$ показывает, что «перекашивание» волнового пакета за счет дифференциального течения с дрейфовой скоростью v_0 приводит к возрастанию волнового числа k_x со временем, т. е. к потоку в пространстве волновых чисел. По порядку величины этот член равен $\omega_* \frac{\kappa}{k_{\perp}} n_{k\omega}$, и при малых k_{\perp} именно он и будет определяющим: все возмущения будут «сноситься» в область больших k_x прежде, чем они успеют заметно увеличить свою амплитуду за счет неустойчивости. При $\frac{k_{\perp}}{\kappa} > \frac{v_e}{u}$ преобладающую роль начинает играть неустойчивость, и искажением волн можно пренебречь. Пренебрегая, кроме того, вторым слагаемым в выражении (IV. 130), малым при $k \gg \kappa$, и вводя новую переменную $v = \omega - 2\omega_*$, получим для области $\kappa/k_{\perp} < \frac{u}{v_e}$:

$$\begin{aligned} v n_{k'v} - i \sqrt{\pi} \omega_* \frac{u}{v_e} n_{k'v} - \\ - i \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{u}{v_e} \int \omega'_* n_{k''v''} n_{k''v''} dk' dv', \end{aligned} \quad (\text{IV. 132})$$

где $k'' = k - k'$, $v'' = v - v'$ (мы пренебрегли здесь рассеянием волн на ионах, предполагая, что $u \gg v_i$).

В линейном приближении, как это видно из уравнения (IV. 132), собственная частота v является чисто мнимой. Следовательно, мы имеем дело с апериодической неустойчивостью, которая должна приводить к сильной турбулентности. Это видно и непосредственно из уравнения (IV. 132), согласно которому нелинейное взаимодействие может компенсировать раскачку колебаний за счет неустойчивости только при $n'/n \sim 1$, когда возмущение плотности становится порядка средней плотности. Этот результат является прямым следствием отсутствия взаимодействия между гармониками возмущения плотности при больцмановском распределении электронов.

Оценим величину диффузионного потока $q = \left\langle \frac{cE_y}{H} n' \right\rangle$.

Вместо E_y мы должны подставить сюда $-\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, так как только резонансные электроны принимают участие в диффузии (нетрудно видеть, что слагаемое с $\frac{\partial}{\partial y} \frac{T}{e} \ln \left(1 + \frac{n'}{n} \right)$ при усреднении с n' обращается в нуль). С помощью уравнения (IV. 131) получаем:

$$q = \frac{cT}{eH} \sqrt{\pi} \frac{u}{v_e} \int \frac{k_y k_z}{|k_z|} \frac{N_{k\omega}}{n} dk d\omega, \quad (\text{IV. 133})$$

где $N_{k\omega}$ — спектральная функция плотности: $\langle n_{k\omega} n_{k'\omega'} \rangle = N_{k\omega} \delta(\omega - \omega') \delta(k - k')$.

При сильной турбулентности возмущение плотности порядка средней плотности, и следовательно, по порядку величины $q \sim \frac{cT}{eH} \frac{u}{v_e} k_{\perp} n$, где k_{\perp} — некоторое среднее значение волнового числа в области сильной турбулентности. Как мы установили выше, эта область начинается с $k_{\perp} \sim \kappa \frac{u}{v_e}$. Подставляя в выражение для q именно это значение k_{\perp} (эффективное k_{\perp} во всяком случае не меньше этого значения), получим по порядку величины $q \sim -\frac{cT}{eH} \frac{dn}{dx}$.

Таким образом, при наличии продольного тока коэффициент диффузии плазмы в очень сильном магнитном поле по порядку величины оказывается равным бомовскому¹. Разумеется, этот результат справедлив только в том случае, если величина $\frac{u}{v_e}$ не слишком мала. Действительно, при $\frac{a}{L} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$ наряду с рассмотренной здесь раскачкой длинноволновых возмущений имеет место неустойчивость и соответствующая ей диффузия на возмущениях с $k_{\perp} \rho_i \sim 1$. Поскольку коэффициент диффузии, определяемый коротковолновыми возмущениями, имеет порядок величины $\kappa \rho_i^2 v_i$, то длинноволновые возмущения должны затухать с декрементом порядка $k_{\perp}^2 \kappa \rho_i^2 v_i$. Ясно, что предыдущее рассмотрение справедливо лишь в том случае, если для возмущений с $k_{\perp} \sim \kappa \frac{v_e}{u}$ инкремент $\gamma \sim \frac{u}{v} \omega_*$ больше упомянутого декремента затухания, т. е.

$$u/v_e > \sqrt{\kappa \rho_i}. \quad (\text{IV. 134})$$

¹ В работе автора [107] для пульсации скорости $v' \sim \frac{cE_y}{H} \sim \frac{\gamma}{\kappa} \frac{n'}{n}$ было принято заниженное значение $v' \sim \gamma n' / k_{\perp} n$, поэтому полученный там результат $D \sim \frac{u}{v_e} D_B$ также является заниженным.

При меньших значениях u/v_e коэффициент диффузии должен почти скачком спадать до значений порядка $\kappa_0 D_B$, поскольку дифференциальное вращение плазмы ($\frac{dv_0}{dx} \neq 0$) успевает при этом носить длинноволновые возмущения в область больших k_λ , где они затухают за счет диффузии на коротковолновых возмущениях. При наличии даже малой перекрещенности силовых линий порядка $\theta \sim \kappa_0 l$ коротковолновые колебания могут быть стабилизированы, и тогда турбулентный коэффициент диффузии может подскочивать до значения порядка D_B и при меньших значениях u/v_e .

Диффузия сильно разреженной плазмы

Приведенные выше результаты нелинейного рассмотрения справедливы только в том случае, если столкновения успевают поддерживать максвелловское распределение электронов по продольной скорости. В очень разреженной плазме это условие может быть нарушено, и тогда те выводы, которые существенно опирались на конкретный вид функции распределения могут существенно измениться. Нетрудно видеть, что уменьшение частоты столкновений должно существенно повлиять на диффузию при наличии продольного тока или при $\beta > m_e/m_i$, когда колебания раскачиваются небольшим числом резонансных электронов. Что же касается случая $\beta < m_e/m_i$, когда неустойчивость в длинной трубке имеет гидродинамический характер, и в раскачке колебаний принимают участие все электроны, то соответствующие результаты не чувствительны к предельному переходу $v_e \rightarrow 0$.

Рассмотрим сначала случай диффузии за счет продольного тока. Для того чтобы все предыдущие рассуждения оставались в силе, функция распределения должна быть близка к сдвинутой максвелловской с точностью до u/v_e . А так как время заметного искажения функции распределения за счет диффузионной утечки имеет порядок величины $\kappa^2 D \sim \kappa^2 D_B$, то искажением можно пренебречь только при $v_e \frac{u}{v_e} > \kappa^2 D_B$. Вводя параметр $S = \lambda_e \kappa_i \kappa^2$, мы запишем это условие в виде:

$$S < u/v_e. \quad (\text{IV. 135})$$

В очень разреженной плазме это условие нарушается, и на функции распределения устанавливается плато. При этом время утечки определяется средним временем восстановления максвелловской функции за счет столкновений, а именно, по порядку величины оно не превосходит $\frac{u}{v_e} v_e$.

В случае бестоковой плазмы при $\beta > m_e/m_i$ в турбулентной диффузии также участвует лишь небольшое число резонансных электронов с продольной скоростью $v_z < c_A = v_e \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}$. При

этом уменьшение частоты столкновений также приводит к уменьшению коэффициента диффузии, причем благодаря возникновению плато возможен следующий своеобразный нелинейный эффект. Если начальное распределение плотности таково, что профиль плотности всюду является выпуклым, т. е. $\frac{d^2n}{dx^2} < 0$, то диффузия будет приводить к «выеданию» функции распределения при $v_z < c_A$ во всей области изменения x . В результате инкремент нарастания дрейфовых колебаний только увеличивается, а при $\frac{\partial f}{\partial v_z} > 0$ должны, кроме того, возбуждаться ленгмюровские колебания, которые приведут к заполнению области $v_z < c_A$ в пространстве скоростей. Можно сказать, что профиль с $\frac{d^2n}{dx^2} < 0$ не чувствителен к исчезновению столкновений. При наличии точки перегиба на профиле плотности, и следовательно, области с $\frac{d^2n}{dx^2} > 0$ турбулентная диффузия приводит к накоплению резонансных электронов в области, где профиль является вогнутым ($\frac{d^2n}{dx^2} > 0$). В свою очередь, это приводит к возрастанию производной $\frac{\partial f}{\partial v_z}$ по абсолютной величине, т. е. к дополнительному затуханию дрейфовых волн. В результате, в отсутствие столкновений диффузионный поток в области $\frac{d^2n}{dx^2} > 0$ обратится в нуль, а в области $\frac{d^2n}{dx^2} < 0$ он будет продолжать выравнивать плотность до тех пор, пока она не станет почти постоянной. Таким образом, возникает своеобразная диффузионная «ударная волна», т. е. разрыв плотности вблизи точки перегиба. По мере выравнивания функции распределения по продольной скорости этот разрыв будет сравнительно медленно передвигаться к стенкам камеры, а затем произойдет довольно быстрая утечка с коэффициентом диффузии порядка $D_s \sim \frac{m_e}{m_i \beta} \kappa \rho_i D_B$.

Диффузия плотной плазмы

Приведенные в начале § 4 выражения для коэффициента турбулентной диффузии D_s относятся к достаточно разреженной плазме, когда частота столкновений ν_e меньше $\omega \sim \omega_*$ для всех волн, включая $k_{\perp} \sim \kappa$. Это условие можно представить в виде

$$S > \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}. \quad (\text{IV. 136})$$

При меньших значениях параметра S начинает играть заметную роль трение между электронами и ионами за счет столкновений, т. е. в игру вступает дрейфово-диссипативная неустойчивость. Столкновения приводят к увеличению эффективного волнового

числа k_z , при котором инкремент достигает максимума, а именно, из условия $\omega_s = \omega_*$ при $k_\perp = \kappa$ находим

$$k_z \approx \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \kappa^2 \varrho_i \sqrt{\frac{\varrho_i}{\lambda_e}} = \frac{\kappa^2 \varrho_i}{\sqrt{\Omega_e \tau_e}}. \quad (\text{IV. 137})$$

Соответствующая этому значению k_z продольная фазовая скорость имеет порядок величины $\omega/k_z \approx v_e \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \left(\frac{\lambda_e}{\varrho_i}\right)^{1/2}$. Если эта скорость меньше альфвеновской c_A , а значение волнового числа (IV. 137) больше минимально возможного значения $k_0 = 2\pi/L$, то $\gamma \sim \omega \sim \omega_*$ при $k_\perp \sim \kappa$, и соответствующий коэффициент турбулентной диффузии достигает значения $D_B \sim \varrho_i v_i$. Согласно выражению (IV. 137) условие $\frac{\omega}{k_z} < c_A$ может быть записано в виде $\beta < (\Omega_e \tau_e)^{-1}$. Если это условие нарушается, то соотношение $\gamma \sim \omega$ будет достигнуто только при больших значениях k_\perp , и в соответствии с этим коэффициент диффузии снижается до величины

$$D \approx \frac{c_A^2}{\Omega_i \Omega_e \tau_e} = \frac{D_\perp}{\beta}, \quad (\text{IV. 138})$$

где $D_\perp = \varrho_e^2 / \tau_e$ — классический коэффициент диффузии. Одновременно увеличивается оптимальное волновое число:

$$k_z \approx \kappa^2 \varrho_i \beta^{1/2} \Omega_e \tau_e.$$

В ограниченной по длине установке, когда минимальное число $k_0 = 2\pi/L$ больше приведенных выше оптимальных значений, коэффициент диффузии определяется более коротковолновыми возмущениями, у которых опять-таки $\gamma \sim \omega$ (вклад от длинноволновых возмущений $D \sim \gamma^2 / \omega k_\perp^2$ при уменьшении k_\perp убывает как k_\perp^5). Соответствующий коэффициент диффузии равен

$$D \approx D_B \left(\frac{\kappa^2 \varrho_i}{k_0 \sqrt{\Omega_e \tau_e}}\right)^{2/3}. \quad (\text{IV. 139})$$

Это выражение справедливо только при $k_0/\kappa < \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \lambda_e \kappa$, так как в противном случае оптимальное волновое число k_z возрастает настолько, что начинает сказываться затухание колебаний за счет ионной вязкости порядка $k_\perp^2 \varrho_i^2 / \tau_i$. Заметим, что выражение (IV. 139) справедливо лишь при $k_0 \lambda_e < 1$, когда можно пользоваться диффузионным приближением, и, кроме того, оно должно быть меньше величины (IV. 138); в противном случае именно (IV. 138) будет определять величину коэффициента диффузии.

Перейдем к рассмотрению влияния продольного тока на турбулентную диффузию в плотной плазме. Как мы установили выше, в разреженной плазме коэффициент диффузии при наличии продольного тока может достигать значения D_B . Этот вывод относится к случаю $k_z \lambda_e > 1$, когда можно пренебречь столкновениями.

Учитывая, что максимально допустимое значение k_z определяется соотношением $\omega/k_z \sim \frac{\omega^*}{k_z} \sim v_i$, мы можем записать условие применимости бесстолкновительного рассмотрения в виде

$$S > 1. \quad (IV. 140)$$

При меньших значениях параметра $S = \lambda_e \kappa^2 Q_i$ можно воспользоваться диффузионным приближением. Согласно § 3 при наличии сильного магнитного поля ($\kappa^2 Q_i^2 \ll 1$) и достаточно большого продольного тока ($u/c_s > \kappa^2 Q_i^2 \sqrt{\Omega_e \tau_e}$) инкремент нарастания малых возмущений (IV. 97) оказывается больше частоты колебаний $\omega \sim \omega_*$. Соответствующий коэффициент диффузии можно оценить как

$$D \sim \frac{c_s}{\kappa} \left(\frac{u^2}{c_s v_e \lambda_e \kappa} \right)^{1/3} \sim D_B \left(\frac{u}{u_*} \right)^{2/3}, \quad (IV. 141)$$

где

$$u_* = c_s \kappa^2 r_H^2 \sqrt{\Omega_e \tau_e}. \quad (IV. 142)$$

Соотношение (IV. 141) относится к плазме достаточно низкого давления [$\beta < (\Omega_e \tau_e)^{-1}$] в длинной установке [$k_0 < k_* = \kappa \left(\frac{u c_s \kappa Q_i^3}{v_e^2 \lambda_e^2} \right)^{1/3}$]. При увеличении $k_0 > k_*$ коэффициент диффузии убывает обратно пропорционально k_0 , а именно,

$$D \sim D_B \frac{k_*}{k_0} \left(\frac{u_0}{u_*} \right)^{2/3} = D_B \frac{u}{v_e k_0 \lambda_e}. \quad (IV. 143)$$

Выражением (IV. 143) можно пользоваться, пока либо не нарушится условие $k_0 \lambda_e < 1$, либо (IV. 143) не достигнет значения (IV. 139). Как мы видим, согласно уравнениям (IV. 141) и (IV. 143), при наличии продольного тока $u > u_*$ коэффициент диффузии в длинной трубке не зависит от магнитного поля, а в короткой — убывает как H^{-1} .

Согласно результатам § 3 продольный ток может увеличить коэффициент диффузии и в случае слабого магнитного поля, $r_H \kappa > 1$, когда имеет место ионно-звуковая неустойчивость.

Все приведенные выше оценки для коэффициента турбулентной диффузии являются грубо приближенными. А для ограниченных по длине систем сама оценка является весьма условной, поскольку мы не учитывали возможности развития однородных по длине возмущений ($k_z = 0$), которые требуют специального рассмотрения для каждого конкретного случая, поскольку они должны быть чувствительны к граничным условиям на торцах шнура.

Поскольку турбулентность, развивающаяся вследствие дрейфовой неустойчивости, как правило является сильной, то для более точного определения коэффициента турбулентной диффузии следовало бы воспользоваться либо приближением слабой связи,

по введением длины свободного перемешивания. Ниже мы познакомимся с двумя частными случаями, для которых было проведено более детальное рассмотрение (из них один относится к сильной, второй к слабой турбулентности).

Турбулентный положительный столб

Рассмотрим бесконечно длинный положительный столб в изолирующей трубке при наличии продольного магнитного поля, много больше критического. Как мы установили в гл. IV, § 3, такой столб неустойчив по отношению к возмущениям, сильно вытянутым вдоль магнитного поля, причем максимальный по k_z инкремент при $\Omega_i \tau_i \gg 1$ равен

$$\gamma = U \frac{d \ln n}{dx}, \quad (\text{IV. 144})$$

где $U = \frac{1}{2} b_i E \sqrt{\frac{b_e}{b_i}}$.

Рассматриваемая неустойчивость приводит к появлению конвекционного течения в плазме, при котором плазма вытекает на стенку отдельными винтовыми трубками, а снаружи в плазму проникают «пузыри», свободные от плазмы. Так как на границе этих «пузырей» относительный градиент $\frac{\nabla n}{n}$ весьма велик, то вследствие неустойчивости они сравнительно быстро перемешиваются с плазмой, и вся картина принимает хаотический, турбулентный характер [16].

Величину диффузионного потока в турбулентной плазме можно определить, пользуясь представлением о длине перемешивания. Пусть l есть эффективная длина (длина перемешивания), на которую перемещаются плазменные трубки при конвекции, прежде чем они разрушаются за счет взаимодействия с другими возмущениями. Так как возмущение плотности создается именно конвекционным движением, то среднюю пульсацию плотности можно представить как $n' = l \frac{dn}{dx}$. Пульсацию скорости v' , связанную с пульсацией плотности соотношением $\gamma n' \sim v' \frac{dn}{dx}$, можно оценить как $v' = U \frac{n'}{n}$, и следовательно, диффузионный поток $q = \langle n' v' \rangle$ можно представить в виде:

$$q = - U l^2 \frac{|\nabla n|}{n} \nabla n. \quad (\text{IV. 145})$$

При разряде в изолирующей трубке стенки не оказывают стабилизирующего действия на пульсации, и по аналогии с турбулентными струями в обычной жидкости величину l можно считать постоянной по сечению и пропорциональной радиусу трубки a . С помощью выражения (IV. 145) нетрудно составить уравнение

баланса частиц и определить величину диффузионной утечки и распределение плотности по радиусу. Сравнивая диффузионную

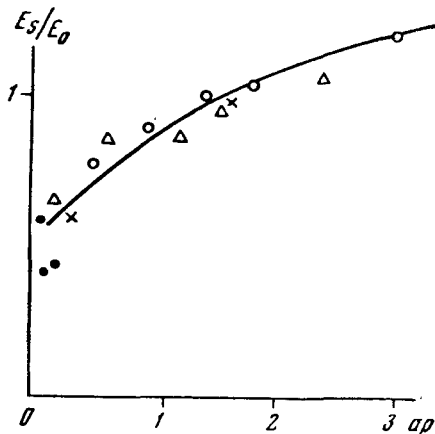


Рис. 25. Зависимость отношения продольного электрического поля E_s в турбулентном разряде к полю E_0 при $H = 0$ от давления нейтрального газа для разряда в гелии.

утечку с экспериментальными данными, можно определить длину перемешивания l . Такое сопоставление было проведено в работе [16], где было показано, что для тех значений магнитного поля, при которых турбулентная утечка равна утечке без магнитного поля, для разряда в гелии $l/a = 0,15$, для водорода — $l/a = 0,10$, для азота — $l/a = 0,12$. Как и в турбулентной струе $l/a \sim 0,1$.

На рис. 25 сравниваются экспериментально измеренная и теоретически рассчитанная зависимости от магнитного поля величины $\theta = E_s/E_0$, где E_s — электрическое поле в турбулентном

разряде, а E_0 — электрическое поле при $H = 0$. Хорошее согласие между экспериментальной и теоретической кривыми показы-

вает, что описание турбулентной диффузии на основе понятия длины перемешивания вполне оправдано. Более того, как показывают результаты экспериментального исследования распределения плотности по радиусу [108], допущение $l = \text{const}$ также хорошо согласуется с экспериментом. Сравнение теоретического и экспериментального распределений плотности по радиусу дается на рис. 26.

При расчете теоретической зависимости было принято краевое условие $q = n_s U$, где n_s — значение плотности на стенке. Это соотношение вполне аналогично введению экстраполированной длины

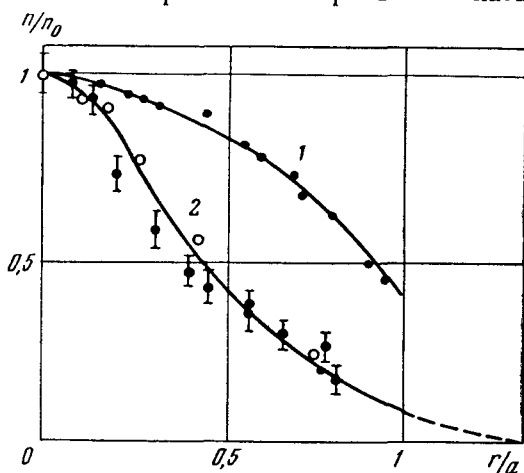


Рис. 26. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимости плотности плазмы от радиуса в турбулентном разряде:

1 — разряд при $H = 0$; 2 — турбулентный разряд.

обычной диффузии. Как видно из рис. 26, истинное распределение плотности по радиусу хорошо соответствует теоретической зависимости и заметно отличается от приведенного на том же рисунке распределения в отсутствие магнитного поля.

Турбулентная диффузия разреженной плазмы

$$\text{при } \beta \gg \frac{m_e}{m_i}$$

Второй пример, с которым мы здесь познакомимся, интересен с той точки зрения, что он показывает, насколько своеобразным может быть взаимодействие колебаний в турбулентной плазме.

Рассмотрим неоднородную разреженную (бесстолкновительную) плазму в сильном магнитном поле и предположим, что $\omega \ll 1$, $\beta \gg m_e/m_i$. Как показано в § 3, такая плазма неустойчива по отношению к коротковолновым возмущениям с $k\varrho_i \sim 1$. При $\beta \gg \frac{m_e}{m_i}$ инкремент нарастания возмущений с $k\varrho_i \sim 1$ заметно меньше частоты, т. е. по отношению к таким возмущениям движение плазмы является слабо турбулентным. Это движение можно описать с помощью кинетического уравнения для волн. Такое уравнение было составлено и проанализировано в работе автора [109] (см. также [110]). Мы приведем здесь лишь результаты соответствующего рассмотрения.

Нетрудно проверить, что дрейфовые волны обладают распадным спектром. Распад волн приводит к диффузии энергии в импульсном пространстве. Наряду с распадным взаимодействием для рассматриваемых колебаний весьма существенным является эффект нелинейного затухания волн на биениях с фазовой скоростью $\omega''/k_z \lesssim v_i$. Матричный элемент взаимодействия волн оказывается малым для возмущений с близкими по абсолютной величине волновыми векторами и составляет заметную величину для далеких k . Вследствие этого возмущения с $k_{\perp}\varrho_i \sim 1$, еще не очень сильно влияя друг на друга, полностью подавляют колебания с $k_{\perp}\varrho_i \gg 1$, и спектральная функция обладает четко выраженным максимумом при $k_{\perp}\varrho_i \sim 1$. Амплитуда колебаний потенциала и плотности вблизи максимума определяется балансом между линейной раскачкой колебаний на резонансных электронах и нелинейным затуханием на биениях, а форма спектра определяется распадами.

В результате подавления коротковолновых возмущений величина коэффициента турбулентной диффузии определяется соотношением (IV. 121) не в точке максимума этого выражения, который достигается при $k_{\perp}^2\varrho_i^2 \sim \frac{m_i}{m_e\beta}$, а в точке $k_{\perp}\varrho_i \sim 1$, а именно,

$$D \sim \frac{m_e}{m_i\beta} \varrho_i^2 v_i \kappa. \quad (\text{IV. 146})$$

При этом пульсация потенциала имеет порядок величины $\varphi' \sim \frac{T\kappa}{e} \left(\frac{m_e}{m_i\beta}\right)^{1/4}$, а пульсация плотности по порядку величины равна $n'/n \sim \kappa Q_i \left(\frac{m_e}{m_i\beta}\right)^{1/4}$. Этого и следовало ожидать, поскольку возмущение плотности создается смещением плотности на расстояние порядка Q_i .

Электропроводность турбулентной плазмы

Классическая диффузия полностью ионизованной плазмы определяется силой трения между электронами и ионами. С учетом силы трения уравнения гидродинамики записываются в виде:

$$\nabla p_e = -enE - \frac{en}{c} [\mathbf{vH}] + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}] + \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (\text{IV. 147})$$

$$m_i n \frac{dv}{dt} + \nabla p_i = enE + \frac{en}{c} [\mathbf{vH}] - \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (\text{IV. 148})$$

где $p_e = nT_e$, $p_i = nT_i$, $\mathbf{j} = en(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e)$, $\sigma = \frac{e^2 n \tau_e}{m_e}$ — проводимость, \mathbf{v} — скорость ионов.

Из уравнений (IV. 147) и (IV. 148) следует, что в равновесии $\mathbf{j}_\perp = \frac{c}{H} [\mathbf{h} \nabla p]$, где $p = p_i + p_e$ — полное, давление плазмы. Если плазма неоднородна вдоль оси x и $E_y = 0$, то из y -компоненты любого из написанных выше уравнений можно найти диффузионную скорость за счет столкновений:

$$v_x = -\frac{c}{H\sigma} j_y = -\frac{1}{m_e \tau_e \Omega_e^2} \frac{dp}{dx}. \quad (\text{IV. 149})$$

При наличии колебаний в уравнения вида (IV. 147) и (IV. 148) для усредненных величин следует ввести дополнительные слагаемые $+\langle en'E \rangle$, где n' — флуктуация плотности, а E — флуктуация электрического поля. Именно эти слагаемые и описывают турбулентную диффузию, причем к диффузии вдоль оси x приводит y -компонента этого выражения. Формально это слагаемое можно было бы трактовать как дополнительную «силу трения», возникающую в результате уменьшения эффективной проводимости плазмы. Однако в действительности усиленную диффузию, вообще говоря, нельзя свести к усиленному поперечному сопротивлению. Такое сведение было бы возможно в том случае, если бы причиной неустойчивости являлась только разность дрейфовых скоростей. На самом деле истинной причиной неустойчивости является неоднородность плазмы, и добавление дополнительной разности скоростей электронов и ионов за счет внешнего поля, вообще говоря, не эквивалентно увеличению градиента плотности.

Тем не менее, колебания могут заметно повлиять на проводимость плазмы поперек магнитного поля. Известно, что проводи-

мость плазмы поперек магнитного поля существенно зависит от краевых условий на холловский ток. Этот эффект можно усмотреть и непосредственно из уравнения (IV. 147) при $\nabla p_e = 0$, $\mathbf{v} = 0$. Действительно, если на компоненту тока, перпендикулярную внешнему полю \mathbf{E}_\perp (так называемый холловский ток), не наложено никакого условия, то $\mathbf{j}_\perp = \frac{\sigma}{(\Omega_e \tau_e)^2} \cdot \mathbf{E}_\perp$. А если холловский ток запрещен, то в плазме возникает холловское электрическое поле, перпендикулярное внешнему полю, и вследствие этого восстанавливается нормальная проводимость $\mathbf{j}_\perp = \sigma \mathbf{E}_\perp$. Поскольку неоднородность проводимости плазмы затрудняет протекание холловского тока, то даже малая неоднородность сильно «замагниченной» плазмы может заметно повлиять на ток вдоль \mathbf{E} . Этот эффект был указан в работе Йошикавы и Роуза [111].

Рассмотрим сначала простейший случай высокочастотных колебаний, когда ионы можно считать покоящимися. Для простоты положим $\sigma/n = \text{const}$, так что колебания проводимости определяются колебаниями плотности (именно такая ситуация имеет место в слабоионизованной плазме). Тогда уравнения для флуктуаций n' , \mathbf{E}' , \mathbf{j}' и средних величин n , \mathbf{E} , \mathbf{j} запишутся в виде:

$$T_e \nabla n' = -en' \mathbf{E} - en \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{j}' \mathbf{H}] + \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}', \quad (\text{IV. 150})$$

$$T_e \nabla n = -en \mathbf{E} - e \langle n' \mathbf{E}' \rangle + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}] + \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}. \quad (\text{IV. 151})$$

Из уравнения (IV. 150) находим:

$$\mathbf{j}'_\perp = \frac{c}{H^2} [\mathbf{H}, T_e \nabla n' + en' \mathbf{E} - en \nabla \Phi'] + \frac{c^2 en}{H^2 \sigma} (T_e \nabla n' + en' \mathbf{E} - en \nabla \Phi'), \quad (\text{IV. 152})$$

где $\nabla \Phi' = -\mathbf{E}'$.

Переходя к Фурье-представлению (в предположении $\kappa \ll k_\perp$) и используя условие $\text{div } \mathbf{j}' = 0$, получим связь между возмущениями потенциала электрического поля Φ_k и плотности n_k :

$$e \Phi_k (k^2 + \Omega_e^2 \tau_e^2 k_z^2 - i \kappa k_y \Omega_e \tau_e) = (T_e k^2 + T_e k_z^2 \Omega_e^2 \tau_e^2 - i k_z E_z e \Omega_e^2 \tau_e^2 - i k_y E_x e \Omega_e \tau_e) \frac{n_k}{n} \quad (\text{IV. 153})$$

(мы предполагаем, что $E_y = 0$). Подставляя найденное значение для Φ_k в усредненное уравнение (IV. 151), мы получим для дополнительного тока $\delta j_x = j_x - \frac{\sigma E_x}{\Omega_e^2 \tau_e^2}$ при $\Omega_e \tau_e \gg 1$:

$$\begin{aligned} \delta j_x &= -\frac{ec}{H} \langle n' E'_y \rangle = \\ &= \sigma \int \left\{ E_x + \Omega_e \tau_e \frac{k_z}{k_y} E_z + \frac{T_e}{en} \frac{dn}{dx} \right\} \frac{k_y^2 (k^2 + \Omega_e^2 \tau_e^2 k_z^2) N_k n^{-2}}{(k^2 + \Omega_e^2 \tau_e^2 k_z^2)^2 + \kappa^2 k_y^2 \Omega_e^2 \tau_e^2} dk, \end{aligned} \quad (\text{IV. 154})$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \delta j_z &= \frac{\sigma}{n} \langle n' E_z' \rangle = \\ &= -\sigma \int \left\{ E_x + \Omega_e \tau_e \frac{k_z}{k_y} E_z + \frac{T_e}{en} \frac{dn}{dx} \right\} \frac{k_z k_y \Omega_e \tau_e (k^2 + \Omega_e^2 \tau_e^2 k_z^2) N_k n^{-2}}{(k^2 + \Omega_e^2 \tau_e^2 k^2)^2 + \kappa^2 k_y^2 \Omega_e^2 \tau_e^2} dk. \end{aligned} \quad (\text{IV. 155})$$

При малой средней неоднородности, когда $\kappa \Omega_e \tau_e \ll k$, в знаменателях подынтегральных выражений можно пренебречь последним слагаемым и выражения для дополнительного тока несколько упростятся. Если, кроме того, предположить, что спектральная функция плотности N_k является изотропной, то в приведенных выражениях можно провести интегрирование по углам, и тогда получим более простые выражения

$$\delta j_x = \frac{\pi \gamma}{4} \frac{\sigma}{\Omega_e \tau_e} \left(E_x + \frac{T_e}{e} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right), \quad \delta j_z = -\gamma \sigma E_z, \quad (\text{IV. 156})$$

где $\gamma = \int N_k n^{-2} dk \lesssim 1$.

Как мы видим, при таких колебаниях поперечный ток возрастает почти в $\Omega_e \tau_e$ раз. В случае неизотропных колебаний эффект может быть значительно больше. Например, при наличии сильно вытянутых вдоль магнитного поля возмущений, когда $k_z \sim \sim k \Omega_e^{-1} \tau_e^{-1}$, поперечная проводимость может достигать значений порядка σ . Эффект увеличения поперечной проводимости был экспериментально продемонстрирован в работе [111].

Влияние неоднородности на продольную проводимость значительно меньше: эффективная проводимость лишь несколько уменьшается по сравнению со средним значением. Кроме того, при наличии зависимости спектральной функции N_k от направления волнового вектора появляется эффект возбуждения продольного тока поперечным электрическим полем. Этот эффект описывается вторым слагаемым в фигурных скобках в выражении (IV. 155). Как мы видим, он имеет место только при наличии выделенного наклона у возмущений по отношению к направлению магнитного поля, когда $\langle k_z/k_y \rangle \neq 0$. При этом согласно выражению (IV. 154) продольное поле E_z возбуждает поперечный ток. Последний эффект вполне аналогичен появлению усредненного потока частиц в турбулентном положительном столбе, где средний дрейф возникает за счет продольного электрического поля.

Приведенные результаты относятся к случаю высокочастотных колебаний ($\omega \gg \Omega_i$), когда ионы покоятся. При низкочастотных колебаниях эффект может быть значительно меньше. При этом в уравнениях движения для электронов и ионов следует учесть возмущение скорости ионов v' , и они примут вид

$$T_e \nabla n = -en\mathbf{E} - e \langle n' E' \rangle - \frac{e}{c} \langle n' [\mathbf{v}', \mathbf{H}] \rangle + \frac{1}{c} [j\mathbf{H}] + \frac{en}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (\text{IV. 157})$$

$$T_e \nabla n' = -en'E - enE' - \frac{e}{c} n [\mathbf{v}'\mathbf{H}] + \frac{1}{c} [j'\mathbf{H}] + \frac{en}{\sigma} j', \quad (\text{IV. 158})$$

$$0 = enE + e \langle n'E' \rangle + \frac{e}{c} \langle n' [\mathbf{v}'\mathbf{H}] \rangle - \frac{en}{\sigma} j, \quad (\text{IV. 159})$$

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = enE' + en'E + \frac{e}{c} n [\mathbf{v}'\mathbf{H}'] - \frac{en}{\sigma} j'. \quad (\text{IV. 160})$$

Определим j_{\perp} из суммы уравнений (IV. 158) и (IV. 160) и используем затем условие $\text{div } \mathbf{j} = 0$ совместно с продольной компонентой уравнения (IV. 158), мы получим:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{j}'_{\perp} &= -i \frac{c}{H} \frac{\omega}{\Omega_i} (en k^2 \varphi_k + ien k - k_x E_x) = \\ &= \frac{\sigma}{en} (k_z^2 T_e n_k - nek_z^2 \varphi_k - ik_z e E_z n_k). \end{aligned} \quad (\text{IV. 161})$$

Выражая отсюда φ_k через n_k и используя линеаризованное ионное уравнение (IV. 160), нетрудно найти дополнительную «силу трения» $F_y = \langle en'E'_y \rangle + \frac{e}{c} H \langle n' v'_x \rangle$, а затем и дополнительный поперечный ток $\delta j_x = \frac{c}{H} F_y$:

$$\delta j_x = \sigma \int \frac{(k_x^2 k_z^2 E_x - k_x k_z k^2 E_z) \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} N_k}{(\Omega_e \tau_e)^2 k_z^4 + \omega^2 k^4 / \Omega_i^2} \frac{N_k}{n^2} dk \quad (\text{IV. 162})$$

(мы предполагаем, что частота ω является действительной).

Для изотропных колебаний отсюда находим $\delta j_x = \gamma \sigma E_x \times \left(\frac{\omega}{\Omega_i \Omega_e \tau_e} \right)^{3/2}$, что значительно меньше найденного выше значения для высокочастотных колебаний. Нетрудно видеть, что и вытянутые вдоль магнитного поля возмущения не приводят к сильному изменению проводимости. В то же самое время колебания такого вида могут приводить к значительному совместному потоку заряженных частиц $q_x = \langle v'_x n' \rangle \approx \frac{c}{H} \langle E'_y n' \rangle$, т. е. к турбулентной диффузии. Условие малости δj_x и F_y как раз и показывает, что величина диффузионного потока определяется электрическим дрейфом, т. е. $v'_x \approx \frac{cE'_y}{H}$.

С помощью соотношения (IV. 161) нетрудно определить величину изменения продольного тока за счет неоднородности проводимости плазмы, а именно:

$$\delta j_z = -\sigma \int \frac{\Omega_e^2 \tau_e^2 k_z^4 E_z + \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} k^2 k_x k_z E_x}{\Omega_e^2 \tau_e^2 k_z^4 + \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} k^4} \cdot \frac{N_k}{n^2} dk. \quad (\text{IV. 163})$$

Отсюда видно, что влияние флуктуаций проводимости на продольный ток по-прежнему является малым.

§ 5. Турбулентная плазма в экспериментальных условиях

В плазменных экспериментах с явлениями турбулентности приходится сталкиваться буквально на каждом шагу, и к настоящему времени накоплены весьма обширные экспериментальные данные, в которых в той или иной мере проявляются эффекты турбулентного движения. К сожалению, сами эти процессы с должной степенью подробности пока не изучены, и о наличии турбулентного движения, как правило, приходится судить по его макроскопическим проявлениям. Ясно, что изучение одних лишь макроскопических, т. е. усредненных характеристик турбулентного движения без исследования спектра и амплитуды колебаний не позволяет однозначно определить, какой именно тип турбулентного движения ответственен за данное макроскопическое явление. Поэтому на современной стадии исследования коллективных процессов в плазме не представляется возможным провести полное сопоставление теории с экспериментом, и мы ограничимся здесь лишь краткой сводкой основных экспериментальных данных по турбулентным явлениям в плазме.

Аномальная диффузия

Первые же эксперименты с электрическими дугами в магнитном поле [5] показали, что в плазме при наличии сильного магнитного поля легко возбуждаются шумы довольно большой амплитуды, которые заметно увеличивают эффективный коэффициент диффузии. Д. Бом, анализировавший результаты этих экспериментов, пришел к выводу, что коэффициент диффузии убывает всего лишь как H^{-1} , а по классической теории он должен убывать как H^{-2} . Позднее Саймон показал [112, 113], что эксперименты, на которые опирался Бом, допускают гораздо более простую интерпретацию, вполне согласующуюся с классическим коэффициентом диффузии, если учесть так называемый эффект «закорачивания» электронного и ионного токов через металлические электроды. Однако это объяснение не сняло вопроса об аномальной диффузии, так как последующие эксперименты обнаружили эффект усиления диффузии в самых различных условиях.

К настоящему времени наибольший прогресс в понимании причин и характера аномальной диффузии плазмы поперек магнитного поля достигнут для положительного столба тлеющего разряда. Первые измерения характеристик положительного столба в магнитном поле, выполненные Г. Н. Рохлиным [116], Каммингом и Тонксом [117], Э. М. Рейхруделем и С. Спиваком [118] и Биккертоном и Энгелем [119] показали, что при малых магнитных полях диффузия является классической. К тому же выводу пришел А. В. Недоспасов [120], измеряя длину катодной области дугового разряда, и И. А. Васильева и В. Л. Грановский [121], которые непосредственно измеряли диффузионный поток на стенки разрядной трубки. Однако, распространив эксперименты на

область больших значений магнитного поля, Ленерт [30] неожиданно обнаружил, что начиная с некоторого критического значения магнитного поля H_c поперечный диффузионный поток начинает нарастать с увеличением магнитного поля, достигая затем некоторого насыщения. Более подробно этот эффект был исследован в работе Ленерта и Хоу [31], а затем в работах [33, 34, 122—128]. Теоретически он был объяснен в работе Б. Б. Кадомцева и А. В. Недоспасова [32] на основе механизма токово-конвективной неустойчивости. Как уже отмечалось выше (см. гл. I, § 2), эта неустойчивость проявляется в том, что при $H > H_c$ плазменный шнур теряет цилиндрическую симметрию, и разряд становится винтовым. При дальнейшем увеличении магнитного поля винтовой разряд, в свою очередь, становится неустойчивым, и в плазме развивается турбулентное движение, которое было рассмотрено нами в гл. IV, § 4. Результаты этого рассмотрения, основанного на диффузионных представлениях, находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, относящимися к тлеющим разрядам при давлении порядка 10^{-1} — 1 мм рт. ст.

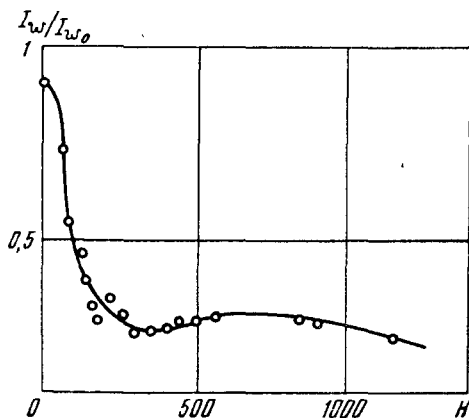


Рис. 27. Зависимость ионного тока на стеночный зонд от магнитного поля в ртутном разряде при давлении $p = 3,6 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.

При меньших значениях давления нейтрального газа, когда длина пробега заряженных частиц становится порядка радиуса трубки, диффузионное приближение непригодно. Согласно теоретическим представлениям при этом в игру должны вступать неустойчивости дрейфового типа. Этот вывод подтверждается экспериментально. На рис. 27 представлена, например, зависимость ионного тока I_w на стеночный зонд от магнитного поля в ртутном разряде при низком давлении ($p = 3,6 \cdot 10^{-4}$ мм рт. ст.), измеренная Л. Л. Арцимович, А. В. Недоспасовым и С. С. Соболевым. Значение критического магнитного поля, при котором зависимость $I_w(H)$ отклоняется от закона H^{-2} , удовлетворительно согласуется с теоретическим условием возникновения ионно-звуковой неустойчивости (IV. 88). С ионно-звуковым механизмом раскачки колебаний согласуется и тот факт, что ионный ток в турбулентном разряде ($H \gg H_c$) имеет порядок величины тока в отсутствие магнитного поля.

Усиление диффузионного потока при увеличении магнитного поля выше некоторого критического значения было обнаружено

также в разряде Пеннинга (разряд с осциллирующими электронами), где продольный ток отсутствует [130—132]. При этом наряду с низкочастотными колебаниями обнаруживаются шумы на частотах порядка 10^9 гц, которые, очевидно, непосредственно не связаны с усиленной диффузией ионов. В работе Чена и Купера [133] с помощью двух зондов, расположенных на одной силовой линии магнитного поля, было показано, что продольная фазовая, скорость колебаний, развивающихся в турбулентной плазме, имеет порядок величины 10^7 см/сек, что значительно

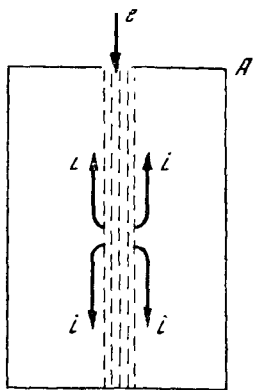


Рис. 28. Диффузия ионов в дуговом разряде.

больше скорости звука $c_s \sim 10^6$ см/сек. Частота соответствующих колебаний порядка 10^7 гц, амплитуда колебаний плотности до 50%. Судя по всем этим данным, рассматриваемые колебания можно отнести к дрейфовым, а соответствующую неустойчивость к дрейфово-диссипативной. Кроме того, как было отмечено Саймоном [134] и Хоу [135], в разряде Пеннинга имеется дополнительная причина неустойчивости дрейфового типа, связанная с небольшой разницей в скоростях дрейфа электронов и ионов в поперечном электрическом поле (аналогичный эффект в случае положительного столба оказывает стабилизирующее действие [93]).

К рассматриваемой группе работ примыкает экспериментальная работа Желе [136], где изучалась диффузия плазмы в высокочастотном разряде. Желе также обнаружил эффект возрастания диффузии при $H > H_c$. При этом возбуждались колебания в радиочастотном диапазоне. Согласно Желе величина критического магнитного поля обратно пропорциональна радиусу трубки a . Соответствующие значения критического поля представлены на рис. 23. Как мы видим, они попадают в область ионно-звуковой неустойчивости.

Как мы уже упоминали выше, одни из первых экспериментов по диффузии плазмы в магнитном поле были проведены Бомом, Баропом и др. [5] в процессе изучения ионных источников. В этих экспериментах плазма создавалась в проводящей анодной камере A (рис. 28) пучком первичных электронов с энергией около 200 эв, который ионизовал нейтральный газ при давлении порядка 10^{-4} — 10^{-2} мм рт. ст. Образованная таким образом плазма медленно диффундировала поперек магнитного поля, одновременно растекаясь вдоль силовых линий и рекомбинируя на торцах камеры. По характерной длине спада плотности плазмы в радиальном направлении нетрудно определить коэффициент поперечной диффузии. Как показал Саймон [113], с учетом эффекта «закорачивания» электронного и ионного токов проводящей камерой эта длина определяется ионным коэффициентом

диффузии, который на два порядка больше электронного. С учетом этого эффекта результаты измерения длины спада плотности удовлетворительно объясняются на основе классических (ламинарных) представлений. Что касается электронного коэффициента диффузии, то его величину нельзя оценить на основе одних лишь измерений распределения плотности по радиусу. Обнаруженный в работе [5] повышенный электронный ток на положительно заряженный зонд свидетельствует в пользу усиленной диффузии электронов, которая, вероятно, связана с наличием колебаний с частотой порядка 20—60 кГц, обнаруживаемых экспериментально. Последующие эксперименты с дугами показали, что диффузия плазмы в рассматриваемых условиях может заметно превышать классическую. Например, в работе Найдая и Уивера [137] было обнаружено, что при некоторых условиях дуга может переходить в режим, названный ими «модой 2», когда из нее выбрасывается вращающийся факел. Авторы этой работы полагали, что появление факела связано с неоднородностью давления нейтрального газа по длине разряда. Однако эксперименты Жаринова [138—140] показали, что образование одного или нескольких факелов возможно и при однородном давлении в камере. (С другой стороны, в эксперименте Боэшотена и Швирцке [141] в сходных условиях имела место классическая диффузия.)

Эксперименты с дугами весьма трудны для теоретического рассмотрения ввиду усложняющих анализ процессов на торцах. Саймон и Герст [142] указали, что с учетом продольного ионного тока на торцы в таком разряде может развиваться спиральная (токово-конвективная) неустойчивость. Соответствующее этому механизму критическое магнитное поле удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Однако, скорее всего, это лишь одна из причин неустойчивости плазмы, быть может, далеко не первостепенная, хотя вряд ли имеются основания сомневаться, что за неустойчивость ответственны именно подобного рода эффекты, которые были рассмотрены, в частности в гл. IV, § 3.

Перейдем к рассмотрению работ, в которых изучался распад слабоионизованной плазмы. Если исключить из рассмотрения упоминавшуюся нами ранее работу Бостика и Левина [28], в которой существенную роль играла неоднородность (тороидальность) магнитного поля, то в данную группу следует отнести работы [143—149]. В этих работах изучалась диффузия плазмы с концентрацией заряженных частиц порядка 10^7 — 10^{10} см⁻³. При не очень большой величине магнитного поля результаты измерения диффузионной утечки частиц согласуются, или, по крайней мере, не противоречат классической диффузии. Однако при больших значениях магнитного поля Голант и Жилинский обнаружили повышенную диффузию. Согласно их данным [115], при магнитных полях выше 300 э коэффициент диффузии заряженных частиц в гелии с точностью до 30—40% может быть

аппроксимирован эмпирической формулой

$$D_{\perp} = 6 + \frac{(0,4 + p)}{H^2} 10^8 \quad (\text{IV. 164})$$

(D_{\perp} — в $\text{см}^2/\text{сек}$, H — в э, p — в мм рт. ст.).

Здесь только одно из слагаемых приблизительно соответствует классическому значению $D_c \cong 10^8 p/H^2$. Что касается первого слагаемого в выражении (IV. 164), не зависящего от H , то оно может быть связано с объемными процессами устранения (объемная рекомбинация, захват электронов примесями с последующей рекомбинацией и т. д.). Наряду с этим, согласно выражению (IV. 164), имеется некоторый дополнительный механизм диффузии, не связанный непосредственно с электрон-атомными столкновениями и зависящий от магнитного поля. Поскольку рассматриваемые эксперименты проводились при значениях H и p , близких к теоретически предсказываемой области дрейфово-диссипативной неустойчивости рис. 23, то можно думать, что данная аномалия также связана с неустойчивостью дрейфового происхождения.

В ряде экспериментальных работ изучалась диффузия полностью ионизованной плазмы. Наиболее полные данные по диффузии были получены на установках стелларатор В-1 и В-3. Вопреки ожиданиям Эллис, Гольдберг и Горман [150] обнаружили, что утечка полностью ионизованной плазмы из стелларатора на три-четыре порядка превышает классическую, т. е. обусловленную электрон-ионными столкновениями. Включение дополнительных винтовых обмоток, которые должны стабилизировать гидромагнитную неустойчивость идеальной плазмы, существенно не повлияло на время жизни плазмы, что указывало на существование неизвестного в то время механизма неустойчивости. Более тщательные исследования Стодика, Эллиса и Гормана [151] показали, что как в стадии ионизации, так и в стадии распада плазмы утечка заряженных частиц согласуется с коэффициентом диффузии Бома, а именно, эмпирические значения коэффициента диффузии могут быть описаны формулой

$$D_{\perp} \cong 2 \cdot 10^4 \frac{T_e}{H}, \quad (\text{IV. 165})$$

где температура электронов выражена в эв, а магнитное поле — в кэ.

Чтобы проверить, не может ли утечка плазмы быть связанной с ионно-звуковой неустойчивостью [79, 152], Мотли [153] изучал распад холодной плазмы в стеллараторе В-1. В отсутствие продольного тока распад плазмы определялся объемной рекомбинацией электронов и ионов, причем время распада составляло около 2 мсек. Однако при наложении дополнительного электрического поля (с частотой 20 кГц и амплитудой 0,01—0,03 в/см), когда в плазме возбуждался продольный ток достаточно большой величины, скорость распада резко возросла. Величина про-

дольной (токовой) скорости электронов, соответствующая критическому значению тока оказалась порядка звуковой, т. е. скорости ионов при электронной температуре. При малых значениях ионной температуры этот результат, казалось бы, соответствует ионно-звуковой неустойчивости [79, 80]. Однако эксперимент приводил к тем же значениям критической скорости и в том случае, когда температура электронов была порядка ионной, т. е. ионный звук не мог распространяться из-за сильного затухания на ионах. Все эти факты качественно согласуются с теоретическими представлениями, основанными на дрейфовой неустойчивости (см. гл. IV, § 4). Однако о полном согласии теории с экспериментом говорить преждевременно, поскольку, с одной стороны, теория турбулентной диффузии находится на самой начальной стадии своего развития, а с другой — пока еще нет полной ясности в том, какую роль в экспериментально измеряемой утечке плазмы играют небольшие нарушения равновесия плазменного шнура (см. ниже).

Полученные на стеллараторе результаты, согласно которым диффузия бестоковой плазмы оказывается сравнительно спокойной, подтверждается и другими экспериментами с полностью ионизованной плазмой. Так Д' Анжело и Ринн [154, 157] показали, что коэффициент диффузии калиевой и цезиевой плазмы в магнитном поле согласуется с классическим вплоть до 10 тыс. эрст. Если учесть, что соответствующий данному случаю теоретический коэффициент диффузии (IV. 139) не более, чем на порядок, превышает классический, то учитывая грубость теоретической оценки, можно считать, что теория не противоречит эксперименту. Интересно отметить, что в установке с цезиевой и калиевой плазмой были обнаружены самопроизвольно возбуждающиеся дрейфовые волны [156, 157]. Авторы связывают возбуждение волн с существованием ионных слоев на торцах установки.

Голант и Жилинский [146, 158] также установили, что диффузия плазмы (распадающейся) при концентрации заряженных частиц порядка $10^{10}—10^{12} \text{ см}^{-3}$, когда преобладающую роль играют электрон-ионные столкновения, хорошо согласуется с классическим коэффициентом диффузии при значениях магнитного поля до 1500 э.

Таким образом, совокупность перечисленных выше экспериментов (мы не имели возможности рассмотреть абсолютно все эксперименты по диффузии) показывает, что даже в однородном магнитном поле в отсутствие внешних пучков коэффициент диффузии как слабоионизованной, так и полностью ионизованной плазмы может значительно превышать классический, обусловленный парными столкновениями. При наличии продольного тока эффективный коэффициент диффузии значительно выше, чем в бестоковой плазме. В слабоионизованной плазме тлеющего разряда он имеет порядок величины коэффициента диффузии без

магнитного поля, а в полностью ионизованной плазме он близок к бомовскому. В отсутствие продольного тока коэффициент диффузии значительно меньше: в полностью ионизованной плазме при умеренных магнитных полях он порядка классического, а в слабоионизованной плазме может быть заметно больше классического значения.

Все эти результаты либо удовлетворительно согласуются с грубой теорией (см. гл. IV, § 4), либо, по крайней мере, не находятся с ней в существенном противоречии. Разумеется, чтобы достигнуть полного согласия между теорией и экспериментом, предстоит провести большой круг исследований, как теоретических, которые позволили бы вычислять, а не оценивать эффективный коэффициент диффузии, так и экспериментальных, которые позволили бы выявить в чистом виде механизм утечки частиц.

Турбулентный нагрев

Под турбулентным нагревом плазмы — термином с четко выраженным прикладным оттенком мы будем подразумевать передачу упорядоченной энергии, будь то энергия пучков заряженных частиц или энергия дискретных колебаний, в энергию хаотического движения и, в конечном счете, в тепло за счет турбулентности, т. е. нелинейного взаимодействия между колебаниями. Возможность турбулентного нагрева плазмы, т. е. быстрой передачи энергии в тепло за счет коллективных процессов в плазме, была качественно предсказана Бунеманом [159], который рассмотрел задачу о возбуждении колебаний в плазме за счет пучковой неустойчивости в условиях, когда все электроны движутся относительно ионов. Такое состояние может быть достигнуто, например, при помощи внешнего сильного электрического поля, которое должно приводить к «убеганию» электронов, т. е. к ускорению всех электронов. Бунеман численным расчетом показал, что развитие колебаний сопровождается рассеянием электронов на неоднородностях электрического потенциала и превращением направленного движения электронов в хаотическое.

Процесс максвеллизации функции распределения электронов за счет коллективного взаимодействия был прослежен численно Даусоном [160] на одномерной модели, в которой каждой заряженной частице соответствует заряженная плоскость. На рис. 29 представлена полученная им картина максвеллизации двух встречных электронных пучков (число слоев $N = 1000$, безразмерное время выбрано таким образом, что $\omega_0 = 1$).

В работах Шапиро [161, 162] начальная стадия хаотизации направленной скорости электронов изучалась с помощью уравнений моментов, полученных интегрированием по скорости кинетического уравнения, предварительно умноженного на $1, v, v^2$. Шапиро показал, что в случае, когда плотность электронов пучка значительно меньше плотности плазмы, вслед за сравнительно

короткой стадией размытия пучка по скорости наступает более продолжительная основная стадия торможения, когда применимо квазилинейное приближение. При этом взаимодействие пучка с колебаниями приводит к образованию плато на функции распределения. На образование плато затрачивается одна треть энергии пучка, которая распределяется поровну между кинетической и электростатической энергией колебаний.

Экспериментальные данные по взаимодействию пучков с плазмой накапливались в течение многих лет. Явление коллективного взаимодействия пучка электронов с плазмой было обнаружено

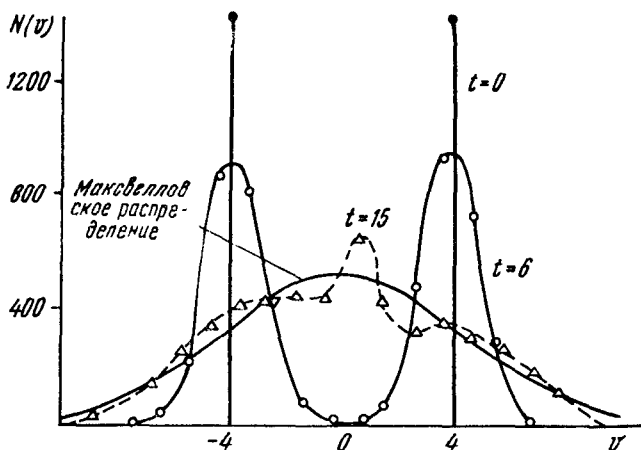


Рис. 29. Максвеллизация двух встречных пучков (одномерная модель).

Ленгмюром [1]. Связанная с этим явлением аномально быстрая максвеллизация электронов получила специальное название — «парадокс Ленгмюра». Более детально взаимодействие пучка с плазмой изучалось Меррилом и Уэббом [3]. С помощью зондовых измерений они показали, что при прохождении пучка в плазме возникают локализованные в пространстве области сильного рассеяния. Этот эффект был интерпретирован в работе Бома и Гросса [163] как результат модуляции электронного пучка колеблющимся во времени потенциалом двойного слоя на границе плазмы. Затем, как это имеет место в обычных клистронах, начальное возмущение плотности возрастает за счет того, что ускоренные электроны догоняют замедленные, и в некоторой точке пространства электростатическое взаимодействие электронов приводит к их разбросу. Рассеянные электроны, которые при прохождении двойного слоя на границе слегка изменяют потенциал двойного слоя, могут осуществлять обратную связь между колебаниями на входе и в области сильного рассеяния. Кроме того, колебания двойного слоя могут приводить к передаче энергии электронам плазмы, способствуя их максвеллизации.

Колебания потенциала двойного слоя большой амплитуды с частотой порядка плазменной экспериментально наблюдались Габором [164], что казалось бы свидетельствует в пользу описанного механизма возбуждения колебаний. Однако в работе Гирке и др. [165], где был повторен эксперимент Габора, никаких колебаний, кроме слабых низкочастотных, обнаружено не было. Последний результат говорит, скорее, в пользу второго возможного механизма взаимодействия частиц с колебаниями, а именно, квазилинейного нарастания волн в пространстве за счет неустойчивости с одновременным формированием плато на электронной

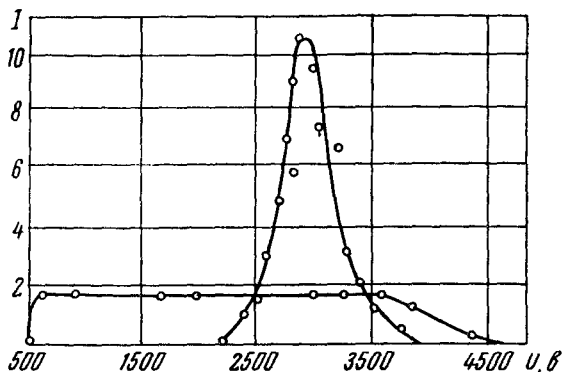


Рис. 30. Образование плато на функции распределения.

функции распределения. Образование такого плато было продемонстрировано, например, в работе [166]. Однако в этой же работе приводятся аргументы в пользу клистронного механизма развития колебаний. Все это приводит к выводу, что в действительности могут действовать как первый, так и второй механизмы неустойчивости, причем взаимодействие электронов с волнами при малой плотности электронов в пучке удовлетворительно описывается квазилинейным приближением.

Квазилинейный эффект образования плато на функции распределения электронов демонстрируется на рис. 30, где представлена функция распределения электронов до и после взаимодействия с плазмой, измеренная экспериментально в работе [167] (см. также [168]). Эффект разогрева электронов плазмы при взаимодействии с пучком был продемонстрирован в работе [170].

В реальных условиях ограниченной неоднородной плазмы картина колебаний может быть гораздо более сложной, чем обычно принимаемая при теоретическом рассмотрении. В частности, при наличии у плазменной системы широко разнесенных резонансных частот может иметь место сильное возбуждение отдельных гармоник. Такого рода эффекты наблюдались экспериментально Луни и Брауном [4] при исследовании высокочастотных плазменных

колебаний и Алексеевым и Найдаем [169], изучавшим возбуждение ионно-звуковых колебаний. По этой причине реальная картина возбуждения волн мощными пучками и взаимодействия волн с частицами и между собой может оказаться весьма сложной, требующей для полного описания дальнейшего развития теории.

К рассматриваемой в данном пункте группе явлений относится возбуждение ионного звука протекающим по плазме током. Эффект возбуждения ионно-звуковых колебаний наблюдался Недоспасовым [171] в гелиевом разряде при достаточно низком давлении нейтрального газа. При этом как порядок величины амплитуды установившихся колебаний (порядка 10^{-3} в), так и спектр колебаний, в котором максимум приходился на область очень низких частот ($\omega \ll \Omega_0$) удовлетворительно согласуются с теоретическими представлениями (см. гл. IV, § 2). Возбуждение ионно-звуковых колебаний наблюдалось также Крауфордом [172], изучавшим шумы ртутного разряда. Крауфорд обнаружил, что при увеличении разрядного тока сначала появлялись отдельные колебания с дискретными частотами, которые затем сливались в сплошной спектр в области частот порядка 10^4 — 10^6 гц, Фазовая скорость этих колебаний вдоль трубки составляла 10^7 — 10^9 см/сек. Автор работы интерпретирует их как ионно-звуковые волны, распространяющиеся почти поперек разряда. Возбуждение именно таких волн также согласуется с теоретической картиной, показанной в гл. IV, § 2. Как было показано Крауфордом с помощью дополнительных сеток, источником шумов являлся катод (аналогичный эффект имел место и в работе [171]), однако картина развитых колебаний, вероятно, не очень чувствительна к виду источника флуктуаций, и поэтому сравнение рассматриваемых колебаний с теоретическим спектром вполне оправдано.

Близкий по физической природе эффект возбуждения ионных циклотронных колебаний продольным электрическим током наблюдался в работе [155]. Возбуждением ионных колебаний объясняется, по-видимому, и аномальный нагрев ионов на установке Зета (см. ниже). Как было показано в гл. IV, § 2, нагрев ионов может быть связан с усиленным («аномальным») сопротивлением плазмы, которое возникает благодаря появлению дополнительной силы трения между электронами и ионами через колебания. Наличие «аномального» сопротивления наблюдалось на Зете, а также было продемонстрировано в эксперименте Томассена [174], специально поставленном для этой цели. Аналогичного рода эффект был обнаружен Адламом и Холмсом [175] при исследовании динамики сверхбыстрого пинча. Последние авторы установили, что при очень быстром ($t \sim 10^{-8}$ сек) нарастании тока толщина скин-слоя не зависит от времени и на полтора порядка превышает величину c/ω_0 . Этот результат можно интерпретировать либо как результат значительного уменьшения эффективной плотности участвующих в переносе электрического тока электронов (такая ситуация могла бы иметь место при «захвате» основной

части электронов потенциальными ямами ϕ , сцепленными с ионами), либо как следствие невозможности превышения направленной скорости над некоторой малой долей от тепловой скорости. Вторая возможность могла бы осуществиться при ионно-звуковой неустойчивости. Адлам и Холмс придерживаются второй точки зрения. Однако то обстоятельство, что все явление разыгрывается за очень малый промежуток времени, явно недостаточный для развития ионно-звуковой неустойчивости, говорит в пользу чисто электронных колебаний, которые могут быть сцеплены с ионными возмущениями, существовавшими в плазме до приложения импульса продольного электрического поля. При этом только малая «надбарьерная» часть электронов имеет возможность переносить ток. Разумеется, что для полного исследования этого весьма интересного вопроса требуются дополнительные исследования, как теоретические, так и экспериментальные.

В еще более ярко выраженной форме эффект «аномального» сопротивления проявляется в так называемом эффекте «сброса» тока на последней стадии тороидального разряда (см. ниже). С аналогичным эффектом связаны захват и ускорение ионов мощными электронными пучками, которые были обнаружены экспериментально Плюто [176]. Достаточно полная теория явлений подобного рода, связанных, вероятно, с сильной турбулентностью электронного газа, пока еще не развита.

Рассмотрим работы, в которых турбулентные процессы были использованы для нагрева плазмы. Об одной из них [170] мы упоминали выше. Приятной неожиданностью оказался аномальный нагрев ионов в установке «Зета» [192]. Надо думать, что циклотронный нагрев электронов, изучавшийся в работе [177], также не обходится без возбуждения большого числа степеней свободы. Турбулентный нагрев ионов в поперечном электрическом поле имел место и в эксперименте М. С. Иоффе и др. [178], где наряду с нагревом за счет центробежной неустойчивости вращающейся плазмы мог иметь место нагрев за счет пучковой неустойчивости плазменного шнура, пронизываемого выходящим из катода электронным пучком. Последняя неустойчивость и соответствующий нагрев ионов был исследован М. В. Незлиным [179]. Он обнаружил, что при достаточно большой плотности тока в пучке, когда направленный ток составляет примерно одну шестую часть от хаотического тока $en v_e$, происходит периодическое запираание пучка. Связанные с этим запиранием флуктуации электрического поля приводят к интенсивному нагреву ионов. Обнаруженное Незлиным явление не имеет пока теоретической интерпретации. С одной стороны, его можно было бы рассматривать как результат развития двухпучковой ион-электронной неустойчивости в некоторой области, где мгновенная плотность оказалась бы достаточно малой за счет ионных колебаний (последние могут возбуждаться ленгмюровскими колебаниями электронного пучка [180]). Но с другой стороны, данное явление весьма сходно

с электростатическим запираем скомпенсированного электронного пучка [181], [182].

Эффект турбулентного нагрева при колебаниях типа магнитного звука был исследован в работах Е. К. Завойского и др. [183—187]. В данных экспериментах нагрев осуществлялся посредством кратковременного наложения на основное продольное магнитное поле $H_z \sim 1000$ э высокочастотного поля с частотой $f \sim 10^7$ гц и амплитудой $\tilde{H} \sim 500$ э. В результате турбулентного нагрева температура электронов повышалась до величины порядка 500 эв, а при определенных условиях имел место нагрев ионов до температуры порядка 100 эв. Авторы интерпретируют нагрев плазмы как результат развития двухпучковой электрон-ионной неустойчивости. Некоторую роль мог играть и процесс распада магнитозвуковых колебаний (ср. с гл. II, § 1).

Упомянутые работы показывают, что использование коллективных процессов в плазме для ее нагрева является весьма перспективным и многообещающим.

Тороидальные разряды

Целый ряд турбулентных процессов был обнаружен в экспериментах с высокотемпературной плазмой на тороидальных установках. Как мы уже упоминали выше, на стеллараторе в виде восьмерки была обнаружена аномально быстрая утечка плазмы — так называемый эффект откачки (*jump out*). Детальное исследование этого явления [151] показало, что аномальная диффузия связана с продольным током, а эффективный коэффициент диффузии — порядка бомовского. Эти результаты качественно согласуются с теоретическими предсказаниями, основанными на механизме дрейфовой неустойчивости (см. гл. IV, § 4). Однако последующие эксперименты, выполненные на стеллараторе С [188, 189], показали, что это утечка плазмы может быть связана с малым нарушением условия равновесия плазменного шнура вследствие неточности в магнитном поле. При очень малом нарушении условий равновесия плазменный шнур может продолжать сохранять равновесие за счет протекания небольших дрейфовых токов, замыкающихся через диафрагму, которая ограничивает плазменный шнур. Максимально возможная величина поперечного дрейфового тока определяется величиной утечки плазмы. При идеальном равновесии эта утечка симметрична по малому азимуту. При нарушении равновесия на одну из половин диафрагмы начинает идти преимущественно ионный, а на другую — электронный токи, разность которых как раз и дает необходимый для поддержания равновесия поперечный ток j_{\perp} . При достаточно сильном нарушении условий равновесия (такое нарушение имеет место при добавлении поперечной компоненты магнитного поля порядка десятых долей процента от продольного поля), равновесный ток утечки уже не может удержать плазменный шнур, и он начинает

смещаться по большому радиусу, что приводит к дополнительной утечке плазмы. Таким образом, утечка частиц и отклонение от положения равновесия оказываются взаимно связанными. Так как в более ранних экспериментах [151] условия равновесия не контролировались, то часть из полученных ранее результатов может претерпеть в дальнейшем существенные изменения.

Эффект поперечного смещения шнура вследствие нарушения условий равновесия несколько ранее был обнаружен на установке «Токомак» [190]; при этом было показано, что для восстановления равновесия можно использовать дополнительные витки с током, создающие поперечное магнитное поле. Аналогичный прием был использован в работе [188].

Другой эффект турбулентной природы — «срыв» тока убегающих электронов в плазме послесвечения также был обнаружен на установке стелларатор. Драйсер указал [191], что это явление может быть связано с раскачкой ленгмюровских колебаний, возникающей вследствие появления «провала» на электронной функции распределения в области между тепловыми и ускоренными электронами. Провал образуется за счет более быстрого торможения медленных электронов. Однако такой механизм не объясняет факта появления не одной, а двух или нескольких ступенек на спадающем во времени токе.

Исключительное многообразие различных форм и проявлений турбулентного движения плазмы обнаруживается в разрядах с умеренным продольным током. Наиболее полное исследование этих процессов было выполнено на установке Зета [192—195]. Сюда относится прежде всего аномальный нагрев ионов, проявляющийся в том, что средняя энергия ионов в разряде оказывается в несколько раз выше температуры электронов. В работе [193] было показано, что средняя энергия ионов примесей может быть представлена в виде $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 + \frac{m_i}{m_D} \mathcal{E}_1$, где m_i — масса иона, m_D — масса дейтерона, а \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_1 — константы, причем $\mathcal{E}_0 \sim \sim 100 \text{ эв}$, $\mathcal{E}_1 \sim 2\text{—}3 \text{ эв}$. Отсюда можно сделать вывод, что ионы в основном термализованы и обладают температурой порядка 100 эв , и плюс к этому они совершают коллективные колебания с частотой, значительно меньшей циклотронной, так что их общая скорость $v_{\perp} = c\mathcal{E}/H$ не зависит от массы, а энергия линейно растет с увеличением массы.

Нагрев ионов может происходить либо за счет токовой неустойчивости (например, за счет возбуждения магнитного звука, рассмотренного в гл. IV, § 2), либо он является побочным эффектом при турбулентной конвекции, развивающейся вследствие желобковой или диссипативной неустойчивостей. В настоящее время детальный теоретический анализ этого вопроса отсутствует.

Тесно связано с аномальным нагревом обнаруженное на «Зете» избыточное сопротивление, которое согласно экспериментальным данным линейно возрастает с увеличением вкладываемого

мой в плазму энергии, приходящейся на одну частицу [194]. Дополнительное сопротивление оказывается порядка омического. Хотя эффекты подобного рода и обнаруживаются при теоретическом исследовании (см. гл. IV, § 2), полная теория дополнительного сопротивления пока не развита.

На Зете и других установках с умеренным продольным магнитным полем была установлена аномальная утечка частиц, связанная с сильными колебаниями электрического поля [195]. Эта утечка может быть связана как с конвективной (желобковой), так и с дрейфово-диссипативной неустойчивостями. Оценка по формуле (IV. 141) показывает, что в условиях, когда допустимы сильно вытянутые вдоль силовых линий возмущения, коэффициент диффузии в условиях «Зеты» может на два порядка превышать бомовский. Этого значения вполне достаточно для объяснения наблюдаемой утечки. Однако при уменьшении продольной длины волны коэффициент диффузии согласно выражению (IV. 143) довольно быстро убывает. Поэтому на периферии разряда, где эффективная длина возмущений вдоль силовых линий, имеющая порядок величины шага силовых линий, сравнительно невелика, на первый план должна выдвинуться конвективная неустойчивость, в линейном приближении исследованная Сайдемом [196]. Возможно, что именно игрой этих механизмов утечки объясняется эффект «магических чисел», обнаруженный вначале на «Зете» [195], а затем на установке меньших размеров [197]. Этот эффект состоит в длительном сохранении постоянного значения шага силовых линий на периферии разряда (укладывающегося целое число раз на длине обхода) со скачкообразным переходом от одного значения к другому при увеличении разрядного тока. Одно из естественных объяснений этого эффекта, высказанное Фюртом, состоит в допущении, что на магнитной поверхности с замкнутыми силовыми линиями, где продольная длина волны возмущений не может быть очень большой, основную роль в переносе плазмы играют конвективные возмущения. А так как при перестановке силовых трубок происходит выравнивание шага по радиусу, то область постоянного шага за счет конвекции должна разрастаться, и захватывать всю периферию разряда. В пользу существования такой конвекции свидетельствует эффект усиленной диффузии азимутального магнитного поля внутрь разряда на его начальной стадии [198].

Аномальная диффузия плазмы в разряде с умеренным магнитным полем приводит к бессиловой конфигурации [199, 200]. Эта конфигурация, включая малое винтовое извивание за счет винтовой неустойчивости, удовлетворительно описывается в рамках приближения продольной проводимости [201], в котором предполагается, что за счет поперечного конвекционного движения плазмы кажущаяся поперечная проводимость обращается в нуль. Однако это приближение не объясняет весьма интересного эффекта генерации обратного продольного магнитного потока

снаружи от плазменного шнура [199, 200, 202]. Вряд ли этот эффект связан с тороидальностью, так как в несколько иных условиях он наблюдается и на прямом разряде [203]. Скорее всего, генерация обратного поля связана с конечностью длины перемешивания при турбулентной конвекции плазмы [201], однако количественная теория этого эффекта до сих пор не построена.

Исключительный интерес представляет еще один турбулентный эффект, также обнаруженный вначале на «Зете» [194], а затем на установке более скромных размеров [197]. Мы имеем в виду ступенчатый обрыв тока на последней стадии разряда. Как и на стеллараторе, ступенек на токе может быть несколько, но в отличие от стелларатора в данном случае обрыв происходит при наличии продольного электрического поля, которое могло бы поддерживать разрядный ток. Казалось бы, и в данном случае такой обрыв можно связать с возбуждением высокочастотных колебаний за счет убегающих электронов, относительное число которых заметно возрастает к концу разряда. (Такие колебания были экспериментально обнаружены на прямом разряде в работе [199].) Однако то обстоятельство, что при ступенчатом обрыве тока происходит трансформация магнитной энергии в кинетическую энергию электронов, причем каждому электрону передается до 1 кэВ энергии, говорит скорее в пользу электрон-ионного коллективного процесса типа аномального сопротивления. Теория этого явления в настоящее время отсутствует.

К кругу рассматриваемых работ относятся исследования на левитроне [205], представляющем собой тороидальную установку с умеренным продольным магнитным полем и дополнительным кольцом с током, которое должно стабилизировать гидромагнитные неустойчивости плазмы. На левитроне также наблюдаются колебания и связанная с ними аномальная утечка плазмы. Эти колебания имеют, по-видимому, диссипативную природу, они связаны с конечной проводимостью плазмы.

Магнитные ловушки

Турбулентная диффузия плазмы в ловушке с магнитными пробками была обнаружена и детально исследована М. С. Иоффе и др. [178, 206—209]. В этих экспериментах горячая плазма с энергией ионов порядка 1 кэВ и плотностью частиц порядка 10^9 см^{-3} создавалась путем ускорения ионов в радиальном электрическом поле, которое импульсно прикладывалось между стенками камеры и холодным плазменным шнуром, расположенным вдоль оси камеры. Как показывает эксперимент, после приложения импульса высокого напряжения ловушка заполняется горячей плазмой в течение $10\text{—}20 \text{ мксек}$. Детального исследования движения плазмы в стадии нагрева произведено не было. Можно думать, что заполнение камеры плазмой и нагрев ионов в основном происходит за счет центробежной неустойчивости вращаю-

щейся плазмы. После выключения высокого напряжения вращение плазмы прекращается, и начинается более спокойная стадия турбулентной конвекции за счет желобковой неустойчивости. Наличие такой конвекции проявляется прежде всего в аномально быстрой утечке плазмы из ловушки за время порядка 10^{-4} сек. Зондовые исследования показали, что плазма гибнет в основном на боковых стенках ловушки, причем выброс плазмы на боковую стенку совершается целыми трубками, расположенными вдоль силовых линий магнитного поля.

Все эти факты свидетельствуют в пользу желобковой неустойчивости как механизма развития конвекции. В работе автора [15] была построена полуколичественная теория такой конвекции, основанная на представлении длины перемешивания. Дальнейшие исследования зависимости характерного масштаба и амплитуды турбулентных пульсаций от расстояния до стенки и зависимости времени жизни от плотности плазмы [207] дали дополнительное подтверждение правильности теоретической модели. Окончательное доказательство того, что за утечку плазмы ответственна желобковая неустойчивость, было получено, когда с помощью дополнительных проводников с током, расположенных на периферии ловушки, удалось стабилизировать плазму и получить длительное удержание [209].

Интересно отметить, что результаты экспериментального исследования турбулентной конвекции хорошо описываются на основе гидродинамических представлений без учета эффекта конечного ларморовского радиуса ионов, т. е. бесстолкновительной вязкости. Между тем в условиях экспериментов [206—207] этот эффект должен был бы играть заметную роль. Возможно, что он подавляется сильной неоднородностью плазмы, связанной с использованным механизмом турбулентного нагрева (ср. с гл. IV, § 4). Не исключено, что именно особенности способа создания плазмы определяют всю последующую картину ее движения. Дело в том, что в экспериментах М. С. Иоффе и др. в стадии создания плазмы происходят значительные колебания электрического поля, которые приводят к выбросу на торцы тех ионов, которые отражаются от пробок в непосредственной близости от поверхности с максимальным магнитным полем H_m . Вследствие этого граница плазмы несколько отодвигается в глубь ловушки, где магнитное поле $H = H_s < H_m$. При небольших колебаниях потенциала плазменных трубок, а именно при $\varphi < \frac{T_i}{e} \left(\frac{H_m}{H_s} - 1 \right)$, все ионы продолжают удерживаться нарастающим магнитным полем в пробках, поэтому ничто не препятствует развитию желобковой неустойчивости. При других, более спокойных, методах нагрева плазмы вполне возможна ситуация, когда плазма заполняет всю ловушку вплоть до середины пробок, где магнитное поле достигает максимального значения $H = H_m$. В этом случае даже небольшие колебания потенциала приводили бы к заметным токам на торцы

за счет выброса частиц, испытывающих отражения непосредственно вблизи области максимального магнитного поля. Эти токи приводят к стабилизации плазмы. Если горячая плазма окружена холодной, то эффект стабилизации усиливается. Вероятно, именно этим эффектом объясняется устойчивое удержание плазмы в экспериментах по адиабатическому сжатию плазмы в ловушке с магнитными пробками [210—212].

Среди других коллективных эффектов, наблюдаемых в ловушках с магнитными пробками, можно упомянуть возбуждение колебаний при очень низкой плотности, когда только начинается переход к квазинейтральной плазме [213—214], и возбуждение ионных циклотронных колебаний за счет анизотропии их функции распределения [215, 216]. Полная теория этих явлений с учетом нелинейных эффектов пока не разработана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, можно сказать, что за последние годы достигнут значительный прогресс в развитии теории турбулентности плазмы в широком смысле этого слова и в понимании природы коллективных процессов, развивающихся в плазме в лабораторных условиях. Теоретически рассмотрен целый ряд задач по развитию и взаимодействию колебаний в плазме. Наряду с изучением слабой турбулентности, которая удовлетворительно описывается кинетическим уравнением для волн, развиваются методы описания сильной турбулентности, к числу которых относится, в частности, метод слабой связи. Ряд конкретных задач удастся рассмотреть на полуэмпирической основе путем введения феноменологического понятия длины перемешивания. В настоящее время нет существенных трудностей принципиального характера, которые могли бы затормозить дальнейшее развитие теории турбулентности плазмы.

Хуже обстоит дело с объяснением экспериментально наблюдаемых турбулентных эффектов. Лишь для небольшого числа экспериментов удается развить соответствующую теорию и достигнуть удовлетворительного их описания. В большинстве же случаев не только не построена теория наблюдаемых эффектов, но часто отсутствуют даже качественные представления о природе наблюдаемых явлений. Отчасти такое положение дел объясняется расплывчатостью и неопределенностью самих экспериментальных данных, но в значительной мере оно связано с недостаточным уровнем развития теоретических представлений и количественных методов описания коллективных процессов. Следует надеяться, что последующие годы бурного развития теории турбулентных процессов в плазме совместно с детальными и тщательно проводимыми экспериментами позволят дать полную картину турбулентности плазмы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Langmuir I. Phys. Rev., **26**, 585 (1925); Z. Phys., **46**, 271 (1927).
2. Капцов Н. А. Электрические явления в газах и вакууме. М., Гостехиздат, 1947, стр. 490.
3. Merill H. J., Webb H. W. Phys. Rev., **55**, 1191 (1939).
4. Looney D. H., Brown S. C. Phys. Rev., **93**, 965 (1954).
5. Bohm D., Burhop E. et al. The Characteristics of Electr. Discharges in Magn. Fields, Guthrie A., Wakerling R. K., New York, 1949.
6. Sturrock P. A. Proc. Roy. Soc., **A242**, 277 (1957).
7. Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 123 (1961).
8. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Ядерный синтез, **1**, 82 (1961); Дополнение: 1962, ч. 2, стр. 465.
9. Drummond W. E., Pines D. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 3, 1049.
10. Samas M., Kantrowitz A. R., Litvak M. M., Patrick R. M., Petschek H. E. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 2, 423.
11. Пайерлс Р. Е. Квантовая теория твердых тел. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
12. Галеев А. А., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 592 (1963).
13. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 2234 (1962).
14. Карпман В. И. «Докл. АН СССР», **152**, 587 (1963).
15. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 328 (1961).
16. Кадомцев Б. Б. «Ж. техн. физ.», **31**, 1273 (1961).
17. Kraichnan R. H. J. Fluid Mech., **5**, 497 (1959).
18. Церковников Ю. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **32**, 67 (1957).
19. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», **138**, 581 (1961).
20. Rosenbluth M. N., Rostoker N., Krall N. A. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 1, 143.
21. Михайловский А. В. См. настоящее изд., вып. 3, стр. 141.
22. Тимофеев А. В. «Ж. техн. физ.», **33**, 909 (1963).
23. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 763 (1963); «Ж. техн. физ.», **34**, 248 (1964).
24. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
25. Сорокин В. С. «Прикл. мат. и мех.», **18**, вып. 1 (1954).
26. Stuart I. I. J. Fluid Mech., **5**, 209 (1959).
27. Тимофеев А. В. «Ж. техн. физ.», **33**, 776 (1963).
28. Bostick W. H., Levine M. A. Phys. Rev., **97**, 13 (1955).
29. Голант В. Е., Данилов О. Б., Жилинский А. П. «Ж. техн. физ.», **33**, 1043 (1963).
30. Lehnert V. Proc. of the 2nd Intern. Conf. on PUAЕ, **32**, United Nations. Geneva (1958), 349.
31. Hof F. C., Lehnert V. Phys. Fluids, **3**, 600 (1960).
32. Kadomtsev V. B., Nedospasov A. V. J. Nucl. Energy, P. C., **1**, 230 (1960).
33. Allen T. K., Paulikas G. A., Pyle R. V. Phys. Rev. Letters, **5**, 409 (1960).
34. Paulikas G. A., Pyle R. V. Phys. Fluids, **5**, 348 (1962).
35. Ловецкий Е. Е. и др. «Докл. АН СССР», **149**, 1052 (1963).
36. Weinberg S. Phys. Rev., **126**, 1899 (1962).
37. Vazer J., Hurley J. J. Geophys. Res., **68**, 147 (1963).
38. Sturrock P. A. Phys. Rev., **112**, 1488 (1959).
39. Sturrock P. A. Phys. Rev., **117**, 1460 (1960).
40. Файнберг Я. Б., Курилко В. И., Шапиро В. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **31**, вып. 6 (1961).
41. Половин Р. В. «Ж. техн. физ.», **31**, 1220 (1961).
42. Feix M. Nouvo Cim., **27**, 1130 (1963).

43. Teylor J. B. Phys. Rev. Letters, **6**, 262 (1961).
44. В е д е н о в А. А. «Атомная энергия», **13**, № 5 (1962).
45. А х и е з е р А. И., А л е к с и н В. Ф., Б а р ь я х т а р В. Г., П е л е т м и н с к и й С. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 552 (1962).
46. А х и е з е р А. И., Б а р ь я х т а р В. Г., П е л е т м и н с к и й С. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1743 (1962).
47. П е т в и а ш в и л и В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 1993 (1963).
48. О р а е в с к и й В. Н., С а г д е е в Р. З. «Ж. техн. физ.», **32**, 1291 (1962).
49. О р а е в с к и й В. Н. «Ж. техн. физ.», **33**, 251 (1963).
50. Г а л е е в А. А., О р а е в с к и й В. Н. «Докл. АН СССР», **147**, 71 (1962).
51. С и л и н В. П. «Прикл. матем. и техн. физ.», № 1, 33 (1964).
52. Balescu S. Phys. Fluids, **3**, 52 (1960).
53. L e p a r d A. Ann. of phys., **3**, 90 (1960).
54. T h o m s o n W. B., H u b b a r d I. Rev. Mod. Phys., **32**, 714 (1960).
55. R o s t o k e r N., R o s e n b l u t h M. N. Phys. Fluids, **3**, 1 (1960).
56. R o s t o k e r N. Nucl. Fusion, **1**, 101 (1961).
57. К л и м о н т о в и ч Ю. Л. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1405 (1959); «Докл. АН СССР», **144**, 1022 (1962); «Прикл. матем. и мех.», № 1, 14 (1963).
58. К л и м о н т о в и ч Ю. Л., С и л и н В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **42**, 286 (1962).
59. P i n e s D., S c h r i f f e s J. R. Phys. Rev., **25**, 804 (1962).
60. W y l d H. W. Jr., P i n e s D. Phys. Rev., **127**, 1851 (1962).
61. Д а в ы д о в Б. И. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 77.
62. С и л и н В. П., Г о р б у н о в Л. М. «Докл. АН СССР», **145**, 1265 (1962).
63. W i l d H. W. Ann. Phys., **14**, 143 (1961).
64. B a t c h e l o r G. K. J. Fluid. Mech., **5**, No. 1 (1959).
65. Н о в и к о в Е. А. «Докл. АН СССР», **139**, 331 (1961).
66. P r a n d t l L. Z. angew. Math. und Mech., **5**, 136 (1925); **22**, No. 5 (1942).
67. T o l l m i e n W. Z. angew. Math. und Mech., **6**, 468 (1926).
68. А б р а м о в и ч Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
69. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
70. К о л м о г о р о в А. Н. «Докл. АН СССР», **30**, № 4 (1941).
71. О б у х о в А. М. «Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз.», № 5 (1941).
72. H a i s e n b e r g W. Z. Phys., **124**, 628 (1948).
73. Ф и л л и п с О. М. В сб.: «Ветровые волны». М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 219.
74. Ф и л л и п с О. М., К а т ц Е. Дж. Там же, стр. 238.
75. П е т в и а ш в и л и В. И. «Докл. АН СССР», **153**, 1295 (1963).
76. В е д е н о в А. А. См. настоящее изд., вып. 3, стр. 203.
77. С и л и н В. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 816 (1963).
78. Г о р д е е в Г. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **27**, 19, 24 (1954).
79. W e g n s t e i n J. V., F r i e m a n E. A., K u l s r u d R. M., R o s e n b l u t h M. N. Phys. Fluids, **3**, 136 (1960).
80. J a c k s o n E. A. Phys. Fluids, **3**, 786 (1960).
81. D r u m m o n d W. E., R o s e n b l u t h M. N. Phys. Fluids, **5**, 1507 (1962).
82. П е т в и а ш в и л и В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 1467 (1963).
83. К а р п м а н В. И. «Прикл. матем. и техн. физ.», № 6, 34 (1963).
84. Б р а г и н с к и й С. И., К а з а н ц е в А. П. В сб.: «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 24.
85. С т е п а н о в К. Н. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 1292 (1958).
86. К а д о м ц е в Б. Б., Т и м о ф е е в А. В. «Докл. АН СССР», **146**, 581 (1962).
87. М и х а и л о в с к и й А. Б., Р у д а к о в Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 912 (1963).
88. Г а л е е в А. А., О р а е в с к и й В. Н., С а г д е е в Р. З. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 903 (1963).
89. М и х а и л о в с к а я Л. В., М и х а и л о в с к и й А. Б. «Ж. техн. физ.», **33**, 1200 (1963).

90. Михайловский А. Б. Ядерный синтез, **4**, вып. 2 (1964).
91. Галеев А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 1920 (1963).
92. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. Ядерный синтез, **3**, вып. 1—2, 28, 113 (1963).
93. Тимофеев А. В. «Докл. АН СССР», **152**, 84 (1963).
94. Kadomtsev V. V. J. Nucl. Energy, P. C., **5**, 31 (1963).
95. Ораевский В. Н. «Прикл. матем. и техн. физ.», № 6, 34 (1963).
96. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Ораевский В. И. «Прикл. матем. и техн. физ.», № 6, 29 (1963).
97. Михайловская Л. В., Михайловский А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 1566 (1963).
98. Spitzer L. Jr. Phys. Fluids, **1**, 253 (1958).
99. Михайловский А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 509 (1962).
100. Михайловский А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 1552 (1963).
101. Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **44**, 919 (1963).
102. Rosenbluth M. N., Gale N. A. Phys. Fluids, **5**, 1432 (1962).
103. Брагинский С. И. См. настоящее изд., вып. 1, стр. 183.
104. Roberts K. V., Theylor J. V. Phys. Rev. Letters, **8**, 197 (1962).
105. Рудаков Л. И., Ядерный синтез, **2**, 107 (1962).
106. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Атомная энергия», **15**, 451 (1963).
107. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1688 (1962).
108. Арцимович Л. Л., Недоспасов А. В. «Докл. АН СССР», **145**, 1022 (1962).
109. Кадомцев Б. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 1231 (1963).
110. Галеев А. А., Рудаков Л. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 647 (1963).
111. Yoshikawa S., Rose D. J. Phys. Fluids, **5**, 334 (1962).
112. Simon A. Phys. Rev., **98**, 317 (1955).
113. Simon A. Proc. 2nd UN Conf. PUAE, **31**, United Nations, Geneva (1958) 315.
114. Hoh F. C. Rev. Mod. Phys., **34**, 267 (1962).
115. Голант В. Е. «Усп. физ. наук», **79**, 377 (1963).
116. Rokhlin G. N. J. Phys. USSR, **1**, 347 (1939).
117. Cummings C. S., Tonks L. Phys. Rev., **59**, 517 (1941).
118. Reichrudel E., Spivak S. J. Phys. USSR, **4**, 211 (1941).
119. Bickerton R. I., Engel A. Proc. Phys. Soc., **69B**, 468 (1956).
120. Недоспасов А. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **34**, 1338 (1958).
121. Васильева И. А., Грановский В. Л. «Радиотехника и электроника», **4**, 2051 (1959).
122. Hoh F. C. Arkiv f. Fusik, **18**, 433 (1960).
123. Ekman C., Hoh F. C., Lehnert V. Phys. Fluids, **3**, 833 (1960).
124. Зайцев А. А., Васильева М. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1639 (1960).
125. Gierke G. V., Wöhler K. M. Nucl. Fusion, Suppl., 1962, P. 1, 47.
126. Wöhler K. Z. Naturforsch., **17a**, 937 (1962).
127. Вдовин В. Л., Недоспасов А. В. «Ж. техн. физ.», **32**, 817 (1962).
128. Johnson R. R., Herde D. A. Phys. Fluids, **5**, 988 (1962).
129. Vonnal I. F., Brifford G., Manus C. Comt. Rend., **250**, 2859 (1960).
130. Vonnal I. F., Brifford G., Manus C. Phys. Rev. Letters, **6**, 665 (1961).
131. Vonnal I. F., Brifford G., Manus C., Gregoire M. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 3, 955.
132. Рейхрудель Э. М., Смирницкая Г. В. Изв. ВУЗов, Радиофизика, **1**, 36 (1958).
133. Chen F. F., Cooper A. W. Phys. Rev. Letters, **9**, 333 (1962).
134. Simon A. Phys. Fluids, **6**, 382 (1963).
135. Hoh F. C. Phys. Fluids, **6**, 1184 (1963).

136. Geller R. Phys. Rev. Letters, **9**, 248 (1962).
137. Neidigh R. V., Weaver C. H. Proc. 2nd UN Conf. PUAЕ, 31, United Nations, Geneva (1958), 315.
138. Жаринов А. В. «Атомная энергия», **7**, 215 (1959).
139. Жаринов А. В. «Атомная энергия», **10**, 368 (1962).
140. Елизаров Л. И., Жаринов А. В. «Ядерный синтез». Дополнение 1962, ч. 2, стр. 699.
141. Voeschoten F., Schwirzke F. Nucl. Fusion, **2**, 54 (1962).
142. Guest G., Simon A. Phys. Fluids, **5**, 121 (1962).
143. Сыргий А. С., Грановский В. Л. «Радиотехника и электроника», **4**, 1854 (1959).
144. Сыргий А. С., Грановский В. Л. «Радиотехника и электроника», **5**, 1522 (1960).
145. Голубев В. С. «Радиотехника и электроника», **7**, 153 (1962).
146. Голант В. Е., Жилинский А. П. «Ж. техн. физ.», **30**, 745 (1960).
147. Голант В. Е., Жилинский А. П. «Ж. техн. физ.», **32**, 127 (1962).
148. Гужова С. К., Сыргий А. С. «Радиотехника и электроника», **5**, 1516 (1960).
149. Алиханов С. Г., Захаров В. Е., Харсанов Г. А. «Атомная энергия», **14**, 137 (1963).
150. Ellis R. A., Goldberg L. P., Gorman J. G. Phys. Fluids, **3**, 468 (1960).
151. Stodiek W., Ellis R. A., Gorman J. G. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 1, 193.
152. Spitzer L. Jr. Phys. Fluids, **3**, 659 (1960).
153. Motley R. W. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 1, 199.
154. D'Angelo N., Rinn N. Phys. Fluids, **4**, 275, 1303 (1961).
155. Motley R. W., D'Angelo N. Phys. Fluids, **6**, 296 (1963).
156. D'Angelo N., Motley R. W. Phys. Fluids, **6**, 422 (1963).
157. D'Angelo N. Nucl. Fusion, **3**, 147 (1963).
158. Голант В. Е., Жилинский А. П. «Ж. техн. физ.», **32**, 1313 (1962).
159. Випетан О. Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
160. Dawson J. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 3, 1033.
161. Шапиров В. Д. «Ж. техн. физ.», **31**, 522 (1961).
162. Шапиров В. Д. «Ж. техн. физ.», **44**, 613 (1963).
163. Бом Д., Гросс Е. Р. «Пробл. совр. физ.», № 11, 3 (1952).
164. Gabor D. Trans. IRE, AP-4, 526 (1956).
165. Von Gierke G., Ott W., Schwirzke F. Proc. 5th Intern. Conf. on Ioniz. Phen in Gases, Munich, **2**, 1412 (1961).
166. Габович М. Д. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 1025 (1959).
167. Харченко И. Ф. и др. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 3, стр. 1101.
168. Березин А. К. и др. «Атомная энергия», **14**, 249 (1963).
169. Alexeff I., Neidigh R. V. Proc. 5th Intern. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases. Munich, **2**, 1523 (1961); Phys. Rev., **129**, 516 (1963).
170. Alexeff I., Neidigh R. V., Peid W. F., Shipleу E. D. Phys. Rev. Letters, **10**, 273 (1963).
171. Недоспасов А. В. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 3, стр. 1228.
172. Crowford F. W. Proc. 5th Intern. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases, Munich, **1**, 563 (1961).
173. Consoli T., Le Gardeur R., Slama L., Compt. rend. **253**, 1923 (1961).
174. Thomassen K. I. Phys. Rev. Letters, **10**, 80 (1963).
175. Adlam J. H., Holms L. S. Nucl. Fusion, **3**, 62 (1963).
176. Плутто А. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 1589 (1960).
177. Ard W. B., Vecker M. C., Danti R. A., Easen H. C., England A. C., Kerr R. J. Phys. Rev., Letters, **10**, 87 (1963).
178. Иоффе М. С. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **40**, 40 (1961).
179. Незлин М. В. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 1015 (1961).
- 179а. Незлин М. В., Солнцев А. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 840 (1963).

180. Федорченко В. Д. и др. «Ж. техн. физ.», **32**, 958 (1962).
181. Pieterse J. R. J. Appl. Phys., **15**, 721 (1944).
182. Волосов В. И. «Ж. техн. физ.», **32**, 566 (1962).
183. Завойский Е. К. «Атомная энергия», **14**, 57 (1963).
184. Бабыкин М. В., Завойский Е. К., Рудаков Л. И., Скорупин В. А. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 3, стр. 1073.
185. Бабыкин М. В. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 1976 (1962).
186. Бабыкин М. В. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **43**, 411, 1547 (1962); **45**, 605 (1963).
187. Бабыкин М. В. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 405 (1963).
188. Yoshikawa S., Sinclair R. M., Kessler S. O., Harries W. L. Phys. Fluids, **6**, 932, 937 (1963).
189. Yoshikawa S., Harries W. L., Sinclair R. M. Phys. Fluids, **6**, 1506 (1963).
190. Арцимович Л. А., Карташов К. Б. «Докл. АН СССР», **146**, 1305 (1962).
191. Dreicer H., Mjolsness R. Phys. Fluids, **5**, 1531 (1962).
192. Butt E. P. et al. Proc. 2nd U. N. Conf. PUAE, **32**, United Nations, Geneva (1958), 42.
193. Jones V. B., Wilson R. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 3, 889.
194. Burton W. M., Butt E. P. et al. Nucl. Fusion, Suppl. 1962, P. 3, 903.
195. Rusbridge M. G., Lees D. J., Saunders P. A. H. Ibid, 895.
196. Suddam B. Proc. 2nd U. N. Conf. PUAE, **31**, United Nations, Geneva (1958), 157.
197. Бабичев А. П., Карчевский А. И., Муромкин Ю. А. «Ж. тех. физ.», **33**, 1400 (1963).
198. Lees D. J., Rusbridge M. G. Phys. Fluids, **4**, 633 (1961).
199. Lees D. J., Rusbridge M. G. Proc. 4th Intern. Conf. Ioniz. Phenoma in Gases, Uppsala (1959), **2**, North Holland Publishing Co. (1960), 954.
200. Бабичев А. П. и др. Ядерный синтез, **2**, 84 (1962); Дополнение 1962, ч. 2, стр. 635.
201. Кадомцев Б. Б. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 3, стр. 969.
202. Афросимов В. В. и др. «Ж. техн. физ.», **30**, 1383 (1960).
203. Комелков V. S. et al. Proc. 5th Conf. Ioniz. Phen. in Gases, Munich (1961), **2**, 2190.
204. Супруненко В. А. и др. «Атомная энергия», **14**, 349 (1963).
205. Birdsall D. H., Colgate S. A. et al. Nucl. Fusion, Suppl., 1962, P. 3, 955.
206. Иоффе М. С. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **39**, 1602 (1960).
207. Иоффе М. С., Юшманов Е. Е. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 1, стр. 177.
208. Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 3, стр. 1045.
209. Байбородов Ю. Т. и др. «Атомная энергия», **14**, 443 (1963).
210. Post R. F. Proc. 2nd U. N. Conf. PUAE, **32**, United Nations, Geneva (1958), 245.
211. Perkins W. A., Post R. F. Phys. Fluids, **6**, 1537 (1963).
212. Post R. F., Ellis R. E., Ford F. C., Rosenbluth M. N. Phys. Rev. Letters, **4**, 166 (1960).
213. Бревнов Н. Н., Романовский М. К., Томащук Ю. Ф. Ядерный синтез. Дополнение 1962, ч. 1, стр. 289.
214. Datt C. S., Foote J. H., Futch A. H., Post R. F. Phys. Rev Letters, **10**, 323 (1963).
215. Пистунович В. И. «Атомная энергия», **14**, 72 (1963).
216. Kucherikaeв Yu. A., Рапов D. A. J. Nucl. Energy, P. C., **5**, 145 (1963).

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы. Т. Ф. Волков	3
<i>Литература</i>	19
Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. Р. З. Саг-дева	20
§ 1. Коллективные процессы в плазме	—
§ 2. Нелинейные колебания плазмы	34
§ 3. Ударные волны в сильно разреженной плазме	58
<i>Литература</i>	80
Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме. Д. В. Сивухин	81
§ 1. Трудности теории кулоновских столкновений	—
§ 2. Столкновение двух частиц	82
§ 3. Средние скорости изменения энергии и импульса пробной частицы в плазме. Электростатическая аналогия	84
§ 4. Дебаевское экранирование и дебаевский радиус	88
§ 5. Вычисление кулоновского логарифма	94
§ 6. Обмен энергиями между пробной частицей и плазмой. Общие формулы	100
§ 7. Критическая скорость и максимальная передача энергии	103
§ 8. Относительная роль иоинной и электронной компонент в обмене энергией плазмы с моноэнергетическим пучком невзаимодействующих частиц	111
§ 9. Выравнивание температур в двухкомпонентной плазме	115
§ 10. Изменение импульса пробной частицы, движущейся в плазме	122
§ 11. Пробег быстрого иона в плазме	124
§ 12. Релаксационные времена и длины свободного пробега	126
§ 13. Явление убегаия электронов	131
§ 14. Уравнение Фоккера — Планка	137
§ 15. Связь тензора диффузии и коэффициента динамического трения с функцией распределения. Кинетическое уравнение в форме Ландау	144
§ 16. Тензор диффузии и коэффициент динамического трения при изотропном распределении полевых частиц в пространстве импульсов	149
§ 17. Применение кинетического уравнения к задаче об обмене энергиями между различными компонентами плазмы	157
§ 18. Выход ионов из магнитной ловушки с магнитными пробками вследствие столкновений	159
§ 19. О природе и устранении расходимостей в теории парных столкновений	171
<i>Литература</i>	187

Турбулентность плазмы. Б. Б. Кадомцев	188
Введение	—
I. Квазилинейное приближение	192
§ 1. Неустойчивость и турбулентность	—
§ 2. Ламинарная конвекция плазмы	194
Конвекция слабо ионизованной плазмы в неоднородном магнитном поле	—
Конвекция плазмы положительного столба в магнитном поле	198
§ 3. Квазилинейное приближение в кинетике	202
Электронный пучок в плазме	—
Волны в плазме	205
Абсолютная и сносовая неустойчивость	211
Резонансное и адиабатическое взаимодействие волн с частицами	212
Усиленная диффузия плазмы	216
II. Взаимодействие волн	218
§ 1. Кинетическое уравнение для волн	—
Вывод кинетического уравнения для волн	—
Взаимодействие ленгмюровских волн с ионно-звуковыми	223
Взаимодействие альфвеновских волн с магнитозвуковыми	227
§ 2. Взаимодействие волн в плазме с учетом теплового движения частиц	229
Кинетическое уравнение для волн с учетом теплового движения частиц	230
Учет тепловых флуктуаций	233
Взаимодействие частиц с волнами	235
III. Методы рассмотрения сильной турбулентности	237
§ 1. Приближение слабой связи	—
Уравнения для волн при слабой связи	—
Слабая связь в кинетике	240
Резонансное и адиабатическое взаимодействие волн	243
Улучшенное приближение слабой связи	245
§ 2. Феноменологический подход к описанию сильной турбулентности	249
Турбулентная струя	—
Закон Колмогорова—Обухова	251
Ветровые волны	253
IV. Турбулентные процессы в плазме	254
§ 1. Нелинейное затухание ленгмюровских волн	—
§ 2. Возбуждение ионных колебаний электронным током	258
Возбуждение ионно-звуковых волн	—
Раскачка циклотронных колебаний электронным током	264
Раскачка магнитного звука	266
§ 3. Дрейфовая неустойчивость плазмы	269
Дрейфовые волны в неоднородной плазме	270
Дрейфовая неустойчивость при $k_{\perp} Q_i \ll 1$	275
Дрейфовая неустойчивость при $k_{\perp} Q_i \gtrsim 1$	277
Эффект стабилизации конвективной (желобковой) неустойчивости	281
Ионно-звуковая неустойчивость неоднородной плазмы	285
Циклотронная неустойчивость неоднородной плазмы	287
Дрейфово-диссипативная неустойчивость	288
Переход к бесстолкновительной диссипации	293
Токово-конвективная (спиральная) неустойчивость	294
Нелинейные дрейфовые течения	295
§ 4. Турбулентная диффузия плазмы	299
Разреженная плазма в отсутствии продольного тока	301
Разреженная плазма с продольным током	303
Диффузия сильно разреженной плазмы	307
Диффузия плотной плазмы	308
Турбулентный положительный столб	311

Турбулентная диффузия разреженной плазмы при $\beta \gg \frac{m_e}{m_i}$	313
Электропроводность турбулентной плазмы	314
§ 5. Турбулентная плазма в экспериментальных условиях	318
Аномальная диффузия	—
Турбулентный нагрев	324
Торондальные разряды	329
Магнитные ловушки	332
Заключение	334
<i>Литература</i>	335

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В Ы П У С К 4

Тем. план 1964 г. № 5

Редактор *Г. М. Пчелинцева*

Переплет художника *Ю. К. Мосеева*

Техн. редактор *Е. И. Мазель*

Корректор *Л. И. Череватенко*

Сдано в набор 14/III 1964 г.

Подписано в печать 4/VII 1964 г.

Бумага 60×90/16

Физ. печ. л. 21,5

Уч.-изд. л. 22,62

Заказ изд. 1183

Тираж 4500 экз.

Т-09126

Цена 1 р. 23 к.

Заказ тип. 1788.

Атомиздат, Москва, Центр, ул. Кирова, 18.

Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Ленинград, ул. Моисеенко, 10

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

АТОМИЗДАТ·1964